

39678

ELEKTROMAGNETİK DALGALARIN ÇOK PARÇALI

İNCE DİELEKTRİK TABAKALARDAN SAÇILMASI

DOKTORA TEZİ

Y. Müh. Ali ALKUMRU

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 6 Eylül 1994

Tezin Savunulduğu Tarih : 3 Kasım 1994

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Mithat İDEMEN

Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Alinur BÜYÜKAKSOY

: Prof. Dr. Gökhan UZGÖREN

ÖNSÖZ

Bu çalışma sırasında kıymetli yardımlarını benden esirgemeyen değerli Hocalarım Sayın Prof. Dr. Mithat İdemen'e ve Sayın Prof. Dr. Alinur Büyükaksoy'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Eylül 1994

Ali Alkumru



İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	v
SUMMARY.....	vi
BÖLÜM 1. GİRİŞ.....	1
1.1. Konu ve Önemi.....	1
1.2. Tezin Amacı ve İçeriği.....	3
1.3. Tezde Kullanılan Notasyon.....	6
BÖLÜM 2. BİR İNCE DİELEKTRİK TABAKANIN MODELLENMESİ.....	7
2.1. Sınır Koşulları.....	7
2.2. İki Parçalı Düzleme İlişkin Ayrıt Koşulları.....	10
BÖLÜM 3. İKİ PARÇALI DİELEKTRİK TABAKADAN SAÇILMA.....	13
3.1. Problemin Formülasyonu.....	13
3.2. Matris Wiener-Hopf Probleminin Çözümü.....	19
3.2.1. Daniele-Khrapkov Yöntemi.....	19
3.2.2. $\tilde{G}_0(\alpha)$ nın Faktörizasyonu.....	21
3.2.3. (3.14a) nın Çözümü.....	23
3.3. Saçılan Alanın Analizi.....	25
3.3.1. I Bölgesinde Yansıyan ve Kırınan Terimler.....	26
3.3.2. II Bölgesinde Yansıyan ve Kırınan Terimler.....	28
3.3.3. III Bölgesinde İletilen ve Kırınan Terimler.....	29
3.3.4. IV Bölgesinde İletilen ve Kırınan Terimler.....	30
BÖLÜM 4. ÜÇ PARÇALI DİELEKTRİK TABAKADAN KIRINIM VE YÜKSEK MERTEBEDEN TERİMLER.....	31
4.1. Problemin Formülasyonu.....	31
4.2. Q Ayrıtında Oluşan İkinci Mertebeden Kırınan Alan.....	32

4.2.1. $\tilde{G}_1(\alpha)$ nın Faktörizasyonu.	36
4.2.2. (4.8a) nın Çözümü.	38
4.2.3. (4.1b) İntegralinin Asimptotik Değerlendirilmesi	41
4.3. O da Oluşan İkinci Mertebeden Terimler	43
BÖLÜM 5. ÖRNEK UYGULAMALAR.	44
BÖLÜM 6. SONUÇLAR VE GELECEK ÇALIŞMALARA YÖNELİK ÖNERİLER	59
KAYNAKLAR	61
ÖZGEÇMİŞ.	63



ÖZET

Bu çalışmada, sonsuz geniş homojen bir uzay içerisinde bulunan iki ve üç parçalı bir dielektrik tabakadan elektromagnetik dalgaların saçılımı ayrıntılı olarak incelenmiştir. Göz önüne alınan çok parçalı dielektrik tabaka yaklaşık sınır koşulları yardımıyla modellenmiştir. Bu model, iki parçalı hale ilişkin karma sınır değer problemini bir matrisel Wiener-Hopf denklemine indirgemektedir. Sözü edilen Wiener-Hopf sistemi, çekirdeği Daniele-Khrapkov yöntemi ile faktörize edilerek kesin olarak çözülmüştür. Bulunan bu çözüme dayanılarak alanın yüksek frekanslardaki asimptotik analizi yapılmıştır. İki parçalı probleme ilişkin çözümün integral ifadesi esas alınarak, Spektral İterasyon Tekniği (SİT) ile, üç parçalı problemin asimptotik çözümü elde edilmiştir.

Probleme ilişkin değişik parametrelerin saçılan alan üzerindeki etkisini açığa çıkarmak amacıyla bir takım sayısal uygulamalar da yapılmıştır.

SUMMARY

MULTIPLE DIFFRACTION OF A PLANE WAVE BY A MULTI-PART THIN DIELECTRIC SLAB

1. Introduction

The present work deals with the multiple diffraction of a plane electromagnetic wave by a multi-part thin dielectric slab. The aim is to reveal the mechanism of the excitation of the second order terms between two edges. After simulating the dielectric slab by a material sheet with appropriate boundary conditions, the problem is reduced to the solution of a "matrix Wiener-Hopf equation" which can be treated by using the Daniele-Khrapkov method. By considering this result in the three-part dielectric plane problem one gets the terms up to the second order.

2. Formulation of The Two-Part Dielectric Plane Problem

The basic geometrical configuration considered in the present paper is shown in figure-1a. The problem consists in studying the plane wave diffraction by the junction between the thin dielectric slabs. In order to this end one considers an equivalent two-part material plane illuminated by a linearly polarized plane wave $u^i(x, y)$ (see figure-1b), namely:

$$u^i(x, y) = e^{-ik(x \cos \phi_0 + y \sin \phi_0)} \quad , \quad 0 \leq \phi_0 \leq \pi. \quad (1)$$

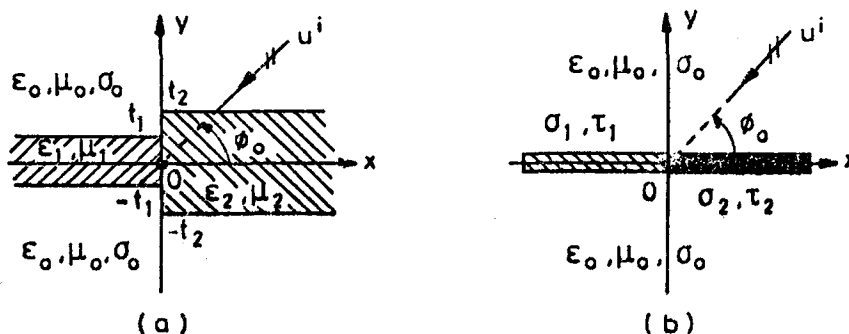


Figure-1 a) Two-part dielectric slab b) Two-part material plane

In the case of *TM* illumination $u^i(x, y)$ signifies the Oz -component of the electric field while in the case of *TE* illumination it is the Oz -component of the magnetic field. Then the total field $u^T(x, y)$ satisfies the reduced wave equation

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k^2 \right) u^T(x, y) = 0 \quad , \quad (y \neq 0), \quad (2)$$

where $k = k_r + ik_i$ is the free space wave-number which is temporarily allowed to have a small imaginary part for convenience of analysis. This equation is subject to the following boundary conditions which involve the constitutive parameters of the slabs shown in figure-1a:

$$u^T(x, +0) - \sigma_1 u^T(x, -0) = 0 \quad , \quad x < 0 \quad (3.a)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} u^T(x, +0) - \tau_1 \frac{\partial}{\partial y} u^T(x, -0) = 0 \quad , \quad x < 0 \quad (3.b)$$

$$u^T(x, +0) - \sigma_2 u^T(x, -0) = 0 \quad , \quad x > 0 \quad (3.c)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} u^T(x, +0) - \tau_2 \frac{\partial}{\partial y} u^T(x, -0) = 0 \quad , \quad x > 0 \quad (3.d)$$

where

$$\sigma_j = 1 - 2i\mathcal{K}_j t_j / N_j \quad , \quad j = 1, 2 \quad (4.a)$$

$$\tau_j = 1 - 2i\mathcal{K}_j t_j N_j \quad , \quad j = 1, 2 \quad (4.b)$$

with

$$\mathcal{K}_j = k \sqrt{\varepsilon_j \mu_j - \cos^2 \phi_0} \quad , \quad j = 1, 2 \quad (4.c)$$

and

$$N_j = \begin{cases} \mathcal{K}_j / (k \mu_j \sin \phi_0) & \text{for } TM_z \text{ case} \\ \mathcal{K}_j / (k \varepsilon_j \sin \phi_0) & \text{for } TE_z \text{ case.} \end{cases} \quad (4.d)$$

If one writes

$$u^T(x, y) = u^u(x, y) + u^0(x, y), \quad (5)$$

where $u^u(x, y)$, signifies the “unperturbed field” which would be observed if the whole plane $y = 0$ in figure-1a was occupied by a homogeneous slab with parameter $(\varepsilon_2, \mu_2, t_2)$ while $u^0(x, y)$ represents the effect of the material discontinuity resulting from the fact that the actual dielectric layer for $\{y = 0, x < 0\}$ is characterized by $(\varepsilon_1, \mu_1, t_1)$. It follows from the definition of $u^u(x, y)$ that

$$u^u(x, y) = \begin{cases} u^i(x, y) + R_2 e^{-ik(x \cos \phi_0 - y \sin \phi_0)} & , \quad y > 0 \\ T_2 e^{-ik(x \cos \phi_0 + y \sin \phi_0)} & , \quad y < 0, \end{cases} \quad (6)$$

where R_2 and T_2 are the reflection and transmission coefficients, respectively:

$$R_2 = \frac{\sigma_2 - \tau_2}{\sigma_2 + \tau_2} \quad , \quad T_2 = \frac{2}{\sigma_2 + \tau_2} . \quad (7.a, b)$$

As to the field $u^0(x, y)$, it satisfies also the Helmholtz equation (2) and has an integral representation as follows:

$$u^0(x, y) = \begin{cases} \int_{\mathcal{L}} A_0(\alpha) e^{-\gamma(\alpha)y - i\alpha x} d\alpha ; & y > 0 \\ \int_{\mathcal{L}} B_0(\alpha) e^{\gamma(\alpha)y - i\alpha x} d\alpha ; & y < 0 \end{cases} \quad (8.a)$$

with

$$\gamma(\alpha) = \sqrt{\alpha^2 - k^2}. \quad (8.b)$$

The square-root function in (8.b) is defined in the complex α -plane cut as shown in figure-2 such that $\gamma(0) = -ik$.

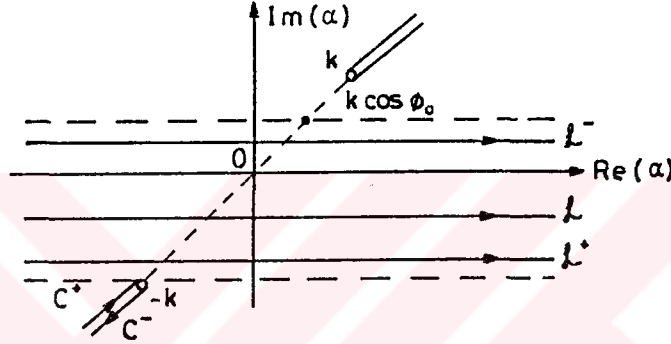


Figure-2 Branch-cuts and the integration line in the complex α -plane

The integration line $\mathcal{L}$ in (8.a) is the infinitely long straight line shown in figure-2. The coefficients $A_0(\alpha)$ and $B_0(\alpha)$ in (8.a) are to be determined with the aid of boundary conditions in (3.a, b, c, d) which can also be written explicitly as follows:

$$u^0(x, +0) - \sigma_1 u^0(x, -0) = -2 \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_2 + \tau_2} e^{-ikx \cos \phi_0} \quad ; \quad x < 0 \quad (9.a)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} u^0(x, +0) - \tau_1 \frac{\partial}{\partial y} u^0(x, -0) = 2ik \sin \phi_0 \frac{\tau_2 - \tau_1}{\sigma_2 + \tau_2} e^{-ikx \cos \phi_0} \quad ; \quad x < 0 \quad (9.b)$$

$$u^0(x, +0) - \sigma_2 u^0(x, -0) = 0 \quad ; \quad x > 0 \quad (9.c)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} u^0(x, +0) - \tau_2 \frac{\partial}{\partial y} u^0(x, -0) = 0 \quad ; \quad x > 0. \quad (9.d)$$

In order to obtain a unique solution to the problem (8.a, b) and (9.a, b, c, d), it is also necessary to take into account the edge condition. By using Meixner's method, it is shown that

$$u^0(x, 0) = -\frac{2\sigma_2}{\sigma_2 + \tau_2} + O(x^{\bar{\lambda}_0}) \quad as \quad x \rightarrow 0 \quad (10.a)$$

where

$$\tilde{\lambda}_0 = \delta_0 \lambda_0 \quad (10.b)$$

with

$$\lambda_0 = \frac{1}{2\pi i} \log \left(\frac{1 - a_0}{1 + a_0} \right) \quad (10.c)$$

and

$$\delta_0 = \text{sign} \left\{ \arg \left(\frac{1 - a_0}{1 + a_0} \right) \right\} \quad (10.d)$$

with

$$a_0 = \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)(\tau_1 - \tau_2)}{(\sigma_1 + \tau_2)(\tau_1 + \sigma_2)}}. \quad (10.e)$$

By substituting first (8.a) into (9.a, b, c, d) and then inverting the resulting integral equations one gets

$$A_0(\alpha) - \sigma_1 B_0(\alpha) = \Phi_{01}^+(\alpha) + \frac{1}{\pi i} \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)}{(\sigma_2 + \tau_2)(\alpha - k \cos \phi_0)} \quad (11.a)$$

$$-\gamma(\alpha) [A_0(\alpha) + \tau_1 B_0(\alpha)] = \Phi_{02}^+(\alpha) - \frac{1}{\pi} k \sin \phi_0 \frac{(\tau_1 - \tau_2)}{(\sigma_2 + \tau_2)(\alpha - k \cos \phi_0)} \quad (11.b)$$

$$A_0(\alpha) - \sigma_2 B_0(\alpha) = \Phi_{01}^-(\alpha) \quad (11.c)$$

$$-\gamma(\alpha) [A_0(\alpha) + \tau_2 B_0(\alpha)] = \Phi_{02}^-(\alpha), \quad (11.d)$$

where $\Phi_{01}^\pm(\alpha)$ and $\Phi_{02}^\pm(\alpha)$ are certain unknown functions. What is known about these functions is that $\Phi_{01}^+(\alpha)$ and $\Phi_{02}^+(\alpha)$ are regular functions of α in the half-plane $\text{Im}(\alpha) > \text{Im}(-k)$ while $\Phi_{01}^-(\alpha)$ and $\Phi_{02}^-(\alpha)$ are regular in $\text{Im}(\alpha) < \text{Im}(k \cos \phi_0)$. On the other hand from the edge condition in (10.a), one concludes

$$\Phi_{02}^\pm(\alpha) = O\left(\alpha^{-\tilde{\lambda}_0}\right) \quad (12.a)$$

$$\Phi_{01}^-(\alpha) = O\left(\alpha^{-\tilde{\lambda}_0-1}\right) \quad (12.b)$$

and

$$\Phi_{01}^+(\alpha) = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_2 + \tau_2} \frac{1}{\pi i \alpha} + O\left(\alpha^{-\tilde{\lambda}_0-1}\right) \quad (12.c)$$

when we let $|\alpha| \rightarrow \infty$ in their respective region of regularity.

The elimination of $A_0(\alpha)$ and $B_0(\alpha)$ between (11.a, b, c, d) yields a matrix Wiener-Hopf equation from which we shall derive the expressions of $\tilde{\Phi}_0^\pm(\alpha)$; namely:

$$\tilde{G}_0(\alpha) \tilde{\Phi}_0^-(\alpha) = \tilde{\Phi}_0^+(\alpha) + \frac{\tilde{F}_0}{\alpha - k \cos \phi_0} \quad (13.a)$$

with

$$\tilde{\mathbf{G}}_0(\alpha) = \frac{1}{\sigma_2 + \tau_2} \begin{bmatrix} \sigma_1 + \tau_2 & \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\gamma(\alpha)} \\ \gamma(\alpha)(\tau_1 - \tau_2) & \tau_1 + \sigma_2 \end{bmatrix} \quad (13.b)$$

$$\tilde{\Phi}_0^-(\alpha) = \begin{bmatrix} \Phi_{01}^-(\alpha) \\ \Phi_{02}^-(\alpha) \end{bmatrix}, \quad \tilde{\Phi}_0^+(\alpha) = \begin{bmatrix} \Phi_{01}^+(\alpha) \\ \Phi_{02}^+(\alpha) \end{bmatrix} \quad (13.c, d)$$

and

$$\tilde{\mathbf{F}}_0 = \frac{1}{\pi i} \begin{bmatrix} \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_2 + \tau_2} \\ \frac{-ik \sin \phi_0(\tau_1 - \tau_2)}{\sigma_2 + \tau_2} \end{bmatrix}. \quad (13.e)$$

The solution of (13.a) requires the factorization of the kernel matrix $\tilde{\mathbf{G}}_0(\alpha)$ as the product of two non-singular matrices, say $\tilde{\mathbf{G}}_0^+(\alpha)$ and $\tilde{\mathbf{G}}_0^-(\alpha)$, whose entries are regular functions of α with algebraic behaviour for $|\alpha| \rightarrow \infty$ in the upper and lower half-planes, respectively. Although the Wiener-Hopf factorization of an arbitrary matrix still remains at present an open problem, the kernel matrix $\tilde{\mathbf{G}}_0(\alpha)$ given in (13.b) belongs to class for which the Wiener-Hopf factorization can be accomplished through the Daniele-Khrapkov method. Indeed, if one writes

$$\tilde{\mathbf{G}}_0(\alpha) = \mathbf{C}_0 \mathbf{W}(\alpha) \quad (14.a)$$

with

$$\mathbf{C}_0 = \frac{1}{\sigma_2 + \tau_2} \begin{bmatrix} \sigma_1 + \tau_2 & 0 \\ 0 & \tau_1 + \sigma_2 \end{bmatrix} \quad (14.b)$$

and

$$\mathbf{W}(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{a_0}{\gamma(\alpha)} \begin{bmatrix} 0 & b_0 \\ \frac{\gamma^2(\alpha)}{b_0} & 0 \end{bmatrix}, \quad (14.c)$$

where a_0 is given by (10.e) while b_0 stands for

$$b_0 = \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)(\tau_1 + \sigma_2)}{(\sigma_1 + \tau_2)(\tau_1 - \tau_2)}}, \quad (14.d)$$

then the matrix $\mathbf{W}(\alpha)$ can be factorized immediately to give

$$\mathbf{W}^+(\alpha) = (1 - a_0^2)^{1/4} \begin{bmatrix} \cosh \chi_0(\alpha) & \frac{b_0 \sinh \chi_0(\alpha)}{\gamma(\alpha)} \\ \frac{\gamma(\alpha) \sinh \chi_0(\alpha)}{b_0} & \cosh \chi_0(\alpha) \end{bmatrix} \quad (15.a)$$

and

$$\mathbf{W}^-(\alpha) = \mathbf{W}^+(-\alpha). \quad (15.b)$$

In (15.a, b) we put

$$\chi_0(\alpha) = -i\lambda_0 \arccos \frac{\alpha}{k} \quad (16.a)$$

and

$$\chi_0(-\alpha) = -i\lambda_0 \left[\pi - \arccos \frac{\alpha}{k} \right]. \quad (16.b)$$

Furthermore, it can be easily shown that one has

$$\mathbf{W}^\pm(\alpha) \sim \begin{bmatrix} (\pm\alpha)^{\tilde{\lambda}_0} & b_0 \delta_0 (\pm\alpha)^{\tilde{\lambda}_0-1} \\ \frac{\delta_0}{b_0} (\pm\alpha)^{\tilde{\lambda}_0+1} & (\pm\alpha)^{\tilde{\lambda}_0} \end{bmatrix} \quad (17)$$

as $|\alpha| \rightarrow \infty$ in the upper and lower half-planes, respectively.

Since the Wiener-Hopf factorization of the kernel matrix is accomplished, the equation in (13.a) can be rearranged as

$$\mathbf{W}^-(\alpha) \tilde{\Phi}_0^-(\alpha) - \tilde{\mathbf{I}}_0^-(\alpha) = [\mathbf{C}_0 \mathbf{W}^+(\alpha)]^{-1} \tilde{\Phi}_0^+(\alpha) + \tilde{\mathbf{I}}_0^+(\alpha) \quad (18.a)$$

with

$$\tilde{\mathbf{I}}_0^-(\alpha) = \frac{[\mathbf{C}_0 \mathbf{W}^+(k \cos \phi_0)]^{-1} \tilde{\mathbf{F}}_0}{\alpha - k \cos \phi_0} \quad (18.b)$$

and

$$\tilde{\mathbf{I}}_0^+(\alpha) = \frac{[\mathbf{C}_0 \mathbf{W}^+(\alpha)]^{-1} - [\mathbf{C}_0 \mathbf{W}^+(k \cos \phi_0)]^{-1}}{\alpha - k \cos \phi_0} \tilde{\mathbf{F}}_0. \quad (18.c)$$

The standard asymptotics show that $\tilde{\mathbf{I}}_0^\pm(\alpha)$ are of $O(\alpha^{-1})$ as $|\alpha| \rightarrow \infty$. The left-hand side of (18.a) is regular in the lower half-plane $Im(\alpha) < Im(k \cos \phi_0)$ while the right-hand side is regular in the upper half-plane $Im(\alpha) > Im(-k)$. Hence, by analytical continuation principle they define an entire function $\tilde{\mathbf{P}}_0(\alpha)$. By taking into account the order relations one concludes from Liouville's theorem that $\tilde{\mathbf{P}}_0(\alpha)$ is a constant matrix of the form

$$\tilde{\mathbf{P}}_0(\alpha) = p_0 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (19)$$

Thus, the solution of (13.a) reads:

$$\tilde{\Phi}_0^-(\alpha) = \begin{bmatrix} \Phi_{01}^-(\alpha) \\ \Phi_{02}^-(\alpha) \end{bmatrix} = [\mathbf{W}^-(\alpha)]^{-1} \begin{bmatrix} I_{01}^-(\alpha) \\ I_{02}^-(\alpha) + p_0 \end{bmatrix}. \quad (20)$$

In order to determine the constant p_0 one has to consider (12.a, b, c), (17) and (20) for $|\alpha| \rightarrow \infty$, which yields

$$p_0 = -\frac{\delta_0}{b_0} (\alpha - k \cos \phi_0) I_{01}^-(\alpha). \quad (21)$$

From (11.c, d) and (20) we get

$$A_0(\alpha) = \frac{(1 - a_0^2)^{-1/4}}{(\sigma_2 + \tau_2)} \left\{ \left[\tau_2 \cosh \chi_0(-\alpha) + \frac{\sigma_2}{b_0} \sinh \chi_0(-\alpha) \right] I_{01}^-(\alpha) - \frac{1}{\gamma(\alpha)} [\tau_2 b_0 \sinh \chi_0(-\alpha) + \sigma_2 \cosh \chi_0(-\alpha)] [I_{02}^-(\alpha) + p_0] \right\} \quad (22.a)$$

and

$$B_0(\alpha) = \frac{(1 - a_0^2)^{-1/4}}{(\sigma_2 + \tau_2)} \left\{ \left[-\cosh \chi_0(-\alpha) + \frac{1}{b_0} \sinh \chi_0(-\alpha) \right] I_{01}^-(\alpha) + \frac{1}{\gamma(\alpha)} [b_0 \sinh \chi_0(-\alpha) - \cosh \chi_0(-\alpha)] [I_{02}^-(\alpha) + p_0] \right\}. \quad (22.b)$$

By using these expressions of $A_0(\alpha)$ and $B_0(\alpha)$, the singly diffracted field by the junction O can easily be determined by evaluating (8.a) through the saddle-point technique as follows:

$$u_0(\rho, \phi) = \sqrt{2\pi} e^{-i\pi/4} \frac{(1 - a_0^2)^{-1/4}}{(\sigma_2 + \tau_2)} \frac{e^{ik\rho}}{\sqrt{k\rho}} \times \begin{cases} \mathcal{P}_1(\phi, \phi_0) & , \quad \phi \in (0, \pi) \\ \mathcal{P}_2(\phi, \phi_0) & , \quad \phi \in (\pi, 2\pi) \end{cases} \quad (23.a)$$

where

$$\mathcal{P}_1(\phi, \phi_0) = k \sin \phi \left[\tau_2 \cos \lambda_0 \phi - i \frac{\sigma_2}{b_0} \sin \lambda_0 \phi \right] I_{01}^-(-k \cos \phi) - [\tau_2 b_0 \sin \lambda_0 \phi + i \sigma_2 \cos \lambda_0 \phi] [I_{02}^-(-k \cos \phi) + p_0] \quad (23.b)$$

and

$$\mathcal{P}_2(\phi, \phi_0) = k \sin \phi \left[\cos \lambda_0 \phi + \frac{i}{b_0} \sin \lambda_0 \phi \right] I_{01}^-(-k \cos \phi) - [b_0 \sin \lambda_0 \phi - i \cos \lambda_0 \phi] [I_{02}^-(-k \cos \phi) + p_0]. \quad (23.c)$$

3. Formulation of The Three-Part Dielectric Slab Problem

The geometrical configuration pertaining to the three-part problem is illustrated in figure-3.

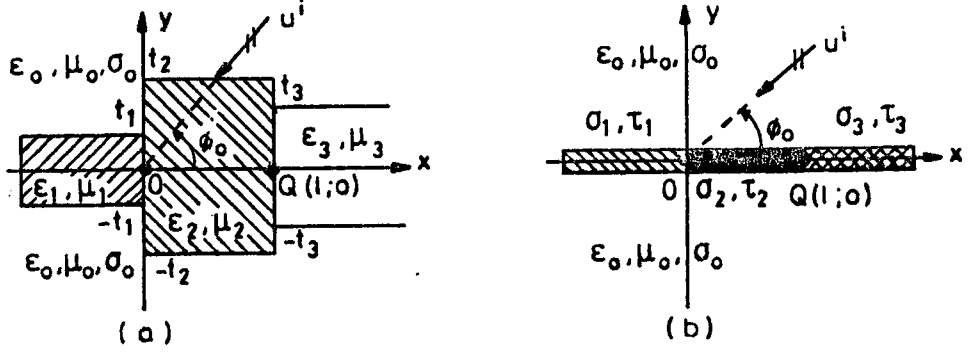


Figure-3 a) Three-part dielectric slab b) Three-part material plane

Since the second junction (edge) is in the transition region of the first one, the field illuminating the second junction after being diffracted from the first exhibits the non ray-optical behaviour. Hence, the double diffraction can not be obtained by the traditional Geometrical Theory of Diffraction approach which consists of multiplying the single diffraction coefficient of successive junctions. In the analysis that follows, a spectral iteration technique (SIT) will be employed to obtain the doubly diffracted fields.

According to the SIT, the doubly diffracted field by the junction Q say u_{OQ} , will be obtained by assuming that the junction of the half-planes $\{x < l, y = 0\}$ and $\{x > l, y = 0\}$ with parameters (ϵ_2, μ_2, t_2) and (ϵ_3, μ_3, t_3) is now illuminated by the singly diffracted field from the junction O , i.e. $u^0(x, y)$.

