T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

WIJSMAN YAKINSAKLIK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Fetullah AKBULUT

Anabilim Dalı : Matematik

Programı : Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi

Şubat-2015

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

WIJSMAN YAKINSAKLIK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Fetullah AKBULUT
(991121101)

Anabilim Dalı : Matematik

Programı : Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi

Danışman: Doç. Dr. Yavuz ALTIN

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih:

Şubat-2015

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

WIJSMAN YAKINSAKLIK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Fetullah AKBULUT
(991121101)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 09.02.2015
Tezin Savunulduğu Tarih: 27.02.2015

Tez Danışmanı: Doç.Dr. Yavuz ALTIN(Fırat Üniversitesi)

Diğer Jüri Üyeleri:
Prof. Dr. Rifat ÇOLAK (Fırat Üniversitesi)
Yrd. Doç. Dr. Murat CANDAN (İnönü Üniversitesi)

Şubat-2015

TEŞEKKÜR

Bu çalışmamın hazırlanması sürecinde daima yanımda olan her konuda yardımlarını esirgemeyen, gerek bilgi ve gerek tecrübelerinden her zaman yararlandığım, saygıdeğer hocam Doç. Dr. Yavuz ALTIN' a sonsuz teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım. Ayrıca karşılaştığımız problemlerde tartışmalarıyla desteğini bizden esirgemeyen Doç. Dr. Hıfsı ALTINOK' a teşekkürlerimi sunarım.

Fetullah Akbulut

Elazığ-2015

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖZET

WİJSMAN YAKINSAKLIK

Dört bölümden oluşan bu çalışmanın ilk bölümünde temel tanım ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde İstatistiksel yakınsaklık kavramı ve bazı içerme teoremleri incelenmiştir.

Üçüncü bölümde küme dizilerinin istatistiksel yakınsaklığı ile kuvvetli toplanabilirliği arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

Dördüncü bölümde ise küme dizilerinin α. dereceden yakınsaklığı, α. dereceden istatistiksel yakınsaklık, α. dereceden kuvvetli toplanabilir küme dizileri incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: İstatistiksel yakınsaklık, Cesàro toplanabilme, Wijsman yakınsaklık.

SUMMARY

WIJSMAN CONVERGENCE

In the first chapter of this thesis that consists of four chapters, we give some fundamental definitions and theorems.

In the second chapter, we give the concepts of statistical convergence and some inclusion theorems.

In the third chapter, we examine the relation between the statistically convergence and strongly summability of the sequences of sets.

In the fourth chapter, we give convergence of order α, statistical convergence and strongly summability of order α of the sequences of sets.

Keywords: Statistical convergence, Cesàro summability, Wijsman convergence.

SİMGELER LİSTESİ

Bu çalışmada kullanılan bazı simgeler, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

$\mathbb{N}$	:	Doğal sayılar cümlesi
$\mathbb{C}$	:	Kompleks sayılar cümlesi
$\mathbb{R}$	:	Reel sayılar cümlesi
w	:	$\mathbb{C}$ üzerinde tanımlı bütün diziler uzayı
l_∞	:	Kompleks terimli sınırlı diziler uzayı
c	:	Kompleks terimli yakınsak diziler uzayı
c_0	:	Kompleks terimli sıfıra yakınsak diziler uzayı
$\delta(E)$	:	E 'nın doğal yoğunluğu
S	:	İstatistiksel yakınsak diziler uzayı
S^α	:	α. dereceden istatistiksel yakınsak diziler uzayı
$h.h.k$	:	Hemen hemen her k için

1. GİRİŞ

1.1 TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde daha sonraki bölümlerde kullanacağımız bazı temel tanım ve teoremleri vereceğiz.

Tanım 1.1.1 X boş olmayan bir cümle ve K reel veya kompleks sayılar cismi olsun.

$+ : X \times X \to X$

$\cdot : K \times X \to X$

fonksiyonları aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa, X cümlesine K cismi üzerinde bir vektör (lineer) uzayı adı verilir. Her $\lambda, \mu \in K$ ve $x, y, z \in X$ için

$L1)$ $x + y = y + x$

$L2)$ $(x + y) + z = x + (y + z)$

$L3)$ $\forall x \in X$ için $x + \theta = x$ olacak şekilde bir $\theta \in X$ vardır.

$L4)$ Herbir $x \in X$ için $x + (-x) = \theta$ olacak şekilde bir $-x \in X$ vardır.

$L5)$ $1.x = x$

$L6)$ $\lambda (x + y) = \lambda x + \lambda y$

$L7)$ $(\lambda + \mu) x = \lambda x + \mu x$

$L8)$ $\lambda (\mu x) = (\lambda \mu) x$ dir [1].

Tanım 1.1.2 X, K cismi üzerinde bir lineer uzay olsun.

$\|.\| : X \to K$

fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa, $\|.\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir norm ve $(X, \|.\|)$ ikilisine de bir normlu uzay adı verilir.

$N1)$ $\|x\| \geq 0$, $(x \in X)$

$N2)$ $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = \theta$, $(x \in X)$

$N3)$ $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$, $(\alpha \in K, x \in X)$

$N4)$ $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $(x, y \in X)$ dir [1].

Bir $(X, \|.\|)$ normlu uzayı tam ise, yani bu uzaydan alınan her Cauchy dizisi bu uzayın bir noktasına yakınsıyorsa bu normlu uzaya, *Banach uzayı* adı verilir.

Kompleks terimli tüm $x = (x_k)$, $(k = 1, 2, 3, ...)$ dizilerinin cümlesini w ile göstereceğiz. w ; $x = (x_k)$, $y = (y_k)$ ve α bir skaler olmak üzere

$$x + y = (x_k + y_k)$$

$$\alpha x = (\alpha x_k)$$

şeklinde tanımlanan işlemler altında bir lineer uzaydır.

Bu çalışmada sık sık kullanacağımız

$$l_\infty = \left\{ x = (x_k) : \sup_k |x_k| < \infty \right\}$$

sınırlı,

$$c = \left\{ x = (x_k) : \lim_k x_k \text{ mevcut} \right\}$$

yakınsak ve

$$c_0 = \left\{ x = (x_k) : \lim_k x_k = 0 \right\}$$

sıfır dizilerinin uzayı

$$\|x\| = \sup_k |x_k| \qquad \textbf{(1.1)}$$

normu ile birer Banach uzayıdır.

Teorem 1.1.3 Bir X Banach uzayının bir Y alt uzayının tam olması için gerek ve yeter şart Y ' nin X ' de kapalı olmasıdır [1].

Teorem 1.1.4 (X, d) bir metrik uzay, $M \subset X$ ve $\overline{M}$, M' nin kapanışını göstersin. Bu durumda $x \in \overline{M}$ olması için gerek ve yeter şart $x_n \to x$ olacak şekilde M ' de bir (x_n) dizisinin mevcut olmasıdır [1].

Tanım 1.1.5 Eğer $A = \varnothing$ veya A 'dan, $n \in \mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, ...\}$ olmak üzere, $\{1, 2, 3, ..., n\}$ kümesine birebir örten bir f fonksiyonu ve bir $n \in \mathbb{Z}^+$ sayısı varsa A kümesine *sonlu küme* denir. Eğer birebir örten bir $f : A \to \mathbb{Z}^+$ fonksiyonu varsa A kümesine *sayılabilir küme* denir [1].

Tanım 1.1.6 (X, d) bir metrik uzay, $x \in X$ ve r pozitif bir reel sayı olsun. x merkezli r yarıçaplı bir *açık yuvar*, X ' in x' e uzaklıkları r 'den daha küçük olan bütün noktalarından meydana gelen

$$B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$$

alt kümesi olarak tanımlanır [1].

Tanım 1.1.7 (X, d) bir metrik uzay, $x \in X$ ve r pozitif bir reel sayı olsun. x merkezli r yarıçaplı bir *kapalı yuvar*, X 'in x 'e uzaklıkları r 'den daha küçük ya da eşit olan bütün noktalarından meydana gelen

$$B[x, r] = \{y \in X : d(x, y) \leq r\}$$

alt cümlesi olarak tanımlanır [1].

Tanım 1.1.8 Bir X metrik uzayı ve bunun bir M altcümlesini gözönüne alalım. Eğer M cümlesi her bir noktasının etrafında bir yuvar içeriyorsa M cümlesine açıktır denir. A, X cümlesinin bir alt cümlesi olsun. Eğer, A cümlesinin X 'deki tümleyeni, yani

$$A^c = X - A$$

açık ise A cümlesine kapalıdır denir [1].

Tanım 1.1.9 X bir metrik uzay ve A, X 'in bir alt cümlesi olsun. X ' in A' yı içeren kapalı cümlelerinin en küçüğüne A' nın kapanışı denir ve $\overline{A}$ ile gösterilir [1].

Tanım 1.1.10 Bir X metrik uzayının bir M alt cümlesi verildiğinde $\overline{M} = X$ ise, M cümlesine X ' de yoğundur denir. Eğer X uzayı X ' de yoğun, sayılabilir bir alt cümleye sahipse ayrılabilirdir denir [1].

Tanım 1.1.11 Bir (X, d) metrik uzayında bir (x_n) dizisi göz önüne alalım. Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık, her $m, n > N$ için

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ doğal sayısı bulunabiliyorsa, (x_n) dizisine bir *Cauchy dizisi* denir [1].

Tanım 1.1.12 Bir (X, d) bir metrik uzay, $x \in X$ ve S, X nin bir alt kümesi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\{B(x; \varepsilon) \setminus \{x\}\} \cap S \neq \emptyset$$

oluyorsa $x \in X$ noktasına S nin bir yığılma (accumulation, cluster) noktası denir [1].

2. İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

İstatistiksel yakınsaklık tanımı Fast [2] tarafından kısa bir not olarak verildi. Schoenberg [3] istatistiksel yakınsaklığı toplanabilme metodu olarak inceledi ve istatistiksel yakınsaklığın bazı temel özelliklerini verdi. Her iki matematikçi de sınırlı, istatistiksel yakınsak bir dizinin Cesàro toplanabilir olduğunu ifade ettiler. Daha sonra istatistiksel yakınsaklık Buck [4], Connor [5], Šalàt [6], Fridy [7] tarafından çalışıldı.

Bu bölümde istatistiksel yakınsaklık ve özellikleri incelenecektir.

2.1 Doğal Yoğunluk ve İstatistiksel Yakınsaklık

Bir $E \subset \mathbb{N}$ olmak üzere $x \in \mathbb{N}$ cümlesine ait bir x sayısına eşit ya da x' den daha küçük olan bütün pozitif tamsayıların sayısı $E(x)$ ile gösterilsin. Örneğin bir E cümlesi $2, 4, 6, \ldots$ çift tamsayılarından oluşuyorsa $E(1) = 0$, $E(2) = 1$, $E(6) = 3$, $E(7) = 3$, $E(15/2) = 3, \ldots$ dır. Gerçekten $x \geq 0$ ise $E(x) = \left[\left|\frac{x}{2}\right|\right]$ dir. Diğer taraftan $a_j \in \mathbb{N}$ olmak üzere $E = (a_j)_{j=1}^{\infty}$ cümlesi için $E(a_j) = j$ ' dir.

