ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

KESİRLİ BASAMAKTAN LİNEER OLMAYAN BİR MODEL ÜZERİNE

Yusuf SOFUOĞLU

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2015

TEZ ONAYI

Yusuf SOFUOĞLU tarafından hazırlanan " **Kesirli Basamaktan Lineer Olmayan Bir Model Üzerine** " adlı tez çalışması 12/03/2015 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından **oy birliği/çokluğu** ile Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof.Dr. Nuri ÖZALP

Jüri Üyeleri:

Başkan: *Prof.Dr. Hüseyin MERDAN*
TOBB Ekonomi Ve Ticaret Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı

Üye: *Prof.Dr. Nuri ÖZALP*
Ankara Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı

Üye: *Doç.Dr. Esra ERKUŞ DUMAN*
Gazi Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı

Üye: *Doç.Dr. Fatma KARAKOÇ*
Ankara Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı

Üye: *Yard.Doç.Dr. Elif DEMİRCİ HAMAMCIOĞLU*
Ankara Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof.Dr. İbrahim DEMİR
Enstitü Müdürü

ETİK

Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

12/03/2015

Yusuf SOFUOĞLU

ÖZET

Doktora Tezi

KESİRLİ BASAMAKTAN LİNEER OLMAYAN BİR MODEL ÜZERİNE

Yusuf SOFUOĞLU

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof.Dr. Nuri ÖZALP

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde kesirli basamaktan türev ve integral operatörleri ile ilgili temel kavramlar ve bazı özel fonksiyonlar verilmiş, kesirli basamaktan diferensiyel denklemler için varlık ve teklik teoremleri hatırlatılmış, çözümlerin asimptotik kararlılığı ile ilgili sonuçlar ifade edilmiştir. Ayrıca kesirli türev içeren matematiksel modellerde hafıza etkisine değinilmiştir.

Üçüncü bölümde iki dillilik ile ilgili, kesirli basamaktan lineer olmayan, iki bileşenli ve üç bileşenli modeller ayrı ayrı ele alınmıştır. Bu modellerin denge noktaları araştırıldıktan sonra denge noktalarının kararlılık analizi yapılmıştır. Ayrıca herbir model için simülasyon yapılıp nümerik çözümleri verilmiştir.

Dördüncü bölümde, kesirli basamaktan diferensiyel denklemler için bir monoton iteratif teknik verilmiş ve iki bileşenli iki dillilik modeline uygulanmıştır.

Son bölüm ise elde edilen sonuçların analizine ayrılmıştır.

Mart 2015, 43 sayfa

Anahtar Kelimeler: Kesirli diferensiyel denklemler, matematiksel modeller, kesirli basamaktan lineer olmayan model, kararlılık, monoton iteratif teknik, iki dillilik, nümerik çözümler, başlangıç değer problemi.

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

ON A NONLINEAR MODEL OF FRACTIONAL ORDER

Yusuf SOFUOĞLU

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof.Dr. Nuri ÖZALP

This thesis consists of four chapters.

The first chapter is devoted to the introduction.

In the second chapter, basic concepts and some special functions on fractional integral and derivatives are given, existence and uniqueness theorems for fractional differential equations are stated and some results on asymptotic stability of solutions are expressed. Also, memory effect in mathematical models including fractional differential equations is referred.

In the third chapter, fractional order nonlinear models with two compenents and three compenents on bilingualism are given, respectively. The equilibrium points of the models are investigated and stability analysis of these points is performed. Also, simulation and numerical solution of each model is given.

In the fourth chapter, a monotone iterative technique is defined for fractional order differential equations and the technique is applied to the bilingualism model with two components.

Finally, the last chapter is devoted to the analysis of the results obtained.

March 2015, 43 pages

Key Words: Fractional differential equations, mathematical models, fractional order nonlinear model, stability, monotone iterative technique, bilingualism, numerical solutions, initial value problem.

