GAZİ ÜNİVERSİTESİ

Gazi

1926

DUAL UZAYDA JEODEZİK SPRAYLAR ÜZERİNE

Emel KARACA

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

OCAK 2015

Emel KARACA tarafından hazırlanan "DUAL UZAYDA JEODEZİK SPRAYLAR ÜZERİNE" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Gazi Üniversitesi MATEMATİK Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Mustafa ÇALIŞKAN

Matematik, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum ..…………………

Başkan : Prof. Dr. Baki KARLIĞA

Matematik, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum …………………...

Üye : Prof. Dr. F. Nejat EKMEKÇİ

Matematik, Ankara Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum …………………...

Tez Savunma Tarihi: 12/01/2015

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

…………………….…….

Prof. Dr. Şeref SAĞIROĞLU

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Emel Karaca
13.01.2015

DUAL UZAYDA JEODEZİK SPRAYLAR ÜZERİNE

(Yüksek Lisans Tezi)

Emel KARACA

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Ocak 2015

ÖZET

Jeodezik spray, matematiğin çok çeşitli dallarında uygulaması olması nedeniyle matematikte önemli bir yer tutmaktadır. Bu tez çalışmasında ilk olarak 3-boyutlu Öklid uzayıyla ilgili bilgilere yer verildi. Eğrilik ve burulmanın geometrik anlamları göz önüne alındı. Daha sonra, J.A.Thorpe tarafından 3-boyutlu Öklid uzayında verilen "Bir α eğrisinin $\bar{\alpha}$ tabii liftinin X jeodezik sprayının bir integral eğrisi olabilmesi için gerek ve yeter şart α nın M üzerinde bir jeodezik olmasıdır" teoreminin Frenet vektörlerine ve sabit pol eğrisine uygulamalarından elde edilen sonuçlar verildi. Dual uzay ile ilgili bazı tanım ve teoremler üzerinde duruldu. Son olarak, dual uzayda bir α eğrisinin $\bar{\alpha}$ tabii lifti ve jeodezik spray kavramları verildi. J.A.Thorpe tarafından 3-boyutlu Öklid uzayında verilen "Bir α eğrisinin $\bar{\alpha}$ tabii liftinin X jeodezik sprayının bir integral eğrisi olabilmesi için gerek ve yeter şart α nın M üzerinde bir jeodezik olmasıdır" teoreminin dual uzayda Frenet vektörlerine ve sabit pol eğrisine uygulamaları yapıldı. Bundan başka, Dual uzayda bu lift eğrilerinin $T(S^2)$ tanjant demeti üzerindeki jeodezik sprayların birer integral eğrisi olması için esas eğriye ait bazı neticeler elde edilmiştir.

Bilim Kodu	:	204.1.049
Anahtar Kelimeler	:	Dual uzay, jeodezik spray, tabii lift eğrileri
Sayfa Adedi	:	42
Danışman	:	Prof. Dr. Mustafa ÇALIŞKAN

ON GEODESIC SPRAYS IN DUAL SPACE

(M. Sc. Thesis)

Emel KARACA

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

January 2015

ABSTRACT

Geodesic spray has a very important place in mathematics since it has many applications in various branches of mathematics. In this thesis, firstly, it is given some information about Euclidean space. The geometric meanings of curvature and torsion are taken into consideration. Then, the applications of “The natural lift $\bar{\alpha}$ of a curve α is an integral curve of the geodesic spray X if and only if α is a geodesic on M” which was given by J.A. Thorpe are given for Frenet vectors and the fixed centrode in Euclidean space. The definitions and theorems are given in dual space. Finally, the natural curve of α and geodesic sprays are defined in dual space. The applications of “The natural lift $\bar{\alpha}$ of a curve α is an integral curve of the geodesic spray X if and only if α is a geodesic on M” are given for Frenet vectors and the fixed centrode in dual space. Some results are obtained depending on the assumption the natural lift curves should be the integral curve of the geodesic spray on the bundle in Dual space.

Science Code	:	204.1.049
Key Words	:	Dual Frenet frames, geodesic spray, natural lift curves
Page Number	:	42
Supervisor	:	Prof. Dr. Mustafa ÇALIŞKAN

TEŞEKKÜR

Bu tez konusunu bana vererek çalışmalarımın her aşamasında yakın ilgisini esirgemeyen, değerli yardımlarıyla beni yönlendiren hocam, Sayın Prof. Dr. Mustafa ÇALIŞKAN'a, maddi ve manevi desteğini hiçbir zaman esirgemeyen babam Fahrettin KARACA'ya, bana her konuda her zaman destek olan annem Emine KARACA'ya, tezin hazırlanma aşamasında yardımlarından dolayı Araş. Gör. Hakan ŞAHİN'e en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklama**
$\boldsymbol{B}$	Eğrinin binormaller göstergesi
$\boldsymbol{C}$	Sabit pol eğrisi
$\boldsymbol{D}$	Levi-Civita konneksiyonu
$\bar{\boldsymbol{D}}$	Dual uzayda konneksiyon
$\boldsymbol{E^3}$	Öklid uzayı
$\boldsymbol{k_1}$	Eğrinin birinci eğriliği
$\boldsymbol{k_2}$	Eğrinin ikinci eğriliği
$\boldsymbol{N}$	Eğrinin aslinormaller göstergesi
$\boldsymbol{S}$	Şekil operatörü
$\boldsymbol{T}$	Eğrinin teğetler göstergesi
$\boldsymbol{W}$	Darboux vektörü

1. GİRİŞ

Bu çalışmanın orijini J.A.Thorpe'nin 1979 yılında yazdığı "Elementary Topics in Differential Geometry" kitabındaki bir teoreme dayanmaktadır. Bu teoremin ifadesi şudur; "Bir α eğrisinin $\bar{\alpha}$ tabii liftinin X jeodezik sprayının bir integral eğrisi olabilmesi için gerek ve yeter şart α nın M üzerinde bir jeodezik olmasıdır."

1984 yılında Mustafa Çalışkan, A.İhsan Sivridağ ve H. Hilmi Hacısalihoğlu çalışmalarında 3-boyutlu Öklid uzayında bir α eğrisinin $\bar{\alpha}$ tabii liftini ve jeodezik spray kavramlarını tanıtmışlardır. Bir eğrinin teğetler, asli normaller ve binormallerinin küresel göstergelerine ve sabit pol eğrisine ait tabii lift eğrileri üzerinde durmuşlardır. Bundan başka, bu lift eğrilerinin $T(S^2)$ tanjant demeti üzerindeki jeodezik sprayların birer integral eğrisi olması için esas eğriye ait bazı ilginç neticeler elde etmişlerdir.

2011 yılında Evren Ergün ve Mustafa Çalışkan 3-boyutlu Minkowski uzayında jeodezik spraylar ile ilgili çalışmalar yapmışlardır.

Bu tez çalışmasında, ilk olarak Dual uzayda bir α eğrisinin $\bar{\alpha}$ tabii lifti ve jeodezik spray kavramları tanıtılmıştır. Daha sonra J.A.Thorpe tarafından verilen "Bir α eğrisinin $\bar{\alpha}$ tabii liftinin X jeodezik sprayının bir integral eğrisi olabilmesi için gerek ve yeter şart α nın M üzerinde bir jeodezik olmasıdır" teoremi Dual uzayda ispatlanmıştır ve bir eğrinin teğetler, asli normaller, binormallerinin küresel göstergelerine ve sabit pol eğrisine uygulamaları yapılmıştır. Bundan başka, Dual uzayda bu lift eğrilerinin $T(S^2)$ tanjant demeti üzerindeki jeodezik sprayların birer integral eğrisi olması için esas eğriye ait bazı neticeler elde edilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, 3-boyutlu Öklid uzayı ve Dual uzaya ait temel kavramlara ve ileriki bölümlerde kullanılacak bazı teoremlerin ispatlarına yer verilmiştir.

2.1. Öklid Uzayı

2.1.1.Tanım

A boş olmayan bir cümle, V de Ƒ cismi üzerinde vektör uzayı olsun. $f: A\, x\, A \longrightarrow V$ fonksiyonu aşağıdaki aksiyomları sağlarsa *A* ya *V* ile birleştirilmiş afin uzay denir.

A_1: ∀ P, Q, R ∈ A için f(P,Q) + f(Q,R) = f (P,R),
A_2: ∀ P ∈ A, ∀α ∈ *V* için f(P,Q) = α olacak şekilde bir tek Q ∈ *A* noktası vardır.

2.1.2. Tanım

A, *V* ile birleşen bir afin uzay olsun. $P_0, P_1,\ldots, P_n$ ∈ A noktaları için $\{P_0P_1,\ P_0P_2,\ldots, P_0P_n\}$ cümlesi *V* nin bir bazı ise $\{P_0,\ P_1,\ldots, P_n\}$ nokta (n+1)-lisine *A* afin uzayının bir afin çatısı denir. Burada P_0 noktasına çatının başlangıç noktası ve P_i, 1≤ i ≤ n, noktalarına da çatının birim noktaları denir. Boy *V* = n ise A ya n-boyutlu bir afin uzay denir.

2.1.3. Tanım

A, *V* ile birleştirilmiş afin uzay olsun.