Tanım 2.1.1 Bir E cümlesinin asimptotik yoğunluğu

$$\delta_1(E) = \liminf_{n\to\infty} \frac{E(n)}{n}$$

olarak tanımlanır. $(E(n)/n)$ dizisi bir limite sahip ise E cümlesinin doğal yoğunluğu

$$\delta(E) = \lim_{n\to\infty} \frac{E(n)}{n}$$

şeklinde tanımlanır. Eğer $\delta(E) = 0$ ise E cümlesine sıfır yoğunluklu cümle denir [8].

Teorem 2.1.2 Her bir n için $a_n \in \mathbb{N}$ ve $(a_n) \to +\infty$ olmak üzere, $E = (a_n)$ ise bu taktirde;

$$\delta_1(E) = \liminf_{n\to\infty} \frac{n}{a_n}$$

dır. Eğer $\delta(E)$ mevcut ise,

$$\delta(E) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{a_n}$$

dır [8].

İspat. $\left(\frac{k}{a_k}\right)$ dizisi $\left(\frac{E(n)}{n}\right)$dizisinin bir alt dizisidir. Buradan

$$\liminf \frac{E(n)}{n} \leq \liminf \frac{k}{a_k}$$

elde edilir. Eğer n, $n \geq a_1$ olacak şekilde bir tamsayı ve a_k, E cümlesindeki n' den büyük en küçük tamsayı ise bu taktirde $a_{k-1} \leq n \leq a_k$ ve

$$\frac{k}{a_k} - \frac{E(n)}{n} = \frac{k}{a_k} - \frac{k-1}{n} < \frac{k}{n} - \frac{k-1}{n} = \frac{1}{n}$$

elde edilir. Böylece,

$$\frac{k}{a_k} - \frac{E(n)}{n} \to 0 \ (n \to \infty, k \to \infty \text{ için})$$

olur.

Tanım 2.1.3 Eğer $x = (x_k)$ dizisinin terimleri sıfır yoğunluklu bir cümle hariç diğer bütün k' lar için bir P özelliğini sağlıyorsa, (x_k) dizisi hemen hemen her k için P özelliğini sağlıyor denir ve "$h.h.k.$" şeklinde gösterilir [7].

Sıfır yoğunluklu cümle tanımından esinlenilerek istatistiksel yakınsak dizi tanımı aşağıdaki şekilde verilir.

Tanım 2.1.4 $x = (x_k)$ kompleks sayıların bir dizisi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için, küme sembolü dışındaki dikey çizgiler kümenin eleman sayısını göstermek üzere

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0, \tag{2.1}$$

yani $h.h.k.$ için $|x_k - L| < \varepsilon$ ise $x = (x_k)$ dizisi L sayısına istatistiksel yakınsaktır denir. $x = (x_k)$ dizisinin L' ye istatistiksel yakınsak olması halinde $S - limx = L$ veya $x_k \longrightarrow L(S)$ yazılır [7].

İstatistiksel yakınsak dizilerin uzayı S ile gösterilir. $L = 0$ olması halinde S_0, yani sıfıra istatistiksel yakınsak dizilerin uzayı elde edilir. Buna göre

$$S = \left\{ \begin{array}{c} x = (x_k) : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0, \\ \text{her } \varepsilon > 0 \text{ ve enaz bir } L \text{ için} \end{array} \right\}$$

dir. Açıkça görülebileceği gibi yakınsak her dizi istatistiksel yakınsaktır. Bunu göstermek için $x_k \to x$ alalım. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ için $k > k_0$ iken $|x_k - x| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $k_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Demek ki ancak $k \leq k_0$ için $|x_k - x| \geq \varepsilon$ olur. Halbuki

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - x| \geq \varepsilon\}| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} k_0 = 0$$

dır. Fakat bu iddianın tersi doğru değildir, yani istatistiksel yakınsak her dizi yakınsak değildir. Gerçekten

$$x_k = \begin{cases} \sqrt{k}, & k = m^2 \quad (m = 1, 2, 3, ...) \\ 1, & k \neq m^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $x = (x_k)$ dizisi için $S - limx = 1$ dir, ancak $x \notin l_\infty$ ve bu nedenle (x_k) dizisi yakınsak değildir. Sınırlı bir dizi de istatistiksel yakınsak olmayabilir. Gerçekten

$$x = (1, 0, 1, 0, 1, 0, ...)$$

dizisi sınırlıdır ancak istatistiksel yakınsak değildir.

Bir dizi istatistiksel yakınsak ise istatistiksel limiti tektir, yani $S - limx = L_1$, $S - limx = L_2$ ise $L_1 = L_2$ dir.

Teorem 2.1.5 $x = (x_k)$, $y = (y_k) \in S$, ve $a \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda

i) $S - limx = L_1$ ise $S - lim(ax) = aL_1$

ii) $S - limx = L_1$, $S - limy = L_2$ ise $S - lim(x + y) = L_1 + L_2$ dir [2].

$(i) - (ii)$ den istatistiksel yakınsak diziler uzayının lineer uzay olduğu anlaşılır.

Tanım 2.1.6 $\varepsilon > 0$ olsun. *h.h.k.* için $|x_k - x_N| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ doğal sayısı varsa, yani

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - x_N| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise $x = (x_k)$ dizisine istatistiksel Cauchy dizisi denir [7].

Teorem 2.1.7 Bir $x = (x_k)$ dizisi istatistiksel yakınsak ise aynı zamanda istatistiksel Cauchy dizisidir [7].

İspat. Burada, "yakınsak bir dizi Cauchy dizisidir" teoreminin ispatına benzer bir yol takip edilecektir. $S - limx_k = L$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Bu durumda, *h.h.k.* için $|x_k - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ dir.

Eğer N, $|x_N - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde seçilirse,

$$|x_k - x_N| = |x_k - L + L - x_N| \leq |x_k - L| + |x_N - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

(*h.h.k.*için) elde edilir.

2.2 İstatistiksel Yakınsaklık ve Kuvvetli Cesàro Toplanabilirlik

Bu kısımda, kuvvetli Cesàro toplanabilme ile istatistiksel yakınsaklık arasındaki ilişki incelenecektir.

Tanım 2.2.1 $x = (x_k)$ kompleks sayıların bir dizisi olsun. Eğer

$$\lim \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k = L$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa, x dizisi L' ye Cesàro toplanabilirdir denir. Cesàro toplanabilir dizilerin cümlesi σ_1 ile gösterilecektir. Buna göre

$$\sigma_1 = \left\{ x = (x_k) : \lim \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (x_k - L) = 0, \text{ en az bir } L \text{ için} \right\}$$

dir. Eğer x dizisi L' ye Cesàro toplanabilir ise bu $\sigma_1 - \lim x = L$ yazılarak gösterilir [9].

Teorem 2.2.2 $x = (x_k)$ dizisi L' ye yakınsak ise (x_k) dizisi L' ye σ_1 yakınsaktır [9].

İspat. $x = (x_k)$ dizisi L' ye yakınsak olsun. Verilen herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısı için $k > N_1$ olunca $|x_k - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde pozitif bir N_1 tamsayısı mevcuttur. Şimdi;

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k - L \right| &= \left| \frac{x_1 + ... + x_n}{n} - L \right| \\
&= \left| \frac{x_1 + ... + x_n - nL}{n} \right| \\
&\leq \left| \frac{(x_1 - L) + ... + (x_{N_1} - L)}{n} \right| \\
&\quad + \left| \frac{(x_{N_1+1} - L) + ... + (x_n - L)}{n} \right| \\
&\leq \frac{|x_1 - L| + ... + |x_{N_1} - L|}{n} \\
&\quad + \frac{\left|x_{N_1+1} - L\right| + ... + |x_n - L|}{n}
\end{aligned}$$

yazılabilir. $K = max\{|x_1 - L|, ..., |x_{N_1} - L|\}$ alınırsa, $n > N_1$ için

$$\left| \frac{x_1 + ... + x_n - nL}{n} \right| \leq \frac{N_1 K}{n} + \frac{(n - N_1)\varepsilon}{2n}$$

elde edilir. $\forall\, n > N_2$ için $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2N_1 K}$ olacak şekilde N_2 bulabiliriz. Bu durumda $n > N_2$ için

$$\left| \frac{x_1 + ... + x_n - nL}{n} \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{(n - N_1)\varepsilon}{2n}$$

olur. Ayrıca $\frac{n-N_1}{n} < 1$ olduğundan $N = max\{N_1, N_2\}$ alınırsa her $n > N$ için

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k - L\right| = \left|\frac{x_1 + ... + x_n}{n} - L\right| = \left|\frac{x_1 + ... + x_n - nL}{n}\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

bulunur. Bu da ispatı tamamlar.

Bu teoremin tersi doğru değildir, yani σ_1 yakınsak bir dizi yakınsak olmayabilir. Gerçekten $(x_n) = (1 + (-1)^n)$ dizisi için $\sigma_1 - \lim x = 1$ dir [9]. Ancak bu dizi yakınsak değildir.

Tanım 2.2.3 $x = (x_k)$ kompleks terimli bir dizi ve $p > 0$ reel bir sayı olsun. Eğer

$$\lim \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |x_k - L|^p = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa x dizisi L' ye kuvvetli p-Cesàro toplanabilirdir denir. Bu durumda $\omega_p - \lim x = L$ yazılır. Kuvvetli p-Cesàro yakınsak dizilerin cümlesi ω_p ile gösterilecektir [10]. Yani

$$\omega_p = \left\{x = (x_k) : \lim \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |x_k - L|^p = 0, \text{ en az bir } L \text{ için}\right\}$$

dir.

Teorem 2.2.4 $0 < p < \infty$ olsun. Bu taktirde

i) Bir L sayısına kuvvetli p-Cesàro yakınsak olan bir dizi L sayısına aynı zamanda istatistiksel yakınsaktır.

ii) Bir L sayısına istatistiksel yakınsak olan sınırlı bir dizi L sayısına aynı zamanda kuvvetli $p-$Cesàro yakınsaktır [5].

