

LİNEER OLMAYAN BAZI KİSMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL
DENKLEMLERİNE SONLU ELEMANLAR
YÖNTEMLERİNİN UYGULANMASI

Tuğba BOSTANCI

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Ocak – 2015

LİNEER OLMAYAN BAZI KİSMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİNE SONLU
ELEMENLAR YÖNTEMLERİNİN UYGULANMASI

Tuğba BOSTANCI

Dumlupınar Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Öğretim ve Sınav Yönetmeliği Uyarınca
Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır.

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Ahmet BOZ

Ocak - 2015

KABUL VE ONAY SAYFASI

Tuğba BOSTANCI'nın YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı LİNEER OLMAYAN BAZI KISMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİNE SONLU ELEMANLAR YÖNTEMLERİNİN UYGULANMASI başlıklı bu çalışma, jürimizce Dumlupınar Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

23/01/2015

Üye : Yrd. Doç. Dr. Ahmet BOZ

Üye : Doç. Dr. Ali Serdar NAZLIPINAR

Üye : Yrd. Doç. Dr. Hasan BİRCAN

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun/...../2015 gün ve sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Hasan GÖÇMEZ
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

LİNEER OLMAYAN BAZI KISMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİNE SONLU ELEMANLAR YÖNTEMLERİNİN UYGULANMASI

Tuğba BOSTANCI

Matematik Bölümü, Yüksek Lisans Tezi, 2015

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Ahmet BOZ

ÖZET

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde çalışma boyunca kullanılacak Burger ve RLW denklemleri ile ilgili temel bilgiler verilmiştir. Daha sonra bu denklemlerin çözümleri için kullanılacak olan çözüm yöntemleri tanıtılmıştır.

İkinci bölümde Burger Denkleminin nümerik çözümleri, Geometrik Graded mesh kullanılarak kübik B-spline kolokeyşin ve kuadratik B-spline Galerkin metodları yardımıyla elde edilecektir. Sonlu eleman metodları, bu mesh üzerinde, sırasıyla Galerkin ve kolokeyşin metodlarında kuadratik ve kübik B-spline yaklaşım fonksiyonları yardımıyla uygulanır.

Üçüncü bölümde RLW (regularized long wave) denklemi kuadratik B-spline sonlu elemanlar kullanılarak Petrov – Galerkin yöntemi ile çözülmüştür. Solitary dalga hareketi algoritma özelliklerini değerlendirmek için çalıştırılır.

Dördüncü bölümde tekil perturbe etme problemlerinin sonlu eleman çözümleri yapılacaktır. Çözüm bölgesi üzerinde geometriksel graded mesh alınarak kuadratik ve kübik B-spline baz fonksiyonları için kolokeyşin metodu uygulanmıştır.

Beşinci bölümde Burger denkleminin nümerik çözümleri için Kuadratik B-spline Kolokeysin ve Kübik B-spline kolokeyşin metodu uygulanacaktır. Her iki algoritmanın sonuçları bazı test problemleri ile karşılaştırılır.

Anahtar Kelimeler: Graded mesh, Hidrodinamik, Kolokeyşin, Petrov-Galerkin, RLW denklemi, Sayısal Analiz, Siberetik, Spline, Sonlu elemanlar.

APPLICATION OF FINITE ELEMENT METHODS FOR SOME NONLINEAR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

Tuğba BOSTANCI

Mathematics Department, M.S.Thesis, 2015

Thesis Supervisor: Assist. Prof. Dr Ahmet BOZ

SUMMARY

The thesis is consists of five sections.

In the first section, the basic information about Burger and Rlw equations which will be used during the work is given. Then, the solution techniques which will be used for solving the equations are introduced.

In the second section, Burgers' equation is obtained using the methods of cubic B-spline collocation and quadratic B-spline Galerkin. The finite element methods are constructed within the quadratic and cubic B-splines as an approximate function, respectively, over this mesh.

In the third section, the Rlw equation is solved by a Petrov-Galerkin method using quadratic B-spline finite elements. The motion of solitary waves is studied to assess the properties of the algorithm.

In the fourth section, The solutions of single perturbation problems will be done. Collocation method is applied with quadratic and cubic B-spline base function over the geometrically graded mesh of the solution domain.

In the fifth section, Quadratic B-spline collocation and Cubic B-spline collocation methods will be applied to find the numeric solutions of Burger equation. The results of both schemes are compared with some test problems.

Keywords: Cybernetics, Collocation, Finite elements, Graded mesh, Hydrodynamics, Numerical analysis, Petrov-Galerkin, RLW equation, Spline.

TEŞEKKÜR

Tezimi hazırlamamda yardımcı olan danışmanım sayın Yrd. Doç. Dr. Ahmet BOZ hocama ve bu tezi hazırlarken bana karşı sevgi ve sabırlarını esirgemeyen sevgili aileme çok teşekkür ederim.

Tuğba BOSTANCI

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET	iv
SUMMARY	v
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	ix
ÇİZELGELER DİZİNİ	x
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	xi
1. GİRİŞ	1
1.1. Burger Denklemi.....	1
1.2. RLW Denklemi	2
1.3. Tekil Perturbe Etme Problemi	3
1.4. B- Spline Kolokeyşin Metodu.....	3
1.5. B- Spline Galerkin Metodu	4
2. GEOMETRİKSEL GRADED MESH ÜZERİNDE BURGER DENKLEMİNİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ.....	7
2.1. Giriş.....	7
2.2. B-Spline Metodları.....	7
2.2.1. Graded kuadratik B- spline galerkin metodu (QBG)	8
2.2.2. Graded Kübik B- spline Kolokeyşin metodu (GCBC)	11
2.3. Nümerik Örnekler	14
2.3.1. Şok-dalga çözümü	14
3. DÜZENLENMİŞ UZUN DALGA (RLW) DENKLEMİNİN PETROV – GALERKİN METODU İLE NÜMERİK ÇÖZÜMÜ	20
3.1. Giriş.....	20
3.2. B- Spline Metodlar	21
3.3. Nümerik Örnekler	24
3.3.1. Dalga oluşumu.....	27
4. TEKİL PERTURBE ETME PROBLEMLERİNİN SONLU ELEMENLAR ÇÖZÜMLERİ	29
4.1. Giriş.....	29
4.2. B- Spline Metodları.....	29
4.2.1. Kuadratik B- spline kolokeyşin metodu (QM).....	30

İÇİNDEKİLER (devam)

Sayfa

4.2.2. Kübik B- spline kolokeyşin metodu (CM)	32
4.3. Nümerik Örnekler	34
5. BURGER DENKLEMİNİN B- SPLINE KOLOKEYŞİN METODLARI İLE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ	39
5.1. Giriş.....	39
5.2. B –Spline Metodları	39
5.2.1. Kuadratik B- spline kolokeyşin metodu (QBCM).....	39
5.2.2. Kübik B- spline kolokeyşin metodu (CBCM).....	42
5.2. Nümerik Örnekler Ve Sonuçları.....	44
6. SONUÇ VE ÖNERİLER	51
KAYNAKLAR DİZİNİ.....	52

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Sekil</u>	<u>Sayfa</u>
2.1. $v=0.005$, $N=200$, $\Delta t=0.01$	15
2.2. $v=0.005$, $N=200$, $\Delta t = 0.01$	16
2.3. $v=0.005$, $N=200$, $t=2.5$	16
2.4. $v=0.005$, $N=200$, $t=3.25$	17
2.5. $v=0.0005$, $N=200$, $\Delta t=0.01$	17
2.6. $v=0.0005$, $N=200$, $t=1.7$	18
2.7. $v=0.0005$, $N=200$, $t=2.5$	19
2.8. $v=0.0005$, $N=200$, $t=3.25$	19
3.1. $t = 0$ ve $t = 20$ zamanlarında Solitary dalga'nın görünümü.	26
3.2. $t = 20$ zamanında dalga görünümünde hatanın konumunun bölünmesi.	26
4.1. $\varepsilon = 0.01$ için çözüm.....	35
4.2. $\varepsilon = 0.001$ için çözüm.	35
4.3. $\varepsilon = 0.01$ için çözüm.....	37
4.4. $\varepsilon = 0.001$ için çözüm.	37
5.1. $v = 0.005$, $h = 0.005$, $\Delta t = 0.01$	47
5.2. $v = 0.005$, $h = 0.005$, $\Delta t = 0.01$	47
5.3. $v = 0.005$ ve $t = 3.25$ (Nümerik – Analitik) hatalar.	48
5.4. $v = 0.005$ ve $t = 3.25$ (Nümerik – Analitik) hatalar.	48
5.5. $v = 0.0005$, $h = 0.005$, $\Delta t = 0.01$	49
5.6. $v = 0.0005$, $h = 0.005$, $\Delta t = 0.01$	49
5.7. $t = 3.25$, $v = 0.0005$ (Nümerik – Analitik) hatalar.	50
5.8. $t = 3.25$, $v = 0.0005$ (Nümerik – Analitik) hatalar.	50

ÇİZELGELER DİZİNİ

<u>Çizelge</u>	<u>Sayfa</u>
2.1. Farklı zamanlarda $v=0.005$ ve $\Delta t=0.01$ için $L_{\infty} \times 10^3$ hata.....	15
2.2. Farklı zamanlarda $v=0.0005$ ve $\Delta t=0.01$ için $L_{\infty} \times 10^3$ hata.....	18
3.1. Tek solitary dalga derinliği = 0.03, $h=0.125$, $\Delta t=0.1$, $-40 \leq x \leq 60$, $I_1=3.9799497$, $I_2=0.81046249$, $I_3=2.579007$	25
3.2. Sabitler ve tek solitary dalga dalganın hata normları için derinlik = 0.03, $h=0.25$, $\Delta t=0.2$, - $80 \leq x \leq 120$	27
3.3. Tek solitary dalganın hata hormu $t=0$, derinlik=0.03, $-80 \leq x \leq 120$	27
4.1. Örnek 1 için nümerik hatalar.	36
4.2. Örnek 2 için nümerik hatalar.	38
5.1. $h=0.005$, $\Delta t=0.01$ ve $v=0.005$	46
5.2. $h=0.005$, $\Delta t=0.01$ ve $v=0.0005$	46

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler

v	Kinematik Vizkozite Sabiti
$W_j(x)$	Ağırlık Fonksiyonu
$\tilde{u}(x)$	Yaklaşık Çözüm
$L(u)$	u' nin Türevlerini İçeren Genel Bir Diferansiyel Operatörü
$U_\mu[u]$	Uygun Sayıda Sınır Koşulu
Ω	Çözüm Bölgesi
ϕ_j	Ağırlık Fonksiyonu
h_0	Aralık Boyutu
L_2 ve L_∞	Hata Normu
$U(x, t)$	Solitary Dalga Çözümü

Kısaltmalar

Açıklama

GQBG	Graded Kuadratik B-Spline Galerkin Metodu
GCBC	Graded Kübik B-Spline Kolokeyşin Metodu
RLW	Regularized Long Wave (Düzenlenmiş Uzun Dlaga)
QM	Kuadratik B-Spline Kolokeyşin Metodu
CM	Kübik B-Spline Kolokeyşin Metodu
QBCM	Kuadratik B-Spline Kolokeyşin Metodu
CBCM	Kübik B-Spline Kolokeyşin Metodu

1. GİRİŞ

1.1. Burger Denklemi

Burger denklemleri ilk kez Bateman (1915) tarafından tanıtılmış ve ayrıntılı olarak incelenmiştir. Burger denklemi, birkaç fiziksel özellik yüzünden çoğu bilim adamının dikkatini çekmiştir. Burger denkleminin analitik çözümü v sabitinin (Miller, 1966) küçük değerleri için çok yavaş yakınsayan seri çözümleri içerir. Bu konuda çalışanların çoğu Burger denklemlerinin çeşitli başlangıç ve sınır koşullarının nümerik çözümleri ile meşgul olmuşlardır. Burger denkleminin iki farklı analitik çözümü sınırlı keyfi başlangıç ve sınır şartları bulunmuştur. v sabitinin küçük değerleri için Burger denkleminin nümerik metodlarla çözümlerinde zorluklar ortaya çıkar.

Bu küçük değerler akışkan sıvıda şok dalgaları ve dinamik dalgaların yayılmasında dik yönelmelere sebep olur. Pek çok sayısal metod, küçük parametreler ile Burger denklemlerinin nümerik çözümünü elde etmek için üretilmiştir. Spline fonksiyonlar nümerik algoritmalar kurmak için uyarlanmıştır. Kübik spline kolokeyşin yöntemi Burger denklemlerinin nümerik çözümü için geliştirildi (Rubin ve Graves, 1975; Rubin ve Khosla, 1976; Caldwell, 1987). Kapalı sonlu fark algoritmaları ile birlikte bu çalışmada Burger denklemlerinin nümerik çözümünü elde etmede kübik spline fonksiyonları interpolasyonundan yararlanılmıştır. Son dönemlerde B-spline fonksiyonlarında hem Galerkin hem de Burger denklemlerinin nümerik çözümlerinde bulunan sonlu elemanlar üzerinde kolokeyşin metodları oluşturuldu (Davies, 1977). Tüm bu B-spline Sonlu Eleman metodları aynı mesh üzerinde düzenlendi. Bazı değişken mesh ve Geometrik Graded meshler sayısal yöntemlerin çalışmasını güçlendirmek için kullanılır. Örneğin; Bir boyutlu Burger denkleminin şok dalga çözümü için bir kübik B- spline mesh değişken yöntemi geliştirilmiştir. Bölgesel ayrıklaştırma sınırlardaki büyük değişiklikler sebebiyle artan zorlukların olduğu sınırların yakınlarındaki ilgili bölgede artırılmış Graded meshin biçiminde yapılmıştır.

Temel olarak bahsedilen Burger denkleminin sürekli çözümlerinin ikisi Bateman (1915) tarafından bu çalışmada ilk kez açığa çıkarıldı. Burger kapsamlı çalışmalar (Burgers, 1948) sayesinde özellikle türbülans için bir matematiksel model olarak da bilinen Burger denklemini içerir. Denklem; ısı iletimi (Cole, 1951), gaz dinamiği (Lighthill, 1956), şok dalgaları (Burgers, 1948), izotropik bir katı elastik dalga boyunca (Pospelov, 1966), sayılar teorisi (Vanderpol, 1951), devam eden stokastik süreçler ve benzeri gibi geniş alanlarda bir model olarak kullanılır. Hopf (1950) ve Cole (1951) keyfi başlangıç koşulları için bağımsız ve analitik olarak çözümlerdir. Bir çok durumda bu çözümler, dinamik dalga şekillerinin yayılımında dik

dalgaların başında karşılığını bulan ν vizkozite sabitlerinin küçük değerleri için çok yavaşça yaklaşabilen sonlu serileri içerir. Navier – Stokes denkleminin nümerik çözümüne yoğunlaşmadan önce Burger denkleminin basit bir modelini incelemek daha makul görünüyor. Bu nedenle Burger denklemi Navier – Stokes denklemi için doğruluk ve stabilite açısından nümerik metodları denemek için model denklemi olarakta kullanılmaktadır. Çok büyük bir vizkoziteye sahip Burger denkleminin nümerik çözümlerinde nümerik güçlüklerle karşılaşmıştır. Burger denkleminin çözümlerini hesaplamak için spline fonksiyonları ile birlikte çeşitli nümerik metodlar oluşturulmuştur. Rubin ve Graves (1975) bir boyutlu uzayda Reynold sayılarında Burger denkleminin nümerik çözümleri için yarı lineerleşme ve kübik spline fonksiyon tekniğini kullanmıştır. Kübik bir spline kolokeyşin işlemi (Pospelov, 1966) Burger denkleminin nümerik çözümü için geliştirilmiştir. Parçalı zamanlı şema ve kübik Spline fonksiyonlarının birleşim kombinasyonu (Jain ve Holla, 1978; Jain ve Lohar, vd., 1979) çalışmalarında Burger denkleminin nümerik çözümlerini elde etmek için örtülü sonlu fark şemalarının kurulumu kullanıldı. Denklem tektip elemanlar üzerinde kübik B- spline interpolasyon fonksiyonları ile kolokeyşin metodları tarafından nümerik olarak çözülür (Ali vd., 1990; Beckett, Mackenzie, 2001; Burger, 1948) çalışmalarında eleman şekil ve test fonksiyonlarının her ikisi ile B- Spline kullanılan Galerkin metoduna dayalı Burger denkleminin sonlu elemanlar çözümü geliştirildi. Deneme fonksiyonları olan kuadratik B-spline' lar kullanılan en küçük kareler formülasyonu (Cole, 1951) de sonlu aralıklar üzerinde verildi. Kısmi Diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri nümerik metodları uygulanabilir yapmak ve doğruluğunu artırmak için parçalanarak bulunmuştur. Parçalı Burger denklemleri için iki algoritma yazılmıştır. Birincisi, Burger denklemi zaman içinde parçalanır ve daha sonra B-spline kolokeyşin metodu uygulanır. Kolokeyşin metodunda deneme fonksiyonları olan kuadratik B-spline' ları kullanabilmek için Burger denkleminde $V = -U_x$ denklemi birinci mertebeden birleştirilmiş bir sistemi verir. İkincisi, birinci mertebeden denklemler içeren bu denklem sistemi konuma göre parçalanır ve kuadratik B-spline kolokeyşin metodu kullanılarak hesaplanabilir. Bazı bilinen başlangıç ve sınır koşulları için nümerik sonuçlar, her iki metod için de gösterilmiştir.

1.2. RLW Denklemi

Rlw denkleminin nümerik çözümü, hem kuadratik hem de kübik B-spline ve bölünmüş teknikler kullanılarak elde edilmiştir. Sonuçta oluşan denklemler için kübik ve kuadratik B-spline kolokeyşin metodları uygulanmıştır. Ayrıca parçalı Rlw denklemi haricinde çözümler kübik B-spline kolokeyşin metodu ile elde edilmiştir. Sonuçlar solitary bir dalganın yayılımı ve

(undular bore) bore oluşumu çalışılarak doğrulanmıştır. Önerilen şekillerin sonuçları ile karşılaştırma yapılmıştır.

1.3. Tekil Perturbe Etme Problemi

Bu problemler kimyasal reaktör teorisi, optimal control, kuantum mekaniği, reaksiyon – difüzyon süreci, (aerodinamik) ve birçok alanda yaygın olarak kullanılmaktadır. Bir çok bilim adamı, yukarıda bahsedilen zorlukların üstesinden gelmek için uğraşmıştır ve bu problem üzerinde çalışmıştır. D. J. Fyfe (1969) eşit-eşit olmayan aralıklar üzerinde kübik spline' lar az avantaj kazandığını gözlemlemiştir. G. Beckett ve J.A. Mackenzie düzensiz grid üzerinde a. mertebeden Galerkin sonlu eleman metodu (Beckett vd., 2001) de verildi.

Denetleyici fonksiyon parametrelerinin uygun seçeneklerinden sonra numerik çözümler elde edildi. Çalıştırılan koordinat W. Liu ve T.Tang (Liv vd., 2001) tekil perturbe etme sınır değer problem için Galerkin- Spektral metodunu geliştirerek uygulamışlardır.

M. K. Kadalbajoo ve K. C. Patidar tarafından gerilmede kullanılan bazı fark algoritmaları (Kadalbajoo vd., 2002) de verildi. Bu metodların 2. mertebeden doğruluğu gösterildi. Son zamanlarda S. C. Rao ve M. Kumar tarafından kübik B-spline kolokeyşin metodu (Rao vd., 2006) da uygulandı. Şöyle ki; Çalışma, üç örtüşmeyen alt bölgede çözüm aralıklarına ayrıştırıldı ve bu bölgede diferansiyel denklemler çözüldü.

1.4. B- Spline Kolokeyşin Metodu

$$L u(x) = f(x) \quad (1.1)$$

şeklinde ifade edilen bir diferansiyel denklemde; L bir lineer diferansiyel operatör, $f(x)$ bilinen bir fonksiyon ve $u(x)$ aranan çözüm olsun. (1.1) diferansiyel denkleminin sayısal çözümü için ağırlıklı rezidü metodu kullanıldığında, aranan $u(x)$ ifadesi yerine

$$u(x) \approx \tilde{u}(x) = \sum_{j=1}^N a_j \phi_j(x) \quad (1.2)$$

formundaki $\tilde{u}(x)$ sonlu yaklaşım serisi kullanılır.