TEŞEKKÜR

Doktora eğitimim boyunca değerli fikirleri ile beni yönlendiren saygıdeğer danışman hocam, Sayın Prof.Dr. Nuri ÖZALP (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı)'e; çalışmam boyunca yardımlarını ve önerilerini eksik etmeyen değerli hocalarım, Sayın Doç.Dr. Esra ERKUŞ DUMAN (Gazi Üniversitesi Fen Fakültesi)'a ve Sayın Doç.Dr. Fatma KARAKOÇ (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı)'a saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Son olarak, çalışmalarım süresince desteğini esirgemeyen ve bana her zaman moral kaynağı olan sevgili aileme sonsuz teşekkür ederim.

Yusuf SOFUOĞLU
Ankara, Mart 2015

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$\sum$	Toplam
$\int$	İntegral
I_a^α	α. basamaktan kesirli integral
$\mathbf{D}_a^\alpha$	α. basamaktan Riemann-Liouville kesirli türevi
D_a^α	α. basamaktan Caputo kesirli türevi
Γ	Gamma fonksiyonu
$\lceil\alpha\rceil$	α reel sayısının tavan değeri
R	Reel sayılar kümesi
$R[a,b]$	$[a,b]$ üzerinde Riemann anlamında integrallenebilen fonksiyonlar kümesi
$C[a,b]$	$[a,b]$ aralığında sürekli reel değerli fonksiyonlar kümesi

ŞEKİLLER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Tamsayı olmayan basamaktan türev ve integral kavramları ilk olarak Leibniz ve L'Hospital tarafından 1695 yılında ortaya konmuştur. Marquis de L'Hospital (1661-1704)' ın 1695 yılında Wilhelm Leibniz (1646-1716)' e sorduğu "Tamsayı basamaktan türevler kesirli basamaktan türevlere genişletilebilir mi ?" sorusu kesirli diferensiyelin çıkış tarihi olarak gösterilebilir.

Kesirli diferensiyel türev ve integralin tam olmayan (keyfi) basamaklara genişletilmiş bir şeklidir. Son yıllarda kesirli kalkülüs, teorik matematikte olduğu kadar uygulamalarda da önemli bir yer edinmiştir. Buna rağmen kesirli kalkülüsü yeni bir matematik teorisi olarak görmek mümkün değildir. Kesirli kalkülüsün temelleri klasik kalkülüs kadar eskiye dayanmaktadır. Kesirli kalkülüs ile ilgili pekçok kitap yazılmış, bu kitaplarda kesirli kalkülüsün tarihi detaylı bir şekilde verilmiştir. (Oldham ve Spanier 1974 , Miller ve Ross 1993, Podlubny 1999, Kilbas vd. 2006)

Kesirli basamaktan türev içeren modeller çeşitli fiziksel ve biyolojik süreçler ile dinamik sistemlerin kontrolü teorisinde tamsayı basamaktan modellere göre daha iyi sonuçlar vermektedir. Viskoelastik meteryaller, elektroanalitik kimya, biyolojik sistemlerin elektrik iletkenliği ve sinir hücrelerinin işleyişi gibi süreçlerin kesirli basamaktan türevler yardımıyla modellenmesi ve simülasyonları, kesirli basamaktan diferensiyel denklemlerin önemini arttırmaktadır. Özellikle birçok madde ve sürecin hafıza ve kalıtsal özelliklerini açıklamak için kesirli operatörleri kullanmak uygun bir yaklaşımdır, zira bu tip özellikler tamsayı basamaktan türevde göz ardı edilmektedir.

2. KESİRLİ BASAMAKTAN DİFERENSİYEL DENKLEMLER

Bu bölümde kesirli basamaktan türev ve integral operatörleri ile ilgili temel tanımlar ile bu operatörlerin bazı özellikleri verilecek, ardından kesirli basamaktan diferensiyel denklemlerle ilgili bazı teoremler verilecektir.