For the doubly diffracted field $u_{OQ}(x, y)$ we assume the following integral representation :

$$u_{OQ}(x, y) = \begin{cases} \int_{\mathcal{L}} A_{OQ}(\alpha) e^{-\gamma(\alpha)y - i\alpha x} d\alpha ; & y > 0 \\ \int_{\mathcal{L}} B_{OQ}(\alpha) e^{\gamma(\alpha)y - i\alpha x} d\alpha ; & y < 0. \end{cases} \quad (24)$$

The spectral amplitudes $A_{OQ}(\alpha)$ and $B_{OQ}(\alpha)$ are to be determined so that the appropriate boundary conditions are satisfied. Following the same procedure as in section 2, one gets

$$A_{OQ}(\alpha) = \frac{e^{i\alpha l}}{(\sigma_2 + \tau_2)} \left[\tau_2 \Phi_{11}^+(\alpha) - \sigma_2 \frac{\Phi_{12}^+(\alpha)}{\gamma(\alpha)} \right] \quad (25.a)$$

$$B_{OQ}(\alpha) = -\frac{e^{i\alpha l}}{(\sigma_2 + \tau_2)} \left[\Phi_{11}^+(\alpha) + \frac{\Phi_{12}^+(\alpha)}{\gamma(\alpha)} \right] \quad (25.b)$$

The functions $\Phi_{11}^+(\alpha)$ and $\Phi_{12}^+(\alpha)$ are to be determined through the Wiener-Hopf equation

$$\tilde{G}_1(\alpha) \tilde{\Phi}_1^+(\alpha) = \tilde{\Phi}_1^-(\alpha) - e^{-i\alpha l} \tilde{G}_1(\alpha) \tilde{\Phi}_0^-(\alpha) \quad (26.a)$$

where

$$\tilde{\Phi}_1^+(\alpha) = \begin{bmatrix} \Phi_{11}^+(\alpha) \\ \Phi_{12}^+(\alpha) \end{bmatrix}, \quad \tilde{\Phi}_1^-(\alpha) = \begin{bmatrix} \Phi_{11}^-(\alpha) \\ \Phi_{12}^-(\alpha) \end{bmatrix} \quad (26.b, c)$$

and

$$\tilde{G}_1(\alpha) = \frac{1}{\sigma_2 + \tau_2} \begin{bmatrix} \sigma_3 + \tau_2 & \frac{\sigma_3 - \sigma_2}{\gamma(\alpha)} \\ \gamma(\alpha)(\tau_3 - \tau_2) & \tau_3 + \sigma_2 \end{bmatrix}. \quad (26.d)$$

Notice that $\tilde{\Phi}_1^+(\alpha)$ and $\tilde{\Phi}_1^-(\alpha)$ are regular functions of α in the half-planes $Im(\alpha) > Im(-k)$ and $Im(\alpha) < Im(k)$, respectively. The application of the standard Wiener-Hopf technique enables one to write the solution of (26.a) as

$$\tilde{\Phi}_1^+(\alpha) = \begin{bmatrix} \Phi_{11}^+(\alpha) \\ \Phi_{12}^+(\alpha) \end{bmatrix} = [V^+(\alpha)]^{-1} [\tilde{I}_1^+(\alpha) + P_1(\alpha)] \quad (27.a)$$

where

$$V^+(\alpha) = (1 - a_1^2)^{1/4} \begin{bmatrix} \cosh \chi_1(\alpha) & \frac{b_1 \sinh \chi_1(\alpha)}{\gamma(\alpha)} \\ \frac{\gamma(\alpha) \sinh \chi_1(\alpha)}{b_1} & \cosh \chi_1(\alpha) \end{bmatrix} \quad (27.b)$$

with

$$a_1 = \sqrt{\frac{(\sigma_3 - \sigma_2)(\tau_3 - \tau_2)}{(\sigma_3 + \tau_2)(\tau_3 + \sigma_2)}}, \quad b_1 = \sqrt{\frac{(\sigma_3 - \sigma_2)(\tau_3 + \sigma_2)}{(\sigma_3 + \tau_2)(\tau_3 - \tau_2)}} \quad (27.c, d)$$

and

$$\chi_1(\alpha) = -i\lambda_1 \arccos \frac{\alpha}{k}, \quad (27.e)$$

while

$$\lambda_1 = \frac{1}{2\pi i} \log \left(\frac{1 - a_1}{1 + a_1} \right). \quad (27.f)$$

The term $P_1(\alpha)$ appearing in (27.a) is a yet unknown constant matrix of the form

$$P_1(\alpha) = p_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (28)$$

resulting from the application of Liouville's theorem during the Wiener-Hopf procedure. And also, in (26.a) the expression $\tilde{I}_1^+(\alpha)$ is given by

$$\tilde{I}_1^+(\alpha) = -\frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2\pi}(\alpha + k)} \frac{[C_1 V^-(-k)]^{-1}}{(\sigma_2 + \tau_2)} \begin{bmatrix} (\sigma_3 - \sigma_2)\Phi_{02}^-(-k) \\ \frac{ik}{l}(\tau_3 - \tau_2)\Phi_{01}^-(-k) \end{bmatrix} \frac{e^{ikl}}{\sqrt{kl}}. \quad (29.a)$$

where

$$\mathbf{V}^-(\alpha) = \mathbf{V}^+(-\alpha) \quad (29.b)$$

with

$$\chi_1(-\alpha) = -i\lambda_1 \left[\pi - \arccos \frac{\alpha}{k} \right]. \quad (29.c)$$

The constant p_1 is to be adjusted in such a way that the doubly diffracted field u_{OQ} , satisfies the edge condition

$$u_{OQ}(x, \pm 0) = -u^0(l, \pm 0) + O\left((x-l)^{\bar{\lambda}_1}\right) \quad x \rightarrow l. \quad (30)$$

By proceeding as in the previous section one finds that

$$p_1 = \frac{\delta_1}{b_1}(\alpha + k)I_{11}^+(\alpha). \quad (31)$$

From (25.a, b) and (27.a) we get

$$\begin{aligned} A_{OQ}(\alpha) = & \frac{e^{i\alpha l}(1-a_1^2)^{-1/4}}{(\sigma_2 + \tau_2)} \left\{ \left[\tau_2 \cosh \chi_1(\alpha) + \frac{\sigma_2}{b_1} \sinh \chi_1(\alpha) \right] I_{11}^+(\alpha) \right. \\ & \left. - \frac{1}{\gamma(\alpha)} [\tau_2 b_1 \sinh \chi_1(\alpha) + \sigma_2 \cosh \chi_1(\alpha)] [I_{12}^+(\alpha) + p_1] \right\} \end{aligned} \quad (32.a)$$

and

$$\begin{aligned} B_{OQ}(\alpha) = & \frac{e^{i\alpha l}(1-a_1^2)^{-1/4}}{(\sigma_2 + \tau_2)} \left\{ \left[-\cosh \chi_1(\alpha) + \frac{1}{b_1} \sinh \chi_1(\alpha) \right] I_{11}^+(\alpha) \right. \\ & \left. + \frac{1}{\gamma(\alpha)} [b_1 \sinh \chi_1(\alpha) - \cosh \chi_1(\alpha)] [I_{12}^+(\alpha) + p_1] \right\} \end{aligned} \quad (32.b)$$

Since $A_{OQ}(\alpha)$ and $B_{OQ}(\alpha)$ are now completely determined, the doubly diffracted field by the junction Q can easily be determined by evaluating (24) through the saddle-point technique to give

$$u_{OQ}(r, \psi) \sim \sqrt{2\pi} e^{-i\pi/4} \frac{(1-a_1^2)^{-1/4}}{(\sigma_2 + \tau_2)} \frac{e^{ikr}}{\sqrt{kr}} \begin{cases} \mathcal{S}_1(\psi, \phi_0) & ; \quad \psi \in (0, \pi) \\ \mathcal{S}_2(\psi, \phi_0) & ; \quad \psi \in (\pi, 2\pi) \end{cases} \quad (33.a)$$

where

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_1(\psi, \phi_0) = & k \sin \psi \left[\tau_2 \cos \lambda_1(\pi - \psi) - i \frac{\sigma_2}{b_1} \sin \lambda_1(\pi - \psi) \right] I_{11}^+(-k \cos \psi) \\ & - [\tau_2 b_1 \sin \lambda_1(\pi - \psi) + i \sigma_2 \cos \lambda_1(\pi - \psi)] [I_{12}^+(-k \cos \psi) + p_1] \end{aligned} \quad (33.b)$$

and

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_2(\psi, \phi_0) = & k \sin \psi \left[\cos \lambda_1(\pi - \psi) - \frac{i}{b_1} \sin \lambda_1(\pi - \psi) \right] I_{11}^+(-k \cos \psi) \\ & - [b_1 \sin \lambda_1(\pi - \psi) + i \cos \lambda_1(\pi - \psi)] [I_{12}^+(-k \cos \psi) + p_1] \end{aligned} \quad (33.c)$$

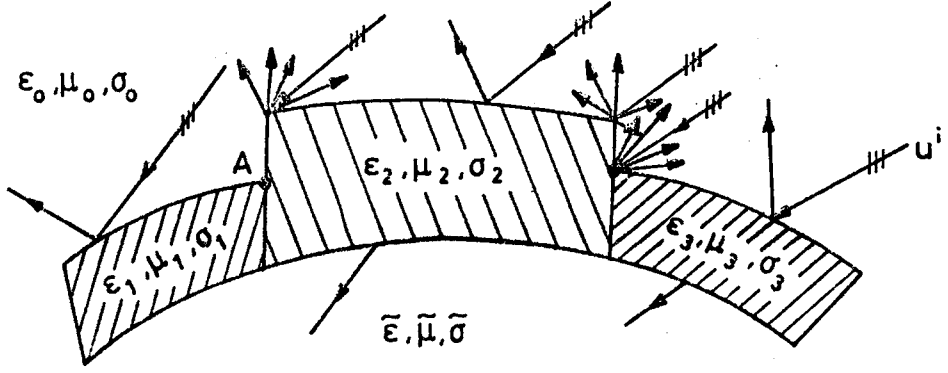
BÖLÜM 1

GİRİŞ

1.1. Konu ve Önemi

Teknolojinin son yirmi yılda gösterdiği başdöndürücü gelişme her gün daha yüksek frekanslı dalgaların git gide artan bir hızla günlük yaşamımıza girmesine neden olmuştur. Bunun doğal bir sonucu olarak da, uzun dalgalar halinde varlığı pek hissedilmeyen veya etkisi oldukça kolay bir şekilde değerlendirilebilen küçük boyutlu engeller artık ihmal edilmesi mümkün olmayan boyutta önem kazanmışlardır. Bu kadar küçük boyutlarda gözlenen geometrik ve fizik yapılar, kolayca tahmin edilebileceği gibi, son derecede karmaşıktır. Yapılardaki bu karmaşıklık, doğal olarak, bu yapıları içeren uzayda yayılan elektromagnetik dalgaların saçılmasını da karmaşık hale sokmakta ve incelenmesini güçleştirmektedir. İncelemeyi kolaylaştırmak için izlenen yol, olayı mümkün olduğunca geniş kapsamlı fakat teorik incelemeye elverişli “ideal” parçalara ayrılmış düşündürmektir, öyle ki; esas olay bu ideal olayların kombinezonu şeklindedir. Bu türden bir ideal olaya “kanonik olay”, buna ilişkin yapıya “kanonik yapı”, böylece kurulmuş olan ideal probleme de “kanonik problem” adı verilir. Burada hemen belirtmekte yarar görüyoruz ki; ardışık etkileşmelerin söz konusu olduğu hallerde bir kanonik problemin çözümü ikinci bir kanonik problemin uyarıcı kaynağı (gelen dalga) olabilir.

Uygulamalar bakımından büyük öneme sahip bulunan, oldukça basit yapılardan biri, değişik kalınlıktaki dielektrik tabakaların birlikte oluşturduğu yapıdır (Bak şekil 1-1.). Böyle bir yapıyı aydınlatan u^i dalgası



Şekil 1-1. Dielektrik tabakalar

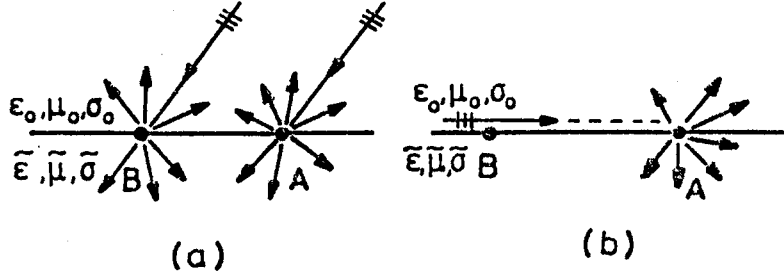
(gelen dalga), bilindiği gibi, regüler noktalarda yansıma ve kırılmaya, geometrik ve fizik özelliklerde süreksizliğin olduğu noktalarda da kırınım uğrar.

Şekil 1-1 de A ve B ile gösterilmiş olanlara benzer basamak türünden süreksizliklerde oluşan kırınım olayları, toplam alanın ifadesini çok etkiledikleri için, özellikle uygulama bakımından çok önemlidirler. Bu öneme paralel olarak, buralardaki kırınım olayını aydınlatmayı amaçlayan kesin kırınım problemi de son derece karmaşık ve güç bir problemdir. Bu güçlüğü yenmek amacıyla, hemen hemen bütün araştırmacılar tarafından izlenen yol şu aşamaları içerir (Bak şekil 1-2.):

- A ve B basamaklarında oluşan olayları, ilk aşamada, birbirinden ayrı düşünmek,
- A daki olayı incelerken, sağda ve solda yer alan parçaları, fiziksel özelliklerini yansıtan düzlemsel yüzeylerle modelleyerek ortaya çıkan problemi çözmek (Aynı şeyi B deki olay için tekrar etmek).
- A ile B arasındaki ardışık etkileşimleri açığa çıkarmak için, B de, her aşamada, uyarılan dalgayı A daki olayın kaynağı olarak düşünmek.

Yukarıda (ii) ve (iii) ile ifade edilen aşamalarda söz konusu olan problemler kesin analitik yöntemlerle çözülebilirler ve biraz önce sözünü etmiş olduğumuz kanonik problemlere örnek oluştururlar. Bu örneklerde eğri-

lik ihmal edilmiş olduğu için, bunlar şekil 1-1 deki esas probleme denk “birinci mertebeden kanonik problemler” dir.



Şekil 1-2. Kanonik problemler. a) Birinci terim b) Ardışık terimler.

1.2. Tezin Amacı ve İçeriği

Bu çalışmanın amacı, önemi yukarıda belirtilmiş bulunan ve şekil 1-2 de geometrik olarak biçimlendirilmiş olan kanonik problemleri kurmak ve kesin analitik yöntemlerle çözerek basamak yüksekliği, geliş yönü, polarizasyon, kalınlık, dalga boyu, bünye parametreleri v.b. büyüklüklerin kırınım olayına etkisini açıklığa kavuşturmaktır. Bu amaçla, sistemin lineer polarize (monokromatik) bir düzlemsel dalga ile aydınlatıldığı düşünülecektir. İleride, bölüm 2.1 de göreceğimiz gibi, kanonik problemde dielektrik tabakayı modelleyen yarım düzlemlerin üzerindeki sınır koşulları geliş açısına olduğu kadar gelen dalganın polarizasyonuna da bağlıdır. Bu nedenle, polarizasyon durumuyla ilgili olarak iki özel hal ayrı ayrı ele alınmıştır. Bunlardan birinde elektrik alan (TM hali), diğerinde de magnetik alan (TE hali) ayrıta paraleldir. Genel haldeki herhangi bir alanı, her zaman, bu türden iki alanın toplamı şeklinde ifade etmek mümkün olduğundan, işlemlerde ve yorumlarda büyük kolaylıklar sağlayacak olan böyle bir ayırım genelliği bozmayacaktır. Benzer şekilde, kutup açıları θ ve ϕ olan herhangi bir $\vec{n}$ vektörünün gösterdiği yönde yayılan

$$\begin{aligned} e^{ik\vec{n} \cdot \vec{r}} &= e^{ik[\sin \theta \cos \phi \vec{e}_x + \sin \theta \sin \phi \vec{e}_y + \cos \theta \vec{e}_z] \cdot \vec{r}} \\ &= e^{ik \cos \theta z} e^{ik \sin \theta [\cos \phi x + \sin \phi y]} \end{aligned} \quad (1.1)$$

şeklindeki bir düzlemsel dalganın kendisinde ve neden olduğu yansımış ve kırınmış dalgaların ifadelerinde $\exp(ik \cos \theta z)$ çarpanı değişmez biçimde yer alacağından, gelen dalganın ayrıta dik yönde ($\theta = \pi/2$ hali) yayıldığını düşünmek de genelliği bozmaz. Çünkü, aksi halde, $\theta = \pi/2$ için bulunmuş olan sonuçlarda k yerine $k \sin \theta$ koyarak ve bütün alan ifadelerini $\exp(ik \cos \theta z)$ ile çarparak $\theta \neq \pi/2$ haline ilişkin sonuçlar elde edilebilir.

İnce dielektrik tabakaları temsil etmek üzere yaygın olarak göz önüne alınan model “rezistif yüzey” (resistive sheet) dir [1-5]. Bu, tabakanın iki yüzünde alanın almış olduğu değerleri birbirine aşağıdaki gibi bağlar :

$$\vec{E}_t^{(1)} = \vec{E}_t^{(2)} \quad (1.2a)$$

$$\vec{n} \times (\vec{H}^{(2)} - \vec{H}^{(1)}) = \frac{1}{R} \vec{E}_t^{(1,2)}. \quad (1.2b)$$

Burada, $\vec{n}$ yüzey üzerindeki birim normali, R yüzey direnci adı verilen bir sabit değeri, t alt-indisleri de yüzeye paralel bileşeni göstermektedir. Yüzeye göre $\vec{n}$ nin gösterdiği tarafta kalan yarı-uzay (2), arka tarafta kalan yarı-uzay da (1) üst-indisleri ile gösterilmişlerdir. Elektrik alanın normal yöndeki bileşeninin sıfır olduğu hallerde oldukça iyi sonuçlar veren “rezistif yüzey” yaklaşımı genel halde tatminkar olmaktan uzaktır [4-5]. Bu hal, [5] de gösterilmiş olduğu üzere, rezistif yüzeyin ancak anizotrop bir tabakayı modelliyor olmasından ileri gelmektedir. Bu tez kapsamında göz önüne alınan tabakalar izotrop malzemeden oluşmuş düşünüldüğünden, rezistif yüzey yaklaşımı tercih etmemek zorunluluğu ortaya çıkmıştır. Bunun yerine, son yıllarda Rawlins ve arkadaşları tarafından önerilmiş bulunan ve başka araştırmacılar tarafından da başarı ile kullanılan bir “yaklaşık” model tercih edilmiştir [6]. Bu modele göre, yüzey üzerinde

$$u^{(2)} = \sigma u^{(1)} \quad (1.3a)$$

$$\frac{\partial u^{(2)}}{\partial n} = \tau \frac{\partial u^{(1)}}{\partial n} \quad (1.3b)$$

dir. Buradaki u , polarizasyonun TM halinde elektrik alanın, TE halinde de magnetik alanın ayrıta paralel bileşenini gösterir. σ ve τ ise, geliş açısına da bağlı olan sabitlerdir. Bu koşulların geçerlilik sınırını açıkça belirtebilmek amacıyla, bunların açık ifadeleri bölüm 2.1 de ayrıntılı olarak çıkarılacak ve tartışılacaktır.

Bu tezin konusunu oluşturan türden problemler, iyice bilindiği gibi, sadece sınır koşulları (ve radyasyon koşulu) kullanılarak çözülemezler. Çözümün sınır koşulları ile belirlenen ifadesinde bir takım belirsiz sabitler yer alır [7]. Bunları belirlemek için izlenen yol, genellikle, alanın ayrıt civarındaki (önceden bilinen) asimptotik davranışını gerçekleştirme-yedir çalışmaktır. Yani, başka bir deyişle, “ayrıt koşulları” nı kullanmaktır. Yarım yüzyıl kadar önce Meixner [8] tarafından mükemmel iletken yüzeylerin ayrıtındaki koşulların incelenmesi ile karma sınır-değer problemlerinin çözümüne katılmaya başlanmış olan bu türden koşullar, bilindiği gibi, alanın kendisine (yani, alan denklemlerine) olduğu kadar sınır koşullarına da bağlıdır. Bu nedenle, bu koşulların da burada üretilmesi gerekmektedir. Bölüm 2.2 buna hasredilmiştir.

Sadece bir basamakta oluşan (birinci mertebeden) kırınım bakımından esas probleme denk olan kanonik problem, şekil 1-2a daki gibi, iki parçalı bir karma (mixed) sınır-değer problemine indirgenir ve yatay uzay koordinatı üzerine uygulanan bir Fourier dönüşümü ile klasik Wiener-Hopf problemine dönüştürülür. İki basamak arasındaki ardışık (yüksek mertebeden) kırınımların açığa çıkarılmasına olanak veren kanonik problem ise, genellikle şekil 1-2b deki gibi, üç parçalı karma sınır-değer problemlerini ortaya çıkarırlar. Üçüncü bölüm iki parçalı hale ilişkin Wiener-Hopf probleminin çözümüne ve alanın analizine ayrılmıştır. Üç parçalı hale ilişkin problemin çözümü ve analizi ise dördüncü bölümde yapılacaktır.

Teorik analitik incelemelerle elde edilen sonuçların, parametrelerin alacağı değişik değerlerden nasıl etkilendiğini açıkça görebilmek amacıyla bazı sayısal uygulamalar yapılmıştır. Bunların bazısı beşinci bölümde grafikler halinde sunulmuş ve tartışılmıştır. Sonuçların fiziksel yorumları, açıkça görüleceği gibi, beklenen yöndedir.

Son olarak, altıncı bölümde, bütün sonuçlar topluca tartışılmış ve bu konuda yapılması gereken genişletme ve genelleştirmelere değinilmiştir.

1.3. Tezde Kullanılan Notasyon

Tezde kullanılan notasyon, genellikle, yaygın biçimde kullanılan uluslararası notasyondur. Polarizasyonun TE halinde bütün alan büyüklükleri magnetik alanın, TM halinde de elektrik alanın ayrıta paralel bileşeni aracılığıyla ifade edilecektir. Bu bileşen, geliş açısı $\theta = \pi/2$ varsayıldığından, $u(x, y)$ ile gösterilecektir. Gelen dalgayı belirtmek için (i) , toplam dalgayı belirtmek için de (T) üst indisleri kullanılacaktır. Aynı T harfi iletim katsayısını belirtmek için de kullanılmaktadır. Fakat bunun bir karışıklığa neden olacağını sanmıyoruz.

Göz önüne alınan alanlar hep ω (=sabit) açısal frakanslı monokromatik alanlardır. Bunların zamana bağılılıkları $(e^{-i\omega t})$ çarpanı ile ifade edilecek ve bu çarpan hiç bir yerde açıkça yazılmayacaktır. Tezde, gerçeklere uygunluğu sağlamak için uzayın iletkenliğinin sıfır olduğu kabul edilmektedir. Bu, k ile gösterilecek olan boş uzaya ilişkin dalga sayısının reel bir sabit olmasını gerektirir. Bununla beraber, bazı işlemleri ve yorumları kolaylaştırmak amacıyla k nın küçük bir pozitif sanal kısmının bulunduğu da varsayılacaktır. Kompleks büyüklüklerin reel ve sanal kısımları, sırasıyla, $Re(.)$ ve $Im(.)$ ile gösterilecek ve, örneğin,

$$z = Re(z) + iIm(z) \quad (1.4)$$

yazılacaktır.

Tezde yer yer, üretilmiş bulunan eşitliklerle ilk defa tanımlanmış olan bir büyüklüğü gösteren eşitliği biribirinden ayırma gereği ortaya çıkmıştır. Bu amaçla, ilk kez tanımlanmış bir büyüklük için $(:=)$ sembolü kullanılmıştır.

BÖLÜM 2

BİR İNCE DİELEKTRİK TABAKANIN MODELLENMESİ

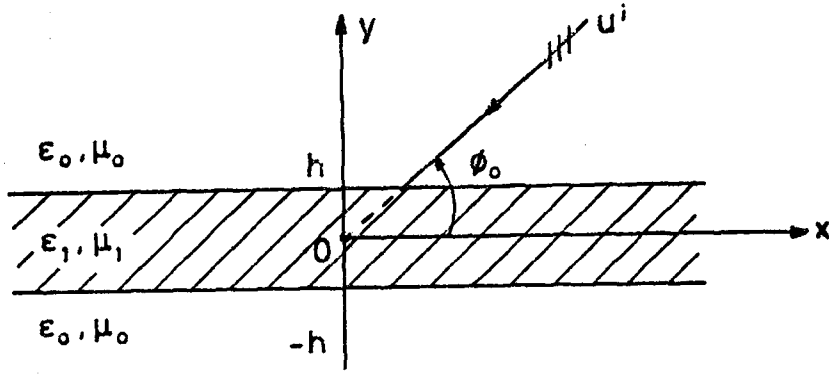
2.1. Sınır Koşulları

Bu bölümde, kalınlığı gelen dalganın dalga boyuna göre küçük olan bir dielektrik tabakadan monokromatik bir düzlemsel dalganın yansıma ve kırılmasına ilişkin bilinen ifadeleri kullanarak , bölüm 1.2 de sözü edilen sınır koşullarını elde etmeye çalışacağız. Bunu, ilk önce birbirinden bağımsız olarak Pidduck [9] ve Richmond [10] tarafından önerilen daha sonra da Rawlins [6] tarafından kullanılan yöntemle yapacağız. Bu yöntem, herhangi bir yönde yayılan bir düzlemsel dalga aracılığıyla dielektrik tabakanın üst ve alt yüzeyleri üzerinde uyarılan elektrik ve magnetik alan değerlerinin oranlarına dayanır.

Yukarıda sözü edilen yöntem uyarınca, kalınlığı $t = 2h$, dielektrik sabiti ϵ_1 ve magnetik geçirgenliği μ_1 olan sonsuz geniş bir dielektrik tabaka göz önüne alalım ve bunun, elektrik (veya magnetik) alanı z eksenine paralel olan monokromatik bir düzlemsel dalga ile aydınlatılmış olduğunu düşünelim. Dalganın Oz e paralel elektrik (veya magnetik) alanı

$$u^i(x, y) = e^{-ik(x \cos \phi_0 + y \sin \phi_0)} \quad , \quad \phi_0 \in (0, \pi) \quad (2.1)$$

olsun. Burada $k = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ ile $|y| > h$ bölgesine ilişkin dalga sayısı gösterilmiş ve, $n = \sqrt{\epsilon_1 \mu_1 / \epsilon_0 \mu_0}$ (tabakanın kırılma indisi) olmak üzere, dielektrik tabakanın dalga sayısı $k_1 = kn$ şeklinde tanımlanmıştır.



