MOTOR OPERATÖRLERİNİN GEOMETRİSİ ÜZERİNE

Abdurrahim KENAR

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Şubat - 2015

MOTOR OPERATÖRLERİNİN GEOMETRİSİ ÜZERİNE

Abdurrahim KENAR

Dumlupınar Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Öğretim ve Sınav Yönetmeliği Uyarınca
Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır.

Danışman: Prof. Dr. Erhan ATA

Şubat - 2015

KABUL VE ONAY SAYFASI

Abdurrahim KENAR'ın YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı 'MOTOR OPERATÖRLERİNİN GEOMETRİSİ ÜZERİNE' başlıklı bu çalışma, jürimizce Dumlupınar Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Öğretim ve Sınav Yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

18/02/2015

Üye: Prof. Dr. Erhan ATA

Üye: Doç. Dr. Cumali EKİCİ

Üye: Doç. Dr. M. Kemal KARACAN

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun …/03/2015 Gün ve …….sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Hasan GÖÇMEZ

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

MOTOR OPERATÖRLERİNİN GEOMETRİSİ ÜZERİNE

Abdurrahim KENAR
Matematik, Yüksek Lisans Tezi, 2015
Tez Danışmanı: Prof. Dr. Erhan ATA

ÖZET

Bu tezde ilk olarak kuaterniyonlar, dual sayılar, dual vektörler ve dual kuaterniyonlar ele alınarak bunlarla ilgili temel tanım ve kavramlar verilmiştir.

Daha sonra dual kuaterniyon vektörleri yardımıyla vida hareketleri ve özel durumları (kayma ve dönme hareketleri) incelenerek vida operatörleri bulunmuştur.

Son olarak vida hareketinin daha gelişmiş (genel) hali olan motor hareketi incelenerek motor operatörü elde edilmiştir. Motor operatörü yardımıyla da ardışık motor hareketleri verilmiştir.

Gerek vida hareketleri ve gerekse motor hareketi Maple programı yardımıyla örneklendirilmiş bu hareketlerle ilgili şekiller elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Kuaterniyonlar, Dual sayılar, Dual kuaterniyonlar, Vida hareketi, motor hareketi.

ON THE GEOMETRY OF MOTOR OPERATORS

Abdurrahim KENAR
Mathematics, M. S. Thesis, 2015
Thesis Supervisor: Prof. Dr. Erhan ATA

SUMMARY

This thesis firstly deals with quaternions, dual numbers, dual vectors and dual quaternions by giving basic definitions and explaining related concepts.

Next, by investigating screw motion and some special cases (sliding and rotation motions) screw operators are calculated.

Finally, by investigating motor motion, which is the more advanced and general form of the screw motion, the motor operator is obtained.

Screw motion, as well as motor motion, is illustrated by examples and figures generated by the maple software.

Key Words: Quaternions, Dual Numbers, Dual Quaternions, Screw motion, Motor motion.

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans çalışmalarım süresince değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren, kıymetli zamanını bana ayırarak titizlikle tezimi inceleyen tez danışmanım Prof. Dr. Erhan ATA'ya sonsuz teşekkür ediyorum. Ayrıca yüksek lisansım süresince manevi destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan eşime ve neşe kaynağım çocuklarıma teşekkür ediyorum.

Abdurrahim KENAR

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET iv

SUMMARY v

ŞEKİLLER DİZİNİ ix

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ x

1. BÖLÜM 1

1.1. Kuaterniyonlar 1
1.2. Eşlenik 1
1.3. Toplam-Fark 1
1.4. H Üzerinde Skalerle Çarpma İşlemi 2
1.5. Kuaterniyon Çarpımı 3
1.6. Bir Kuaterniyonun Normu 4
1.7. Birim Kuaterniyonun Kutupsal Formu 5
1.8. Birim Kuaterniyonun Kuvveti 5
1.9. Bir Kuaterniyonun Çarpmaya Göre Tersi 6
1.10. Kuaterniyonların Matris Gösterimi 6
1.11. Kuaterniyon Operatörü 8

2. BÖLÜM 11

2.1. Dual Sayılar 11
2.2. Dual Sayılarda Bölme 11
2.3. Dual Sayıların Matris Gösterimi 12
2.4. Dual Sayılar İle İlgili Temel Tanım Ve Teoremler 13
2.5. Dual Vektör Uzayı 14
2.6. Plücker Doğru Koordinatları 19
2.7. Dual Açı 20
2.8. Dual Vektörlerin Lineer Bağımlılığı, Lineer Bağımsızlığı Ve Bazlar 22

3. BÖLÜM 24

3.1. Dual Kuaterniyonlar 24
3.2. Dual Kuaterniyonlar Üzerinde Temel İşlemler 24

İÇİNDEKİLER (devam)

Sayfa

3.3. Birim Dual Kuaterniyon 28

3.4. Çizgi Kuaterniyonu 29

4. BÖLÜM 31

4.1. Vida Hareketi 31

4.1.1. Dönme hareketi 32
4.1.2. Öteleme hareketi 33

4.2. Motor Hareketi 38

4.2.1. Motor gösterimi 38
4.2.2. Motorun geometrik özellikleri 41
4.2.3. Motor yer değiştirmesi 42
4.2.4. Motor operatörünün türetilmesi 42
4.2.5. Motor operatörünün tersi 45
4.2.6. Referans noktası 45
4.2.7. Motor yer değiştirmenin özellikleri 46
4.2.8. Motorların lineer birleşimi 47
4.2.9. İki motor arasındaki uzaklık 49
4.2.10. İki motor operatörünün kesişimi 50

KAYNAKLAR DİZİNİ 60

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil **Sayfa**

1.1. Kuaterniyonlarla dönme. 8
1.2. Kuaterniyon operatörü. 9
1.3. Kompleks sayı operatörü 10
1.4. Özel kuaterniyon operatörü. 10
2.1. Yönlü doğru. 18
2.2. Yönlü doğru. 18
2.3. Dual açı. 20
4.1. Vida operatörü. 32
4.2. Dönme hareketi. 33
4.3. Öteleme hareketi. 34
4.4. Motor gösterimi 39
4.5. Referans noktası değişimi. 41
4.6. Motor yer değiştirmesi. 42
4.7. İki motor arasındaki uzaklık 49

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	**Açıklama**
R	Reel Sayılar Kümesi
ID	Dual Sayılar Kümesi
C	Kompleks Sayılar Kümesi
M	Matrislerin Kümesi
H	Kuaterniyonların Kümesi
H_{ID}	Dual Kuaterniyonların Kümesi
ID^3	Üç Boyutlu Dual Vektör Uzayı
$\wedge$	Dış Çarpım
$<,>$	İç Çarpım
$\lvert . \rvert$	H Üzerinde Bir Norm
S_p	Dual Uzayda Bir Baz
T_q	H Üzerinde Bir Lineer Dönüşüm

1. BÖLÜM

1.1. Kuaterniyonlar

Bir kuaterniyon $q = a + bi + cj + dk = (a,b,c,d)$; $a,b,c,d \in R$ biçimindedir. Burada $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ dir.

q kuaterniyonu reel (skaler) ve imajiner (vektörel) olmak üzere iki kısma ayrılır. q nun reel kısmı $\operatorname{Re} q = a$ ve q nun vektörel kısmı $\operatorname{Im} q = bi + cj + dk$ dır.

Buna göre $q = a + bi + cj + dk$ kuaterniyonu $q = \operatorname{Re} q + \operatorname{Im} q$ biçiminde de yazılabilir.

Eğer $\operatorname{Re} q = 0 \Rightarrow q = \operatorname{Im} q = bi + cj + dk$ olur. Bu durumda q 'ya kuaterniyon vektör veya kuaterniyonik vektör adı verilir (Parker, 2009).

1.2. Eşlenik

Herhangi bir $q = a + bi + cj + dk$ kuaterniyonunun eşleniği $\overline{q} = a - (bi + cj + dk)$ biçiminde tanımlanır. Buradan $\overline{q} = \operatorname{Re} q - \operatorname{Im} q$ olur. Buna göre

$$q + \overline{q} = 2a \Rightarrow a = \frac{q + \overline{q}}{2} \Rightarrow \operatorname{Re} q = \frac{q + \overline{q}}{2}$$

$$q - \overline{q} = (a + bi + cj + dk) - (a - bi - cj - dk) \Rightarrow \operatorname{Im} q = \frac{q - \overline{q}}{2}$$ bulunur. Ayrıca $q = \overline{q} \Leftrightarrow q \in R \Leftrightarrow q = \operatorname{Re} q$ olur (Parker, 2009).

1.3. Toplam-Fark

Herhangi iki *p* ve *q* kuaterniyonları için

$q = a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k$, $p = a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k$ olsun.

p ve *q* kuaterniyonlarının toplamı ve farkı aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} p + q &= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k \\ &= \operatorname{Re} p + \operatorname{Re} q + \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q \\ &= \operatorname{Re}(p+q) + \operatorname{Im}(p+q) \end{aligned}$$ ve

$$p-q=(a_1-a_2)+(b_1-b_2)i+(c_1-c_2)j+(d_1-d_2)k$$

$$=\operatorname{Re}p-\operatorname{Re}q+\operatorname{Im}p-\operatorname{Im}q$$

$p-q=\operatorname{Re}(p-q)+\operatorname{Im}(p-q)$ olur (Vicci, 2001).

Tüm kuaterniyonların kümesini H ile göstereceğiz. Buna göre H kümesi toplama işlemiyle birlikte bir Abel grubu olur. Yani $(H,+)$ ikilisi bir Abel grubudur. Burada H'da '+' işleminin birim elemanı $0=0+0i+0j+0k=(0,0,0,0)$ ve $\forall q\in H$ ' nin '+' işlemine göre tersi $-q\in H$ dır (Parker, 2009).

1.4. H Üzerinde Skalerle Çarpma İşlemi

$$\cdot\ :RxH\to H$$

$$(\lambda,q)\to\lambda.q=\lambda.(a+bi+cj+dk)$$

$$\lambda.q=\lambda a+\lambda bi+\lambda cj+\lambda dk\quad(\lambda.q=q.\lambda)$$

biçiminde tanımlanır. Bu işlemle birlikte $\{H,+,(R,+,\cdot),\cdot\}$ sistemi bir reel vektör uzayıdır. Bu uzayın standart bazı $\{1,i,j,k\}$ dır. Buna göre H uzayının R cismi üzerindeki boyutu 4 olur.

Bundan sonra $\lambda.q$ skaler çarpımının yerine λq ifadesini kullanacağız.

Herhangi bir $q=a+bi+cj+dk$ kuaterniyonu

$$q=(a+bi)+(c+di)j$$

$$q=z_1+z_2j;Z_1=a+bi,Z_2=c+di$$

biçiminde de tek türlü olarak yazılabilir. Bu yazılış H'nin C kompleks sayılar cismi üzerinde bir vektör uzayı olmasına imkan sağlar. Buna göre,

$$\cdot\ :CxH\to H$$

$$(w,q)\to wq=w(z_1+z_2j)$$

$$wq=wz_1+wz_2j\ =wz_1+wz_2j$$

skalerle çarpma işlemiyle birlikte $\{H,+,(C,+,\cdot),\cdot\}$ sistemi bir kompleks vektör uzayı olur. Bu uzayın standart bazı $\{1, j\}$ ve böylece *H*' nin *C* cismi üzerindeki boyutu 2 olur (Hacısalihoğlu, 1983).

1.5. Kuaterniyon Çarpımı

H kuaterniyonlar uzayı üzerinde yeni bir işlem olan kuaterniyon çarpımını (kuaterniyonik çarpım) tanımlayalım.

$$\cdot\ : H \times H \to H$$

$$(q, p) \to qp = (a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k)(a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k)$$

$$= a_1 a_2 - (b_1 b_2 + c_1 c_2 + d_1 d_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2 + c_1 d_2 - d_1 c_2) i \ +$$

$$(a_1 c_2 + c_1 a_2 + d_1 b_2 - b_1 d_2) j + (a_1 d_2 + d_1 a_2 + b_1 c_2 - c_1 b_2) k$$

$$= \operatorname{Re} q \operatorname{Re} p - < \operatorname{Im} q, \operatorname{Im} p > + \operatorname{Re} q \operatorname{Im} p + \operatorname{Re} p \operatorname{Im} q + \operatorname{Im} q x \operatorname{Im} p$$

Bu işlem aşağıdaki özelliklere sahiptir.

i) Kapalılık özeliği

ii) Birleşme özeliği: Herhangi p, q, r kuaterniyonları için

$$(pq)r = p(qr)$$

iii) Sağdan ve soldan çarpma işleminin toplama işlemi üzerine dağılma özelliği

Herhangi $p, q, r \in H$ kuaterniyonları için

$$(p+q)r = pr + qr \ \text{ ve } \ p(q+r) = pq + pr$$

O halde *H* kuaterniyonlar uzayı bir CEBİR yapısına sahip olur.

$\forall p, q \in H$ için $pq \neq qp$ olduğundan *H* cebiri değişmeli değildir.

Kuaterniyon çarpımının *H* üzerindeki birim elemanı $1 = 1 + 0i + 0j + 0k$ dır.

Sonuç olarak *H* cebiri birimli fakat değişmeli olmayan bir cebirdir.

Genel olarak $pq \neq qp$ olduğunu biliyoruz. Fakat özel olarak $p = \operatorname{Re} p + \operatorname{Im} p$ $q = \operatorname{Re} q + \operatorname{Im} q$ kuaterniyonları için $\operatorname{Im} p = 0$ veya $\operatorname{Im} q = 0$ ya da $\{\operatorname{Im} p, \operatorname{Im} q\}$ lineer bağımlı olması durumunda *pq=qp* olur (Vicci, 2001).

Buna göre $\overline{p} = \operatorname{Re} p - \operatorname{Im} p$ olduğundan $p\overline{p} = \overline{p}p$ bulunur.

Teorem 1.5.1. Herhangi $\lambda, \mu \in R$ skalerleri ve herhangi $p, q \in H$ kuaterniyonları için aşağıdaki özellikler sağlanır (Parker, 2009).

1) $\overline{\lambda p + \mu q} = \lambda \overline{p} + \mu \overline{q}$

2) $\overline{pq} = \overline{q}\,\overline{p}$

3) $\overline{\left(\overline{p}\right)} = p$

1.6. Bir Kuaterniyonun Normu

H üzerinde norm fonksiyonu

$$|\cdot| : H \to R$$

$$q \to |q| = \sqrt{q\overline{q}} = \sqrt{\overline{q}q}$$

biçiminde tanımlanır. Buna göre $q = \operatorname{Re} q + \operatorname{Im} q = a + bi + cj + dk$ kuaterniyonu için

$$|q| = \sqrt{q\overline{q}} = \sqrt{(\operatorname{Re} q + \operatorname{Im} q)(\operatorname{Re} q - \operatorname{Im} q)}$$

$$= \sqrt{(\operatorname{Re} q)^2 + < \operatorname{Im} q, \operatorname{Im} q >}$$

$$= \sqrt{(\operatorname{Re} q)^2 + \|\operatorname{Im} q\|^2}$$

$= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$ reel sayısına q nun normu denir.

Eğer $|q| = 1$ ise *q* birim kuaterniyondur (Parker, 2009).

1.7. Birim Kuaterniyonun Kutupsal Formu

$q = a + bi + cj + dk$ herhangi bir birim kuaterniyon olsun. Buna göre $|q|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$ olur. Burada

$\cos\theta = a$ alınırsa $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \Rightarrow \sin\theta = \sqrt{1-a^2}$ olduğundan

$\sin\theta = \sqrt{b^2+c^2+d^2}$ bulunur.

Böylece $q = a + bi + cj + dk$ birim kuaterniyonu

$$= a + \frac{(bi+cj+dk)}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}\sqrt{b^2+c^2+d^2}$$

$$= \cos\theta + \vec{S}\sin\theta$$

$$= e^{\vec{S}.\theta}$$

biçiminde yazılabilir. Burada;

$\left|\vec{S}\right| = 1$ ve $\vec{S}^2 = \vec{S}\vec{S} = -<\vec{S},\vec{S}> = -1$ dir.

Eğer q birim kuaterniyon değilse q nun kutupsal formu,

$q_0 = \dfrac{q}{|q|}$ birim kuaterniyon olacağından $q = |q|\,q_0 = |q|(\cos\theta_0 + \vec{S}\sin\theta_0) = |q|e^{\vec{S}\theta}$

biçiminde olur (Parker, 2009).

1.8. Birim Kuaterniyonun Kuvveti

Herhangi bir $q \in H$ birim kuaterniyonunun

$q = \cos\theta + \vec{S}\sin\theta = e^{\vec{S}\theta}$ biçiminde yazılabileceğini biliyoruz.

$t \in R$ için $q^t = (\cos\theta + \vec{S}\sin\theta)^t = (e^{\vec{S}\theta})^t$ olacağından

$\Rightarrow q^t = \cos(t\theta) + \vec{S}\sin(t\theta) = e^{\vec{S}t\theta}$ olur (Parker, 2009).

Teorem 1.8.1. Herhangi $p, q \in H$ kuaterniyonları için aşağıdaki özellikler sağlanır (Parker, 2009).

1) $|p| = 0 \Leftrightarrow p = 0$

2) $|p+q| \le |p| + |q|$

3) $|pq| = |qp| = |p||q| = |q||p|$

1.9. Bir Kuaterniyonun Çarpmaya Göre Tersi

Herhangi $q \neq 0 \in H$ kuaterniyonu için q nun tersi q^{-1} ile gösterilir ve $q\overline{q} = |q|^2$ ifadesinden $q^{-1} = \dfrac{\overline{q}}{|q|^2}$ elde edilir.