2.1 Kesirli Operatörlerle İlgili Bazı Özel Fonksiyonlar

2.1.1 Gamma fonksiyonu

Kesirli diferensiyel ile doğrudan ilişkili olan Gamma fonksiyonunu en basit anlamıyla faktöriyelin bütün reel sayılara genelleştirilmesi olarak ifade edebiliriz. Gamma fonksiyonu

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$$

genelleştirilmiş integrali yardımıyla tanımlanır, bazen *genelleştirilmiş faktöriyel fonksiyonu* olarak da anılır. Gamma fonksiyonunun en temel özelliklerinden biri

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \tag{2.1}$$

eşitliğidir. Bu ifade kısmi integrasyon yöntemi ile aşağıdaki şekilde kolayca ispatlanabilir.

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z} dt = [-e^{-t} t^{z}]_{t=0}^{t=\infty} + z\int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt = z\Gamma(z).$$

Buradan $\Gamma(1) = 1$ olup (2.1) den $z = 1, 2, 3, ...$ için

$$\begin{aligned} \Gamma(2) &= 1.\Gamma(1) = 1 = 1!, \\ \Gamma(3) &= 2.\Gamma(2) = 2.1! = 2!, \\ &\vdots \\ \Gamma(z+1) &= z\Gamma(z) = z.(z-1)! = z! \end{aligned} \tag{2.2}$$

elde edilir (Podlubny 1999).

2.1.2 Beta fonksiyonu

Gamma fonksiyonunun bazı kombinasyonları yerine aşağıda tanımlanan Beta fonksiyonunu kullanmak bir çok durumda daha uygun olabilir.

$\mathrm{Re}(z) > 0$ ve $\mathrm{Re}(w) > 0$ olmak üzere *Beta fonksiyonu*

$$B(z,w) = \int_0^1 \tau^{z-1}(1-\tau)^{w-1}d\tau$$

şeklinde tanımlanır.

Laplace dönüşümü kullanarak Gamma fonksiyonu ile Beta fonksiyonu arasında aşağıdaki gibi bir ilişki kurmak mümkündür. Bunun için

$$h_{z,w}(t) = \int_0^t \tau^{z-1}(1-\tau)^{w-1}d\tau$$

integralini ele alalım. $h_{z,w}(t)$ fonksiyonunun t^{z-1} ile t^{w-1} in konvolüsyonu olduğu ve $h_{z,w}(1) = B(z,w)$ olduğu açıktır. İki fonksiyonun konvolüsyonunun Laplace dönüşümü o fonksiyonların Laplace dönüşümlerinin çarpımına eşit olduğundan, $h_{z,w}(t)$ nin Laplace dönüşümü $H_{z,w}(s)$ olmak üzere

$$H_{z,w}(s) = \frac{\Gamma(z)}{s^z}.\frac{\Gamma(w)}{s^z} = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{s^{z+w}} \tag{2.3}$$

elde edilir. Diğer yandan $\Gamma(z)\Gamma(w)$ bir sabit olduğundan (2.3) ün sağ tarafının ters Laplace dönüşümü yardımıyla $h_{z,w}(t)$ fonksiyonunu bulabiliriz. Yani

$$h_{z,w}(t) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}t^{z+w-1}$$

olur. Burada $t = 1$ alırsak

$$B(z,w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}$$

elde edilmiş olur. Bu eşitlik nedeniyle $B(z,w) = B(w,z)$ olduğunu da ayrıca ifade edebiliriz (Podlubny 1999).

2.1.3 Mittag-Leffler fonksiyonu

Kesirli analizde çok önemli bir yeri olan iki parametreli *Mittag-Leffler fonksiyonu*, seri açılımı yardımıyla aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}, \qquad (\alpha > 0, \quad \beta > 0).$$

Mittag-Leffler fonksiyonları yardımıyla ifade edilebilecek bazı önemli fonksiyonlar aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned}
E_{1,1}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z, \\
E_{1,2}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)!} = \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{e^z-1}{z}, \\
E_{2,1}(z^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \cosh(z), \\
E_{2,2}(z^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+2)} = \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{\sinh(z)}{z}.
\end{aligned}$$

2.2 Kesirli Basamaktan İntegral ve Diferensiyel Operatörler

Kesirli basamaktan integraller tamsayı basamaktan n-katlı integrallerin genelleştirilmesi yardımıyla tanımlanmıştır. f fonksiyonu (a,t) sonlu aralığında sürekli ve integrallenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$I_a f(t) = D_a^{-1} f(\tau) = \int_a^t f(\tau)d\tau$$

integrali sonludur ve $t \to a$ iken değeri sıfıra eşittir.