Şekil 2-1. Dielektrik tabaka

Dielektrik tabakanın üst ve altında kalan bölgelerdeki toplam alanın ifadesi, çok basit hesaplamalarla,

$$u^T(x, y) = \begin{cases} e^{-ik(x \cos \phi_0 + y \sin \phi_0)} + R e^{-ik(x \cos \phi_0 - y \sin \phi_0)} & y > h \\ T e^{-ik(x \cos \phi_0 + y \sin \phi_0)} & y < -h \end{cases} \quad (2.2a)$$

şeklinde elde edilir (Bak [11]). Buradaki R yansıma ve T iletim katsayılarının açık ifadeleri

$$R = \frac{(1 - N^2) \sin(2\mathcal{K}h) e^{-2ikh \sin \phi_0}}{(1 + N^2) \sin(2\mathcal{K}h) + 2iN \cos(2\mathcal{K}h)} \quad (2.2b)$$

ve

$$T = \frac{2iN e^{-2ikh \sin \phi_0}}{(1 + N^2) \sin(2\mathcal{K}h) + 2iN \cos(2\mathcal{K}h)} \quad (2.2c)$$

den ibarettir. (2.2b, c) de gözüken $\mathcal{K}$ ve N parametreleri

$$\mathcal{K} = k \sqrt{n^2 - \cos^2 \phi_0} \quad (2.3a)$$

ve

$$N = \begin{cases} \mathcal{K} \varepsilon_0 / (k \varepsilon_1 \sin \phi_0) & \text{TE halinde} \\ \mathcal{K} \mu_0 / (k \mu_1 \sin \phi_0) & \text{TM halinde} \end{cases} \quad (2.3b)$$

olarak tanımlanmıştır.

(2.2a) ile verilen toplam alanın ve bunun normal yöndeki $\partial u^T(x, y) / \partial y$ türevinin, sırasıyla, $y = h$ ve $y = -h$ daki değerleri kendi aralarında oranlanacak olursa

$$\sigma := \frac{u^T(x, h)}{u^T(x, -h)} = \frac{e^{-ikh \sin \phi_0} + R e^{ikh \sin \phi_0}}{T e^{ikh \sin \phi_0}} \quad (2.4a)$$

ve

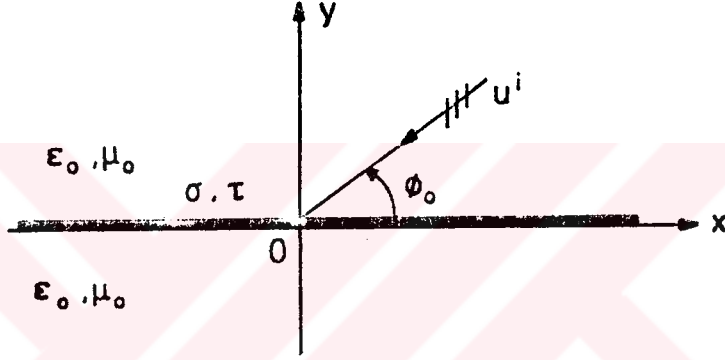
$$\tau := \frac{\partial u^T(x, h)/\partial y}{\partial u^T(x, -h)/\partial y} = \frac{e^{-ikh \sin \phi_0} - R e^{ikh \sin \phi_0}}{T e^{ikh \sin \phi_0}} \quad (2.4b)$$

elde edilir. Şimdi, ϕ_0 ı sabit tutarak $h \rightarrow 0$ yapalım. Bu halde, yukarıda sözü edilen tabaka şekil 2-2 deki gibi bir “maddesel yüzeye”, (2.4a, b) bağıntıları da

$$u^T(x, +0) = \sigma u^T(x, -0) \quad (2.5a)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} u^T(x, +0) = \tau \frac{\partial}{\partial y} u^T(x, -0) \quad (2.5b)$$

ye indirgenir. (2.5a, b) bağıntıları, çok ince bir tabakaya ilişkin problemleri çözmekte kullanılabilecek olan yaklaşık sınır koşullarıdır.



Şekil 2-2. Maddesel yüzey

İncelemeyi daha fazla ilerletmeden, burada hemen şu hususlara dikkati çekmekte yarar görüyoruz:

- i) (2.5a, b) koşulları $h \rightarrow 0$ limit durumunda kesin olarak doğru olan bağıntılardır. Ancak, pratik uygulamalarda bunlar h nın yeterince küçük olduğu hallerde kullanılırlar ve “yaklaşık sınır koşulları” olarak değerlendirilirler. Böyle bir halde σ ve τ nun ifadeleri de, ilk yaklaşımda,

$$\sigma = 1 - 2iKh/N + O((kh)^2) \quad (2.6a)$$

$$\tau = 1 - 2iNKh + O((kh)^2) \quad (2.6b)$$

olur. h nın daha büyük olması halinde, istenirse, ikinci mertebeden yaklaşıklık da göz önüne alınabilir.

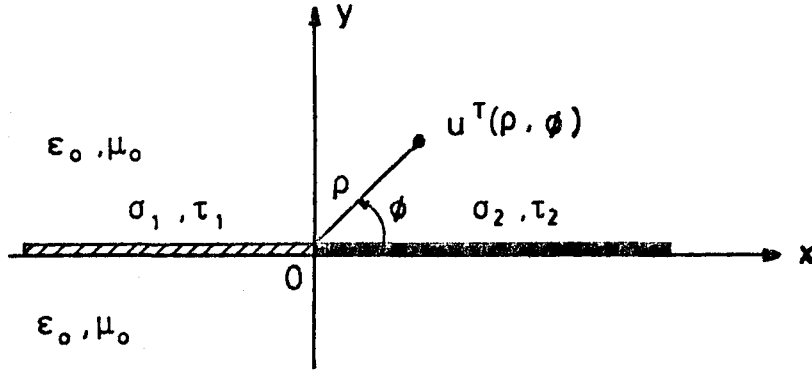
- ii) (2.6a, b) ile ifade edilen σ ve τ katsayıları ϕ_0 açısının fonksiyonudur. ϕ_0 in sabit kaldığı veya çok küçük aralıklarda değişim gösterdiği hallerde σ ve τ yu sabit sayılar olarak düşünmek mümkündür. Buna karşın, ϕ_0 in büyük değişimler gösterdiği hallerde de bu katsayılar, arakesit düzlemi üzerinde, x in fonksiyonu olarak ifade edilebilirler. Eğer gelen dalga düzlemsel değilse; örneğin, belirli bir takım çizgisel kaynaklar tarafından yaratılmış ise, σ ve τ nun $y = 0$ düzlemi üzerinde yazılmış (kaynakların konumuna bağlı), x cinsinden açık ifadelerini bulmak kolaydır. Biz bu tez çerçevesinde bu ilginç durumla ilgilenmeyeceğiz.
- iii) (2.5a, b) koşullarında yer alan σ ve τ büyüklükleri ϕ_0 açısına da bağlı olduklarından, bu bağıntılar kesin anlamda “sınır koşulları” değildirler ve, dolayısıyla bunların sağlamış oldukları “uygunluk koşulları” nı sağlamazlar (Bak [12]). Kesin anlamdaki koşullar kaynak konfigürasyonundan bağımsız, tamamen tabakaya ilişkin fiziksel ve geometrik büyüklüklere bağlı bağıntılardır.

2.2. İki Parçalı Düzleme İlişkin Ayırıt Koşulları

Bölüm 1.2 de belirtildiği gibi, burada göz önüne alınan kırınım problemi tek türlü çözebilmek için sınır ve radyasyon koşullarının yanısıra, toplam alanın ayırıt civarında gösterdiği tekilliğin mertebesini belirleyen “ayırıt koşulları” nın da dikkate alınması gerekmektedir. Bu bölümde, bir dik kesiti şekil 2-3 de görülen iki parçalı dielektrik düzleme ilişkin ayırıt koşulları Meixner [8] yöntemiyle elde edilecektir. Bu amaçla, önce $u^T(\rho, \phi)$ ile gösterilen toplam alanın sağladığı Helmholtz denklemini dairesel silindirik koordinatlarda aşağıdaki gibi yazalım:

$$\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u^T}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2 u^T}{\partial \phi^2} + (k\rho)^2 u^T = 0 \quad (2.7)$$

Ayırıt civarında $k\rho \rightarrow 0$ olduğu göz önünde bulundurulacak olursa,



Şekil 2-3. İki parçalı dielektrik düzlem

$u^T(\rho, \phi)$ nin $k\rho \rightarrow 0$ için gösterdiği asimptotik davranışı ortaya çıkarmaya olanak verecek denklemin (2.7) de $(k\rho)^2$ li terimin ihmal edilmesi sonucunda elde edilen

$$\Delta u^T(\rho, \phi) = 0 \quad (2.8)$$

ile belirli Laplace denkleminin ibaret olduğu kolayca görülür.

Şimdi (2.8) denkleminin değişkenlerine ayrılmış çözümlerini göz önüne alalım. Bunlar, iyice bilindiği gibi,

$$u^T(\rho, \phi) = \begin{cases} A_1 \phi + B_1 + (C_1 \cos \lambda \phi + D_1 \sin \lambda \phi) \rho^\lambda & 0 < \phi < \pi \\ A_2 \phi + B_2 + (C_2 \cos \lambda \phi + D_2 \sin \lambda \phi) \rho^\lambda & -\pi < \phi < 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

dan ibarettir. Buradaki $A_{1,2}$, $B_{1,2}$, $C_{1,2}$, $D_{1,2}$ ve λ iki parçalı dielektrik düzlem üzerinde sağlanan

$$u^T(\rho, +0) = \sigma_2 u^T(\rho, -0) \quad , \quad \frac{\partial}{\partial \phi} u^T(\rho, +0) = \tau_2 \frac{\partial}{\partial \phi} u^T(\rho, -0) \quad (2.10a, b)$$

$$u^T(\rho, \pi) = \sigma_1 u^T(\rho, -\pi) \quad , \quad \frac{\partial}{\partial \phi} u^T(\rho, \pi) = \tau_1 \frac{\partial}{\partial \phi} u^T(\rho, -\pi) \quad (2.10c, d)$$

sınır koşulları aracılığıyla belirlenecek olan sabitlerdir. Bunları belirlemek amacıyla (2.9) daki $u^T(\rho, \phi)$ ifadesi (2.10a, b) de yerine konursa, öncelikle, bu sabit katsayılar arasında sağlanan

$$A_1 = \tau_2 A_2 \quad B_1 = \sigma_2 B_2 \quad (2.11a, b)$$

ve

$$C_1 = \sigma_2 C_2 \quad D_1 = \tau_2 D_2 \quad (2.11c, d)$$

bağıntıları bulunur. Daha sonra, yukarıda bulunan (2.11a, b, c, d) ifadeleri de dikkate alınarak, (2.9) un (2.10c, d) ye taşınması sonucunda

$$\begin{bmatrix} \pi(\sigma_1 + \sigma_2) & (\sigma_2 - \sigma_1) \\ (\tau_2 - \tau_1) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 \\ B_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (\sigma_2 - \sigma_1) \cos \lambda \pi & (\tau_2 + \sigma_1) \sin \lambda \pi \\ -\lambda(\sigma_2 + \tau_1) \sin \lambda \pi & \lambda(\tau_2 - \tau_1) \cos \lambda \pi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_2 \\ D_2 \end{bmatrix} \rho^\lambda = 0 \quad (2.12)$$

denklemini elde edilir. Bu denklemin çözümü, $\sigma_1 \neq \sigma_2$ ve $\tau_1 \neq \tau_2$ olduğu da göz önünde bulundurularak, kolayca

$$A_2 = B_2 = 0 \quad (2.13a)$$

ve

$$\tilde{\lambda}_0 = \delta_0 \lambda_0 \quad (2.13b)$$

olarak elde edilir. Bu son ifadede gözüken δ_0 ve λ_0 değerleri,

$$a_0 = \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)(\tau_1 - \tau_2)}{(\sigma_1 + \tau_2)(\tau_1 + \sigma_2)}} \quad (2.14a)$$

olmak üzere,

$$\delta_0 = \text{sign} \left\{ \arg \left(\frac{1 - a_0}{1 + a_0} \right) \right\} \quad (2.14b)$$

ve

$$\lambda_0 = \frac{1}{2\pi i} \log \left(\frac{1 - a_0}{1 + a_0} \right) \quad (2.14c)$$

olarak belirlenmişlerdir. (2.14c) de yer alan logaritma fonksiyonu asal kol olarak tanımlanmıştır.

Son olarak, (2.13a) ve (2.11a, b, c, d) bağıntılarıyla birlikte (2.13b) deki $\tilde{\lambda}_0$ değeri de (2.9) denkleminde taşınacak olursa, $u^T(\rho, \phi)$ toplam alanının $y = 0$ düzleminde O ayrıtı civarındaki davranışının

$$u^T(x, 0) = O(x^{\tilde{\lambda}_0}) \quad ; \quad x \rightarrow 0 \quad (2.15)$$

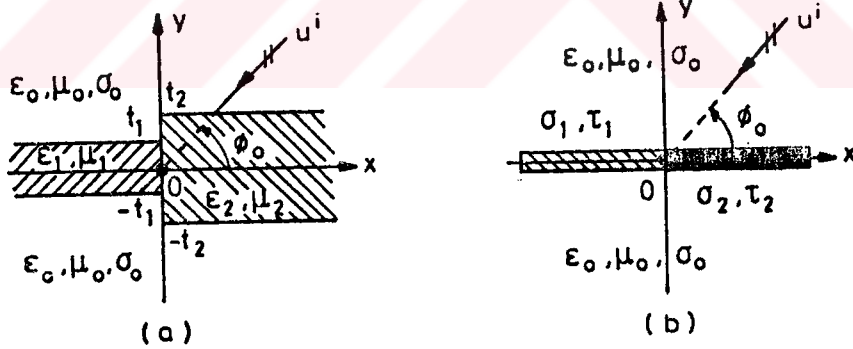
şeklinde olduğu kolayca görülür. $\tilde{\lambda}_0$ ın değeri, (2.14a, b, c) den açıkça görüldüğü gibi, göz önüne alınan özel çözümünden bağımsızdır. Bu nedenle (2.15) bağıntısı her zaman geçerlidir.

BÖLÜM 3

İKİ PARÇALI DİELEKTRİK TABAKADAN SAÇILMA

3.1. Problemin Formülasyonu

Şimdi, bir dik kesiti şekil 3-1 de görülen yapıyı göz önüne alalım. Bu yapı, farklı malzemelerden oluşmuş, $(2t_1)$ ve $(2t_2)$ kalınlıklı, yarı sonsuz iki tabakanın simetrik biçimde uç uca yerleştirilmesinden oluşmuştur. Tabakaların iletkenlikleri sıfıra eşit veya sıfırdan farklı olabilir. Tabakaların iletkenliklerindeki bu esnekliğe karşın, bazı matematik ifadelerin berraklığa kavuşturulabilmesi amacıyla, dış ortamın iletkenliğinin her zaman sıfırdan farklı olduğu varsayılacak ve buna ilişkin dalga sayısı $k = k_r + ik_i$ ile gösterilecektir. Böylece bulunacak olan sonuçlarda $k_i \rightarrow +0$ yapılırsa, dış ortamın kayıpsız olduğu hale ilişkin sonuçlar elde edilir.



Şekil 3-1. a) İki parçalı dielektrik tabaka b) Tabakanın modeli

Şimdi, yukarıda sözü edilen yapının $(\phi_0 + \pi)$ yönünde yayılan lineer polarize bir u^i dalgası tarafından aydınlatılmış olduğunu düşünelim ve saçılan alanın ifadesini bulmaya çalışalım. Bunun için, şekil 3-1a daki yapının yerine, Bölüm 2.1 de sözü edilen sınır koşulları ile modellenmiş yarım düzlemleri göz önüne alarak, şekil 3-1b deki denk problemi kuralım. Bu halde, $u^T(x, y)$ herhangi bir (x, y) noktasındaki toplam elektrik veya

magnetik alanın z bileşenini gösteren fonksiyon olmak üzere, iki parçalı düzlemin dışında, her yerde

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k^2 \right) u^T(x, y) = 0 \quad (3.1)$$

yazılır. Öte yandan, (2.5a, b) ile verilen yaklaşık sınır koşulları da $x < 0$ ve $x > 0$ bölgelerindeki yarım düzlemler için ayrı ayrı göz önüne alınacak olursa,

$$u^T(x, +0) = \sigma_1 u^T(x, -0) \quad x < 0 \quad (3.2a)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} u^T(x, +0) = \tau_1 \frac{\partial}{\partial y} u^T(x, -0) \quad x < 0 \quad (3.2b)$$

$$u^T(x, +0) = \sigma_2 u^T(x, -0) \quad x > 0 \quad (3.2c)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} u^T(x, +0) = \tau_2 \frac{\partial}{\partial y} u^T(x, -0) \quad x > 0 \quad (3.2d)$$

olduğu görülür. Buradaki (σ_1, τ_1) ve (σ_2, τ_2) değerleri, sırasıyla, $x < 0$, $|y| < t_1$, $z \in (-\infty, +\infty)$ ve $x > 0$, $|y| < t_2$, $z \in (-\infty, +\infty)$ bölgelerinde bulunan ince dielektrik tabakalara ilişkin parametrelerdir. Bu parametrelerin açık ifadeleri, (2.6a, b) bağıntıları da göz önüne alınarak,

$$\sigma_j = 1 - 2i\mathcal{K}_j t_j / N_j \quad , \quad j = 1, 2 \quad (3.3a)$$

$$\tau_j = 1 - 2i\mathcal{K}_j t_j N_j \quad , \quad j = 1, 2 \quad (3.3b)$$

şeklinde yazılır. (3.3a, b) bağıntılarında gözüken $\mathcal{K}_j$ ve N_j değerleri, $n_j = \sqrt{\varepsilon_j \mu_j / \varepsilon_0 \mu_0}$, $j = 1, 2$ olmak üzere, (2.3a, b) bağıntılarından

$$\mathcal{K}_j = k \sqrt{(n_j)^2 - \cos^2 \phi_0} \quad , \quad j = 1, 2 \quad (3.4a)$$

ve

$$N_j = \begin{cases} \mathcal{K}_j \varepsilon_0 / (k \varepsilon_j \sin \phi_0) & \text{TE halinde} \\ \mathcal{K}_j \mu_0 / (k \mu_j \sin \phi_0) & \text{TM halinde} \end{cases} \quad , \quad j = 1, 2 \quad (3.4b)$$

şeklinde elde edilir.

Bu bölümde göz önüne alınmış olan iki parçalı dielektrik düzlemden saçılan alanın analizini daha kolay yapabilmek için, $u^T(x, y)$ ile gösterilen toplam alanı

$$u^T(x, y) = u^u(x, y) + u^0(x, y) \quad (3.5)$$

şeklinde iki alanın toplamı gibi ifade etmek uygun olacaktır. Bu son ifadede gözükten $u^u(x, y)$ terimi, tüm $y = 0$ düzlemi, $x > 0$ bölgesindeki ϵ_2 dielektrik sabitli, μ_2 magnetik geçirgenlikli ve t_2 kalınlıklı dielektrik tabaka ile kaplıyken gözlenecek olan alanı gösterir ve "unperturbed field" diye adlandırılır. Bu halde (3.5) in sağ tarafında yer alan $u^0(x, y)$ terimi de ($y = 0, x < 0$) yarı düzlemini oluşturan malzemenin ($y = 0, x > 0$) yarı düzlemininkinden farklı olmasının meydana getirdiği etkiyi gösteren alan terimidir. $u^u(x, y)$ nin yukarıda verilen tanımından hareketle, kolayca,

$$u^u(x, y) = \begin{cases} u^i(x, y) + R_2 e^{-ik(x \cos \phi_0 - y \sin \phi_0)} & y > 0 \\ T_2 e^{-ik(x \cos \phi_0 + y \sin \phi_0)} & y < 0 \end{cases} \quad (3.6a)$$

yazılır. Burada gözükten R_2 yansıma ve T_2 iletim katsayıları için, sırasıyla,

$$R_2 = \frac{\sigma_2 - \tau_2}{\sigma_2 + \tau_2} \quad (3.6b)$$

ve

$$T_2 = \frac{2}{\sigma_2 + \tau_2} \quad (3.6c)$$

değerleri, $u^u(x, y)$ nin $y = 0$ düzleminin tamamı üzerinde sağlaması gereken (3.2c, d) sınır koşulları yardımıyla bulunur.

Şimdi toplam alanın (3.5) ile gösterilen ifadesini (3.1) denkleminde yerine koyalım ve $u^u(x, y)$ nin (3.6a) daki ifadesini göz önünde bulunduralım. Böylece, $u^0(x, y)$ nin sağladığı diferansiyel denklemi elde etmiş oluruz:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k^2 \right) u^0(x, y) = 0. \quad (3.7)$$

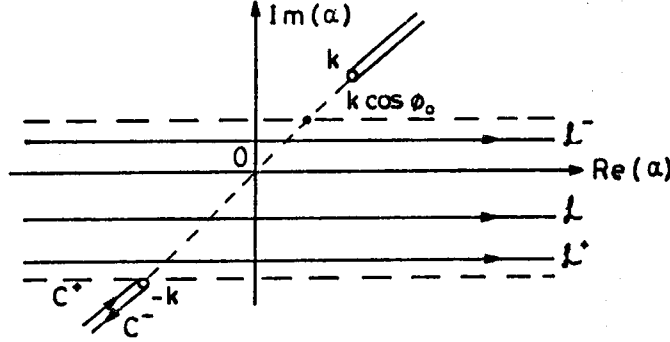
Burada, önce x üzerine bir Fourier dönüşümü uygularsak ve sonra da böylece ortaya çıkan adi diferansiyel denklemi klasik yöntemle çözersek, ters Fourier dönüşümünden sonra,

$$u^0(x, y) = \begin{cases} \int_{\mathcal{L}} A_0(\alpha) e^{-\gamma(\alpha)y - i\alpha x} d\alpha & y > 0 \\ \int_{\mathcal{L}} B_0(\alpha) e^{\gamma(\alpha)y - i\alpha x} d\alpha & y < 0 \end{cases} \quad (3.8a)$$

elde ederiz. Burada gözükten $\gamma(\alpha)$ fonksiyonu, şekil 3-2 deki gibi kesilmiş kompleks α düzleminde $\gamma(0) = -ik$ olacak şekilde tanımlanmış

$$\gamma(\alpha) = \sqrt{\alpha^2 - k^2} \quad (3.8b)$$

fonksiyonudur. (3.8a) da yer alan $\mathcal{L}$ integrasyon çizgisi $Im(-k) < Im(\alpha) < Im(k \cos \phi_0)$ bandı içinde bulunan ve reel eksene paralel olan sonsuz uzun doğrudur (Bak şekil 3-2.).



Şekil 3-2. Kompleks α -düzleminde kesim çizgileri

(3.8a) daki $A_0(\alpha)$ ve $B_0(\alpha)$ ifadelerine gelince: Bunlar, sırasıyla, Bölüm 2.1 ve 2.2 de sözü edilen sınır ve ayırıt koşulları yardımıyla çözülecek olan, henüz bilinmeyen, spektral katsayılarıdır.

Yukarıda sözü edilen spektral katsayıları bulabilmek için önce toplam alanın (3.5) ifadesini, (3.6a, b, c) yi de göz önüne alarak, (3.2a, b, c, d) denklemlerinde yerine koyalım. Böylece, $u^0(x, y)$ nin sağladığı sınır koşulları

$$u^0(x, +0) - \sigma_1 u^0(x, -0) = -2 \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_2 + \tau_2} e^{-ikx \cos \phi_0} \quad x < 0 \quad (3.9a)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} u^0(x, +0) - \tau_1 \frac{\partial}{\partial y} u^0(x, -0) = 2ik \sin \phi_0 \frac{\tau_2 - \tau_1}{\sigma_2 + \tau_2} e^{-ikx \cos \phi_0} \quad x < 0 \quad (3.9b)$$

$$u^0(x, +0) - \sigma_2 u^0(x, -0) = 0 \quad x > 0 \quad (3.9c)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} u^0(x, +0) - \tau_2 \frac{\partial}{\partial y} u^0(x, -0) = 0 \quad x > 0 \quad (3.9d)$$

şeklinde ortaya çıkmış olur.

Benzer şekilde, (3.6a, b, c) ifadelerini de dikkate alarak (3.5) bağıntısını (2.15) de yerine koyacak olursak, $u^0(x, y)$ nin $y = 0$ düzleminde O ayırıtı civarında (Bak şekil 3-1b) sağlamış olduğu ayırıt koşulunu

$$u^0(x, 0) = -\frac{2\sigma_2}{\sigma_2 + \tau_2} + O(x^{\lambda_0}) \quad x \rightarrow 0 \quad (3.10)$$

olarak elde ederiz. Bu son denklemde yer alan $\tilde{\lambda}_0$, (2.13b) ve (2.14a, b, c) bağıntılarıyla belirli kompleks sabitten ibarettir.

Şimdi (3.9a, b, c, d) bağıntılarında yer alan $u^0(x, +0)$ ve $u^0(x, -0)$ değerlerini (3.8a) denkleminde hesaplayıp (3.9a, b, c, d) de yerine koyalım ve böylece ortaya çıkan ifadelerin Fourier dönüşümlerini göz önüne alalım. Sonuçta, $A_0(\alpha)$ ve $B_0(\alpha)$ spektral katsayılarının sağladığı

$$A_0(\alpha) - \sigma_1 B_0(\alpha) = \Phi_{01}^+(\alpha) + \frac{1}{\pi i} \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)}{(\sigma_2 + \tau_2)(\alpha - k \cos \phi_0)} \quad (3.11a)$$

$$-\gamma(\alpha) [A_0(\alpha) + \tau_1 B_0(\alpha)] = \Phi_{02}^+(\alpha) - \frac{1}{\pi} k \sin \phi_0 \frac{(\tau_1 - \tau_2)}{(\sigma_2 + \tau_2)(\alpha - k \cos \phi_0)} \quad (3.11b)$$

$$A_0(\alpha) - \sigma_2 B_0(\alpha) = \Phi_{01}^-(\alpha) \quad (3.11c)$$

$$-\gamma(\alpha) [A_0(\alpha) + \tau_2 B_0(\alpha)] = \Phi_{02}^-(\alpha) \quad (3.11d)$$

denklemleri elde edilir. Yukarıdaki ifadelerde yer alan $\Phi_{01}^\pm(\alpha)$ ve $\Phi_{02}^\pm(\alpha)$ fonksiyonları aşağıdaki gibi tanımlıdır:

$$\Phi_{01}^+(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty [u^0(x, +0) - \sigma_1 u^0(x, -0)] e^{i\alpha x} dx \quad (3.12a)$$

$$\Phi_{02}^+(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \left[\frac{\partial}{\partial y} u^0(x, +0) - \tau_1 \frac{\partial}{\partial y} u^0(x, -0) \right] e^{i\alpha x} dx \quad (3.12b)$$

$$\Phi_{01}^-(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 [u^0(x, +0) - \sigma_2 u^0(x, -0)] e^{i\alpha x} dx \quad (3.12c)$$

$$\Phi_{02}^-(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 \left[\frac{\partial}{\partial y} u^0(x, +0) - \tau_2 \frac{\partial}{\partial y} u^0(x, -0) \right] e^{i\alpha x} dx. \quad (3.12d)$$

İzlemekte olduğumuz yöntem önce $\Phi_{01}^\pm(\alpha)$ ve $\Phi_{02}^\pm(\alpha)$ nın belirlenmesi, sonra da, (3.11a, b, c, d) aracılığıyla, $A_0(\alpha)$ ve $B_0(\alpha)$ nın çözülmesi esasına dayanmaktadır. Bunlar aşağıda, bölüm 3-2 de, yapılacaktır.