Eğer $q = a + bi + cj + dk = \operatorname{Re} q + \operatorname{Im} q$ alırsak

$$q^{-1} = \frac{\operatorname{Re} q - \operatorname{Im} q}{\operatorname{Re}^2 q + \|\operatorname{Im} q\|^2} = \frac{a - (bi + cj + dk)}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

bulunur. Buna göre $|q| = |\overline{q}|$ olduğundan $\left|q^{-1}\right| = \left|\dfrac{\overline{q}}{|q|^2}\right| = \dfrac{|\overline{q}|}{|q|^2} = \dfrac{|q|}{|q|^2} = \dfrac{1}{|q|}$ olur (Parker, 2009).

Teorem 1.9.1. Herhangi $p, q \in H$ kuaterniyonlarının tersleri sırası ile p^{-1} ve q^{-1} ise $(pq)^{-1} = q^{-1}p^{-1}$ dir (Parker, 2009).

Tanım 1.9.1. Herhangi $p, q \in H$ kuaterniyonları için p ile q kuaterniyonları benzerdir gerek ve yeter koşul bir $r \neq 0 \in H$ kuaterniyonu için $rp = qr$ eşitliğinin sağlanmasıdır.

Bu tanımda $rp = qr$ eşitliğinin her iki yanı sağdan r^{-1} ile çarpılırsa $q = rpr^{-1}$ elde edilir (Parker, 2009).

Lemma: Herhangi p ve q kuaterniyonları benzerdir gerek ve yeter koşul $\operatorname{Re} p = \operatorname{Re} q$ ve $|p| = |q|$ dır (Wood, 1985).

Sonuç: Eğer p ile q kuaterniyonları benzer ise $\overline{p}$ ile $\overline{q}$ kuaterniyonları da benzerdir.

1.10. Kuaterniyonların Matris Gösterimi

Bir $T : H \to Hom(H, H)$ dönüşümünde $q \in H$ için

$T_q : H \to H$ lineer dönüşümünü tanımlayalım. Burada *T* bir izomorfizmdir.

$$p \to T_q(p) = pq$$

Şimdi T_q lineer dönüşümüne karşılık gelen matrisi bulalım.

H'nın *C* kompleks sayılar cismi üzerinde 2-boyutlu olduğunu ve $\{1, j\}$ kümesinin kompleks standart bazı olduğunu biliyoruz.

Buna göre

$$T_q(1) = 1q = q = a + bi + cj + dk = (a + bi) + (c + di)\,j = z + wj$$

$$T_q(j) = jq = j(z + wj) = jz + jwj = \bar{z}j + \bar{w}jj = -\bar{w} + \bar{z}j \text{ den}$$

$$\begin{bmatrix} T_q(1) \\ T_q(j) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix} \Rightarrow T_q = \begin{bmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{bmatrix} \text{ bulunur.}$$

T_q ile q arasında bir izomorfizm olduğundan $(T_q \approx q)$ T_q yerine *q* alınabilir. Buna göre *q* kuaterniyonuna karşılık gelen kompleks matris

$$q = z + wj = \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix}, \ |q|^2 = \det q = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \text{ bulunur.}$$

Benzer şekilde *H*' nin *R* üzerinde 4-boyutlu olduğunu ve $\{1, i, j, k\}$ kümesinin *H* nin reel standart bazı olduğunu biliyoruz. Buna göre herhangi bir *q* kuaterniyonu için

$$\begin{aligned} T_q(1) &= a + bi + cj + dk \\ T_q(i) &= -b + ai - dj + ck \\ T_q(j) &= -c + di + aj - bk \\ T_q(k) &= -d - ci + bj + ak \end{aligned} \quad \text{den} \quad \begin{bmatrix} T_q(1) \\ T_q(i) \\ T_q(j) \\ T_q(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ j \\ k \end{bmatrix}$$

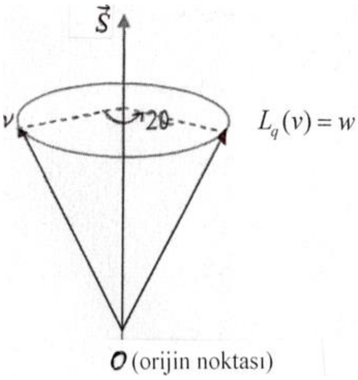
$$\Rightarrow T_q \approx q = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{bmatrix}$$ reel matris karşılığı bulunur (Zhang, 1997).

Teorem 1.10.1. Herhangi bir $q = \operatorname{Re} q + \operatorname{Im} q = \cos\theta + \vec{S}\sin\theta = e^{\vec{S}\theta}$

birim kuaterniyonu için

$$L_q : R^3 \to R^3 \ , \ v \to L_q(v) = qv\overline{q}$$

dönüşümü v vektörünü q birim kuaterniyonunun $\vec{S}$ ekseni etrafında 2θ radyanlık açı kadar döndürür. Buna göre aşağıdaki şekil verilebilir.



Şekil 1.1. Kuaterniyonlarla dönme.

Burada $w = L_q(v) = qv\overline{q}$ olduğundan (Parker, 2009)

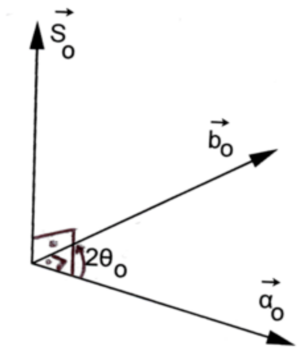
$w = (\operatorname{Re}^2 q - \|\operatorname{Im} q\|^2)v + 2\operatorname{Re} q(\operatorname{Im} q \times v) + 2 < \operatorname{Im} q, v > \operatorname{Im} q$ bulunur.

1.11. Kuaterniyon Operatörü

Herhangi iki birim kuaterniyon vektörleri $\overrightarrow{a_0}$ ve $\overrightarrow{b_0}$ olmak üzere

$$\overrightarrow{a_0}\overrightarrow{b_0} = -< \overrightarrow{a_0}, \overrightarrow{b_0} > + \overrightarrow{a_0} \wedge \overrightarrow{b_0}$$

$= -\cos\theta_0 + \overrightarrow{S_0}.\sin\theta_0$ olduğunu biliyoruz. Burada $\overrightarrow{S_0} = \dfrac{\overrightarrow{a_0} \wedge \overrightarrow{b_0}}{\left\|\overrightarrow{a_0} \wedge \overrightarrow{b_0}\right\|}$ dır.



Şekil 1.2. Kuaterniyon operatörü.

Dolayısıyla yukarıdaki şekilde görüldüğü gibi $\left\{\vec{a_0}, \vec{b_0}, \vec{S_0}\right\}$ bir sağ sistem oluşturur.

$$\overline{(\vec{a_0} \times \vec{b_0})} = \vec{b_0} \times \vec{a_0} = -(\cos\theta_0 + \vec{S_0}\sin\theta_0)$$

ve

$(\vec{a_0})^{-1} = \dfrac{\overline{(\vec{a_0})}}{\left|\vec{a_0}\right|} = -\vec{a_0}$ ve $(\vec{b_0})^{-1} = -\vec{b_0}$ olduğundan

$$q_0 = \vec{b_0} \times (\vec{a_0})^{-1} = (\vec{b_0})^{-1} \times \vec{a_0} = -(\vec{b_0} \times \vec{a_0})$$

$q_0 = \cos\theta_0 + \vec{S_0}\sin\theta_0$ olur. Buradan

q_0 birim kuaterniyondur. Buna göre

$$R \to H$$

$$\theta \to q_0 = \cos\theta_0 + \vec{S_0}\sin\theta_0$$

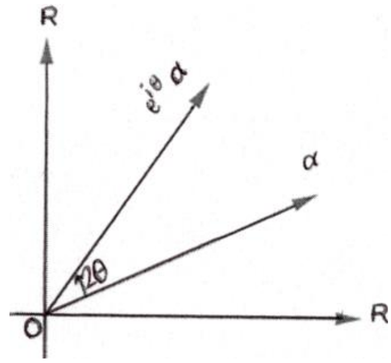
operatörüne kuaterniyon operatörü denir. Buradan

$q_0 = \vec{b_0} \times (\vec{a_0})^{-1} \Rightarrow \vec{b_0} = q_0 \times \vec{a_0}$ ve $q_0 = (\vec{b_0})^{-1} \times \vec{a_0} \Rightarrow \vec{a_0} = \vec{b_0} \times q_0$ eşitlikleri bulunur. Buradan şunu söyleyebiliriz.

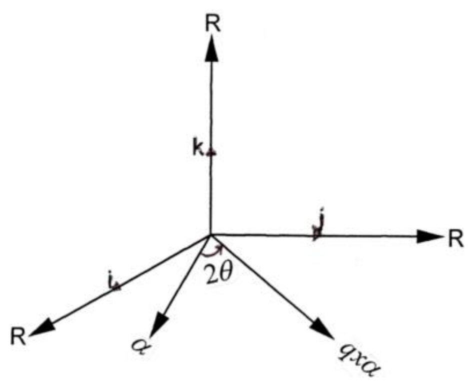
$\overrightarrow{b_0} = q_0 \times \overrightarrow{a_0}$ eşitliğinde $\overrightarrow{a_0}$ ve q_0' ı soldan çarptığımızda $\overrightarrow{b_0}$'ı elde ediyoruz. Yani $\overrightarrow{a_0}$' ı $\overrightarrow{S_0}$ ekseni etrafında $2\theta_0$ kadar döndürüyoruz. Benzer şekilde $\overrightarrow{a_0} = \overrightarrow{b_0} \times q_0$ içinde benzer şeyler söylenebilir (Hacısalihoğlu, 1983)

Sonuç: $q = \cos\theta + \vec{S}\sin\theta$ olmak üzere $\vec{S}$'a dik bir P düzlemi içinde yatan bir α vektörünü, q ile soldan çarpmak demek α'yı $\vec{S}$ etrafında pozitif yönde $2\theta_0$ kadar döndürmektir. α'yı q ile sağdan çarpmak demek ise $\vec{S}$ etrafında negatif yönde $2\theta_0$ kadar döndürmek demektir.

Özel olarak P düzlemini geren vektörler olarak $\vec{i}$ ve $\vec{j}$ alınırsa $\vec{S} = \vec{k}$ olup P düzlemindeki dönmeler için $q = \cos\theta + \vec{k}\sin\theta$ operatörü kullanılır. Bu durumda q kuaterniyon operatörü $e^{i2\theta} = \cos 2\theta + \vec{i}\sin 2\theta$ kompleks sayı operatörü aynı işi yapar (Hacısalihoğlu, 1983).



Şekil 1.3. Kompleks sayı operatörü.



Şekil 1.4. Özel kuaterniyon operatörü.

2. BÖLÜM

2.1. Dual Sayılar

Tanım 2.2.1. $ID=\left\{(a,a^*):a,a^*\in R\right\}=\left\{a+\varepsilon a^*:a,a^*\in R \text{ ve } \varepsilon\neq 0,\varepsilon^2=0\right\}$ dual sayılar kümesinin her bir $A=(a,a^*)=a+\varepsilon a^*$ elemanına bir dual sayı denir. Bu küme üzerinde toplama ve çarpma işlemleri aşağıdaki gibi tanımlanır.

$\forall A=a+\varepsilon a^*,\ B=b+\varepsilon b^*\in ID$ için $(A,B\in ID)$

$$A+B=(a+\varepsilon a^*)+(b+\varepsilon b^*)=(a+b)+\varepsilon.(a^*+b^*)=(a+b,a^*+b^*)$$

$$A\odot B=(a+\varepsilon a^*)\odot(b+\varepsilon b^*)$$

$$=ab+\varepsilon(ab^*+a^*b)$$

$$=(ab,ab^*+a^*b) \text{ olur.}$$

Bu işlemlerle birlikte $(ID,+,\odot)$ üçlüsü bir halkadır. Burada

ID 'nin çarpma işlemine göre birim elemanı $(1,0)=1+\varepsilon 0$ ve çarpma işlemi ID üzerinde değişmeli olduğundan ID halkası birimli ve değişimli bir halkadır. Ayrıca çarpma işlemi değişmelidir.

$(ID,+,\odot)$ halkası bir cisim değildir. Çünkü $\forall A=a+\varepsilon a^*\in ID-\{0\}$ için $A^{-1}=\left(\frac{1}{a},\frac{a^*}{a}\right)=\frac{1}{a}+\varepsilon\frac{a^*}{a}$ olacağından A ' nın A^{-1} tersinin olabilmesi için $a\neq 0$ olması gerekir. Buna göre $B=(0,0^*)=\varepsilon a^*\in ID-\{0\}$ biçimindeki elemanların tersi yoktur (Hacısalihoğlu, 1983).

2.2. Dual Sayılarda Bölme

Herhangi $A,B\in ID$ $(A\neq(0,a^*))$ dual sayıları için $A\odot X=B$ denkleminin bir tek çözümü vardır. Gerçekten

$A=a+\varepsilon a^*$, $X=x+\varepsilon x^*$, $B=b+\varepsilon b^*$ dersek;

$$(a+\varepsilon a^*)\odot(x+\varepsilon x^*)=b+\varepsilon b^*$$

$$\Rightarrow x = \frac{b}{a} \;\;,\; ax^* + a^* \frac{b}{a} = b^*$$

$$\Rightarrow x = \frac{b}{a} \;\;,\; x^* = \frac{ab^* - a^* b}{a^2}$$

olduğundan denklemin çözümü $X = x + \varepsilon x^* = \frac{b}{a} + \varepsilon (\frac{ab^* - a^* b}{a^2})$ olur. Burada *X* dual sayısı

B dual sayısının *A*' ya bölümüdür.

Sonuç olarak her ne kadar *ID* dual sayılar bir cisim olmasa da *R* reel sayılara izomorf bir alt cismi ihtiva eder. Gerçekten (Hacısalihoğlu, 1983)

$f : ID \to R$, $(a,0) \to f(a,0) = f(a + \varepsilon 0) = a$ dönüşümü bir lineer izomorfizmdir.

Tanım 2.2.2. Bir $A = (a, a^*) = a + \varepsilon a^* \in ID$ dual sayısının reel kısmı $\operatorname{Re} A = a$ ve dual kısmı $DuA = a^*$ ile gösterilir. Buna göre $A = \operatorname{Re} A + \varepsilon DuA$ biçiminde de yazılabilir (Hacısalihoğlu, 1983)

Tanım 2.2.3. $(ID, +, \odot)$ dual sayılar halkasında $(1,0) = 1 + \varepsilon 0$ dual sayısına *ID*' deki reel birim ve $(0,1) = 0 + \varepsilon 1$ dual sayısına da *ID*' deki dual birim adı verilir (Hacısalihoğlu, 1983).

Teorem 2.2.1. İki dual sayının çarpımı sıfır ise çarpanlardan biri sıfır olmak zorunda değildir (Zhang, 1997).

2.3. Dual Sayıların Matris Gösterimi

Teorem 2.3.1. $(ID, +, \odot)$ dual sayılar halkası ile $M = \left\{ \begin{bmatrix} a & a^* \\ 0 & a \end{bmatrix} : a, a^* \in R \right\}$ matrislerinin kümesi

$f : ID \to M$, $A = a + \varepsilon a^* \to f(A)$

$f(A) = f(a + \varepsilon a^*) = \begin{bmatrix} a & a^* \\ 0 & a \end{bmatrix}$ dönüşümü altında izomorftur.

Böylece *M* kümesi de birimli ve değişimli bir halka olur (Hacısalihoğlu, 1983).

2.4. Dual Sayılar İle İlgili Temel Tanım Ve Teoremler

Tanım 2.4.1. $Z=(x,x^*)=x+\varepsilon.x^*$ dual sayılarının tümüne dual düzlem ve her bir (x,x^*) ikilisine de dual düzlemin bir noktası denir (Hacısalihoğlu, 1983)

Tanım 2.4.2. Herhangi bir $Z=x+\varepsilon x^*\in ID$ dual sayısının mutlak değeri (modülü) $|Z|$ ile gösterilir ve $|Z|=|x+\varepsilon x^*|=|x|$ biçiminde tanımlanır (Hacısalihoğlu, 1983).

Teorem 2.4.1. Herhangi $Z_1=x_1+\varepsilon x_1$ ve $Z_2=x_2+\varepsilon x_2$ dual sayıları için $|Z_1Z_2|=|Z_1||Z_2|$ dir (Hacısalihoğlu, 1983).

Teorem 2.4.2. Herhangi Z_1 ve Z_2 dual sayıları için $|Z_1+Z_2|\leq|Z_1|+|Z_2|$ üçgen eşitsizliği sağlanır (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 2.4.3. Herhangi bir $Z=x+\varepsilon x^*$ dual sayısının eşleniği $\overline{Z}$ ile gösterilir ve $\overline{Z}=x-\varepsilon x^*$ olarak tanımlanır (Hacısalihoğlu, 1983).

Teorem 2.4.3. Herhangi $Z_1,Z_2\in ID$ dual sayıları için aşağıdaki özellikler sağlanır (Hacısalihoğlu, 1983).

1) $\overline{\left(\overline{Z}\right)}=Z$

2) $\overline{Z_1+Z_2}=\overline{Z_1}+\overline{Z_2}$

3) $\overline{Z_1\odot Z_2}=\overline{Z_1}\odot\overline{Z_2}$

4) $Z_1\neq(0,x^*)$ için $\overline{\left(\dfrac{Z_1}{Z_2}\right)}=\dfrac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}}$

5) $Z\overline{Z}=|Z|^2$

6) $Z+\overline{Z}=2\operatorname{Re}Z$, $Z-\overline{Z}=2\varepsilon DuZ$

7) $Z=\overline{Z}\Leftrightarrow Z\in R$, $(DuZ=0)$

2.5. Dual Vektör Uzayı

ID dual sayıların halkası olmak üzere;

$ID^3 = IDxIDxID = \left\{ \vec{A} = (A_1, A_2, A_3) : A_i \in ID, 1 \le i \le 3 \right\}$ kümesini tanımlayalım.