(1.2) eşitliğinde verilen $\phi_j(x)$, $j = 1, \dots, N$ fonksiyonu, diferansiyel denklemin tanım bölgesi üzerinde tanımlıdır ve $a_j, j = 1, \dots, N$ bilinmeyen katsayılardır. Sonlu elemanlar metodunda, $\phi_j(x)$ fonksiyonları problem için verilen tüm sınır şartlarını sağlayacak şekilde seçilirler ama genelde diferansiyel denklemini sağlamazlar.

Ağırlıklı rezidüler metodu, $\tilde{u}(x)$ yaklaşık çözümüyle orjinal denklem arasındaki sapma miktarını minimuma indirmeyi amaçlar. Bu sapma ölçüsü rezidü ile tanımlanır:

$$R(x) = L\tilde{u}(x) - f(x) = L\tilde{u}(x) - Lu(x) \quad (1.3)$$

W_j ağırlık fonksiyonları aşağıdaki integrasyonu minimize edecek biçimde tanımlanmış olan özel fonksiyonlar olmak üzere, (1.3) ile verilen rezidü ifadesi; $W_j(x)$ ağırlık fonksiyonları ile çarpılarak Ω tanım bölgesi üzerindeki integrali alınır

$$\int_{\Omega} W_j(x) R(x) dx = 0, j = 1, \dots, N \quad (1.4)$$

formunda N bilinmeyen N denklemden oluşan denklem sistemi elde edilir. Bu sistemden a_j bilinmeyenleri bulunarak (1.1) yerine yazılırsa, $\tilde{u}(x)$ yaklaşık çözümüne ulaşılır.

Kolokeyşın metodu, ağırlıklı rezidü metodunun bir uygulamasıdır. Bu metotta W_j ağırlık fonksiyonları olarak

$$W_j = \delta(x - x_j) \quad (1.5)$$

dirac delta fonksiyonları seçilir. Dirac delta fonksiyonları

$$\delta(x - x_j) = \begin{cases} 1, & x = x_j \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (1.6)$$

özelliğine sahiptirler ve $R(x_j) = 0, j = 1, \dots, N$ olduğunda, (1.4) integralinin sonucu sıfır olacaktır. Dolayısıyla kolokeyşın metodu için çözüm, (1.2) eşitliğinin sayısal çözümü aranan denklemde yerine yazılmasıyla

$$L\tilde{u}(x) - f(x) = 0$$

$$L \left(\sum_{j=1}^N a_j \phi_j(x) \right) - f(x) = 0 \quad (1.7)$$

formunda elde edilir (Lapidus ve Pinder, 1982)

1.5. B- Spline Galerkin Metodu

Diferansiyel denklemlerin tam çözümlerinin bulunması için kullanılan analitik yöntemler, problemlerin elde edilmesi ve çözümlerinin analizlerinin yapılması noktasında sayısal yöntemler bir alternatiftir. Sonlu elemanlar metodu ise bu varyasyonel yöntemlerden birisidir. Bu yöntem, yaklaşım fonksiyonlarının, problem çözüm bölgesinin alt bölgelerinde, sistematik biçimde elde edilmesi olanağı sağlar.

Bir diferansiyel denkleme bu sonlu elemanlar metodunun uygulanışı aşağıdaki gibidir.

$L[u]$, u nun türevlerini içeren genel bir diferansiyel operatörü, $U_\mu[u]$ uygun sayıda sınır koşulu, Ω çözüm bölgesi ve sınırı $\partial\Omega$ olmak üzere;

$$L[u] = r(x), \quad x \in \Omega,$$

$$U_\mu[u] = \gamma_\mu, \quad x \in \partial\Omega, \quad (1.8)$$

sınır değer problemini dikkate alalım. Bu problemin çözümüne yapılacak yaklaşım,

$$u(x) = w(x, a_1, a_2, \dots, a_N)$$

şeklindedir. Burada $a_1, a_2, \dots, a_N$ bulunması gerekli olan parametrelerdir.

$a = [a_1 a_2 \dots a_N]$ olarak alınırsa, seçilecek uygun ψ_i taban fonksiyonları için yaklaşık çözüm

$$w(x, a) = \psi_0(x) + \sum_{i=1}^N a_i \psi_i(x) \quad (1.9)$$

Şeklinde ifade edilebilir. Bu seçim, problemin sınır koşullarını sağlayacak şekilde olmalıdır. Bu yaklaşık çözüm, diferansiyel denklemde yerine yazılırsa

$$E[x, a] = L[w(x, a)] - r(x) \quad (1.10)$$

kalıntısı (rezidü) bulunur. Bu kalıntı, $w(a, x)$ yaklaşım fonksiyonunun diferansiyel denkleme sağlama ölçüsünü bize verir. Yapılan yaklaşımdaki ψ_i fonksiyonlarının sayısı olan N büyüdükçe $E[x, a]$ kalıntısının da küçülmesi beklenir. Bu kalıntı doğrudan sıfır olduğunda tam çözüm elde edilir. Kalıntının doğrudan sıfır olmasını sağlamak zor olduğundan, sayısal yaklaşım yöntemlerinde $E[x, a]$ kalıntısını mümkün olduğunca küçük yapacak yollar aranır. Sonlu elemanlar metodunda bunun için kalıntının ağırlıklı integrali olan

$$(\phi_j, E[x, a]) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (1.11)$$

ifadesi sıfıra eşitlenir. Burada, $(\phi_j, E[x, a])$ bir iç çarpım olup,

$$(\phi, E) = \int_{\Omega} \phi \cdot E \, dx$$

şeklinde tanımlanır. ϕ_j ise bir ağırlık fonksiyonudur. Eğer $w(x, a)$ çözümü bir tam çözüm ise (1.11) ifadesi, ağırlık fonksiyonu nasıl seçilirse seçilsin sıfır olacaktır. Ağırlık fonksiyonlarının seçimi için değişik alternatifler vardır ve bu seçimlerin her birisi yaklaşık metot üzerinde farklı bir sonlu eleman yöntemine karşılık gelir. Ağırlık fonksiyonları belirlenip metoda uygulandığında N bilinmeyenli bir cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu sistem uygun yöntemler kullanılarak çözülebilir. Buradan elde edilen çözümlerin, (1.9) denkleminde yerlerine yazılmasıyla (1.8) ile verilen diferansiyel denkelmin yaklaşık çözümü bulunmuş olur.

Galerkin metodu da sonlu elemanlar metodlarının içinde en çok kullanılan yöntemdir. Bu yöntemin uygulanışında, diferansiyel denklemin yaklaşık çözümü $w(x, a)$ olmak üzere bu yöntem, (1.11) denklemindeki ağırlık fonksiyonlarının

$$\phi_j = \psi_j(x), \quad j = 1, 2, \dots, N$$

şeklinde seçilmesi esasına dayanır. Böylece (1.11) ifadesi

$$\int_{\Omega} \psi_j \cdot E[x, a] dx = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N$$

halini alır. Buradan elde edilecek cebirsel denklem sisteminin çözülmesiyle $a = [a_1 a_2 \dots a_N]$ bilinmeyenleri bulunmuş olur (Reddy, 1993).

2. GEOMETRİKSEL GRADED MESH ÜZERİNDE BURGER DENKLEMİNİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

2.1. Giriş

Bu bölümde ilk olarak kuadratik B-spline Galerkin yöntemi ile kübik B-spline kolokeyşin yöntemi uygulanacaktır. Düzenli mesh yardımıyla yapılan hesaplamalardan elde edilen sonuçlar ile Graded mesh yardımıyla yapılan hesaplamaların sonuçları karşılaştırılacaktır.

Daha sonra uygulanan yöntemlerin doğruluğunun anlaşılabilmesi için çeşitli test problemleri çözülecektir.

2.2. B-Spline Metodları

$$u_t + u u_x - v u_{xx} = 0 \quad (2.1)$$

Bir boyutlu Burger denklemini

$$u(x, t_0) = f(x) \quad , \quad a \leq x \leq b \quad (2.2)$$

başlangıç ve

$$\begin{aligned} u(a, t) &= \alpha_1 \quad , \quad u(b, t) = \alpha_2 \quad , \quad t \in [t_0, T] \\ u_x(a, t) &= 0 \quad , \quad u_x(b, t) = 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

sınır koşulları ile alalım. Burada $v > 0$ kinematik vizkozite sabiti ve x , t sırasıyla konum ve zamana göre türevi belirtir.

Çalışma bölgesi olarak verilen $[a, b]$ aralığı geometrik graded alt aralıklara bölünür. Böylece $[a, b]$ aralığı

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$$

şeklinde eşit aralıklı olmayan aralıklara bölünmüş olur. Bu durumda çözüm bölgesi x_m düğüm noktası için $a \leq x \leq b$ şeklindedir. Burada

$$\begin{aligned} x_{m+1} &= x_m + h_m \\ h_{m+1} &= \sigma h_m \quad m = 0, 1, \dots, N-1 \end{aligned}$$

ve

$$h_0 = x_1 - x_0 \text{ ilk elemanın uzunluğudur.}$$

Değişken mesh oluşturabilmek için ilk h_0 aralığının boyutunun bulunması gerekir. Bu yüzden

$$h_0 + h_1 + \dots + h_{N-1} = b - a$$

eşitliğinden

$$h_0 + \sigma h_0 + \sigma^2 h_0 + \dots + \sigma^{n-1} h_0 = b - a$$

$$h_0(1 + \sigma + \sigma^2 + \dots + \sigma^{n-1}) = b - a$$

$$h_0 = \frac{b - a}{1 + \sigma + \sigma^2 + \dots + \sigma^{n-1}}$$

elde ederiz.

Burada eğer $\sigma = 1$ alınırsa parçalanma düzgün parçalanmaya indirgenir. Çözüm bölgesinin en solunda mesh boyutu en küçük yapmak için $\sigma > 1$ alınmalıdır. Benzer şekilde çözüm bölgesinin en sağında mesh boyutunu en küçük yapmak için $\sigma < 1$ alınır.

2.2.1. Graded kuadratik B- spline galerkin metodu (GQBG)

Galerkin metodunda kuadratik B-spline fonksiyonların kullanılması ile düzgün çözümlerin elde edilmesi için diferansiyel denklem, bilinmeyen çözümün en çok birinci mertebeden türevini içermelidir. Bu yüzden (2.1) denkleminde Galerkin yöntemini uygulamak için denklem W ağırlık fonksiyonu ile çarpılıp çözüm bölgesinde integre edilir.

$$\int_a^b w (u_t + u u_x - v v_x - u u_{xx}) dx = 0 \quad (2.4)$$

Kısmi integrasyon alındığında ve $u_x(a, t) = u_x(b, t) = 0$ sınır koşulları kullanıldığında aşağıdaki zayıf form elde edilir.

$$\int_a^b [w (u_t + u u_x) + v w_x u_x] dx = 0 \quad (2.5)$$

Kuadratik B-spline fonksiyonlar üç ardışık eleman tarafından örtülür. Böylece graded aralığının $[x_m, x_{m+1}]$ bir karakteristik elemanı üç kuadratik B-spline şekil fonksiyonu tarafından örtülür. $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanı için yerel koordinat sistemi $\xi = x - x_m, 0 \leq \xi \leq h_m = x_{m+1} - x_m$ uygulanmıştır. Dolayısıyla $[0, h_m]$ graded aralığı üzerinde kuadratik B-spline şekil fonksiyonları kuadratik B-spline fonksiyonlarına aşağıdaki şekilde dönüştürülür.

$$\frac{Q_{m-1}}{Q_m} = \frac{1}{h_m^2} \begin{cases} (h_m - \xi)^2 \sigma & , \\ h_m^2 + 2 h_m \sigma \xi - (1 + \sigma) \xi^2 & , \\ \xi^2 & , \end{cases} \quad (2.6)$$

Bu üç B-spline şekil fonksiyonu bir $[0, h_m]$ elemanı için baz oluşturur. Bu yüzden $[0, h_m]$ aralığı üzerinde $U_N(x, t)$ yaklaşık çözümü aşağıdaki formda aranır.

$$U^e(\xi, t) = \sum_{j=m-1}^{m+1} \delta_m(t) Q_m(\xi) \quad (2.7)$$

δ_m hesaplanacak zamana bağlı parametrelerdir. (2.6) da verilen B-spline şekil fonksiyon değerleri kullanılan δ_m parametre terimlerinde U ve konuma göre türevi U' ,

$$\begin{aligned} U_m &= U(x_m) = \sigma \delta_{m-1} + \delta_m , \\ h_m U'_m &= h_m U'(x_m) = 2 \sigma (\delta_m - \delta_{m-1}) \end{aligned} \quad (2.8)$$

şeklinde ifade edilir.

$$\begin{aligned} \sum_{j=m-1}^{m+1} \left(\int_0^{h_m} Q_j Q_i d\varepsilon \right) + \delta_{j+} \sum_{j=m-1}^{m+1} \sum_{k=m-1}^{m+1} \left(\int_0^{h_m} Q_j Q'_j Q_k d\varepsilon \right) \delta_k \delta_j \\ + \sum_{j=m-1}^{m+1} \left(\int_0^{h_m} Q'_i Q'_j d\varepsilon \right) \delta_j = 0 \end{aligned}$$

ve bu elemanların kullanılmasıyla (2.5) denklemi $[x_m, x_{m+1}]$ aralığında ,

$$\int_{x_m}^{x_{m+1}} [w (U_t^e + U^e U_x^e) + v W_x U_x^e] dx = 0 \quad (2.9)$$

haline gelir. W ağırlık fonksiyonu alınarak Q_i kuadratik B-spline şekil fonksiyonu alınırsa U^e eleman fonksiyonu (2.9) da yerine yazılarak

$$A^e \delta^{e^\circ} + (\delta^e)^T L^e \delta^e + v C^e \delta^e = 0 \quad (2.10)$$

elde edilir. Burada

$$A^e = \int_0^{h_m} Q_i Q_j d\xi, \quad C^e = \int_0^{h_m} Q'_i Q'_j d\xi, \quad L^e = \int_0^{h_m} Q_i Q'_j Q_k d\xi$$

ve

$$\delta^e = (\delta_{m-1}, \delta_m, \delta_{m+1})^T \quad (2.11)$$

j ve k değerleri için sadece m-1, m, m+1 (m= 0, 1, ..., N-1) değerlerini alır.

A^e, C^e eleman matrisi 3×3 boyutlu ve L^e matrisi $3 \times 3 \times 3$ boyuta indirgenebilir. Bu durumda

$$B_{ij}^e = \sum_{k=m-1}^{m+1} L_{jk}^e \delta_k^e \quad (2.12)$$

olur.

B^e matrisi, δ^e eleman parametrelerine bağlıdır. Tüm eleman matrislerinin birleştirilmesiyle

$$A \delta^\circ + B(\delta) \delta + v C \delta = 0 \quad (2.13)$$

diferansiyel denklem sistemi elde edilir. Burada δ° zamana göre türevi gösterir.

$$\delta = (\delta_{-1}, \delta_0, \dots, \delta_N)^T \quad (2.14)$$

tüm eleman parametrelerini içerir. Burada A, B ve C matrisleri beşgensel matrislerdir.

Zamana bağlı δ parametresinin yaklaşımı için aşağıdaki ileri sonlu fark formülü ve δ' nin zamana göre türevi için Crank Nicolson metodu kullanılır.

$$\delta = \frac{\delta^{n+1} + \delta^n}{2}, \quad \delta^\circ = \frac{\delta^{n+1} - \delta^n}{\Delta t} \quad (2.15)$$

(2.15) eşitlikleri (2.13) matris denkleminde yazılırsa

$$\begin{aligned} A \left(\frac{\delta^{n+1} - \delta^n}{\Delta t} \right) + B \left(\frac{\delta^{n+1} + \delta^n}{2} \right) \left(\frac{\delta^{n+1} + \delta^n}{2} \right) + v C \left(\frac{\delta^{n+1} + \delta^n}{2} \right) &= 0 \\ A \frac{\delta^{n+1}}{\Delta t} - \frac{A \delta^n}{\Delta t} + \frac{B}{4} ((\delta^{n+1})^2 + 2(\delta^{n+1} \delta^n) + (\delta^n)^2) + v \frac{C}{2} \delta^{n+1} + v \frac{C}{2} \delta^n &= 0 \\ \delta^{n+1} \left(\frac{A}{\Delta t} + \frac{B}{4} \delta^{n+1} + 2 \delta^n + v \frac{C}{2} \right) - \delta^n \left(\frac{A}{\Delta t} - \delta^n - v \frac{C}{2} \right) &= 0 \\ \left[A + \frac{\Delta t}{2} (B(\delta^n) + v C) \right] \delta^{n+1} = \left[A - \frac{\Delta t}{2} (B(\delta^n) + v C) \right] \delta^n &\quad (2.16) \end{aligned}$$

denklemini elde edilir.

$B(\delta^n)$, δ matrisine bağlı olduğu için (2.16) matris denklemini lineer değildir. (2.16) denklem sistemi (N+2) bilinmeyen parametre ile (N+2) denklemden oluşmaktadır.

$U(a, t) = \alpha_1$ ve $U(b, t) = \alpha_2$ sınır koşullarının uygulanmasıyla δ_{-1}^n ve δ_N^n eleman parametreleri elimine edilerek $N \times N$ boyutlu beşgensel band matrisi elde edilir. Bu sistem

$\delta_m^n, m = 0, 1, \dots, N-1$ parametreleri için Thomas algoritması yardımıyla çözülebilir. δ_{-1}^n ve δ_N^n eleman parametreleri her bir zaman adımında sınır şartları yardımıyla

$\delta_n^{-1} = (\alpha_1 - \delta_0^n)/\sigma$ ve $\delta_N^n = \alpha_2 - \sigma \delta_{N-1}^n$ hesaplanabilir. Lineer olmayan terimler nedeniyle iç iterasyonu takip eden her bir adımda iki veya üç defa tekrarlanır.

$$(\delta^*)^{n+1} = \delta^n + \frac{1}{2} (\delta^{n+1} - \delta^n) \quad (2.17)$$

(2.16) denkleminin iterasyonunu başlatmak için, δ^0 parametresinin başlangıç vektörünün hesaplanması gereklidir. Bu nedenle $t = t_0$ zamanında aşağıdaki başlangıç ve sınır koşullarının kullanılmasına ihtiyaç vardır.

$$U_N(a, t_0)_x = 0, U_N(b, t_0)_x = 0, \quad (2.18)$$

$$U_N(x_m, t_0) = 0,$$

$$x_m = 0, \dots, N-1 \quad (2.19)$$

şeklinde yazılır. Bu eleman parametreleri yardımıyla herhangi bir düğüm değeri ve türevi (2.8) denkleminden iyileştirilebilir.

2.2.2. Graded Kübik B- spline Kolokeyşın metodu (GCBC)

Geometrik graded mesh üzerinde, kübik B-spline fonksiyonu

$$Q_{m-1}^{Q_m} = \frac{1}{h_m^3} \begin{cases} (h_m - \xi)^3 \sigma^3, \\ -\sigma (\sigma^2 + \sigma + 1)(h_m - \xi)^2 - 6\sigma h_m(h_m - \xi) - 3\sigma^2 h_m^3 \\ -(\sigma^2 + \sigma + 1)\xi^3 + 3\sigma^2 h_m \xi^2 + 3\sigma h_m^2 \xi + h_m^3 \\ \xi^3, \end{cases} \quad (2.20)$$

şeklinde tanımlanır.

$(Q_{-1}, Q_0, \dots, Q_{N+1})$ B-spline baz fonksiyonları $[a, b]$ tanım aralığı üzerinde bir tabandır. Bu nedenle U_N yaklaşık çözümü $U(x, t)$ analitik çözümü için kübik B-spline baz fonksiyonları yardımıyla

$$U_N(x, t) = \sum_{m=-1}^{N+1} \delta_m(t) Q_m(x) \quad (2.21)$$

şeklinde yazılabilir. Burada zamana bağlı δ_m parametreleri sınır şartlarından ve (2.1) denklemindeki kolokeyşın formundan bulunur. Graded kübik B-spline yaklaşım fonksiyonu, $U(x, t)$ çözümünün ikinci mertebeye kadar türevlerinin sürekli olmasını gerektirir.