Fourier integrallerinin analitik özellikleri göz önüne alınarak (3.12a, b, c, d) deki integraller değerlendirilecek olursa, $\Phi_{01}^+(\alpha)$ ve $\Phi_{02}^+(\alpha)$

nın $Im(\alpha) > Im(-k)$ üst yarı α -düzleminde, $\Phi_{01}^-(\alpha)$ ve $\Phi_{02}^-(\alpha)$ nin ise $Im(\alpha) < Im(k \cos \phi_0)$ alt yarı α -düzleminde α nın regüler fonksiyonları oldukları anlaşılır. Bunlar $\Phi_{01}^\pm(\alpha)$ ve $\Phi_{02}^\pm(\alpha)$ nın analitik yöntemlerle (Wiener-Hopf tekniği ile) belirlenmesine olanak veren temel özelliklerdir. Yalnız, bu iş yapılırken, ortaya çıkacak olan belirsizliği giderebilmek için $|\alpha| \rightarrow \infty$ olurken bu fonksiyonların gösterdiği davranışı da bilmek gerekir. Bunlar (3.10) dan yararlanılarak, kolayca,

$$\Phi_{01}^+(\alpha) = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_2 + \tau_2} \frac{1}{\pi i \alpha} + O\left(\alpha^{-\tilde{\lambda}_0-1}\right) \quad (3.13a)$$

$$\Phi_{02}^+(\alpha) = O\left(\alpha^{-\tilde{\lambda}_0}\right) \quad (3.13b)$$

$$\Phi_{01}^-(\alpha) = O\left(\alpha^{-\tilde{\lambda}_0-1}\right) \quad (3.13c)$$

$$\Phi_{02}^-(\alpha) = O\left(\alpha^{-\tilde{\lambda}_0}\right) \quad (3.13d)$$

şeklinde elde edilirler. Bu bağıntılar, fonksiyonların kendi regülerlik bölgelerinde $\alpha \rightarrow \infty$ olurken geçerli olan bağıntılardır.

(3.11a, b, c, d) denklemlerinde gözüken $A_0(\alpha)$ ve $B_0(\alpha)$ spektral katsayılarını bu denklemler arasında yok edecek olursak, kolayca, $\tilde{\Phi}_0^-(\alpha)$ ve $\tilde{\Phi}_0^+(\alpha)$ arasında sağlanan ve $Im(-k) < Im(\alpha) < Im(k \cos \phi_0)$ bandında geçerli olan

$$\tilde{G}_0(\alpha) \tilde{\Phi}_0^-(\alpha) = \tilde{\Phi}_0^+(\alpha) + \frac{\tilde{F}_0}{\alpha - k \cos \phi_0} \quad (3.14a)$$

bağıntısını elde ederiz. Burada

$$\tilde{G}_0(\alpha) = \frac{1}{\sigma_2 + \tau_2} \begin{bmatrix} \sigma_1 + \tau_2 & \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\gamma(\alpha)} \\ \gamma(\alpha)(\tau_1 - \tau_2) & \tau_1 + \sigma_2 \end{bmatrix} \quad (3.14b)$$

$$\tilde{\Phi}_0^-(\alpha) = \begin{bmatrix} \Phi_{01}^-(\alpha) \\ \Phi_{02}^-(\alpha) \end{bmatrix}, \quad \tilde{\Phi}_0^+(\alpha) = \begin{bmatrix} \Phi_{01}^+(\alpha) \\ \Phi_{02}^+(\alpha) \end{bmatrix} \quad (3.14c, d)$$

ve

$$\tilde{F}_0 = \frac{1}{\pi i} \begin{bmatrix} \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_2 + \tau_2} \\ \frac{-ik \sin \phi_0 (\tau_1 - \tau_2)}{\sigma_2 + \tau_2} \end{bmatrix} \quad (3.14e)$$

konmuştur.

(3.14a) bağıntısı bir matris Wiener-Hopf denklemidir ve $|\alpha| \rightarrow \infty$ için $\tilde{\Phi}_0^-(\alpha)$ ve $\tilde{\Phi}_0^+(\alpha)$ nın gösterdiği asimptotik davranışlar da göz önüne alınarak özel yöntemlerle çözülebilir. Bunu aşağıda ayrıntılı bir biçimde inceleyeceğiz.

3.2. Matris Wiener-Hopf Probleminin Çözümü

Matris Wiener-Hopf probleminin çözümündeki ilk ve en önemli adım, iyice bilindiği gibi, (3.14a) da gözükten $\tilde{G}_0(\alpha)$ çekirdek matrisini

$$\tilde{G}_0(\alpha) = \tilde{G}_0^+(\alpha)\tilde{G}_0^-(\alpha) \quad (3.15)$$

şeklinde iki çarpana ayırmaktır. Buradaki $\tilde{G}_0^+(\alpha)$ ve $\tilde{G}_0^-(\alpha)$, sırasıyla, $Im(\alpha) > Im(-k)$ ve $Im(\alpha) < Im(k \cos \phi_0)$ yarı-düzlemlerinde regüler ve sıfırdan farklı determinantlara sahip matrislerdir. Herhangi bir matrisin yukarıda sözü edilen özelliklere uyan çarpanlarını bulmak için kullanılacak genel bir yöntem, matris çarpımının komütatif olmaması nedeniyle, maalesef mevcut değildir. Bununla beraber, bazı özel hallerde uygulanabilen bir takım etkin yöntemler geliştirilmiştir. Burada söz konusu olan $\tilde{G}_0(\alpha)$ nın (3.14b) deki özel ifadesi, Daniele-Khrapkov yöntemi [13-14] ile $\tilde{G}_0^\pm(\alpha)$ nın bir açık ifadesini bulmaya uygun yapıdadır. Aşağıda önce bu yöntemin esaslarını özetleyecek sonra da $\tilde{G}_0(\alpha)$ ya uyguluyacağız.

3.2.1. Daniele-Khrapkov Yöntemi

$W(\alpha)$ aşağıdaki gibi yazılabilen ikinci mertebeden bir matris olsun:

$$W(\alpha) = I + a(\alpha)T(\alpha). \quad (3.16a)$$

Burada I birim matrisi, $a(\alpha)$ regülerlik bandında sıfırı ve tekliği olmayan bir skaler fonksiyonu, $T(\alpha)$ ise, $m(\alpha)$ ve $n(\alpha)$ tam fonksiyonlar olmak üzere,

$$T(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & m(\alpha) \\ n(\alpha) & 0 \end{bmatrix} \quad (3.16b)$$

şeklinde yazılan bir kare matrisi göstermektedir. Problem, $\mathbf{W}(\alpha)$ yı

$$\mathbf{W}(\alpha) = \mathbf{W}^+(\alpha)\mathbf{W}^-(\alpha) \quad (3.16c)$$

şeklinde çarpanlara ayırmaktır. Bu amaçla, önce (3.16c) nin her iki tarafının logaritmasını alalım ve

$$\text{Log } \mathbf{W}(\alpha) = \text{Log } \mathbf{W}^+(\alpha) + \text{Log } \mathbf{W}^-(\alpha) \quad (3.17)$$

yazalım. Buradaki logaritmlar, $\mathbf{W}(\alpha)$ nın öz-değerlerinin farklı olduğu halde geçerli olan ve her hangi bir $f(\mathbf{W})$ fonksiyonunu açık olarak hesaplamaya olanak veren

$$f(\mathbf{W}) = \frac{\lambda_1 f(\lambda_2) - \lambda_2 f(\lambda_1)}{\lambda_1 - \lambda_2} \mathbf{I} + \frac{f(\lambda_1) - f(\lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2} \mathbf{W}(\alpha) \quad (3.18)$$

Sylvester [15] formülünden yararlanılarak,

$$\text{Log } \mathbf{W}(\alpha) = \frac{1}{2} \text{Log}\{g(\alpha)\} \mathbf{I} + \frac{1}{2} t(\alpha) \mathbf{T}(\alpha) \quad (3.19a)$$

şeklinde ifade edilebilirler. (3.18) ve (3.19a) da gözüken λ_1 ve λ_2 ile $\mathbf{W}(\alpha)$ nın özdeğerleri gösterilmiş ve

$$g(\alpha) = \det \mathbf{W}(\alpha) = 1 - a^2(\alpha)m(\alpha)n(\alpha) \quad (3.19b)$$

$$t(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{m(\alpha)n(\alpha)}} \text{Log} \frac{1 + a(\alpha)\sqrt{m(\alpha)n(\alpha)}}{1 - a(\alpha)\sqrt{m(\alpha)n(\alpha)}} \quad (3.19c)$$

konmuştur. Şimdi, $g(\alpha)$ fonksiyonunun

$$g(\alpha) = g^+(\alpha)g^-(\alpha) \quad (3.20a)$$

şeklindeki Wiener-Hopf faktörizasyonunun, $t(\alpha)$ fonksiyonunun da

$$t(\alpha) = t^+(\alpha) + t^-(\alpha) \quad (3.20b)$$

biçimindeki Wiener-Hopf dekompozisyonunun bilinen klasik yöntemlerle yapıldığını varsayalım. Bunlar (3.19a) da göz önünde bulundurulurlarsa, (3.17) nin de dikkate alınması sonucunda,

$$\begin{aligned} \text{Log } \mathbf{W}^+(\alpha) + \text{Log } \mathbf{W}^-(\alpha) &= \frac{1}{2} \text{Log}\{g^+(\alpha)\} \mathbf{I} + \frac{1}{2} \text{Log}\{g^-(\alpha)\} \mathbf{I} \\ &+ \frac{1}{2} t^+(\alpha) \mathbf{T}(\alpha) + \frac{1}{2} t^-(\alpha) \mathbf{T}(\alpha) \end{aligned} \quad (3.21)$$

elde edilir. $\mathbf{T}(\alpha)$, varsayım uyarınca α nın bir tam fonksiyonu olduğundan, (3.21) den,

$$\text{Log } \mathbf{W}^\pm(\alpha) = \frac{1}{2} \text{Log}\{g^\pm(\alpha)\} \mathbf{I} + \frac{1}{2} t^\pm(\alpha) \mathbf{T}(\alpha) \quad (3.22)$$

veya

$$\mathbf{W}^\pm(\alpha) = \sqrt{g^\pm(\alpha)} \exp \left\{ \frac{1}{2} t^\pm(\alpha) \mathbf{T}(\alpha) \right\} \quad (3.23)$$

yazılır ve $\mathbf{W}(\alpha)$ nın çarpanları elde edilmiş olur.

$\mathbf{W}^\pm(\alpha)$ çarpan matrislerinin hesaplamaya elverişli daha basit ifadelerini elde etmek de mümkündür. Bu amaçla,

$$\mathbf{\Gamma}^\pm(\alpha) = \frac{1}{2} t^\pm(\alpha) \mathbf{T}(\alpha) \quad (3.24)$$

yazalım ve $\exp\{\mathbf{\Gamma}^\pm(\alpha)\}$ yı (3.18) deki Sylvester formülü aracılığıyla

$$\exp\{\mathbf{\Gamma}^\pm(\alpha)\} = \frac{\mu_1 e^{\mu_2} - \mu_2 e^{\mu_1}}{\mu_1 - \mu_2} \mathbf{I} + \frac{e^{\mu_1} - e^{\mu_2}}{\mu_1 - \mu_2} \mathbf{\Gamma}^\pm(\alpha) \quad (3.25)$$

biçiminde ifade edelim. Buradaki μ_1 ve μ_2 ,

$$\mu_1 = \frac{1}{2} \sqrt{m(\alpha)n(\alpha)} t^\pm(\alpha) \quad (3.26a)$$

ve

$$\mu_2 = -\frac{1}{2} \sqrt{m(\alpha)n(\alpha)} t^\pm(\alpha) \quad (3.26b)$$

den ibarettir ve $\mathbf{\Gamma}^\pm(\alpha)$ nın ayrık özdeğerleridir. (3.26a, b) ve (3.25) denklemleri göz önünde bulundurularak (3.24) ün (3.23) e taşınması sonucunda $\mathbf{W}^\pm(\alpha)$ nın açık ifadeleri

$$\mathbf{W}^\pm(\alpha) = \sqrt{g^\pm(\alpha)} \left\{ \cosh \frac{1}{2} [\sqrt{mnt}^\pm(\alpha)] \mathbf{I} + \frac{\sinh \frac{1}{2} [\sqrt{mnt}^\pm(\alpha)]}{\sqrt{mn}} \mathbf{T}(\alpha) \right\} \quad (3.27)$$

olarak yazılabilirler.

3.2.2. $\tilde{\mathbf{G}}_0(\alpha)$ nın Faktörizasyonu

Şimdi kendi problemimize, yani, (3.14b) ye dönelim. Kolayca gerçekleyebileceğimiz gibi,

$$\mathbf{C}_0 = \frac{1}{\sigma_2 + \tau_2} \begin{bmatrix} \sigma_1 + \tau_2 & 0 \\ 0 & \tau_1 + \sigma_2 \end{bmatrix} \quad (3.28a)$$

ve

$$\mathbf{W}(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{a_0}{\gamma(\alpha)} \begin{bmatrix} 0 & b_0 \\ \frac{\gamma^2(\alpha)}{b_0} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.28b)$$

olmak üzere,

$$\tilde{\mathbf{G}}_0(\alpha) = \mathbf{C}_0 \mathbf{W}(\alpha) \quad (3.28c)$$

yazılabilir. (3.28b) deki a_0 ve $\gamma(\alpha)$, sırasıyla, (2.14a) ve (3.8b) ile verilir. b_0 ise

$$b_0 = \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)(\tau_1 + \sigma_2)}{(\sigma_1 + \tau_2)(\tau_1 - \tau_2)}} \quad (3.28d)$$

şeklinde tanımlanmıştır. $\mathbf{W}(\alpha)$ nın (3.28b) deki ifadesi (3.16a) ile karşılaştırılacak olursa,

$$a(\alpha) = \frac{a_0}{\gamma(\alpha)} \quad , \quad m(\alpha) = b_0 \quad , \quad n(\alpha) = \frac{\gamma^2(\alpha)}{b_0} \quad (3.29a, b, c)$$

ve, dolayısıyla,

$$g(\alpha) = 1 - a_0^2 \quad (3.30a)$$

$$t(\alpha) = \frac{1}{\gamma(\alpha)} \text{Log} \frac{1 + a_0}{1 - a_0} \quad (3.30b)$$

olduğu görülür.

(3.30a) ile verilen $g(\alpha)$ kolayca çarpanlara ayrılarak

$$g^+(\alpha) = \sqrt{1 - a_0^2} \quad (3.31a)$$

ve

$$g^-(\alpha) = g^+(\alpha) \quad (3.31b)$$

bulunur. Benzer şekilde, (3.30b) ile verilmiş olan $t(\alpha)$ fonksiyonunun (3.20b) deki gibi bir Wiener-Hopf dekompozisyonu da

$$t^+(\alpha) = -\frac{i}{\pi\gamma(\alpha)} \text{Log} \frac{1 + a_0}{1 - a_0} \text{Log} \frac{\alpha + \gamma(\alpha)}{k} \quad (3.31c)$$

$$t^-(\alpha) = t^+(-\alpha) \quad (3.31d)$$

olarak elde edilir.

Son olarak (3.31a, b, c, d) ve (3.29a, b, c) ifadeleri (3.27) ye taşınacak olursa, $\mathbf{W}^+(\alpha)$ ve $\mathbf{W}^-(\alpha)$ için, sırasıyla,

$$\mathbf{W}^+(\alpha) = (1 - a_0^2)^{1/4} \begin{bmatrix} \cosh \chi_0(\alpha) & \frac{b_0 \sinh \chi_0(\alpha)}{\gamma(\alpha)} \\ \frac{\gamma(\alpha) \sinh \chi_0(\alpha)}{b_0} & \cosh \chi_0(\alpha) \end{bmatrix} \quad (3.32a)$$

ve

$$\mathbf{W}^-(\alpha) = \mathbf{W}^+(-\alpha) \quad (3.32b)$$

ifadeleri elde edilir. (3.32a) da gözüken $\chi_0(\alpha)$ fonksiyonu, (2.14c) nede niyle,

$$\chi_0(\alpha) = -i\lambda_0 \arccos \frac{\alpha}{k}, \quad (3.33a)$$

(3.32b) deki $\chi_0(-\alpha)$ da

$$\chi_0(-\alpha) = -i\lambda_0 \left[\pi - \arccos \frac{\alpha}{k} \right] \quad (3.33b)$$

ye eşittirler. Böylece, (3.14a) nın çözümünde ilk basamağı oluşturan çarpanlara ayırma işlemi kesin bir şekilde yapılmış olmaktadır. Aşağıda bundan yararlanarak, önce $\tilde{\Phi}_0^\pm(\alpha)$, $A_0(\alpha)$ ve $B_0(\alpha)$ nın, sonra da saçılan dalganın açık ifadelerini bulmaya çalışacağız.

3.2.3. (3.14a) nın Çözümü

Şimdi (3.14a) daki matris Wiener-Hopf denkleminde dönelim ve bunu, (3.28c) yi de göz önünde bulundurarak

$$\mathbf{W}^-(\alpha) \tilde{\Phi}_0^-(\alpha) - \tilde{\mathbf{I}}_0^-(\alpha) = [\mathbf{C}_0 \mathbf{W}^+(\alpha)]^{-1} \tilde{\Phi}_0^+(\alpha) + \tilde{\mathbf{I}}_0^+(\alpha) \quad (3.34a)$$

şeklinde yeniden düzenleyelim. Bu son ifadede

$$\tilde{\mathbf{I}}_0^-(\alpha) = \frac{[\mathbf{C}_0 \mathbf{W}^+(k \cos \phi_0)]^{-1} \tilde{\mathbf{F}}_0}{\alpha - k \cos \phi_0} \quad (3.34b)$$

ve

$$\tilde{\mathbf{I}}_0^+(\alpha) = \frac{[\mathbf{C}_0 \mathbf{W}^+(\alpha)]^{-1} - [\mathbf{C}_0 \mathbf{W}^+(k \cos \phi_0)]^{-1}}{\alpha - k \cos \phi_0} \tilde{\mathbf{F}}_0 \quad (3.34c)$$

konmuştur. (3.34a) denkleminin sol yanı $Im(\alpha) < Im(k \cos \phi_0)$ alt yarı-düzleminde, sağ yanı ise $Im(\alpha) > Im(-k)$ üst yarı-düzleminde regüler olan fonksiyonlardan ibarettir. Bu, (3.34a) bağıntısının bir yanında-ki ifadenin diğer yandakinin, $Im(-k) < Im(\alpha) < Im(k \cos \phi_0)$ bandı üzerinden, analitik devamı olması demektir. Başka bir deyişle,

$$\tilde{\mathbf{P}}_0(\alpha) := \begin{cases} [\mathbf{C}_0 \mathbf{W}^+(\alpha)]^{-1} \tilde{\Phi}_0^+(\alpha) + \tilde{\mathbf{I}}_0^+(\alpha) & ; Im(\alpha) > Im(-k) \\ \mathbf{W}^-(\alpha) \tilde{\Phi}_0^-(\alpha) - \tilde{\mathbf{I}}_0^-(\alpha) & ; Im(\alpha) < Im(k \cos \phi_0) \end{cases} \quad (3.35)$$

ile tanımlanan $\tilde{\mathbf{P}}_0(\alpha)$ fonksiyonu kompleks α düzleminin bütününde (muhtemelen sonsuz hariç) regüler olan bir tam fonksiyondur. $\tilde{\mathbf{P}}_0(\alpha)$ hakkında daha fazla bilgi edinebilmek için bunun $|\alpha| \rightarrow \infty$ için gösterdiği asimptotik davranışı bilmek gerekir. Bu amaçla (3.33a, b) ifadeleri (3.32a, b) bağıntılarında yerine konacak olursa, $|\alpha| \rightarrow \infty$ için,

$$\mathbf{W}^+(\alpha) \sim \begin{bmatrix} \alpha^{\tilde{\lambda}_0} & b_0 \delta_0 \alpha^{\tilde{\lambda}_0-1} \\ \frac{\delta_0}{b_0} \alpha^{\tilde{\lambda}_0+1} & \alpha^{\tilde{\lambda}_0} \end{bmatrix} \quad (3.36a)$$

ve

$$\mathbf{W}^-(\alpha) \sim \mathbf{W}^+(-\alpha) \quad (3.36b)$$

olduğu kolayca görülür. (3.34b, c) ile birlikte (3.36a, b) ve (3.13a, b, c, d) asimptotik bağıntıları, (3.35) denkleminde $|\alpha| \rightarrow \infty$ için dikkate alınacak olursa, çok iyi bilinen Liouville teoremi uyarınca, $\tilde{\mathbf{P}}_0(\alpha)$ nın

$$\tilde{\mathbf{P}}_0(\alpha) = p_0 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

şeklinde bir sabit vektöre eşit olduğu görülür.

$\tilde{\mathbf{P}}_0(\alpha)$ nın (3.37) deki ifadesi, (3.35) in $Im(\alpha) < Im(k \cos \phi_0)$ alt yarısı α -düzlemindeki ifadesinde yerine konacak olursa, (3.14a) daki matris Wiener-Hopf denkleminin çözümü,

$$\tilde{\mathbf{I}}_0^-(\alpha) = \begin{bmatrix} I_{01}^-(\alpha) \\ I_{02}^-(\alpha) \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

olmak üzere,

$$\tilde{\Phi}_0^-(\alpha) = \begin{bmatrix} \Phi_{01}^-(\alpha) \\ \Phi_{02}^-(\alpha) \end{bmatrix} = [\mathbf{W}^-(\alpha)]^{-1} \begin{bmatrix} I_{01}^-(\alpha) \\ I_{02}^-(\alpha) + p_0 \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

olarak bulunur. (3.39) denkleminin $|\alpha| \rightarrow \infty$ için asimptotik ifadesi (3.13c, d), (3.36a, b) ve (3.34b) bağıntıları da göz önüne alınarak hesaplanacak olursa, (3.39) da yer alan p_0 sabiti için

$$p_0 = -\frac{\delta_0}{b_0}(\alpha - k \cos \phi_0)I_{01}^-(\alpha) \quad (3.40)$$

değeri bulunur. Böylece, sonuçta, (3.8a) da gözüken $A_0(\alpha)$ ve $B_0(\alpha)$ spektral katsayıları için, (3.11c, d) ve (3.39) bağıntılarından faydalanılarak,

$$A_0(\alpha) = \frac{(1 - a_0^2)^{-1/4}}{(\sigma_2 + \tau_2)} \left\{ \left[\tau_2 \cosh \chi_0(-\alpha) + \frac{\sigma_2}{b_0} \sinh \chi_0(-\alpha) \right] I_{01}^-(\alpha) - \frac{1}{\gamma(\alpha)} [\tau_2 b_0 \sinh \chi_0(-\alpha) + \sigma_2 \cosh \chi_0(-\alpha)] [I_{02}^-(\alpha) + p_0] \right\} \quad (3.41a)$$

ve

$$B_0(\alpha) = \frac{(1 - a_0^2)^{-1/4}}{(\sigma_2 + \tau_2)} \left\{ \left[-\cosh \chi_0(-\alpha) + \frac{1}{b_0} \sinh \chi_0(-\alpha) \right] I_{01}^-(\alpha) + \frac{1}{\gamma(\alpha)} [b_0 \sinh \chi_0(-\alpha) - \cosh \chi_0(-\alpha)] [I_{02}^-(\alpha) + p_0] \right\} \quad (3.41b)$$

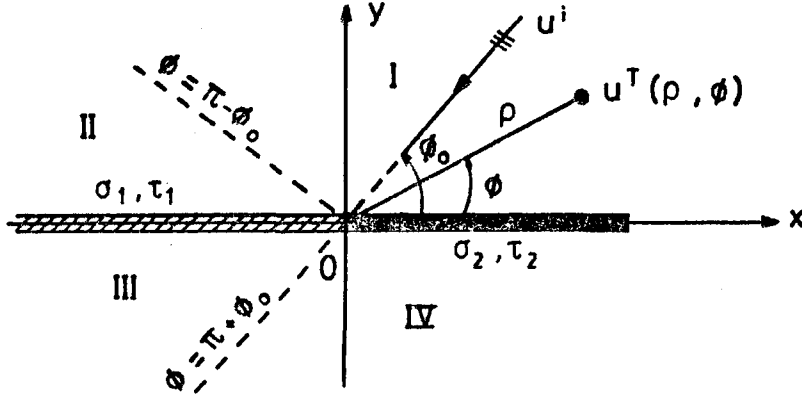
ifadeleri elde edilir.

$A_0(\alpha)$ ve $B_0(\alpha)$ nın yukarıdaki ifadeleri (3.8a) da yerine konursa saçılan alanın bir integral ifadesi elde edilmiş olur. Bu integralin değişik bölgelerde uygun biçimde değerlendirilmesiyle saçılan alanın fiziksel özellikleri açıklığa kavuşturulur. Aşağıda bunu ayrıntılı biçimde yapmaya çalışacağız.

3.3. Saçılan Alanın Analizi

(3.8a) ve (3.41a, b) ile verilen alanı basit fonksiyonlar aracılığıyla ifade etmek olanağı olmadığından, saçılan alanın sahip olduğu fiziksel özellikleri açık biçimde görebilme olanağı, genel halde, yoktur. Bununla beraber,

bu integralin $k \rightarrow \infty$ için geçerli asimptotik ifadesini “en dik iniş çizgisi yöntemi” ile bulmak oldukça kolaydır. Aşağıda bunu yapmaya çalışacağız.



Şekil 3-3. Toplam alana ilişkin değişik bölgeler

Böylece, çok yüksek frekanslı dalgaların söz konusu olduğu hallerde geçerli olan bir analiz yapmak olanağını elde etmiş olacağız. Böyle bir analiz, biraz sonra daha açık bir biçimde göreceğimiz üzere, uzayı, şekil 3-3 de belirtildiği gibi dört ayrı bölgeye ayırmamızı gerektirecektir. Aşağıda bu bölgelerdeki durumu ayrı ayrı ele alacağız.