İspat.

i) $x \in \omega_p$ ve $\lim \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |x_k - L|^p = 0$ olsun. Bu takdirde verilen herhangi bir $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |x_k - L|^p &= \frac{1}{n}\sum_{\substack{1\le k\le n \\ |x_k - L| < \varepsilon}} |x_k - L|^p + \frac{1}{n}\sum_{\substack{1\le k\le n \\ |x_k - L| \ge \varepsilon}} |x_k - L|^p \\ &\ge \frac{1}{n}\varepsilon^p \left|\{k \le n : |x_k - L| \ge \varepsilon\}\right|\end{aligned}$$

yazılabilir. Burada $n \to \infty$ için limit alınırsa $\lim \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |x_k - L|^p = 0$ olması

$$\lim \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olmasını gerektirir, bir başka ifadeyle $\omega_p - \lim x = L$ olması $S - lim x_k = L$ olduğu sonucunu verir.

$ii)$ Sınırlı bir $x = (x_k)$ dizisi L sayısına istatistiksel yakınsak olsun ve $E = \|x\|_\infty + L$ diyelim. $\varepsilon \geq 0$ verilsin. N_ε sayısını her $n > N_\varepsilon$ için

$$\frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : |x_k - L| \geq \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{p}} \right\} \right| < \frac{\varepsilon}{2E^p}$$

olacak şekilde seçelim ve

$$L_n = \left\{ k \leq n : |x_k - L| \geq \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{p}} \right\}$$

olarak tanımlayalım. Bu taktirde her $n > N_\varepsilon$ için

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |x_k - L|^p &= \frac{1}{n} \left(\sum_{\substack{k \leq n \\ k \in L_n}} |x_k - L|^p + \sum_{\substack{k \leq n \\ k \notin L_n}} |x_k - L|^p \right) \\ &< \frac{1}{n} \left(\frac{n\varepsilon}{2E^p} E^p + n\frac{\varepsilon}{2} \right) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $x = (x_k)$ dizisinin L sayısına kuvvetli p-Cesàro yakınsak olduğu sonucu çıkar.

2.3 α. Dereceden İstatistiksel Yakınsaklık ve α.Dereceden Kuvvetli Cesàro Toplanabilirlik

Bu bölümde α. dereceden istatistiksel yakınsaklık ve α. dereceden kuvvetli Cesàro toplanabilirliğini inceleyeceğiz.

Tanım 2.3.1 $0 < \alpha \leq 1$ olsun. Bir E kümesinin α yoğunluğu

$$\delta_\alpha (E) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^\alpha} |\{k \leq n : k \in E\}|$$

ile tanımlanır [4] (limit sonlu ya da sonsuz olabilir). Burada $|\{k \leq n : k \in E\}|$ E' nin n' den büyük olmayan elemanlarının sayısını göstermektedir.

Eğer $x = (x_k)$, α' ya göre sıfır yoğunluklu bir küme hariç diğer bütün k' lar için bir $P(k)$ özelliğini sağlıyorsa, o zaman bu dizi α' ya göre hemen hemen her k için P özelliğini sağlıyor denir ve $h.h.k$ (α) şeklinde gösterilir.

$\mathbb{N}$ 'nin sonlu her altkümesinin $\alpha-$yoğunluğu sıfırdır ve $\delta_\alpha(E^c) = 1 - \delta_\alpha(E)$ eşitliği $0 < \alpha < 1$ için genelde doğru değildir. Bu eşitlik sadece $\alpha = 1$ için sağlanır [11].

Teorem 2.3.2 $E \subseteq \mathbb{N}$ herhangi bir küme olsun. Bu durumda eğer $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ ise $\delta_\beta(E) \leq \delta_\alpha(E)$ dir [11].

İspat. $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ olsun. Bu durumda $n^\alpha \leq n^\beta$ olacağından her $n \in \mathbb{N}$ için $\frac{1}{n^\beta} \leq \frac{1}{n^\alpha}$ olur. Buna göre

$$\frac{1}{n^\beta}|\{k \leq n : k \in E\}| \leq \frac{1}{n^\alpha}|\{k \leq n : k \in E\}|$$

olup bu eşitsizlikte $n \to \infty$ için limit alınırsa $\delta_\beta(E) \leq \delta_\alpha(E)$ elde edilir.

Buna göre $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ için eğer E kümesinin $\alpha-$yoğunluğu sıfır ise $\beta-$yoğunluğu da sıfırdır. Eğer $0 < \alpha \leq 1$ şartını sağlayan en az bir α için E kümesinin $\alpha-$yoğunluğu sıfır ise, E' nin doğal yoğunluğu da sıfır olur [11].

Tanım 2.3.3 $x = (x_k) \in \omega$ ve $0 < \alpha \leq 1$ verilsin. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha}|\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde bir L kompleks sayısı varsa, o zaman (x_k) dizisi L' ye α. dereceden istatistiksel yakınsaktır diyeceğiz. (x_k) dizisinin L' ye α. dereceden istatistiksel yakınsak olması hali $S^\alpha - \lim x_k = L$ olarak gösterilir. α. dereceden istatistiksel yakınsak bütün dizilerin kümesi S^α ile gösterilir [11].

S_0^α, α. dereceden sıfıra istatistiksel yakınsak dizilerin kümesini gösterir.

Her $\alpha \in (0, 1]$ için $S_0^\alpha \subset S^\alpha$ olduğu açıktır. α. dereceden istatistiksel yakınsaklık $\alpha = 1$ için istatistiksel yakınsaklık ile aynıdır. α. dereceden istatistiksel yakınsaklık $0 < \alpha \leq 1$ için iyi tanımlı, ancak $\alpha > 1$ için iyi tanımlı değildir. Bunu göstermek için

$$x_k = \begin{cases} 1, & k = 2n \\ 0, & k \neq 2n \end{cases} \quad n = 1, 2, 3, ...$$

şeklinde tanımlanan $x = (x_k)$ dizisini gözönüne alalım. Buna göre $\alpha > 1$ için

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha}|\{k \leq n : |x_k - 1| \geq \varepsilon\}| &\leq \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n^\alpha} = 0, \\ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha}|\{k \leq n : |x_k - 0| \geq \varepsilon\}| &\leq \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n^\alpha} = 0 \end{aligned}$$

sağlanacağından $x = (x_k)$ dizisi hem 1' e ve hem de 0' a α. dereceden istatistiksel yakınsak, yani $x = (x_k)$ dizisi hem 1' e ve hem de 0' a α. dereceden istatistiksel yakınsak olur ki bu mümkün değildir.

Teorem 2.3.4 $0 < \alpha \leq 1$ ve $x = (x_k)$, $y = (y_k)$ birer kompleks sayı dizileri olsunlar.

i) Eğer $S^\alpha - \lim x_k = x_0$ ve $c \in \mathbb{C}$ ise o zaman $S^\alpha - \lim cx_k = cx_0$ 'dır.

ii) Eğer $S^\alpha - \lim x_k = x_0$ ve $S^\alpha - \lim y_k = y_0$ ise o zaman $S^\alpha - \lim(x_k + y_k) = x_0 + y_0$ 'dır [11].

İspat.

i) $c = 0$ için ispat açıktır. $c \neq 0$ olsun. O zaman

$$\frac{1}{n^\alpha} \left|\{k \leq n : |cx_k - cx_0| \geq \varepsilon\}\right| = \frac{1}{n^\alpha} \left|\left\{k \leq n : |x_k - x_0| \geq \frac{\varepsilon}{|c|}\right\}\right|$$

eşitsizliğinden *i)* yi ve

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n^\alpha} \left|\{k \leq n : |(x_k + y_k) - (x_0 + y_0)| \geq \varepsilon\}\right| \\ \leq\ & \frac{1}{n^\alpha} \left|\left\{k \leq n : |x_k - x_0| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right| + \frac{1}{n^\alpha} \left|\left\{k \leq n : |y_k - y_0| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right| \end{aligned}$$

eşitsizliğinden *ii)* yi elde ederiz.

Yakınsak her dizinin α. dereceden istatistiksel yakınsak olduğunu görmek kolaydır. Yani $0 < \alpha \leq 1$ için $c \subset S^\alpha$ 'dır. Ancak bu ifadenin tersi daima doğru değildir. Örneğin $x = (x_k)$ dizisi

$$x_k = \begin{cases} 1, & k = n^2 \\ 0, & k \neq n^2 \end{cases} \tag{2.1}$$

olacak şekilde tanımlansın. Daha açık bir ifade ile

$$(x_k) = (1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, ...)$$

olur ki bu dizinin yakınsak olmadığı açıktır. Bununla birlikte

$$\frac{1}{n^\alpha} \left|\{k \leq n : |x_k - 0| \geq \varepsilon\}\right| \leq \frac{1}{n^\alpha} . \left(2\sqrt{n} + 1\right)$$

eşitsizliğinden $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$ için $S^\alpha - \lim x_k = 0$ elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Tanım 2.3.5 $0 < \alpha \leq 1$ ve $p \in \mathbb{R}^+$ olsun. Eğer

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^{n} |x_k - L|^p = 0$$

olacak şekilde bir L kompleks sayısı varsa, o zaman $x=(x_k)$ dizisi α. dereceden kuvvetli $p-$Cesàro toplanabilirdir denir. α. dereceden kuvvetli $p-$Cesàro toplanabilirlik, $\alpha=1$ için, kuvvetli $p-$Cesàro toplanabilirliğe indirgenir. α. dereceden kuvvetli $p-$ Cesàro toplanabilir dizilerin uzayı ω_p^α ile gösterilir, yani

$$\omega_p^\alpha=\left\{x=(x_k):\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^\alpha}\sum_{k=1}^{n}|x_k-L|^p=0,\ \text{en az bir } L \text{ için}\right\}$$

dir. 0 'a α. dereceden kuvvetli $p-$ Cesàro toplanabilir dizilerin uzayı ise ω_{op}^α ile gösterilecektir [11].

2.4 Temel Sonuçlar

Teorem 2.4.1 $0<\alpha\leq\beta\leq1$ olsun. Bu durumda $S^\alpha\subseteq S^\beta$ ve bazı $\alpha<\beta$' lar için bu kapsama kesindir [11].

İspat. $0<\alpha\leq\beta\leq1$ ve $x\in S^\alpha$ olsun. O zaman her $\varepsilon>0$ için

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^\beta}|\{k\leq n:|x_k-L|\geq\varepsilon\}|\leq\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^\alpha}|\{k\leq n:|x_k-L|\geq\varepsilon\}|$$

olur ve bu $S^\alpha\subseteq S^\beta$ olduğunu verir. Kapsamanın kesin olduğunu göstermek için

$$x_k=\begin{cases}1, & k=n^3 \text{ ise}\\ 0, & k\neq n^3 \text{ ise}\end{cases}\tag{2.2}$$

şeklinde tanımlanan $x=(x_k)$ dizisini alalım. Bu durumda

$$\frac{1}{n^\beta}|\{k\leq n:|x_k-0|\geq\varepsilon\}|\leq\frac{1}{n^\beta}\left(2\left[\sqrt[3]{n}\right]+1\right)$$

elde edilir. Buradan $\frac{1}{3}<\beta\leq1$ için $S^\beta-\lim x_k=0$ yani $x\in S^\beta$ ancak

$$\frac{1}{n^\alpha}|\{k\leq n:|x_k-0|\geq\varepsilon\}|\geq\frac{1}{n^\alpha}\left(2\left[\sqrt[3]{n}\right]-1\right)$$

olması nedeniyle $0<\alpha<\frac{1}{3}$ için $\frac{1}{n^\alpha}\left(2\left[\sqrt[3]{n}\right]-1\right)\to\infty$ $(n\to\infty)$ olur ki, buradan $x\notin S^\alpha$ elde edilir. Bu da istenileni verir.