Bu küme üzerinde tanımlı toplama ve skalerle çarpma işlemleri

$\forall \vec{A} = (A_1, A_2, A_3)\ \vec{B} = (B_1, B_2, B_3) \in ID^3$ ve $\forall \lambda \in R$ için $(\vec{A}, \vec{B} \in ID^3)$

$$\vec{A} + \vec{B} = (A_1, A_2, A_3) + (B_1, B_2, B_3)$$

$$= (A_1 + B_1, A_2 + B_2, A_3 + B_3)$$

ve

$$\lambda \vec{A} = \lambda (A_1, A_2, A_3)$$

$= (\lambda A_1, \lambda A_2, \lambda A_3)$ biçiminde tanımlanıyor (Hacısalihoğlu, 1983).

Buna göre ID^3, reel sayılar cismi üzerinde bir vektör uzayı olur. Fakat ID^3, *ID* üzerinde de vektör uzayı aksiyomlarını sağladığı halde *ID* üzerinde bir vektör uzayı olmaz. Çünkü *ID* bir cisim değil bir halkadır. İşte bu durumda ID^3, *ID* üzerinde bir modül' dür. Biz buna *ID*-modül diyoruz.

Dolayısıyla ID^3, *ID*-modül yapısıyla düşünüldüğünde ID^3'ün elemanlarına dual vektörler diyeceğiz.

Bir $\vec{A} = (A_1, A_2, A_3) \in ID^3$ alalım. $A_1, A_2, A_3 \in ID$ olduğundan

$A_1 = a_1 + \varepsilon a_1^*$, $A_2 = a_2 + \varepsilon a_2^*$, $A_3 = a_3 + \varepsilon a_3^*$ dersek

$$A = (a_1 + \varepsilon a_1^*, a_2 + \varepsilon a_2^*, a_3 + \varepsilon a_3^*)$$

$$A = (a_1, a_2, a_3) + \varepsilon (a_1^*, a_2^*, a_3^*)$$

$\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a^*}$ olur. Burada $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ve $\vec{a^*} = (a_1^*, a_2^*, a_3^*)$ vektörleri R^3 vektör uzayının elemanlarıdır.

Teorem 2.5.1. $ID-$modül R^3'e izomorf bir alt cisim ihtiva eder.

Gerçekten

$f: ID^3 \to R^3$, $\vec{A} = (\vec{a}, \vec{0}) = \vec{a} + \varepsilon\vec{0} \to f(\vec{A}) = f(\vec{a}, \vec{0}) = f(\vec{a} + \varepsilon\vec{0}) = \vec{a}$ dönüşümü bir lineer izomorfizmdir.

Dolayısıyla ID^3 ' ün bir alt cümlesi R^3 'e izomorftur. R^3 bir cisim olduğundan ID^3 'ün bu alt cümlesi de bir cisim olur (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 2.5.1. Herhangi $\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon\vec{a^*}$ ve $\vec{B} = \vec{b} + \varepsilon\vec{b^*}$ dual vektörleri için

$<,> : ID^3 x ID^3 \to ID$ dönüşümü

$$(\vec{A}, \vec{B}) \to <\vec{A}, \vec{B}> = <\vec{a} + \varepsilon\vec{a^*}, \vec{b} + \varepsilon\vec{b^*}>_D$$

$$= <\vec{a}, \vec{b}> + \varepsilon\left[<\vec{a}, \vec{b^*}> + <\vec{a^*}, \vec{b}>\right]$$

biçiminde tanımlanır ve reel vektör uzayındaki iç çarpım fonksiyonunun aksiyomlarını sağlar (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 2.5.2. ID^3 dual vektör uzayı üzerinde norm fonksiyonu $\|.\|_{ID}$: $ID^3 \to ID$, $A = \vec{a} + \varepsilon\vec{a^*} \to \left|\vec{A}\right|_{ID} = \sqrt{<\vec{A}, \vec{A}>}$ biçiminde tanımlanır. Burada $\left|\vec{A}\right|_{ID}$ dual sayısına $\vec{A}$ dual vektörünün normu denir ve kısaca $\left|\vec{A}\right|$ ile gösterilir. Buna göre

$$\left|\vec{A}\right| = \sqrt{<\vec{A}, \vec{A}>} = \sqrt{<\vec{a} + \varepsilon\vec{a^*}, \vec{a} + \varepsilon\vec{a^*}>} = \sqrt{<\vec{a}, \vec{a}> + \varepsilon\left[<\vec{a}, \vec{a^*}> + <\vec{a^*}, \vec{a}>\right]}$$

$$= \sqrt{\left|\vec{a}\right|^2 + 2\varepsilon <\vec{a}, \vec{a^*}>} \quad (\varepsilon^2 = 0 \text{ olduğundan})$$

$$\left|\vec{A}\right| = \left|\vec{a}\right| + \varepsilon \frac{<\vec{a}, \vec{a^*}>}{\left|\vec{a}\right|} \quad ; \ (\vec{a} \neq 0)$$

$$\Rightarrow \left|\vec{A}\right| = a + \varepsilon b \in ID \text{ dir.}$$

Burada $\left(\left|\vec{a}\right| + \varepsilon \dfrac{<\vec{a}, \vec{a^*}>}{\left|\vec{a}\right|}\right)^2 = \left|\vec{a}\right|^2 + 2\varepsilon <\vec{a}, \vec{a^*}>$ dır (Ata ve Yaylı, 2008).

Tanım 2.5.3. Herhangi bir $\vec{A} \in ID^3$ için $\left|\vec{A}\right| = (1,0) = 1 + \varepsilon 0$ ise $\vec{A}$ ya birim dual vektör denir (Vicci, 2001).

Şimdi bir $\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a^*}$ dual vektör alalım.

$\left|\vec{A}\right| = \left|\vec{a}\right| + \varepsilon \dfrac{< \vec{a}, \vec{a^*} >}{\left|\vec{a}\right|}$ olduğunu biliyoruz. $\vec{A}$'nın birim dual vektör olması için $\left|\vec{A}\right| = (1,0)$ olmalıdır. Buradan

$\left|\vec{a}\right| = 1$ ve $\dfrac{< \vec{a}, \vec{a^*} >}{\left|\vec{a}\right|} = 0$ olacağından $\left|\vec{a}\right| = 1$ ve $< \vec{a}, \vec{a^*} > = 0$ elde ederiz.

Herhangi bir $\vec{A} \neq (\vec{0}, \vec{a^*})$ dual vektörü için $\vec{U} = \dfrac{\vec{A}}{\left|\vec{A}\right|}$ birim dual vektördür.

Şimdi de $\vec{U}$ vektörünün bileşenlerini bulalım.

$\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a^*}$, $(\vec{a} \neq 0)$ alalım. $\left|\vec{A}\right| = \left|\vec{a}\right| + \varepsilon \dfrac{< \vec{a}, \vec{a^*} >}{\left|\vec{a}\right|}$ olduğunu biliyoruz.

O halde eşlenik ile çarpım yapılırsa

$$\vec{U} = \frac{\vec{A}}{\left|\vec{A}\right|} = \frac{\vec{a} + \varepsilon \vec{a^*}}{\left|\vec{a}\right| + \varepsilon \dfrac{< \vec{a}, \vec{a^*} >}{\left|\vec{a}\right|}} = \frac{\vec{a} + \varepsilon \vec{a^*}}{\left(\left|\vec{a}\right| + \varepsilon \dfrac{< \vec{a}, \vec{a^*} >}{\left|\vec{a}\right|}\right)} . \frac{\left|\vec{a}\right| - \varepsilon \dfrac{< \vec{a}, \vec{a^*} >}{\left|\vec{a}\right|}}{\left|\vec{a}\right| - \varepsilon \dfrac{< \vec{a}, \vec{a^*} >}{\left|\vec{a}\right|}}$$

$$= \frac{\left|\vec{a}\right| \vec{a} + \varepsilon \left(\left|\vec{a}\right| \vec{a^*} - \dfrac{< \vec{a}, \vec{a^*} >}{\left|\vec{a}\right|} \vec{a} \right)}{\left|\vec{a}\right|^2} \text{ olur.}$$

Buradan $\vec{U}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\vec{a}+\varepsilon\left(\frac{\vec{a^*}}{|\vec{a}|}-\frac{<\vec{a},\vec{a^*}>}{|\vec{a}|^3}\vec{a}\right)$ bulunur. Burada; reel kısım $\left|\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\right|=1$ ve

$<\frac{\vec{a^*}}{|\vec{a}|},\frac{\vec{a^*}}{|\vec{a}|}-\frac{<\vec{a},\vec{a^*}>}{|\vec{a}|^3}\vec{a}> \ =0$ olduğundan bu durum bize

$\vec{U}$ vektörünün gerçekten bir birim dual vektör olduğunu gösterir.

Ayrıca $\vec{U}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\varepsilon\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}-\frac{<\vec{a},\vec{a^*}>}{|\vec{a}|^2}\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\right)$

$$\vec{U}=\vec{u}+\varepsilon\left(\frac{\vec{a^*}-k\vec{a}}{|\vec{a}|}\right)=\vec{u}+\varepsilon\vec{u^*}$$ olur ki burada $|\vec{u}|=1$ ve $<\vec{u},\vec{u^*}>=0$ dır.

Böylece $\vec{U}=\frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}\Rightarrow\vec{A}=|\vec{A}|\vec{U}$ biçiminde yazabiliriz. Yine

$\vec{A}=\vec{a}+\varepsilon\vec{a^*}\Rightarrow|\vec{A}|=|\vec{a}|+\varepsilon\frac{<\vec{a},\vec{a^*}>}{|\vec{a}|}$ İfadesinde $a=|\vec{a}|$ ve $k=\frac{<\vec{a},\vec{a^*}>}{|\vec{a}|}$ alınırsa

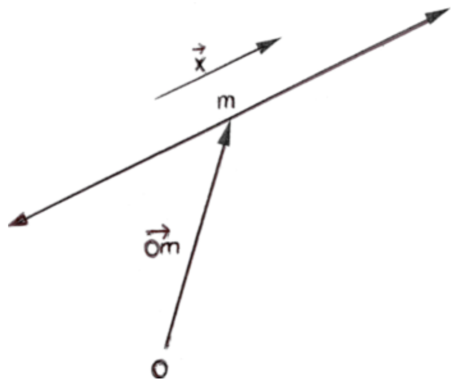
$|\vec{A}|=a(1+\varepsilon k)$ olarak da yazılabilir.

O halde $\vec{A}=|\vec{A}|\vec{U}=a(1+\varepsilon k)\vec{u}$ olur (Ata ve Yaylı, 2008).

Tanım 2.5.4. $\left\{\vec{X}\in ID^3:|\vec{X}|=(1,0)\right\}$ kümesine $ID-$modül de birim dual küre adı verilir (Hacısalihoğlu, 1983).

Teorem 2.5.2. (E.Study Teoremi): $\vec{A}=\vec{x}+\varepsilon\vec{x^*}\in ID-$modül olmak üzere denklemi $|\vec{A}|=(1,0)$ olan birim dual kürenin dual noktaları ile R^3' deki yönlü doğrular birebir eşlenir.

Bu teoreme göre, herhangi bir $\vec{A}=\vec{x}+\varepsilon\vec{x^*}$ birim dual vektörüne R^3' de doğrultmanı $\vec{x}$ ve geçtiği nokta $\vec{m}$ olmak üzere $\vec{x^*}=\vec{m}\wedge\vec{x}$ olan bir doğru karşılık gelir. Buradaki $\vec{x^*}$, doğrunun geçtiği nokta olan $\vec{m}$' den bağımsızdır.

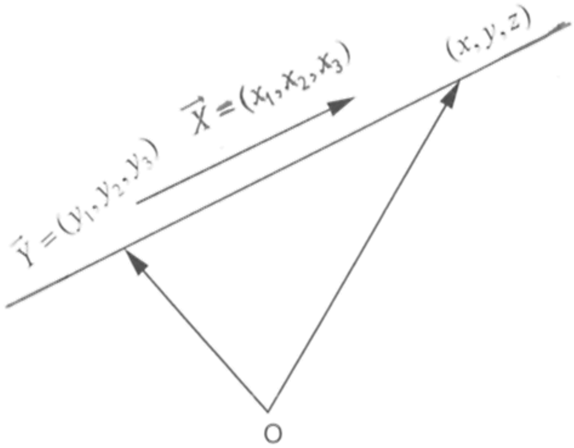


Şekil 2.1. Yönlü doğru.

$$\vec{A} = \vec{x} + \varepsilon \overrightarrow{x^*}$$

$$\overrightarrow{x^*} = \overrightarrow{om} \wedge \vec{x}$$

Tersine olarak R^3' de doğrultmanı $\vec{x}$ ve geçtiği nokta $\vec{y}$ olan bir yönlü doğru verildiğinde buna karşılık $ID-$modül'de birim dual vektör bulalım.



Şekil 2.2. Yönlü doğru.

Doğrunun denklemi;

$$\frac{x-y_1}{x_1} = \frac{y-y_2}{x_2} = \frac{z-y_3}{x_3} = \lambda \text{ olur.}$$

Eğer $\vec{x}$ birim vektör değilse $\overrightarrow{X_0} = \dfrac{\vec{X}}{|\vec{X}|}$ alırız. $\overrightarrow{X^*} = \vec{Y} \wedge \vec{X}$ olarak tanımlayalım.

Bu durumda $\left|\vec{X}\right|=1$ ve $<\vec{X},\overrightarrow{X^*}>=0$ olduğundan $\vec{A}=\vec{X}+\varepsilon\overrightarrow{X^*}$ birim dual vektörü elde edilir (Bewegungen ve Umlegungen, 1891).

2.6. Plücker Doğru Koordinatları

R^3' deki $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ standart bazına göre

$\vec{X}=x_1\vec{i}+x_2\vec{j}+x_3\vec{k}$ ve $\overrightarrow{X^*}=x_1^*\vec{i}+x_2^*\vec{j}+x_3^*\vec{k}$ vektörleri için

$(\vec{X},\overrightarrow{X^*})=(x_1,x_2,x_3;x_1^*,x_2^*,x_3^*)$ yazabiliriz.

$(\vec{X},\overrightarrow{X^*})$ ikilisinin 6 bileşenine normlanmamış homojen olmayan plücker doğru koordinatları denir.

Eğer $\delta>0$ olmak üzere $\overrightarrow{X'}=\delta\vec{X}$ ve $\overrightarrow{X^{*'}}=\delta\overrightarrow{X^*}$ alınırsa bu ikilinin oluşturduğu altı bileşene normlanmamış homojen plücker doğru koordinatları denir (Pottmann ve Wallner, 2001).

Teorem 2.6.1. P başlangıç noktasına göre R^3' deki yönlü doğruyu belirten dual vektör $\vec{A}=\vec{X}+\varepsilon(\overrightarrow{PO}\wedge\vec{X}+\overrightarrow{X^*})$ dır (Bewegungen ve Umlegungen, 1891).

Tanım 2.6.1. Herhangi bir $\vec{A}=\vec{a}+\varepsilon\overrightarrow{a^*}\in ID-$ modül olmak üzere $\vec{U}=\dfrac{\vec{A}}{\left|\vec{A}\right|}$ birim dual vektörüne $\vec{A}$' nın ekseni denir.

Burada $k=\dfrac{<\vec{a},\overrightarrow{a^*}>}{\left|\vec{a}\right|^2}$ reel sayısına $\vec{A}=\vec{a}+\varepsilon\overrightarrow{a^*}$ dual vektörünün adımı veya yükselişi denir. k sayısını üç farklı durumda ele alabiliriz.

i) $k=sonlu\Rightarrow\vec{a}\neq\vec{0}$ ve $\overrightarrow{a^*}\neq\vec{0}$ dır. Bu durumda $\vec{A}=\vec{a}+\varepsilon\overrightarrow{a^*}$ dual vektörüne has dual veya vida denir.

ii) $k=0\Rightarrow\vec{A}=a\vec{U}$ dır. Bu durumda $\vec{A}=\vec{a}+\varepsilon\overrightarrow{a^*}$ dual vektörü $\vec{U}$ ekseni ile çakışık bir doğrudur.

iii) $k=\infty\Rightarrow\vec{a}=0$ dır. Bu durumda $\vec{A}$ sırf dual vektördür (Hacısalihoğlu, 1983).

2.7. Dual Açı

$\overrightarrow{A} = \vec{a} + \varepsilon\overrightarrow{a^*}$ ve $\overrightarrow{B} = \vec{b} + \varepsilon\overrightarrow{b^*}$ birim dual vektörleri arasındaki dual açı $\phi = \varphi + \varepsilon\varphi^*$ dual sayısıdır. Burada

$< \vec{a}, \vec{b} >= \cos\varphi$ ve φ^* ise $\overrightarrow{A}$ ile $\overrightarrow{B}$ birim dual vektörlerine karşılık gelen doğrular arasındaki dik uzaklıktır. Buna göre

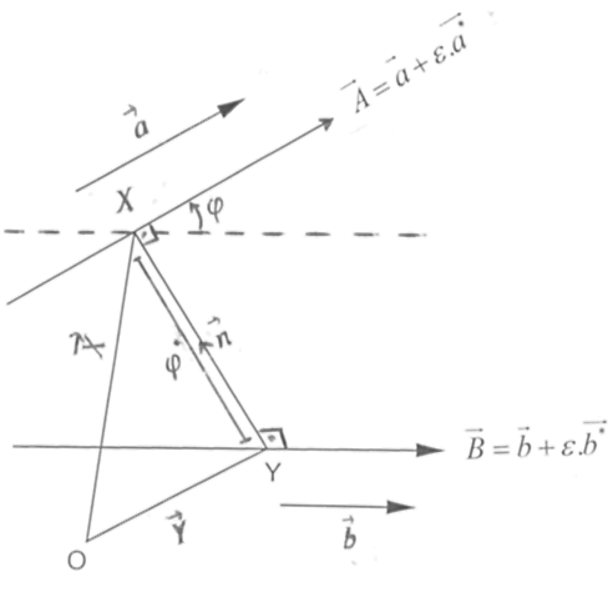
$$< \overrightarrow{A}, \overrightarrow{B} >=< \vec{a} + \varepsilon\overrightarrow{a^*}, \vec{b} + \varepsilon\overrightarrow{b^*} >$$

$$=< \vec{a}, \vec{b} > +\varepsilon(< \vec{a}, \overrightarrow{b^*} > + < \overrightarrow{a^*}, \vec{b} >)$$

$$= \cos\varphi - \varepsilon\varphi^* \sin\varphi$$

$$= \cos(\varphi + \varepsilon\varphi^*) \; = \cos\varphi \quad \text{olur.}$$

Dual açının daha iyi kavranabilmesi için aşağıdaki şekil verilebilir:



Şekil 2.3. Dual açı.