U, U', U'' değerleri mesh noktalarında δ_m eleman parametreleri yardımıyla

$$\begin{aligned}
U_m &= \sigma^3 \delta_{m-1} + 2 \sigma (\sigma + 1) \delta_m + \delta_{m+1} \\
h_m U'_m &= 3 \sigma [\delta_{m-1} + (\sigma^2 - 1) \delta_m - \sigma^2 \delta_{m-1}] \\
h_m^2 U''_m &= 6 \sigma^2 [\sigma \delta_{m-1} - (\sigma + 1) \delta_m + \delta_{m+1}]
\end{aligned} \tag{2.22}$$

ifade edilir. ' ve ' ' x ' e göre birinci ve ikinci türevleri göstermektedir. Kolokeyşin metodunun tanımlanan mesh noktalarında uygulanması, U_m , U'_m , U''_m değerlerinin (2.1) denkleminde yerine yazılmasıyla elde edilecek adi diferansiyel denklem sistemi yardımıyla

$$\begin{aligned}
&\sigma^3 \delta_{m-1}^\circ + 2 \sigma (\sigma + 1) \delta_m^\circ + \delta_{m+1}^\circ + \frac{3 \sigma}{h_m} z_m (\delta_{m+1} + (\sigma^2 - 1) \delta_m - \sigma^2 \delta_{m-1}) - \\
&\frac{6 \sigma^2}{h_m^2} v (\sigma \delta_{m-1} - (\sigma + 1) \delta_m + \delta_{m+1}) = 0
\end{aligned} \tag{2.23}$$

şeklinde olacaktır. Burada "°" zamana göre türevi gösterir.

$$z_m = \sigma^3 \delta_{m-1} + 2 \sigma (\sigma + 1) \delta_m + \delta_{m+1}$$

z_m , (2.23) denklemindeki lineer olmayan terimdir.

Kabul edelim ki δ_m parametre vektörü ve zamana göre türevleri (2.15) eşitlikleri kullanılarak n ve $n+1$ zaman adımları arasında iki defa interpolate edilsin. (2.15) de verilen ifade (2.23) denklem sisteminde yerine yazıldığında aşağıdaki eleman parametreleri arasındaki ilişki elde edilir.

$$\begin{aligned}
a_{m1} \delta_{m-1}^{n+1} + a_{m2} \delta_m^{n+1} + a_{m3} \delta_{m+1}^{n+1} &= a_{m4} \delta_{m-1}^n + a_{m5} \delta_m^n + a_{m6} = 0 \\
m &= 0, 1, \dots, N.
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Burada katsayılar

$$\begin{aligned}
a_{m1} &= \frac{\sigma^3}{\Delta t} - \frac{3 \sigma^3 z_m}{2 h_m} - \frac{6 \sigma^3 v}{2 h_m^2} , \\
a_{m2} &= \frac{2 \sigma (\sigma + 1)}{\Delta t} + \frac{3 \sigma z_m (\sigma^2 - 1)}{2 h_m} + \frac{6 \sigma^2 (\sigma + 1) v}{2 h_m^2} , \\
a_{m3} &= \frac{1}{\Delta t} + \frac{3 \sigma z_m}{2 h_m} - \frac{6 \sigma^2 v}{2 h_m^2} , \\
a_{m4} &= \frac{\sigma^3}{\Delta t} + \frac{3 \sigma^3 z_m}{2 h_m} + \frac{6 \sigma^3 v}{2 h_m^2} ,
\end{aligned}$$

$$a_{m5} = \frac{2 \sigma (\sigma + 1)}{\Delta t} - \frac{2 \sigma z_m (\sigma^2 - 1)}{2 h_m} - \frac{6 \sigma^2 (\sigma + 1) v}{2 h_m^2} ,$$

$$a_{m6} = \frac{1}{\Delta t} - \frac{3 \sigma z_m}{2 h_m} + \frac{6 \sigma^2 v}{2 h_m^2} ,$$

şeklinde. Yukarıdaki denklem sistemi (N+3) bilinmeyen parametre ve (N+1) denklemden oluşmaktadır. $U(a, t) = \alpha_1$ ve $U(b, t) = \alpha_2$ sınır koşullarının kullanılmasıyla (2.24) denkleminde δ_{-1} ve δ_{N+1} parametreleri elimine edilir. Böylece $(N + 1) \times (N + 1)$ boyutlu çözülebilir bir üçgensel band matris sistemi elde edilir. Bu matris sistemi Thomas algoritması yardımıyla çözülebilir.

δ_{-1} ve δ_{N+1} parametreleri; her bir zaman adımında, uç noktalarda

$$U_m = \sigma^3 \delta_{m-1} + 2 \sigma (\sigma + 1) \delta_m + \delta_{m+1}$$

denklemleri kullanılarak belirlenebilir.

Çözümü elde edebilmek için δ_m^0 başlangıç parametrelerinin hesaplanması gerekir. Bunun için başlangıç koşulları

$$U_N(x_m, 0) = \sigma^3 \delta_{m-1} + 2 \sigma (\sigma + 1) \delta_m + \delta_{m+1} = U(x_m, 0) , \quad (2.25)$$

$$m = 0, 1, \dots, N$$

ve sınır koşulları

$$U'_N(x_0, 0) = \frac{3 \sigma}{h_0} [\delta_1 + (\sigma^2 - 1) \delta_0 - \sigma^2 \delta_{-1}] = U'(x_0, 0) \quad (2.26)$$

$$U'_N(x_N, 0) = \frac{3 \sigma}{h_{N-1}} [\delta_{N+1} + (\sigma^2 - 1) \delta_N - \sigma^2 \delta_{N-1}] = U'(x_N, 0)$$

kullanılır.

(2.25) ve (2.26) denklemleri bir üçgensel band matris sistemi ile verilir. Bu sistemin çözümü Thomas algoritması yardımıyla hesaplanabilir. δ_m^0 başlangıç parametrelerinin elde edilmesinden sonra bir sonraki zaman adımında δ_m^n parametreleri (2.24) tekrarlama bağıntısı yardımıyla hesaplanır. Her bir δ_m^{n+1} zaman adımına geçmeden önce, (2.17) iterasyonu lineer olmayan cebirsel (2.24) denklem sisteminden daha iyi çözüm elde edebilmek için iki veya üç kez uygulanmalıdır.

2.3. Nümerik Örnekler

Bu bölümde yapılan nümerik çözümün hatası L_∞ hata normu ile ölçülür. Burada L_∞ hata normu,

$$L_\infty = |U - U_N|_\infty = \max_j |U - U_{Nj}^n|$$

şeklindedir.

2.3.1. Şok-dalga çözümü

Burger denkleminin şok-dalga çözümü $T_0 = \exp(1/8v)$ iken aşağıdaki analitik çözüme sahiptir.

$$U(x, t) = \frac{x/t}{1 + \sqrt{(t/T_0)} \exp(x^2/4xt)}, \quad t \geq 1, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (2.27)$$

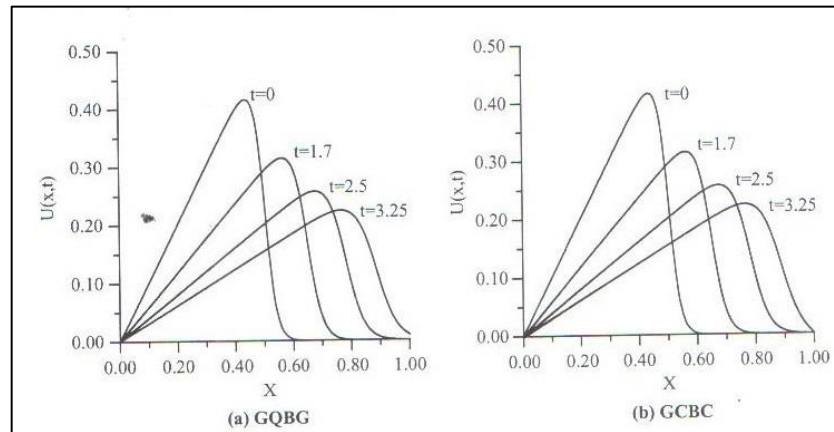
$t_0 = 1$ zamanında (2.27) denkleminde hesaplanan başlangıç şartları ve $U(0, t) = U(1, t) = 0$ sınır şartları kullanılır. Program daha önce kullanılan düzgün aralıkta çalıştırılır. Problem aralığı üzerindeki hata dağılımına göre, eğer sağ sınır yakınlarında geniş hata var ise $\sigma < 1$ graded mesh parametresini seçeriz. Sağ taraftaki graded mesh noktasında yığılmanın sonuçları ile benzer şekilde $\sigma > 1$ seçilmesinin sol sınırın yakınlarındaki mesh noktalarında yığılmanın sonuçlarında geniş hata saptanmıştır.

$[0,1]$ aralığında $\Delta t = 0.01$, $v = 0.005$ ve $N = 200$ parametreleri ile problem çözülür. Program $t = 3.25$ zamanına alınır. Algoritma çalışma esnasında problem aralığında gözlenen hataya göre, sol sınırında en geniş yığılma hatası oluşur. Hatayı indirmek için σ parametreleri 0.001 değer atışıyla $[1,1.1]$ aralığında araştırma olarak yürütülür. Farklı zaman adımlarında en iyi σ parametresi bulunur ve sonuçlar Şekil 2.1' de verilmiştir. Ayrıca diğer bazı metodların sonuçları karşılaştırma amacı ile aynı çizelgede verilmiştir. GQBG ve GCBC metodlarının $t = 1.7$, $t = 2.5$, $t = 3.25$ zamanlarında nümerik çözümleri grafik olarak Şekil 2.1' de verilmiştir. Şemaların hataları, bazı t zamanlarında düzgün ve graded mesh in en iyi seçimlerinin kullanıldığı Şekil 2.2-2.4 te bir kaç defa görselleştirilmiştir. Başlangıç şartlarında hatada önemli derecede indirgeme elde edildi. Bu şekilde Burger denkleminin çözümünde graded meshin etkileri önerilen algoritmalar için azaltılır. Ayrıca genelde GQBG metodunun GCBC metodundan daha az hata sağladığı sonucuna varırız. Benzer simulasyon daha küçük $v = 0.0005$ vizkozite sabiti kullanılarak yürütülür. Böylece, şok dalga şiddeti artar. Nümerik şemaların amacı düzgün aralıklar kullanılarak yeniden çalıştırmaktır. Nümerik çözümlerin

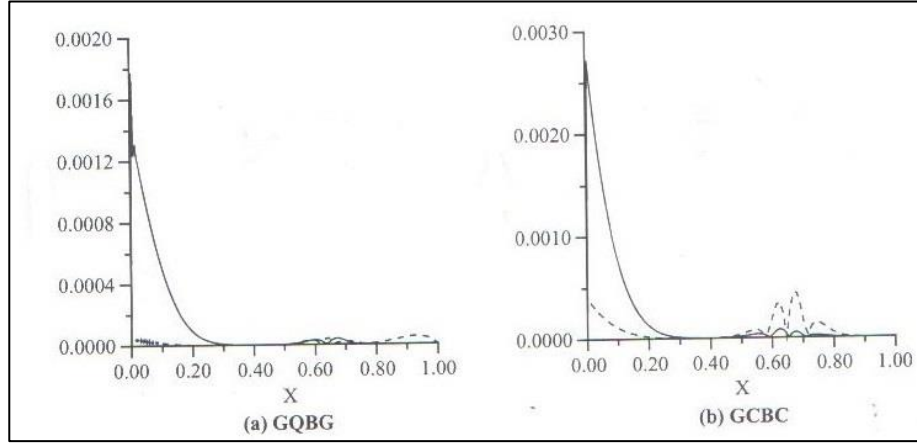
perspektif görünüşü Şekil 2.5' te verilmiştir. Problem aralığında hata yığılması belirlendikten sonra, $\sigma < 1$ parametresi seçilir ve en küçük hatayı tespit etmek için $[0.9,1]$ aralığında 0.0001 artış ile tamamlanır. $\sigma = 1$ seçilmesinin sonuçları karşılaştırıldığında, tanım kümesi aralığında en iyi σ parametresi Çizelge 2.2' de sunulmuştur. Şekil 2.6 ve Şekil 2.8' in her ikisinde de $t = 1.7$, $t = 2.5$, $t = 3.25$ zamanlarındaki hata dağılımları düzgün mesh ile graded mesh birlikte verilmiştir.

Çizelge 2.1. Farklı zamanlarda $v=0.005$ ve $\Delta t=0.01$ için $L_\infty \times 10^3$ hata.

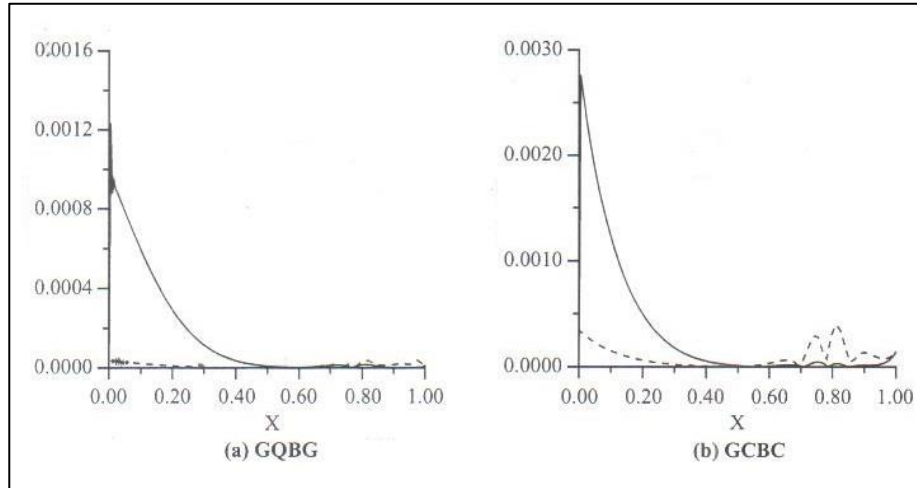
	$t = 1.7$		$t = 2.5$		$t = 3.25$	
σ	1	1.026	1	1.025	1	1.004
GQBG	1.77619	0.05197	1.23401	0.04015	0.95663	0.68244
QBCM	0.31153		0.18902		8.98390	
CBCM	27.5770		25.1517		21.0489	
	$t = 1.7$		$t = 2.4$		$t = 3.1$	
	2.576		1.242		0.688	
	$t = 1.7$		$t = 2.5$	1.017	$t = 3.25$	
σ	1	1.016	1	0.39872	1	
GCBC	2.72298	0.43406	2.76426		9.25009	Tümü için
QBCM	0.31153		0.18902		8.98390	9.25009
CBCM	27.5770		25.1517		21.0489	
	$t = 1.7$		$t = 2.4$		$t = 3.1$	
	2.576		1.242		0.688	



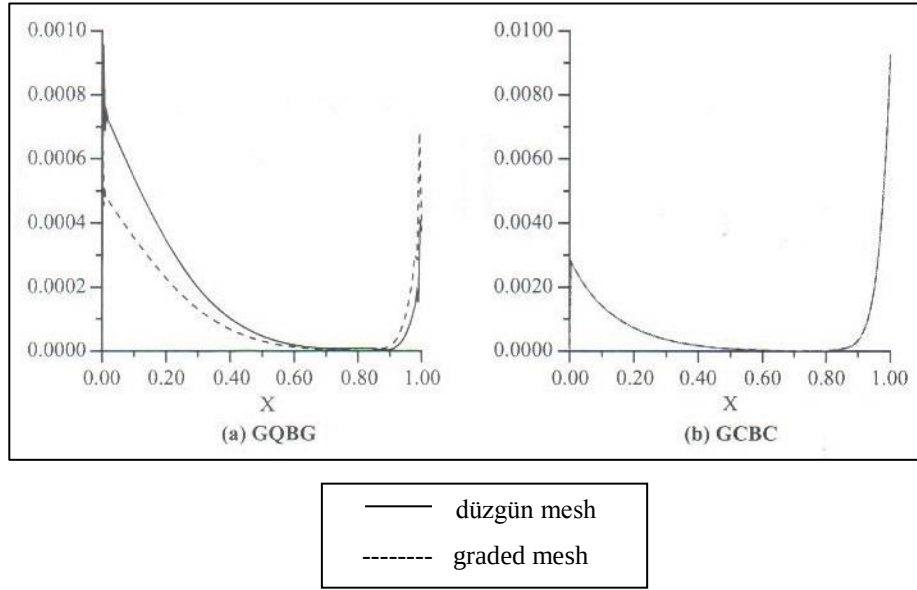
Şekil 2.1. $v=0.005$, $N=200$, $\Delta t=0.01$.



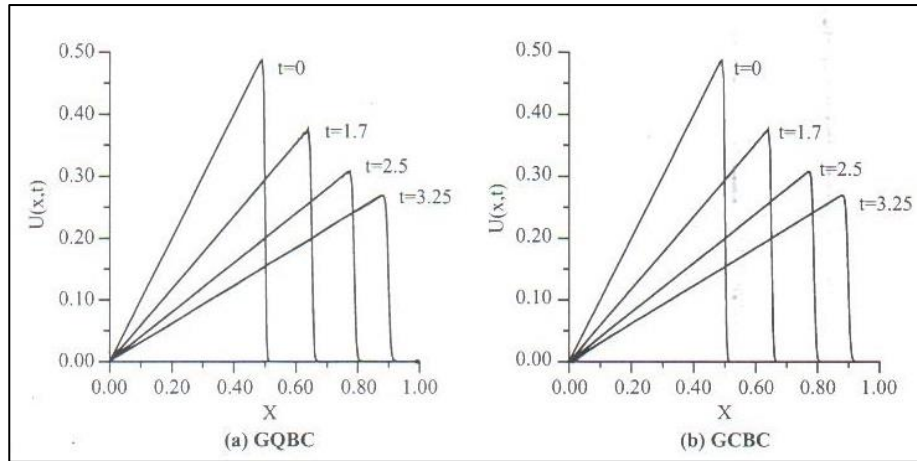
Şekil 2.2. $v=0.005$, $N=200$, $\Delta t = 0.01$.



Şekil 2.3. $v=0.005$, $N=200$, $t=2.5$.



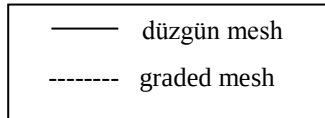
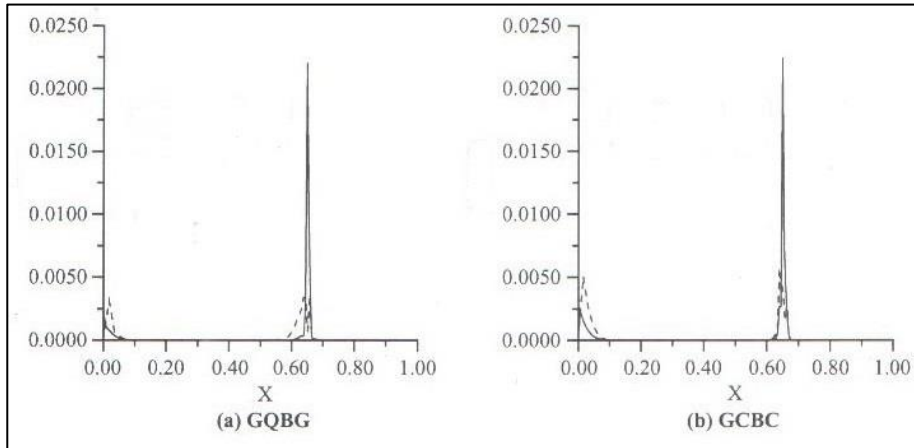
Şekil 2.4. $v=0.005$, $N=200$, $t=3.25$.