$<,>:\ V\ \times V \longrightarrow\ IR$

fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlarsa bu fonksiyona bir iç çarpım fonksiyonu denir:

∀ x, y, z ∈ *V* için

i) bilineerlik aksiyomu,
$< ax + by,\ z > = a < x, z > + b < y, z >$
$< x, ay + bz > \ = a < x, y > + b < x, z >$

ii) simetri aksiyomu,

$< x, y > = < y, x >$

iii) pozitif tanımlılık,

$< x, x > \geq 0, < x, x > = 0 \Leftrightarrow x = 0.$

2.1.4. Tanım

$\forall X, Y \in IR^n$ olmak üzere,

$<,> : IR^n \times IR^n \longrightarrow IR$
$< X, Y > = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

şeklinde tanımlı fonksiyon bir iç çarpım fonksiyonudur. Bu iç çarpıma IR^n de standart iç çarpım veya Öklid iç çarpım denir. Standart iç çarpımın tanımlı olduğu IR^n vektör uzayı ile birleşen afin uzaya n-boyutlu standart Öklid uzayı denir ve E^n ile gösterilir.

2.1.5. Tanım

$X \in E^n$ noktasının afin koordinat sistemine göre koordinatları $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ olsun.
x_i: $E^n \longrightarrow IR$, $1 \leq i \leq n$, fonksiyonuna E^n nin i-yinci koordinat fonksiyonu denir.

2.1.6. Tanım

d: $E^n \times E^n \longrightarrow IR$, $d(X, Y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2}$ şeklinde tanımlı *d* fonksiyonuna E^n Öklid uzayında uzaklık fonksiyonu ve $d(X,Y) \in IR$ sayısına da *X* ile *Y* noktaları arasındaki uzaklık denir.

2.1.1. Teorem

E^n de uzaklık fonksiyonu bir metriktir.

2.1.7. Tanım

d: $E^n \times E^n \longrightarrow IR$

$(x, y) \longrightarrow d(x, y) = \|\overrightarrow{xy}\|$

biçiminde tanımlanan d fonksiyonuna E^n de Öklid metriği denir.

2.1.8. Tanım

IR^n iç çarpım uzayı ile birleşen Öklid uzayı E^n olmak üzere $\{P_0, P_1, \ldots, P_n\}$ nokta (n+1)-lisi için, $\{P_0P_1, P_0P_2, \ldots, P_0P_n\}$ cümlesi E^n nin ortonormal bazı ise $\{P_0, P_1, \ldots, P_n\}$ cümlesine E^n nin Öklid çatısı (dik çatı) denir.

2.1.9. Tanım

α: $I \subset IR \longrightarrow E^n$, $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \ldots, \alpha_n(t))$ diferensiyellenebilir fonksiyonuna E^n de bir *eğri* denir. Burada I aralığına α eğrisinin parametre aralığı ve $t \in I$ değişkenine de α eğrisinin parametresi denir.

2.1.10. Tanım

α: $I \subset IR \longrightarrow E^n$ diferensiyellenebilir bir eğri olsun.

$\|\alpha'\|$: $I \longrightarrow IR$, $\|\alpha'\|(t) = \|\alpha'(t)\|$ şeklinde tanımlı $\|\alpha'\|$ fonksiyonuna skaler hız fonksiyonu, $\|\alpha'(t)\| \in IR$ sayısına α eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki skaler hızı,

$\alpha'(t) = \frac{d\alpha}{dt}\Big|_t = \left(\frac{d\alpha_1(t)}{dt}, \frac{d\alpha_2(t)}{dt}, \ldots, \frac{d\alpha_n(t)}{dt}\right)\Big|_t$

vektörüne de α eğrisinin hız vektörü denir.

2.1.11. Tanım

M$\subset E^n$ eğrisi verilsin. M eğrisinin $m \in$ M noktasındaki tanjant uzayı diye, $m \in M$ noktasında M nin hız vektörlerini içine alan T_M(m) = V(m) vektör uzayına denir. $m \in M$

seçilmiş bir nokta olmak üzere, E^n in $T_M(m)$ ile birleşen alt afin uzayına da, M eğrisinin $m \in$ M noktasındaki teğet doğrusu denir.

2.1.12. Tanım

α: $I \subset IR \longrightarrow E^n$ eğrisi için $\|\alpha'(s)\| = 1$ ise eğriye birim hızlı eğri ve bu durumda $s \in I$ parametresine de eğrinin yay parametresi denir.

2.1.13. Tanım

α: $I \subset IR \longrightarrow E^n$ bir eğri ve $a, b \in I$ için

$$s = \int_a^b \|\alpha'(t)\| ds \tag{2.1}$$

reel sayısına α eğrisinin $\alpha(a)$ ile $\alpha(b)$ noktaları arasındaki yay uzunluğu denir.

2.1.14. Tanım

α: $I \subset IR \longrightarrow E^n$ bir eğri ve $\phi = \{\alpha', \alpha'', \alpha''', \ldots, \alpha^{(r)}\}$ cümlesi lineer bağımsız olsun.

$\alpha^{(k)} \in S_p\{\phi\}$, k > r

olmak üzere ϕ cümlesinden *Gram* Schmidt ortogonalleştirme yöntemi ile elde edilen $\{V_1(s), V_2(s), \ldots, V_r(s)\}$ ortonormal sistemine α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Serret-Frenet r-ayaklısı, $\forall V_i$, $1 \leq i \leq r$, vektörüne de Serret- Frenet vektörü denir.

2.1.15. Tanım

α: $I \subset IR \longrightarrow E^n$ eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı;

1) $s \in$ I yay parametresi ise

$$\begin{cases} v_1(s) = \dfrac{\alpha^{'}(s)}{\left\|\alpha^{'}(s)\right\|} \\ v_2(s) = B(s) \times N(s) \\ v_3(s) = \dfrac{\alpha^{'}(s) \times \alpha^{''}(s)}{\left\|\alpha^{'}(s) \times \alpha^{''}(s)\right\|} \end{cases}$$

2) $s \in$ I yay parametresi değilse

$$\begin{cases} v_1(s) = \alpha^{'}(s) \\ v_2(s) = \dfrac{\alpha^{''}(s)}{\left\|\alpha^{''}(s)\right\|} \\ v_3(s) = T(s) \times N(s) \end{cases}$$

şeklinde verilir [3].

2.1.2. Teorem

M $\subset E^n$ eğrisinin Frenet r-ayaklısı koordinat komşuluğundan bağımsızdır [3].

İspat

M eğrisinin iki koordinat komşuluğu (I, α) ve (J, β) olsun. Bu durumda

h= $\alpha^{-1} o \beta$: J$\longrightarrow$ I

parametre değişimi mevcuttur. Bu durumda

β'(s)$\in S_p\{\alpha'$(h(s))} veya $S_p\{\beta'$(s)}= $S_p\{\alpha'$(h(s))}

dir. Diğer taraftan,

β'(s) = h'(s) α'(h(s))
$\beta^{''}$(s) = h'(s) $^2\alpha^{''}$(h(s)) + $h^{''}$(s) α'(h(s))

dir.

$S_p\{\beta'(s), \beta''(s)\} = S_p\{\alpha'(h(s)), \alpha''(h(s))\}$

elde edilir. Benzer düşünce ile,

$S_p\{\beta'(s),\ldots,\beta^{(i)}(s)\} = S_p\{\alpha'(h(s)),\ldots, \alpha^{(i)}(h(s)\}, \qquad 1\leq i \leq r$

bulunur. Böylece, Gramm-Schmidt metodu ile

$\{\alpha'(h(s)),\ldots, \alpha^{(r)}(h(s)\}, \{\beta'(s),\ldots,\beta^{(r)}(s)\}$

sistemlerinden bir tek $\{V_1,\ldots, V_r\}$ ortonormal sitemi elde edilebilir.

2.1.16. Tanım

M $\subset E^n$ eğrisinin α(s)$\in$ M noktasındaki Frenet r-ayaklısı $\{V_1(s),\ldots, V_r(s)\}$ olsun. Bu durumda, α(s) seçilmiş bir nokta olmak üzere E^n in,

$S_p\{V_1(s),\ldots, V_p(s)\}, \quad p \leq r$

vektör uzayı ile birleşen afin altuzayına, α(s) noktasında, M eğrisinin p-yinci oskülatör hiperdüzlemi denir.

2.1.17. Tanım

α:I$\subset IR \longrightarrow E^n$ eğrisinin Frenet r-ayaklısı $\{V_1(s), V_2(s),\ldots, V_r(s)\}$ olsun.

$k_i: I \longrightarrow IR$, $1\leq i \leq r$
$s \longrightarrow k_i(s) = \langle V_i'(s), V_{i+1}'(s)\rangle$

şeklinde tanımlı k_i fonksiyonuna α eğrisinin i-yinci eğrilik fonksiyonu, $\forall s\in$ I için $k_i(s)\in IR$ sayısına da α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki i-yinci eğriliği denir.

2.1.2. Teorem

α:I⊂ $IR \longrightarrow E^n$ eğrisinin Frenet r-ayaklısı $\{V_1(s), V_2(s),\ldots, V_r(s)\}$, i-yinci eğriliği $k_i(s)$ olsun. Bu durumda Frenet vektörleri ile bunların türev vektörleri arasında

$$\begin{cases} V_1^{'}(s) = k_i(s)V_2(s) \\ V_i^{'}(s) = -k_{i-1}(s)V_{i-1}(s) + k_i(s)V_{i+1}(s) \\ V_r^{'}(s) = -k_{r-1}(s)V_2(s) \end{cases}$$

bağıntısı vardır.

n= 3 halinde α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı $\{T, N, B\}$ ile gösterilir.