Tanım 2.7.1. $\phi = \varphi + \varepsilon\varphi^*$ dual sayısına , $\overrightarrow{A}$ ve $\overrightarrow{B}$ birim dual vektörleri arasındaki açı denir.

Eğer $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ birim dual vektörler değilse $\vec{U}=\dfrac{\vec{A}}{\left|\vec{A}\right|}$, $\vec{V}=\dfrac{\vec{B}}{\left|\vec{B}\right|}$ eksenleri birim dual vektörlerdir. $\vec{U}$ ile $\vec{V}$ birim dual vektörleri arasındaki dual açı ϕ ise

$$<\vec{A},\vec{B}>=\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\cos\phi$$

elde edilir.

Bu son formülden yararlanarak R^3' deki yönlü doğruların birbirlerine göre durumları incelenebilir.

i) $<\vec{A},\vec{B}>=$ sırf dual $\Leftrightarrow \cos\varphi=0 \Leftrightarrow \varphi=\dfrac{\pi}{2}$ ve $\varphi^* \neq 0$

Bu durumda $\vec{A}$ ve $\vec{B}$' nin belirttiği doğrular dik fakat ayrıktır. Yani aykırı dik doğrulardır.

ii) $<\vec{A},\vec{B}>=$ sırf reel $\Leftrightarrow \varphi^*=0$

Bu durumda yönlü iki doğru kesişir. $<\vec{a},\vec{b}^*>+<\vec{a}^*,\vec{b}>=0$ ifadesi bu iki doğrunun kesişme koşuludur.

iii) $<\vec{A},\vec{B}>=0 \Leftrightarrow \cos\varphi=0$ ve $\varphi^*=0 \Leftrightarrow \varphi=\dfrac{\pi}{2}$ ve $\varphi^*=0$

Bu durumda doğrular birbirini dik olarak keser.

iv) $<\vec{A},\vec{B}>=(1,0) \Leftrightarrow \varphi=0$

Bu durumda doğrular paralel ve aynı yönlüdür.

v) $<\vec{A},\vec{B}>=-(1,0) \Leftrightarrow \varphi=\pi$

Bu durumda doğrular paralel ve zıt yönlüdür (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 2.7.2. Herhangi $\vec{A},\vec{B}\in ID-$ modül olmak üzere

$\vec{A}=\vec{a}+\varepsilon\vec{a}^*$ ve $\vec{B}=\vec{b}+\varepsilon\vec{b}^*$ için

$\wedge : ID^3 x ID^3 \to ID^3$, $(\vec{A}, \vec{B}) \to \vec{A} \wedge \vec{B} = \vec{a} \wedge \vec{b} + \varepsilon(\vec{a} \wedge \vec{b^*} + \vec{a^*} \wedge \vec{b})$ olarak tanımlanır (Hacısalihoğlu, 1983).

Teorem 2.7.1. $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ iki has dual vektör olsunlar. Bu durumda $\vec{A} \wedge \vec{B} = \vec{0} \Rightarrow \vec{A}$ ile $\vec{B}$ ' nin eksenleri çakışıktır (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 2.7.3. Herhangi $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C} \in ID-$modül olsun. $\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon\vec{a^*}$, $\vec{B} = \vec{b} + \varepsilon\vec{b^*}$, $\vec{C} = \vec{c} + \varepsilon\vec{c^*}$ olmak üzere

$f : ID^3 x ID^3 x ID^3 \to ID$, $(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}) \to f(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}) = < \vec{A} \wedge \vec{B}, \vec{C} >$ olmak üzere

$$< \vec{A} \wedge \vec{B}, \vec{C} > = < \vec{a} \wedge \vec{b}, \vec{c} > + \varepsilon\left[< \vec{a^*} \wedge \vec{b}, \vec{c} > \right] + < \vec{a} \wedge \vec{b^*}, \vec{c} > + < \vec{a} \wedge \vec{b}, \vec{c^*} >$$

biçiminde tanımlanır (Hacısalihoğlu, 1983).

Teorem 2.7.2. $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ has dual vektörler olsunlar.

$< \vec{A} \wedge \vec{B}, \vec{C} > = 0 \Leftrightarrow \vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ has dual vektörlerinin eksenleri ya paraleldir ya da ortak bir normale sahiptir. Karma çarpımın aşağıdaki özellikleri vardır (Hacısalihoğlu, 1983).

i) $< \vec{A} \wedge \vec{B}, \vec{C} > = < \vec{B} \wedge \vec{C}, \vec{A} > = < \vec{C} \wedge \vec{A}, \vec{B} >$

ii) $< \vec{A} \wedge \vec{B}, \vec{C} > = < \vec{A}, \vec{B} \wedge \vec{C} >$

iii) $< \vec{A} \wedge \vec{B}, \vec{C} > = - < \vec{A} \wedge \vec{B}, \vec{C} > \Rightarrow < \vec{A} \wedge \vec{B}, \vec{C} > = 0$

iv) $\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = < \vec{A}, \vec{C} > \vec{B} - < \vec{A}, \vec{B} > \vec{C}$

v) $\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) + \vec{B} \wedge (\vec{C} \wedge \vec{A}) + \vec{C} \wedge (\vec{A} \wedge \vec{B}) = 0$

vi) $< \vec{A} \wedge \vec{B}, \vec{C} \wedge \vec{D} > = < \vec{A}, \vec{C} > < \vec{B}, \vec{D} > - < \vec{A}, \vec{D} > < \vec{B}, \vec{C} >$

2.8. Dual Vektörlerin Lineer Bağımlılığı, Lineer Bağımsızlığı Ve Bazlar

Tanım 2.8.1. $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C} \in ID-$modül has dual vektörler ve $\lambda_i = c_i + \varepsilon c_i^* \in ID$, $1 \le i \le 3$ olmak üzere $\lambda_1\vec{A} + \lambda_2\vec{B} + \lambda_3\vec{C} = \vec{0}$ eşitliğinde her $\lambda_i = 0$ $(1 \le i \le 3)$ ise $\left\{\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}\right\}$ lineer bağımsızdır (Hacısalihoğlu, 1983).

Eğer en az bir $\lambda_i \neq 0$ ise $\left\{\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}\right\}$ lineer bağımlıdır.

Teorem 2.8.1. $\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a^*}$ için $\vec{a} \neq 0 \Rightarrow \left\{\vec{A}\right\}$ kümesi lineer bağımsızdır (Hacısalihoğlu, 1983)

Tanım 2.8.2. $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ birim dual vektörlere R^3'de karşılık gelen yönlü doğrular bir noktada dik olarak kesişirlerse $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$' ye ortonormal dual vektörler denir (Hacısalihoğlu, 1983).

3. BÖLÜM

3.1. Dual Kuaterniyonlar

Tanım 3.1.1. Bir dual kuaterniyon,

$p=a_1+b_1\vec{i}+c_1\vec{j}+d_1\vec{k}$ ve $q=a_2+b_2\vec{i}+c_2\vec{j}+d_2\vec{k}$ iki kuaterniyon ve ε dual birim olmak üzere,

$$\mathrm{Q}=p+\varepsilon q$$

$$\mathrm{Q}=(a_1+b_1\vec{i}+c_1\vec{j}+d_1\vec{k})+\varepsilon(a_2+b_2\vec{i}+c_2\vec{j}+d_2\vec{k})$$

$$=(a_1+\varepsilon a_2)+(b_1+\varepsilon b_2)\vec{i}+(c_1+\varepsilon c_2)\vec{j}+(d_1+\varepsilon d_2)\vec{k}$$

$\Rightarrow \mathrm{Q}=A+B\vec{i}+C\vec{j}+D\vec{k}$ şeklinde yazılabilir. Buradaki $A=a_1+\varepsilon a_2$, $B=b_1+\varepsilon b_2$ $C=c_1+\varepsilon c_2$ ve $D=d_1+\varepsilon d_2$ dual sayılarına Q' nun dual bileşenleri denir.

Q dual kuaterniyonunda skaler kısmı $\mathrm{Re}\,\mathrm{Q}$ ve vektörel kısmı $\mathrm{Im}\,\mathrm{Q}$ ile gösterirsek

$$\mathrm{Re}\,\mathrm{Q}=A=a_1+\varepsilon a_2=\mathrm{Re}\,p+\varepsilon\,\mathrm{Re}\,q \quad \text{ve} \quad \mathrm{Im}\,\mathrm{Q}=B\vec{i}+C\vec{j}+D\vec{k}=\mathrm{Im}\,p+\varepsilon\,\mathrm{Im}\,q$$

olacağından $\mathrm{Q}=\mathrm{Re}\,\mathrm{Q}+\mathrm{Im}\,\mathrm{Q}$ biçiminde yazılabilir (Parker, 2009). Yine bir dual kuaterniyon aşağıdaki gibi de yazılabilir:

$$\mathrm{Q}=a_1+b_1\vec{i}+c_1\vec{j}+d_1\vec{k}+a_2(\varepsilon)+b_2(\varepsilon\vec{i})+c_2(\varepsilon\vec{j})+d_2(\varepsilon\vec{k})$$

Burada ki $a_1,b_1,c_1,d_1,a_2,b_2,c_2,d_2$ reel sayılarına Q dual kuaterniyonun sekiz temel elemanı denir. Dolayısıyla bir Q dual kuaterniyonu en genel formda birbirinden bağımsız sekiz reel sayıya ihtiyaç duyar (Yang ve Freudenstein, 1964).

Tüm dual kuaterniyonların kümesini H_{ID} ile göstereceğiz.

3.2. Dual Kuaterniyonlar Üzerinde Temel İşlemler

Eşitlik: Herhangi iki $\mathrm{Q}_1=\mathrm{Re}\,\mathrm{Q}_1+\mathrm{Im}\,\mathrm{Q}_1$ ve $\mathrm{Q}_2=\mathrm{Re}\,\mathrm{Q}_2+\mathrm{Im}\,\mathrm{Q}_2$ dual kuaterniyonunun eşit olması için gerek ve yeter koşul $\mathrm{Re}\,\mathrm{Q}_1=\mathrm{Re}\,\mathrm{Q}_2$ ve $\mathrm{Im}\,\mathrm{Q}_1=\mathrm{Im}\,\mathrm{Q}_2$ olmasıdır.

Toplama-Çıkarma: Herhangi $\mathrm{Q}_1=\mathrm{Re}\,\mathrm{Q}_1+\mathrm{Im}\,\mathrm{Q}_1$ ve $\mathrm{Q}_2=\mathrm{Re}\,\mathrm{Q}_2+\mathrm{Im}\,\mathrm{Q}_2$ dual kuaterniyonlarının toplamı ve farkı

$Q_1 \pm Q_2 = (\mathrm{Re}Q_1 \pm \mathrm{Re}Q_2) + (\mathrm{Im}Q_1 \pm \mathrm{Im}Q_2)$ biçiminde tanımlanır.

Çarpma: Herhangi $Q_1 = \mathrm{Re}Q_1 + \mathrm{Im}Q_1$ ve $Q_2 = \mathrm{Re}Q_2 + \mathrm{Im}Q_2$ dual kuaterniyonlarının çarpımı

$Q_1 = p_1 + \varepsilon q_1 = \mathrm{Re}Q_1 + \mathrm{Im}Q_1$ ve $Q_2 = p_2 + \varepsilon q_2 = \mathrm{Re}Q_2 + \mathrm{Im}Q_2$ olmak üzere

$$Q_1Q_2 = (p_1 + \varepsilon q_1)(p_2 + \varepsilon q_2)$$

$$Q_1Q_2 = (p_1p_2) + \varepsilon(q_1p_2 + p_1q_2)$$

$$= \mathrm{Re}Q_1\,\mathrm{Re}Q_2 - < \mathrm{Im}Q_1, \mathrm{Im}Q_2 > + \mathrm{Re}Q_1\,\mathrm{Im}Q_2 + \mathrm{Re}Q_2\,\mathrm{Im}Q_1 + \mathrm{Im}Q_1 x \mathrm{Im}Q_2$$

biçiminde tanımlanır (Yang ve Freudenstein, 1964).

Sonuçlar

1) Genel olarak dual kuaterniyon çarpımı yine bir dual kuaterniyonu verir. Fakat $Q_1 = p_1 + \varepsilon q_1$ ve $Q_2 = p_2 + \varepsilon q_2$ dual kuaterniyonları için $p_1q_2 + p_2q_1 = 0$ şartı sağlanırsa $Q_1Q_2 = p_1p_2$ olur.

2) Genel olarak dual kuaterniyon çarpımı değişimli değildir. Eğer Q veya *P* bir dual sayı ise o zaman $QP = PQ$ olur.

Ayrıca Q ile *P* orantılı ise yine $QP = PQ$ dir.

3) Dual kuaterniyon çarpımı birleşimlidir. Yani,

$$(QP)R = Q(PR) \text{ dir.}$$

4) Dual kuaterniyon çarpımı toplama üzerine dağılımlıdır.

$$Q(P+R) = (QP) + (QR)$$

5) Bir $Q = p + \varepsilon q = \mathrm{Re}Q + \mathrm{Im}Q$ dual kuaterniyonunun eşleniği $\overline{Q}$ ile gösterilir.

Burada $\overline{Q} = \overline{p} + \varepsilon\overline{q} = \mathrm{Re}Q - \mathrm{Im}Q$ dir.

Eğer $p = \mathrm{Re}\,p + \mathrm{Im}\,p$ ve $q = \mathrm{Re}\,q + \mathrm{Im}\,q$ alınırsa,

$$Q = p + \varepsilon q = (\mathrm{Re}\,p + \mathrm{Im}\,p) + \varepsilon(\mathrm{Re}\,q + \mathrm{Im}\,q)$$

$= (\mathrm{Re}\, p + \varepsilon \,\mathrm{Re}\, q) + (\mathrm{Im}\, p + \varepsilon \,\mathrm{Im}\, q)$ olacağından;

$\overline{\mathrm{Q}} = (\mathrm{Re}\, p + \varepsilon \,\mathrm{Re}\, q) - (\mathrm{Im}\, p + \varepsilon \,\mathrm{Im}\, q)$ olur ki (Parker, 2009).

Buradan, herhangi iki

$\mathrm{Q}_1 = \mathrm{Re}\,\mathrm{Q}_1 + \mathrm{Im}\,\mathrm{Q}_1$, $\mathrm{Q}_2 = \mathrm{Re}\,\mathrm{Q}_2 + \mathrm{Im}\,\mathrm{Q}_2$ dual kuaterniyonları için

$\mathrm{Q}_1 + \mathrm{Q}_2 = (\mathrm{Re}\,\mathrm{Q}_1 + \mathrm{Re}\,\mathrm{Q}_2) + (\mathrm{Im}\,\mathrm{Q}_1 + \mathrm{Im}\,\mathrm{Q}_2)$ olacağından

$\overline{(\mathrm{Q}_1 + \mathrm{Q}_2)} = (\mathrm{Re}\,\mathrm{Q}_1 + \mathrm{Re}\,\mathrm{Q}_2) - (\mathrm{Im}\,\mathrm{Q}_1 + \mathrm{Im}\,\mathrm{Q}_2) = \overline{\mathrm{Q}_1} + \overline{\mathrm{Q}_2}$ olur.

Şimdi de iki dual kuaterniyonun çarpımının eşleniğine bakalım.

Herhangi iki $\mathrm{Q}_1 = p_1 + \varepsilon q_1$, $\mathrm{Q}_2 = p_2 + \varepsilon q_2$ dual kuaterniyonları için

$\mathrm{Q}_1\mathrm{Q}_2 = p_1 p_2 + \varepsilon(p_1 q_2 + q_1 p_2)$ olduğunu biliyoruz.

Buna göre,

$$\overline{(\mathrm{Q}_1\mathrm{Q}_2)} = \overline{p_1 p_2} + \varepsilon\overline{(p_1 q_2 + q_1 p_2)}$$

$$= \overline{p_2}\,\overline{p_1} + \varepsilon\left[\overline{q_2}\,\overline{p_1} + \overline{p_2}\,\overline{q_1}\right]$$

$\Rightarrow \overline{(\mathrm{Q}_1\mathrm{Q}_2)} = \overline{\mathrm{Q}_2}\;\overline{\mathrm{Q}_1}$ olur.

6) Herhangi bir Q dual kuaterniyonun normu $|\mathrm{Q}|$ ile gösterilir ve

$|\mathrm{Q}| = \sqrt{\mathrm{Q}\overline{\mathrm{Q}}} = \sqrt{\overline{\mathrm{Q}}\mathrm{Q}}$ biçiminde tanımlanır.

Herhangi bir $\mathrm{Q} = A + B\vec{i} + C\vec{j} + D\vec{k}$ dual kuaterniyonun normu

$|\mathrm{Q}| = \sqrt{\mathrm{Q}\overline{\mathrm{Q}}} = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2 + D^2}$ olur. Eğer $A = a + \varepsilon a^*,\ B = b + \varepsilon b^*,$ $C = c + \varepsilon c^*$ ve $D = d + \varepsilon d^*$ alırsak

$|\mathrm{Q}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \varepsilon(aa^* + bb^* + cc^* + dd^*)}$ bulunur.

Görüldüğü gibi $|\mathrm{Q}|$ bir reel sayı değil bir dual sayıdır. Burada

$\mathrm{Re}(|Q|) = d^2 + a^2 + b^2 + c^2$ ve $Du(|Q|) = 2(dd^* + aa^* + bb^* + cc^*)$ olur.