Gerçekten $\tau = a + y(t-a)$ dönüşümü yapılırsa ve $\varepsilon = t-a$ alınırsa,

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to a} \int_a^t f(\tau)d\tau &= \lim_{t\to a}(t-a)\int_0^1 f(a+y(t-a))dy \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{1-r}\int_0^1 (\varepsilon y)^r f(a+y\varepsilon)y^{-r}dy \\
&\equiv 0 \qquad\qquad (r<1)
\end{aligned}$$

olur.

$$\int_a^t dt_{n-1} \int_a^{t_{n-1}} ... \int_a^{t_1} f(\tau)d\tau$$

n-katlı integraline, f sürekli fonksiyonu için, bilinen

$$\int_a^t dt_1 \int_a^{t_1} f(\tau)d\tau = \int_a^t f(\tau)d\tau \int_\tau^t dt_1$$

eşitliği ardışık olarak uygulanırsa,

$$I_a^n f(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau)d\tau$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin sağ tarafındaki $(n-1)!$ yerine, (2.2) den dolayı, $\Gamma(n)$ yazılabilir.

Tanım 2.1 $f : (a, \infty) \to R$ sürekli ve integrallenebilir bir fonksiyon olmak üzere, f fonksiyonunun $\alpha > 0$ basamaktan Riemann-Liouville kesirli integrali

$$I_a^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)d\tau, \qquad t > a$$

şeklinde tanımlanır.

Her ne kadar kesirli mertebeden türev operatörünün birçok tanımı var ise de, Riemann-Liouville ile Caputo tanımları en yaygın kullanıma sahip olduğundan bu iki tanımı vereceğiz.

Tanım 2.2 $f : (a, \infty) \to R$ sürekli ve integrallenebilir bir fonksiyon olmak üzere f fonksiyonunun $\alpha > 0$ (α reel) basamaktan Riemann-Liouville kesirli türevi

$$\mathbf{D}_a^\alpha f(t) := \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau)d\tau$$

şeklinde tanımlıdır. Burada $n-1$, α nın tam kısmı olmak üzere $n-1 \leq \alpha < n$ olup Γ Gamma fonksiyonunu göstermektedir.

Tanım 2.3 $f : (a, \infty) \to R$ sürekli ve integrallenebilir bir fonksiyon olmak üzere f fonksiyonunun $\alpha > 0$ basamaktan Caputo türevi

$$D_a^\alpha f(t) := \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau)d\tau, \qquad (n-1 < \alpha < n)$$

şeklinde tanımlanır.

Burada, f fonksiyonunun $[a,T]$ aralığında $(n+1)$. basamaktan sürekli, sınırlı türevlere sahip olması durumunda kesirli türev, $\alpha \to n$ için n. basamaktan klasik türev haline gelir.

Gösterimde basitlik açısından I_a^α, $\mathbf{D}_a^\alpha$, D_a^α ifadelerinde alt indisin yazılmadığı durumlarda $a=0$ kabul edilecektir.

Aşağıda Riemann-Liouville anlamında türev ve integralin bazı özellikleri verilmiştir (Podlubny 1999).

(i) $f \in C[0,\infty)$ ve $\alpha > 0,\ \beta > 0$ olsun. Riemann-Liouville kesirli integrali

$$I^\alpha(I^\beta f(t)) = I^{\alpha+\beta} f(t)$$

özelliğine sahiptir.

(ii) $f \in C[0,\infty)$ ve $\alpha > 0$ ve $t > 0$ için

$$\mathbf{D}^\alpha(I^\alpha f(t)) = f(t)$$

dir. Yani Riemann-Liouville kesirli türevi aynı basamaktan kesirli integralin sol tersidir.