3.3.1. I Bölgesinde Yansıyan ve Kırınan Terimler ($0 < \phi < \pi - \phi_0$)

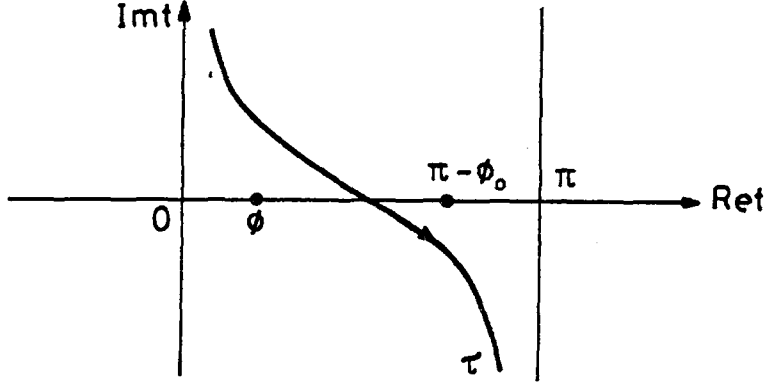
$u^0(x, y)$ nin (3.8a) ile verilen ifadesinde $A_0(\alpha)$ yerine (3.41a) ile belirli ifadeyi koyalım. Böylece ortaya çıkan integrali $k \rightarrow \infty$ için en dik iniş çizgisi yöntemiyle asimptotik olarak değerlendirmeye daha uygun bir biçime sokabilmek amacıyla (3.8a) da

$$x = \rho \cos \phi \quad , \quad y = \rho \sin \phi \quad (3.42a)$$

yazalım ve α yerine de

$$\alpha = -k \cos t \quad (3.42b)$$

ile tanımlı t değişkenini koyalım. Bu dönüşüm, bilindiği gibi, şekil 3-2 deki gibi kesilmiş α düzlemini şekil 3-4 deki t düzleminin $0 < Re(t) < \pi$ bandına bire-bir dönüştürür.



Şekil 3-4. Kompleks t -düzlemi

Bu dönüşüm uyarınca şekil 3-2'deki $\mathcal{L}$ integrasyon çizgisi de $0 < \text{Re}(t) < \pi$ bandı içinde yer alan ve şekil 3-4'de $\mathcal{T}$ ile gösterilen eğriye dönüşecektir. Sözü edilen dönüşümler sonunda, bazı basit düzenlemelerle, (3.8a) integrali

$$u^0(\rho, \phi) = \int_{\mathcal{T}} A_0(-k \cos t) e^{ik\rho \cos(t-\phi)} k \sin t dt \quad (3.43a)$$

şeklinde yazılır. Bu son ifadede gözüken $A_0(-k \cos t)$,

$$\begin{bmatrix} I_{01}^-(-k \cos t) \\ I_{02}^-(-k \cos t) \end{bmatrix} = -\frac{[\mathbf{C}_0 \mathbf{W}^+(k \cos \phi_0)]^{-1}}{k(\cos t + \cos \phi_0)} \tilde{\mathbf{F}}_0 \quad (3.43b)$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} A_0(-k \cos t) = & \frac{(1 - a_0^2)^{-1/4}}{(\sigma_2 + \tau_2)} \left\{ \left[\tau_2 \cos \lambda_0 t - i \frac{\sigma_2}{b_0} \sin \lambda_0 t \right] I_{01}^-(-k \cos t) \right. \\ & \left. - \frac{1}{k \sin t} [\tau_2 b_0 \sin \lambda_0 t + i \sigma_2 \cos \lambda_0 t] [I_{02}^-(-k \cos t) + p_0] \right\} \end{aligned} \quad (3.43c)$$

den ibarettir.

(3.43a)daki integrandın semer noktası, kolayca görüleceği gibi, $t = \phi$ (ve 2π kadar ötelenmişleri) dir. Cauchy teoreminden yararlanarak $\mathcal{T}$ çizgisini $t = \phi$ noktasından geçen en dik iniş çizgisine kadar öteleyecek olursak,

(3.43a) daki $u^0(\rho, \phi)$ nin asimptotik ifadesinin ilk (dominant) terimini

$$u_{d_1}^0(\rho, \phi) \sim u^i(O) \sqrt{2\pi} e^{-i\pi/4} \frac{(1 - a_0^2)^{-1/4}}{(\sigma_2 + \tau_2)} \frac{e^{ik\rho}}{\sqrt{k\rho}} \mathcal{P}_1(\phi, \phi_0) \quad (3.44a)$$

şeklinde elde ederiz. Burada

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1(\phi, \phi_0) = & k \sin \phi \left[\tau_2 \cos \lambda_0 \phi - i \frac{\sigma_2}{b_0} \sin \lambda_0 \phi \right] I_{01}^-(-k \cos \phi) \\ & - [\tau_2 b_0 \sin \lambda_0 \phi + i \sigma_2 \cos \lambda_0 \phi] [I_{02}^-(-k \cos \phi) + p_0] \end{aligned} \quad (3.44b)$$

konmuştur. (3.44a) da gözüken $e^{ik\rho}/\sqrt{k\rho}$ çarpanı $u_{d_1}^0(\rho, \phi)$ nin “O ayrıtından kırınan alan” olarak yorumlanmasına olanak verir (Bak şekil 3-1b). Bu sonuç (3.5) ve (3.6a) ile birlikte (I) bölgesindeki toplam alanın “gelen”, “ $x > 0$ yarı-düzleminden yansıyan” ve “O ayrıtından kırınan” alanların toplamından oluştuğunu gösterir.

(3.44a) yı, gelen dalganın O noktasındaki değerini açıkça belirterek

$$u_{d_1}^0(\rho, \phi) = u^i(O) D(\phi, \phi_0) \frac{e^{ik\rho}}{\sqrt{k\rho}} \quad (3.44c)$$

şeklinde yeniden düzenleyelim. Bu halde,

$$D(\phi, \phi_0) = \sqrt{2\pi} e^{-i\pi/4} \frac{(1 - a_0^2)^{-1/4}}{(\sigma_2 + \tau_2)} \mathcal{P}_1(\phi, \phi_0) \quad (3.44d)$$

ile verilen $D(\phi, \phi_0)$ katsayısı “kırınım katsayısı”, $1/\sqrt{k\rho}$ çarpanı da “diverjans faktörü” olarak yorumlanırlar.

3.3.2. II Bölgesinde Yansıyan ve Kırınan Terimler ($\pi - \phi_0 < \phi < \pi$)

Bölüm 3.3.1 de yapılan incelemede $\mathcal{T}$ çizgisi en dik iniş çizgisine kadar ötelendirilirken integrandın tekil noktalarının üzerinden aşılmamıştı. (II) bölgesinde bu iş yapılırken, zorunlu olarak $t = \pi - \phi_0$ da oluşan kutbun üzerinden aşılmak gerekir. Söz konusu kutbun rezidüsü, (3.43c) den açıkça görüldüğü gibi,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_1 = & \lim_{t \rightarrow \pi - \phi_0} \left[(t - \pi + \phi_0) A_0(-k \cos t) k \sin t e^{ik\rho \cos(t - \phi)} \right] \\ = & \frac{i(\tau_1 \sigma_2 - \sigma_1 \tau_2)}{\pi(\sigma_1 + \tau_1)(\sigma_2 + \tau_2)} e^{-ik\rho \cos(\phi + \phi_0)} \end{aligned} \quad (3.45)$$

olduğundan, toplam alanın ifadesi

$$u^T(\rho, \phi) = u^i(\rho, \phi) + u_{d_1}^0(\rho, \phi) + \frac{(\sigma_1 - \tau_1)}{(\sigma_1 + \tau_1)} e^{-ik\rho \cos(\phi + \phi_0)} \quad (3.46)$$

olur. Buradaki $u_{d_1}^0(\rho, \phi)$ terimi (3.44a, b, c, d) ile verilen ve O ayrıtından kırınan alandan başka bir şey değildir. (3.46) nın sağ yanındaki son terim ise, kolayca görüleceği gibi, $x < 0$ bölgesinde bulunan (σ_1, τ_1) parametrelili dielektrik tabakadan yansıyan alandır.

3.3.3. III Bölgesinde İletilen ve Kırınan Terimler ($\pi < \phi < \pi + \phi_0$)

$u^0(x, y)$ nin (3.8a) ile verilen ifadesinin $y < 0$ bölgesine ilişkin kısmında $B_0(\alpha)$ yerine (3.41b) ile belirli ifadeyi koyalım. Bölüm 3.3.1 de sözü edilen (3.42a, b) dönüşümleri yapılacak olursa, $\mathcal{T}$ şekil 3-4 de verilen eğri olmak üzere, (3.8a) integrali

$$u^0(\rho, \phi) = \int_{\mathcal{T}} B_0(-k \cos t) e^{ik\rho \cos(t+\phi)} k \sin t dt \quad (3.47a)$$

şeklinde yazılır. Bu son ifadede gözüken $B_0(-k \cos t)$, (3.43b) nedeniyle,

$$B_0(-k \cos t) = \frac{(1 - a_0^2)^{-1/4}}{(\sigma_2 + \tau_2)} \left\{ \left[-\cos \lambda_0 t - \frac{i}{b_0} \sin \lambda_0 t \right] I_{01}^-(-k \cos t) + \frac{1}{k \sin t} [b_0 \sin \lambda_0 t - i \cos \lambda_0 t] [I_{02}^-(-k \cos t) + p_0] \right\} \quad (3.47b)$$

den ibarettir.

(3.47a) daki integrandın semer noktası, kolayca görüleceği gibi, $t = 2\pi - \phi$ dir. $\mathcal{T}$ çizgisi bu semer noktasından geçen en dik iniş çizgisine kadar ötelenecek olursa, zorunlu olarak $t = \pi - \phi_0$ da oluşan kutbun üzerinden aşılır. Söz konusu kutbun rezidüsü, (3.47b) den açıkça görüldüğü gibi,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_2 &= \lim_{t \rightarrow \pi - \phi_0} \left[(t - \pi + \phi_0) B_0(-k \cos t) k \sin t e^{ik\rho \cos(t+\phi)} \right] \\ &= -\frac{i(\sigma_2 + \tau_2 - \sigma_1 - \tau_1)}{\pi(\sigma_1 + \tau_1)(\sigma_2 + \tau_2)} e^{-ik\rho \cos(\phi - \phi_0)} \end{aligned} \quad (3.48)$$

den ibaret olduğundan, toplam alanın ifadesi

$$u^T(\rho, \phi) = u_{d_2}^0(\rho, \phi) + \frac{2}{(\sigma_1 + \tau_1)} e^{-ik\rho \cos(\phi - \phi_0)} \quad (3.49)$$

olur. Buradaki $u_{d_2}^0(\rho, \phi)$ terimi

$$u_{d_2}^0(\rho, \phi) \sim u^i(O) \sqrt{2\pi} e^{-i\pi/4} \frac{(1 - a_0^2)^{-1/4}}{(\sigma_2 + \tau_2)} \frac{e^{ik\rho}}{\sqrt{k\rho}} \mathcal{P}_2(\phi, \phi_0) \quad (3.50a)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_2(\phi, \phi_0) = & k \sin \phi \left[\cos \lambda_0(2\pi - \phi) + \frac{i}{b_0} \sin \lambda_0(2\pi - \phi) \right] I_{01}^-(-k \cos \phi) \\ & - [b_0 \sin \lambda_0(2\pi - \phi) - i \cos \lambda_0(2\pi - \phi)] [I_{02}^-(-k \cos \phi) + p_0] \end{aligned} \quad (3.50b)$$

ile verilir ve O ayırıtından kırınan alanı gösterir. (3.49) un sağ yanındaki son terim ise, kolayca görüleceği gibi, $x < 0$ bölgesinde bulunan (σ_1, τ_1) parametrelili dielektrik tabakadan $y < 0$ bölgesine geçen alandır.

3.3.4. IV Bölgesinde İletilen ve Kırınan Terimler ($\pi + \phi_0 < \phi < 2\pi$)

Alanın IV bölgesindeki ifadesi, (3.47a) integrali $\phi \in (\pi + \phi_0, 2\pi)$ bölgesinde en dik iniş çizgisi yöntemiyle değerlendirilerek elde edilir. Bu amaçla $\mathcal{T}$ çizgisi $t = 2\pi - \phi$ de oluşan semer noktasından geçen en dik iniş çizgisine kadar ötelenecek olursa, toplam alanın ifadesi

$$u^T(\rho, \phi) = u_{d_2}^0(\rho, \phi) + \frac{2}{(\sigma_2 + \tau_2)} e^{-ik\rho \cos(\phi - \phi_0)} \quad (3.51)$$

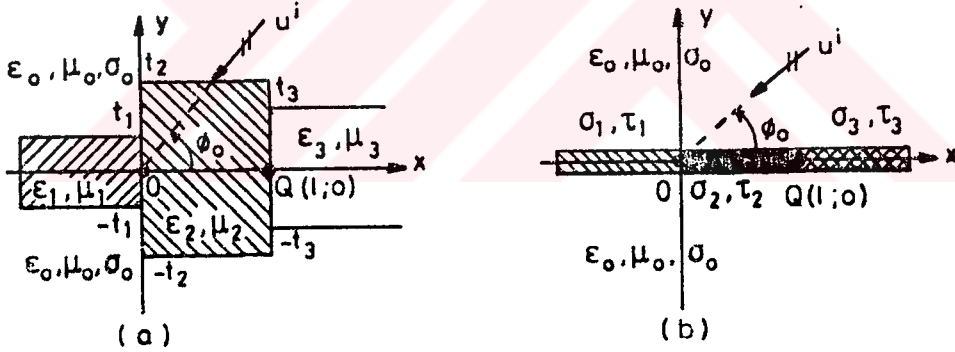
olarak elde edilir. Buradaki $u_{d_2}^0(\rho, \phi)$ terimi (3.50a, b) ile verilen ve O ayırıtından kırınan alandan başka bir şey değildir. (3.51) in sağ yanındaki son terim ise, kolayca görüleceği gibi, $x > 0$ bölgesinde bulunan (σ_2, τ_2) parametrelili dielektrik tabakadan $y < 0$ bölgesine geçen alandır.

BÖLÜM 4

ÜÇ PARÇALI DİELEKTRİK TABAKADAN KIRINIM VE YÜKSEK MERTEBEDEN TERİMLER

4.1. Problemin Formülasyonu

Şimdi, kırınımına neden olan dielektrik tabakanın, bir dik kesitinin şekil 4-1a da gözüktüğü gibi, üç parçadan oluşmuş olduğu hali göz önüne alalım. Bu halde, orta şeridi oluşturan l genişlikli tabakanın (ϵ_2, μ_2) ile gösterilen bünye parametreleri, bu şeridin her iki tarafında yer alan ve kendisine O ve Q ayrıtlarında bağlı olan yarı-sonsuz tabakaların (ϵ_1, μ_1)



Şekil 4-1. a) Üç parçalı dielektrik tabaka b) Tabakanın modeli

ve (ϵ_3, μ_3) ile gösterilen bünye parametrelerinden çok farklı değilse, toplam saçılan alan, l şerit genişliği yeterince büyük olduğunda, iyi bir yaklaşıklıkla, O ve Q ayrıtlarından kırınmış alanların toplamı olarak düşünülebilir [16]. O da uyarılan birinci mertebeden kırınmış alanın değişik bölgelerdeki ifadesi bir önceki bölümde çıkarılmış bulunmaktadır. Q ayrıtlından kırınmış birinci mertebeden alanın $u_{d_1}^Q(r, \psi)$ ve $u_{d_2}^Q(r, \psi)$ ile göstereceğimiz ifadelerini elde etmek için, sırasıyla, (3.44a) ve (3.50a) da $\rho \rightarrow r$, $u^i(0) \rightarrow u^i(Q)$, $\sigma_1 \rightarrow \sigma_3$, $\tau_1 \rightarrow \tau_3$, $\phi_0 \rightarrow \pi - \phi_0$ ve $\phi \rightarrow \pi - \psi$

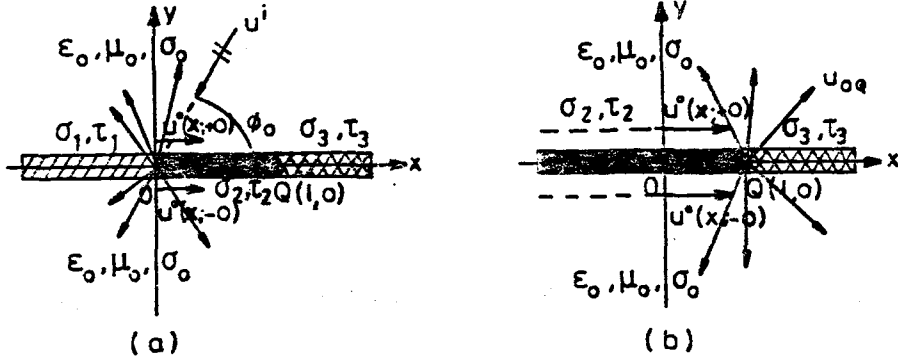
değişikliklerini yapmak gerekir ve yetiştir.

Yukarıda sözü edilen “birinci mertebeden ” kırınım terimlerinin sağladığı yaklaşıklık, orta şeridin genişliği çok küçük olsa bile, bazan istenen doğruluk derecesinin altında kalır. Bu durum, iki ayrıt arasındaki karşılıklı dalga etkileşimi sonucunda ortaya çıkan yüksek mertebeden kırınimleri da göz önüne almayı gerektirir. Bu Bölümün amacı “ikinci mertebeden ” kırınımın etkisini açığa çıkarmaktan ibarettir.

İki ayrıtın söz konusu olduğu yapılarda, ayrıtlardan birinde oluşan kırınım sonucunda uyarılan ve diğer ayrıtı aydınlatan dalga optik ışın davranışı göstermediğinden, birbirini izleyen kırınımın toplam etkisini kırınım katsayılarının çarpımı ile ifade eden Geometrik Teori yaklaşımı ikinci kırınimleri ifade etmeye elverişli değildir. Bu nedenle, bu bölümde, ikinci mertebeden kırınımın “Spektral İterasyon Tekniği ” (SIT) [17] adı verilen özel bir yöntemle elde edilmeye çalışılacaktır. Yüksek mertebeden kırınimleri açığa çıkarmak amacıyla geliştirilmiş bulunan bu yöntemin esası, herhangi bir ayrıtda meydana gelen n 'yinci mertebeden kırınım alanının Fourier integral gösterilimini iki parçalı bir düzlemi aydınlatan gelen alan olarak kabul ederek, ayrıtda oluşan $(n + 1)$ inci mertebeden kırınımı bir matris Wiener-Hopf denkleminin çözümüne indirgemekten ibarettir.

4.2. Q Ayrıtında Oluşan İkinci Mertebeden Kırınan Alan

Şimdi, şekil 4-1a daki yapıyı modelleyen üç parçalı düzleme ilişkin (Bak şekil 4-1b) sınır koşullarında yer alan (σ_1, τ_1) , (σ_2, τ_2) ve (σ_3, τ_3) parametrelerini Bölüm 2.1 deki yöntemle hesaplayalım ve şekil 4-2a daki denk problemi göz önüne alalım. Q ayrıtında meydana gelen ikinci mertebeden kırınım, yani u_{OQ} , SIT uyarınca, O ayrıtında oluşan ve Q ya doğru yayılan $u^0(x, y)$ alanı tarafından yaratılmıştır. Bu, aynı alanın, şekil 4-2b de görülen yapının söz konusu olması halinde Q da uyaracağı dalgaının aynıdır. Bu son yapıda düzlemin $\{x < l, y = 0\}$ yarısı (σ_2, τ_2) , $\{x > l, y = 0\}$ yarısı da (σ_3, τ_3) parametreleriyle modellenmiştir.



Şekil 4-2. a) Üç parçalı denk problem b) Denk kanonik problem

Bu durumda, herhangi bir (x, y) noktasındaki toplam alan

$$u_1^T(x, y) = \begin{cases} u^0(x, +0) + u_{oQ}(x, y) & ; y > 0 \\ u^0(x, -0) + u_{oQ}(x, y) & ; y < 0 \end{cases} \quad (4.1a)$$

ile ifade edilir. Buradaki $u^0(x, +0)$ ve $u^0(x, -0)$, $u^0(x, y)$ nin (3.8a) daki ifadesinden elde edilen ve, sırasıyla, $y > 0$ ve $y < 0$ bölgesinde gelen alan olarak göz önüne alınan terimlerdir. $u_{oQ}(x, y)$ ise, $A_{oQ}(\alpha)$ ve $B_{oQ}(\alpha)$ Bölüm 2.1 ve Bölüm 2.2 de sözü edilen sınır ve ayırıt koşulları yardımıyla belirlenecek olan, henüz bilinmeyen, spektral katsayılar olmak üzere,

$$u_{oQ}(x, y) = \begin{cases} \int_{\mathcal{L}} A_{oQ}(\alpha) e^{-\gamma(\alpha)y - i\alpha x} d\alpha & y > 0 \\ \int_{\mathcal{L}} B_{oQ}(\alpha) e^{\gamma(\alpha)y - i\alpha x} d\alpha & y < 0 \end{cases} \quad (4.1b)$$

bağıntısıyla verilen ve Q ayırıtında oluşan ikinci mertebeden kırılan alan-
dır. (4.1b) de gözüken $\gamma(\alpha)$ fonksiyonu, şekil 3-2 deki gibi kesilmiş komp-
leks α -düzleminde $\gamma(0) = -ik$ olacak şekilde tanımlanmış ve ifadesi (3.8b)
ile verilen karekök fonksiyonu; $\mathcal{L}$ ise şekil 3-2 de gösterilmiş olan integras-
yon çizgisidir.

Yukarıda sözü edilen spektral katsayıları bulabilmek için toplam alanın (4.1a) daki ifadesini şekil 4-2b deki iki parçalı dielektrik düzleme ilişkin sınır koşullarına, yani

$$u_{oQ}(x, +0) - \sigma_2 u_{oQ}(x, -0) = 0 \quad x < l \quad (4.2a)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} u_{OQ}(x, +0) - \tau_2 \frac{\partial}{\partial y} u_{OQ}(x, -0) = 0 \quad x < l \quad (4.2b)$$

$$u_{OQ}(x, +0) - \sigma_3 u_{OQ}(x, -0) = -[u^0(x, +0) - \sigma_3 u^0(x, -0)] \quad x > l \quad (4.2c)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} u_{OQ}(x, +0) - \tau_3 \frac{\partial}{\partial y} u_{OQ}(x, -0) = \\ - \left[\frac{\partial}{\partial y} u^0(x, +0) - \tau_3 \frac{\partial}{\partial y} u^0(x, -0) \right] \quad x > l \quad (4.2d) \end{aligned}$$

denklemlerine yerleştirelim. Buradaki $u^0(x, y)$ terimi, (σ_2, τ_2) parametreleriyle yazılan sınır koşullarını $x \in (-\infty, l)$ için özdeşleyin sağlar. Bu nedenle yukarıdaki koşulların sadece son ikisinde, yani (4.2c, d) de, $u^0(x, y)$ açıkça gözükür.

Benzer şekilde, toplam alanın (4.1a) ifadesini Bölüm 2.2 deki (2.15) bağıntısında yerine koyacak olursak, $u_{OQ}(x, y)$ nin $y = 0$ düzleminde Q ayrıtı civarında (Bak şekil 4-2b) sağlamış olduğu ayrıtı koşulunu

$$u_{OQ}(x, \pm 0) = -u^0(l, \pm 0) + O\left((x-l)^{\tilde{\lambda}_1}\right) \quad x \rightarrow l \quad (4.3a)$$

olarak elde ederiz. Buradaki $\tilde{\lambda}_1$ ifadesi, Bölüm 2.2 de açıklandığı gibi,

$$\tilde{\lambda}_1 = \delta_1 \lambda_1 \quad (4.3b)$$

şeklindedir. Bu son ifadede gözüken δ_1 ve λ_1 değerleri,

$$a_1 = \sqrt{\frac{(\sigma_3 - \sigma_2)(\tau_3 - \tau_2)}{(\sigma_3 + \tau_2)(\tau_3 + \sigma_2)}} \quad (4.4a)$$

olmak üzere,

$$\delta_1 = \text{sign} \left\{ \arg \left(\frac{1 - a_1}{1 + a_1} \right) \right\} \quad (4.4b)$$

ve

$$\lambda_1 = \frac{1}{2\pi i} \log \left(\frac{1 - a_1}{1 + a_1} \right) \quad (4.4c)$$

ile verilirler. (4.4c) de yer alan logaritma fonksiyonu negatif reel eksen boyunca kesilmiş kompleks düzlemde tanımlı asal koldan ibarettir.