Burada T ye teğet vektör, N ye asli normal vektör ve B ye de binormal vektör denir. α eğrisinin birinci ve ikinci eğrilikleri de sırasıyla κ ve τ ile gösterilir ve κ ya eğrinin eğriliği, τ ya da burulması adı verilir. Bu durumda

$$\begin{cases} T^{'}(s) = \kappa(s)N(s) \\ N^{'}(s) = -\kappa(s)T(s) + \tau(s)B(s) \\ B^{'}(s) = -\tau(s)N(s) \end{cases} \tag{2.2}$$

olur.

Diğer taraftan, bir α eğrisi üzerinde $\alpha(s)$ noktası eğriyi çizerken bu noktadaki $\{T, N, B\}$ Frenet 3-ayaklısının, her s anında (bir eksen etrafında) ani bir helis hareketi yaptığı kabul edilir ve bu eksene eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki Darboux (ani dönme) ekseni denir. Bu eksenin yön ve doğrultusunu veren vektör,

$$W = N \wedge N' ,$$

$$W = \tau T + \kappa B \tag{2.3}$$

dir ve bu vektöre Darboux vektörü denir.

W ile B arasındaki açı ϕ ile gösterilirse

$\sin\phi = \frac{\tau}{\|W\|}$, $\cos\phi = \frac{\kappa}{\|W\|}$ (2.4)

yazılır. W Darboux vektörü yönündeki birim vektör C ile gösterilirse

$$C = \frac{\tau}{\|W\|} T + \frac{\kappa}{\|W\|} B$$

olur. Burada κ ve τ nun yerine Eş. 2.1’deki eşitlikleri yazılırsa

$$C = \sin\phi T + \cos\phi B \qquad (2.5)$$

bulunur.

2.1.3. Teorem

α:I⟶E^3 eğrisinin düzlemsel bir eğri olması için gerek ve yeter şart τ= 0 olmasıdır [3].

İspat

Kabul edelim ki α birim hızlı düzlemsel bir eğri olsun. Bu durumda $\forall s \in$ I için $\alpha(s)$ noktalarının tümü bir E düzlemi içinde bulunur. Düzlemin normali q, düzlem üzerindeki herhangi bir nokta p olsun. Bu durumda

$$< \alpha(s) - p, q > = 0$$

olur. Bu ifadenin türevi alınırsa

$$< \alpha'(s), q > + < \alpha(s) - p,\ q' > = 0,$$
$$< \alpha'(s), q > = 0$$

olur ve tekrar türev alınırsa

$$< \alpha''(s), q > = 0$$

bulunur. Buradan q vektörünün T ve N ye dik olduğu görülür. Bu durumda q vektörü B ye paralel olur. Dolayısıyla

$$B(s) = \mp \frac{q}{\|q\|}$$

şeklinde alınabilir. Bu ifadenin türevi alınırsa

$$B' = 0 \ \Rightarrow B'(s) = -\tau(s)N(s)$$

$$\Rightarrow (s) = 0$$

elde edilir. Tersine kabul edelim ki $\tau(s) = 0$ olsun. $B'(s) = -\tau(s)N(s)$ idi. Buradan

$B'(s) = 0,$
$B(s) = \mathrm{c} = sabit$

olur. Şimdi

$F : I \longrightarrow IR$
$\quad s \longrightarrow F(s) = < \alpha(s) - \alpha(0), B(s) >$

fonksiyonu tanımlansın. $s=0$ ise $F(0) = 0$ dır. F nin s ye göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned} F'(s) &= < \alpha'(s), B(s)> + < \alpha'(s) - \alpha(0), B'(s)> \\ &= < T(s), B(s) > + < T(s), -\kappa(s)N(s) > \\ &= 0, \end{aligned}$$

$F(s) = sbt.$
Buna göre

$$< \alpha(s) - \alpha(0), B(s) > = 0$$

eşitliği, α eğrisinin $\alpha(0)$ noktasından geçen ve B vektörüne dik olan düzlem içinde olduğunu gösterir.

2.1.18. Tanım

α: $I \longrightarrow E^n$ eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki 1. Ve 2. eğrilikleri sırasıyla $k_1(s)$ ve $k_2(s)$ olsun.
$H_1: I \longrightarrow IR$

$$s \longrightarrow H_1(s) = \frac{k_1(s)}{k_2(s)}$$

şeklinde tanımlı H_1 fonksiyonuna α eğrisinin 1-inci harmonik eğriliği denir [3].

2.1.19. Tanım

α: $I \longrightarrow E^n$ eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki hız vektörü, sabit bir U vektörü ile sabit açı yapıyorsa eğriye bir eğilim çizgisi (helis), $S_p\{U\}$ ya da eğilim çizgisinin eğilim ekseni denir [3].

2.1.4. Teorem

α: $I \longrightarrow E^3$ eğrisi bir eğilim çizgisidir $\Leftrightarrow$ $H_1(s)=sbt.$

İspat

Kabul edelim ki α bir eğilim çizgisi olsun. α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet çatısı $\{T(s), N(s), B(s)\}$ olmak üzere, eğilim çizgisi tanımına göre

$$< T(s), U > = \cos\phi$$

olur. Bu ifadenin s ye göre türevi alınırsa

$$< T'(s), U > = 0,$$

$$\kappa < N(s), U > = 0$$

bulunur. Bu durumda N ile U diktir. $U \in S_p\{ T(s), B(s)\}$ olduğundan

$$U = a\, T(s) + b\, B(s)$$

şeklinde yazılabilir. Bu ifade sırasıyla *T* ve *B* ile iç çarpılırsa

$$\begin{cases} < U, T(s) > = \ a \ = \ cos\phi \\ < U, B(s) > = \ b \ = \ sin\phi \end{cases} \tag{2.6}$$

olur. Eş. 2.6. dan,

$\vec{U}$= $cos\phi$ $T(s)$ + $sin\phi$ $B(s)$

bulunur. Diğer yandan

$< N(s), \vec{U} \ >$ = 0

ifadesinin türevi alınır ve gerekli işlemler yapılırsa

$< N'(s), U >$ + $< N(s), U' >$ = 0,
$< \kappa(s)T(s) - \tau(s)B(s), U >$ = 0,
$\kappa(s) < T(s), U > - \tau(s) < B(s), U >$ = 0,
$\kappa(s)\ cos\phi - \tau(s)\ sin\phi$ = 0,
$\frac{\kappa(s)}{\tau(s)}$ = *sbt.*,
$H_1(s)$= *sbt.*

elde edilir.

Tersine, kabul edelim ki $\forall s \in I$ için $H_1(s)$ = sbt. olsun. İddia ediliyor ki α bir eğilim çizgisidir. $H_1(s)$ = *sbt.* ise $H_1(s)$= $tan\phi$ alınabilir. Buradan
$\frac{\kappa(s)}{\tau(s)} = \frac{sin\phi}{cos\phi} \Longrightarrow cos\phi\kappa\,(s) - sin\phi\tau(s) = 0$

olur. Şimdi

$\vec{U}$ =$cos\phi\vec{T}$(s) + $sin\phi\vec{B}(s)$

vektörünü tanımlayalım. Açının sabit olduğu dikkate alınır ve türev alınırsa

$\vec{U}'$ = $cos\phi\ \vec{T}' + sin\phi\ \vec{B}'$,

$\vec{U}'$ = ($cos\phi\kappa$ (s) $-$ $sin\phi\tau$(s))$\vec{N}(s)$

olur ve norm alınırsa

$\|\vec{U}'\| = 0 \Longrightarrow \vec{U} = sbt.$

olduğu görülür. Diğer yandan

$< \vec{\alpha}'(s), \vec{U} > = < \vec{T}(s), \vec{U} >$

$= < \vec{T}(s), cos\phi\vec{T}(s) + sin\phi\vec{B}(s) >$

$= cos\phi = sbt.$

olur ki bu da α nın bir eğilim çizgisi olması demektir.

2.1.5. Teorem

$\alpha : I \longrightarrow E^3$ eğrisinin doğru olması için gerek ve yeter şart $\kappa = 0$ olmasıdır [3].

İspat

$\alpha : I \longrightarrow E^3$ birim hızlı eğrisinin eğriliği

$\kappa(s) = \|\alpha''(s)\|$

dir. Bu durumda

$\kappa(s) = 0 \Leftrightarrow \|\alpha''(s)\| = 0,$

$\Leftrightarrow \alpha''(s) = 0, \Rightarrow \alpha'(s) = b.$

$\alpha(s) = bs + c,\ b, c \in IR.$

2.1.20. Tanım

E^n, n- boyutlu Öklid uzayında $\forall p \in M$ için $\nabla f|_p \neq 0$ olmak üzere M = {$x \in E^n$| $f: U \longrightarrow$ IR, $f(x) = c$, $c \in IR$, f dif.bilir fonk., U açık alt cümle } şeklinde tanımlanan boş olmayan M cümlesine (n− 1) –boyutlu yüzey ((n− 1)- yüzey) veya hiperyüzey denir [3].