Şimdi de Q_1 ve Q_2 gibi herhangi iki dual kuaterniyonun çarpımının normuna bakalım.

$|Q_1 \times Q_2| = (Q_1 \times Q_2) \times (\overline{Q_1 \times Q_2})$ ’ den

$|Q_1 x Q_2| = |Q_1||Q_2|$ bulunur.

7) Herhangi bir Q dual kuaterniyonun tersi (inversi) $Q^{-1} = \dfrac{\overline{Q}}{|Q|^2}$ olarak tanımlanır.

Eğer $Q = A + B\vec{i} + C\vec{j} + D\vec{k}$ biçiminde alırsak $\overline{Q} = A - (B\vec{i} + C\vec{j} + D\vec{k})$ ve $|Q| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2 + D^2}$ olacağından

$Q^{-1} = \dfrac{\overline{Q}}{|Q|} = \dfrac{A - (B\vec{i} + C\vec{j} + D\vec{k})}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2 + D^2}}$ olur. Burada $A = a + \varepsilon a^*, B = b + \varepsilon b^*, C = c + \varepsilon c^*$ ve $D = d + \varepsilon d^*$ yerlerine yazılırsa

$$Q^{-1} = \frac{a - b\vec{i} - c\vec{j} - d\vec{k}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}} + \varepsilon \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}}.$$

$$\left[(a^* - b^*\vec{i} - c^*\vec{j} - d\vec{k}) - \frac{aa^* + bb^* + cc^* + dd^*}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}(a - b\vec{i} - c\vec{j} - d\vec{k}) \right]$$

elde edilir. Ayrıca

$QQ^{-1} = Q^{-1}Q = 1$ olduğundan $|QQ^{-1}| = 1 \Rightarrow |Q||Q^{-1}| = 1$ ve $|Q^{-1}| = \dfrac{1}{|Q|}$ bulunur (Hacısalihoğlu, 1983).

8) Dual Kuaterniyonların Bölümü:

Herhangi bir *P* dual kuaterniyonunu bir Q dual kuaterniyonuna bölmek demek

$R_1 x Q = P \Rightarrow R_1 = P x Q^{-1}$ ve $Q x R_2 = P \Rightarrow R_2 = Q^{-1} x P$ eşitliklerindeki R_1 ve R_2 dual kuaterniyonlarını bulmak demektir.

Genel olarak dual kuaterniyonlar kuaterniyon çarpımına göre değişimli olmadığından R_1 ve R_2 farklı dual kuaterniyonlardır. Burada R_1'e P' nin sağdan bölümü, R_2 ' ye de P' nin soldan bölümü denir (Yang ve Freudenstein, 1964).

3.3. Birim Dual Kuaterniyon

Herhangi bir Q dual kuaterniyonu için $|\mathrm{Q}| = 1$ ise Q' ya birim dual kuaterniyon adı verilir. Eğer Q birim dual kuaterniyonunu $\mathrm{Q} = A + B\vec{i} + C\vec{j} + D\vec{k}$ biçiminde alırsak;

$$|\mathrm{Q}| = 1 \Rightarrow \sqrt{A^2 + B^2 + C^2 + D^2} = 1$$

$$\Rightarrow A^2 + B^2 + C^2 + D^2 = 1$$

olur. Burada $A = a + \varepsilon a^*$, $B = b + \varepsilon b^*$, $C = c + \varepsilon c^*$ ve $D = d + \varepsilon d^*$ dersek

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^{\,2} = 1$$

$$aa^* + bb^* + cc^* + dd^* = 0 \text{ bulunur.}$$

Ayrıca $\mathrm{Q} = A + B\vec{i} + C\vec{j} + D\vec{k}$ birim dual kuaterniyonu $\mathrm{Q} = \cos\phi + \overrightarrow{S_D}\sin\phi$ formunda yazılabilir. Burada

$$\cos\phi = A,\ \sin\phi = \sqrt{B^2 + C^2 + D^2} \text{ ve } \overrightarrow{S_D} = \frac{B\vec{i} + C\vec{j} + D\vec{k}}{\sqrt{B^2 + C^2 + D^2}}$$ birim dual vektörü Q nun eksenidir.

Eğer $A = a + \varepsilon a^*, B = b + \varepsilon b^*, C = c + \varepsilon c^*$ ve $D = d + \varepsilon d^*$, $\overrightarrow{S_D} = \vec{s} + \varepsilon \overrightarrow{s^*}$, $\Phi = \phi + \varepsilon\phi^*$ alırsak;

$$\cos\Phi = A = a + \varepsilon a^*$$

$$\Rightarrow \cos(\phi + \varepsilon\phi^*) = a + \varepsilon a^*$$

$$\Rightarrow \cos\phi - \varepsilon\phi^* \sin\phi = a + \varepsilon a^*$$

$$\Rightarrow \cos\phi = a\ ,\ -\phi^* \sin\phi = a^*$$

$$\Rightarrow \phi = \arccos a\ ,\ \phi^* = \frac{-a^*}{\sqrt{1-a^2}}\ \text{ ve}$$

$$\overrightarrow{S_D} = \vec{s} + \varepsilon \overrightarrow{s^*} = \frac{B\vec{i} + C\vec{j} + D\vec{k}}{\sqrt{B^2 + C^2 + D^2}}\ \text{'den}$$

$$\vec{S} = \frac{\left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2\right)}{\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}}\left(b\vec{i} + c\vec{j} + d\vec{k}\right)\ \text{ ve}$$

$$\vec{S} = \frac{a^*\vec{i} + b^*\vec{j} + c^*\vec{k}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} - \frac{(dd^* + aa^* + bb^* + cc^*)(a^*\vec{i} + b^*\vec{j} + c^*\vec{k})}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\,(d^2 + a^2 + b^2 + c^2)^2}$$

$$+ \frac{dd^*(a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k})}{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)^3}} - \frac{d^2(dd^* + aa^* + bb^* + cc^*)(a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k})}{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)^3}\sqrt{d^2 + a^2 + b^2 + c^2}}$$

elde edilir (Yang, 1963).

3.4. Çizgi Kuaterniyonu

Herhangi bir $\mathrm{Q} = A + B\vec{i} + C\vec{j} + D\vec{k}$ dual kuaterniyonunda $A = a + \varepsilon a^*$ için $a^* = 0$ alınırsa $\mathrm{Q} = A + B\vec{i} + C\vec{j} + D\vec{k}$ dual kuateriyonuna bir çizgi kuaterniyonu adı verilir.

Eğer Q çizgi kuaterniyonu için $|\mathrm{Q}| = 1$ ise Q' ya birim çizgi kuaterniyonu denir. Birim dual kuaterniyonlarda olduğu gibi birim çizgi kuaterniyonu da

$$\mathrm{Q} = \cos\Phi + \overrightarrow{S_D}\sin\Phi$$

formunda yazılabilir. Burada $a^* = 0$ olduğundan

$$\cos\Phi = A = a \Rightarrow \cos(\phi + \varepsilon\phi^*) = a$$

$$\Rightarrow \cos\phi - \varepsilon\phi^*\sin\phi = a$$

$$\Rightarrow \cos\phi = a\ ,\ \phi^*\sin\phi = 0$$

$$\Rightarrow \phi = arc\cos a$$

olur. Benzer şekilde $\overrightarrow{S_D}$ birim dual vektörü de yazılabilir (Dimentberg, 1965).

Tanım 3.4.1. Herhangi Q ve P dual kuaterniyonları için Q$=\operatorname{Im} q$, $P=\operatorname{Im} p$ $(\operatorname{Re} q=\operatorname{Re} p=0)$ ise Q ve P' ye birer dual vektör adı verilir.

Q ve P birim dual vektörleri için

Q$=\operatorname{Im} q=\overrightarrow{A}=\vec{a}+\varepsilon\overrightarrow{a^*}$ ve $P=\operatorname{Im} p=\overrightarrow{B}=\vec{b}+\varepsilon\overrightarrow{b^*}$; $\vec{a},\overrightarrow{a^*},\vec{b},\overrightarrow{b^*}\in R^3$ olsun. Dual kuaterniyonların kuaterniyon çarpımı göz önünde bulundurularak

Q$P=\operatorname{Im} q \operatorname{Im} p=\overrightarrow{A}\overrightarrow{B}=-<\overrightarrow{A},\overrightarrow{B}>$ elde edilir. Benzer şekilde $\overrightarrow{A}$ ve $\overrightarrow{B}$ dual vektörlerinin skaler ve vektörel çarpımları aşağıdaki gibidir (Ata ve Yaylı, 2008).

$<\overrightarrow{A},\overrightarrow{B}>=<\operatorname{Im} q,\operatorname{Im} p>=<\vec{a},\vec{b}>+\varepsilon(\overrightarrow{a^*}\wedge\vec{b}+\vec{a}\wedge\overrightarrow{b^*})$ (skaler çarpım)

$\overrightarrow{A}\wedge\overrightarrow{B}=\operatorname{Im} q\wedge\operatorname{Im} p=\vec{a}\wedge\vec{b}+\varepsilon(\overrightarrow{a^*}\wedge\vec{b}+\vec{a}\wedge\overrightarrow{b^*})$ (vektörel çarpım)

4. BÖLÜM

4.1. Vida Hareketi

$\vec{A}$ ve $\vec{B}$ birim dual vektörleri arasındaki dual açı $\Phi = \phi + \varepsilon\phi^*$ olmak üzere $\phi \neq 0$ ve $\phi^* \neq 0$ olsun. Buna göre

$$\vec{A}\vec{B} = -< \vec{A}, \vec{B} > + \vec{A} \wedge \vec{B}$$

$$= -\cos\Phi + \overrightarrow{S_D}\sin\Phi \ ; \ \overrightarrow{S_D} = \frac{\vec{A} \wedge \vec{B}}{\left\| \vec{A} \wedge \vec{B} \right\|}$$

yazabiliriz. Ayrıca

$$\overline{(\vec{A}\vec{B})} = -\cos\Phi - \overrightarrow{S_D}\sin\Phi$$

$$= -(\cos\Phi + \overrightarrow{S_D}\sin\Phi) \ , \ \mathrm{Q} = \cos\Phi + \overrightarrow{S_D}\sin\Phi$$

$\overline{(\vec{A}\vec{B})} = -\mathrm{Q}$ ve $\overline{(\vec{A}\vec{B})} = \vec{B}\vec{A}$, $(\vec{A})^{-1} = -\vec{A}$, $(\vec{B})^{-1} = -\vec{B}$ olduğundan

$\mathrm{Q} = -\vec{B}\vec{A} \Rightarrow \vec{A} = \vec{B}\mathrm{Q}$ ve $\vec{B} = \mathrm{Q}\vec{A}$ elde edilir. Burada Q birim dual kuaterniyonuna öteleme kısmı ϕ^*, dönme kısmı ϕ, adımı $\frac{\phi^*}{\phi}$ ve (vida) ekseni $\overrightarrow{S_D}$ olan bir vida operatörü adı verilir. Vida operatörü vida ekseni ve dual açı tarafından belirlenebildiğinden,

$$\mathrm{Q}(\overrightarrow{S_D}, \Phi) = \cos\Phi + \overrightarrow{S_D}\sin\Phi$$

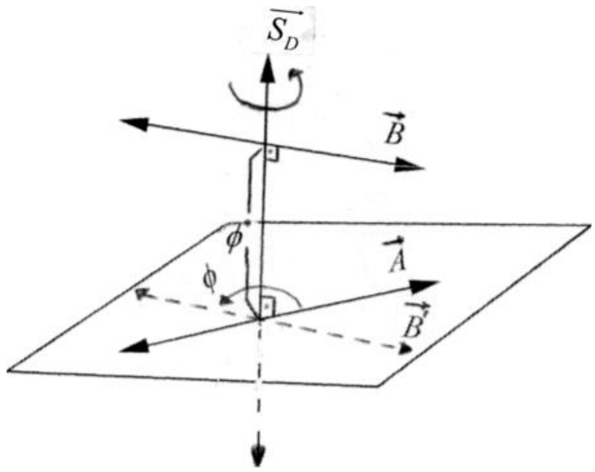
formunda da yazılabilir.

E-Study teoreminden $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ birim dual vektörlerine R^3 uzayında aykırı iki yönlü doğru yani kesişmeyen ve paralel olmayan iki yönlü doğru karşılık gelir. Bunlar sırasıyla d_1 ve d_2 doğruları olsun. $\vec{B} = \mathrm{Q}\vec{A}$ eşitliği bize şunu ifade eder. $\vec{B}$ birim dual vektörü, $\vec{A}$ birim dual vektöründen bir vida operatörüyle elde edilebilir. Benzer durum $\vec{A} = \vec{B}\mathrm{Q}$ içinde söylenebilir.

$\vec{A}$' nın $\vec{B}$ konumuna gelmesi için iki yol vardır. Birinci yol $\vec{A}$' nın $\overrightarrow{S_D}$ vida ekseni etrafında döndürülüp sonra ϕ^* kadar ötelenmesidir. Bunu sembolik olarak $\vec{B} = [qq_L]\vec{A}$ ile gösterebiliriz. Burada q ötelemeyi ve q_L dönmeyi gösterir.

İkinci yol ise ϕ^* kadar ötelenip sonra döndürülmesidir. Bunu $\vec{B} = [q_L q]\vec{A}$ ile gösterelim. Oysa Q = $q_L q$ = qq_L olduğundan bu iki yol arasında hiçbir fark yoktur.

O halde sonuç olarak şunu söyleyebiliriz. Vida hareketinde bir birim dual vektörün ilk konumundan son konumunu veren hareketi yoldan bağımsızdır.



Şekil 4.1. Vida operatörü.

Şimdi de vida hareketinin özel halleri olarak elde edilen dönme ve öteleme hareketlerini inceleyelim.

4.1.1. Dönme hareketi

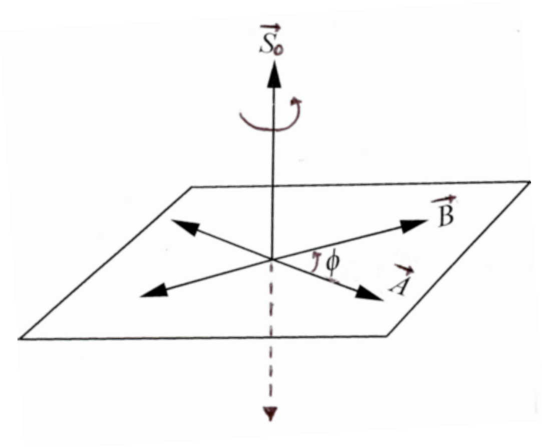
Herhangi iki birim dual vektör $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ ve bunlara karşılık gelen doğrular sırası ile d_1 ve d_2 olsun.

Burada $d_1 \cap d_2 = \{0\}$ ve $\measuredangle(d_1, d_2) = \phi$ ise $\phi^* = 0$ olur. Bu durumda $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ birim çizgi kuaterniyonudur. Bu durumda

Q= $\cos\Phi + \overrightarrow{S_D}\sin\Phi$, $\Phi = \phi + \varepsilon\phi^*$ vida operatörü

Q= $\cos\phi + \overrightarrow{S_D}\sin\phi$ biçiminde olur.

O halde $\vec{B} = \mathrm{Q}\vec{\mathrm{A}}$ ifadesi $\vec{\mathrm{A}}$ birim dual vektörüne karşılık gelen d_1 doğrusuna $\overrightarrow{S_D}$ ekseni etrafında ϕ kadar dönme yaptırarak $\vec{B}$ birim dual vektörüne karşılık gelen d_2 doğrusunu elde etmek anlamındadır.



Şekil 4.2. Dönme hareketi.

4.1.2. Öteleme hareketi

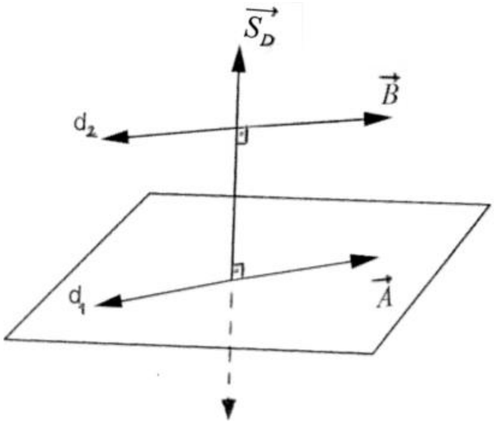
$\vec{A}$ ve $\vec{B}$ birim dual vektörleri arasındaki açı $\Phi = 0 + \varepsilon\phi^*$ olsun. Bu birim dual vektörlere sırasıyla karşılık gelen d_1 ve d_2 doğruları birbirlerine paraleldir.

Q= $\cos\Phi + \overrightarrow{S_D}\sin\Phi$, $\Phi = \phi + \varepsilon\phi^*$ vida operatöründe

$\phi = 0$ alınırsa Q=$\cos(\varepsilon\phi^*) + \overrightarrow{S_D}\sin(\varepsilon\phi^*)$ ve burada

$\cos(\varepsilon\phi^*) = \cos 0 - \varepsilon\phi^*\sin 0 = 1$ ve $\sin(\varepsilon\phi^*) = \sin 0 + \varepsilon\phi^*\cos 0 = \varepsilon\phi^*$ olduğundan Q=1+$\overrightarrow{S_D}\varepsilon\phi^* = 1 + \varepsilon\phi^*\overrightarrow{S_D}$ bulunur.

O halde $\vec{B} = \mathrm{Q}\vec{\mathrm{A}}$ ifadesi $\vec{A}$ birim dual vektörüne karşılık gelen d_1 doğrusuna $\overrightarrow{S_D}$ ekseni yönünde ϕ^* kadar öteleme yaptırarak $\vec{B}$ birim dual vektörüne karşılık gelen d_2 doğrusunu elde etmek anlamındadır.



Şekil 4.3. Öteleme hareketi.

Aşağıdaki örneklerde Maple programı yardımıyla vida hareketleri (dönme, öteleme, dönme ve öteleme) elde edilmiştir.