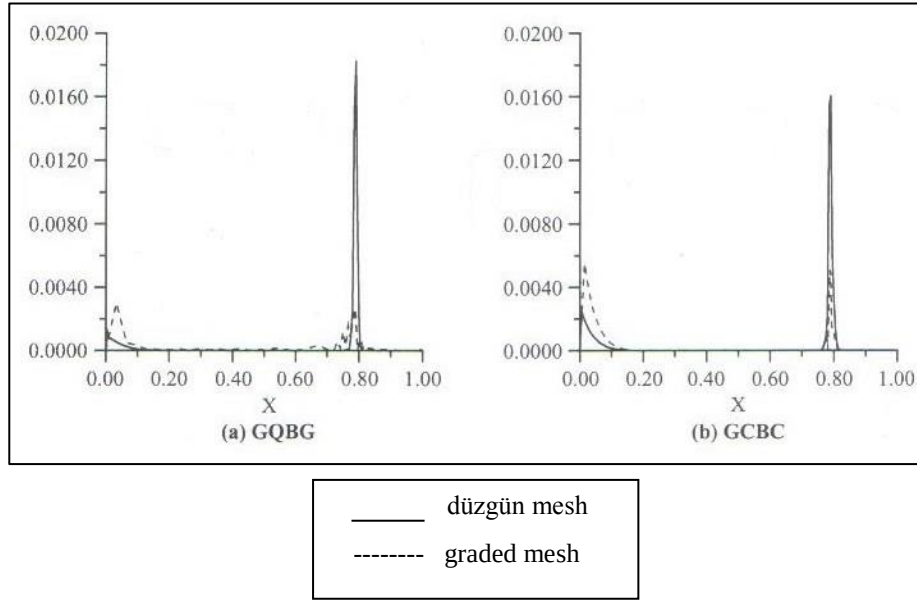
Şekil 2.5. $v=0.0005$, $N=200$, $\Delta t=0.01$.

Çizelge 2.2. Farklı zamanlarda $v=0.0005$ ve $\Delta t=0.01$ için $L_\infty \times 10^3$ hata.

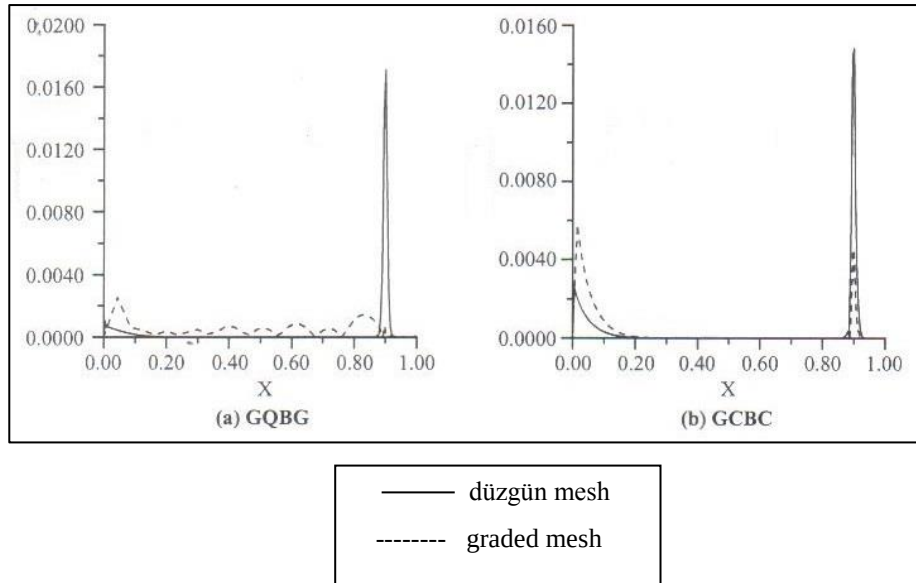
	$t = 1.7$		$t = 2.5$		$t = 3.25$	
σ	1	0.9822	1	0.9668	1	0.9563
GQBG	22.0620	3.52912	18.2474	3.01278	17.1378	2.54251
QBCM	13.8155		16.7712		13.8155	
CBCM	27.5770		25.1517		21.0489	
	$t = 1.75$		$t = 2.5$		t	
	5.880		2.705		= 3.25	
	$t = 1.7$		$t = 2.5$		2.291	0.9869
σ	1	1.016	1	0.9869	$t = 3.25$	5.79884
GCBC	22.4378	0.43406	16.0589	5.52013	1	
QCBC	13.8155		16.7712		14.8614	
CBCM	27.5770		25.1517		13.8155	
	$t = 1.75$		$t = 2.5$		21.0489	
	5.880		2.705		$t = 3.25$	
					2.291	



Şekil 2.6. $v=0.0005$, $N=200$, $t=1.7$.



Şekil 2.7. $v=0.0005$, $N=200$, $t=2.5$.



Şekil 2.8. $v=0.0005$, $N=200$, $t=3.25$.

3. DÜZENLENMİŞ UZUN DALGA (RLW) DENKLEMİNİN PETROV – GALERKİN METODU İLE NÜMERİK ÇÖZÜMÜ

3.1. Giriş

Bu bölümde düzenlenmiş uzun dalga denkleminin Petrov Galerkin metodu ile nümerik çözümü incelenecektir.

Bore, iki farklı su akışı arasındaki dönüşüm bölgesidir. Çoğu bore uzunluğu suyun derinliğinin birkaç katı olan, türbülans kıran su bölgeleridir. Bununla birlikte, eğer sudaki seviye değişimi suyun derinliğinden çok daha az ise bore zayıftır ve dalga boyu suyun derinliğine kıyasla uzun olan ve birçok dalgadan oluşan bir seriden oluşur. Bir bore, bir su akışının yatay bir kanaldaki durgun suya iletilmesiyle oluşabilir. Durgun suya doğru akabilmesi için, hareketli suyun daha derin olması gerekir. Eğer hareketli su ile durgun su arasındaki dönüşüm ilk başta çok hafif bir eğime sahipse, eğim dikleşecek ve bir bore oluşturacaktır. Su yüzey seviyesindeki değişimin esas su derinliğinin 0.28 inden daha az olduğunda bore un dalgalı bore olduğunu gösteren deneysel kanıt vardır. Oran 0.28 ve 0.75 arasında ise, hala dalgalar vardır ancak birincisi kırılan dalgadır. Daha yüksek oranlarda dalgalanma olmaz. Peregrine, düzenlenmiş uzun dalga denklemini bir dalgalı bore için esas denklem olarak ilk kez ortaya koyan kişidir.

x mesafesi ve U su yüksekliği, h su derinliği ve t zamanı $(h/g)^{1/2}$ ile ölçülür. Burada g yerçekimi ivmesidir. RLW denklemi

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x} + U \frac{\partial U}{\partial x} - \mu \frac{\partial^3 U}{\partial x^2 \partial t} = 0 \quad (3.1)$$

Fiziksel sınır koşulları $U \rightarrow 0$ iken $|x| \rightarrow \infty$ gerektirir. $U(x, t)$ solitary dalga çözümüne sahiptir.

$$U(x, t) = 3c \operatorname{sech}^2 \left(\sqrt{\frac{c}{4\mu(1+c)}} [x - x_0 - (1+c)t] \right) \quad (3.2)$$

Bu çözüm (Gardner vd., 1990) ile verilen üç sabit değeri sağlar. Bu sabitler;

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} U dx, \quad I_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[U^2 + \mu \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 \right] dx, \quad I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} [U^3 + 3U^2] dx \quad (3.3)$$

şeklindedir.

I_1, I_2 ve I_3 sabitleri nümerik algoritmanın konumunu kontrol eder. Bu korunumu kontrol etmek için gerekli ölçütler L_2 ve L_∞ hata normları ile gerçekleştirilir. Buna göre

$$L_2 = U^e - U^n = \sqrt{\left[h \sum_{i=1}^N |U_i^e - U_i^n|^2 \right]} \quad (3.4)$$

Ve

$$L_\infty = U^e - U^n = \max_i |U_i^e - U_i^n| \quad (3.5)$$

nümerik ve analitik çözümler arasındaki maksimum farklılıklar ölçülür.

3.2. B- Spline Metodlar

Bu bölümde kuadratik spline sonlu elemanlar kullanılarak

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$$

$[a, b]$ aralığında bir çözüm elde edilecektir. $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı üzerinde U değişkeni

$$U = Q_{m-1} \delta_{m-1} + Q_m \delta_m + Q_{m+1} \delta_{m+1} \quad (3.6)$$

şeklindedir. Burada δ_m zamana bağlı hesaplanacak parametrelerdir.

$0 < \xi \leq 1$ olmak üzere $h_\xi = x - x_m$ şeklinde ξ ise (3.7) , (3.8) , (3.9) baz fonksiyonları kullanılır.

$$Q_{m-1} = 1 - 2\xi + \xi^2 \quad (3.7)$$

$$Q_m = 1 + 2\xi - 2\xi^2 \quad (3.8.)$$

$$Q_{m+1} = \xi^2 \quad (3.9)$$

düğüm noktalarındaki x_m değerlerinde

$$U_m = \delta_{m-1} + \delta_m \quad (3.10)$$

$$U'_m = \frac{2}{h} (\delta_m - \delta_{m-1}) \quad (3.11)$$

şeklindedir.

(3.1) Denkleminde V_m ağırlık fonksiyonu ile (Burgers,1948) Petrov – Galerkin metodu uygulandığında zayıf form

$$\int_a^b V_m \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x} + U \frac{\partial U}{\partial x} - \mu \frac{\partial^3 U}{\partial x^2 \partial t} \right) dx = 0 \quad (3.12)$$

burada $m = 0, 1, \dots, N-1$ şeklindedir. Ağırlık fonksiyonu V_m ile ifade edilir.

$$V_m = \begin{cases} 1 & x_m \leq x \leq x_{m+1} \\ 0 & x < x_m, x > x_{m+1} \end{cases} \quad (3.13)$$

(3.12) denklemi tek bir $[x_m, x_{m+1}]$ elemanı için uygulanırsa

$$\int_{x_{m+1}}^{x_m} \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x} + U \frac{\partial U}{\partial x} - \mu \frac{\partial^3 U}{\partial x^2 \partial t} \right) dx = 0 \quad (3.14)$$

integrasyon alındığında

$$\int_{x_{m+1}}^{x_m} \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right) dx + [U]_{x_m}^{x_{m+1}} + \frac{1}{2} [U^2]_{x_m}^{x_{m+1}} - \mu \left[\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} \right]_{x_m}^{x_{m+1}} = 0 \quad (3.15)$$

elde edilir.

Cranck – Nicolson yaklaşımının uygulanmasıyla $U^{n+1/2}$ ve onun zamana göre türevi ve $(U^2)^{n+1/2}$ ifadeleri aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$U_m = \frac{1}{2} (U_m^n + U_m^{n+1}), \quad \frac{\partial U_m}{\partial t} = \frac{1}{\Delta t} (U_m^{n+1} - U_m^n), \quad U_m^2 = U_m^{n+1} U_m^n \quad (3.16)$$

Burada n ve $n+1$ zaman adımlarını gösterir. Bu değerler (3.15) de yerine yazıldığında (3.10) ve (3.11) yardımıyla aşağıdaki yarı – lineer tekrarlıma bağıntısı elde edilir.

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{3\Delta t}{2h} - \frac{6\mu}{h^2} - \frac{3\Delta t}{2h} [\delta_{m-1}^n + \delta_m^n] \right) \delta_{m-1}^{n+1} + \left(4 + \frac{12\mu}{h^2} + \frac{3\Delta t}{2h} [\delta_{m+1}^n - \delta_{m-1}^n] \right) \delta_m^{n+1} \\ & + \left(1 + \frac{3\Delta t}{2h} - \frac{6\mu}{h^2} + \frac{3\Delta t}{2h} [\delta_m^n + \delta_{m+1}^n] \right) \delta_{m+1}^{n+1} \\ & = \left(1 - \frac{3\Delta t}{2h} - \frac{6\mu}{h^2} \right) \delta_{m-1}^n + \left(4 + \frac{12\mu}{h^2} \right) \delta_m^n \\ & + \left(1 - \frac{3\Delta t}{2h} - \frac{6\mu}{h^2} \right) \delta_{m+1}^n \end{aligned} \quad (3.17)$$

U_0, U_N sınır koşulları ile $\delta_{-1}^n + \delta_0^n = U_0$ ve $\delta_{N-1}^n + \delta_N^n = U_N$ belirlenir.

İlk ve son denklemlerde $m=0, N-1$ için aşağıdaki indirgenmiş form elde edilir;

$$\begin{aligned}
& \left(3 + \frac{3\Delta t}{2h} + \frac{18\mu}{h^2} + \frac{3\Delta t}{2h} [\delta_0^n + \delta_1^n]\right) \delta_0^{n+1} + \left(1 + \frac{3\Delta t}{2h} - \frac{6\mu}{h^2} + \frac{3\Delta t}{2h} [\delta_0^n + \delta_1^n]\right) \delta_1^{n+1} \\
& = \left(3 - \frac{3\Delta t}{2h} + \frac{18\mu}{h^2}\right) \delta_0^n + \left(1 - \frac{3\Delta t}{2h} - \frac{6\mu}{h^2}\right) \delta_1^n + \frac{3\Delta t}{2h} U_0^2 v + \frac{3\Delta t}{h} U_0
\end{aligned} \tag{3.18}$$

ve

$$\begin{aligned}
& \left(1 - \frac{3\Delta t}{2h} - \frac{6\mu}{h^2} - \frac{3\Delta t}{2h} [\delta_{N-2}^n + \delta_{N-1}^n]\right) \delta_{N-2}^{n+1} + \left(3 - \frac{3\Delta t}{2h} - \frac{18\mu}{h^2} - \frac{3\Delta t}{2h} [\delta_{N-2}^n + \delta_{N-1}^n]\right) \delta_{N-1}^{n+1} \\
& = \left(1 - \frac{3\Delta t}{2h} - \frac{6\mu}{h^2}\right) \delta_{N-2}^n + \left(3 + \frac{3\Delta t}{2h} - \frac{18\mu}{h^2}\right) \delta_{N-1}^n - \frac{3\Delta t}{2h} U_N^2 - \frac{3\Delta t}{h} U_N
\end{aligned} \tag{3.19}$$

dir.

Yukarıdaki yarı – lineer denklem sistemi üçgensel forma sahiptir. Bu yüzden çözüm Thomas algoritması kullanılarak direk iterasyon gerektirmeden hesaplanabilir.

Lineer kararlılık analizi; ε_j^n hatasının g büyüme faktörünün tipi Fourier modu $\hat{\varepsilon}^n$ genliği ile

$$\varepsilon_j^n = \hat{\varepsilon}^n \exp(i j k h) \tag{3.20}$$

şeklinde yapılır. Burada k mod sayısı ve h eleman uzunluğu, nümerik algoritmanın lineerleştirilmesi için hesaplanan değerlerdir.

Lineerleştirmede lineer olmayan terimdeki U büyüklüğünün sabit olduğu farzedilir. Bu şartlar altında ε_j^n hatası δ_j^n fonksiyonu gibi aynı sonlu farklar şemasını karşılar ve (3.17) denkleminin benzeri aşağıdaki formda elde edilir.

$$\begin{aligned}
& \left(1 - \frac{3\Delta t}{2h} - \frac{6\mu}{h^2}\right) \delta_{m-1}^{n+1} + \left(4 + \frac{12\mu}{h^2}\right) \delta_m^{n+1} + \left(1 + \frac{3\Delta t}{2h} - \frac{6\mu}{h^2}\right) \delta_{m+1}^{n+1} \\
& = \left(1 + \frac{3\Delta t}{2h} - \frac{6\mu}{h^2}\right) \delta_{m-1}^n + \left(4 + \frac{12\mu}{h^2}\right) \delta_m^n + \left(1 - \frac{3\Delta t}{2h} - \frac{6\mu}{h^2}\right) \delta_{m+1}^n
\end{aligned} \tag{3.21}$$

(3.20) ifadesi (3.21) de yerine yazıldığında k modu için g büyüme faktörü

$$g = \frac{a - ib}{a + ib} \tag{3.22}$$

şeklindedir. Burada

$$a = \left(2 - \frac{12\mu}{h^2}\right) \cos[kh] + \left(4 + \frac{12\mu}{h^2}\right)$$

ve

$$b = \frac{6\Delta t}{2h} \sin[kh]$$

dir.

(3.22) de verilen sabit değerler alınarak

$$|g| = \sqrt{g \bar{g}} = 1 \quad (3.23)$$

elde edilir.

Bu yüzden lineerleştirme algoritması koşulsuz kararlıdır.

3.3. Nümerik Örnekler

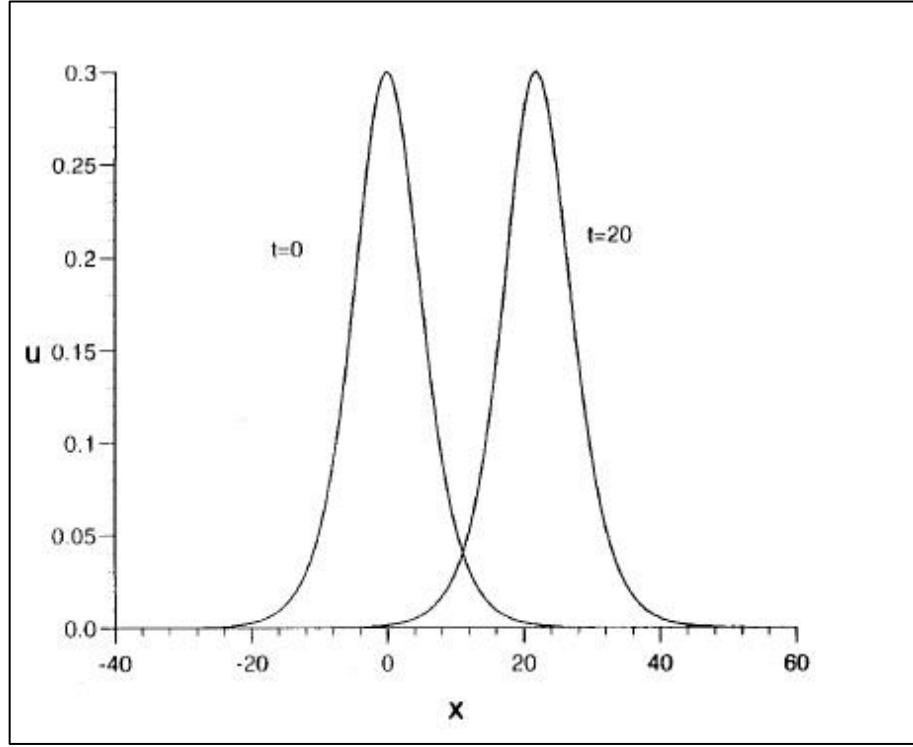
(3.2) denkleminde [3, 5, 6] simulasyon sonuçları ile karşılaştırma yapmak için solitary dalga 0.3 genişliğine sahip olsun diye $-40 \leq x \leq 60, h = 0.125, \Delta t = 0.1$ bölgesi ile $x_0 = 0, c = 0.1$ ile başlangıç şartları alınır. Simulasyon $t = 20$ zamanında çalıştırılır ve L_2 ile L_∞ hata normları ve analitik değeri Çizelge 3.1' de görülen simulasyon yoluyla kaydedilmiş I_1, I_2, I_3 sabitleridir.

I_2, I_3 miktarları yaklaşık $\% 8 \times 10^{-3}$ e kadar değiştirilirken I_1 , $\% 2 \times 10^{-3}$ den daha az değiştirilir. Bu konumun derecesi kuadratik B-spline elemanları ile bulunmasından Galerkin metodu ile bulunması kadar iyi değildir ama diğer metodlarla bulunmasından daha iyidir.

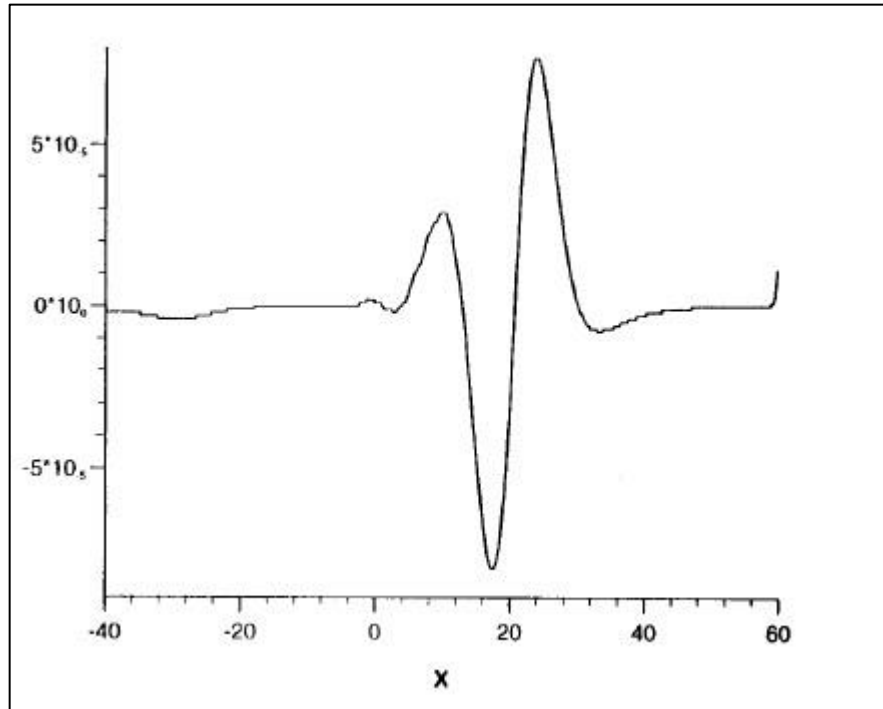
Çizelge 3.1. Tek solitary dalga derinliği = 0.03, $h=0.125$, $\Delta t=0.1$, $-40 \leq x \leq 60$, $I_1=3.9799497$, $I_2=0.81046249$, $I_3=2.579007$.