(iii) Eğer f fonksiyonunun α basamaktan kesirli türevi integrallenebilir ise,

$$I^\alpha(\mathbf{D}^\alpha f(t)) = f(t) - \sum_{j=1}^{n} [\mathbf{D}^{\alpha-j} f(t)]_{t=0} \frac{t^{\alpha-j}}{\Gamma(\alpha-j+1)}$$

dir. Burada $n = \lfloor \alpha \rfloor + 1$ olup $\lfloor \alpha \rfloor$, α nın tam değerini göstermektedir.

(iv) Bir c reel sabitinin Riemann-Liouville kesirli türevi

$$\mathbf{D}^\alpha(c) = \frac{ct^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$$

dir.

2.3 Kesirli Basamaktan Diferensiyel Denklemler

$$\mathbf{D}_a^{\alpha} f(t) := \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int\limits_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau, \qquad n-1 \leq \alpha < n$$

diferensiyel operatörünü içeren diferensiyel denklemler birçok fiziksel olayı modellemek için kullanılmıştır. $\mathbf{D}^{\alpha}$ Riemann-Liouville türevini içeren

$$\mathbf{D}^{\alpha} x(t) = f(t, x(t))$$

kesirli diferensiyel denkleminin çözümünü elde etmek için

$$\frac{d^{\alpha-k}}{dt^{\alpha-k}} x(t)|_{t=0} = b_k, \qquad k = 1, 2, ..., n$$

ile verilen n tane başlangıç koşuluna ihtiyaç duyulmaktadır. Bu koşulları elde etmek için x fonksiyonunun kesirli basamaktan türevlerine ihtiyaç vardır. Ancak, bu türevlerin elde edilmesi her zaman mümkün olmadığı gibi bu koşullara fiziksel anlam vermek de olanaksızdır. Bu zorluklardan kurtulmak için Caputo (1967) tarafından bir fikir ortaya konmuştur. $T_{n-1}[x]$, x in 0 komşuluğundaki $(n-1)$. dereceden Taylor polinomu olmak üzere,

$$\mathbf{D}^{\alpha}(x - T_{n-1}[x])(t) = f(t, x(t))$$

denklemi

$$x^{(k)}(0) = x_0^k, \qquad k = 0, 1, 2, ...n-1$$

başlangıç değerleri ile birlikte ele alınabilir.

2.3.1 Çözümlerin varlığı ve tekliği

$f \in C([0, T] \times R, R)$ ve $0 < \alpha < 1$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^{\alpha}(x(t) - x_0) &= f(t, x(t)) \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \tag{2.4}$$

ile verilen Riemann-Liouville kesirli türevi içeren başlangıç değer problemi

$$x(t) = x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, x(\tau)) d\tau, \qquad 0 \leq t < T$$

Volterra kesirli integraline denktir. Yani f sürekli olarak kabul edildiği için (2.4) ile verilen başlangıç değer probleminin her çözümü aynı zamanda Volterra integral denkleminin de bir çözümüdür (Lakshmikantham ve Vatsala 2007). Bu ifadenin tersi de doğrudur.

(2.4) ile tanımlanan başlangıç değer probleminin çözümünün varlığı ve tekliği ile ilgili teoremleri vermeden önce bu teoremlerin ispatında kullanılacak bir tanım ve bir lemma verelim (Lakshmikantham ve Vatsala 2007).

Tanım 2.4 x ekseninin bir I alt aralığından tanımlı sürekli fonksiyonlardan oluşan bir fonksiyon ailesi $\{f_n(x)\}$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$|x - x_0| < \delta$$

olduğunda

$$|f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon, \qquad (\forall n \in N)$$

olacak biçimde bir $\delta = \delta(x_0) > 0$ bulunabiliyorsa, $\{f_n(x)\}$ ailesine eş-süreklidir denir.