Şimdi, $u_{OQ}(x, +0)$ ve $u_{OQ}(x, -0)$ değerlerini (4.1b) denkleminde, $u^0(x, +0)$ ve $u^0(x, -0)$ değerlerini de (3.8a) denkleminde hesaplayıp

(4.2a, b, c, d) de yerine koyalım ve böylece ortaya çıkan ifadelerin Fourier dönüşümlerini göz önüne alalım. Sonuçta $A_{OQ}(\alpha)$ ve $B_{OQ}(\alpha)$ spektral katsayılarının sağladığı denklemleri

$$A_{OQ}(\alpha) - \sigma_2 B_{OQ}(\alpha) = \Phi_{11}^+(\alpha) e^{i\alpha l} \quad (4.5a)$$

$$-\gamma(\alpha) [A_{OQ}(\alpha) + \tau_2 B_{OQ}(\alpha)] = \Phi_{12}^+(\alpha) e^{i\alpha l} \quad (4.5b)$$

$$A_{OQ}(\alpha) - \sigma_3 B_{OQ}(\alpha) = -[A_0(\alpha) - \sigma_3 B_0(\alpha)] + \Phi_{11}^-(\alpha) e^{i\alpha l} \quad (4.5c)$$

$$-\gamma(\alpha) [A_{OQ}(\alpha) + \tau_3 B_{OQ}(\alpha)] = \gamma(\alpha) [A_0(\alpha) + \tau_3 B_0(\alpha)] + \Phi_{12}^-(\alpha) e^{i\alpha l} \quad (4.5d)$$

şeklinde elde ederiz. Yukarıdaki ifadelerde yer alan $\Phi_{11}^\pm(\alpha)$ ve $\Phi_{12}^\pm(\alpha)$ fonksiyonları aşağıdaki gibi tanımlıdır:

$$\Phi_{11}^+(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_l^\infty [u_{OQ}(x, +0) - \sigma_2 u_{OQ}(x, -0)] e^{i\alpha(x-l)} dx \quad (4.6a)$$

$$\Phi_{12}^+(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_l^\infty \left[\frac{\partial}{\partial y} u_{OQ}(x, +0) - \tau_2 \frac{\partial}{\partial y} u_{OQ}(x, -0) \right] e^{i\alpha(x-l)} dx \quad (4.6b)$$

$$\Phi_{11}^-(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^l [u_{OQ}(x, +0) - \sigma_3 u_{OQ}(x, -0)] e^{i\alpha(x-l)} dx \quad (4.6c)$$

$$\Phi_{12}^-(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^l \left[\frac{\partial}{\partial y} u_{OQ}(x, +0) - \tau_3 \frac{\partial}{\partial y} u_{OQ}(x, -0) \right] e^{i\alpha(x-l)} dx. \quad (4.6d)$$

Fourier integrallerinin analitik özellikleri göz önüne alınarak (4.6a, b, c, d) deki integraller değerlendirilecek olursa, $\Phi_{11}^+(\alpha)$ ve $\Phi_{12}^+(\alpha)$ nın $Im(\alpha) > Im(-k)$ üst-yarı α -düzleminde, $\Phi_{11}^-(\alpha)$ ve $\Phi_{12}^-(\alpha)$ nın da $Im(\alpha) < Im(k)$ alt-yarı α -düzleminde α nın regüler fonksiyonları oldukları anlaşılır. Bu özellikler, (4.5a, b, c, d) ile birlikte, $\Phi_{11}^\pm(\alpha)$ ve $\Phi_{12}^\pm(\alpha)$ yı belirlemek olanakını verirler. $\Phi_{11}^\pm(\alpha)$ ve $\Phi_{12}^\pm(\alpha)$ nın tek türlü belirlenebilmesi için $|\alpha| \rightarrow \infty$ olurken bu fonksiyonların gösterdiği asimptotik davranışların da bilinmesi gerekir. Bunlar (4.3a) dan yararlanılarak, kolayca,

$$\Phi_{11}^+(\alpha) = O\left(\alpha^{-\bar{\lambda}_1-1}\right) \quad (4.7a)$$

$$\Phi_{12}^+(\alpha) = O\left(\alpha^{-\tilde{\lambda}_1}\right) \quad (4.7b)$$

$$\Phi_{11}^-(\alpha) = -\frac{u^0(l, +0) - \sigma_3 u^0(l, -0)}{2\pi i \alpha} + O\left(\alpha^{-\tilde{\lambda}_1-1}\right) \quad (4.7c)$$

$$\Phi_{12}^-(\alpha) = O\left(\alpha^{-\tilde{\lambda}_1}\right) \quad (4.7d)$$

şeklinde elde edilirler.

(4.5a, b, c, d) denklemlerinde gözükten $A_{OQ}(\alpha)$ ve $B_{OQ}(\alpha)$ spektral katsayılarını bu denklemler arasında yok edecek olursak, kolayca, $\tilde{\Phi}_1^-(\alpha)$ ve $\tilde{\Phi}_1^+(\alpha)$ yı birbirine bağlayan ve $Im(-k) < Im(\alpha) < Im(k)$ bandında geçerli olan

$$\tilde{G}_1(\alpha)\tilde{\Phi}_1^+(\alpha) = \tilde{\Phi}_1^-(\alpha) - e^{-i\alpha l}\tilde{G}_1(\alpha)\tilde{\Phi}_0^-(\alpha) \quad (4.8a)$$

modifiye Wiener-Hopf denklemini elde ederiz. Burada, $\tilde{\Phi}_0^-(\alpha)$ (3.14c) ile verilen ifadedir ve

$$\tilde{G}_1(\alpha) = \frac{1}{\sigma_2 + \tau_2} \begin{bmatrix} \sigma_3 + \tau_2 & \frac{\sigma_3 - \sigma_2}{\gamma(\alpha)} \\ \gamma(\alpha)(\tau_3 - \tau_2) & \tau_3 + \sigma_2 \end{bmatrix} \quad (4.8b)$$

$$\tilde{\Phi}_1^-(\alpha) = \begin{bmatrix} \Phi_{11}^-(\alpha) \\ \Phi_{12}^-(\alpha) \end{bmatrix}, \quad \tilde{\Phi}_1^+(\alpha) = \begin{bmatrix} \Phi_{11}^+(\alpha) \\ \Phi_{12}^+(\alpha) \end{bmatrix} \quad (4.8c, d)$$

konmuştur. (4.8a) nın çözümü, ayrıntılar aşağıda adım adım verilerek, yapılmaya çalışılacaktır.

4.2.1. $\tilde{G}_1(\alpha)$ nın Faktörizasyonu

(4.8a) denkleminin çözümü, daha önce de söylenmiş olduğu gibi, her şeyden önce $\tilde{G}_1(\alpha)$ çekirdek matrisinin

$$\tilde{G}_1(\alpha) = \tilde{G}_1^+(\alpha)\tilde{G}_1^-(\alpha) \quad (4.9)$$

şeklindeki faktörizasyonunu gerektirir. Bu ise, bölüm 3.2.1 de açıklanan Daniele-Khrapkov yöntemiyle kolayca yapılabilir. Bunun için, önce (4.8b) yi,

$$C_1(\alpha) = \frac{1}{\sigma_2 + \tau_2} \begin{bmatrix} \sigma_3 + \tau_2 & 0 \\ 0 & \tau_3 + \sigma_2 \end{bmatrix} \quad (4.10a)$$

ve

$$\mathbf{V}(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{a_1}{\gamma(\alpha)} \begin{bmatrix} 0 & b_1 \\ \frac{\gamma^2(\alpha)}{b_1} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.10b)$$

olmak üzere,

$$\tilde{\mathbf{G}}_1(\alpha) = \mathbf{C}_1 \mathbf{V}(\alpha) \quad (4.10c)$$

şeklinde yazalım. (4.10b) deki a_1 ve $\gamma(\alpha)$, sırasıyla, (4.4a) ve (3.8b) ile verilirler. b_1 ise,

$$b_1 = \sqrt{\frac{(\sigma_3 - \sigma_2)(\tau_3 + \sigma_2)}{(\sigma_3 + \tau_2)(\tau_3 - \tau_2)}} \quad (4.10d)$$

şeklinde tanımlanmıştır. $\mathbf{V}(\alpha)$ nın (4.10b) ile verilen ifadesi, Daniele-Khrapkov yöntemi uyarınca,

$$\mathbf{V}(\alpha) = \mathbf{V}^+(\alpha) \mathbf{V}^-(\alpha) \quad (4.11a)$$

şeklinde faktörize edilecek olursa, $\mathbf{V}^+(\alpha)$ ve $\mathbf{V}^-(\alpha)$ için, sırasıyla,

$$\mathbf{V}^+(\alpha) = (1 - a_1^2)^{1/4} \begin{bmatrix} \cosh \chi_1(\alpha) & \frac{b_1 \sinh \chi_1(\alpha)}{\gamma(\alpha)} \\ \frac{\gamma(\alpha) \sinh \chi_1(\alpha)}{b_1} & \cosh \chi_1(\alpha) \end{bmatrix} \quad (4.11b)$$

ve

$$\mathbf{V}^-(\alpha) = \mathbf{V}^+(-\alpha) \quad (4.11c)$$

ifadeleri elde edilir. (4.11b) de gözüken $\chi_1(\alpha)$ fonksiyonu, (4.4c) nedeniyle,

$$\chi_1(\alpha) = -i\lambda_1 \arccos \frac{\alpha}{k} \quad (4.12a)$$

ya, (4.11c) deki $\chi_1(-\alpha)$ da

$$\chi_1(-\alpha) = -i\lambda_1 \left[\pi - \arccos \frac{\alpha}{k} \right] \quad (4.12b)$$

ye eşittirler. Böylece, (4.8a) nın çözümünde ilk adımı oluşturan faktori-zasyon kesin bir şekilde yapılmış olmaktadır.

4.2.2. (4.8a) nın Çözümü

Şimdi, (4.8a) denkleminde dönelim ve bunu, (4.10c) ile (4.11a) yı da göz önünde bulundurarak,

$$[C_1 V^-(\alpha)]^{-1} \tilde{\Phi}_1^-(\alpha) + \tilde{I}_1^-(\alpha) = V^+(\alpha) \tilde{\Phi}_1^+(\alpha) - \tilde{I}_1^+(\alpha) \quad (4.13a)$$

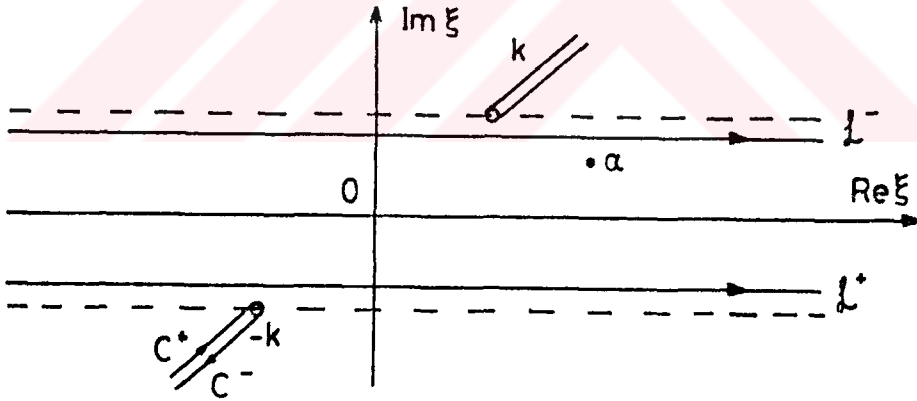
şeklinde yeniden düzenleyelim. Bu son ifadede, $\mathcal{L}^+$ ve $\mathcal{L}^-$ şekil 4-3 de gösterilen eğriler olmak üzere,

$$\tilde{I}_1^+(\alpha) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}^+} [C_1 V^-(\xi)]^{-1} [\tilde{G}_1(\xi) \tilde{\Phi}_0^-(\xi)] \frac{e^{-i\xi l}}{\xi - \alpha} d\xi \quad (4.13b)$$

ve

$$\tilde{I}_1^-(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}^-} [C_1 V^-(\xi)]^{-1} [\tilde{G}_1(\xi) \tilde{\Phi}_0^-(\xi)] \frac{e^{-i\xi l}}{\xi - \alpha} d\xi \quad (4.13c)$$

konmuştur. (4.13a) denkleminin sol yanı $Im(\alpha) < Im(k)$ alt-yarı düzleminde, sağ yanı ise $Im(\alpha) > Im(-k)$ üst-yarı düzleminde regüler olan fonksiyonlardan ibarettir. Bu, (4.13a) bağıntısının bir yanındaki ifadenin



Şekil 4-3. Kompleks ξ -düzlemi

diğer yandakinin, $Im(-k) < Im(\alpha) < Im(k)$ bandı üzerinden, analitik devamı olması demektir. Başka bir deyişle,

$$\tilde{P}_1(\alpha) = \begin{cases} V^+(\alpha) \tilde{\Phi}_1^+(\alpha) - \tilde{I}_1^+(\alpha) & ; Im(\alpha) > Im(-k) \\ [C_1 V^-(\alpha)]^{-1} \tilde{\Phi}_1^-(\alpha) + \tilde{I}_1^-(\alpha) & ; Im(\alpha) < Im(k) \end{cases} \quad (4.14)$$

ile tanımlanan $\tilde{\mathbf{P}}_1(\alpha)$ fonksiyonu kompleks α -düzleminin bütününde (muhtemelen sonsuz hariç) regüler olan bir fonksiyondur (tam fonksiyon).

$\tilde{\mathbf{P}}_1(\alpha)$ nın daha belirgin bir hal alabilmesi için bunun $|\alpha| \rightarrow \infty$ daki asimptotik davranışının da bilinmesi gerekir. Bu ise, öncelikle $\mathbf{V}^+(\alpha)$ ve $\mathbf{V}^-(\alpha)$ nın asimptotik davranışlarının bilinmesi ile mümkündür. (4.11b, c) ve (4.12a, b) den faydalanılarak, kolayca,

$$\mathbf{V}^+(\alpha) \sim \begin{bmatrix} \alpha^{\bar{\lambda}_1} & b_1 \delta_1 \alpha^{\bar{\lambda}_1-1} \\ \frac{\delta_1}{b_1} \alpha^{\bar{\lambda}_1+1} & \alpha^{\bar{\lambda}_1} \end{bmatrix} \quad (4.15a)$$

ve

$$\mathbf{V}^-(\alpha) \sim \mathbf{V}^+(-\alpha) \quad (4.15b)$$

olduğu görülür. Bunlar (4.13b, c) de değerlendirilirse ve bulunan sonuçlar (4.7a, b, c, d) asimptotik ifadeleriyle birlikte (4.14) denkleminde dikkate alınırsa, $\tilde{\mathbf{P}}_1(\alpha)$ nın

$$\tilde{\mathbf{P}}_1(\alpha) = p_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

şeklinde bir sabit vektöre eşit olduğu anlaşılır. $\tilde{\mathbf{P}}_1(\alpha)$ nın (4.16) daki ifadesi, (4.14) ün $Im(\alpha) > Im(-k)$ üst-yarı düzlemindeki ifadesinde yerine konacak olursa, (4.8a) daki matris Wiener-Hopf denkleminin çözümü,

$$\tilde{\mathbf{I}}_1^+(\alpha) = \begin{bmatrix} I_{11}^+(\alpha) \\ I_{12}^+(\alpha) \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

olmak üzere,

$$\tilde{\Phi}_1^+(\alpha) = \begin{bmatrix} \Phi_{11}^+(\alpha) \\ \Phi_{12}^+(\alpha) \end{bmatrix} = [\mathbf{V}^+(\alpha)]^{-1} \begin{bmatrix} I_{11}^+(\alpha) \\ I_{12}^+(\alpha) + p_1 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

olarak bulunur.

(4.13b) ifadesinde gözüken l pozitif bir büyüklük olduğu için, önce, Jordan teoremi uyarınca, $\mathcal{L}^+$ integrasyon çizgisi şekil 4-3 daki $C^+ + C^-$ kesim çizgisine kadar ötelendirilebilir sonra da (4.13b) integrali

$$\tilde{\mathbf{I}}_1^+(\alpha) = -\frac{1}{\pi i} \int_{C^+} \tilde{\mathbf{Q}}^-(\xi) \begin{bmatrix} (\xi + k)^{1/2} \\ (\xi + k)^{-1/2} \end{bmatrix} \frac{e^{-i\xi l}}{(\xi - \alpha)(\xi - k \cos \phi_0)} d\xi \quad (4.19a)$$

şeklinde yeniden düzenlenebilir. Bu son ifadede görünen $\tilde{\mathbf{Q}}^-(\xi)$,

$$\tilde{\mathbf{Q}}^-(\xi) = \frac{(\xi - k \cos \phi_0)}{\sigma_2 + \tau_2} [\mathbf{C}_1 \mathbf{V}^-(\xi)]^{-1} \times \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sigma_3 - \sigma_2}{\sqrt{\xi - k}} \Phi_{02}^-(\xi) \\ (\tau_3 - \tau_2) \sqrt{\xi - k} \Phi_{01}^-(\xi) & 0 \end{bmatrix} \quad (4.19b)$$

bağıntısıyla belirli olup $Im(\xi) < Im(k)$ alt-yarı düzleminde regüler olan bir matris-değerli fonksiyondur. Eğer kl yeterince büyük bir değere sahipse, (4.19a) integrali Laplace formülü aracılığıyla asimptotik olarak aşağıdaki gibi değerlendirilebilir:

$$\tilde{\mathbf{I}}_1^+(\alpha) = -\frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2\pi}(\alpha + k)} \frac{[\mathbf{C}_1 \mathbf{V}^-(-k)]^{-1}}{(\sigma_2 + \tau_2)} \begin{bmatrix} (\sigma_3 - \sigma_2) \Phi_{02}^-(-k) \\ \frac{ik}{l} (\tau_3 - \tau_2) \Phi_{01}^-(-k) \end{bmatrix} \frac{e^{ikl}}{\sqrt{kl}}. \quad (4.20)$$

$\tilde{\mathbf{I}}_1^+(\alpha)$ nın asimptotik ifadesini yukarıdaki gibi elde ettikten sonra yeniden (4.8a) nın çözümü olan (4.18) denkleminde geri dönelim. Bu denklemin $|\alpha| \rightarrow \infty$ için geçerli olan asimptotik ifadesi, (4.7a, b) ile (4.15a) ve (4.20) bağıntıları da göz önüne alınarak hesaplanacak olursa, (4.18) de yer alan p_1 sabiti için,

$$p_1 = \frac{\delta_1}{b_1} (\alpha + k) I_{11}^+(\alpha) \quad (4.21)$$

değeri bulunur. Böylece, sonuçta, (4.1b) de gözüken $A_{OQ}(\alpha)$ ve $B_{OQ}(\alpha)$ spektral katsayıları için, (4.5a, b) ve (4.18) bağıntılarından faydalanılarak,

$$A_{OQ}(\alpha) = \frac{e^{i\alpha l} (1 - a_1^2)^{-1/4}}{(\sigma_2 + \tau_2)} \left\{ \left[\tau_2 \cosh \chi_1(\alpha) + \frac{\sigma_2}{b_1} \sinh \chi_1(\alpha) \right] I_{11}^+(\alpha) - \frac{1}{\gamma(\alpha)} [\tau_2 b_1 \sinh \chi_1(\alpha) + \sigma_2 \cosh \chi_1(\alpha)] [I_{12}^+(\alpha) + p_1] \right\} \quad (4.22a)$$

ve

$$B_{OQ}(\alpha) = \frac{e^{i\alpha l} (1 - a_1^2)^{-1/4}}{(\sigma_2 + \tau_2)} \left\{ \left[-\cosh \chi_1(\alpha) + \frac{1}{b_1} \sinh \chi_1(\alpha) \right] I_{11}^+(\alpha) + \frac{1}{\gamma(\alpha)} [b_1 \sinh \chi_1(\alpha) - \cosh \chi_1(\alpha)] [I_{12}^+(\alpha) + p_1] \right\} \quad (4.22b)$$

ifadeleri elde edilir. $A_{OQ}(\alpha)$ ve $B_{OQ}(\alpha)$ nın bu ifadeleri (4.1b) de yerine konursa Q ayrıtından kırınan alanın bir integral ifadesi elde edilir.

4.2.3. (4.1b) İntegralinin Asimptotik Değerlendirilmesi

İyice bilindiği gibi, (4.1b) ve (4.22a, b) ile verilen ve Q ayrıtında oluşan ikinci mertebeden kırınan alanı gösteren $u_{OQ}(x, y)$ yi basit fonksiyonlar aracılığıyla ifade etmek mümkün değildir. Bununla beraber, Bölüm 3.3 de belirtildiği gibi, (4.1b) integralinin $k \rightarrow \infty$ için geçerli asimptotik ifadesini “en dik iniş çizgisi yöntemi” ile bulmak oldukça kolaydır. Bu bize çok yüksek frekanslı dalgaların söz konusu olduğu hallerde geçerli bir çözüm bulmak olanağını vermiş olacaktır. Aşağıda buna ilişkin ayrıntıları kısaca özetleyeceğiz.

(4.1b) yi “en dik iniş çizgisi yöntemi” ile değerlendirilmeye daha uygun bir biçime sokabilmek amacıyla, Bölüm 3.3.1 de de yapıldığı gibi, önce

$$x = l + r \cos \psi \quad y = r \sin \psi \quad (4.23)$$

yazalım ve sonra da α yerine (3.42b) ile tanımlı t değişkenini kayalım. (4.23) de gözüken r ve ψ değerleri Q ayrıtından itibaren ölçülmüş olan kutupsal koordinatlardır. Bu dönüşüm sonucunda, şekil 3-3 deki gibi kesilmiş α -düzlemi şekil 3-5 deki t -düzleminin $0 < Re(t) < \pi$ bandına, $\mathcal{L}$ integrasyon çizgisi de $\mathcal{T}$ eğrisine bire-bir dönüşür. Böylece, bazı basit düzenlemeler sonunda,

$$u_{OQ}(r, \psi) = \begin{cases} \int_{\mathcal{T}} A_{OQ}(-k \cos t) e^{ikr \cos(t-\psi)} e^{ikl \cos t} k \sin t dt & ; \psi \in (0, \pi) \\ \int_{\mathcal{T}} B_{OQ}(-k \cos t) e^{ikr \cos(t+\psi)} e^{ikl \cos t} k \sin t dt & ; \psi \in (\pi, 2\pi) \end{cases} \quad (4.24a)$$

elde edilir. Bu son ifadede gözüken $A_{OQ}(-k \cos t)$ ve $B_{OQ}(-k \cos t)$,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} I_{11}^+(-k \cos t) \\ I_{12}^+(-k \cos t) \end{bmatrix} &= - \frac{e^{-i\pi/4}}{k\sqrt{2\pi}(1 - \cos t)} \frac{[\mathbf{C}_1 \mathbf{V}^-(-k)]^{-1}}{(\sigma_2 + \tau_2)} \\ &\times \begin{bmatrix} (\sigma_3 - \sigma_2) \Phi_{02}^-(-k) \\ \frac{ik}{t} (\tau_3 - \tau_2) \Phi_{01}^-(-k) \end{bmatrix} \frac{e^{ikl}}{\sqrt{kl}} \end{aligned} \quad (4.24b)$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned}
 A_{OQ}(-k \cos t) &= \frac{e^{-ikl \cos t} (1 - a_1^2)^{-1/4}}{(\sigma_2 + \tau_2)} \left\{ \left[\tau_2 \cos \lambda_1(\pi - t) - i \frac{\sigma_2}{b_1} \sin \lambda_1(\pi - t) \right] \right. \\
 &\quad \times I_{11}^+(-k \cos t) - \frac{1}{k \sin t} [\tau_2 b_1 \sin \lambda_1(\pi - t) + i \sigma_2 \cos \lambda_1(\pi - t)] \\
 &\quad \left. \times [I_{12}^+(-k \cos t) + p_1] \right\} \quad (4.24c)
 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
 B_{OQ}(-k \cos t) &= - \frac{e^{-ikl \cos t} (1 - a_1^2)^{-1/4}}{(\sigma_2 + \tau_2)} \left\{ \left[\cos \lambda_1(\pi - t) + \frac{i}{b_1} \sin \lambda_1(\pi - t) \right] \right. \\
 &\quad \times I_{11}^+(-k \cos t) - \frac{1}{k \sin t} [b_1 \sin \lambda_1(\pi - t) - i \cos \lambda_1(\pi - t)] \\
 &\quad \left. \times [I_{12}^+(-k \cos t) + p_1] \right\} \quad (4.24d)
 \end{aligned}$$

den ibarettir. Şimdi apaçık görülüyor ki, (4.24a) ya ilişkin semer noktaları, $\psi \in (0, \pi)$ bölgesinde $t = \psi$; $\psi \in (\pi, 2\pi)$ bölgesinde de $t = 2\pi - \psi$ den ibarettir. Cauchy teoreminden yararlanarak $\mathcal{T}$ çizgisini semer noktalarından geçen en dik iniş çizgilerine kadar öteleyecek olursak, (4.24a) daki $u_{OQ}(r, \psi)$ nin asimptotik ifadesinin ilk (dominant) terimini, kolayca,

$$u_{OQ}(r, \psi) \sim u^i(0) \sqrt{2\pi} e^{-i\pi/4} \frac{(1 - a_1^2)^{-1/4}}{(\sigma_2 + \tau_2)} \frac{e^{ikr}}{\sqrt{kr}} \begin{cases} \mathcal{S}_1(\psi, \phi_0) & \psi \in (0, \pi) \\ \mathcal{S}_2(\psi, \phi_0) & \psi \in (\pi, 2\pi) \end{cases} \quad (4.25a)$$

şeklinde elde ederiz. Burada

$$\begin{aligned}
 \mathcal{S}_1(\psi, \phi_0) &= k \sin \psi \left[\tau_2 \cos \lambda_1(\pi - \psi) - i \frac{\sigma_2}{b_1} \sin \lambda_1(\pi - \psi) \right] I_{11}^+(-k \cos \psi) \\
 &\quad - [\tau_2 b_1 \sin \lambda_1(\pi - \psi) + i \sigma_2 \cos \lambda_1(\pi - \psi)] [I_{12}^+(-k \cos \psi) + p_1] \quad (4.25b)
 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_2(\psi, \phi_0) = & k \sin \psi \left[\cos \lambda_1(\pi - \psi) - \frac{i}{b_1} \sin \lambda_1(\pi - \psi) \right] I_{11}^+(-k \cos \psi) \\ & - [b_1 \sin \lambda_1(\pi - \psi) + i \cos \lambda_1(\pi - \psi)] [I_{12}^+(-k \cos \psi) + p_1] \end{aligned} \quad (4.25c)$$

konmuştur. (4.25a) da gözüken $e^{ikr}/\sqrt{kr}$ çarpanı $u_{OQ}(r, \psi)$ nin “ Q ayırından kırınan alan” olarak yorumlanmasına olanak verir. (4.25a) nın $\psi \in (0, \pi)$ ye ilişkin ifadesi şekil 4-2b de $y > 0$ ile belirlenen bölgedeki, $\psi \in (\pi, 2\pi)$ ye ilişkin ifadesi ise $y < 0$ bölgesindeki alanı verir.

4.3. O da Oluşan İkinci Mertebeden Terimler

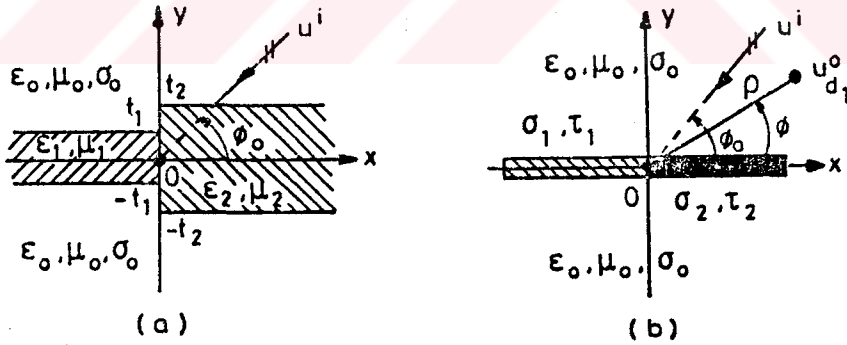
Yukarıda bölüm 4.2 de yapılan işlemleri Q ile O nun sırasını değiştirerek tekrar edecek olursak, önce Q da uyarılan ve O ya doğru yayılan kırınmış alanın sanra O da kırınmasıyla ortaya çıkan ikinci mertebeden $u_{QO}(\rho, \phi)$ terimini elde ederiz. Bunun için, (4.25a, b, c) bağıntılarında $r \rightarrow \rho$, $u^i(0) \rightarrow u^i(Q)$, $\sigma_3 \rightarrow \sigma_1$, $\tau_3 \rightarrow \tau_1$, $\phi_0 \rightarrow \pi - \phi_0$, $\psi \rightarrow \pi - \phi$ değişikliklerini yapmak gerekir ve yetiştir.