Eğer Teorem 2.4.1 'de $\beta=1$ alınırsa, aşağıdaki sonucu elde edilir.

Sonuç 2.4.2 Eğer $0<\alpha\leq1$ için bir dizi L sayısına α. dereceden istatistiksel yakınsak ise, o zaman bu dizi L' ye istatistiksel yakınsaktır, yani $S^\alpha\subseteq S$ 'dir [11].

Teorem 2.4.1 'den aşağıdaki sonuçları elde edebiliriz.

Sonuç 2.4.3

i) $S^{\alpha} = S^{\beta}$ olması için gerek ve yeter şart $\alpha = \beta$ olmasıdır.

ii) $S^{\alpha} = S$ olması için gerek ve yeter şart $\alpha = 1$ olmasıdır [11].

Bir sonraki teoremin ispatı tanımdan açıktır.

Teorem 2.4.4 $0 < \alpha < 1$ ve $x = (x_k)$ dizisi L' ye α. dereceden istatistiksel yakınsak ise $\lim y_k = L$ olacak şekilde $x = (x_k)$ dizisinin bir (y_k) alt dizisi vardır [11].

Teorem 2.4.5 $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ ve p bir pozitif reel sayı olması durumunda $\omega_p^{\alpha} \subseteq \omega_p^{\beta}$ 'dir ve bazı $\alpha < \beta$' lar için bu kapsama kesindir.

İspat. $x = (x_k) \in \omega_p^{\alpha}$ olsun ve $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ verilsin. $p \in \mathbb{R}^{+}$ olmak üzere

$$\frac{1}{n^{\beta}} \sum_{k=1}^{n} |x_k - L|^p \leq \frac{1}{n^{\alpha}} \sum_{k=1}^{n} |x_k - L|^p$$

yazabiliriz. Bu da $\omega_p^{\alpha} \subseteq \omega_p^{\beta}$ olduğunu verir.

Kapsamanın kesin olduğunu göstermek için $x = (x_k)$ dizisi (2.2)' deki gibi tanımlansın. Bu durumda

$$\frac{1}{n^{\beta}} \sum_{k=1}^{n} |x_k - 0|^p \leq \frac{2\sqrt[3]{n}}{n^{\beta}} = \frac{2}{n^{\beta-\frac{1}{3}}}$$

yazılabilir. $\frac{1}{3} < \beta \leq 1$ için $n \to \infty$ iken $\frac{1}{n^{\beta-\frac{1}{3}}} \to 0$ olduğundan $\omega_p^{\beta} - \lim x_k = 0$, yani $x \in \omega_p^{\beta}$ olur, ancak $0 < \alpha < \frac{1}{3}$ için

$$\frac{2\sqrt[3]{n} - 1}{n^{\alpha}} \leq \frac{1}{n^{\alpha}} \sum_{k=1}^{n} |x_k - 0|^p$$

ve $n \to \infty$ iken $\frac{2\sqrt[3]{n}}{n^{\alpha}} \to \infty$ olduğundan $x \notin \omega_p^{\alpha}$ elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Aşağıdaki sonuç Teorem 2.4.5' in bir sonucudur.

Sonuç 2.4.6 $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ ve $p \in \mathbb{R}^{+}$ olsun. Bu durumda

i) $\omega_p^{\alpha} = \omega_p^{\beta}$ olması için gerek ve yeter şart $\alpha = \beta$ olmasıdır.

ii) Her $\alpha \in (0, 1]$ ve $0 < p < \infty$ için $\omega_p^{\alpha} \subseteq \omega_p$' dir [11].

Teorem 2.4.7 $0 < \alpha \leq 1$ ve $0 < p < q < \infty$ olsun. Bu durumda $\omega_q^{\alpha} \subseteq \omega_p^{\alpha}$ olur [3].

Teorem 2.4.7 de $\alpha = 1$ alınırsa $0 < p < q < \infty$ için $\omega_q \subset \omega_p$ olur [3].

Teorem 2.4.8 $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ ve $0 < p < \infty$ olsun. Eğer bir dizi L sayısına α. dereceden kuvvetli Cesàro toplanabilir ise bu durumda L' ye β. dereceden istatistiksel yakınsaktır [11].

İspat. Herhangi bir $x = (x_k)$ dizisi ve $\varepsilon > 0$ için,

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k - L|^p \geq |\{k \leq n : |x_k - L|^p \geq \varepsilon\}| \, \varepsilon^p$$

ve buradan

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^\alpha}\sum_{k=1}^{n} |x_k - L|^p &\geq \frac{1}{n^\alpha} |\{k \leq n : |x_k - L|^p \geq \varepsilon\}| \, \varepsilon^p \\ &\geq \frac{1}{n^\beta} |\{k \leq n : |x_k - L|^p \geq \varepsilon\}| \, \varepsilon^p \end{aligned}$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Eğer Teorem 2.4.8 de $\beta = \alpha$ alırsak aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 2.4.9 $0 < \alpha \leq 1$ ve $0 < p < \infty$ olsun. Bir dizi L ' ye α. dereceden kuvvetli Cesàro toplanabilir ise bu durumda L' ye α. dereceden istatistiksel yakınsaktır [11].

Bu sonuçta $\alpha = 1$ alınırsa bilinen L ' ye kuvvetli Cesàro toplanabilir olan bir dizi L ' ye istatistiksel yakınsaktır sonucu elde edilir. Ayrıca biliyoruz ki L' ye istatistiksel yakınsak olan sınırlı bir dizi L' ye kuvvetli Cesàro toplanabilirdir.

Uyarı

Teorem 2.4.8 'in tersinin genelde doğru olmadığını belirtelim. Bir başka ifadeyle $0 < \alpha < 1$ için α. dereceden istatistiksel yakınsak sınırlı bir dizinin α. dereceden kuvvetli Cesàro toplanabilir olması gerekmez.

$$x_k = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{k}}, & k \neq m^3 \\ 1, & k = m^3 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $x = (x_k)$ dizisi iddiamızı destekleyen bir örnek olur. $x \in l_\infty$ olup, $\frac{1}{3} < \alpha \leq 1$ şartını sağlayan her α için $x \in S^\alpha$ olacağı açıktır. Öncelikle her pozitif $n \geq 2$ için

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{n}$$

eşitsizliği sağlanır. $H_n = \{k \leq n : k \neq m^3, m = 1, 2, 3, ...\}$ tanımlayalım ve $p = 1$ alalım. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p &= \sum_{k=1}^{n} |x_k| = \sum_{\substack{k \in H_n \\ 1 \leq k \leq n}} |x_k| + \sum_{\substack{k \notin H_n \\ 1 \leq k \leq n}} |x_k| \\
&= \sum_{\substack{k \in H_n \\ 1 \leq k \leq n}} \frac{1}{\sqrt{k}} + \sum_{\substack{k \notin H_n \\ 1 \leq k \leq n}} 1 > \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{n}
\end{aligned}$$

olur ve buradan

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^{n} |x_k|^p &= \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^{n} |x_k| > \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \\
&> \frac{1}{n^\alpha} \sqrt{n} = \frac{1}{n^{\alpha - \frac{1}{2}}}
\end{aligned}$$

elde edilir. $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ için $n \to \infty$ iken$\frac{1}{n^{\alpha-\frac{1}{2}}} \to \infty$ olacağından $p = 1$ olmak üzere $x \notin \omega_p^\alpha$ bulunur. Böylece $p = 1$ olmak üzere her $\frac{1}{3} < \alpha < \frac{1}{2}$ için $x \in S^\alpha - \omega_p^\alpha$ olduğu sonucu çıkar.

Sonuç 2.4.10 $0 < \alpha \leq 1$ ve $p \in \mathbb{R}^+$ olsun. Bu durumda $\omega_p^\alpha \subset S$ 'dir. Eğer $0 < \alpha < 1$ ise kapsama kesindir [11].

İspat. Sonuç 2.4.9 ve 2.4.2 den $\omega_p^\alpha \subset S$ olduğunu biliyoruz. Kapsamanın kesin olduğunu göstermek için $x = (x_k)$, (2.1)' deki gibi tanımlansın.

Bu durumda $S - \lim x_k = 0$, $x \in S$ ancak $p = 1$ ve $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ için $x \notin \omega_p^\alpha$ olacağı kolayca görülebilir. Gerçekten,

$$\frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^{n} |x_k - 0|^p = \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \geq \frac{\sqrt{n}}{n^\alpha}$$

olup, $p = 1$ ve $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ için $n \to \infty$ iken $\frac{\sqrt{n}}{n^\alpha} \to \infty$ olduğundan $x \notin \omega_p^\alpha$ elde edilir. Sonuç olarak $p = 1$ ve $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ için $x \in S-$ ω_p^α' dir. Bu da ispatı tamamlar.

2.5 Wijsman Yakınsaklık

Kümelerin dizisinin limiti kavramını ilk olarak 1902 de Painleve tarafından verilmiştir. Bu kavram Kuratowski tarafından popüler hale gelmiş olmasından dolayı bu limite dizinin Kuratowski limiti denir. Painleve tarafından verilen küme yakınsaklığı uzun bir matematiksel tarihe sahip olmasına rağmen son 30 yılda optimizasyondaki yaklaşımlar, denklem sistemleri ve bunlarla ilgili konularla ilgilenmek için büyük bir araç olarak görülmeye başlamıştır.

Tanım 2.5.1 (X, ρ) bir metrik uzay olsun. Herhangi bir $x \in X$ ve boş olmayan X ' in A alt kümesi için x noktasının A kümesine uzaklığı

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} \rho(x, a)$$

şeklinde tanımlanır [12].

Tanım 2.5.2 $\{A_k\}$, bir (X, ρ) metrik uzayında kümelerin bir dizisi olsun. $\{A_k\}$ dizisinin alt ve üst limiti aşağıdaki gibidir:

$$\liminf A_k := \{x \in X : \exists (a_k) \subset (A_k),\ a_k \to x\}$$

ve

$$\limsup \mathrm{A}_k := \{x \in X : \exists (k_l)\ \exists (a_{k_l}) \subset (A_{k_l}),\ a_{k_l} \to x\}$$

Burada (k_l) dizisi doğal sayıların artan bir dizisidir ve bir alt dizi için indis kümesini temsil eder.