Örnek 4.1.1. (Dönme Hareketi):

$$\vec{A}=\left(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2},0\right)+\varepsilon\left(-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2},0\right)$$

ve

$\vec{B}=(-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2},0)+\varepsilon(-1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2},0)$ birim dual kuaterniyonunun belirttiği doğrunun $\overrightarrow{S_D}=\left(0,0,1\right)$ ekseni etrafında $\phi=\pi/2$ radyan döndürülmesiyle elde edilen doğrunun bulunması (Burada öteleme sıfırdır):

> restart:

> with(geom3d):

> point(o,0,0,1), point(z,0,0,2), point(A,1,1,1);

o, z, A

> dsegment(seg,o,z);

seg

> v:=[0,0,1];

$v := [\,0,\ 0,\ 1\,]$

> line(l,[o,A]);

l

> line(s,[o,z]);

s

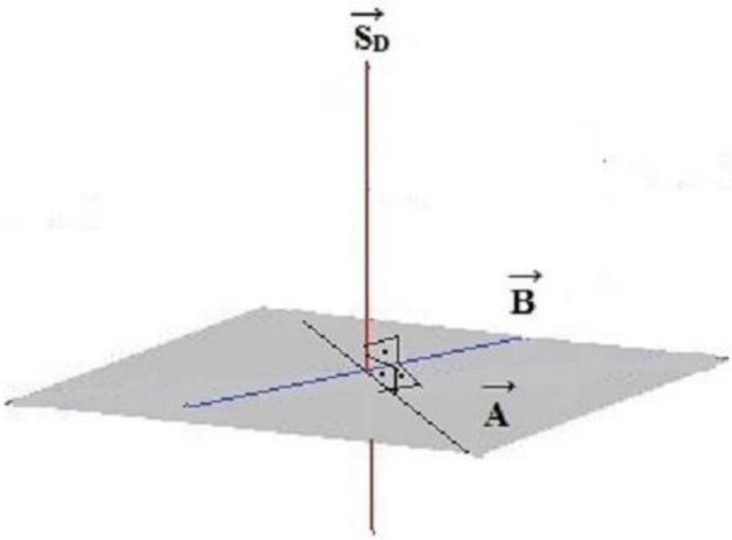
> plane(p,[A,v]);

p

> rotation(l1,l,evalf(Pi/2),s);

l1

>draw([l(color=red), l1(color=blue), s(color=black)]);



Örnek 4.1.2. (Öteleme Hareketi):

$$\vec{A}=\left(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2},0\right)+\varepsilon\left(-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2},0\right)$$

ve

$\vec{B}=(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2},0)+\varepsilon(-5/\sqrt{2},5/\sqrt{2},0)$ birim dual kuaterniyonunun belirttiği doğrunun $\overrightarrow{S_D}=\left(0,0,1\right)$ ekseni etrafında $\phi^*=4\ br$ kadar ötelenen doğruyu bulalım (Burada dönme açısı sıfırdır):

> restart:

> with(geom3d):

> point(o,0,0,0), point(z,0,0,5), point(A,1,1,0);

o, z, A

> dsegment(seg,o,z);

seg

> v:=[0,0,1];

$v := [0, 0, 1]$

> line(l,[o,A]);

l

> line(s,[o,z]);

s

> plane(p,[A,v]);

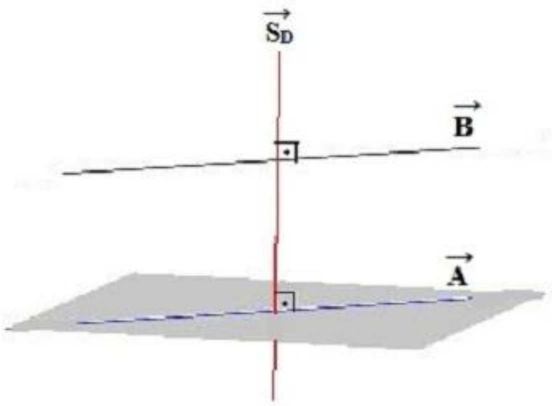
p

> translation(l1,l,seg);

l1

>draw([p(color=gray,style=surface),l(color=blue,thickness=1),

l1(color=black,thickness=1),s(color=red,thickness=1)]);



Örnek 4.1.3. (Vida Hareketi):

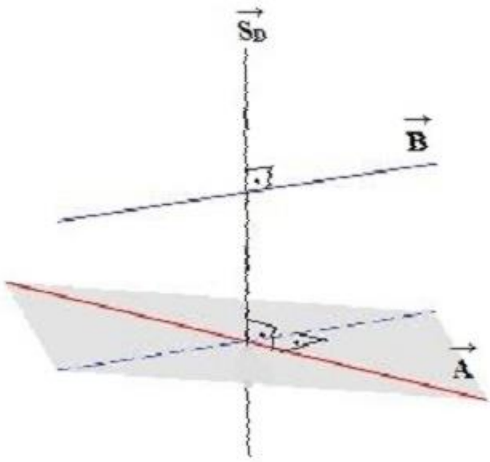
$$\vec{A}=\left(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2},0\right)+\varepsilon\left(-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2},0\right)$$

ve

$\vec{B}=(-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2},0)+\varepsilon(-5/\sqrt{2},-5/\sqrt{2},5/\sqrt{2})$ birim dual kuaterniyonunun belirttiği doğrunun $\overrightarrow{S_D}=\left(0,0,1\right)$ ekseni etrafında $\phi=\pi/2$ radyan döndürülmesi ve $\phi^*=4br$ kadar ötelenmesiyle elde edilen doğruyu bulalım:

```
> with(geom3d):
> point(o,0,0,0),        point(z,0,0,5),    point(A,1,1,0);
    o, z, A
> dsegment(seg,o,z);
seg
> v:=[0,0,1];
v := [0, 0, 1]
> line(l,[o,A]);
l
> line(s,[o,z]);
s
> plane(p,[A,v]);
p
> rotation(l1,l,evalf(Pi/2),s);
l1
> translation(l2,l1,seg);
l2
>draw([p(color=gray,style=surface,transparency=0.75),l
```

(color=red),l1(color=blue),l2(color=blue),s(color=black)]);



4.2. Motor Hareketi

4.2.1. Motor gösterimi

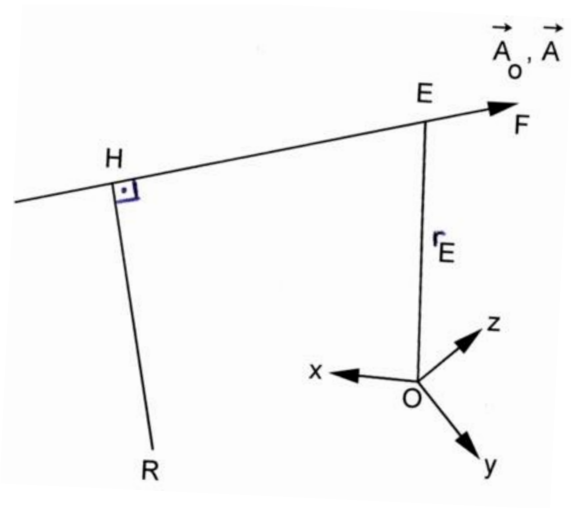
Bir motor, bir yönlü doğru ve bu doğru üzerindeki bir bitiş noktasından oluşur. Bir yönlü doğru ise birim doğru vektör (birim dual vektör) veya işaretli Plücker koordinatlarıyla ifade edilebilir. Böylece motor gösterimi bir dual vektör veya işaretli Plücker koordinatlar olarak karşımıza çıkar.

Uzayda *E* ve *F* noktalarından geçen yönlü doğru, bir

$$\overrightarrow{A_0} = \overrightarrow{a_0} + \varepsilon \overrightarrow{a_0^*} \ , \ \left|\overrightarrow{a_0}\right| = 1 \text{ ve } \overrightarrow{a_0}\ \overrightarrow{a_0^*} = \vec{0}$$

birim doğru vektör tarafından ifade edilebilir. Burada $\overrightarrow{a_0}$, $\overrightarrow{a_0^*} \in R^3$ vektörleri sırasıyla yönlü doğrunun $O - xyz$ referans çatısının orijinine göre doğrultman ve moment vektörleridir.

$\overrightarrow{A_0}$ birim doğru vektöründe $\overrightarrow{a_0}, \overrightarrow{a_0^*} \in R^3$ olduğundan $\overrightarrow{A_0}$, altı tane parametreden oluşur. Ayrıca $\left|\overrightarrow{a_0}\right| = 1$ ve $\overrightarrow{a_0}\ \overrightarrow{a_0^*} = \vec{0}$ şartlarından dolayı bu altı parametrenin iki tanesi bağımlı yani $\overrightarrow{A_0}$ ’ ın dört tane bağımsız parametresi vardır.



Şekil 4.4. Motor gösterimi.

R bir referans noktası, *H* noktası *R*' den motora çizilen dikmenin ayağı ve *H*'den *E* bitiş noktasına olan uzaklık k olsun. k uzaklığı yönlü doğru üzerindeki bitiş noktası ötelemesidir. Bu uzaklık *H*'den *E* noktasına olan yön ile yönlü doğrunun yönü arasındaki uyuma göre pozitif veya negatif olabilir.

R referans noktası uzayda herhangi bir nokta olarak alınabilir. Fakat özel olarak referans çatısının orijini kabul edilir.

Reel kısmı sıfır olmayan herhangi bir $\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a^*}$ dual vektör bir motor olarak nitelenebilir. Buna göre $\vec{A_0} = \dfrac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$ birim dual vektördür. Buradan

$$\vec{A} = |\vec{A}|\vec{A_0}$$

$$= \left(|\vec{a}| + \varepsilon \frac{\vec{a}.\vec{a^*}}{|\vec{a}|} \right) \vec{A_0}$$

$$= |\vec{a}|(1 + \varepsilon k)\vec{A_0} \quad , \quad k = \frac{\vec{a}.\vec{a^*}}{|\vec{a}|^2}$$ elde edilir.

Böylece yönlü doğru, bitiş noktası ve bitiş noktası ötelemesi kolayca hesaplanabilir. Eğer Pitch; bitiş noktası uzaklığı olarak alınırsa motor gösterimi bir vida operatörüne benzer olur. Bu benzerliğin avantajı vidalara uygulanabilen koordinat dönüşüm formüllerinin, referans noktaları da dönüştürüldüğü takdirde motorlara da uygulanabilir olmasıdır. Bitiş noktasının $\overrightarrow{r_E}$ konum vektörü

$$\overrightarrow{r_E} = \frac{1}{\left|\vec{a}\right|^2}\left[\vec{a} \wedge \overrightarrow{a^*} + \left(k - \frac{1}{\left|\vec{a}\right|}\left(\vec{r}.\vec{a}\right)\right)\vec{a}\right] \text{ dir.}$$

Genellemeyi bozmadan, referans noktası koordinat sisteminin orijini olarak kabul edilirse $r = 0$ olacağından bitiş noktasının $\overrightarrow{r_E}$ konum vektörü

$$\overrightarrow{r_E} = \frac{1}{\left|\vec{a}\right|^2}\left(\vec{a} \wedge \overrightarrow{a^*} + k\left|\vec{a}\right|\vec{a}\right) \text{ olur.}$$

Böylece bir motor

$$\vec{A} = \left|\vec{a}\right|(1+\varepsilon k)\overrightarrow{A_0}$$

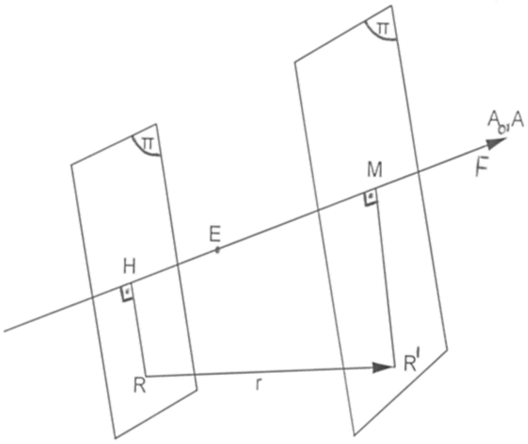
$$= \overrightarrow{a'} + \varepsilon\overrightarrow{(a^*)'} \;;\; \overrightarrow{a'} = \left|\vec{a}\right|\overrightarrow{a_0} \;,\; \overrightarrow{(a^*)'} = \left|\vec{a}\right|(\overrightarrow{a_0^*} + k\overrightarrow{a_0})$$

biçiminde de ifade edilebilir. Burada $\vec{A}$ dual vektörün boyunun $\left|\vec{a}\right|(1+\varepsilon k)$ olduğuna dikkat edilmelidir.

Eğer referans noktası R yerine R' olarak alınırsa yeni motor gösterimi kolayca hesaplanabilir. (Şekil 4.5 *R*’ den R' noktasına referans noktasının değişimi)

R’ den R' noktasına keyfi bir vektör $\vec{r}$, π ve π' düzlemleri ise sırasıyla R ve R' noktalarından geçen ve motora dik olan düzlemler olsun. π ve π' düzlemleri arasındaki en kısa $(HM = \frac{1}{\left|\vec{a}\right|}\vec{r}.\vec{a})$ uzaklığı bitiş noktası ötelemesinin değişimidir. Buna göre R' noktasına göre yeni motor gösterimi

$$A_{(R')} = A_{(R)} - \varepsilon\frac{1}{\left|\vec{a}\right|^2}(\vec{r}.\vec{a})\vec{a} \text{ olur.}$$



Şekil 4.5. Referans noktası değişimi.

4.2.2. Motorun geometrik özellikleri

Bu bölümde motorlar, nokta-doğrular ve yönlendirilmiş doğruların özellikleri karşılaştırılıyor.

1) Uzayda bir motorun konumu, dördü bağımsız altı parametreyle belirlenir. Fakat bir nokta-doğrunun konumu beş bağımsız parametreyle belirlenir. Bir doğru, P^5 de Klein Quadratic denilen dört boyutlu M_2^4 kuadratik manifoldunu bir noktayla eşleştirebilir. Üç boyutlu R^3 öklidyen uzaydaki her doğru iki zıt yönlendirmeye sahip olduğundan Klein Quadratiğin her noktası T^5 in iki yönlü noktasına karşılık gelir.

2) R^3 ’ ün motorlarının kümesi, R^3 ’ ün nokta-doğrularının kümesi ve T^5 in noktalarının kümesi arasında birebir eşleme vardır. $k = 0$ ve $\left|\vec{a}\right| = 1$ alındığında bir motor, ortak eş eksenli yönlendirilmiş doğrularla aynı koordinatlara sahiptir. Aynı doğru ile ilişkili tüm motorlar k ’nın bir lineer fonksiyonu olarak ifade edilebilir.

$$A = \left(a_1', a_2', a_3', (a_1^*)', (a_2^*)', (a_3^*)'\right)$$

$$= \left|\vec{a}\right| \left\{(a_{01}, a_{02}, a_{03}, a_{01}^* + ka_{01}, a_{02}^* + ka_{02}, a_{03}^* + ka_{03})\right\}$$

$$= \left|\vec{a}\right| \left\{(a_{01}, a_{02}, a_{03}, a_{01}^*, a_{02}^*, a_{03}^*) + k(0,0,0,a_{01}, a_{02}, a_{03})\right\}$$

$$\Rightarrow A(k) = A(0) + k\left|\vec{a}\right|\vec{u}\,; \quad k \in R \text{ olur. Burada } \quad A(0) = \left|\vec{a}\right|(a_{01}, a_{02}, a_{03}, a_{01}^{*}, a_{02}^{*}, a_{03}^{*}),$$

T^5 in bir noktasını gösterir. $A(k)$' nın geometrik yorumu, $A(0)$ noktasından geçen ve $\vec{u}$ vektörüne paralel olan bir hiper doğrudur.

3) R^3' ün aynı yönlü doğrusuyla ilişkili tüm motorlar T^5' in aynı hiper doğrusunun noktalarıyla eşleşebilir.

4.2.3. Motor yer değiştirmesi

Bu bölümde point-line operatörlerinin yaptığı, motor operatörleri için genelleştiriliyor.

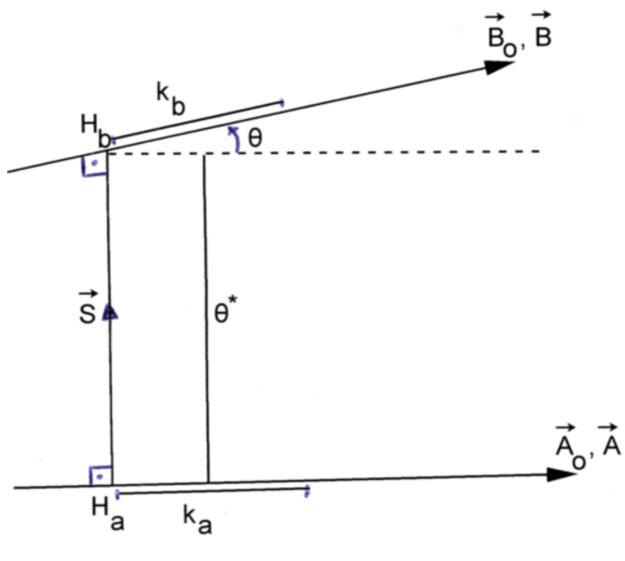
4.2.4. Motor operatörünün türetilmesi

Bir motorun iki $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ konumlarını şekil 4.6' daki gibi düşünelim. $\overrightarrow{A_0}$, $\overrightarrow{B_0}$ birim doğru vektörleri sırasıyla $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ ile aynı eksenlidir. $\vec{A}$ ve $\vec{B}$' nin ortak dikmesi üzerinde referans noktası gibi herhangi bir nokta alarak $\vec{A}$ ve $\vec{B}$' nin gösterimleri

$$\vec{A} = \left|\vec{a}\right|\left(1 + \varepsilon k_a\right)\overrightarrow{A_0}$$

$$\vec{B} = \left|\vec{b}\right|\left(1 + \varepsilon k_b\right)\overrightarrow{B_0}$$

biçiminde yazılabilir.