BÖLÜM 5

ÖRNEK UYGULAMALAR

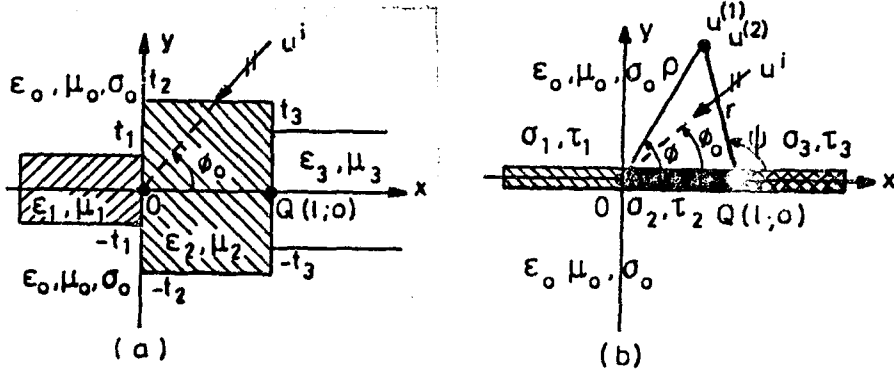
Bu bölümde, esasları önceki bölümlerde oldukça ayrıntılı bir biçimde açıklanmış bulunan iki ve üç parçalı bir dielektrik tabakadan elektromagnetik düzlemsel dalgaların saçılmasına ilişkin sonuçların, tabakaya ait bir takım fiziksel ve geometrik parametrelerle değişimini açığa çıkarabilmek amacıyla *TM* haline ilişkin bazı sayısal örnekler göz önüne alınmıştır.

Bu amaçla, ilk olarak, şekil 5-1 de gözüken iki parçalı dielektrik tabakanın *O* ayrıtında kırınan alan göz önüne alınmıştır. Bu alanın $y > 0$ bölgesindeki ifadesinin ϕ gözlem açısı ile olan değişimi, iki parçalı dielektrik tabakayı oluşturan parametrelerin bazı farklı değerleri için şekil 5-3 ve şekil 5-4 de gösterilmiştir.



Şekil 5-1. a) İki parçalı dielektrik tabaka b) Tabaka modeli

Daha sonra ise, şekil 5-2 deki üç parçalı dielektrik tabanın *O* ve *Q* ayrıtalarında oluşan birinci mertebeden kırınan alanların toplamının $y > 0$ bölgesindeki ifadesi ile ikinci mertebeden kırınan alanların toplamının aynı bölgedeki ifadesinin ϕ gözlem açısıyla olan değişimleri, tabakayı oluşturan parametrelerin bazı farklı değerleri için, sırasıyla, şekil 5-5, 5-6 ve şekil 5-7, 5-8, 5-9 da verilmiştir.



Şekil 5-2. a) Üç parçalı dielektrik tabaka b) Tabaka modeli

Son olarak, $R_{1,2} = i / (2\omega\epsilon_0 t_{1,2}(\epsilon_{1,2} - 1))$ olmak üzere

$$\vec{e}_y \times [\vec{E}(x, +0) - \vec{E}(x, -0)] = 0 \quad (5.1a)$$

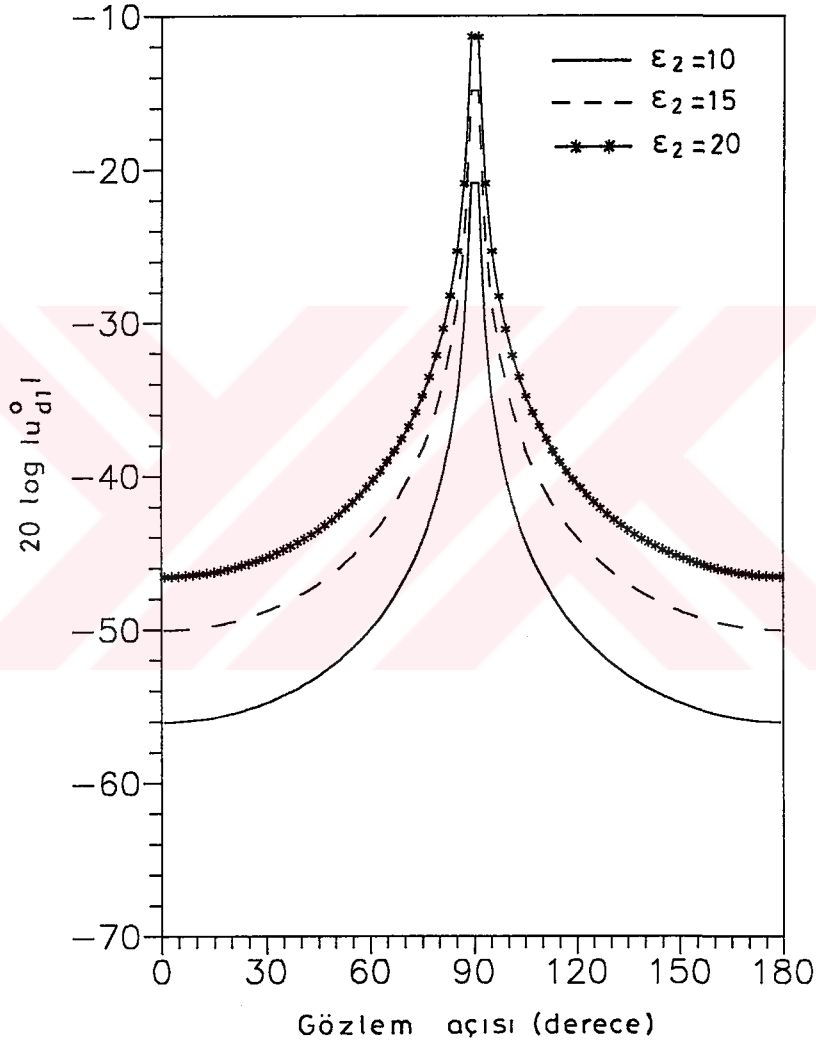
ve

$$\vec{e}_y \times [\vec{H}(x, +0) - \vec{H}(x, -0)] = -\frac{1}{R_{1,2}} \vec{e}_y \times [\vec{e}_y \times \vec{E}(x, +0)] \quad (5.1b)$$

sınır koşullarıyla modellenen iki parçalı bir rezistif düzlemin ayırıtında kırılan alan ile şekil 5-1 deki iki parçalı dielektrik tabakanın O ayırıtında kırılan alanın $y > 0$ bölgesindeki ifadelerinin karşılaştırılması, bir takım farklı parametrik değerler göz önüne alınarak, şekil 5-10, 5-11, 5-12 ve şekil 5-13, 5-14, 5-15 de verilmiştir.

Yukarıda sözü edilen değişik durumlara ilişkin sonuçların yorumu aşağıda, ayrı ayrı, yapılmıştır.

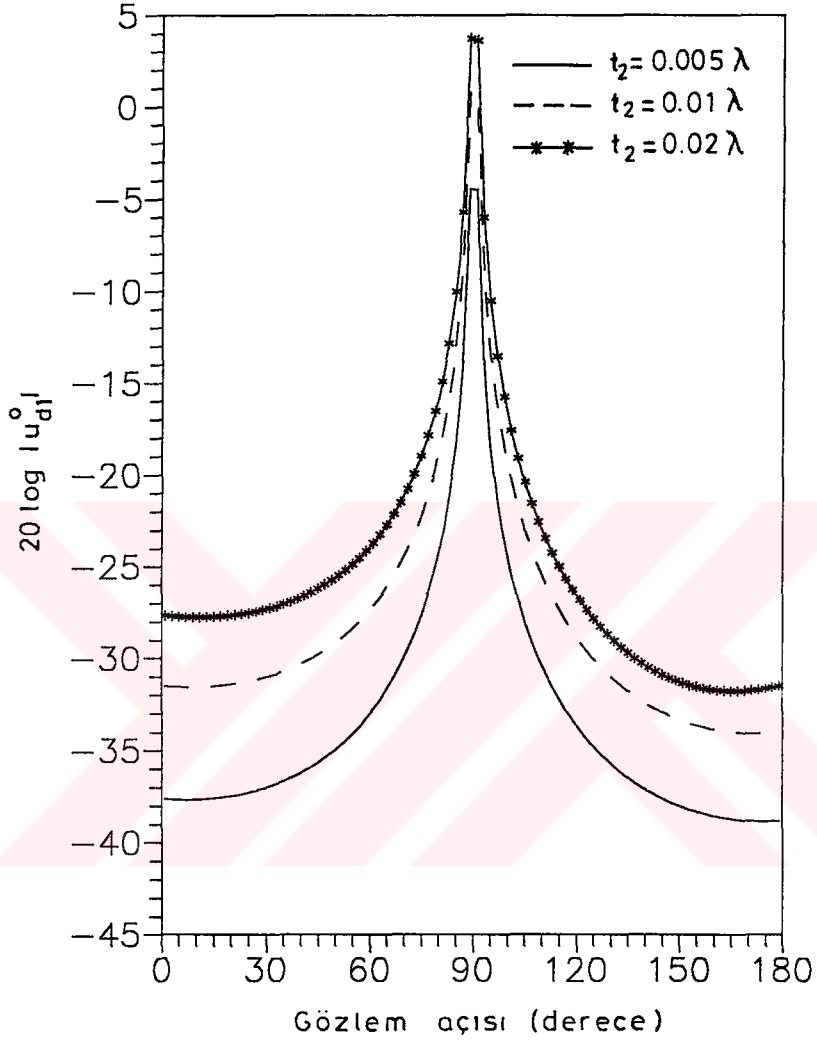
A-) Şekil 5-3 ve şekil 5-4 de, şekil 5-1 de gözüken $x > 0$ bölgesindeki dielektrik tabakanın, sırasıyla, farklı bağıl dielektrik sabitlerine ve kalınlıklara sahip olması halinde, O ayrıtında kırınan $u_{d1}^0(\rho, \phi)$ alanının genliğinin ϕ gözlem açısıyla olan değişimi verilmiştir. Bu şekillerden de açıkça görüleceği gibi, $x > 0$ bölgesinde bulunan dielektrik tabakanın bağıl dielektrik sabiti ϵ_2 ve kalınlığı t_2 arttıkça kırınan alanın genliği de, beklendiği gibi, artmaktadır.



Şekil 5-3. Farklı ϵ_2 değerleri için O ayrıtından kırınan alan

$$\rho = 10\lambda, \phi_0 = \pi/2, \mu_1 = \mu_2 = 1, \epsilon_1 = 5$$

$$t_1 = t_2 = 10^{-3}\lambda$$

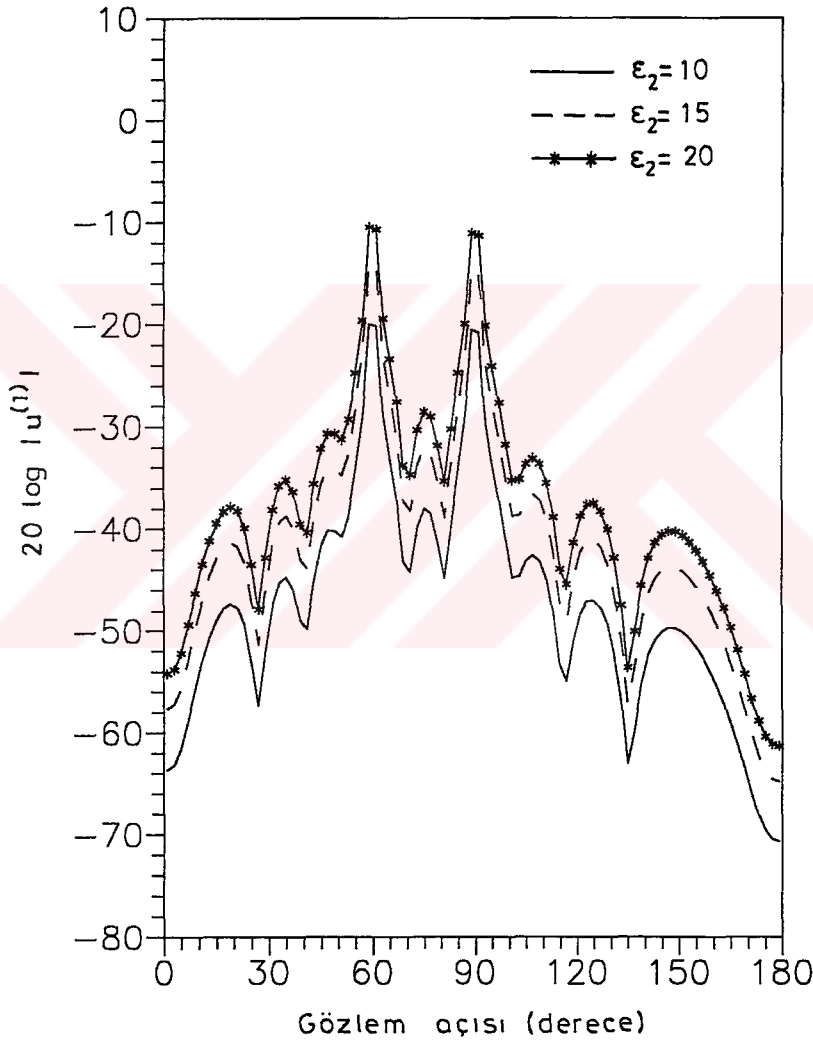


Şekil 5-4. Farklı t_2 değerleri için O ayrıtından kırınan alan

$$\rho = 10\lambda, \phi_0 = \pi/2, \mu_1 = \mu_2 = 1, t_1 = 10^{-3}\lambda$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10$$

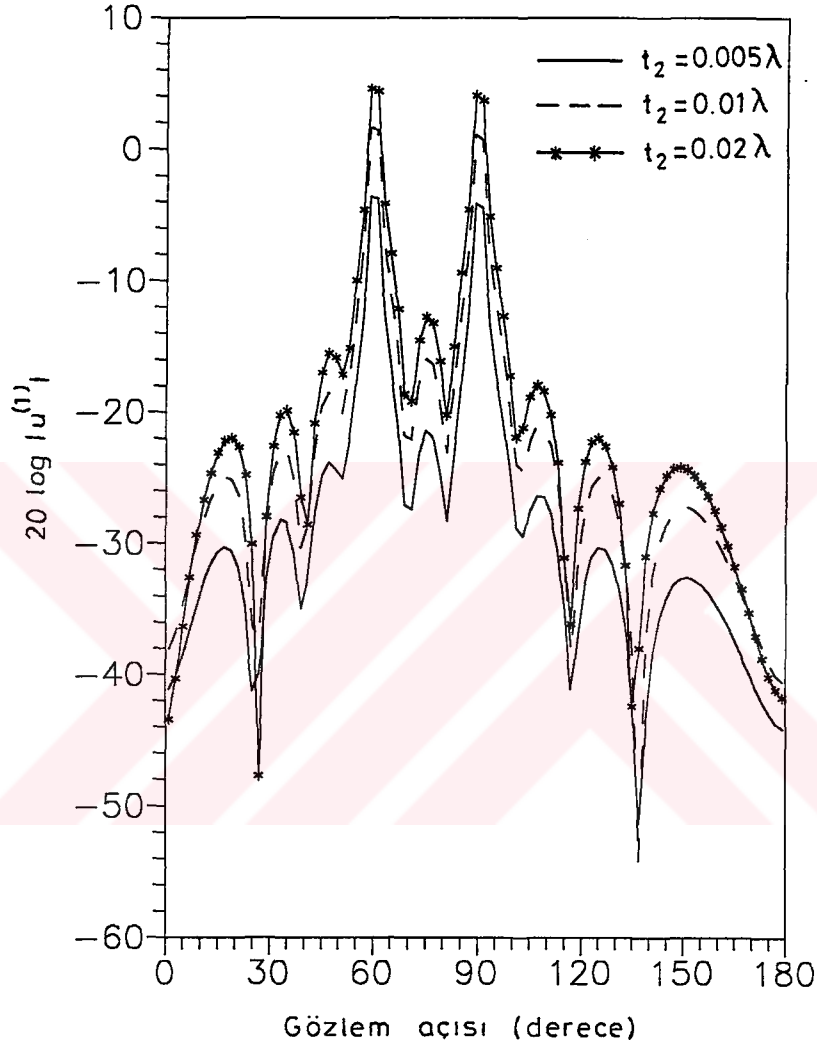
B-) Şekil 5-5 ve şekil 5-6 da, şekil 5-2 de gözüken $x \in (0, l)$ bölgesindeki dielektrik tabakanın, sırasıyla, farklı bağıl dielektrik sabitlerine ve kalınlıklara sahip olması halinde, O ve Q ayrıtlarında oluşan birinci mertebeden kırınan alanların toplamının $(u^{(1)} = u_{d_1}^0(\rho, \phi) + u_{d_1}^Q(r, \psi))$ genliğinin ϕ gözlem açısıyla olan değişimi verilmiştir. Bu şekillerden de açıkça görüleceği gibi, $x \in (0, l)$ bölgesinde bulunan dielektrik tabakanın bağıl dielektrik sabiti ε_2 ve kalınlığı t_2 arttıkça kırınan alanın genliği de, beklendiği gibi, artmaktadır.



Şekil 5-5. Farklı ε_2 değerleri için $u^{(1)}$ alanının genliği

$$\rho = 10\lambda, \phi_0 = \pi/2, \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1$$

$$t_1 = t_2 = t_3 = 10^{-3}\lambda, \varepsilon_1 = \varepsilon_3 = 5$$

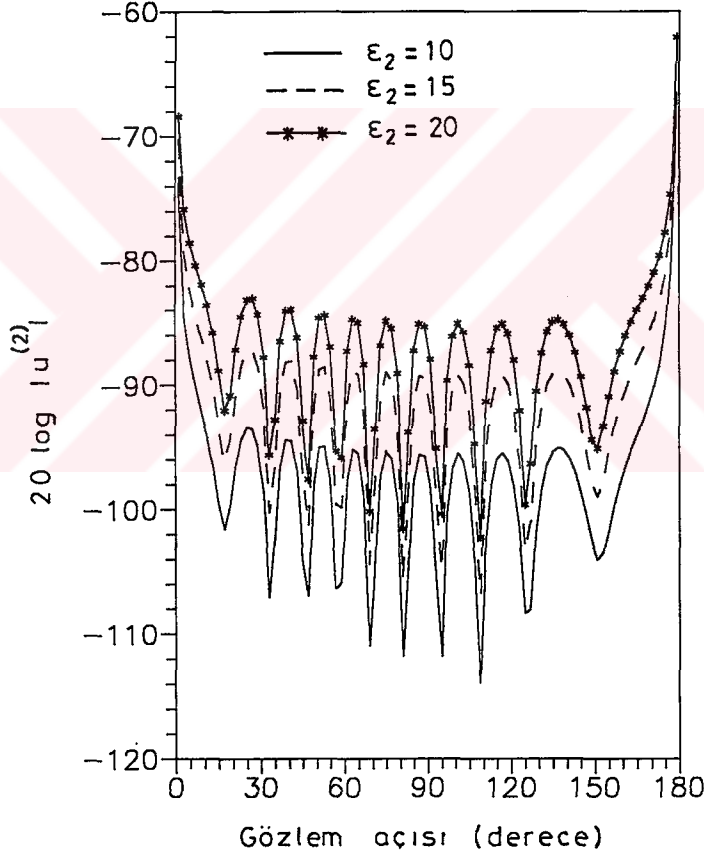


Şekil 5-6. Farklı t_2 değerleri için $u^{(1)}$ alanın genliği

$$\rho = 10\lambda, \phi_0 = \pi/2, \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 10, t_1 = t_3 = 10^{-3}\lambda$$

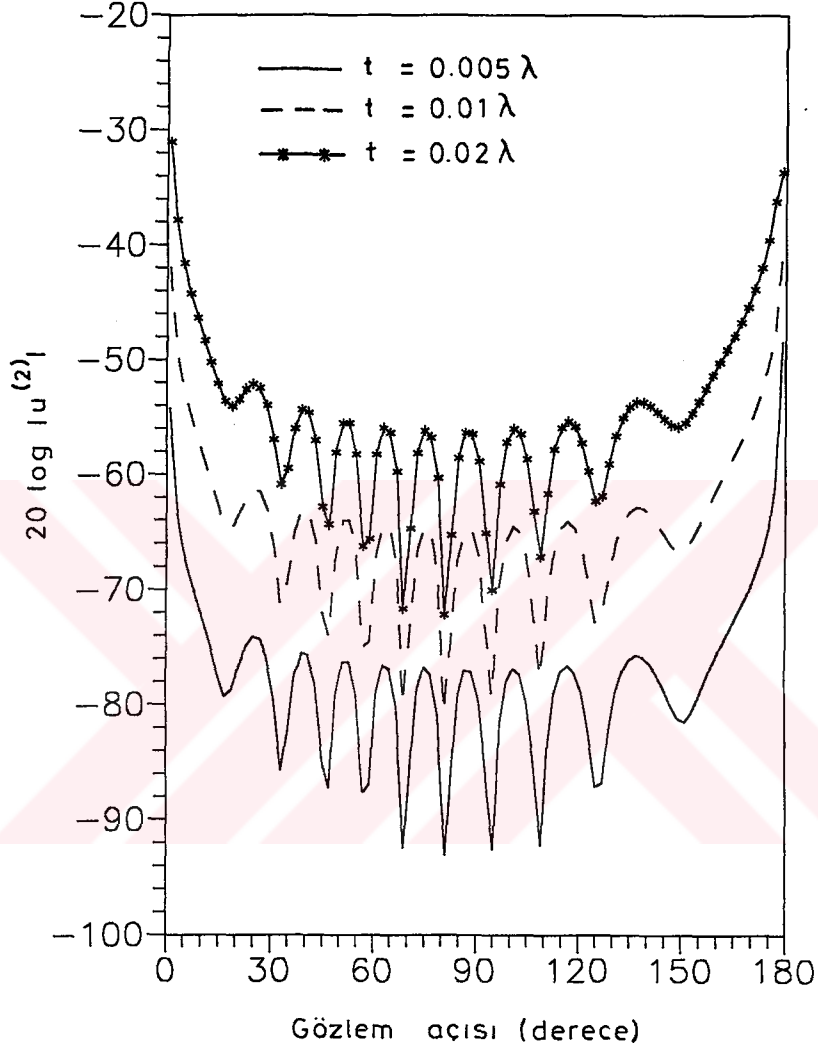
C-) Şekil 5-7, Şekil 5-8 ve şekil 5-9 da, şekil 5-2 de gözüken $x \in (0, l)$ bölgesindeki dielektrik tabakanın, sırasıyla, farklı bağıl dielektrik sabitlerine, kalınlıklara ve uzunluklara sahip olması halinde, O ve Q ayrıtlarında oluşan ikinci mertebeden kırınan alanların toplamının ($u^{(2)} = u_{QO}(\rho, \phi) + u_{OQ}(r, \psi)$) genliğinin ϕ gözlem açısıyla olan değişimi verilmiştir. Bu şekillerden de açıkça görüleceği üzere, kırınan alanın genliği, beklendiği gibi, $x \in (0, l)$ bölgesinde bulunan dielektrik tabakanın bağıl dielektrik sabiti ε_2 ve kalınlığı t_2 arttıkça artmakta, dielektrik tabakanın uzunluğu l ise arttıkça azalmaktadır. Ayrıca ikinci mertebeden kırınan alana ilişkin osilasyon da l ile orantılı olarak artmaktadır.