2.2. Eğriliklerin Geometrik Anlamları

Eğrilikler, oskülatör hiperdüzlemlerin değişme oranlarını ölçerler. n = 3 özel halinde oskülatör hiperdüzlemler, eğriliklerle daha yakından incelenebilir. Bunun için, eğrinin koordinat fonksiyonları ele alınırsa;

M $\subset E^3$ eğrisi, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\alpha_i \in C^\infty$(I, IR), $1 \leq i \leq 3$,

olmak üzere, (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. Şimdi, α_i, $1 \leq i \leq 3$, fonksiyonlarını Taylor serisine $s_0 \in$ I nın bir komşuluğunda açalım. Özel olarak $s_0 = 0$ alınırsa,

$$\alpha_i(s) \cong \alpha_i(0) + \frac{d\alpha_i}{ds}|_0 . s + \frac{d\alpha_i{}^2}{ds^2}|_0 . \frac{s^2}{2!} + \frac{d\alpha_i{}^3}{ds^3}|_0 . \frac{s^3}{3!} + \dots$$

yani,

$$\alpha(s) = \alpha(0) + s.\, \alpha'(0) + \frac{s^2}{2} . \alpha''(0) + \frac{s^3}{6} . \alpha'''(0) + \dots$$

dır. Diğer taraftan, $\alpha(0)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı $\{T_0, N_0, B_0\}$ ise $s \in I$ yay-parametresi olmak üzere,

$$\begin{cases} \alpha'(0) = T_0 \\ \alpha''(0) = k_1(0) N_0 \\ \alpha'''(0) = -k_1{}^2(0) T_0 + \dfrac{dk_1}{ds} N_0 + k_1(0) k_2(0) B_0 \end{cases}$$

dır. Buna göre,

$$\alpha(s) = \alpha(0) + [\, s - k_1(0)\frac{s^3}{6} + \dots]\, T(0) + [k_1(0)\frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{6}\, k'_1(0) + \dots]\, N(0) + [k_1(0)\, k_2(0)\frac{s^3}{6} + \dots]\, B(0) \qquad (2.7)$$

elde edilir.

Şimdi s_0= 0 noktasının bir ε komşuluğunda eğriyi ele alalım. ε un öyle bir küçük değerini seçelim ki s $\neq$ 0 fakat $s^2 = s^3 = s^4 = \cdots = s^n$=…= 0 olsun. O zaman bu eğriyi $\tilde{\alpha}$(s) ile gösterirsek Eş. 2.7’ den

$\tilde{\alpha}$(s) = α(0) + s T(0)

olur. $\tilde{\alpha}$(s) eğrisi eğrinin en iyi lineer yaklaşımıdır. Bu eğri α(s) eğrisinin s_0= 0 noktasındaki teğet doğrusudur.

s_0= 0 ın öyle bir ε komşuluğunu seçelim ki s $\neq$ 0, $s^2 \neq$ 0 fakat $s^3 = s^4 = \cdots = s^n$=…= 0 olsun. O zaman yeni eğri için,

$\tilde{\alpha}$(s) = α(0) + s T(0) + $k_1(0)\frac{s^2}{2}$ N(0)

olur. Bu eğri ise parametrik ifadesi (s, $k_1(0)\frac{s^2}{2}$) olan bir parabol olup α(0) noktasından geçer. Dolayısıyla $\tilde{\alpha}$(s) eğrisine α(s) nin Kuadratik Yaklaşımı denir. k_1(0) eğriliğinin sayesinde bu parabol tek olarak belli olur. Ayrıca k_1(0) = 0 olması halinde bu eğri bir doğru olur. k_1(0)⟶0 için bu eğri bir doğruya yaklaşır. Şu halde k_1 eğriliği eğrinin s_0 noktasında bir doğrudan (teğet doğrusundan) ne kadar ayrıldığını gösterir.

Eğrinin daha geniş bir yaklaşımı ele alınsın. s_0= 0 ın öyle bir ε komşuluğunu seçelim ki s $\neq$ 0, $s^2 \neq$ 0 ve $s^3 \neq$ 0 fakat $s^4 = \cdots = s^n$=…=0 olsun. O zaman yeni eğri için,

$\tilde{\alpha}$(s) = α(0) + (s$-$ $k_1(0)\frac{s^3}{6}$) T(0) + $k_1(0)\frac{s^2}{2}$ + $k'_1(0)\frac{s^3}{6}$)N(0) + k_1(0) $k_2(0)\frac{s^3}{6}$$B$(0)

biçiminde olur. Bu eğriye α(s) eğrisinin Frenet Yaklaşımı denir. Bu eğri üç boyutlu uzayda α(0) dan geçer.

Yani $k_2(0)$ = 0 için bu eğri α(s) in oskülatör düzleminde yatar, aksi halde bu düzlemden uzaklaşır. Şu halde k_2 burulması eğrinin bir düzlemden ne kadar saptığını ölçer [3].

2.3. Bir Eğrinin Küresel Göstergeleri

2.3.1 Tanım

3-boyutlu Öklid uzayı, E^3 de bir α eğrisi $s \in I$ yay parametresi ile verilsin. α eğrisinin birim teğet vektörü T olmak üzere, $\overrightarrow{PQ} = T$ alındığında, P noktası α eğrisini çizerken, Q noktasının birim küre yüzeyi üzerinde eğriye α eğrisinin birinci küresel göstergesi veya teğetler göstergesi adı verilir.

α eğrisinin teğetler göstergesini (T) ile gösterelim.

(T) nin denklemi,
$\alpha_T = T$
dir ve (T) nin parametresine s_T dersek $s_T \neq$ s olup yay elementi ise
$ds_T = \|T'\|.\, ds$

olacaktır.

Bir α eğrisinin eğriliği, teğetler göstergesinin yay elementinin, esas eğrinin yay elementine oranıdır.

2.3.2. Tanım

3-boyutlu Öklid uzayı, E^3 de bir α eğrisi $s \in I$ yay parametresi ile verilsin. α eğrisinin birim asli normal vektörü N olsun. α eğrisini çizilirken, N vektörünün uç noktaları cümlesinin birim küre yüzeyi üzerinde meydana getirdiği eğriye α eğrisinin ikinci küresel göstergesi veya asli normaller göstergesi adı verilir.

α eğrisinin asli normaller göstergesini (N) ile gösterelim.
(N) nin denklemi,
$\alpha_N = N$
dir ve (N) nin parametresine s_N dersek $s_N \neq$ s olup yay elementi ise

$$ds_N = \|N'\|.\, ds$$

olacaktır.

2.3.4. Tanım

3-boyutlu Öklid uzayı, E^3 de bir α eğrisi $s \in I$ yay parametresi ile verilsin. α eğrisinin bir P noktasındaki binormal vektörü B olmak üzere, $\overrightarrow{PR} = B$ ve komşu iki binormal vektörü arasındaki açı $\Delta\phi$ olmak üzere P noktası α eğrisini çizerken, R noktasının birim küre yüzeyi üzerinde eğriye α eğrisinin üçüncü küresel göstergesi veya binormaller göstergesi adı verilir.

α eğrisinin binormaller göstergesini (B) ile gösterelim.
(B) nin denklemi,

$$\alpha_B = B$$

dir ve (B) nin parametresine s_B dersek $s_B \neq$ s olup yay elementi ise

$$ds_B = \|B'\|.\, ds$$

olacaktır.

Bir α eğrisinin burulması, binormaller göstergesinin yay elementinin, esas eğrinin yay elementine oranıdır.

2.3.4. Tanım

O merkezli sabit bir küre S^2 ve hareketli bir küre S^{*2} olsun. T, N, B üç-ayaklısının hareketinden bahsedecek olduğumuzdan {0; T, N, B} sistemi S^{*2} küresini temsil etsin. S^2 sabit küresini de {0; $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$, $\vec{E}_3$} ortonormal koordinat sistemi olarak alabiliriz. Bu durumda, S^{*2} nin S^2 ye göre bir parametreli küresel hareketi, α eğrisinin verilmesi ile belli olur. $S^{*2}/\ S^2$ hareketinin her t anında, S^{*2} de sabit bir P*, S^2 de sabit bir P noktası vardır, öyleki, bu noktalara, sırası ile, hareketli pol ve sabit pol noktaları denir.

2.3.5. Tanım

α eğrisinin çizilebilmesi için gerekli olan $S^{*2}/\ S^2$ hareketi boyunca P* ve P noktalarının ait oldukları küreler üzerindeki geometrik yerlerine, sırası ile, hareketli pol eğrisi ve sabit pol eğrisi adı verilir. Bu eğrileri (P*) ve (P) ile göstermek adettir. $S^{*2}/\ S^2$ hareketinin kapalı olması halinde (P*) ve (P) pol eğrileri de kapalı olurlar. (P*) ve (P) eğrileri arasında şu münasebet mevcuttur:

(i) (P*) ve (P) eğrileri her t anında birbirlerine teğettirler.
(ii) (P*) ve (P) eğrilerinin yay uzunlukları birbirlerine eşittir.

Bu iki bağıntı şu şekilde de ifade edilebilir:

(P*) hareketli pol eğrisi (P) sabit pol eğrisi üzerinde kaymaksızın yuvarlanır [3].