$\{A_k\}$ alt kümelerinin bir dizisinin bir alt limiti $a_k \in A_k$ elemanlarından oluşan dizilerin limitlerinin kümesidir ve üst limit ise böyle dizilerin cluster noktalarının kümesidir. Alt ve üst limitler aşikar olarak kapalıdır. Açıktır ki $\liminf \mathrm{A}_k \subset \limsup \mathrm{A}_k$ ve $\{A_k\}$ alt kümelerinin üst ve alt limiti ve bu limitlerin $\{\overline{A}_k\}$ kapanışları çakışır. Çünkü $d(x, A_k) = d(x, \overline{A}_k)$ dır.

X in A alt kümesine, eğer $A = \liminf A_k = \limsup A_k = \lim A_k$ ise $\{A_k\}$ dizisinin küme limiti veya limiti denir. Alternatif olarak literatürde bu anlamdaki yakınsaklığa Painleve-Kuratowski yakınsaklığı, topolojik yakınsaklık veya kapalı yakınsaklık denir.

A_k alt kümelerinin herhangi bir azalan dizisinin bu kümelerin kapanışlarının kesişimlerine eşit olan bir limiti vardır.

Eğer $n \geq m$ durumunda $A_n \subset A_m$ ise

$$\lim A_k = \bigcap_{k \geq 0} \overline{A}_k$$

bir üst limit boş olabilir. ($a_k \in A_k$ elemanlarının bir cluster noktasına sahip olan dizisi yoktur.) $\{a_k\}$ singleton dizilerine dair küme limiti mevcut olduğunda ya boştur (a_k elemanlarının dizisi yakınsak değildir) veya dizinin limiti bir singletondur [12].

Tanım 2.5.3 X in boş olamayan A_k alt kümelerinden oluşan $\{A_k\}$ dizisi için

$$\liminf A_k = \left\{ x \in X : \lim_{k \to \infty} d(x, A_k) = 0 \right\},$$

ve

$$\limsup A_k = \left\{ x \in X : \liminf_{k \to \infty} d(x, A_k) = 0 \right\}$$

elde edilir [13].

Tanım 2.5.4 (X, ρ) bir metrik uzay olsun. Herhangi bir boş olmayan $A, A_k \subseteq X$ kapalı alt kümeleri için eğer herbir $x \in X$ için $\lim_{k \to \infty} d_k(x) = d(x)$ ise $\{A_k\}$ dizisi A' ya Wijsman yakınsaktır denir. Burada d_k, $d : X \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonları $d(x) = d(x, A)$ ve $d_k(x) = d(x, A_k)$ şeklinde tanımlıdır. Bu durumda $W - \lim A_k = A$ yazılır [12,13].

Örnek 2.5.5 (x, y) düzlemindeki çemberlerin dizisini gözönüne alalım. Bu dizi

$A_k = \{(x, y) : x^2 + y^2 - 2ky = 0\}$ şeklindedir. $k \to \infty$ iken dizi $x-$ eksenine yani $A = \{(x, y) : y = 0\}$ kümesine Wijsman yakınsaktır.

(X, ρ) bir metrik uzay olsun. Herhangi bir boş olmayan $A_k \subseteq X$ kapalı alt kümeleri için eğer herbir $x \in X$ için $\sup_k |d(x, A_k)| < \infty$ ise $\{A_k\}$ dizisine sınırlıdır denir.

Şimdi Cauchy Wijsman yakınsak dizisini tanımlayalım.

Tanım 2.5.6 (X, ρ) bir metrik uzay olsun. Herhangi bir boş olmayan $A_k \subseteq X$ kapalı alt kümeleri için eğer $d_k(x)$ bir Cauchy dizisi ise $\{A_k\}$ dizisine Wijsman Cauchy dizisidir denir. Yani her $\varepsilon > 0$ herbir $x \in X$ ve $m, n > k_0$ için $|d_n(x) - d_m(x)| < \varepsilon$ olacak şekilde pozitif bir k_0 tamsayısı vardır [12,13].

Eğer $d(x, A_k) \to d(x, A)$ noktasal yakınsaklığı düzgün yakınsaklıkla değiştirilirse uzun bir zamandır bilinen Hausdorff yakınsaklığı elde edilir.

Tanım 2.5.7 (X, ρ) bir metrik uzay olsun. X ' in kapalı alt kümelerinin bir A_k dizisine eğer

$$\lim_{k \to \infty} \sup_{x \in X} |d_k(x) - d(x)| = 0$$

ise X' in kapalı bir A alt kümesine Hausdorff yakınsaktır denir [12,13].

Bu durumda $A = H - \lim A_k$ yazılır. Küme dizilerinin yakınsaklıklarının Hausdorff ve Wijsman tanımları kümelerin kapalı olmasını gerektirir. Çünkü aksi durumda limit kümelerinin iyi tanımlı olmasına gerek kalmaz.

Kolayca gösterebilirizki herhangi bir X metrik uzayında

$$\text{Hausdorff yakınsaklık} \Longrightarrow \text{Wijsman yakınsaklık} \Longrightarrow \text{Kuratowski yakınsaklık}$$

tır.

Kuratowski yakınsaklık uzaklık fonksiyonlarının noktasal yakınsaklığını gerektirmek zorunda değildir ve hatta noktasal yakınsaklık sonlu bir limite sahip olduğunda limitin bir uzaklık fonksiyonu olmasına gerek yoktur.

3. KÜME DİZİLERİNDE İSTATİKSEL YAKINSAKLIK VE KUVVETLİ TOPLANABİLİRLİK

3.1. Küme Dizilerinin İstatistiksel Yakınsaklığı

Bu bölümde küme dizilerinin Kuratowski, Wijsman ve Hausdorff istatistiksel yakınsaklığını tanımlayacağız.

Tanım 3.1.1 (X,ρ) bir metrik uzay olsun. X in boş olmayan A_k kapalı alt kümelerinin $\{A_k\}$ dizisi için $\{A_k\}$ nın istatistiksel alt limiti

$$st - \liminf \mathrm{A}_k = \{x \in X : \exists(k),\, \exists(a_{k_l}) \subset (A_k),\ st - \lim a_k = x\}$$

ve istatistiksel üst limiti

$$st - \limsup \mathrm{A}_k = \{x \in X : \exists(k_l),\, \exists(a_{k_l}) \subset (A_{k_l}),\ st - \lim a_{k_l} = x\}$$

şeklinde tanımlanır [14].

Tanım 3.1.2 (X,ρ) bir metrik uzay olsun. Herhangi bir boş olmayan $A_k \subseteq X$ kapalı alt kümeleri için eğer

$$st - \limsup A_k = st - \liminf A_k = A$$

ise $\{A_k\}$ dizisi A ya Kuratowski istatistiksel yakınsaktır denir. Bu durumda $st - \lim A_k = A$ şeklinde gösterilir [14].

$\{A_k\}$ alt kümeler dizisinin alt istatistiksel limiti $a_k \in A_k$ elemanlarından oluşan dizilerin istatistiksel limitlerin kümesidir ve üst istatistiksel limit ise böyle dizilerin cluster noktalarının kümesidir.

Tanım 3.1.3 (X,ρ) bir metrik uzay olsun. Herhangi boş olmayan kapalı A, $A_k \subseteq X$ alt kümeleri için eğer $\{\, d(x,A_k)\}$, $d(x,A)$ ya istatistiksel yakınsak ise $\{A_k\}$ dizisi A' ya Wijsman istatistiksel yakınsak denir. Her bir $\varepsilon > 0$ ve her $x \in X$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |d(x,A_k) - d(x,A)| \geq \varepsilon\}| = 0 \tag{3.1}$$

başka bir ifadeyle $|d(x, A_k) - d(x, A)| < \varepsilon$ $h.h.k.$Bu durumda $st-\lim_W A_k = A$ şeklinde gösterilir [14].

Açıktır ki eğer (3.1) deki eşitsizlik sonlu sayıdaki tüm k' lar için sağlanırsa $W - \lim A_k = A$ olur. Buradan $W - \lim A_k = A$ ise $st - \lim_W A_k = A$ olduğu anlaşılır.

Örnek 3.1.4 $X = \mathbb{R}$ olsun ve $\{A_k\}$ dizisini

$$A_k = \begin{cases} \{x \in \mathbb{R} : 2 \leq x \leq k\}, & \text{eğer } k \geq 2 \text{ ve } k \text{ tam kare ise,} \\ \{1\}, & \text{diğer durumlarda,} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu dizi Wijsman yakınsak değildir fakat

$$\frac{1}{n}|\{k \leq n : |d(x, A_k) - d(x, \{1\})| \geq \varepsilon\}| \leq \frac{\sqrt{n}}{n}$$

den dolayı bu dizi $A = \{1\}$' e Wijsman istatistiksel yakınsaktır.

Örnek 3.1.5 $X = \mathbb{R}^2$ ve $\{A_k\}$ dizisini

$$A_k = \begin{cases} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 = \frac{1}{k}\}, & \text{eğer } k \text{ tam kare ise,} \\ \{(0,0)\}, & \text{diğer durumlarda,} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu dizi $A = \{(0,0)\}$' a Wijsman istatistiksel yakınsaktır fakat Wijsman yakınsak değildir.

Tanım 3.1.6 (X, ρ) bir metrik uzay olsun. X in boş olmayan A_k kapalı alt kümeleri için eğer $\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : \sup_{x \in X} |d(x, A_k) - d(x, A)| \geq \varepsilon \right\} \right| = 0,$$

yani $\sup_{x \in X} |d(x, A_k) - d(x, A)| < \varepsilon$ $h.h.k.$ ise $\{A_k\}$ dizisi X ' in kapalı alt kümesine Hausdorff istatistiksel yakınsaktır denir. Bu durumda $st_H - \lim A_k = A$ şeklinde gösterilir [14].

Tanım 3.1.7 (X, ρ) bir metrik uzay olsun. Herhangi bir boş olmayan kapalı $A_k \subseteq X$ alt kümeleri için eğer her $\varepsilon > 0$ ve her $x \in X$ için,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left|\{k\leq n:|d(x,A_k)-d(x,A_N)|\geq\varepsilon\}\right|=0$$

olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ sayısı varsa $\{A_k\}$ dizisine Wijsman istatistiksel Cauchy dizisidir denir [14].

Teorem 3.1.8 (X, ρ) bir metrik uzay olsun. Aşağıdaki önermeler denktir.

i) $\{A_k\}$ Wijsman istatistiksel yakınsak dizidir.

ii) $\{A_k\}$ Wijsman istatistiksel Cauchy dizisidir.

iii) $\{A_k\}$ $h.h.k.$ için $A_k = B_k$ olacak şekilde bir Wijsman yakınsak $\{B_k\}$ dizisi mevcut olacak şekilde bir dizidir [14].