Şekil 5-7. Farklı ε_2 değerleri için $u^{(2)}$ alanın genliği

$$\rho = 10\lambda, \phi_0 = \pi/2, l = 5\lambda, \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1$$

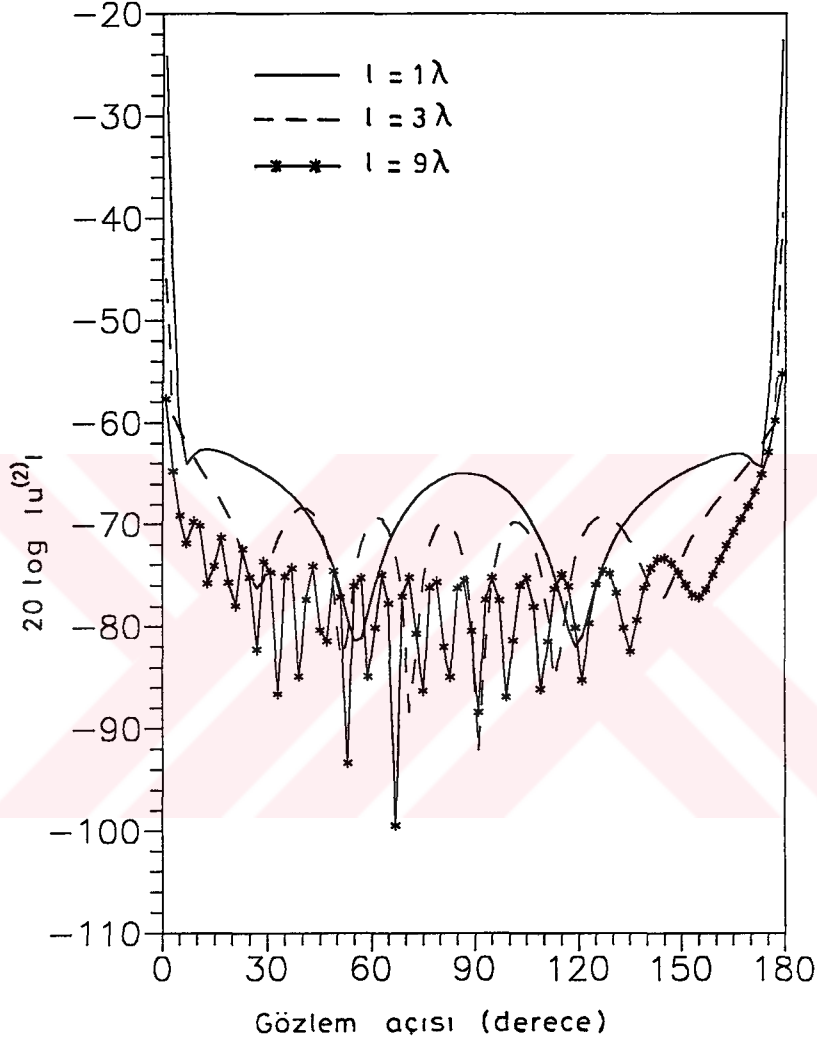
$$t_1 = t_3 = 10^{-3}\lambda, t_2 = 2 \cdot 10^{-3}\lambda, \varepsilon_1 = \varepsilon_3 = 5$$



Şekil 5-8. Farklı t_2 değerleri için $u^{(2)}$ alanının genliği

$$\rho = 10\lambda, \phi_0 = \pi/2, l = 5\lambda, \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1$$

$$\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = 10, t_1 = t_3 = 10^{-3}\lambda$$



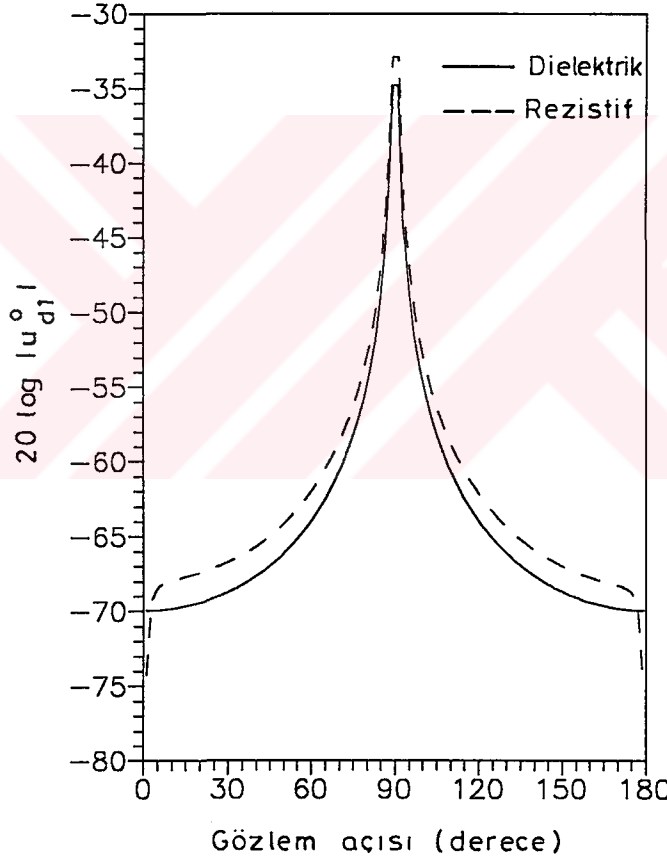
Şekil 5-9. Farklı l değerleri için $u^{(2)}$ alanının genliği

$$\rho = 10\lambda, \phi_0 = \pi/2, \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1$$

$$\varepsilon_1 = 5, \varepsilon_2 = 10, \varepsilon_3 = 15$$

$$t_1 = 10^{-3}\lambda, t_2 = 5 \cdot 10^{-3}\lambda, t_3 = 10^{-2}\lambda$$

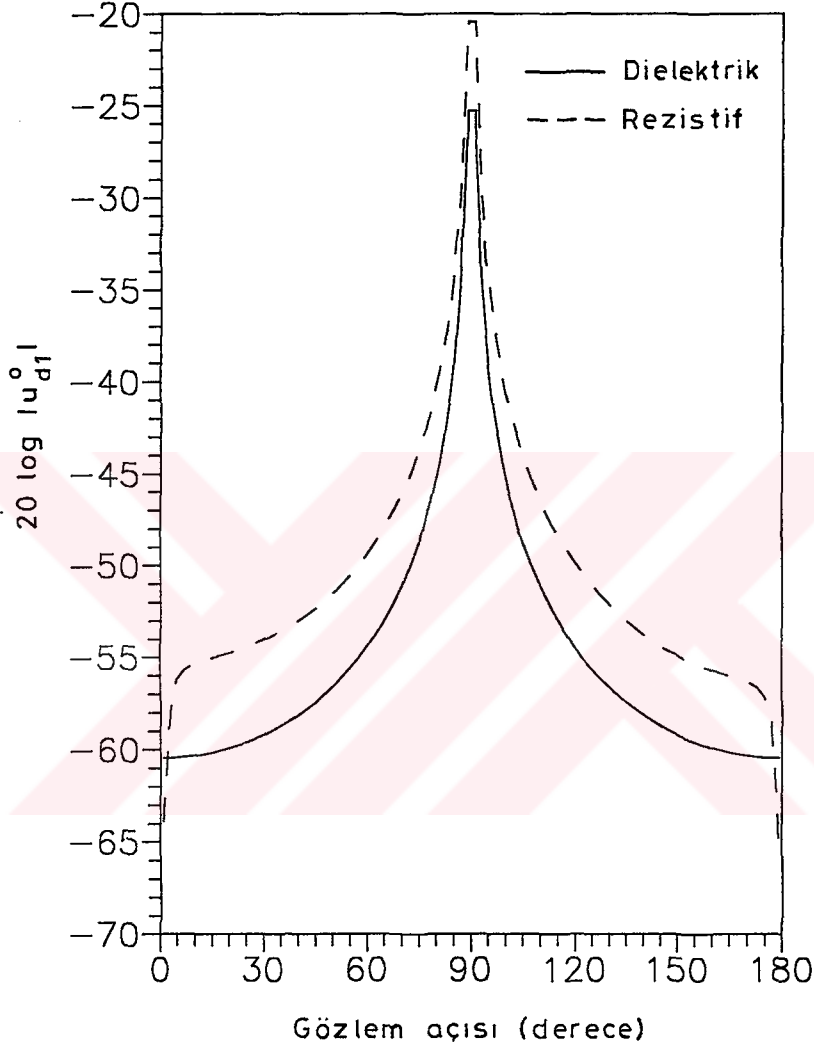
D-) Şekil 5-10,5-11,5-12 ve Şekil 5-13,5-14,5-15 de, sırasıyla, şekil 5-1 de gözüken iki parçalı dielektrik tabakanın O ayırıtında kırınan alanın genliğiyle, (5.1a, b) bağıntılarıyla modellenmiş iki parçalı bir rezistif yüzeyin ayırıtında kırınan alanın genliğinin, dielektrik tabaka ile rezistif yüzeyin $x > 0$ bölgesinde yer alan parçalarının farklı bağl dielektrik sabiti ϵ_2 ve kalınlık t_2 ye sahip olmaları durumuna ilişkin birer karşılaştırılması verilmiştir. Aşağıdaki şekillerden de anlaşılacağı gibi, tabakalar ve yüzeyler arasındaki kontrastın zayıf olduğu hallerde, iki parçalı dielektrik tabakaya ilişkin sonuçlarla iki parçalı rezistif yüzeye ilişkin sonuçlar çakışmakta, aksi halde ise farklılık göstermektedir.



Şekil 5-10. Dielektrik tabaka ile rezistif yüzeyin karşılaştırılması ($\epsilon_2 = 6$)

$$\rho = 10\lambda, \phi_0 = \pi/2, \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1$$

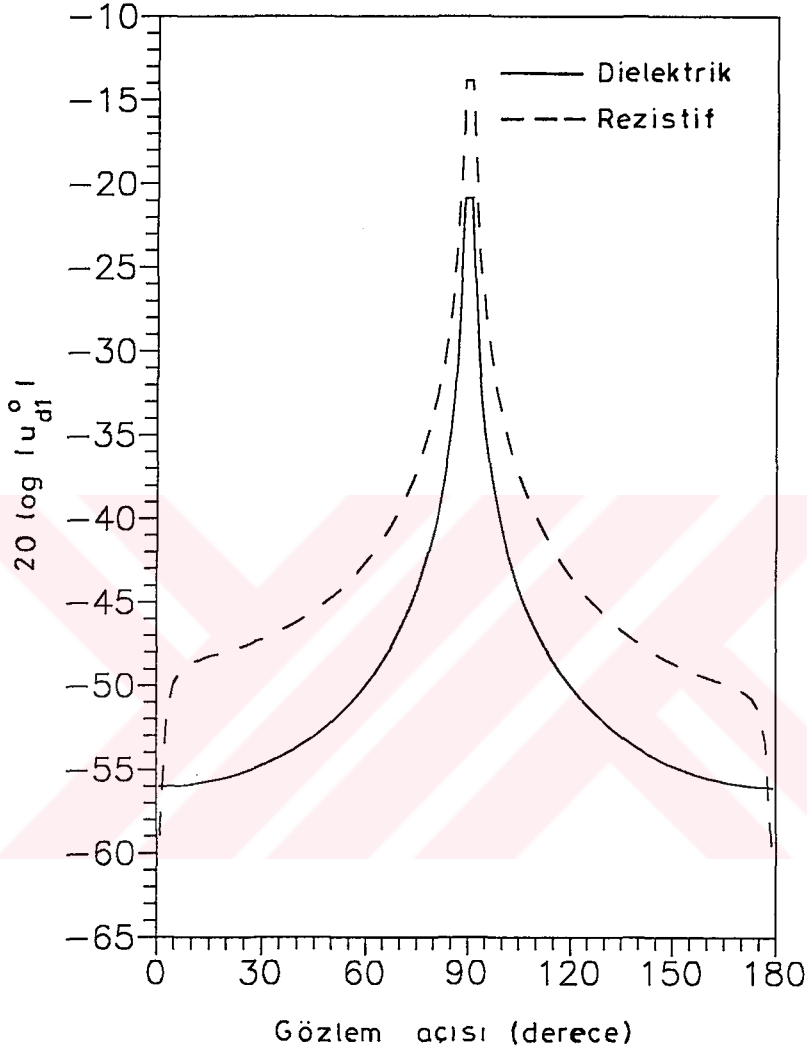
$$\epsilon_1 = 5, t_1 = t_2 = 10^{-3}\lambda$$



Şekil 5-11. Dielektrik tabaka ile rezistif yüzeyin karşılaştırılması ($\epsilon_2 = 8$)

$$\rho = 10\lambda, \phi_0 = \pi/2, \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1$$

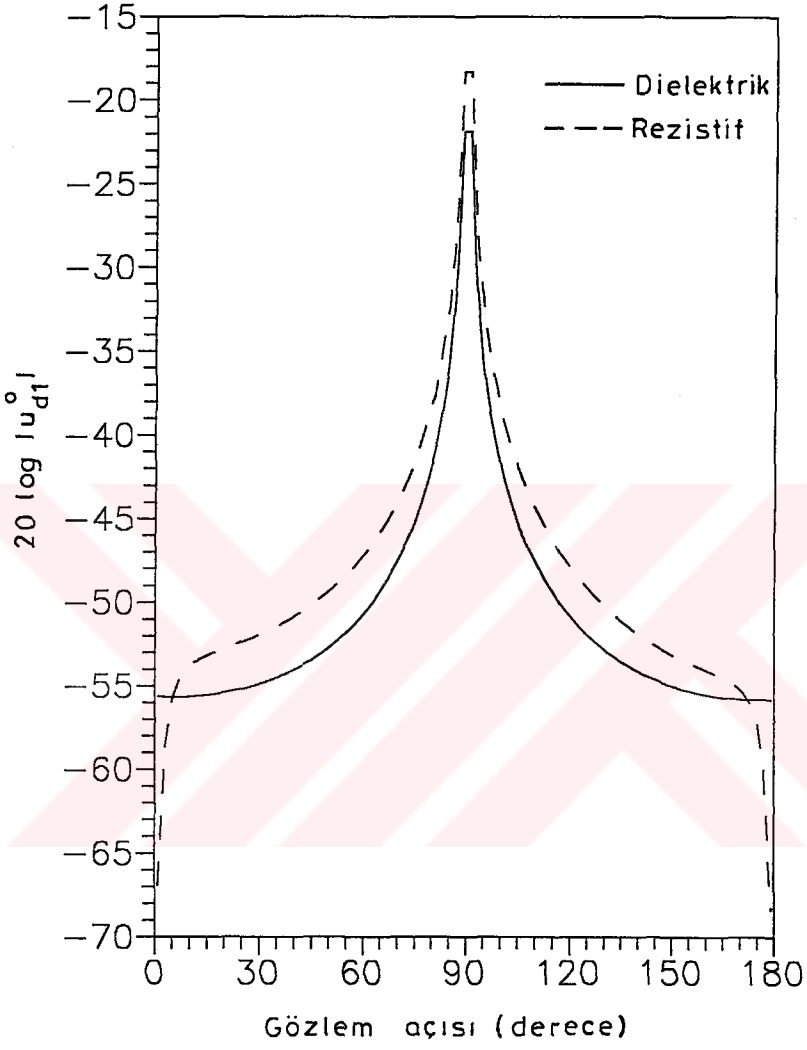
$$\epsilon_1 = 5, t_1 = t_2 = 10^{-3}\lambda$$



Şekil 5-12. Dielektrik tabaka ile rezistif yüzeyin karşılaştırılması ($\epsilon_2 = 10$)

$$\rho = 10\lambda, \phi_0 = \pi/2, \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1$$

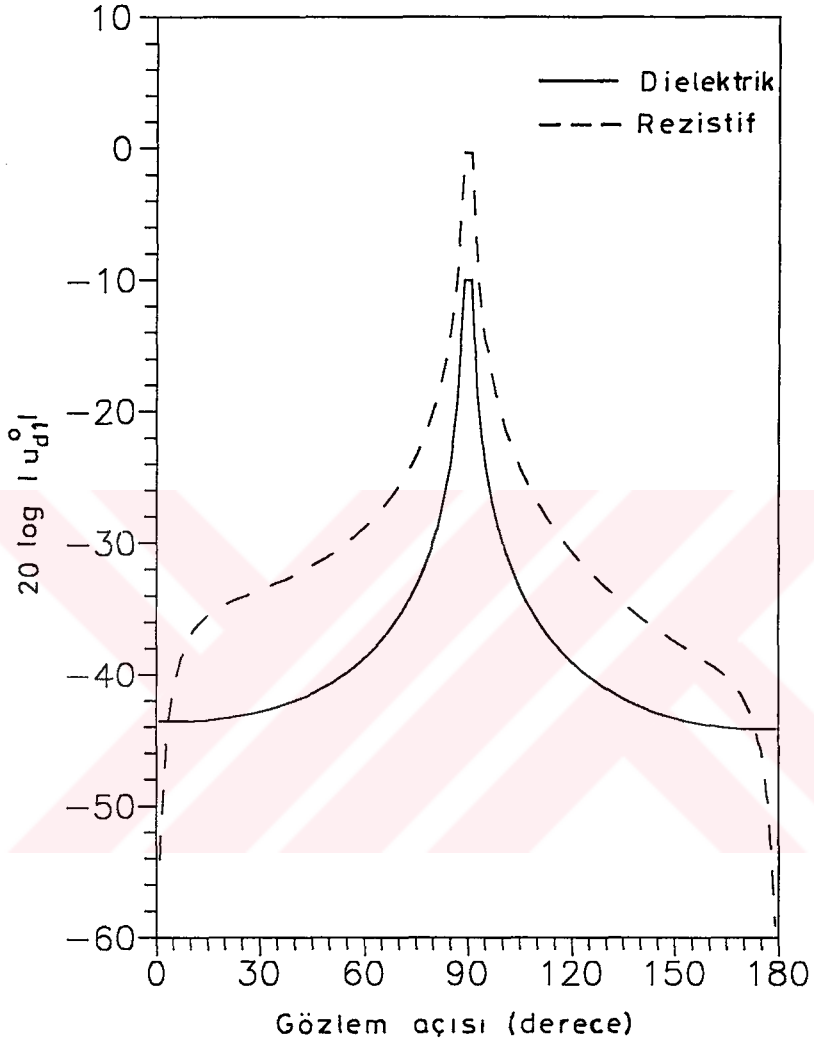
$$\epsilon_1 = 5, t_1 = t_2 = 10^{-3}\lambda$$



Şekil 5-13. Dielektrik tabaka ile rezistif yüzeyin karşılaştırılması ($t_2 = 15 \cdot 10^{-4} \lambda$)

$$\rho = 10\lambda, \phi_0 = \pi/2, \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1$$

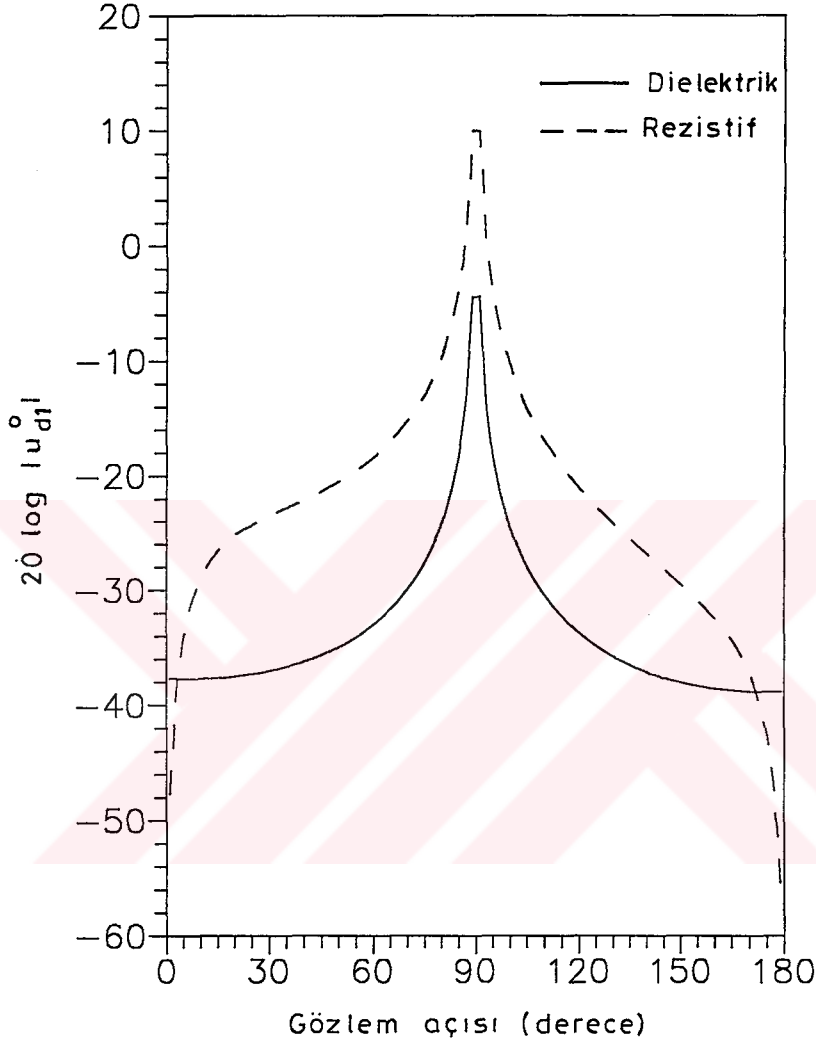
$$t_1 = 10^{-3} \lambda, \epsilon_1 = \epsilon_2 = 10$$



Şekil 5-14. Dielektrik tabaka ile rezistif yüzeyin karşılaştırılması ($t_2 = 3 \cdot 10^{-3} \lambda$)

$$\rho = 10\lambda, \phi_0 = \pi/2, \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1$$

$$t_1 = 10^{-3} \lambda, \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10$$



Şekil 5-15. Dielektrik tabaka ile rezistif yüzeyin karşılaştırılması ($t_2 = 6 \cdot 10^{-3} \lambda$)

$$\rho = 10\lambda, \phi_0 = \pi/2, \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1$$

$$t_1 = 10^{-3}\lambda, \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10$$

BÖLÜM 6

SONUÇLAR VE GELECEK ÇALIŞMALARA YÖNELİK ÖNERİLER

Önceki bölümlerde yapılmış olan teorik inceleme ve sayısal uygulamalar basamak türünden süreksizlikler içeren ince dielektrik yapıların neden olduğu ayırıt koşullarının, bu yapılar düzlemsel yüzeylerle modellenerek oldukça kolay bir biçimde incelenebileceğini göstermektedir. Bu amaçla geliştirilen teoride,

- i) birinci mertebeden kırınmış terimler hesaplanırken ayırıtlar “gelen dalga”nın etkisinde bulunan iki yarım düzlemin arakesiti olarak tek başlarına düşünülmüş ve inceleme bir Wiener-Hopf probleminin çözümüne indirgenmiştir. Buna karşılık,
- ii) ikinci mertebeden terimler hesaplanırken her ayırıtın diğer ayırıt da uyarılan birinci mertebeden terimin etkisinde olduğu düşünülmüş ve inceleme gene (i) deki gibi, bir Wiener-Hopf problemine indirgenerek, yapılmıştır.

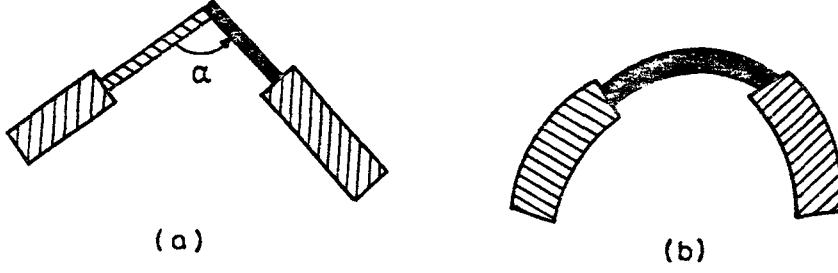
Sonuçlar, basamak yüksekliği ve genişliği, geliş açısı, polarizasyon, kalınlık, dalga boyu, bünye parametreleri ve benzeri büyüklüklerin olayı nasıl etkilediğini açıklığa kavuşturmak olanağını vermiştir.

Yapılan incelemede,

- i) gelen dalganın lineer polarize ve ayırıt dik olduğu ve
- ii) tabakaların bir düzlem boyunca sıralandığı

kabul edilmiştir. İlk varsayım, hemen anlaşılacağı gibi, sonuçların genelliğini bozucu nitelikte değildir. Çünkü, bir yandan, iki boyutlu dalgaları her zaman birinin elektrik diğerinin de magnetik alanı ayırıt paralel lineer polarize iki dalganın süperpozisyonu şeklinde gösterebilmek olanağı vardır; diğer yandan da, ayırıt dik gelmeyen dalgalara ilişkin sonuçları

dik gelen dalgaya ilişkin olanlardan belirli bir çarpan aracılığıyla elde etmek mümkündür. Bununla beraber ikinci varsayım oldukça kısıtlayıcıdır. Tabakaların değişik açılarla birleşmesi veya eğri bir yüzey üzerinde bulunmaları halinde ortaya çıkacak olayların incelenmesi de hem teorik hem de pratik bakımdan çok ilginç olabilir (Bak. şekil 6-1).



Şekil 6-1. a) Tabakalı kama b) Eğrisel tabaka

Son olarak, gelen dalganın bir temel niteliğine daha, yani düzlemsel oluşuna da dikkati çekmek yerinde olacaktır. Böylece bulunan sonuçlar, şüphesiz, silindirik, küresel ve bunun gibi geometrik ışınlarla gösterilebilen bütün dalgaların saçılması hakkında bir fikir edinmemize olanak sağlar. Buna karşın, aydınlatmanın demetler aracılığıyla yapılmış olması halinde oluşabilecek olaylar hakkında bir fikir edinmemize olanak vermez. Bu nedenle, gelen dalganın bir demet olması hali de ayrıca incelemeye değer bir konu oluşturmaktadır.

KAYNAKLAR

- [1] ANDERSON, I., Plane Wave Diffraction by a Thin Dielectric half plane, IEEE Trans. Ann. Prop., AP-27, pp. 584-589, 1979.
- [2] SENIOR, T. B. A., Scattering by Resistive Strips, Radio. Sci., Vol. 14, pp. 911-924, 1979.
- [3] SENIOR, T. B. A., LIEPA, V. V., Backscattering from Tapered Resistive Strips, IEEE Trans. Ann. Prop., AP-32, pp. 747-751, 1984.
- [4] SENIOR, T. B. A., Combined Resistive and Conductive Sheets, IEEE Trans. Ann. Prop., AP-33, pp. 577-579, 1985.
- [5] SENIOR, T. B. A., VOLAKIS, J. L., Sheet Simulation of a Thin Dielectric Layer, Radio. Sci., Vol. 22, pp. 1261-1272, 1987.
- [6] RAWLINS, A. D., MEISTER, E., SPECK, F. O., Diffraction by an Acoustically Transmissive or an Electromagnetically Dielectric Half-Plane, Math. Meth. App. Sci., Vol. 14, pp. 387-402, 1991.
- [7] NOBLE, B., The Wiener-Hopf Techniques, Pergamon, London, 1958.
- [8] MEIXNER, J., The Behaviour of Electromagnetic Fields at Edges, New York University Research Report, No. EM-72, 1954.
- [9] PIDDUCK, F. B., Diffraction of Light by a Semi-Transparent Sheet, Quart. J. Math. Oxford, Vol. 2, pp. 316-320, 1951.
- [10] RICHMOND, J. H., Antenna Pattern Distortion by Dielectric Sheets, IRE Trans. Ann. Prop., AP-4, pp. 139-142, 1956.
- [11] BREKHOVSKIKH, L. M., Waves in Layered Media, Academic Press, New York, 1960.

- [12] İDEMEN, M., "Universal Boundary Conditions and Cauchy Data for The Electromagnetic Field", Essays on The Formal Aspects of Electromagnetic Theory, World Scientific Publ. Co., 1993.
- [13] DANIELE, V. G., On The Factorization of Wiener-Hopf Matrices in Problems Solvable with Hurd's Method, IEEE Trans. Ann. Prop., AP-26, pp. 614-616, 1978.
- [14] KHRAPKOV, A. A., Certain Cases of The Elastic Equilibrium of an Infinite Wedge with a Non-Symmetric Nodge at The Vertex, Subjected to Concentrated Forces, Prikl. Math. Mekh., Vol. 35, pp. 625-637, 1971.
- [15] SMIRNOV, V. I., A Course of Higher Mathematics, Vol. 5, Pergamon Press, London, 1964.
- [16] KELLER, J. B., Geometrical Theory of Diffraction, J. Opt. Soc. Amer., Vol. 52, pp. 116-130, 1962.
- [17] SERBEST, A. H., BÜYÜKAKSOY, A., "Some Approximate Methods Related to The Diffraction by Strips and Slits", Analytical and Numerical Methods in Electromagnetic Wave Theory, Science House Co. Ltd., Tokyo, 1993.

F.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ

ÖZGEÇMİŞ

Ali Alkumru, 1966 yılında Ankara'da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini İstanbul'da tamamladı. 1985 yılında Saint-Benoit Fransız Lisesinden mezun olduktan sonra aynı yıl İ.T.Ü. Elektrik-Elektronik Fakültesi, Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği Bölümünde öğrenime başladı. 1989 yılında bu bölümden mühendis ünvanı alarak mezun oldu ve aynı bölümde başladığı yüksek lisans öğrenimini 1992 yılında tamamladı. 1992 yılında ise yine aynı bölümde doktora öğrenimine başladı.

1989 yılından beri İ.T.Ü. Elektrik-Elektronik Fakültesi, Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği Bölümü, Elektromagnetik Alanlar ve Mikrodalga Tekniği Anabilim Dalı'nda Araştırma Görevlisi olarak çalışmakta olan Ali Alkumru, Difraksiyon teorisi, ters saçılma ve karma sınır değer problemleri konularında çalışmalarına devam etmekte ve bu çalışmaların sonuçlarını çeşitli uluslararası dergi ve konferanslarda yayınlamaktadır.