2.4. Jeodezik Sprayların ve Tabii Lift Eğrilerinin Bazı Karakterizasyonları

2.4.1. Tanım

E^n de bir hiperyüzey M ve α: $I \to M$ bir eğri olsun. X, M üzerinde bir tanjant vektör alanı olmak üzere eğer her $t \in I$ için,

$$\frac{d}{dt}(\alpha(t)) = X(\alpha(t))$$

ise α ya X in bir integral eğrisi denir. M nin p noktasındaki tanjant uzayı T_pM olmak üzere

$$TM = \bigcup T_PM,\ \ p \in M$$

dir.

2.4.2. Tanım

α: I →M bir eğri olmak üzere

$\overline{\alpha}$(t) = (α(t),$\dot{\alpha}$(t)) = ($\dot{\alpha}$(t))$|_{\alpha(t)}$

şeklinde tanımlanan $\overline{\alpha}: I \rightarrow TM$ eğrisine TM üzerinde α nın tabii lifti denir. Buna göre

$$\frac{d\overline{\alpha}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{\alpha}(t))|_{\alpha(t)} = D_{\alpha(\dot{t})}\dot{\alpha}(t)$$

dir.

2.4.3. Tanım

M yüzeyinin birim normal vektör alanı N olmak üzere $\forall X \in \chi(M)$ için

$$S(X) = D_X N$$

şeklinde tanımlı S dönüşümüne M üzerinde Şekil Operatörü (Weingarten Dönüşümü) denir.

2.4.4. Tanım

$$\overline{D}_X \mathrm{Y} = D_X \mathrm{Y} + < S(X), Y > N$$

şeklinde tanımlanan denkleme de M üzerinde Gauss Denklemi denir. Burada; $\overline{D}$ Gauss anlamında kovaryant türev operatörü olup, bu operatör M üzerinde bir Riemann konneksiyonudur.

$\alpha : I \longrightarrow M \subset E^3$ eğrisinin birim teğet vektörü T olsun.

$D_T T = 0$

ise α eğrisine E^3 *de* bir jeodezik eğri,

$\overline{D}_T T = 0$

ise α eğrisine M üzerinde bir jeodezik eğri denir [3].

2.4.5. Tanım

$v \in TM$ diferensiyellenebilir vektör alanında $X \in \chi(TM)$ olmak üzere

$X(v) = - < v, S(v) > N|_p$

şeklinde tanımlanan *X* vektör alanına *TM* manifoldu üzerinde jeodezik spray denir.

2.4.1. Teorem

Bir α eğrisinin $\bar{\alpha}$ tabii liftinin *X* jeodezik sprayının bir integral eğrisi olması için gerek ve yeter şart α nın *M* üzerinde bir jeodezik olmasıdır [1].

İspat

Kabul edelim ki α eğrisinin $\bar{\alpha}$ tabii lifti *X* jeodezik sprayının bir integral eğrisi olsun. Bu durumda,

$\frac{d}{dt}(\bar{\alpha}(t))|_{\alpha(t)} = X(\bar{\alpha}(t))$

dir. *X, TM* üzerinde bir jeodezik spray olduğundan

$X(\bar{\alpha}(t)) = -< \bar{\alpha}(t), S(\bar{\alpha}(t)) > N|_{\alpha(t)}$

dir. Tabii lift tanımından

$\frac{d}{dt}(\dot{\alpha}(t))|_{\alpha(t)} = -< \dot{\alpha}(t))_{\alpha(t)}, S(\dot{\alpha}(t))_{\alpha(t)} > N|_{\alpha(t)}$

bulunur. Son eşitlik her $\alpha(t)$ için doğru olduğundan

$D_{\alpha\dot{(t)}}\dot{\alpha}(t) = -< \dot{\alpha}(t), S(\dot{\alpha}(t)) > N$

yazılır. Yani

$$\overline{D}_{\dot{\alpha(t)}}\dot{\alpha}(\mathrm{t}) = D_{\dot{\alpha(t)}}\dot{\alpha}(\mathrm{t}) + < \dot{\alpha}(\mathrm{t}), \mathrm{S}(\dot{\alpha}(\mathrm{t}))> N$$

dir. Buradan da

$$\overline{D}_{\dot{\alpha(t)}}\dot{\alpha}(\mathrm{t}) = 0$$

bulunur. Tersine, kabul edelim ki α, M üzerinde bir jeodezik olsun. O halde

$$\overline{D}_{\dot{\alpha(t)}}\dot{\alpha}(\mathrm{t}) = 0$$

dır. Gauss denkleminden,

$$D_{\dot{\alpha(t)}}\dot{\alpha}(t)|_{\alpha(t)} + < \dot{\alpha}(\mathrm{t}), \mathrm{S}(\dot{\alpha}(\mathrm{t}))> N|_{\alpha(t)} = 0$$

dır. X bir jeodezik spray olduğu için,

$$\frac{d}{dt}(\dot{\alpha}(t))|_{\alpha(t)} - X(\dot{\alpha}(t))|_{\alpha(t)} = 0,$$
$$\frac{d}{dt}(\dot{\alpha}(t))|_{\alpha(t)} = X(\dot{\alpha}(t))|_{\alpha(t)}$$

yazılır. Tabii lift tanımından

$$\frac{d}{dt}(\bar{\alpha}(\mathrm{t})) = \mathrm{X}(\bar{\alpha}(\mathrm{t}))$$

bulunur ki bu da ispatı tamamlar.

2.4.1. Bir α eğrisinin tanjant vektörünün küresel göstergesinin tabii lifti

Bir α eğrisinin α_T teğetler göstergesinin $\bar{\alpha}_T$ tabii liftinin jeodezik sprayın bir integral eğrisi olması durumunda

$\overline{D}_{\dot{\alpha}_T}\dot{\alpha}_T = 0$

dır. Gauss denkleminden

$D_{\dot{\alpha}_T}\dot{\alpha}_T + < \dot{\alpha}_T\,, S(\dot{\alpha}_T) > T(s) = 0$

yazılır. Birim küre için S = I_2 olduğundan,

$D_{\dot{\alpha}_T}\dot{\alpha}_T + \|\dot{\alpha}_T\|^2 T(s) = 0,$

$D_{\dot{\alpha}_T} k_1 N + {k_1}^2 T(s) = 0,$

$\frac{d}{ds_T}(k_1 N) + {k_1}^2 T(s) = 0$

bulunur. Türev alınırsa,

$({k_1}^2 - k_1)T + \frac{\dot{k}_1}{k_1} N - k_2 B = 0$

elde edilir. *T*, *N*, *B* lineer bağımsız olduklarından,

${k_1}^2 - k_1 = 0, \ (k_1 = 0{,}1)$

$\frac{\dot{k}_1}{k_1} = 0, \qquad (k_1 \neq 0)$

$k_2 = 0.$

O halde k_1=1 ve k_2= 0 dır. Bu da α eğrisinin birim çember olduğunu gösterir.

2.4.1. Sonuç

Bir α eğrisinin birim çember olması için gerek ve yeter şart α_T nin $\bar{\alpha}_T$ tabii liftinin, T(S^2) tanjant demeti üzerindeki bir jeodezik sprayın bir integral eğrisi olmasıdır [1].

2.4.2. Bir α eğrisinin asli normal vektörünün küresel göstergesinin tabii lifti

Bir α eğrisinin α_N asli normaller göstergesinin $\bar{\alpha}_N$ tabii liftinin jeodezik sprayın bir integral eğrisi olması durumunda

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}_N}\dot{\alpha}_N = 0$$

dır. Gauss denkleminden

$$D_{\dot{\alpha}_N}\dot{\alpha}_N + < \dot{\alpha}_N \,,\, S(\dot{\alpha}_N) > N(s) = 0$$

yazılır. Birim küre için $S = I_2$ olduğundan,

$$D_{\dot{\alpha}_N}\dot{\alpha}_N + \|\dot{\alpha}_N\|^2 N(s) = 0,$$
$$D_{\dot{\alpha}_N}(-k_1 T + k_2 B) + ({k_1}^2 + {k_2}^2)N = 0,$$
$$\frac{d}{ds_N}(-k_1 T + k_2 B) + ({k_1}^2 + {k_2}^2)N = 0$$

bulunur. *w* Darboux vektörü olmak üzere

$$\|w\|^2 = {k_1}^2 + {k_2}^2$$

yazılır. Türev alınırsa,

$$-\dot{k}_1 T + (\|w\|^3 - \|w\|^2)N + \dot{k}_2 B = 0$$

elde edilir. *T, N, B* lineer bağımsız olduklarından,

$$\dot{k}_1 = 0, \qquad (k_1 = sbt.)$$
$$\dot{k}_2 = 0. \qquad (k_2 = sbt.)$$

O halde $k_1 = k_2 = 0$ veya ${k_1}^2 + {k_2}^2 = 1$ dir. Bu da α eğrisi bir dairesel helis olduğunu gösterir.

2.4.2. Sonuç

Bir α eğrisinin bir dairesel helis olması için gerek ve yeter şart α_N nin $\bar{\alpha}_N$ tabii liftinin, T(S^2) tanjant demeti üzerindeki bir jeodezik sprayın bir integral eğrisi olmasıdır [1].