İspat. Kabul edelimki $st-\lim_W A_k = A$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Bu taktirde $h.h.k.$ için $|d(x, A_k) - d(x, A)| < \frac{\varepsilon}{2}$ dir. Eğer N, $h.h.k.$ için $|d(x, A_N) - d(x, A)| < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde seçilirse

$$|d(x,A_k)-d(x,A_N)| \leq |d(x,A_k)-d(x,A)|+|d(x,A_N)-d(x,A)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}$$

elde edilir. Böylece $\{A_k\}$ Wijsman istatistiksel Cauchy dizisidir. Şimdide kabul edelim ki (ii) doğru olsun ve $h.h.k.$ için $J = [d(x, A_N) - 1, d(x, A_N) + 1]$ aralığı $d(x, A_k)$ yı kapsayacak şekilde N sayısını seçelim. Benzer şekilde $h.h.k.$ için $J' = \left[d(x, A_{N_2}) - \frac{1}{2}, d(x, A_{N_2}) + \frac{1}{2}\right]$ aralığı $d(x, A_k)$'yı kapsayacak şekilde N_2'yi seçelim. Burada $h.h.k.$ için $J_1 = J \cap J'$ aralığı $d(x, A_k)$'yı kapsar. Gerçekten

$$\{k\leq n:d(x,A_k)\notin J\cap J'\}=\{k\leq n:d(x,A_k)\notin J\}\cup\{k\leq n:d(x,A_k)\notin J'\}$$

böylece

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left|\{k\leq n:d(x,A_k)\notin J\cap J'\}\right|\\ \leq\ &\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left|\{k\leq n:d(x,A_k)\notin J\}\right|+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left|\{k\leq n:d(x,A_k)\notin J'\}\right|=0\end{aligned}$$

yazılabilir.

Buna göre J_1, $h.h.k.$ için $d(x, A_k)$'yı kapsayan ve uzunluğu 1'e eşit veya küçük olan kapalı bir aralıktır. Şimdi de $h.h.k.$ için $J'' = \left[d(x, A_{N_3}) - \frac{1}{4}, d(x, A_{N_3}) + \frac{1}{4}\right]$ aralığı

$d(x, A_k)$'yı kapsayacak şekilde N_3 sayısını seçerek ilerleyelim. Böylece bir önceki yaklaşımla $h.h.k.$ için $J_2 = J_1 \cap J''$ aralığı $d(x, A_k)$'yı kapsayacaktır ve J_2'nin uzunluğu $\frac{1}{2}$' den küçük veya eşit olacaktır. Bu sürece devam edilirse tümevarım yöntemiyle herbir m için $J_{m+1} \subseteq J_m$ olacak şekilde (J_m) kapalı aralıklar dizisi inşa ederiz ve J_m' nin uzunluğu 2^{m-1} den büyük değildir ve $h.h.k.$ için $d(x, A_k) \in J_m$ dir. Yığılmış (kümelenmiş) Aralıklar Teoremi gereğince $\cap_{m=1}^{\infty} J_m$ kümesine eşit olan bir η sayısı vardır. $h.h.k.$ için $d(x, A_k) \in J_m$ kullanılırsa $n > T_m$ iken

$$\frac{1}{n} |\{k \leq n : d(x, A_k) \notin J\}| < \frac{1}{m} \tag{3.2}$$

olacak şekilde artan bir $\{T_m\}$ pozitif tamsayı dizisi seçelim. $n > T_m$ ise tüm (A_k) terimlerinden oluşan bir $C = (C_k)$ alt dizisini tanımlayalım öyle ki $k > T_1$ ve $T_m < k \leq T_{m+1}$ ise $d(x, A_k) \notin J_m$ dir. Daha sonra

$$B_k = \begin{cases} \{\eta\}, & \text{eğer } A_k, C \text{ nin bir terimi ise} \\ A_k, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde (B_k) dizisini tanımlayalım.

O halde $\lim B_k = \{\eta\}$ dür. Eğer $\varepsilon > \frac{1}{m} > 0$ ve $k > T_m$ ise bu taktirde ya $A_k = B_k = \{\eta\}$ demektir, ya da $B_k = A_k \in J_m$ ve $|d(x, B_k) - d(x, \{\eta\})| \leq J_m$ nin uzunluğu 2^{1-m} den küçük veya eşittir demektir. Ayrıca $A_k = B_k$ olduğunu iddia ediyoruz. Bunu doğrulamak için $T_m < k < T_{m+1}$ ise

$$\{k \leq n : d(x, A_k) \neq d(x, B_k)\} \subseteq \{k \leq n : d(x, A_k) \notin J\}$$

olduğunu yazalım.

Böylece (3.2) den

$$\frac{1}{n} |\{k \leq n : d(x, A_k) \neq d(x, B_k)\}| \leq \frac{1}{n} |\{k \leq n : d(x, A_k) \notin J\}| < \frac{1}{m}$$

olur. Buna göre $n \to \infty$ için limit 0 dır ve $h.h.k$ için $A_k = B_k$ dır. Bu nedenle (ii) , (iii)' ü gerektirir. Son olarak (iii)' ün sağlandığını yani $h.h.k.$ için $A_k = B_k$ ve $\lim B_k = \{\eta\}$ olduğunu kabul edelim.

$\varepsilon > 0$ olsun. Bu taktirde herbir n için

$$\begin{aligned} &\{k \leq n : |d(x, A_k) - d(x, \{\eta\})| \geq \varepsilon\} \\ \subseteq\ & |\{k \leq n : d(x, B_k) \neq d(x, A_k)\}| \cup \{k \leq n : |d(x, B_k) - d(x, \{\eta\})| \geq \varepsilon\} \end{aligned}$$

olur.

$\lim B_k = \{\eta\}$ olduğundan dolayı yukarıda yazılan ikinci küme sabit sayıda eleman ihtiva eder. Buna $l = l(\varepsilon)$ diyelim. Bu nedenle

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |d(x, A_k) - d(x, \{\eta\})| \geq \varepsilon\}| \\ \leq\ & \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : d(x, B_k) \neq d(x, A_k)\}| + \lim_{n\to\infty} \frac{l}{n} = 0 \end{aligned}$$

dır. Çünkü $h.h.k.$ için $A_k = B_k$ dır. Böylece (i) sağlanır ve ispat tamamlanır.

Teorem 3.1.9. (X, ρ) bir metrik uzay ve $\{A_k\}$, X' in boş olmayan kapalı alt kümelerinin bir dizisi olsun. Eğer $\{A_k\}$ Wijsman istatistiksel yakınsak ise $\{A_k\}$ Kuratowski istatistiksel yakınsaktır [14].

İspat. $st - \limsup \mathrm{A}_k \subset st - \liminf A_k$ olduğunu göstermemiz yeterlidir. $x \in st - \limsup \mathrm{A}_k$ ve $\varepsilon > 0$ verilsin. Bir Wijsman istatistiksel yakınsak dizi aynı zamanda Wijsman istatistiksel Cauchy dizisi olduğundan dolayı $h.h.k.$ için $|d(x, A_k) - d(x, A_N)| < \frac{\varepsilon}{2}$ ve $d(x, A_N) < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde bir N seçelim. Bu durumda $h.h.k$ için

$$d(x, A_k) \leq d(x, A_N) + |d(x, A_k) - d(x, A_N)| < \varepsilon$$

elde edilir. Tanımdan $x \in st - \liminf A_k$ bulunur ve bu da ispatı tamamlar.

Teorem 3.1.10. (X, ρ) bir metrik uzay ve $\{A_k\}$, X' in boş olmayan kapalı alt kümelerinin bir dizisi olsun. Eğer $\{A_k\}$ Hausdorff istatistiksel yakınsak ise aynı zamanda Wijsman istatistiksel yakınsaktır [14].

3.2. Kuvvetli Toplanabilir Küme Dizileri

Bu kısımda Kuratowski Cesàro toplanabilir, Wijsman toplanabilir ve Wijsman kuvvetli toplanabilir küme dizilerini tanımlayıp Wijsman istatistiksel yakınsak ve Wijsman kuvvetli toplanabilir küme dizileri arasındaki ilişkiyi vereceğiz.

Tanım 3.2.1. (X, ρ) bir metrik uzay olsun. X' in boş olmayan A_k alt kümelerinin $\{A_k\}$ dizisi için alt Cesàro ve üst Cesàro limit kavramlarını şu şekilde tanımlayalım.

$$(C,1) - \liminf A_k = \left\{ x \in X : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} d(x, A_k) = 0 \right\}$$

ve

$$(C,1) - \limsup A_k = \left\{ x \in X : \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} d(x, A_k) = 0 \right\}$$

dir [14].

Tanım 3.2.2. (X, ρ) bir metrik uzay olsun. Herhangi bir boş olmayan $A_k \subseteq X$ alt kümeleri için eğer

$$(C,1) - \liminf A_k = (C,1) - \limsup A_k$$

ise $\{A_k\}$ Kuratowski Cesàro toplanabilirdir denir [14].

Tanım 3.2.3. (X, ρ) bir metrik uzay olsun. Herhangi bir boş olmayan kapalı $A, A_k \subseteq X$ alt kümeleri için eğer $\{d(x, A_k)\}$, $d(x, A)$' ya Cesàro toplanabilir ise yani herbir $x \in X$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} d(x, A_k) = d(x, A)$$

ise $\{A_k\}$ dizisi A' ya Wijsman Cesàro toplanabilirdir denir [14].

Tanım 3.2.4. (X, ρ) bir metrik uzay olsun. Herhangi bir boş olmayan kapalı A, $A_k \subseteq X$ alt kümeleri için eğer $\{d(x, A_k)\}$ dizisi $d(x, A)$' ya kuvvetli toplanabilir ise yani herbir $x \in X$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |d(x, A_k) - d(x, A)| = 0$$

ise $\{A_k\}$ dizisi A' ya Wijsman kuvvetli Cesàro toplanabilirdir denir [14].

Tanım 3.2.5. (X,ρ) bir metrik uzay olsun. Herhangi bir boş olmayan kapalı A, $A_k \subseteq X$ alt kümeleri için eğer $\{d(x,A_k)\}$ dizisi $d(x,A)$' ya kuvvetli $p-$toplanabilir ise yani herbir p pozitif reel sayısı ve herbir $x \in X$ için

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|d(x,A_k)-d(x,A)|^p = 0$$

ise $\{A_k\}$ dizisi A' ya Wijsman kuvvetli $p-$Cesàro toplanabilirdir denir [14].

Teorem 3.2.6. (X,ρ) bir metrik uzay ve p bir pozitif reel sayı olsun. Herhangi bir boş olmayan kapalı A, $A_k \subseteq X$ alt kümeleri için

a) Eğer $\{A_k\}$, A'ya Wijsman kuvvetli $p-$Cesàro toplanabilir ise aynı zamanda A' ya Wijsman istatistiksel yakınsaktır.

b) Eğer $\{A_k\}$ sınırlı ve A' ya Wijsman istatistiksel yakınsak ise bu taktirde A' ya Wijsman kuvvetli $p-$Cesàro toplanabilirdir [14].