Metod	Zaman	L_2	L_∞	I_1	I_2	I_3
Petrov	0	0.002×10^{-3}	0.007×10^{-3}	3.97993	0.810461	2.57901
Galerkin	4	0.045×10^{-3}	0.018×10^{-3}	3.97995	0.810459	2.57900
Kuadratik	8	0.090×10^{-3}	0.034×10^{-3}	3.97995	0.810445	2.57895
	12	0.137×10^{-3}	0.052×10^{-3}	3.97995	0.810435	2.57892
	16	0.183×10^{-3}	0.069×10^{-3}	3.97992	0.810418	2.57887
	20	0.227×10^{-3}	0.081×10^{-3}	3.97986	0.810399	2.57880
Galerkin	20	0.220×10^{-3}	0.086×10^{-3}	3.97989	0.810467	2.57902
Kuadratik [43]						
En küçük kareler						
Doğrusal	20	4.688×10^{-3}	1.755×10^{-3}	3.98203	0.808650	2.57302
[45]						
Sonlu eleman	20	196.1×10^{-3}	67.35×10^{-3}	4.41219	0.897342	2.85361
Kübik [43,46]						

Solitary dalganın görünümü $t = 0$ ve $t = 20$ zamanlarında Şekil 3.1 de karşılaştırılmıştır. $t = 20$ zamanında dalganın genişliğinin az miktarda parçalandığı açıktır. (Konumsal/üç boyutta dağılımı) $t = 20$ zamanında dalga görünümünde hatanın konumunun bölündüğü Şekil 3.2 de görülmektedir. Maksimum hata; yaklaşık $\pm 9 \times 10^{-5}$ e kadar değişiklikler ve maksimum titreşimin her iki kenarına da yerleştirilmiştir.



Şekil 3.1. $t = 0$ ve $t = 20$ zamanlarında Solitary dalganın görünümü.



Şekil 3.2. $t = 20$ zamanında dalga görünümünde hatanın konumunun bölünmesi.

3.3.1. Dalga oluşumu

Bir dalga oluşumunun gelişimi

$$U(x, 0) = \frac{1}{2} U_0 \left[1 - \tanh \left(\frac{x-x_c}{d} \right) \right] \quad 3.24$$

başlangıç şartları ile çalışacağız.

Çizelge 3.2. Sabitler ve tek solitary dalga dalganın hata normları için derinlik = 0.03, $h=0.25$, $\Delta t=0.2$, $-80 \leq x \leq 120$.

Metod	Zaman	L_2	L_∞	I_1	I_2	I_3
Petrov Galerkin Kuadratik	0	0.021×10^{-3}	0.042×10^{-3}	1.205551	0.024167	0.072938
	4	0.014×10^{-3}	0.028×10^{-3}	1.205682	0.024167	0.072938
	8	0.012×10^{-3}	0.019×10^{-3}	1.205758	0.024168	0.072938
	12	0.012×10^{-3}	0.013×10^{-3}	1.205799	0.024167	0.072938
	16	0.013×10^{-3}	0.008×10^{-3}	1.205816	0.024167	0.072938
	20	0.014×10^{-3}	0.006×10^{-3}	1.205815	0.024168	0.072938

Çizelge 3.3. Tek solitary dalganın hata hormu $t=0$, derinlik=0.03, $-80 \leq x \leq 120$.

h	Δt	L_2	L_∞
0.125	0.1	0.065×10^{-3}	0.020×10^{-3}
0.25	0.2	0.014×10^{-3}	0.006×10^{-3}
0.5	0.4	0.050×10^{-3}	0.015×10^{-3}

$U(x, 0)$ ve $t = 0.0$ zamanında su yüzeyinin yüksekliği denge seviyesinin (ekilibriyum) üzerinde olduğu görülür. U_0 büyüklüğünün su seviyesindeki değişiklik $x = x_c$ ve yükseklikteki değişiklik d ölçüsü çevresinde yoğunlaşır.

Sınır şartları $x \rightarrow \infty$ için $U \rightarrow 0$ ve $x \rightarrow -\infty$ için $U \rightarrow U_0$ nı gerektirir. I_1, I_2, I_3 miktarları artık sabit değildir fakat M_j oranı sonrasında simulasyon yoluyla lineer olarak artar:

$$\frac{d}{dt} I_1 = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} U dx = U_0 + \frac{1}{2} U_0^2 = M_1$$

$$\frac{d}{dt}I_2 = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[U^2 + \mu \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 \right] dx = U_0^2 + \frac{2}{3} U_0^3 = M_2$$

$$\frac{d}{dt}I_3 = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} [U^3 + 3U^2] dx = 3U_0^2 + 3U_0^3 + \frac{3}{4} U_0^4 = M_3$$

4. TEKİL PERTURBE ETME PROBLEMLERİNİN SONLU ELEMANLAR ÇÖZÜMLERİ

4.1. Giriş

Bu çalışmada tekil perturbe etme problemlerin çözümünü $u(0) = \lambda$ ve $u(1) = \beta$ sınır şartları ile birlikte ele alalım :

$$-\varepsilon u'' + p(x)u' + q(x)u = f(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (4.1)$$

$$u(0) = \lambda \text{ ve } u(1) = \beta \quad (4.2)$$

burada $\varepsilon > 0$ küçük parametre, $p(x), q(x), f(x)$ düzgün ve sınırlı fonksiyonlar, λ, β sonlu sabitlerdir. Etki alanlarının sınırlarında ince katmanların olma ihtimali, sorunun standart biçimde sayısal ayrıklaştırılmasını güvenilmez kılmaktadır.

Bu katmanların kalınlığı ε 'a bağlı olduğu için sınırsız salınımlar $\varepsilon \rightarrow 0$ olduğun da (4.1) denklemi için alışılmış nümerik metodlar ile elde edilen yaklaşım çözümlerinde gözlemlenebilir.

Bu çalışmada kuadratik ve kübik B-spline' ları ile sonlu elemanlar metodu kullanılmıştır. Geometrik Graded mesh üzerinde bahsedilen B-spline ifadeleri verildikten sonra (4.1) denklemi için kolokeyşin metodu uygulanmıştır. kolokeyşin metodunda kuadratik B-spline' ları kullanabilmek için (4.1) denkleminde verilen bir 1. mertebeden birleşmiş sistemde $-u' = v$ olarak düzenlenmiştir. Bu sistem kuadratik B-spline kolokeyşin metodu çalıştırılarak hesaplanmıştır. Nümerik sonuçlar bazı test problemlerinde örneklendirilmiştir.

Kısaca özetlemek gerekirse 2. bölümde, nümerik metodlar verilmiştir. Uygulanan yöntemin etkinliğini göstermek için iki test problemi çalışılmış, elde edilen sonuçlar daha önce elde edilen sonuçlarla sonraki bölümde karşılaştırılmıştır.

4.2. B- Spline Metodları

Nümerik hesaplama için, $[0, 1]$ çözüm bölgesi, x_m düğüm noktalarında alt aralıklara

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N = 1$$

şeklinde bölünmüştür.

$x_{m+1} = x_m + h_m$, $h_m = \sigma h_{m-1}$ $[x_m, x_{m+1}]$ aralığının büyüklüğüdür ve σ mesh oran sabitidir. Geometrik olarak Graded meshi düzenlemek için, h_0 boyutlu birinci elemanın belirlenmesi gereklidir.

$$h_0 + h_1 + \dots + h_{N-1} = 1$$

$$h_0 = \frac{1}{1 + \sigma + \sigma^2 + \dots + \sigma^{N-1}}$$

yazılır. Bu kısımda eğer σ mesh oranı 1 alınırsa aralıklar düzgün olacaktır. Sol sınırdan ince mesh elde etmek için, σ , $\sigma > 1$ olarak seçilmelidir. Diğer taraftan, sağ sınırdan mesh boyutunu daha küçük yapmak için, σ , $\sigma < 1$ seçilmelidir.

4.2.1. Kuadratik B- spline kolokeyşin metodu (QM)

Geometrik Graded mesh üzerinde kuadratik B-spline fonksiyonlar aşağıdaki formda verilir.

$$Q_m = \frac{1}{h_m^2} \begin{cases} (h_m - \xi)^2 \sigma, \\ h_m^2 + 2 h_m \sigma \xi - (1 + \sigma) \xi^2, \\ \xi^2 \end{cases} \quad (4.3)$$

Burada $\xi = x - x_m$ ve $0 \leq \xi \leq h_m$ dir. Kuadratik B-spline bu üç eleman tarafından kaplanır. Herhangi bir Q_m Kuadratik B-spline fonksiyonu ve onun türevleri $[x_{m-1}, x_{m+2}]$ aralığı dışında sıfırdır ve bu yüzden bir eleman üç ardışık kuadratik B-spline' lar tarafından kaplanır. Kuadratik B-spline $\{Q_{-1}, Q_0, \dots, Q_N\}$ kümesi tanımlanan bölge üzerinde taban fonksiyonudur. Böylece u_N yaklaşımı, u analitik yaklaşımı için

$$u_N = \sum_{m=-1}^N \delta_m Q_m \quad (4.4)$$

şeklinde dir.

Burada δ_m bilinmeyen parametrelerdir. x_m noktalarında Q_m değerleri (4.4) denkleminde yerine yazılırsa

$$u_m = u(x_m) = \sigma \delta_{m-1} + \delta_m, \quad (4.5)$$

$$u'_m = u'(x_m) = \frac{2\sigma}{h_m} (\delta_m - \delta_{m-1})$$

u nodal değeri ve u' türevi δ_m parametreleri cinsinden (4.5) şeklinde ifade edilir.

Kuadratik B-spline' lar kullanılarak düzgün çözümler elde etmek için diferansiyel denklemler en fazla 1. mertebeden türevlere sahiptir. (4.1) denkleminde $-u' = v$ alınarak (4.1) denklemini bir 1. mertebeden denklem sistemi haline getirilebilir.

$$\begin{aligned}\varepsilon v' - p(x) v + q(x) u &= f(x), \\ v + u' &= 0\end{aligned}\tag{4.6}$$

Böylece kuadratik B-spline' lar nümerik çözümler için uygulanabilir hale gelmiştir.

(4.6) sisteminde kolokeyşin metodu uygulanırken, u, v fonksiyonları ve onların türevleri, (4.5) denkleminde elde edilen eşitlikleri ile değiştirilir. Bu yer değiştirme sonucunda aşağıdaki system ortaya çıkar.

$$\begin{aligned}\varepsilon \frac{2\sigma}{h_m} (\gamma_m - \gamma_{m-1}) - p(x_m)(\sigma \gamma_{m-1} + \gamma_m) + q(x_m)(\sigma \delta_{m-1} + \delta_m) &= f(x_m) \\ (\sigma \gamma_{m-1} + \gamma_m) + \frac{2\sigma}{h_m} (\delta_m - \delta_{m-1}) &= 0\end{aligned}$$

Gerekli işlemler ile bu sistem aşağıdaki matris şeklinde yazılabilir.

$$\begin{aligned}AX &= F \tag{4.7} \\ A &= \begin{bmatrix} q_0\sigma & \alpha_{01} & q_0 & \alpha_{02} & & & & & & \\ -\alpha_{03} & \sigma & \alpha_{03} & 1 & & & & & & \\ & & q_1\sigma & \alpha_{11} & q_1 & \alpha_{12} & & & & \\ & & -\alpha_{13} & \sigma & \alpha_{13} & 1 & & & & \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & & & q_N\sigma & \alpha_{N1} & q_N & \alpha_{N2} & \\ & & & & & -\alpha_{N3} & \sigma & \alpha_{N3} & 1 & \end{bmatrix} \\ X &= [\delta_{-1}, \gamma_{-1}, \delta_0, \gamma_0, \dots, \delta_N, \gamma_N]^T, \\ F &= [f_0, 0, f_1, 0, \dots, f_N, 0]^T\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}p_m &= p(x_m), q_m = q(x_m), f_m = f(x_m), m = 0, 1, \dots, N \\ \alpha_{m1} &= -p_m \sigma - \varepsilon \frac{2\sigma}{h_m}, \alpha_{m2} = -p_m \sigma + \varepsilon \frac{2\sigma}{h_m}, \alpha_{m3} = \frac{2\sigma}{h_m}\end{aligned}$$

dır.

(4.7) matris sistemi $2N + 4$ bilinmeyen ve $2N + 2$ denkleme sahiptir. Bu sistemin çözümü için, denklem ve bilinmeyen sayısı eşit olmalıdır. (4.2) sınır şartlarından ve (4.5) denkleminde

$$\delta_{-1} = \frac{\lambda - \delta_0}{\sigma}, \quad \delta_N = \beta - \sigma \delta_{N-1}$$

kolayca yazılabilir.

Bu eşitlikler kullanılarak, δ_{-1} ve δ_N bu sistemden yok edilebilir ve sonar (4.7) matris denklemini Thomas algoritması ile çözülebilir. (4.5) denkleminde elde edilen δ_m parametreleri yerine yazılarak nümerik çözüm x_m düğümde bulunmuş olur.

4.2.2. Kübik B- spline kolokeyşın metodu (CM)

Graded kübik B-spline ifadesi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{matrix} Q_{m-1} \\ Q_m \\ Q_{m+1} \\ Q_{m+2} \end{matrix} = \frac{1}{h^3 m} \begin{pmatrix} (h_m - \xi)^3 \sigma^3, \\ -\sigma (\sigma^2 + \sigma + 1)(h_m - \xi)^2 - 6\sigma h_m(h_m - \xi) - 3\sigma^2 h_m^2 \\ -(\sigma^2 + \sigma + 1)\xi^3 + 3\sigma^2 h_m \xi^2 + 3\sigma h_m^2 \xi + h_m^3 \\ \xi^3 \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

Yukarıdaki mesh üzerinde $\xi = x - x_m$ ve $0 \leq \xi \leq h_m$ dir. Bir ϕ_m kübik B-spline, dört ardışık sonlu eleman tarafından kaplanır ve $[x_{m-2}, x_{m+2}]$ aralığı dışında sıfıra eşittir. Bu nedenle $[x_m, x_{m+1}]$ elemanı $\phi_{m-1}, \phi_m, \phi_{m+1}$ ve ϕ_{m+2} şeklinde dört kübik B-spline tarafından kaplanır. Bu B-spline' lar $(\phi_{-1}, \phi_0, \dots, \phi_{N+1})$, $[a, b]$ çözüm bölgesi üzerinde parçalı polinomların tabanıdır. Bu özellikler kullanılarak, u analitik çözümü için nümerik yaklaşımı

$$u_N = \sum_{m=-1}^{N+1} \delta_m \phi_m \quad (4.9)$$

şeklinde. Burada δ_m bilinmeyen parametrelerdir. Graded kübik B-spline fonksiyonlar ikinci mertebeden sürekliliğe sahiptir. Böylece yaklaşım fonksiyonu da ikinci mertebeden sürekli. u değeri ve onun u', u'' konuma göre türevleri x_m düğüm noktasında aşağıdaki ifadeye sahiptir.

$$\begin{aligned} u_m &= \sigma^3 \delta_{m-1} + 2\sigma(\sigma + 1) \delta_m + \delta_{m+1}, \\ h_m u'_m &= 3\sigma [\delta_{m+1} + (\sigma^2 - 1)\delta_m - \sigma^2 \delta_{m-1}], \\ h_m^2 u''_m &= 6\sigma^2 [\sigma \delta_{m-1} - (\sigma + 1) \delta_m + \delta_{m+1}] \end{aligned} \quad (4.10)$$

Kolokeyşın yönteminin uygulanması (4.1) diferansiyel denklemini ile (4.10) ifadesinin yer değiştirilmesine dayanır. Bu denklem sistemi

$$\begin{aligned}
 -\varepsilon \frac{6 \sigma^2}{h_m^2} [\sigma \delta_{m-1} - (\sigma + 1) \delta_m + \delta_{m+1}] + p(x_m) \frac{3\sigma}{h_m} [\delta_{m+1} + (\sigma^2 - 1) \delta_m - \sigma^2 \delta_{m-1}] \\
 + q(x_m) [\sigma^3 \delta_{m-1} + 2\sigma(\sigma + 1) \delta_m + \delta_{m+1}] = f(x_m) , \\
 m = 0, \dots, N
 \end{aligned}$$

şeklinde verilir.

Bazı işlemler sonrası bu sistem aşağıdaki matris şekline dönüştürülebilir.

$$A X = F \quad (4.11)$$

$$A = \begin{bmatrix} \theta_{01} & \theta_{02} & \theta_{03} & & & \\ & \theta_{11} & \theta_{12} & \theta_{13} & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \theta_{N1} & \theta_{N2} & \theta_{N3} \end{bmatrix},$$

$$X = [\delta_{-1}, \delta_0, \dots, \delta_{N+1}]^T, \quad F = [f_0, f_1, \dots, f_N]^T$$

ve

$$\theta_{m1} = -\varepsilon \frac{6 \sigma^3}{h_m^2} - p_m \frac{3 \sigma^3}{h_m} + q_m \sigma^3 ,$$

$$\theta_{m2} = \varepsilon \frac{6 \sigma^2 (\sigma + 1)}{h_m^2} + p_m \frac{3 \sigma (\sigma^2 - 1)}{h_m} + 2q_m \sigma (\sigma + 1)$$

$$\theta_{m3} = -\varepsilon \frac{6 \sigma^2}{h_m^2} - p_m \frac{3 \sigma}{h_m} + q_m ,$$

$$p_m = p(x_m), q_m = q(x_m), f_m = f(x_m), \quad m = 0, \dots, N$$

dir.

Böylece $N + 1$ denklemde $N + 3$ bilinmeyene sahip bir denklem elde edilir. (4.2) sınır şartları; sistemden $\delta_{-1}, \delta_{N+1}$ parametrelerini yok etmemize olanak sağlar. (4.2) denklemi (4.10) denklemi ile birlikte kullanılarak sınır parametreleri

$$\delta_{-1} = \frac{-2(\sigma + 1)}{\sigma^2} \delta_0 - \frac{1}{\sigma^3} \delta_1 + \frac{1}{\sigma^3} u_0 ,$$

$$\delta_{N+1} = -\sigma^3 \delta_{N-1} - 2\sigma(\sigma + 1)\delta_N + u_N$$

gibi bulunabilir. (4.11) de bu denklemlerin yerine yazılabilmesi ile system $(N + 1) \times (N + 1)$ boyutta çözülebilir. Üçgensel band matris sistemine dönüşür. Thomas algoritması kullanılarak bu tip sistemler çözülebilir. (4.10) denkleminde elde edilen δ_m parametrelerinin yerleri değiştirilerek çözümler x_m düğümünde hesaplanabilir.

4.3. Nümerik Örnekler

Verilecek iki örnekte nümerik metodların doğruluğu test edilecektir. Hatalar;

$$L_\infty = |u - u_N|_\infty = \max_j |u_j - (u_N)_j|$$

şeklindedir.

Sınır katmanları her iki örnekte de sağ sınırlarda olduğu için hatayı en aza indirmek için σ mesh oranının en iyi seçimi için (0.1) aralığında arandı. İlk örnek için çözüm grafiği Şekil 4.1, Şekil 4.2, Şekil 4.3 ve Şekil 4.4 te, ikinci örnek için Şekil 4.5, Şekil 4.6, Şekil 4.7 ve Şekil 4.8 de gösterilmiştir. Bu şekiller ε ve $N = 20$ iki farkı için grafikleştirilmiştir. Elde edilen tüm sonuçlar aynı şekillerde numeric metodlarla doğrulanarak grafiğe yerleştirilmiştir. Titreşim, düzgün mesh için görülür, σ mesh oranının en iyi seçiminden sonar yok olur. Bazı ε ne N için, bir ve ikinci örnekler için sırasıyla; Çizelge 4.1 ve Çizelge 4.2 nümerik hatalar hesaplanarak oluşturulmuştur.