2.4.3. Bir α eğrisinin binormal vektörlerinin küresel göstergesinin tabii lifti

Bir α eğrisinin α_B teğetler göstergesinin $\bar{\alpha}_B$ tabii liftinin jeodezik sprayın bir integral eğrisi olması durumunda

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}_B}\dot{\alpha}_B = 0$$

dır. Gauss denkleminden

$$D_{\dot{\alpha}_B}\dot{\alpha}_B + < \dot{\alpha}_B\ , S(\dot{\alpha}_B)> B(s) = 0$$

yazılır. Birim küre için $S = I_2$ olduğundan,

$$\frac{d}{ds_B}(\dot{\alpha}_B) + \|\dot{\alpha}_B\|^2 B = 0$$

dır. Türev alınırsa,

$$k_1 T + (\frac{\dot{k}_2}{k_2})N + ({k_2}^2 - k_2)B = 0$$

elde edilir. *T, N, B* lineer bağımsız olduklarından,

$$k_1 = 0,$$
$$\frac{\dot{k}_2}{k_2} = 0,$$
$${k_2}^2 - k_2 = 0$$

bulunur. O halde $k_1 = 0$ ve k_2=1 dir. Bu da bu şartları sağlayan bir α eğrisinin olmadığını gösterir.

2.4.3. Sonuç

α_B binormaller göstergesinin $\bar{\alpha}_B$ tabii liftinin $T(S^2)$ tanjant demeti üzerindeki bir jeodezik sprayın bir integral eğrisi olmasını sağlayan bir α eğrisi yoktur [1].

2.4.4. Sabit pol eğrisinin tabii lifti

Bir α eğrisinin α_C sabit pol eğrisinin $\bar{\alpha}_C$ tabii liftinin jeodezik sprayın bir integral eğrisi olması durumunda

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}_C}\dot{\alpha}_C = 0$$

dır. Gauss denkleminden

$$D_{\dot{\alpha}_C}\dot{\alpha}_C + < \dot{\alpha}_C \, , S(\dot{\alpha}_C) > C = 0$$

dır. Birim küre için $S = I_2$ olduğundan,

$$D_{\dot{\alpha}_C}\dot{\alpha}_C + \|\dot{\alpha}_C\|^2 C = 0$$

yazılır. Türev alınırsa,

$$(\ddot{\Phi}\cos\Phi - \dot{\Phi}^2\sin\Phi + \dot{\Phi}^3\sin\Phi)T + (k_1\dot{\Phi}\cos\Phi + k_2\dot{\Phi}\sin\Phi)N + (-\ddot{\Phi}\sin\Phi - \ddot{\Phi}^2\cos\Phi + \ddot{\Phi}^3\cos\Phi)B = 0$$

elde edilir. T, N, B lineer bağımsız olduklarından,

$$\ddot{\Phi}\cos\Phi - \dot{\Phi}^2\sin\Phi + \dot{\Phi}^3\sin\Phi = 0,$$
$$k_1\dot{\Phi}\cos\Phi + k_2\dot{\Phi}\sin\Phi = 0,$$
$$-\ddot{\Phi}\sin\Phi - \ddot{\Phi}^2\cos\Phi + \ddot{\Phi}^3\cos\Phi = 0$$

elde edilir. Buradan $\dot{\Phi} = 0$ veya $k_1 = k_2 = 0$ dır.

$\dot{\Phi} = 0$ olduğunda k_1/k_2 sabittir. Dolayısıyla α bir helistir.

$k_1 = k_2 = 0$ ise α bir doğrudur. Bu durumda çözüm yoktur.

2.4.4. Sonuç

α eğrisinin bir helis olması için gerek ve yeter şart α_C nin $\bar{\alpha}_C$ tabii liftinin, T(S^2) tanjant demeti üzerindeki bir jeodezik sprayın bir integral eğrisi olmasıdır [1].

2.5. Dual Uzay

2.5.1. Tanım

(ID^3,+) abel grubu *ID* dual sayılar halkası üzerinde bir modüldür. Bu modüle ID-Modül denir. Kısaca ID^3 ile de gösterilebilir.

2.5.2. Tanım

ID - Modülde her bir A dual vektörü $\vec{A}=\vec{a}+\varepsilon\vec{a}^*$ ile veya $\overrightarrow{A}=(\vec{a},\vec{a}^*)$ şeklinde belirtilir.

2.5.3. Tanım

Bir $\vec{A}=\vec{a}+\varepsilon\overrightarrow{a^*}$ dual vektörünün normu, $\|\vec{a}\| = \sqrt{|<\vec{a},\vec{a}>|}$ ve $\|\vec{a}\| \neq 0$ olmak üzere

$$\|\vec{A}\| = \|\vec{a}\| + \varepsilon\frac{<\vec{a},\vec{a}*>}{\|\vec{a}\|}$$

ile tanımlanır.

2.5.4. Tanım

$\{\vec{X}=\vec{x}+\varepsilon\,\overrightarrow{x}^* \mid \|\vec{X}\|=(1,0),\ \vec{x},\vec{x}^*\in IE^3\}$ cümlesine *ID* - Modül de birim dual küre denir.

2.5.1. Teorem (*E.Study Dönüşümü*)

ID-Modül de denklemi $\|\vec{A}\| = (1,0)$ olan birim dual kürenin dual noktaları IR^3 deki yönlü doğrulara birebir karşılık gelir [5].

2.5.5. Tanım

$\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon\overrightarrow{a^*}$, $\vec{B} = \vec{b} + \varepsilon\overrightarrow{b^*} \in ID^3$ olmak üzere

f: ID^3x $ID^3 \rightarrow ID^3$

$$(\vec{A}, \vec{B}) \rightarrow f(\vec{A}, \vec{B}) = < \vec{A}, \vec{B} >= < \vec{a} + \varepsilon\overrightarrow{a^*}, \vec{b} + \varepsilon\overrightarrow{b^*} >$$

$$= < \vec{a}, \vec{b} > + \varepsilon[< \overrightarrow{a^*}, \vec{b} > + < \vec{a}, \overrightarrow{b^*} >]$$

çarpımına $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ dual vektörlerinin iç çarpımı (dual iç çarpım) denir.

Bir $\alpha(s)$ eğrisi için $\vec{T}$, $\vec{N}$, $\vec{B}$ dual Frenet vektörleri $\vec{W}$ dual Darboux vektörü κ ve τ dual eğrilik ve dual torsiyon olmak üzere; $\alpha(s)$ eğrisinin teğet, asli normal ve binormal vektörleri;

$\vec{T} = \vec{t} + \varepsilon\vec{t}*$,

$\vec{N} = \vec{n} + \varepsilon\vec{n}*$,

$\vec{B} = \vec{b} + \varepsilon\vec{b}*$

şeklinde tanımlıdır. Ayrıca dual torsiyon ve dual eğrilik,

$\kappa = k_1 + \varepsilon k_1*$,

$\tau = k_2 + \varepsilon k_2*$

şeklindedir. Buradan

$\vec{t}' = k_1\vec{n}$,

$\vec{n}' = -k_1\vec{t} + k_2\vec{b}$,

$\vec{b}' = -k_2\vec{n}$,

$t^{*'} = k_1 n*$,

$n^{*'} = \mathrm{b} - k_1 t* + k_2 b*$,

$b^{*'} = -n - k_2 n*$

yazılır.

3.DUAL UZAYDA JEODEZİK SPRAYLAR ÜZERİNE

3.1. Jeodezik Sprayların ve Tabii Lift Eğrilerinin Bazı Karakterizasyonları

3.1.1. Tanım

Dual uzayda bir hiperyüzey M ve α:$I \rightarrow M$ bir eğri olsun. X, M üzerinde bir tanjant vektör alanı olmak üzere eğer her $t \in I$ için,

$$\frac{d}{dt}(\alpha(t)) = X(\alpha(t))$$

ise α ya X in bir integral eğrisi denir. M nin p noktasındaki tanjant uzayı T_pM olmak üzere

$$TM = \bigcup T_PM, \ \ p \in M$$

dir.

3.1.2. Tanım

α:$I \rightarrow M$ bir eğri olmak üzere

$$\overline{\alpha}(t) = (\alpha(t), \dot{\alpha}(t)) = \dot{\alpha}(t)_{\alpha(t)}$$

şeklinde tanımlanan $\overline{\alpha}$: $I \rightarrow TM$ eğrisine TM üzerinde α nın tabii lifti denir. Buna göre

$$\frac{d\overline{\alpha}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{\alpha}(t))|_{\alpha(t)} = D_{\dot{\alpha}(t)}\dot{\alpha}(t)$$

dir.

3.1.3. Tanım

$v \in TM$ diferensiyellenebilir vektör alanını ve $X \in \chi(TM)$ olmak üzere

$$X(v) = - \langle v, S(v) \rangle N|_p$$

şeklinde tanımlanan X vektör alanına TM manifoldu üzerinde jeodezik spray denir.

3.1.1. Teorem

α birim dual küre üzerinde bir eğri olsun. Bir α eğrisinin $\bar{\alpha}$ tabii liftinin X jeodezik sprayının bir integral eğrisi olması için gerek ve yeter şart α nın M üzerinde bir jeodezik olmasıdır.