İspat. (a) Herhangi bir $\{A_k\}$ için bir $\varepsilon > 0$ verilsin. Bu taktirde

$$\sum_{k=1}^{n}|d(x,A_k)-\ d(x,A)|^p \geq \varepsilon\left|\{k \leq n : |d(x,A_k)-d(x,A)|^p \geq \varepsilon\}\right|$$

dır.

Buradan $\{A_k\}$, A' ya Wijsman kuvvetli $p-$Cesàro toplanabilir ise A' ya Wijsman istatistiksel yakınsak olacağı anlaşılır.

(b) $\{A_k\}$ sınırlı ve A' ya Wijsman istatistiksel yakınsak olsun. $\{A_k\}$ sınırlı olduğundan $\sup_k |d(x,A_k)| + d(x,A) = M$ alalım. $\varepsilon > 0$ verilsin ve her $n > N_\varepsilon$ için

$$\frac{1}{n}\left|\left\{k \leq n : |d(x,A_k)-d(x,A)| \geq (\frac{\varepsilon}{2})^{\frac{1}{p}}\right\}\right| < \frac{\varepsilon}{2M^P}$$

olacak şekilde N_ε seçelim ve

$$L_n = \left\{k \leq n : |d(x,A_k)-d(x,A)| \geq (\frac{\varepsilon}{2})^{\frac{1}{p}}\right\}$$

alalım.

Böylece

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|d(x,A_k)-\ d(x,A)|^p \\
= \ & \frac{1}{n}\left(\sum_{k\in\ L_n}|d(x,A_k)-d(x,A)|^p+\sum_{k\leq n;k\notin\ L_n}|d(x,A_k)-\ d(x,A)|^p\right) \\
< \ & \frac{1}{n}\frac{n\varepsilon}{2M^P}M^P+\frac{1}{n}\frac{n\varepsilon}{2}=\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon
\end{aligned}
$$

olacağından $\{A_k\}$'nın A' ya Wijsman kuvvetli $p-$Cesàro toplanabilirdir.

4. KÜME DİZİLERİNİN α. DERECEDEN WIJSMAN İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI

4.1. Küme Dizilerinin α. Dereceden İstatistiksel Yakınsaklığı

Bu bölümde küme dizilerinin α. dereceden Wijsman istatistiksel yakınsaklığını tanımlayacağız.

Tanım 4.1.1 (X,ρ) bir metrik uzay ve $0<\alpha\leq 1$ olsun. Herhangi bir boş olmayan kapalı A, $A_k\subseteq X$ alt kümeleri için eğer $d(x,A_k)$, $d(x,A)$ ya α. dereceden istatistiksel yakınsak ise $\{A_k\}$ dizisi A' ya α. dereceden Wijsman istatistiksel yakınsak denir. Yani her bir $\varepsilon>0$ ve her $x\in X$ için

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^\alpha}\left|\{k\leq n:|d(x,A_k)-d(x,A)|\geq\varepsilon\}\right|=0 \tag{4.1}$$

yani $|d(x,A_k)-d(x,A)|<\varepsilon$ $h.h.k.(\alpha)$ dır. Bu durumda $st^\alpha-\lim_W A_k=A$ şeklinde gösterilir.

Örnek 4.1.2 $X=\mathbb{R}$ olsun ve $\{A_k\}$ dizisini

$$A_k=\begin{cases}\{x\in\mathbb{R}:2\leq x\leq k\}, & \text{eğer } k\geq 2 \text{ ve } k \text{ tam kare ise,}\\ \{1\}, & \text{diğer durumlarda,}\end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu dizi Wijsman yakınsak değildir fakat

$$\frac{1}{n^\alpha}\left|\{k\leq n:|d(x,A_k)-d(x,\{1\})|\geq\varepsilon\}\right|\leq\frac{\sqrt{n}}{n^\alpha}$$

den dolayı bu dizi $\frac{1}{2}<\alpha\leq 1$ için $st^\alpha-\lim_W A_k=1$ dir.

Örnek 4.1.3 $X=\mathbb{R}^2$ ve $\{A_k\}$ dizisini

$$A_k=\begin{cases}\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:(x-1)^2+y^2=\frac{1}{k}\right\}, & \text{eğer } k \text{ tam kare ise}\\ \{(0,0)\}, & \text{diğer durumlarda}\end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu dizi $A=\{(0,0)\}$' a α. dereceden Wijsman istatistiksel yakınsaktır fakat Wijsman yakınsak değildir.

Tanım 4.1.4 (X,ρ) bir metrik uzay ve $0<\alpha\leq 1$ olsun. Herhangi bir boş olmayan kapalı $A_k\subseteq X$ alt kümeleri için eğer her $\varepsilon>0$ ve her $x\in X$ için,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^\alpha}\left|\{k\le n: |d(x,A_k)-d(x,A_N)|\ge\varepsilon\}\right|=0$$

olacak şekilde bir $N=N(\varepsilon)$ sayısı varsa $\{A_k\}$ dizisine α. dereceden Wijsman istatistiksel Cauchy dizisidir denir.

Teorem 4.1.5 (X,ρ) bir metrik uzay olsun. Aşağıdaki önermeler denktir.

i) $\{A_k\}$ α. dereceden Wijsman istatistiksel yakınsak dizidir.

ii) $\{A_k\}$ α. dereceden Wijsman istatistiksel Cauchy dizisidir.

iii) $\{A_k\}$ $h.h.k.(\alpha)$ için $A_k=B_k$ olacak şekilde bir Wijsman yakınsak $\{B_k\}$ dizisi vardır.

İspat. Kabul edelimki $st-\lim_W A_k=A$ ve $\varepsilon>0$ olsun. Bu taktirde $h.h.k.(\alpha)$ için $|d(x,A_k)-d(x,A)|<\frac{\varepsilon}{2}$ dir. Eğer N, $h.h.k.(\alpha)$ için $|d(x,A_N)-d(x,A)|<\frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde bir N sayısı bulabiliriz.

$$|d(x,A_k)-d(x,A_N)| \le |d(x,A_k)-d(x,A)|+|d(x,A_N)-d(x,A)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}$$

elde edilir. Böylece $\{A_k\}$ α. dereceden Wijsman istatistiksel Cauchy dizisidir. Şimdi de (ii) doğru olduğunu kabul edelim ve $h.h.k.(\alpha)$ için $J=[d(x,A_N)-1,d(x,A_N)+1]$ aralığı $d(x,A_k)$' yı kapsayacak şekilde N sayısını seçelim. Benzer şekilde $h.h.k.(\alpha)$ için $J'=\left[d(x,A_{N_2})-\frac{1}{2},d(x,A_{N_2})+\frac{1}{2}\right]$ aralığı $d(x,A_k)$' yı kapsayacak şekilde N_2' yi seçelim. Burada $h.h.k.(\alpha)$ için $J_1=J\cap J'$ aralığı $d(x,A_k)$' yı kapsar. Gerçekten

$$\{k\le n: d(x,A_k)\notin J\cap J'\}=\{k\le n: d(x,A_k)\notin J\}\cup\{k\le n: d(x,A_k)\notin J'\}$$

böylece

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^\alpha}\left|\{k\le n: d(x,A_k)\notin J\cap J'\}\right|\\ \le\ &\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^\alpha}\left|\{k\le n: d(x,A_k)\notin J\}\right|+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^\alpha}\left|\{k\le n: d(x,A_k)\notin J'\}\right|=0\end{aligned}$$

yazılabilir.

Buna göre J_1, $h.h.k.(\alpha)$ için $d(x,A_k)$' yı kapsayan ve uzunluğu 1'e eşit veya küçük olan kapalı bir aralıktır. Şimdi de $h.h.k.(\alpha)$ için $J''=\left[d(x,A_{N_3})-\frac{1}{4},d(x,A_{N_3})+\frac{1}{4}\right]$ aralığı $d(x,A_k)$' yı kapsayacak şekilde N_3 sayısını seçerek ilerleyelim. Böylece bir önceki yaklaşımla $h.h.k.(\alpha)$ için $J_2 = J_1 \cap J''$ aralığı $d(x, A_k)$'yı kapsayacaktır ve J_2' nin uzunluğu $\frac{1}{2}$ ' den küçük veya eşit olacaktır. Bu sürece devam edilirse tümevarım yöntemiyle herbir m için $J_{m+1} \subseteq J_m$ olacak şekilde (J_m) kapalı aralıklar dizisi inşa ederiz ve J_m' nin uzunluğu 2^{m-1} den büyük değildir ve $h.h.k.(\alpha)$ için $d(x, A_k) \in J_m$ dir. Yığılmış (kümelenmiş) Aralıklar Teoremi gereğince $\cap_{m=1}^{\infty} J_m$ kümesine eşit olan bir η sayısı vardır. $h.h.k.(\alpha)$ için $d(x, A_k) \in J_m$ kullanılırsa $n > T_m$ iken

$$\frac{1}{n^\alpha} |\{k \leq n : d(x, A_k) \notin J\}| < \frac{1}{m} \tag{4.2}$$

olacak şekilde artan bir $\{T_m\}$ pozitif tamsayı dizisi seçelim. $n > T_m$ ise tüm (A_k) terimlerinden oluşan bir $C = (C_k)$ alt dizisini tanımlayalım öyle ki $k > T_1$ olacak şekilde ve $T_m < k \leq T_{m+1}$ ise $d(x, A_k) \notin J_m$ dır. Daha sonra

$$B_k = \begin{cases} \{\eta\}, & \text{eğer } A_k, C \text{ nin bir terimi ise,} \\ A_k, & \text{diğer durumlarda,} \end{cases}$$

şeklinde (B_k) dizisini tanımlayalım.

O halde $\lim B_k = \{\eta\}$ dür. Eğer $\varepsilon > \frac{1}{m} > 0$ ve $k > T_m$ ise bu taktirde ya $A_k = B_k = \{\eta\}$ demektir, ya da $B_k = A_k \in J_m$ ve $|d(x, B_k) - d(x, \{\eta\})| \leq J_m$ nin uzunluğu 2^{1-m} ' den küçük veya eşit olacaktır. Ayrıca $A_k = B_k$ olduğunu iddia ediyoruz. Bunu doğrulamak için $T_m < k < T_{m+1}$ ise

$$\{k \leq n : d(x, A_k) \neq d(x, B_k)\} \subseteq \{k \leq n : d(x, A_k) \notin J\}$$

olduğunu yazalım.