Şekil 4.6. Motor yer değiştirmesi.

$\vec{A}$ ve $\vec{B}$ ' nin skaler, vektörel ve kuaterniyonik çarpımları aşağıdaki gibidir:

$$<\vec{A},\vec{B}>=\vec{A}.\vec{B}=\left|\vec{a}\vec{b}\right|\left[1+\varepsilon(k_a+k_b)\right](\vec{A_0}.\vec{B_0})$$

$$\vec{A}\wedge\vec{B}=\left|\vec{a}\vec{b}\right|\left[1+\varepsilon(k_a+k_b)\right](\vec{A_0}\wedge\vec{B_0})$$

$$\vec{A}\vec{B}=\left|\vec{a}\vec{b}\right|\left[1+\varepsilon(k_a+k_b)\right](\vec{A_0}.\vec{B_0})$$

Burada $\vec{A_0}\vec{B_0}=-\vec{A_0}.\vec{B_0}+\vec{A_0}\wedge\vec{B_0}$, $\vec{A_0}\vec{B_0}=\cos\Phi$, $\vec{A_0}\wedge\vec{B_0}=\sin\Phi\vec{S_D}$, $\Phi=\phi+\varepsilon\phi^*$ dual açı ve $\vec{S_D}$, ortak normal eksen olarak adlandırılan ortak dikme boyunca birim doğru vektördür. Buna göre aşağıdaki bağıntı elde edilir.

$$\vec{A}\vec{B}=-\vec{A}.\vec{B}+\vec{A}\wedge\vec{B}$$

$$=\left|\vec{a}\vec{b}\right|\left[1+\varepsilon(k_a+k_b)\right]\left(-\cos\Phi+\vec{S_D}\sin\Phi\right)$$

Böylece $\vec{A}\vec{B}$ 'nin eşleniği

$$\overline{\vec{A}\vec{B}}=\left|\vec{a}\vec{b}\right|\left[1+\varepsilon(k_a+k_b)\right](-\cos\Phi-\vec{S_D}\sin\Phi) \qquad (*)$$

dan

$\overline{\vec{A}\vec{B}}=-\left|\vec{a}\right|^2(1+2\varepsilon k_a)\vec{B}(\vec{A})^{-1}$ veya $\overline{\vec{A}\vec{B}}=-\left|\vec{b}\right|^2(1+2\varepsilon k_b)(\vec{B})^{-1}\vec{A}$ olur. (*) denklemini göz önüne alarak

$$\vec{B}(\vec{A})^{-1}=\left|\frac{\vec{b}}{\vec{a}}\right|\left[1+\varepsilon(k_b-k_a)\right](\cos\Phi+\vec{S_D}\sin\Phi)$$

$$\Rightarrow\vec{B}=\left|\frac{\vec{b}}{\vec{a}}\right|\left[1+\varepsilon(k_b-k_a)\right](\cos\Phi+\vec{S_D}\sin\Phi)\vec{A} \qquad (**)$$

veya benzer olarak

$$(\vec{B})^{-1}\vec{A}=\left|\frac{\vec{a}}{\vec{b}}\right|\left[1+\varepsilon(k_b-k_a)\right](\cos\Phi+\vec{S_D}\sin\Phi)$$

$$\Rightarrow \vec{A} = \left|\frac{\vec{a}}{\vec{b}}\right| \left[1+\varepsilon(k_b - k_a)\right](\cos\Phi + \overrightarrow{S_D}\sin\Phi)\vec{B} \qquad (***)$$

bulunur. (**) denklemindeki

$$\mathrm{Q_A} = \left|\frac{\vec{b}}{\vec{a}}\right| \left[1+\varepsilon(k_b - k_a)\right](\cos\Phi + \overrightarrow{S_D}\sin\Phi)$$

dual kuaterniyonuna $\vec{A}$ üzerinde motor operatör denir. Burada

$\mathrm{Q} = \cos\Phi + \overrightarrow{S_D}\sin\Phi$ birim dual kuaterniyonu vida operatörüdür. Buna göre

$$\mathrm{Q_A} = \left|\frac{\vec{b}}{\vec{a}}\right| \left[1+\varepsilon(k_b - k_a)\right]\mathrm{Q}$$

olur. Eğer $\Delta k = k_b - k_a$ ve $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ alırsak

$$\mathrm{Q_A} = (1+\Delta k)\mathrm{Q}$$

dual kuaterniyonuna point-line operatörü adı verilir. Böylece bir motor yer değiştirmesi

$$\vec{B} = \mathrm{Q_A}\vec{A}$$

biçiminde ifade edilebilir. Benzer şekilde $\vec{A} = \vec{B}\mathrm{Q_B}$ bulunabilir.

$\mathrm{Q_A}$ ve $\mathrm{Q_B}$ motor operatörleri vida ve öteleme operatörlerinden oluşur. Çünkü Q vida operatörü, Φ dual açısı yardımıyla $\overrightarrow{S_D}$ ortak normal ekseni etrafında bir vida yer değiştirmesini gösterir. $\left|\frac{\vec{b}}{\vec{a}}\right|(1+\varepsilon\Delta k)$ dual sayısı ise motor ekseni boyunca öteleme operatörü olarak katkı sağlar.

Öteleme operatörü bir dual sayı ve dual sayılar, dual kuaterniyonlarla değişmeli olduğundan vida yer değiştirmesi ile öteleme operatörünün sırası motor hareketinin sonucunu değiştirmez.

Geometrik olarak $\vec{B} = \mathrm{Q_A}\vec{A}$ denkleminde $\mathrm{Q_A}$ motor operatörü $\vec{A}$' ya soldan etki ettiğinde $\vec{B}$ motor konumuna ulaşmak için $\vec{A}$'nın $\overrightarrow{S_D}$ ekseni etrafında ileri yönlü vida yer değiştirmesi yapmasına ve $\vec{A}$ motoru boyunca ileri yönlü Δk ötelemesine neden olur.

Benzer şekilde $\vec{A} = \vec{B}\mathrm{Q_B}$ denkleminde $\mathrm{Q_B}$ motor operatörü $\vec{B}$' ye sağdan uygulandığında $\vec{A}$ motor konumuna ulaşmak için $\overrightarrow{S_D}$ vida ekseni etrafında geriye doğru bir vida yer değiştirmesine ($-\phi$ kadar dönme ve $-\phi^*$ kadar kayma) ve $-\Delta k$ kadar bir ötelemeye neden olur.

4.2.5. Motor operatörünün tersi

$\mathrm{Q_A}$ motor operatörünün tersi bir dual kuaterniyonunun tersi gibi hesaplanabilir. Buna göre

$$\mathrm{Q_A}^{-1} = \frac{\overline{\mathrm{Q_A}}}{\left|\mathrm{Q_A}\right|^2} = \left|\frac{\vec{a}}{\vec{b}}\right|(1-\varepsilon\Delta k)(\cos\Phi - \overrightarrow{S_D}\sin\Phi)$$

bulunur. $\mathrm{Q_A}^{-1}$ de bir motor operatörüdür ve

$\vec{B} = \mathrm{Q_A}\vec{A} \Rightarrow \vec{A} = \mathrm{Q_A}^{-1}\vec{B}$ olur. $\mathrm{Q_A}^{-1}$ motor operatörünün ortak-normal ekseni $-\overrightarrow{S_D}$ dir. $-\overrightarrow{S_D}$, $\overrightarrow{S_D}$ ile aynı fakat ters yönlüdür.

4.2.6. Referans noktası

Referans noktası, ortak-normal eksen üzerinde kabul edildiğinden Q vida yer değiştirmesinden sonra referans noktası ortak-normal eksen üzerinde kalır ve her iki motor üzerinde bulunan k_a ve k_b bitiş noktası ötelemeleri ortak-normal eksenden ölçülür.

Eğer referans noktası ortak-normal eksen üzerinde değilse motor yer değiştirme işlemi geçerli olur. Fakat referans noktası Q vida yer değiştirmesiyle taşınması gerekir.

$\vec{A}$'nın referans noktası P_A olsun. $\vec{B}$'nin P_B referans noktası

$$P_B = gP_A\overline{g} + t$$

biçiminde hesaplanabilir. Burada

$$g=\cos\frac{\theta}{2}+\overrightarrow{S_D}\sin\frac{\theta}{2}\ ,\ t=\vec{s}^{*}\sin\theta+(\vec{s}\wedge\vec{s}^{*})(1-\cos\theta)+\theta^{*}\vec{s}\ ,\ \overrightarrow{S_D}=\vec{s}+\varepsilon\vec{s}^{*}\ \text{dır.}$$

4.2.7. Motor yer değiştirmenin özellikleri

$\mathrm{Q_A}=\left|\frac{\vec{b}}{\vec{a}}\right|(1+\varepsilon\Delta k)q$ denklemi bir motor operatörünün $\left|\frac{\vec{b}}{\vec{a}}\right|$, Δk , Φ , $\overrightarrow{S_D}$ tarafından belirlendiğini gösterir. Bir birim doğru vektör dört tane bağımsız parametreyle belirlense de $\overrightarrow{S_D}$ $\overrightarrow{A_0}$ ’ı dik olarak kestiğinden $\overrightarrow{A_0}.\overrightarrow{S_D}=\vec{0}$ veya $\vec{A}.\overrightarrow{S_D}=\vec{0}$ skaler denklemleri yazılabilir.

Burada $\overrightarrow{A_0}$, $\vec{A}$ ’nın birim doğru operatörüdür. Böylece $\overrightarrow{S_D}$ ’nin bağımsız parametre sayısı 4’ den 2 ye düşer. Buna göre bir motor yer değiştirmesi aşağıdaki özelliklere sahip olur:

$\vec{A}$ ’ya bağlı bir $\mathrm{Q_A}$ motor yer değiştirmesi için

1) $\mathrm{Q_A}$ motor yer değiştirmesinin $\overrightarrow{S_D}$ ortak-normal ekseni $\vec{A}$ ’yı bir sağ açıda keser.

2) $\overrightarrow{S_D}$ iki bağımsız parametreyle belirlenir.

3) Herhangi bir $\mathrm{Q_A}$ motor operatörünün ortak-normal ekseni üzerinde çalışabilen tüm motorlar ve bunlardan elde edilen bütün motorlar ortak-normal ekseni ortogonal olarak keserler.

Üzerinde çalıştığı bir motora eşlik eden merkezi normal eksenlerin tamamı $\overrightarrow{A_0}.\overrightarrow{S_D}=\vec{0}$ şartını sağlamak zorundadır. Merkezi normal eksenler doğru kongrüansı oluştururlar. Benzer şekilde $\mathrm{Q_A}$ ile üzerinde işlem yapılabilen motorlar için eş eksenli doğruların tamamı da doğru kongrüansı oluşturur.

$\mathrm{Q_A}$ motor operatörünün tanımından bir motorun aynı veya zıt yönlü yönlendirmelerinde paralel olduklarından singüler durumlar ortaya çıkar. Böyle durumda iki motor konumları arasında sonsuz ortak-normaller vardır.

Singüler durumların belirsizliklerini ortadan kaldırmak için iki bitiş noktasının orta noktasından geçen ortak-normal eksen motorların ortak-normal ekseni olarak tanımlanır.

Uzaydaki tüm motorlar verilen bir motor üzerinde motor yer değiştirme işleminin bir sonucu olarak ifade edilebilir ve bu motorların her biri bir tek motor operatörüne karşılık gelir.

Bu durumda aşağıdaki teorem ifade edilebilir.

Teorem 4.2.1. Motor yer değiştirmelerinin

$\left\{ \mathrm{Q}_{A} \in \mathrm{Q}(\overrightarrow{S_D}) : \overrightarrow{S_D}\vec{A} = \vec{0} \right.$, $\vec{A}$ bir motor $\left.\right\}$ kümesi ve uzaydaki tüm motorların kümesi arasındaki dönüşüm birebirdir (Hacısalihoğlu, 1983).

4.2.8. Motorların lineer birleşimi

$\overrightarrow{A_1}, \overrightarrow{A_2}, ..., \overrightarrow{A_n}$ motorları için $\overrightarrow{A_{i+1}} = \mathrm{Q}_i \overrightarrow{A_i}$ $(1 \le i \le n)$ olsun. Bu motorların lineer birleşimi

$$\vec{B} = \overrightarrow{A_1} + \overrightarrow{A_2} + ... + \overrightarrow{A_n}$$

$$\vec{B} = \overrightarrow{A_1} + \mathrm{Q}_1\overrightarrow{A_1} + \mathrm{Q}_2\overrightarrow{A_2} + ... + \mathrm{Q}_{n-1}\overrightarrow{A_{n-1}} \text{ , den}$$

$$\vec{B} = (1 + \mathrm{Q}_1 + \mathrm{Q}_2\mathrm{Q}_1 + ... + \mathrm{Q}_{n-1}\mathrm{Q}_{n-2}...\mathrm{Q}_1)\overrightarrow{A_1}$$

olur.

$$\mathrm{Q}_i = \frac{\left|\overrightarrow{A_{i+1}}\right|}{\left|\overrightarrow{A_i}\right|} q_i = \left|\frac{a_{i+1}}{a_i}\right| \left[1 + \varepsilon(k_{i+1} - k_i\right](\cos\Phi_i + \overrightarrow{S_D}\sin\Phi_i)$$

olduğundan

$\vec{B} = (1 + \sum_{i=1}^{n-1} \left|\frac{\overrightarrow{A_{i+1}}}{\overrightarrow{A_i}}\right| q_i)\overrightarrow{A_i}$ bulunur. Böylece $\overrightarrow{A_1}$ ’ den $\vec{B}$ ’ ye motor yer değiştirmesine karşılık gelen Q_{A_1} motor operatörü

$$\mathrm{Q}_{A_1} = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \left|\frac{\overrightarrow{A_{i+1}}}{\overrightarrow{A_i}}\right| q_i$$

$$= 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \left|\frac{a_{i+1}}{a_i}\right| (1 + \varepsilon\Delta k_i) q_i \ , \ \Delta k_i = k_{i+1} - k_i$$

biçiminde elde edilir.

$\overrightarrow{A_i} = |a_i|(1 + \varepsilon k_i)\overrightarrow{A_{i0}}$ motor gösterimiyle $\vec{B}$ lineer kombinasyonu

$$\vec{B}=\sum_{i=1}^{n}|a_i|(1+\varepsilon k_i)\overrightarrow{A_{i0}}$$

biçiminde ifade edilebilir. Özel olarak $n=2$ için

$\vec{B}=\overrightarrow{A_1}+\overrightarrow{A_2}$ olur.

$\overrightarrow{A_2}=\mathrm{Q}_1\overrightarrow{A_1}$ yazarsak

$$\vec{B}=(1+\mathrm{Q}_1)\overrightarrow{A_1}$$

$$=\left[1+\left|\frac{\overrightarrow{a_2}}{a_1}\right|(1+\varepsilon\Delta k)(\cos\Phi_1+\overrightarrow{S_D}\sin\Phi_1)\right]\overrightarrow{A_1}$$

ve

$$\mathrm{Q}_1=1+\left|\frac{\overrightarrow{a_2}}{\overrightarrow{a_1}}\right|(1+\varepsilon\Delta k)\cos\Phi_1+\overrightarrow{S_D}\left|\frac{\overrightarrow{a_2}}{\overrightarrow{a_1}}\right|(1+\varepsilon\Delta k)\sin\Phi_1$$

$$=1+\left|\frac{\overrightarrow{a_2}}{\overrightarrow{a_1}}\right|(1+\varepsilon\Delta k)\cos\Phi_1+\overrightarrow{S_D}\left|\frac{\overrightarrow{a_2}}{\overrightarrow{a_1}}\right|(1+\varepsilon\Delta k)\sin\Phi_1$$

bulunur.

Q_{A_1} ve Q_1 motor operatörlerinin $(\overrightarrow{S_1})_D$ ortak- normal eksenleri aynıdır ve $\overrightarrow{A_1}$ ile $\overrightarrow{A_2}$ ' nin lineer kombinasyonu bir silindiroid üzerinde kalır. Bu durumda $\vec{B}$ ' nin normu

$$|\vec{B}|=(|\overrightarrow{a_1}|^2+|\overrightarrow{a_2}|^2+2|\overrightarrow{a_1}||\overrightarrow{a_2}|\cos\Phi_1+\varepsilon(2|\overrightarrow{a_1}|^2k_1+$$

$$+2|\overrightarrow{a_2}|^2k_2+2|\overrightarrow{a_1}||\overrightarrow{a_2}|(k_1+k_2)\cos\phi_1-2|\overrightarrow{a_1}||\overrightarrow{a_2}|\phi_1^*\sin\phi_1$$

olur. Burada ϕ açı ve ϕ^* da $\overline{A_{10}}$ ile $\overline{A_{20}}$ ' ı birleştiren dik uzaklıktır. O halde $\vec{B}$ motorunun bitiş noktası uzaklığı

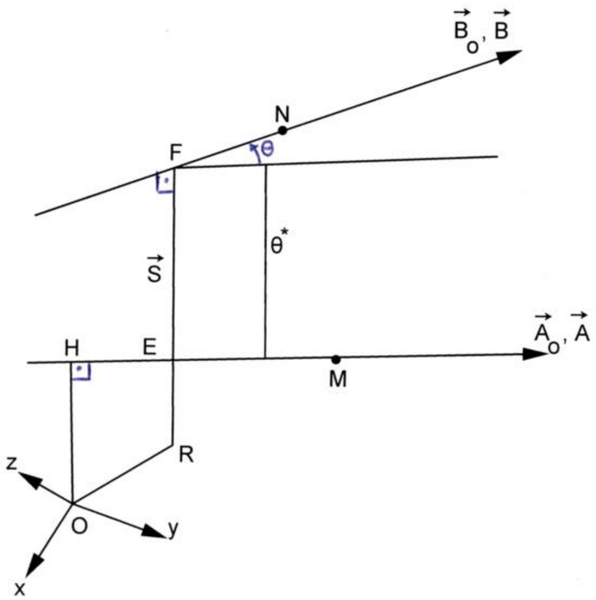
$$k_0=\frac{2|\overrightarrow{a_1}|^2k_1+2|\overrightarrow{a_2}|^2k_2+2|\overrightarrow{a_1}||\overrightarrow{a_2}|(k_1+k_2)\cos\phi_1-2|\overrightarrow{a_1}||\overrightarrow{a_2}|\phi_1^*\sin\phi_1}{|\overrightarrow{a_1}|^2+|\overrightarrow{a_2}|^2+2|\overrightarrow{a_1}||\overrightarrow{a_2}|\cos\phi_1}$$

bulunur. Eğer $\phi^{*}=0$ (düzlemsel durumda) ise paralel olmayan iki motorun lineer kombinasyonları motorların bir demetini oluşturur.