Örnek 1: İlk örnek

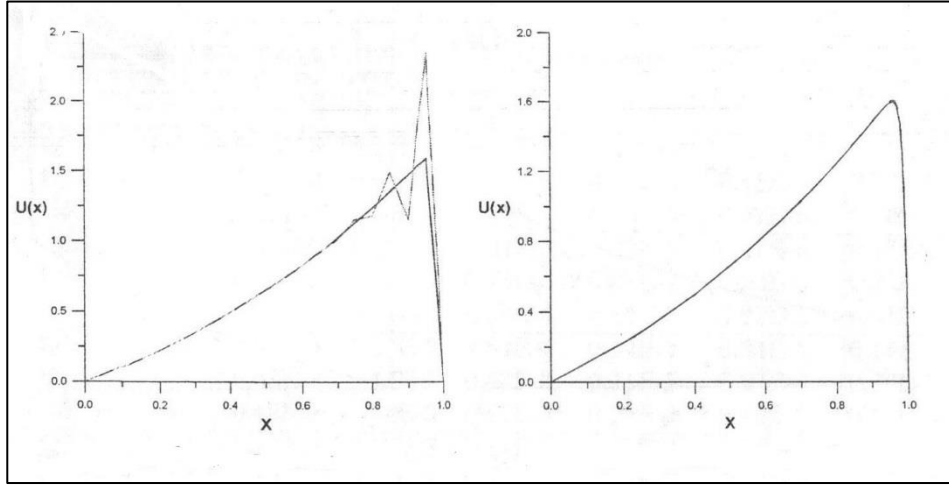
$$-\varepsilon u'' + u' = \exp(x),$$

$$u(0) = u(1) = 0$$

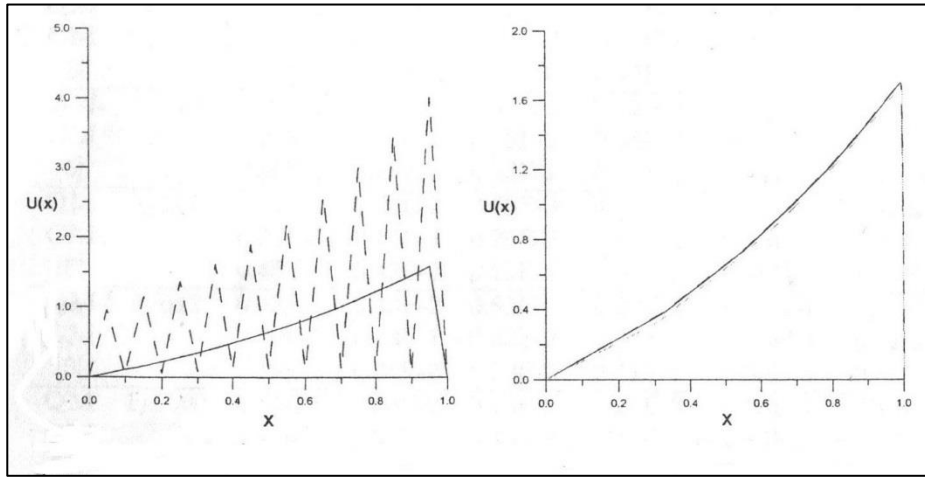
kesin çözüm ile

$$u(x) = \frac{1}{1 - \varepsilon} \left[\exp(x) - \frac{1 - \exp(1 - 1/\varepsilon) + (\exp(1) - 1)\exp((x - 1)/\varepsilon)}{1 - \exp(-1/\varepsilon)} \right]$$

şeklinde (Lorenz,1979) den alınır.



Şekil 4.1. $\varepsilon = 0.01$ için çözüm.



Şekil 4.2. $\varepsilon = 0.001$ için çözüm.

Çizelge 4.1. Örnek 1 için nümerik hatalar.

	ε	$N = 16$	$N = 32$	$N = 64$	$N = 128$	$N = 256$	$N = 512$
QM	1/4	0.14E-2	0.36E-3	0.91E-4	0.23E-4	0.65E-5	0.15E-5
CM		0.33E-2	0.81E-3	0.20E-3	0.51E-4	0.13E-4	0.35E-5
		0.45E-3	0.11E-3	0.28E-4	0.70E-5	0.18E-5	0.44E-6
QM	1/8	0.43E-2	0.11E-2	0.27E-3	0.66E-4	0.17E-4	0.45E-5
CM		0.82E-2	0.21E-2	0.52E-3	0.13E-3	0.32E-4	0.85E-5
		0.66E-3	0.16E-3	0.41E-4	0.10E-4	0.26E-5	0.64E-6
QM	1/16	0.68E-2	0.17E-2	0.43E-3	0.11E-3	0.27E-4	0.74E-5
CM		0.14E-1	0.35E-2	0.87E-3	0.22E-3	0.54E-4	0.14E-4
		0.81E-3	0.21E-3	0.51E-4	0.13E-4	0.32E-5	0.80E-6
QM	1/32	0.96E-2	0.24E-2	0.60E-3	0.15E-3	0.38E-4	0.95E-5
CM		0.20E-1	0.51E-2	0.13E-2	0.32E-3	0.80E-4	0.20E-4
		0.89E-3	0.23E-3	0.58E-4	0.15E-4	0.36E-5	0.91E-6
QM	1/64	0.13E-1	0.32E-2	0.81E-3	0.20E-3	0.51E-4	0.13E-4
CM		0.27E-1	0.70E-2	0.17E-2	0.44E-3	0.11E-3	0.27E-4
		0.91E-3	0.24E-3	0.62E-4	0.16E-4	0.39E-5	0.98E-6
QM	1/128	0.17E-1	0.42E-2	0.11E-2	0.26E-3	0.66E-4	0.17E-4
CM		0.32E-1	0.90E-2	0.23E-2	0.57E-3	0.14E-3	0.36E-4
		0.80E-3	0.24E-3	0.64E-4	0.16E-4	0.41E-5	0.10E-5
QM	1/256	0.21E-1	0.53E-2	0.13E-2	0.33E-3	0.83E-4	0.21E-4
CM		0.28E-1	0.11E-1	0.29E-2	0.72E-3	0.18E-3	0.45E-4
		0.68E-3	0.21E-3	0.61E-4	0.16E-4	0.42E-5	0.11E-5
QM	1/512	0.25E-1	0.65E-2	0.16E-2	0.41E-3	0.10E-3	0.25E-4
CM		0.34E-1	0.14E-1	0.35E-2	0.88E-3	0.22E-3	0.55E-4
		0.60E-3	0.18E-3	0.53E-4	0.15E-4	0.42E-5	0.11E-5
QM	1/1000	0.31E-1	0.77E-2	0.19E-2	0.48E-3	0.12E-3	0.30E-4
CM		0.42E-1	0.16E-1	0.42E-2	0.10E-2	0.26E-3	0.65E-4
		0.55E-3	0.16E-3	0.46E-4	0.14E-4	0.39E-5	0.10E-5

Örnek 2: İkinci örnek için [49] diferansiyel denklemini düşünelim:

$$-\varepsilon u'' + \frac{1}{x+1}u' + \frac{1}{x+2}u = f(x)$$

$$u(0) = 1 + 2^{-1/\varepsilon} \quad , \quad u(1) = \exp(1) + 2$$

alındığında

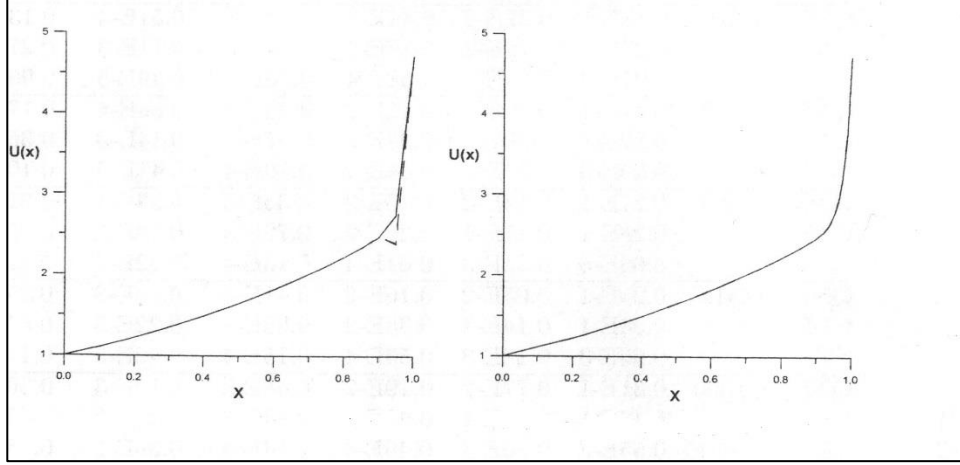
$$f(x) = \left(-\varepsilon + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2}\right) \exp(x) + \frac{1}{x+2} 2^{-1/\varepsilon} (x+1)^{(1+1/\varepsilon)}$$

dır.

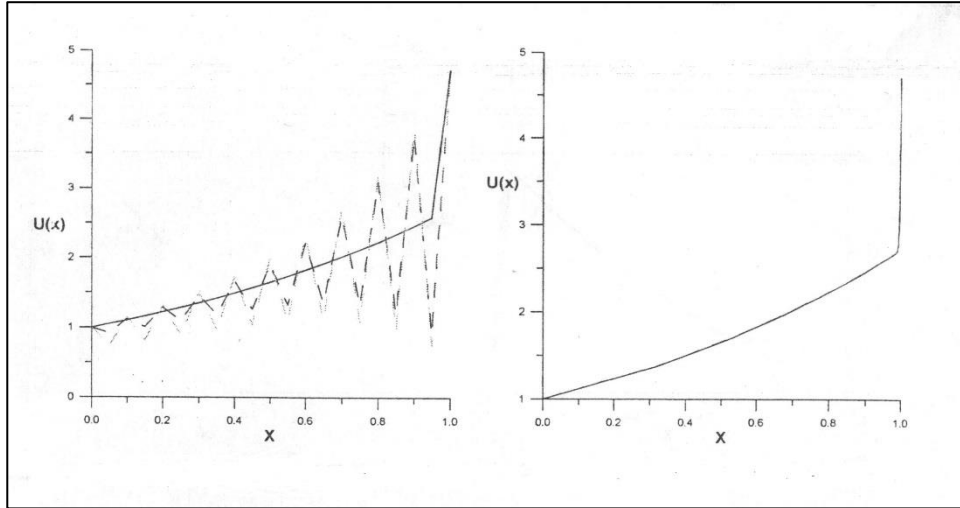
Bu problem için tam çözüm

$$u(x) = \exp(x) + 2^{-1/\varepsilon}(x+1)^{(1+1/\varepsilon)}$$

şeklinde verilir.



Şekil 4.3. $\varepsilon = 0.01$ için çözüm.



Şekil 4.4. $\varepsilon = 0.001$ için çözüm.

Çizelge 4.2. Örnek 2 için nümerik hatalar.

	ε	$N = 16$	$N = 32$	$N = 64$	$N = 128$	$N = 256$	$N = 512$
QM	1/4	0.83E-5	0.23E-5	0.15E-5	0.42E-6	0.45E-6	0.48E-6
CM		0.39E-3	0.99E-4	0.25E-4	0.62E-5	0.15E-5	0.39E-6
		0.12E-3	0.30E-4	0.75E-5	0.19E-5	0.47E-6	0.12E-6
QM	1/8	0.12E-3	0.30E-4	0.81E-5	0.23E-5	0.47E-6	0.46E-6
CM		0.24E-2	0.60E-3	0.15E-3	0.37E-4	0.93E-5	0.23E-5
		0.52E-3	0.13E-3	0.33E-4	0.82E-5	0.20E-5	0.51E-6
QM	1/16	0.90E-3	0.22E-3	0.54E-4	0.14E-4	0.34E-5	0.14E-5
CM		0.68E-2	0.17E-2	0.43E-3	0.11E-3	0.27E-4	0.66E-5
		0.18E-2	0.44E-3	0.11E-3	0.28E-4	0.70E-5	0.17E-5
QM	1/32	0.27E-2	0.67E-3	0.17E-3	0.42E-4	0.10E-4	0.35E-5
CM		0.13E-1	0.33E-2	0.83E-3	0.21E-3	0.52E-4	0.13E-4
		0.45E-2	0.11E-2	0.27E-3	0.67E-4	0.17E-4	0.42E-5
QM	1/64	0.50E-2	0.13E-2	0.32E-3	0.79E-4	0.20E-4	0.55E-5
CM		0.21E-1	0.53E-2	0.13E-2	0.33E-3	0.83E-4	0.21E-4
		0.82E-2	0.25E-2	0.60E-3	0.15E-3	0.37E-4	0.92E-5
QM	1/128	0.76E-2	0.19E-2	0.48E-3	0.12E-3	0.30E-4	0.75E-5
CM		0.29E-1	0.77E-2	0.19E-2	0.48E-3	0.12E-3	0.30E-4
		0.80E-2	0.43E-2	0.13E-2	0.31E-3	0.77E-4	0.19E-4
QM	1/256	0.11E-1	0.26E-2	0.65E-3	0.16E-3	0.41E-4	0.10E-4
CM		0.38E-1	0.10E-1	0.26E-2	0.64E-3	0.16E-3	0.40E-4
		0.45E-2	0.42E-2	0.22E-2	0.66E-3	0.16E-3	0.39E-4
QM	1/512	0.13E-1	0.33E-2	0.83E-3	0.21E-3	0.52E-4	0.13E-4
CM		0.52E-1	0.13E-1	0.33E-2	0.82E-3	0.21E-3	0.51E-4
		0.19E-2	0.24E-2	0.22E-2	0.11E-2	0.33E-3	0.80E-4
QM	1/1000	0.13E-1	0.40E-2	0.10E-2	0.25E-3	0.63E-4	0.16E-4
CM		0.44E-1	0.16E-1	0.40E-2	0.10E-2	0.25E-3	0.63E-4
		0.62E-3	0.12E-2	0.13E-2	0.11E-2	0.56E-3	0.16E-3

5. BURGER DENKLEMİNİN B- SPLINE KOLOKEYŞİN METODLARI İLE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

5.1. Giriş

Parçalı konum-zaman Burger denkleminin her ikisinin de nümerik çözümü yapılmıştır. Parçalı-zaman Burger denklemi için kübik B-spline kolokeyşin metodu uygulanmıştır. Parçalı-konum Burger denkleminin nümerik çözümünü elde etmek için ise kuadratik B-spline metodu kullanıldı.

İki test problem için nümerik hesaplamalar yürütülmüş ve kullanılan bu metodların sonuçları, teorik sonuçlarla ve birbirleri ile karşılaştırılmıştır.

5.2. B –Spline Metodları

Bir boyutlu Burger denklemi

$$U_t + U U_x - v U_{xx} = 0 , \quad (5.1)$$

Şeklinde dir. Burada $v > 0$ sabiti ve x ve t sırasıyla konum ve zamana göre türevleri belirtir. Başlangıç ve sınır koşulları aşağıdaki gibi verilsin.

$$U(x, 0) = f(x) , \quad a \leq x \leq b \quad (5.2)$$

$$U(a, t) = \alpha_1 , \quad U(b, t) = \alpha_2 , \quad t \in [0, T] \quad (5.3)$$

Çalışma boyunca $a \leq x \leq b$ çözüm bölgesinin düzgün bir kısmı olarak x_m düğümü ve

$$h = x_m - x_{m-1} , \quad m = 1, \dots, N , \quad a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$$

alınacaktır.

5.2.1. Kuadratik B- spline kolokeyşin metodu (QBCM)

Kuadratik B-spline kolokeyşin metodunun doğrudan uygulanması, denklemde düzgün çözümler elde etmek için birinci mertebeden türevlerini gerektirir.

Burger denkleminin kuadratik B-spline kolokeyşin metodu ile çözümüne başlayabilmek için , $V = -U_x$ alınarak konum parçalaması yapılacaktır. Böylece Burger denklemi birinci mertebeden türevler içeren denklem sistemine dönüşür. Denklem sisteminde, U, V bilinmeyen fonksiyonları ve onların konuma göre türevleri olan U_x, V_x kuadratik B-spline tarafından ayrıştırılır.

$$Q_m(x), \quad m = -1, \dots, N,$$

$$Q_m(x) = \frac{1}{h^2} = \begin{cases} (x_{m+2} - x)^2 - 3(x_{m+1} - x)^2 + 3(x_m - x)^2, & [x_{m-1}, x_m] \\ (x_{m+2} - x)^2 - 3(x_{m+1} - x)^2, & [x_m, x_{m+1}] \\ (x_{m+2} - x)^2, & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ 0, & \text{diğer durumlarda.} \end{cases} \quad (5.4)$$

$Q_m(x)$, x_m düğüm noktalarında $m = 0, \dots, N$ için B-spline kuadratik fonksiyonlar olsun. Bu kuadratik B-spline $Q_m(x)$ fonksiyonları $[a, b]$ çözüm bölgesinde bir baz oluştururlar. Birinci mertebeden zamana göre parçalanmış Burger denklemi ve $V(x, t) = -U_x(x, t)$ alınarak U ve V için aşağıdaki denklem sistemini verir.

$$U_t - UV + vV_x = 0 \quad (5.5)$$

$$V + U_x$$

bu denklem için başlangıç sınır koşulları

$$U(a, t) = \alpha_1, \quad U(b, t) = \alpha_2, \quad V(a, t) = V(b, t) = 0, \quad t \in [0, T], \quad (5.6)$$

$$U(x, 0) = f(x), \quad V(x, 0) = -f'(x), \quad a \leq x \leq b$$

şeklindedir.

Kolokeyşın metodu (5.5) sisteminin yaklaşım çözümlerini bulmak için uygulanır.

Kolokeyşın yaklaşımı δ_m ve σ_m eleman parametreleri açısından $U(x, t)$ ve $V(x, t)$ için ifade edilebilir. $Q_m(x)$ kuadratik B-spline fonksiyonlar yardımıyla ve sırasıyla;

$$U_N(x, t) = \sum_{m=-1}^N \delta_m(t) Q_m(x), \quad V_N(x, t) = \sum_{m=-1}^N \sigma_m(t) Q_m(x) \quad (5.7)$$

$$m = -1, \dots, N;$$

dir.

δ_m ve σ_m eleman parametreleri, x_m düğüm noktalarında $m = 0, \dots, N$, (5.5) denklem sistemini sağlayan U_N ve V_N için bulunacaktır. U_m , V_m değişkenleri ve bunların türevleri U'_m, V'_m (5.7) içinde değişkeninin yer değiştirmesi ile temsil edilir ve eleman parametreleri açısından onların birinci mertebeden türevleri:

$$U_m = U(x_m) = \delta_{m-1} + \delta_m,$$

$$h U'_m = h U'(x_m) = 2(\delta_m - \delta_{m-1}),$$

$$V_m = V(x_m) = \sigma_{m-1} + \sigma_m,$$

$$h V'_m = h V'(x_m) = 2 (\sigma_m - \sigma_{m-1}), \quad (5.8)$$

şeklindedir.

(5.5) sisteminde (5.7) - (5.8) kolokeyşın yaklaşımlar ve onun düğüm noktalarındaki değerleri kullanıldığında aşağıdaki lineer olmayan denklem sistemi ortaya çıkar.

$$\begin{aligned} h (\delta_{m-1}^\circ + \delta_m^\circ) - h z_m (\sigma_{m-1} + \sigma_m) + 2v (-\sigma_{m-1} + \sigma_m) &= 0, \\ h (\sigma_{m-1} + \sigma_m) + 2 (\delta_m - \delta_{m-1}) &= 0, \end{aligned} \quad (5.9)$$

"o" zamana göre türevi ifade eder ve $z_m = \delta_{m-1} + \delta_m$ lineer olmayan terim olarak da bilinir.