Böylece (4.2) den

$$\frac{1}{n^\alpha} |\{k \leq n : d(x, A_k) \neq d(x, B_k)\}| \leq \frac{1}{n^\alpha} |\{k \leq n : d(x, A_k) \notin J\}| < \frac{1}{m}$$

olur. Buna göre $n \to \infty$ için limit 0 dır ve $h.h.k.(\alpha)$ için $A_k = B_k$ dır. Bu nedenle (ii) , (iii)' nin gerektirir. Son olarak (iii)'ün sağlandığını yani $h.h.k.(\alpha)$ için $A_k = B_k$ ve $\lim B_k = \{\eta\}$ olduğunu kabul edelim.

$\varepsilon > 0$ olsun. Bu taktirde herbir n için

$$\begin{aligned}
& \{k \leq n : |d(x, A_k) - d(x, \{\eta\})| \geq \varepsilon\} \\
\subseteq \quad & |\{k \leq n : d(x, B_k) \neq d(x, A_k)\}| \cup \{k \leq n : |d(x, B_k) - d(x, \{\eta\})| \geq \varepsilon\}
\end{aligned}$$

dır.

$\lim B_k = \{\eta\}$ olduğundan dolayı yukarıda yazılan ikinci küme sabit sayıda eleman ihtiva eder. Buna $l = l(\varepsilon)$ diyelim. Bu nedenle

$$\begin{aligned}
& \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} |\{k \leq n : |d(x, A_k) - d(x, \{\eta\})| \geq \varepsilon\}| \\
\leq \quad & \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} |\{k \leq n : d(x, B_k) \neq d(x, A_k)\}| + \lim_{n\to\infty} \frac{l}{n^\alpha} = 0
\end{aligned}$$

dır. Çünkü $h.h.k.(\alpha)$ için $A_k = B_k$ dır. Böylece (i) sağlanır ve ispat tamamlanır.

4.2. α. Dereceden Kuvvetli Toplanabilir Küme Dizileri

Bu kısımda α. dereceden Kuratowski Cesàro toplanabilir ve α. dereceden Wijsman kuvvetli toplanabilir küme dizilerini tanımlayıp α. dereceden Wijsman istatistiksel yakınsak ve α. dereceden Wijsman kuvvetli toplanabilir küme dizileri arasındaki ilişkiyi vereceğiz.

Tanım 4.2.1. (X, ρ) bir metrik uzay ve $0 < \alpha \leq 1$ olsun. X' in boş olmayan A_k alt kümelerinin $\{A_k\}$ dizisi için α. dereceden alt Cesàro ve üst Cesàro limit kavramlarını şu şekilde tanımlayalım.

$$(C, 1, \alpha) - \liminf A_k = \left\{ x \in X : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^{n} d(x, A_k) = 0 \right\}$$

ve

$$(C, 1, \alpha) - \limsup A_k = \left\{ x \in X : \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^{n} d(x, A_k) = 0 \right\}$$

dir.

Tanım 4.2.2. (X, ρ) bir metrik uzay ve $0 < \alpha \leq 1$ olsun. Herhangi bir boş olmayan $A_k \subseteq X$ alt kümeleri için eğer

$$(C, 1, \alpha) - \liminf A_k = (C, 1, \alpha) - \limsup A_k$$

ise $\{A_k\}$ α. dereceden Kuratowski Cesàro toplanabilirdir denir.

Tanım 4.2.3. (X, ρ) bir metrik uzay ve $0 < \alpha \leq 1$ olsun. Herhangi bir boş olmayan kapalı $A, A_k \subseteq X$ alt kümeleri için eğer $\{d(x, A_k)\}$, $d(x, A)$' ya α. dereceden Cesàro toplanabilir ise yani herbir $x \in X$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^{n} d(x, A_k) = d(x, A)$$

ise $\{A_k\}$ dizisi A' ya α. dereceden Wijsman Cesàro toplanabilirdir denir.

Tanım 4.2.4. (X, ρ) bir metrik uzay ve $0 < \alpha \leq 1$ olsun. Herhangi bir boş olmayan kapalı A, $A_k \subseteq X$ alt kümeleri için eğer $\{d(x, A_k)\}$ dizisi $d(x, A)$' ya α. dereceden kuvvetli toplanabilir ise yani herbir $x \in X$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^{n} |d(x, A_k) - d(x, A)| = 0$$

ise $\{A_k\}$ dizisi A' ya α. dereceden Wijsman kuvvetli Cesàro toplanabilirdir denir.

Tanım 4.2.5. (X, ρ) bir metrik uzay ve $0 < \alpha \leq 1$ olsun. Herhangi bir boş olmayan kapalı A, $A_k \subseteq X$ alt kümeleri için eğer $\{d(x, A_k)\}$ dizisi $d(x, A)$' ya α. dereceden kuvvetli $p-$toplanabilir ise yani herbir p pozitif reel sayısı ve herbir $x \in X$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^{n} |d(x, A_k) - d(x, A)|^p = 0$$

ise $\{A_k\}$ dizisi A' ya α. dereceden Wijsman kuvvetli $p-$Cesàro toplanabilirdir denir.

Teorem 4.2.6. (X, ρ) bir metrik uzay, p bir pozitif reel sayı ve $0 < \alpha \leq 1$ olsun. Herhangi bir boş olmayan kapalı A, $A_k \subseteq X$ alt kümeleri için

a) $0 < \alpha \leq \beta < 1$ ve $0 < p < \infty$ olsun. Eğer $\{A_k\}$, A' ya α. dereceden Wijsman kuvvetli $p-$Cesàro toplanabilir bu durumda A' ya β. dereceden Wijsman istatistiksel yakınsaktır.

b) Eğer $\{A_k\}$ sınırlı ve A' ya α. dereceden Wijsman istatistiksel yakınsak ise bu taktirde A' ya α. dereceden Wijsman kuvvetli $p-$Cesàro toplanabilirdir.

İspat. (a) Herhangi bir $\{A_k\}$ için bir $\varepsilon > 0$ verilsin. Bu taktirde

$$\sum_{k=1}^{n} |d(x, A_k) - d(x, A)|^p \geq \varepsilon^p \left|\{k \leq n : |d(x, A_k) - d(x, A)| \geq \varepsilon^p\}\right|$$

dır. Buradan

$$\frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^{n} |d(x, A_k) - d(x, A)|^p \geq \frac{1}{n^\alpha} |d(x, A_k) - d(x, A)| \, \varepsilon^p \geq \frac{1}{n^\beta} |d(x, A_k) - d(x, A)| \, \varepsilon^p$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

(b) $\{A_k\}$ sınırlı ve A' ya α. dereceden Wijsman istatistiksel yakınsak olsun. $\{A_k\}$ sınırlı olduğundan $\sup_k |d(x, A_k)| + d(x, A) = M$ alalım. $\varepsilon > 0$ verilsin ve her $n > N_\varepsilon$ için

$$\frac{1}{n^\alpha} \left| \left\{ k \leq n : |d(x, A_k) - d(x, A)| \geq (\frac{\varepsilon}{2})^{\frac{1}{p}} \right\} \right| < \frac{\varepsilon}{2M^P}$$

olacak şekilde N_ε seçelim ve

$$L_n = \left\{ k \leq n : |d(x, A_k) - d(x, A)| \geq (\frac{\varepsilon}{2})^{\frac{1}{p}} \right\}$$

alalım.

Böylece

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^{n} |d(x, A_k) - \ d(x, A)|^p \\
= \ & \frac{1}{n^\alpha} \left(\sum_{k \in \ L_n} |d(x, A_k) - d(x, A)|^p + \sum_{k \leq n; k \notin \ L_n} |d(x, A_k) - d(x, A)|^p \right) \\
< \ & \frac{1}{n^\alpha} \frac{n^\alpha \varepsilon}{2M^P} M^P + \frac{1}{n^\alpha} \frac{n^\alpha \varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

olacağından $\{A_k\}$, A' ya α. dereceden Wijsman kuvvetli $p-$Cesàro toplanabilirdir.

5. SONUÇ.

Bu tezde İstatistiksel yakınsaklık ve Cesàro toplanabilirlik kavramlarının tanım ve teoremleri verilmiştir. Çolak [11] tarafından verilen α. dereceden istatistiksel yakınsaklığı ve α. dereceden kuvvetli toplanabilme ilişkileri incelenmiştir.

Nuray ve Rhoades [14] tarafından tanımlanan küme dizilerinin istatistiksel yakınsaklık kavramı incelenerek küme dizilerinin α. dereceden istatistiksel yakınsaklığı tanımlanmış ve α. dereceden kuvvetli toplanabilme teorisi ile ilişkileri açıklanmaya çalışılmıştır.

KAYNAKLAR

1. **Kreyszig, E.**, 1978. Introductory Functional Analysis with Application, John Wiley & Sons, New York.

2. **Fast, H.**, 1951. Sur la convergence statistique, Colloq. Math., 2, 241-244.

3. **Schoenberg, I.J.**, 1959. The integrability of certain functions and related to summability methods, Amer. Math. Monthly, 66, 361-375.

4. **Buck, R. C.**, 1953. Generalized asymptotic density. Amer. J. Math., 75, 335-346.

5. **Connor, J.S.**, 1988. The statistical and strong $p-$ Cesàro convergence of sequences, Analysis, 8, 47-63.

6. **Šalât, T.**, 1980. On statistically convergent sequences of real numbers, Math. Slovaca., 30 (2), 139-150.

7. **Fridy, J.A.**, 1985. On the statistical convergence, Analysis, 5, 301-313.

8. **Niven, I. and Zuckerman, H.S.**, 1980. An Introduction to The Theory of Numbers, Fourth Ed., New York , John Wiley and Sons.

9. **Powell, R.E. and Shah, S.M.**, 1972. Summability Theory and its Applications, Van Nostrand-Reinhold Company, London.

10. **Maddox, I. J.**, 1967. Spaces of strongly summable sequences. Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) 18, 345–355.

11. **Çolak, R.**, 2010. Statistical convergence of order α, Modern Methods in Analysis and Its Applications, NewDelhi, India: Anamaya Pub, 121–129.

12. **Aubin, J.P. and Frankowska, H.**, 1990. Set-Valued Analysis, Birkhauser, Boston.

13. **Wijsman, R. A.**, 1964. Convergence of sequences of convex sets, cones and functions, Bull. Amer. Math. Soc., 70, 186-188.

14. **Nuray, Fatih; Rhoades, B. E.**, 2012. Statistical convergence of sequences of sets. Fasc. Math. No. 49 , 87–99.

ÖZGEÇMİŞ

1977 yılında Elazığ'da doğdum. İlk, Orta ve Lise öğrenimimi Elazığ'da tamamladım. 1995 yılında Fırat Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümüne girdim ve 1999 yılında Matematik Bölümünden mezun oldum. Milli Eğitim Bakanlığı'na bağlı Elazığ Merkez Necip Güngör Kısaparmak Mesleki ve Teknik Anadolu Lisesi'nde Matematik öğretmeni olarak görev yapmaktayım. 2013 yılında Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında tezli yüksek lisansa başladım.