Eğer $k_1 = k_2$ ise k_b' den motorların pencil'i (aynı noktadan geçen doğruların oluşturduğu demet) bir invaryant bitiş noktası uzaklığına sahiptir.

4.2.9. İki motor arasındaki uzaklık

Motor operatörü iki motor arasındaki uzaklığı bulmak için kullanılabilir. $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ iki motor olsun. Genellemeyi bozmadan bunların referans noktalarını referans çatısının orijin noktasında kabul edilebilir.



Şekil 4.7. İki motor arasındaki uzaklık.

Yer değiştirme operatörünü hesaplamak için referans noktası orijinden ortak-normal $\overrightarrow{S_D}$ ekseni üzerinde yeni bir R noktasına değiştirilebilir. R' nin konum vektörü $\overrightarrow{A_0}$ ve $\overrightarrow{B_0}$ birim doğru vektörlerinin arakesit noktası hesaplanarak elde edilebilir. Bu durumda $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ motorlarının P referans noktasına göre koordinatları

$$\vec{B} = \mathrm{Q_A}\vec{A} \Rightarrow \mathrm{Q_A} = \vec{B}(\vec{A})^{-1}$$

biçiminde hesaplanabilir. Φ dual açısı ve Δk skaleri Q_A ’ dan elde edilebilir ve motor uzaklığını değerlendirmek için kullanılır. Şöyle ki Φ, iki birleşik yönlü doğru arasındaki uzaklığı ve Δk , motor boyunca ötelemenin büyüklüğünü ifade eder.

4.2.10. İki motor operatörünün kesişimi

$\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \overrightarrow{a^*}$ ve $\vec{B} = \vec{b} + \varepsilon \overrightarrow{b^*}$ kesişen iki motor olsun. Buna göre

$$\frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} \cdot \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|} \in R \Leftrightarrow \vec{a}.\overrightarrow{b^*} + \overrightarrow{a^*}\vec{b} - \left(\frac{\vec{a}.\overrightarrow{a^*}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}.\overrightarrow{b^*}}{|\vec{b}|} \right) \left(\vec{a}.\vec{b} \right) = 0$$

olur.

$\vec{A}$ ve $\vec{B}$ motorlarının bitiş noktası E olsun. E ara kesit noktasının konum vektörü

$$\overrightarrow{r_E} = \frac{1}{|\vec{a}|^2} (\vec{a} \wedge \overrightarrow{a^*}) + k_{\vec{a}} |\vec{a}| \vec{a}) = \frac{1}{|\vec{b}|^2} (\vec{b} \wedge \overrightarrow{b^*} + k_{\vec{b}} |\vec{b}| \vec{b})$$

$$\Rightarrow \left| \frac{\vec{b}}{\vec{a}} \right|^2 \left(\vec{a} \wedge \overrightarrow{a^*} + k_{\vec{a}} |\vec{a}| \vec{a} \right) = \vec{b} \wedge \overrightarrow{b^*} + k_{\vec{b}} |\vec{b}| \vec{b}$$

bulunur. Son denklemin $\overrightarrow{b^*}$ ile iç çarpımından

$$\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|^2} \left(1 - |\vec{b}|^2 \right) \left(\vec{a} \wedge \overrightarrow{a^*} + k_{\vec{a}} |\vec{a}| \vec{a} \right) = 0 \ , \ (1 - |\vec{b}|^2) k_{\vec{b}} = 0$$

elde edilir. Buradan

$$k_{\vec{a}} = -\frac{1}{|\vec{a}|} \frac{(\vec{a} \wedge \overrightarrow{a^*}).\vec{b}}{\vec{a}.\vec{b}}$$

olur. Böylece ara kesit noktasının konum vektörü

$$\overrightarrow{r_E} = \frac{1}{|\vec{a}|^2} \left(\vec{a} \wedge \overrightarrow{a^*} - \frac{(\vec{a} \wedge \overrightarrow{a^*}).\vec{b}}{\vec{a}.\vec{b}} \vec{a} \right)$$

$$=\frac{1}{|\vec{b}|^2}\left(\vec{b}\wedge\overrightarrow{b^*}-\frac{(\vec{b}\wedge\overrightarrow{b^*}).\vec{b}}{\vec{b}.\vec{a}}\vec{b}\right)$$

bulunur.

Aşağıdaki örnekte verilen motorlar için elde edilen motor hareketi Maple programı yardımıyla elde edilmiştir.

Örnek 4.2.1. (Motor Hareketi):

$$\vec{A}=\vec{a}+\varepsilon\overrightarrow{a^*}=(1,1,1)+\varepsilon(0,1,1)=i+(1+\varepsilon)j+(1+\varepsilon)k$$

ve

$\vec{B}=\vec{b}+\varepsilon\overrightarrow{b^*}=(0,1,1)+\varepsilon(1,1,0)=\varepsilon i+(1+\varepsilon)j+k$ motorları için elde edilen motor hareketinin bulunması.

> restart;

> with(LinearAlgebra):

> x:=<x_1,x_2,x_3>;

> y:=<y_1,y_2,y_3>;

$$x:=\begin{bmatrix} x\_1 \\ x\_2 \\ x\_3 \end{bmatrix}$$

$$y:=\begin{bmatrix} y\_1 \\ y\_2 \\ y\_3 \end{bmatrix}$$

> N := x -> VectorNorm(x,2);

$$N:=x\rightarrow LinearAlgebra{:}\text{-}VectorNorm(x,2)$$

> d := (x,y) -> DotProduct(x,y);

$$d:=(x,y)\rightarrow LinearAlgebra{:}\text{-}DotProduct(x,y)$$

> f1 := x -> (x)/(N(x));

$$f1 := x \rightarrow \frac{x}{N(x)}$$

```
> f2 := (x, y) -> (y)*(N(x))/(N(x))^2-(x)*(d(x,y))/(N(x))^3;
```

$$f2 := (x, y) \rightarrow \frac{y\,N(x)}{N(x)^2} - \frac{x\,d(x, y)}{N(x)^3}$$

```
> c := (x,y) -> CrossProduct(x,y);
```

$$c := (x, y) \rightarrow \mathit{LinearAlgebra}{:-}\mathit{CrossProduct}(x, y)$$

```
> k := (x,y) -> (d(x,y))/(N(x))^2;
```

$$k := (x, y) \rightarrow \frac{d(x, y)}{N(x)^2}$$

```
>  r := (x, y) -> (c(x,y)+k(x,y)*N(x)*x)/(N(x))^2;
```

$$r := (x, y) \rightarrow \frac{c(x, y) + k(x, y)\,N(x)\,x}{N(x)^2}$$

```
> a:=<1,1,1>;
```

$$a := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

```
> a1:=<0,1,1>;
```

$$a1 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

```
> A:=a+epsilon*a1;
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 + \varepsilon \\ 1 + \varepsilon \end{bmatrix}$$

```
> f1(a);
```

$$\left[\begin{array}{c} \frac{1}{3}\sqrt{3} \\ \frac{1}{3}\sqrt{3} \\ \frac{1}{3}\sqrt{3} \end{array}\right]$$

> f2(a,a1);

$$\left[\begin{array}{c} -\frac{2}{9}\sqrt{3} \\ \frac{1}{9}\sqrt{3} \\ \frac{1}{9}\sqrt{3} \end{array}\right]$$

> A0:=f1(a)+epsilon*f2(a,a1);

$$A0 := \left[\begin{array}{c} \frac{1}{3}\sqrt{3} - \frac{2}{9}\varepsilon\sqrt{3} \\ \frac{1}{3}\sqrt{3} + \frac{1}{9}\varepsilon\sqrt{3} \\ \frac{1}{3}\sqrt{3} + \frac{1}{9}\varepsilon\sqrt{3} \end{array}\right]$$

> c(a,a1);

$$\left[\begin{array}{r} 0 \\ -1 \\ 1 \end{array}\right]$$

> k(a,a1);

$$\frac{2}{3}$$

> r(a,a1);

$$\left[\begin{array}{c} \frac{2}{9}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{3} + \frac{2}{9}\sqrt{3} \\ \frac{1}{3} + \frac{2}{9}\sqrt{3} \end{array}\right]$$

```
> b:=<0,1,1>;
```

$$b := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

```
> b1:=<1,1,0>;
```

$$b1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

```
> B:=b+epsilon*b1;
```

$$B := \begin{bmatrix} \varepsilon \\ 1 + \varepsilon \\ 1 \end{bmatrix}$$

```
> B0:=f1(b)+epsilon*f2(b,b1);
```

$$B0 := \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\,\varepsilon\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{4}\,\varepsilon\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{4}\,\varepsilon\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

```
> c(b,b1);
```

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

```
> k(b,b1);
```

$$\frac{1}{2}$$

```
> r(b,b1);
```

$$\left[\begin{array}{c} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{4}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\sqrt{2} \end{array}\right]$$

> v:=c(f1(a),f1(b));

$$v := \left[\begin{array}{c} 0 \\ -\frac{1}{6}\sqrt{3}\sqrt{2} \\ \frac{1}{6}\sqrt{3}\sqrt{2} \end{array}\right]$$

> v1:=c(f2(a,a1),f1(b))+c(f1(a),f2(b,b1));

$$v1 := \left[\begin{array}{c} -\frac{1}{6}\sqrt{3}\sqrt{2} \\ \frac{13}{36}\sqrt{3}\sqrt{2} \\ -\frac{7}{36}\sqrt{3}\sqrt{2} \end{array}\right]$$

> s:=f1(v);

$$s := \left[\begin{array}{c} 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array}\right]$$

> s1:=f2(v,v1);

$$s1 := \left[\begin{array}{c} -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{4}\sqrt{2} \\ \frac{1}{4}\sqrt{2} \end{array}\right]$$

> rp:=c(s,s1);

$$rp := \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

> p(A):=A-epsilon*k(a,rp)*a;

$$p\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1+\varepsilon \\ 1+\varepsilon \end{bmatrix}\right) := \begin{bmatrix} 1+\frac{1}{2}\varepsilon \\ 1+\frac{3}{2}\varepsilon \\ 1+\frac{3}{2}\varepsilon \end{bmatrix}$$

> p(B):=B-epsilon*k(b,rp)*b;

$$p\left(\begin{bmatrix} \varepsilon \\ 1+\varepsilon \\ 1 \end{bmatrix}\right) := \begin{bmatrix} \varepsilon \\ 1+\frac{3}{2}\varepsilon \\ 1+\frac{1}{2}\varepsilon \end{bmatrix}$$

> q0:=-d(f1(a),f1(b));

$$q0 := -\frac{1}{3}\sqrt{3}\sqrt{2}$$

> q1:=-c(f1(a),f1(b));

$$q1 := \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{6}\sqrt{3}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{6}\sqrt{3}\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

> q2:=-d(f1(a),f2(b,b1))-d(f2(a,a1),f1(b));

$$q2 := -\frac{5}{18}\sqrt{3}\sqrt{2}$$

> q3:=-c(f1(a),f2(b,b1))-c(f2(a,a1),f1(b));

$$q3 := \begin{bmatrix} \frac{1}{6}\sqrt{3}\sqrt{2} \\ -\frac{13}{36}\sqrt{3}\sqrt{2} \\ \frac{7}{36}\sqrt{3}\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

> lambda:=(N(b))/(N(a));

$$\lambda := \frac{1}{3}\sqrt{3}\sqrt{2}$$

> lambda1:=(-(N(b))^2*d(a,a1)+(N(a))^2*d(b,b1))/(N(b)*(N(a))^3);

$$\lambda 1 := -\frac{1}{18}\sqrt{3}\sqrt{2}$$

> Q1:=-lambda*q0-epsilon*(lambda*q2+lambda1*q0);

$$Q1 := \frac{2}{3} + \frac{4}{9}\varepsilon$$

> Q2:=-lambda*q1-epsilon*(lambda*q3+lambda1*q1);

$$Q2 := \begin{bmatrix} -\frac{1}{3}\varepsilon \\ -\frac{1}{3} + \frac{7}{9}\varepsilon \\ \frac{1}{3} - \frac{4}{9}\varepsilon \end{bmatrix}$$

> Q:=Q1+Q2;

$$Q := \frac{2}{3} + \frac{4}{9}\varepsilon + \begin{bmatrix} -\frac{1}{3}\varepsilon \\ -\frac{1}{3} + \frac{7}{9}\varepsilon \\ \frac{1}{3} - \frac{4}{9}\varepsilon \end{bmatrix}$$

> with(geom3d):

> point(o,0,0,0),point(ra,2/9*sqrt(3),-1/3+2/9*sqrt(3),1/3+2/9*sqrt(3)),

point(rb,-1/2+2/3,1/2+2/3+1/4*sqrt(2),-1/2+2/3+1/4*sqrt(2));

o, ra, rb

> a:=[1/sqrt(3),1/sqrt(3),1/sqrt(3)];

$$a := \left[\frac{1}{3}\sqrt{3}, \frac{1}{3}\sqrt{3}, \frac{1}{3}\sqrt{3}\right]$$

> b:=[0,1/sqrt(2),1/sqrt(2)];

$$b := \left[0, \frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}\right]$$

> w:=[0,-1/sqrt(2),1/sqrt(2)];

$$w := \left[0, -\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}\right]$$

> point(a2,0,-1/3,1/3),point(K,-1/2,0,-1);

a2, K

> point(b2,-1/2,1/3,-2/3);

b2

> line(S,[K,w]);

S

> line(A1,[a2,a]);

A1

> line(B1,[b2,b]);

B1

> intersection(i,A1,S);

i

> projection(b1,rb,B1);

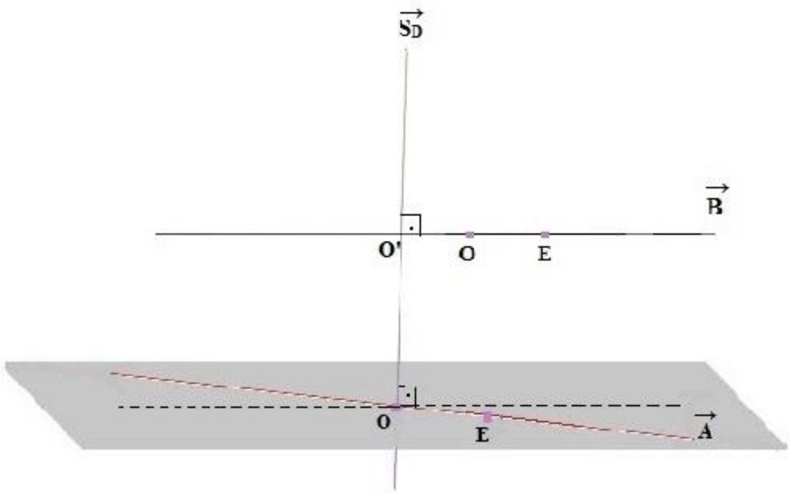
b1

> plane(pa,[a2,w]);

pa

>draw([pa,S(thickness=1),A1(color=red,thickness=1),B1(color=black,thickness=1),

i(color=blue),b2(color=red),ra(color=yellow),b1(color=yellow)]);



KAYNAKLAR DİZİNİ

Ata, E. ve Yaylı, (2008), “Dual Unitary Matrices and Unit Dual Quaternions”, Differential Geometry and Dynamic Systems S.10, s.1-12.

Ata, E. ve Yaylı, Y., (2009), “Dual Quaternions and Dual Projective Spaces”, Chaos, Solitions&Franctals, sayı.40, 1255-1263.

Dimentberg, F. M., (1965), The screw calculus and its applications in Mechanics, Moscow (traslated by foreign technology diusion).

Hacısalihoğlu, H. H., (1983), Hareket geometrisi ve kuaterniyonlar teorisi, Gazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fak. Yayınları, Math. No.2.

Niven, I., (1941), Equations in quaternions, American Mathmatical Monthly 48: s.654-661.

Pottmann, H. ve Wallner, J., (2001), Computational line geometry, Springer-Verlag, s.565.

Parker, J., (2009), Quaternionic linear algebra, Durham University.

Parker, J. R., (2008), Hyperbolic spaces, Jyvaskyla Lectures in Mathematics 2.

Wood, R. M. W., (1985), Quaternionic eigen values, Bullet in of London Mathematical Society 17: 137-138.

Vonder bewegungen ve Umlegungen, (1891), E. Study, Mathematische An-nalen 39, s.441-564.

Verlag Teubner, (1903), E. Study, Die Geometrie der Dynamen, Leipzig, s.437.

Vicci, L. , (2001), Quaternions and Rotations in 3-Space: The Algebra and its Geometric Interpretstion.

Yang, A. T., (1963), Application of quaternion algebra and dual numbers to the analysis of spatial mechanisms, Doctoriol dissertation, Columbia University, New York, NY, s.241.

Yang, A. T., Freudenstein, F., (1964) , Application of a dual-number quaternion algebra to the analysis of spatial mechanisms, ASME journal of Applied Mechanics 86E(2), s. 300-308.

Zhang Y., Ting K.-L., (2004), On point-line geometry and displacemen, Mechanism and Machine Theory 391033-1050.

Zhang, F., (1997), Quaternions and Matrices of Quaternions, Linear Algebra and its Applications 251: s.21-57.