(5.9) sisteminde elde edilen δ_m ve σ_m parametrelerinin zaman ayrıklaştırması n ve $n + 1$ iki ardışık zamanlı seviye arasında interpolasyon ile yapılmıştır. Böylece aşağıdaki $t = (n + 1/2)\Delta t$ ve zamana göre türevi değiştirilerek ve (5.9) sisteminde Crank-Nicholson yaklaşımı ile zaman türevi,

$$\delta_m = \frac{\delta_m^{n+1} + \delta_m^n}{2}, \quad \delta_m^\circ = \frac{\delta_m^{n+1} - \delta_m^n}{\Delta t} \quad (5.10)$$

$$\sigma_m = \frac{\sigma_m^{n+1} + \sigma_m^n}{2}, \quad \sigma_m^\circ = \frac{\sigma_m^{n+1} - \sigma_m^n}{\Delta t}$$

şeklindedir. Böylece $2N + 2$ denklem, $2N + 4$ bilinmeyenden oluşan lineer olmayan bir sistem elde edilir.

$$\begin{aligned} 2h\delta_{m-1}^{n+1} - \beta_{m1}\sigma_{m-1}^{n+1} + 2h\delta_m^{n+1} + \beta_{m2}\sigma_m^{n+1} \\ = 2h\delta_{m-1}^n - \beta_{m1}\sigma_{m-1}^n + 2h\delta_m^n - \beta_{m2}\sigma_m^n \\ -2\delta_{m-1}^{n+1} - h\sigma_{m-1}^{n+1} + 2\delta_m^{n+1} + h\sigma_m^{n+1} = 2\delta_{m-1}^n - h\sigma_{m-1}^n - 2\delta_m^n - h\sigma_m^{n+1}, \\ m = 0, \dots, N \end{aligned} \quad (5.11)$$

$$\beta_{m1} = z_m h \Delta t + 2v \Delta t, \quad \beta_{m2} = -z_m h \Delta t + 2v \Delta t, \quad z_m = \delta_{m-1} + \delta_m \quad (5.12)$$

$U_0 = \delta_{-1} + \delta_0$ ve $V_N = \sigma_{N-1} + \sigma_N$ sınır koşulları $(2N + 2) \times (2N + 2)$ beşgensel matris sistemine (5.11) sisteminden δ_{-1} ve σ_N parametrelerini yok etmek için uygulanır.

(5.11) denklem sistemindeki iterasyon için δ_m° ve σ_m° başlangıç parametrelerine ihtiyaç vardır. Bunu yapmak için $t = 0$ da başlangıç ve sınır koşulları aşağıdaki şartları gerektirir.

$$(U_N)_x(a, 0) = 0, \quad (V_N)_x(a, 0) = 0, \quad (5.13)$$

$$U_N(x, 0) = U(x_m, 0), \quad V_N(x, 0) = V(x_m, 0), \quad m = 0, \dots, N,$$

Bilinmeyen eleman parametrelerinin belirlenmesi için aşağıdaki koşullar verilir.

$$\begin{aligned} \delta_{-1}^0 &= \frac{U(a, 0)}{2}, \quad \delta_0^0 = \frac{U(a, 0)}{2}, \quad \delta_m^0 = U(x_m, 0) - \delta_{m-1}^0 \\ \sigma_{-1}^0 &= \frac{V(a, 0)}{2}, \quad \sigma_0^0 = \frac{V(a, 0)}{2}, \quad \sigma_m^0 = V(x_m, 0) - \sigma_{m-1}^0, \quad m = 0, \dots, N. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Eleman parametreleri belirlendikten sonra δ_m^n ve σ_m^n zaman oluşumları sistemden bulunur. Herhangi bir düğüm değeri ve türevleri programın çalışması esnasında (5.8) den iyileştirilebilir. (5.11) sisteminin lineer olmama durumunu ortadan kaldırmak için $\delta_m^{n+1}, \sigma_m^{n+1}$ parametreleri için her $n + 1$ de aşağıdaki iki veya üç iterasyon kullanılarak daha iyi hale getirilebilir.

$$(\delta^*)^{n+1} = \delta^n + \frac{1}{2}(\delta^{n+1} - \delta^n), \quad (\sigma^*)^{n+1} = \sigma^n + \frac{1}{2}(\sigma^{n+1} - \sigma^n), \quad (5.15)$$

$$\delta^n = (\delta_{-1}^n, \delta_0^n, \dots, \delta_N^n)^T, \quad \sigma^n = (\sigma_{-1}^n, \sigma_0^n, \dots, \sigma_N^n)^T. \quad (5.16)$$

5.2.2. Kübik B- spline kolokeyşin metodu (CBCM)

Burger denklemi zaman değişkeni için ikiye parçalanır.

$$U_t + 2UU_x = 0, \quad (5.17)$$

$$U_t + 2vU_{xx} = 0.$$

Parçalı-zamanlı Burger denklemi ikinci mertebeden türevleri içerir. Bu yüzden kolokeyşin metodunda deneme fonksiyonları için kübik B-spline seçmeliyiz. Bu seçim deneme fonksiyonlarının ikinci mertebeye kadar sürekliliğini sağlar.

Q_m kübik B-spline şekli $m = -1, \dots, N + 1$, $[a, b]$ aralığında aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$Q_m(x) = \frac{1}{h^3} = \begin{cases} (x - x_{m-2})^3, & [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ h^3 + 3h^2(x - x_{m-1}) + 3h(x - x_{m-1})^2 - 3(x - x_{m-1})^3, & [x_{m-1}, x_m] \\ h^3 + 3h^2(x_{m+1} - x) + 3h(x_{m+1} - x)^2 - 3(x_{m+1} - x)^3, & [x_m, x_{m+1}] \\ (x_{m+2} - x)^2, & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ 0, & \text{diğer durumlarda.} \end{cases} \quad (5.18)$$

Bu formun parçalı-zamanlı Burger denleminin yaklaşan bir çözümü aranır.

$$U_N(x, t) = \sum_{m=-1}^{N+1} \delta_m(t) Q_m(t) \quad (5.19)$$

δ_m katsayıları, $N + 1$ kolokeyşin noktası ve sınır şartlarında (5.17) denklemi U_N değerini gerektirerek bulunur.

U nodal değeri, U' birinci mertebeden türevi ve U'' ikinci mertebeden türevi x_m düğümlerinde (5.19) ve (5.18) de kübik B-spline ifadeleri kullanılarak elde edilir.

$$\begin{aligned} U_m &= \delta_{m-1} + 4\delta_m + \delta_{m+1}, \\ h U'_m &= 3(\delta_{m+1} - \delta_{m-1}), \\ h^2 U''_m &= 6(\delta_{m-1} - 2\delta_m + \delta_{m+1}), \end{aligned} \quad (5.20)$$

eleman parametreleri cinsinden ' ve ' sırasıyla x ' in birinci ve ikinci türevlerini gösterir.

Kolokeyşin metodunu uygulamak için, kolokeyşin noktaları düğümlere denk olarak seçilir ve sonra U_m nodal değerleri ve (5.17) de U'_m ve U''_m ilk iki ardışık türevleri ile değiştirilir. Bu, birinci mertebeden adi diferansiyel denklemlerin matris sistemini aşağıdaki gibi verir.

$$\delta_{m-1}^\circ + 4\delta_m^\circ + \delta_{m+1}^\circ + \frac{6}{h} z_m (-\delta_{m-1} + \delta_{m+1}) = 0, \quad (5.21)$$

$$\delta_{m-1}^\circ + 4\delta_m^\circ + \delta_{m+1}^\circ - \frac{12}{h^2} v (\delta_{m-1} - 2\delta_m + \delta_{m+1}) = 0, \quad (5.22)$$

"o" zamana göre türevi ifade etmektedir ve $z_m = \delta_{m-1} + 4\delta_m + \delta_{m+1}$ (5.21)' in lineer olmayan bir terimidir.

δ_m parametreler vektörü ve onların zaman türevleri (5.21) için n ve $n + 1/2$ için iki zaman seviyesi arasında lineer olarak interpolasyon olduğunu varsayalım.

$$\delta_m = \frac{\delta_m^n + \delta_m^{n+1/2}}{4}, \quad \delta_m^\circ = \frac{1}{\Delta t} (\delta_m^{n+1/2} - \delta_m^n), \quad (5.23)$$

ve δ_m parametreleri ve onların zaman türevleri (5.22) için $n + 1/2$ ve $n + 1$ iki zaman seviyesi arasında interpolate edilir.

$$\delta_m = \frac{\delta_m^{n+1} + \delta_m^{n+1/2}}{4}, \quad \delta_m^\circ = \frac{\delta_m^{n+1} - \delta_m^{n+1/2}}{\Delta t}. \quad (5.24)$$

Yukarıdaki (5.21)-(5.22) denklemlerinde (5.23)-(5.24) ifadeleri yerlerine yazarak, sırasıyla $N + 3$ bilinmeyen parametrelerde $N + 1$ denkleme sahip her bir denklem lineer olmayan bir sisteme neden olur.

$$\alpha_1 \delta_{m-1}^{n+1/2} + \alpha_2 \delta_m^{n+1/2} + \alpha_3 \delta_{m+1}^{n+1/2} = \alpha_3 \delta_{m-1}^n + \alpha_2 \delta_m^n + \alpha_1 \delta_{m+1}^n, \quad (5.25)$$

$$\alpha_4 \delta_{m-1}^{n+1} + \alpha_5 \delta_m^{n+1} + \alpha_6 \delta_{m+1}^{n+1} = \alpha_6 \delta_{m-1}^{n+1/2} + \alpha_7 \delta_m^{n+1/2} + \alpha_6 \delta_{m+1}^{n+1/2}, \quad (5.26)$$

$$\alpha_1 = 4h - 6d \Delta t, \quad \alpha_2 = 16h + 24\mu, \quad \alpha_3 = 4h + 6d \Delta t, \quad (5.27)$$

$$\alpha_4 = h^2 - 3v \Delta t, \quad \alpha_5 = 4h^2 + 6v \Delta t, \quad \alpha_6 = h^2 + 3v \Delta t.$$

(5.25) - (5.26) çözülebilir sistemi var, $U(a, t) = U_0, U(b, t) = U_N$ sınır şartlarının uygulanması (5.23) - (5.26) ifadeleri

$$\delta_{-1}^{n+1/2} = U_0 - \delta_0^{n+1/2}, \quad \delta_N^{n+1/2} = U_N - \delta_{N-1}^{n+1/2}$$

parametrelerinin yok edilmesine yardımcı olur.

$(N + 1) \times (N + 1)$ üçgensel band matris denklemi Thomas algoritması ile çözülebilir. $m = -1, \dots, N + 1, \delta_m^{n+1/2}$ parametreleri bulunarak, (5.25) sisteminden δ_m^{n+1} çözüm parametreleri (5.26) sisteminden elde edilir.

Çözüm parametrelerini ele almadan önce başlangıç ve sınır şartları kullanılarak δ_m° başlangıç parametreleri bulunur.

$$(U_x)_N(x_0, 0) = \frac{3}{h} (\delta_1 - \delta_{-1}) = U_x(x_0, 0),$$

$$U_N(x_j, 0) = \delta_{m-1} + 4\delta_m + \delta_{m+1} = U(x_j, 0), \quad j = 0, \dots, N, \quad (5.28)$$

$$(U_x)_N(x_N, 0) = \frac{3}{h} (\delta_{N+1} - \delta_{N-1}) = U_x(x_N, 0).$$

Yukarıdaki denklemler Thomas algoritması kullanılarak çözümü bulunabilen üçgensel band matris sistemi elde edilir. (5.28) sistemi kullanılarak δ_m° yaklaşımı bulunduğunda, δ_m^n zaman parametreleri dışında (5.25) - (5.26) cebirsel sistemlerinden hesaplanır. δ^{n+1} her bir zaman adımına geçmeden önce (5.15) iterasyonu lineer olmayan denklem sisteminin geliştirilmesi için iki veya üç kez tekrar edilmelidir.

5.2. Nümerik Örnekler Ve Sonuçları

Burger denkleminin nümerik sonuçları iki test problem için bulunmuştur. Metodların doğruluğu ise ayrık L_2 ve L_∞ hata normları için hesaplanmıştır.

$$|U - U_N|_\infty = \max_j |U_j - (U_N^n)_j|, \quad \|U - U_N\|_2^2 = h \sum_{j=0}^N |(U_j - (U_N^n)_j)|^2 \quad (5.29)$$

a.Burger denkleminin şok-dalga çözümü $t_0 = \exp(1/8v)$ için

$$U(x, t) = \frac{x/t}{1 + \sqrt{(t/t_0)} \exp(x^2/4vt)}, \quad t \geq 1, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (5.30)$$

analitik çözümüne sahiptir. (5.2) denkleminde $t = 1$ alınarak hesaplanan başlangıç şartları ve $U(0, t) = U(1, t) = 0$ sınır şartları kullanılmıştır. Metodun geçerliliği için problem $[0,1]$ aralığında daha önce kullanılan $h = 0.005$, $\Delta t = 0.01$ ve $v = 0.005$ ile çözülmüştür. Program $t = 3.25$ zamanına kadar çalıştırılmıştır. QBCM ve CBCM 'nın sonuçları ve bazı zamandaki analitik çözüm Çizelge 5.1' de verilmiştir.

Nümerik çözümler uygun sınırlar içerisinde analitik çözümleri göstermiştir. Norm terimlerinde QBCM' nin sonuçlarının CBCM' nin sonuçlarından daha iyi olduğu görülmüştür. Sonuçların önceki hata normları bir sonrakinden daha iyidir. Sonuçlar karşılaştırılır. Denklem parçalandığında Burger denklemini için kübik B-spline kolokeyşin metodunun sonuçlarından daha az hataya sahip olduğu için QBCM kullanılmasının avatajlı olduğu görülmüştür. Fakat CBCM kullanılarak da aynı sonuçlar elde edilmiştir. Şekil 5.1 ve Şekil 5.2' nin her ikisinde de grafik çözümleri $t = 3.25$ olarak alınmıştır. Toplam hata dağılımları, sağ sınırda yoğunlaşmış bir şekilde Şekil 5.3 - Şekil 5.4' de $t = 3.25$ ' de gösterilmiştir. Bunun anlamı hata da artışa neden olmasıdır.

Daha küçük $v = 0.0005$ vizkozite sabiti ile uygun sayısal testler yürütülmüştür. Hesaplanan sonuçlar Çizelge 5.2' de verilmiştir. Bir kez daha QBCM' nin, CBCM den daha az hata sağladığı görülmüştür. Şekil 5.5 ve Şekil 5.6 bazı zamanlarda nümerik çözümleri göstermiştir. Daha küçük vizkozite değeri için yayılma değeri daha diktir. Daha küçük vizkozite değeri kullanıldıkça hata artar. Şekil 5.7 ve Şekil 5.8 şekillerinin her ikisinde de hata dağılımları da $t = 3.25$ alınarak çizilmiş, maksimum hata şokun merkezinde QBCM için 0.014 ve CBCM için 0.021 olarak ölçülmüştür. Burger denkleminin B-spline Galerkin sonlu eleman ve kübik B-spline kolokeyşin metodlarının direk uygulanması, gösterilen şekillerin her ikisinden daha az hata sağlar.

b. İkinci test örneği için, Burger denkleminin özel çözümü

$$\eta = \frac{\alpha(x - \mu t - \gamma)}{v} \quad \text{alındığında,}$$

$$U(x, t) = \frac{\alpha + \mu + (\mu - \alpha) \exp \eta}{1 + \exp \eta}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t \geq 0 \quad (5.31)$$

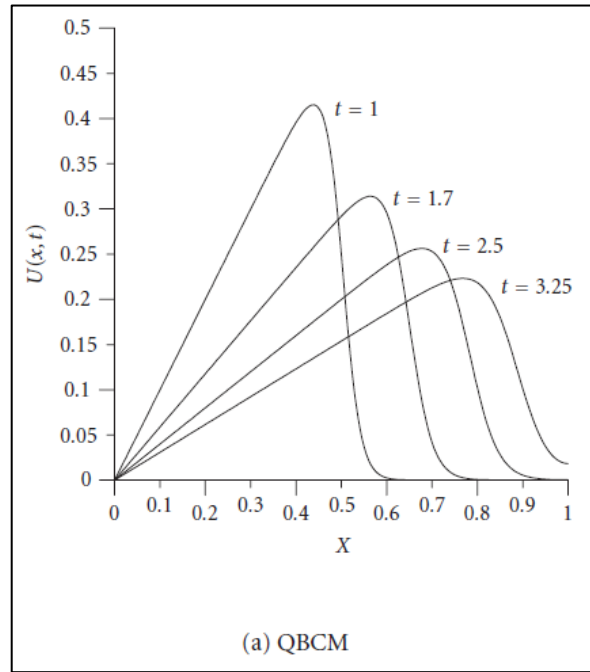
elde edilir.

Çizelge 5.1. $h=0.005$, $\Delta t=0.01$ ve $\nu=0.005$.

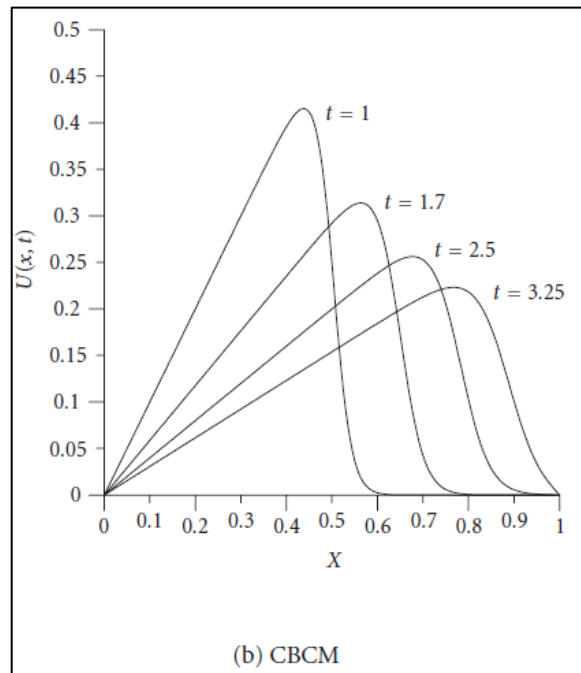
X	QBCM	CBCM	Tam	QBCM	CBCM	Tam	QBCM	CBCM	Tam
	$t = 1.7$	$t = 1.7$	$t = 1.7$	$t = 2.5$	$t = 2.5$	$t = 2.5$	$t = 3.25$	$t = 3.25$	$t = 3.25$
0.1	.05882	0.05882	0.05882	0.04000	0.04000	0.04000	0.03077	0.03077	0.03077
0.2	0.11764	0.11764	0.11765	0.08000	0.08000	0.08000	0.06154	0.06154	0.06154
0.3	0.17646	0.17646	0.17646	0.12000	0.12000	0.12000	0.09230	0.09230	0.09231
0.4	0.23517	0.23517	0.23517	0.15998	0.15998	0.15998	0.12307	0.12307	0.12307
0.5	0.29190	0.29192	0.29190	0.19982	0.19983	0.19983	0.15380	0.15380	0.15380
0.6	0.29572	0.29492	0.29591	0.23811	0.23812	0.23812	0.18430	0.18430	0.18430
0.7	0.04207	0.04299	0.04193	0.25302	0.25275	0.25310	0.21269	0.21269	0.21270
0.8	0.00063	0.00066	0.00065	0.10228	0.10269	0.10210	0.21838	0.21817	0.21844
0.9	0.00000	0.00000	0.00000	0.00553	0.00568	0.00554	0.10170	0.10124	0.10126
$L_2 \times 10^3$	0.07215	2.46642		0.05103	2.11187		1.24901	1.92482	
$L_\infty \times 10^3$	0.31153	27.5770		0.18902	25.1517		8.98390	21.0489	
	$t = 1.7$			$t = 2.4$			$t = 3.1$		
$L_2 \times 10^3 [1]$	0.857			0.423			0.235		
$L_\infty \times 10^3 [1]$	2.576			1.242			0.688		
$L_2 \times 10^3 [2]$	0.857			0.423			0.235		
$L_\infty \times 10^3 [2]$	2.576			1.242			0.688		

Çizelge 5.2. $h=0.005$, $\Delta t=0.01$ ve $\nu=0.0005$.