İspat

Kabul edelim ki $\alpha(\mathrm{t}) = \alpha_1(\mathrm{t}) + \varepsilon\alpha^*{}_1(\mathrm{t})$ eğrisinin $\bar{\alpha}$ tabii lifti X jeodezik sprayının bir integral eğrisi olsun. Bu durumda,

$$\frac{d}{dt}(\bar{\alpha}(t))|_{\alpha(t)} = X(\bar{\alpha}(\mathrm{t})) = (\alpha_1(\mathrm{t})+\varepsilon\alpha^*{}_1(\mathrm{t}))|_{\alpha(t)}$$

dir. X, birim dual küre üzerinde bir jeodezik spray olduğundan

$$X(\bar{\alpha}(t))=-< \bar{\alpha}(t),S(\bar{\alpha}(t))> N|_{\alpha(t)}$$

dir. Tabii lift tanımından

$$\frac{d}{dt}(\dot{\alpha}(t))|_{\alpha(t)}=-< \dot{\alpha}(t))_{\alpha(t)}, S(\dot{\alpha}(t))_{\alpha(t)} > N|_{\alpha(t)}$$

bulunur. Son eşitlik her $\alpha(\mathrm{t})$ için doğru olduğundan

$$D_{\alpha\dot(t)}\dot{\alpha}(\mathrm{t}) = -< \dot{\alpha}(\mathrm{t}), S(\dot{\alpha}(\mathrm{t}))>N$$

yazılır. Yani

$$\bar{D}_{\alpha\dot(t)}\dot{\alpha}(\mathrm{t}) = D_{\alpha\dot(t)}\dot{\alpha}(\mathrm{t}) +< \alpha(\dot{t}),\mathrm{S}(\dot{\alpha}(\mathrm{t}))>N$$

dir. Buradan da

$$\bar{D}_{\alpha\dot(t)}\dot{\alpha}(\mathrm{t}) = 0$$

bulunur. Tersine, kabul edelim ki α, birim dual küre üzerinde bir geodesic olsun. O halde

$\overline{D}_{\alpha\dot(t)}\dot{\alpha}$(t) = 0

dır. Gauss denkleminden,

$D_{\alpha\dot(t)}\dot{\alpha}(t)|_{\alpha(t)}$+$<$ $\dot{\alpha}$(t),S($\dot{\alpha}$(t))$>$ $N|_{\alpha(t)}$=0

dır.

$\frac{d}{dt}(\dot{\alpha}(t))|_{\alpha(t)}$ $-X(\dot{\alpha}(t))|_{\alpha(t)}$= 0,
$\frac{d}{dt}(\dot{\alpha}(t))|_{\alpha(t)}$ = $X(\dot{\alpha}(t))|_{\alpha(t)}$

yazılır. Tabii lift tanımından

$\frac{d}{dt}(\overline{\alpha}$(t)) = X($\overline{\alpha}$(t))

bulunur ki bu da ispatı tamamlar.

3.1.1. Dual uzayda bir α eğrisinin tanjant vektörünün küresel göstergesinin tabii lifti

α, birim dual küre üzerinde bir eğri olsun. Bir α eğrisinin α_T teğetler göstergesinin $\overline{\alpha}_T$ tabii liftinin jeodezik sprayın bir integral eğrisi olması durumunda

$\overline{D}_{\dot{\alpha}_T}\dot{\alpha}_T$ = 0

dır. Gauss denkleminden

$D_{\dot{\alpha}_T}\dot{\alpha}_T$+ $<$ $\dot{\alpha}_T$,S($\dot{\alpha}_T$)$>$ T(s) = 0

yazılır. Birim küre için S = I_2 olduğundan,

$D_{\dot{\alpha}_T}\dot{\alpha}_T + \|\dot{\alpha}_T\|^2 T(s) = 0,$

$D_{\dot{\alpha}_T}((k_1+\varepsilon k_1{*})(n+\varepsilon n{*})) + \|\dot{\alpha}_T\|^2(t+\varepsilon t{*}) = 0,$

$\frac{d}{ds_T}((k_1+\varepsilon k_1{*})(n+\varepsilon n{*})) + \|\dot{\alpha}_T\|^2(t+\varepsilon t{*}) = 0$

yazılır. Bazı cebirsel hesaplamalardan sonra,

$$t(-k_1+k^2{}_1 - \varepsilon k_1{*}) + n(\frac{\dot{k}_1}{k_1}+\varepsilon\frac{\dot{k}_1{*}}{k_1}) + b(k_2 + \varepsilon(\frac{k_1{*}}{k_1}k_2 + 1)) + \varepsilon(\frac{\dot{k}_1}{k_1}n{*} + t{*}(-k_1+k^2{}_1) + k_2 b{*}) = 0$$

bulunur. *T*, *N*, *B* lineer bağımsız olduklarından,

$-k_1+k^2{}_1 - \varepsilon k_1{*} = 0,$

$\frac{\dot{k}_1}{k_1}+\varepsilon\frac{\dot{k}_1{*}}{k_1} = 0,$

$k_2 + \varepsilon(\frac{k_1{*}}{k_1}k_2 + 1) = 0,$

$\frac{\dot{k}_1}{k_1} = 0,$

$-k_1+k^2{}_1 = 0,$

$k_2 = 0.$

O halde $k_2 = 0$ ve $k_1 = 1$ dir. Dual uzayda bu şartları sağlayan bir α eğrisi yoktur.

3.1.1. Sonuç

Dual uzayda α_T teğetler göstergesinin $\bar{\alpha}_T$ tabii liftinin T(S^2) tanjant demeti üzerindeki bir jeodezik sprayın bir integral eğrisi olmasını sağlayan bir α eğrisi yoktur.

3.1.2. Dual uzayda bir α eğrisinin asli normal vektörünün küresel göstergesinin tabii lifti

α, birim dual küre üzerinde bir eğri olsun. Bir α eğrisinin α_N asli normaller göstergesinin $\bar{\alpha}_N$ tabii liftinin jeodezik sprayın bir integral eğrisi olması durumunda

$\bar{D}_{\dot{\alpha}_N}\dot{\alpha}_N = 0$

dır. Gauss denkleminden

$D_{\dot{\alpha}_N}\dot{\alpha_N} + < \dot{\alpha}_N, \mathrm{S}(\dot{\alpha}_N) > N(\mathrm{s}) = 0$

yazılır. Birim küre için $S = I_2$ olduğundan,

$D_{\dot{\alpha}_N}\dot{\alpha_N} + \|\dot{\alpha}_N\|^2 N(\mathrm{s}) = 0,$

$D_{\dot{\alpha}_N}(-(k_1+\varepsilon k_1{*})(\mathrm{t}+\varepsilon \mathrm{t}{*}) + (k_2+\varepsilon k_2{*})(\mathrm{b}+\varepsilon \mathrm{b}{*})) + \|\dot{\alpha}_N\|^2(\mathrm{n}+\varepsilon \mathrm{n}{*}) = 0,$

$\frac{d}{d_{s_N}}(-(k_1+\varepsilon k_1{*})(\mathrm{t}+\varepsilon \mathrm{t}{*}) + (k_2+\varepsilon k_2{*})(\mathrm{b}+\varepsilon \mathrm{b}{*})) + \|\dot{\alpha}_N\|^2(\mathrm{n}+\varepsilon \mathrm{n}{*}) = 0$

yazılır. Bazı cebirsel hesaplamalardan sonra,

$\mathrm{t}(-\dot{k}_1 - \varepsilon\dot{k}_1{*}) + \mathrm{n}(\|w\|^3 - \|w\|^2 - k_2) + \varepsilon(k_1{*}k_1+k_2{*}k_2)) + \mathrm{b}(\dot{k}_2+\varepsilon\dot{k}_2{*}) + \mathrm{t}{*}(-\varepsilon\dot{k}_1) + \mathrm{n}{*}(-k^2{}_2+\varepsilon(\|w\|^3 - k^2{}_1)) + \dot{k}_2\mathrm{b}{*} = 0$

bulunur. *T*, *N*, *B* lineer bağımsız olduklarından,

$-\dot{k}_1 - \varepsilon\dot{k}_1{*} = 0, \quad (k_1{*} = sbt.)$

$\|w\|^3 - \|w\|^2 - k_2 = 0,$

$k_1{*}k_1+k_2{*}k_2 = 0,$

$\dot{k}_2 + \varepsilon\dot{k}_2{*} = 0, \quad (k_2 = sbt., \ k_2{*} = sbt.)$

$\dot{k}_1 = 0,$

$k^2{}_2 = 0,$

$\|w\|^3 - k^2{}_1 = 0,$

$\dot{k}_2 = 0 \qquad (k_2 = sbt.)$

bulunur. O halde $k_2 = k_1 = 0$ veya $k^2{}_1+k^2{}_2 = 1$dir. Bu da α eğrisinin birim dual küre üzerinde bir dairesel helis olduğunu gösterir.

3.1.2. Sonuç

Dual uzayda α eğrisinin birim dual küre üzerinde bir dairesel helis olması için gerek ve yeter şart α_N nin $\bar{\alpha}_N$ tabii lifti, T(S^2) tanjant demeti üzerindeki bir jeodezik sprayın bir integral eğrisi olmasıdır.