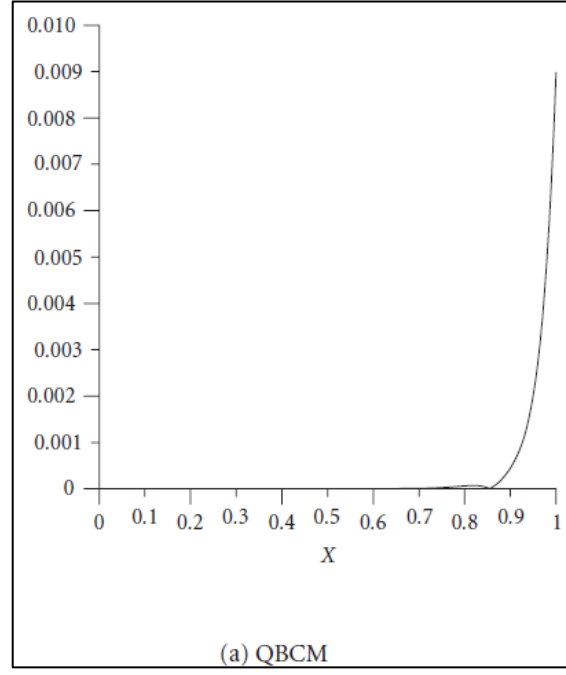
X	QBCM	CBCM	Tam	QBCM	CBCM	Tam	QBCM	CBCM	Tam
	$t = 1.7$	$t = 1.7$	$t = 1.7$	$t = 2.5$	$t = 2.5$	$t = 2.5$	$t = 3.25$	$t = 3.25$	$t = 3.25$
0.1	0.05882	0.05882	0.05882	0.04000	0.04000	0.04000	0.03077	0.03077	0.03077
0.2	0.11765	0.11765	0.11765	0.08000	0.08000	0.08000	0.06154	0.06154	0.06154
0.3	0.17646	0.17647	0.17647	0.11999	0.12000	0.12000	0.09232	0.09231	0.09231
0.4	0.23525	0.23529	0.23529	0.15998	0.16000	0.16000	0.12309	0.12308	0.12308
0.5	0.29414	0.29412	0.29412	0.20002	0.20000	0.20000	0.15383	0.15385	0.15385
0.6	0.35303	0.35294	0.35294	0.24005	0.24000	0.24000	0.18457	0.18461	0.18462
0.7	0.00001	0.00000	0.00000	0.28002	0.28000	0.28000	0.21536	0.21538	0.21538
0.8	0.00000	0.00000	0.00000	0.00719	0.00845	0.00977	0.24615	0.24615	0.24615
0.9	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.12021	0.11037	0.12434
$L_2 \times 10^3$	1.24624	2.46642		1.43951	2.11186		1.24624	1.92482	
$L_\infty \times 10^3$	13.8155	27.5770		16.7712	25.1517		13.8155	21.0489	
	$t = 1.75$			$t = 2.5$			$t = 3.25$		
$L_2 \times 10^3 [1]$	0.235			0.567			0.308		
$L_\infty \times 10^3 [1]$	0.688			5.880			2.707		
$L_2 \times 10^3 [2]$	0.567			0.308			0.239		
$L_\infty \times 10^3 [2]$	5.880			2.705			2.291		



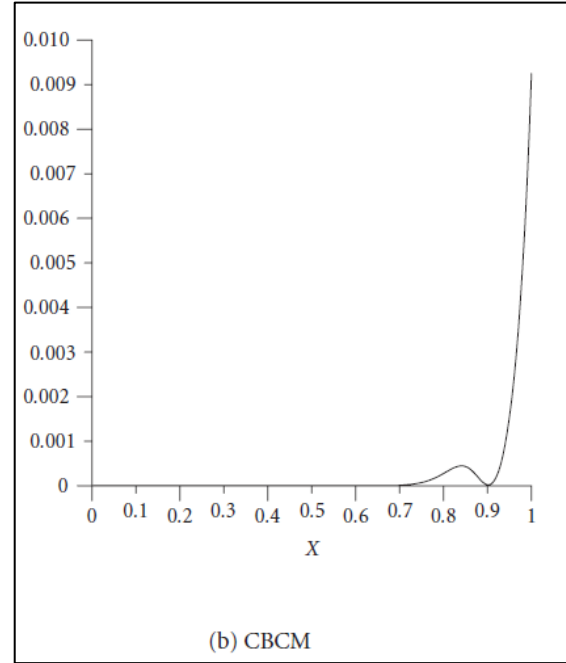
Şekil 5.1. $\nu = 0.005, h = 0.005, \Delta t = 0.01$.



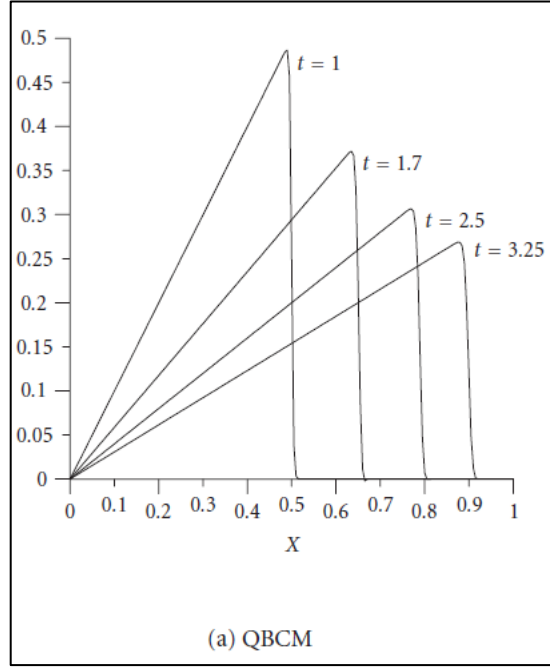
Şekil 5.2. $\nu = 0.005, h = 0.005, \Delta t = 0.01$.



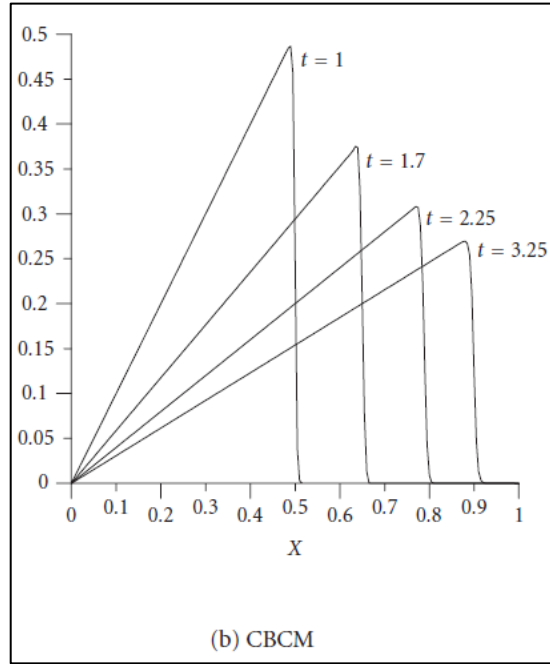
Şekil 5.3. $\nu = 0.005$ ve $t = 3.25$ (Nümerik – Analitik) hatalar.



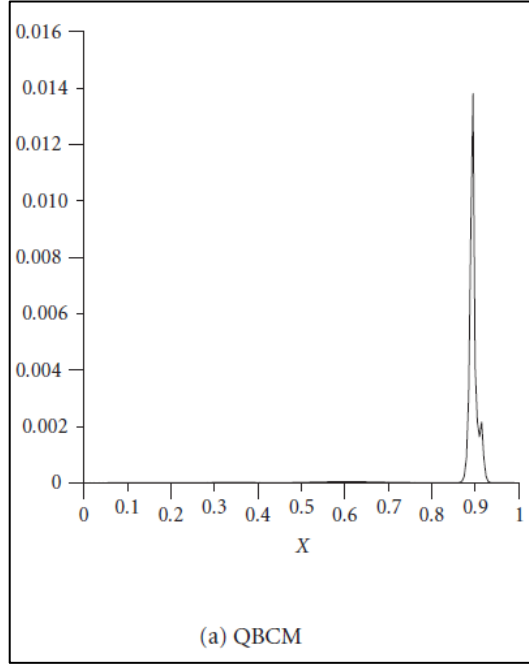
Şekil 5.4. $\nu = 0.005$ ve $t = 3.25$ (Nümerik – Analitik) hatalar.



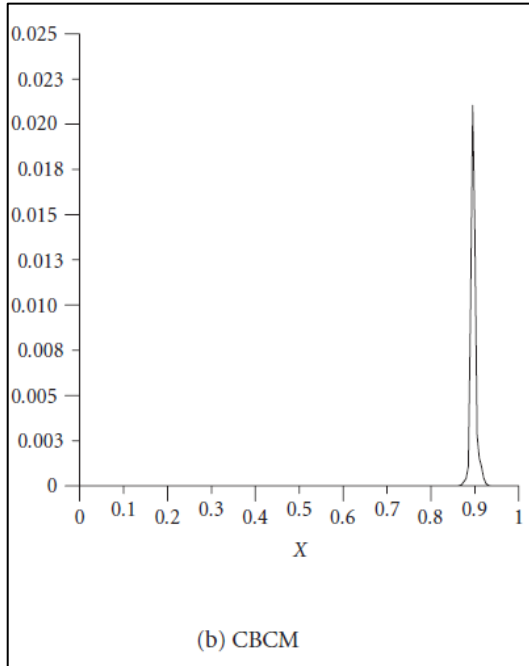
Şekil 5.5. $v = 0.0005, h = 0.005, \Delta t = 0.01$.



Şekil 5.6. $v = 0.0005, h = 0.005, \Delta t = 0.01$.



Şekil 5.7. $t = 3.25, \nu = 0.0005$ (Nümerik – Analitik) hatalar.



Şekil 5.8. $t = 3.25, \nu = 0.0005$ (Nümerik – Analitik) hatalar.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, Burger, Rlw denklemleri ile tekil perturbe etme problemlerinin B-spline fonksiyonlar yardımıyla nümerik çözümleri incelenmiştir.

Burger denklemi için graded mesh kullanılarak Kuadratik B-spline Galerkin ve Kübik B-spline Kolokeyşın yöntemleri uygulanmış ve bu çözümlerin düzenli mesh ile elde edilen çözümlerle karşılaştırılması yapılmıştır. Bu karşılaştırma sonucunda graded mesh çözümlerinin düzgün mesh çözümlerine göre daha etkili olduğu görülmüştür.

Burger denklemindeki vizkozite sabitinin farklı değerlerinin çözüme ekisi de test problemi üzerinde gösterilmiştir.

Rlw denklemi için Petrov-Galerkin metodu ile çözümü yapılmış ve L_2 , L_∞ hata normlarına göre incelemeler yapılarak etkili bir çözüm elde edildiği nümerik örnekler üzerinde gösterilmiştir.

Tekil perturbe etme problemi için graded mesh kullanılarak Kuadratik ve Kübik Kolokeyşın yöntemleri uygulanmış, L_∞ hata normuna göre çözümlerin etkinliği araştırılmıştır.

Sonuç olarak bu çalışmada graded mesh ve düzgün mesh çözümleri incelenmiş, genellikle graded mesh çözümlerinin daha iyi sonuç verdiği görülmüştür.

Daha ileriki çalışmalarda, düzgün mesh ile yapılan nümerik çözümlerin hatasını azaltmak ve çözümü iyileştirmek için graded mesh kullanılması önerilir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

- Ali., H. A., Gardner., L. R. T., Gardner, G. A., (1990), A Galerkin Approach to the Solution of Burgers' Equation, Maths Preprint Series, no. 90.04, University College of North Wales, Bangor.
- Ali., H. A., Gardner., L. R. T., Gardner, G. A., (1990), A Galerkin approach to the solution of Burgers' equation, UCNW Maths Pre-print, 90.04.
- Ali., H. A., Gardner., L. R. T., Gardner, G. A., (1992), A collocation solution for Burgers' equation using cubic B-spline finite elements, Comput. Method Appl. M. 100, no. 3, 325–337.
- Ali., H. A., Gardner., L. R. T., Gardner, G. A., (1992), A collocation solution for Burgers' equation using cubic B-spline finite elements, Comput. Methods Appl. Mech. Eng., S. 100, s. 325-37.
- Bateman, H., (1915), Some recent researches on the motion of fluids, Monthly Weather Rec., S. 43, s. 163-70.
- Beckett, G., J. A. Mackenzie, (2001), Uniformly convergent high order finite element solutions of a singularly perturbed reaction-diffusion equation using mesh equidistribution, Appl. Numer. Math., 39, 31-45.
- Burger, J. M., (1948), A mathematical model illustrating the theory of turbulence , Adv. In App. Mech., S.1, s.171-99.
- Burgers, J. M., (1948) A mathematical model illustrating the theory of turbulence, Advances in Applied Mechanics, Academic Press, New York, s. 171–199.
- Caldwell, J., (1987), Application of cubic splines to the nonlinear Burgers' equation , in Hinton, E. et al. (Eds), Numerical Methods for Nonlinear Problems, S. 3, Pineridge Press, Swansea, s. 253-61.
- Canıvar, A., (2011), Lineer olmayan kısmi türevli denklemlerin kuadratik B-spline kolokeyşin metodu ile çözümleri, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Enstitüsü, Eskişehir.
- Christie, I., Griffiths, D. F., Mitchell, A. R. ve Sanz-Serna, J. M., (1981), Product approximation for nonlinear problems in the finite element method, IMA, J. Num. Anal. S.1, s. 253-66.
- Cole, J. D., (1951), On a quasi-linear parabolic equation occurring in aerodynamics, Q. Appl. Math. 9, 225–236.
- Dağ İ., İrk D., Şahin A., (2004), B-spline collocation methods for numerical solutions of the Burgers' equation.
- Dağ İ., Şahin A., (2007), Numerical solutions of the Burgers' equation over geometrically graded mesh Computer engineering department and Mathematics department, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Eskişehir, Turkey.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Dağ, İ., Şahin A., (2009), Finite element solutions of the singularly perturbed problems, Mathematics Department Eskişehir Osmangazi University, 26480, Eskişehir, Turkey.

Dağ, İ., (1994), Studies of B-spline finite elements , PhD thesis, University College of North Wales, Bangor.

Dağ, İ., Irk, D., Şahin, A., (2005), B-spline collocation methods for numerical solutions of the Burgers' equation , Math. Probl. Eng., S.5, s.521-38.

Dalman H., (2009), Bazı kısmi türevli denklemlerin kuadratik B-spline kolokeyşin metodu ile çözümleri, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.

Davies, A. M., (1977), A numerical investigation of errors arising in applying the Galerkin method of the solutions of nonlinear partial differential equations, Comput. Methods Appl. Mech. Eng., S.11. s.341-50.

Davies, A. M., (1978), Application of Galerkin method to the solution of Burgers' equation, Comput. Methods Appl. Mech. Eng., S.14. s, 305-21.

Davies, A. M., (1978), Application of the Galerkin method to the solution of the Burgers' equation, Comput. Method Appl. M. 14, 305–321.

Doğan, A., (2001), Numerical solution of regularized long wave equation using Petrov-Galerkin method Department of Mathematics, Faculty of Art-Science, University of Niğde, Niğde, Turkey.

Eugene.C. G., J. R., (1987), Uniformly high-order difference schemes for a singularly perturbed two point boundary value problem, Math. Comput. 48 (178), 551-564.

Fyfe, D. J., (1969), The use of cubic splines in the solution of two-point boundary value problems, Comput. J., 12 (2), 188-192.

Gardner L. R. T., Gardner, G. A., Dağ, I. A., (1995), B-spline finite element method for the RLW equation. Communications in Numerical Methods in Engineering; 11:59–68.

Gardner L. R. T., Gardner, G. A., Doğan A., (1996), A least-squares finite element scheme for the RLW equation. Communications in Numerical Methods in Engineering; 12:795–804.

Gardner, L. R. T., Gardner, G. A., Ali, A. H. A., (1991), 11-December, A method of lines solutions for Burgers' equation , Proceeding of the Asian Pasific Conference on Computational Mechanic, Hong Kong.

Gardner, L. R. T., Gardner, G. A., Dagi I., (1993), Hermite infinite elements and graded quadratic B-spline finite elements, Internat. J. Numer. Methods Engrg., S.36, s. 3317-32.

Hopf, E., (1950), The partial differential equation $U_t + UU_x = \mu U_{xx}$, Comm. Pure App. Math, S.3, s. 201-30.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Jain, P. C, Shankar, R., T. V. Singh., (1995), Numerical technique for solving convective-reactiondiffusion equation, *Math. Comput. Model* 22, no. 9, 113–125.

Jain, P. C. ve Holla, D. N., (1976), Numerical solutions of coupled Burgers' equations, *Int. J. Non-linear Mech*, S.13, s.213-22.

Jain, P. C., Holla, D. N., (1978), Numerical solutions of coupled Burgers' equations, *Int. J. Nonlinear. Mech*. 13, 213–222.

Jain, P. C., Lohar, B. L, (1979)., Cubic spline technique for coupled nonlinear parabolic equations, *Comput. Math. Appl*. 5, no. 3, 179–185.

Jain, P. C., Lohar, B. L., (1979), Cubic spline technique for coupled non-linear parabolic equations , *Comp. Maths. With Appls.*, S.5, s.179-85.

Jain, P. C., Shankar R., Singh T. V., (1993), Numerical solutions of regularized long wave equation. *Communications in Numerical Methods in Engineering*; 9:579–586.

Jain, P. C., Shankar, R., Singh, T. V., (1995), Numerical technique for solving convective-reaction-diffusion equation , *Math. Comput. Modelling*, S.22, s.113-25.

Kadalbajoo, M. K., Patidar, K. C., (2002), Numerical solution of singularly perturbed two-point boundary value problems by spline in tension, *Appl. Math. Comput.*, 131, 299-320.

Kutluay, S., Esen, A., Dağ, I., (2004), The numerical solutions of the Burgers' equation by least squares quadratic B-spline element method , *J. Comput. Appl. Math.*, S.167, s.21-23.

Lighthill, M. J., (1956), Viscosity effects in sound waves of finite amplitude, *Surveys in Mechanics* (G. K. Batchlor and R. M. Davies, eds.), Cambridge University Press, Cambridge, s. 250–351 (2 plates).

Liu, W., Tang, W., (2001), Error analysis for a Galerkin-spectral method with coordinate transformation for solving singularly perturbed problems, *Appl. Numer. Math.*, 38, 315-345.

Lohar, B. L., Jain, P. C., (1981), Variable mesh cubic spline technique for N-wave solution of Burgers' equation. *J. Comput, Physc.*, S.39, s.433-42.

Lohar, B. L., P. C. Jain., (1981), Variable mesh cubic spline technique for N-wave solution of Burgers' equation, *J. Comput. Phys*. 39, no. 2, 433–442. 538 B-spline FEM to the Burgers' equation.

Lorenz, J., (1979), Combination of initial and boundary value methods for a class of singular perturbation problems.

Miller, E. L., (1966), Predictor-corrector studies of Burgers' model of turbulent flow, MS thesis, University of Delaware, Newark, DE.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Olver, P. J., (1979), Euler operators and conservation laws of the BBM equation. Mathematics Proceedings of the Cambridge Philosophical Society; 85:143–159.

Penter, P. M., (1975), Splines and variational methods, J.Wiley, New York

Peregrine, D. H., (1966), Calculations of the development of an undular bore. Journal of Fluid Mechanics; 25: 321–330.

Pospelov, L. A., (1966), Propagation of finite-amplitude elastic waves, Soviet Phys. Acoust. 11, 302-304.

Rao, S. C. S., Kumar, M., (2006), Optimal B-spline collocation method for self adjoint singularly perturbed boundary value problems, Appl. Math. Comput., in press.

Rubin, S. G., Graves, R. A., (1975), Cubic spline approximation for problems in fluid mechanics, Nasa TR R-436, Nasa, Washington, DC.

Rubin, S. G., Khosla, P. K., (1976), Higher-order numerical solutions using cubic splines, AIAA Journal, S. 14, s.851-8

Rubin, S. G., P. K. Khosla., (1976), Higher-order numerical solutions using cubic splines, AIAA J. 14, no. 7, 851–858.

Rubin, S. G., R. A. Graves., (1975), Cubic spline approximation for problems in fluid mechanics, Nasa TR R-436, , District of Columbia.

Stajanovic, M., (1996), Spline difference methods for a singular perturbation problem, Appl. Numer. Math., 21, 321-333.

Van der Pol. B., (1951), On a non-linear partial differential equation satisfied by the logarithm of the Jacobian theta-functions, with arithmetical applications, Proc.Acad. Sci. Amsterdam. 13, 261–271.