3.1.3. Dual uzayda bir α eğrisinin binormal vektörünün küresel göstergesinin tabii lifti

α, birim dual küre üzerinde bir eğri olsun. Bir α eğrisinin α_B binormaller göstergesinin $\bar{\alpha}_B$ tabii liftinin jeodezik sprayın bir integral eğrisi olması durumunda

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}_B}\dot{\alpha}_B = 0$$

dır. Gauss denkleminden

$$D_{\dot{\alpha}_B}\dot{\alpha_B} + < \dot{\alpha}_B, S(\dot{\alpha}_B) > B(s) = 0$$

yazılır. Birim küre için $S = I_2$ olduğundan,

$$D_{\dot{\alpha}_B}\dot{\alpha_B} + \|\dot{\alpha}_B\|^2 B(s) = 0,$$
$$D_{\dot{\alpha}_B}(-(k_2+\varepsilon k_2{}^*)(\mathrm{n}+\varepsilon \mathrm{n}^*)+{k_2}^2(\mathrm{b}+\varepsilon \mathrm{b}^*)) = 0,$$
$$\frac{d}{d_{s_B}}(-k_2\mathrm{n}-\varepsilon(k_2\mathrm{n}^*+k_2{}^*\mathrm{n})) + {k_2}^2(\mathrm{b}+\varepsilon \mathrm{b}^*) = 0$$

yazılır. Bazı cebirsel hesaplamalardan sonra,

$$\mathrm{t}\left(k_1 - \varepsilon\frac{k_1 k_2{}^*}{k_2}\right) + \mathrm{n}\left(-\frac{\dot{k}_2}{k_2} - \varepsilon\dot{k}_2{}^*\right) + \mathrm{b}\left({k_2}^2 - k_2+\varepsilon(k_2{}^*-1)\right) + \mathrm{t}^*(k_1\varepsilon) + \mathrm{n}^*\left(-\frac{\varepsilon\dot{k}_2}{k_2}\right) + \mathrm{b}^*\varepsilon({k_2}^2 - k_2) = 0$$

bulunur. *T*, *N*, *B* lineer bağımsız olduklarından,

$$k_1 - \varepsilon\frac{k_1 k_2{}^*}{k_2} = 0,$$

$-\frac{\dot{k}_2}{k_2} - \varepsilon\dot{k}_2{}^* = 0,$

$k_2{}^2 - k_2 + \varepsilon(k_2{}^* - 1) = 0,$

$k_1 = 0,$

$\frac{\varepsilon\dot{k}_2}{k_2} = 0$

bulunur. O halde $k_1 = 0$ ve k_2=1 bulunur. Bu şartları sağlayan α eğrisinin varlığından söz edilemez.

3.1.3. Sonuç

Dual uzayda α_B binormaller göstergesinin $\bar{\alpha}_B$ tabii liftinin T(S^2) tanjant demeti üzerindeki bir jeodezik sprayın integral eğrisi olmasını sağlayan bir α eğrisinin var olduğu söylenemez.

3.1.4. Dual uzayda sabit pol eğrisinin küresel göstergesinin tabii lifti

α, birim dual küre üzerinde bir eğri olsun. Bir α eğrisinin $\alpha_C$sabit pol eğrisinin $\bar{\alpha}_C$ tabii liftinin jeodezik sprayın bir integral eğrisi olması durumunda

$\bar{D}_{\dot{\alpha}_C}\dot{\alpha}_C = 0$

dır. Gauss denkleminden

$D_{\dot{\alpha}_C}\dot{\alpha}_C + \langle \dot{\alpha}_C, S(\dot{\alpha}_C)\rangle\, C(s) = 0$

yazılır. Birim küre için $S = I_2$ olduğundan,

$\frac{d}{ds_C}(\dot{\alpha}_C) + \|\dot{\alpha}_C\|^2 C = 0$

yazılır. Burada $C = \sin(\phi+\varepsilon\phi^*)T + \cos(\phi+\varepsilon\phi^*)B$ dir. Bazı cebirsel hesaplamalardan sonra,

T ($-$sin(ϕ+εϕ*)(ϕ $+$ εϕ $*)^2$ +($\ddot{\phi}$+$\varepsilon\ddot{\phi}$*)cos(ϕ+εϕ*) + sin(ϕ+εϕ*)(ϕ $+$ εϕ $*)^3$) +
N(k_1($\dot{\phi}$+$\varepsilon\dot{\phi}$*)cos(ϕ+εϕ*) + k_2($\dot{\phi}$+$\varepsilon\dot{\phi}$*)sin(ϕ+εϕ*)) +
B($-$cos(ϕ+εϕ*)($\dot{\phi}$ $+$ $\varepsilon\dot{\phi}$ $*)^2$ $-$sin(ϕ+εϕ*)($\ddot{\phi}$+$\varepsilon\ddot{\phi}$*) + ($\dot{\phi}$ $+$ $\varepsilon\dot{\phi}$ $*)^3$cos($\dot{\phi}$+$\varepsilon\dot{\phi}$*)) = 0

bulunur. *T*, *N*, *B* lineer bağımsız olduklarından, $\dot{\phi}$+$\varepsilon\dot{\phi}$*=0 veya k_1=k_2=0. $\dot{\phi}$+$\varepsilon\dot{\phi}$* = 0 olduğundan $\frac{k_1}{k_2}$ sabittir.

3.1.4. Sonuç

α eğrisi bir dual helis olması için gerek ve yeter şart α_C nin $\bar{\alpha}_C$ tabii lifti T(S^2) tanjant demeti üzerindeki bir jeodezik sprayın integral eğrisi olmasıdır.

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde ilk olarak Öklid uzayında bazı tanımlar verilmiş ve bazı teoremler ispatlarıyla detaylı olarak açıklanmıştır. J.A.Thorpe tarafından 3-boyutlu Öklid uzayında verilen "Bir α eğrisinin $\bar{\alpha}$ tabii liftinin X jeodezik sprayının bir integral eğrisi olması için gerek ve yeter şart α nın M üzerinde bir jeodezik olmasıdır." teoreminin Öklid uzayında Frenet vektörlerine ve sabit pol eğrisine uygulamalarından elde edilen sonuçlar verildi. Bir eğrinin teğetler, aslinormaller ve binormallerinin küresel göstergeleri ve sabit pol eğrisine ait tabii lift eğrileri üzerinde duruldu. Bundan başka, bu lift eğrilerinin $T(S^2)$ tanjant demeti üzerindeki jeodezik sprayların birer integral eğrisi olması için esas eğriye ait bazı neticeler verildi. Son bölümde ise Dual uzayda bir α eğrisinin $\bar{\alpha}$ tabii lifti ve jeodezik spray kavramları tanımlandı. Daha sonra J.A.Thorpe tarafından verilen " Bir α eğrisinin $\bar{\alpha}$ tabii liftinin X jeodezik sprayının bir integral eğrisi olabilmesi için gerek ve yeter şart α nın M üzerinde bir jeodezik olmasıdır" teoremi Dual uzayda ispatlandı ve bir eğrinin teğetler, asli normaller, binormallerinin küresel göstergelerine ve sabit pol eğrisine uygulamaları yapıldı. Bundan başka, Dual uzayda bu lift eğrilerinin $T(S^2)$ tanjant demeti üzerindeki jeodezik sprayların birer integral eğrisi olması için esas eğrinin varlığına ve karakterine ait bazı neticeler elde edildi. Yukarıda verilen teoremin dual lorentz uzayında ifade ve ispatı verilebilir ve uygulaması bu uzayda yeniden yapılabilir.

KAYNAKLAR

1. Çalışkan, M., Sivridağ, A. İ. ve Hacısalihoğlu, H. H. (1980). Some Characterizations For The Natural Lift Curves and The Geodesic Sprays, ***Ankara Üniv. Fen Fak. Communications 33***, 235-242.

2. Fenchel, W. (1951). *On The Differential Geometry of Closed Spaces Curves*, ***Amer. Math. Soc. 57***.

3. Hacısalihoğlu, H. H. (1983). *Diferensiyel Geometri*, ***İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları,*** Mat., 7, Malatya.

4. Hacısalihoğlu, H. H. (1983). *Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi*, ***Gazi Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi 2***.

5. Şenyurt,S. ve Gür. S. (2012).Timelike-Spacelike In Involute-Evolute Curve Couple On Dual Lorentzian Space, ***Journal of Mathematical and Computational Science*** 2(6).

6. Thorpe, J. A. (1979). *Elemantary Topics In Differential Geometry*, ***Springer-Verlag***, New York, Heidelbe-g-Berlin.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı	: KARACA, Emel
Uyruğu	: T.C.
Doğum tarihi ve yeri	: 12.10.1989, Muğla
Medeni hali	: Bekâr
Telefon	: 0 (506) 411 64 95
e-mail	: emelkkaraca@gmail.com

Eğitim

Derece	Okul/ Program	Mezuniyet tarihi
Lisans	Gazi Üniversitesi/ Matematik Bölümü	2011
Lise	Muğla Turgut Reis Lisesi	2007

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar

Karaca, E.,Çalışkan, M. (2014). Some Characterizations For Geodesic Sprays In Dual Space *International Journal of Engineering and Applied Sciences* 4(10) 59-63.

Karaca, E., Çalışkan, M. ve Aydın, S. (2014). Some Characterizations For The Existince Of Curves In Dual Space D^4 *International Journal of Engineering and Applied sciences* 01(05) 17-19.

Katıldığı bilimsel toplantılar

X.Geometri Sempozyumu- Balıkkesir Üniversitesi (Bildirisiz)

8.Ankara Matematik Günleri- Çankaya üniversitesi (Bildirisiz)

XI. Geometri Sempozyumu- Ordu Üniversitesi (Bildirili)

13. Matematik Sempozyumu- Karabük Üniversitesi (Bildirili)

9. Ankara Matematik Günleri- Atılım Üniversitesi (Bildirisiz)

Hobiler

Kitap okuma, sinemaya gitme, voleybol

GAZİ GELECEKTİR...