Lemma 2.1 Her $\varepsilon > 0$ için $[0, T]$ üzerinde tanımlı sürekli $x_\varepsilon(t)$,

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^\alpha(x_\varepsilon(t) - x_\varepsilon(0)) &= f(t, x_\varepsilon(t)), \qquad 0 < \alpha < 1 \\ x_\varepsilon(0) &= x_0 \end{aligned}$$

başlangıç değer probleminin çözümü olmak üzere $0 \leq t \leq T$ için $|f(t, x_\varepsilon(t))| \leq M$ koşulu sağlanıyorsa, $\{x_\varepsilon(t)\}$ fonksiyon ailesi $0 \leq t \leq T$ üzerinde eş-süreklidir.

Teorem 2.1 $R_0 = [(t, x) : 0 \leq t \leq a, \ |x - x_0| \leq b]$ için $f \in C[R_0, R]$ ve R_0 üzerinde $|f(t, x)| \leq M$ olacak şekilde $M \geq 0$ olsun. Bu durumda $0 \leq t \leq \gamma$ üzerinde (2.4) başlangıç değer probleminin en az bir çözümü vardır. Burada $\gamma = \min\left(a, \left[\frac{b}{M}\Gamma(\alpha+1)\right]^{1/\alpha}\right)$, $0 < \alpha < 1$ dir.

İspat. $\delta > 0$ olmak üzere $x_0(\varepsilon)$, $[-\delta, 0]$ üzerinde sürekli, $x_0(0) = 0, |x_0(t) - x_0| \leq b$ ve $|\mathbf{D}^\alpha(x_0(t)| \leq M$ koşullarını sağlayan bir fonksiyon olsun.

$\gamma_1 = \min(\gamma, \varepsilon)$ olmak üzere $0 < \varepsilon \leq \delta$ için $[-\delta, 0]$ üzerinde $x_\varepsilon(t) = x_0(t)$ ve $[0, \gamma_1]$ üzerinde

$$x_\varepsilon(t) = x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x_\varepsilon(s-\varepsilon)) ds \tag{2.5}$$

olacak şekilde bir $x_\varepsilon(t)$ fonksiyonu tanımlayalım. Bu durumda $\mathbf{D}^\alpha x_\varepsilon(t)$ mevcuttur ve γ_1 in seçiminden dolayı

$$\begin{aligned} |x_\varepsilon(t) - x_0| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x_\varepsilon(s-\varepsilon)) ds \\ &\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} ds = \frac{M\gamma^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \leq b \end{aligned}$$

dir.$\gamma_1 < \gamma$ olması durumunda da (2.5) denklemi kullanılarak $x_\varepsilon(t)$ fonksiyonu $\gamma_2 = \min(\gamma, 2\varepsilon)$ olmak üzere $[-\delta, \gamma_2]$ üzerinde kesirli basamaktan sürekli türevlenebilir ve $|x_\varepsilon(t) - x_0| \leq b$ koşulunu sağlayacak şekilde genişletilebilir. Bu şekilde devam edilirse $|x_\varepsilon(t) - x_0| \leq b$ koşulunu sağlayan, $[-\delta, \gamma]$ üzerinde tanımlı bir $x_\varepsilon(t)$ fonksiyonu tanımlanabilir. Bu fonksiyon, kesirli basamaktan sürekli türevlere sahip ve aynı aralıkta (2.5) denklemini sağlayan bir fonksiyondur. Aynı zamanda R_0 üzerinde $|f(t, x_\varepsilon(t-\varepsilon))| \leq M$ olduğundan $|\mathbf{D}^\alpha x_0(t)| \leq M$ dir. Bu durumda $\{x_\varepsilon(t)\}$ ailesinin eş-sürekli ve düzgün sınırlı fonksiyonların bir ailesi olduğu söylenebilir. Ascoli-Arzela teoremi gereğince $n \to \infty$ halinde $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \ \ldots\ > \varepsilon_n$ ve $[-\delta, 0]$ üzerinde $x(t) = \lim_{n\to\infty} x_\varepsilon(t)$ (düzgün) olacak şekilde bir $\{\varepsilon_n\}$ dizisi mevcuttur. f düzgün sürekli olduğundan $n \to \infty$ halinde $f(t, x_\varepsilon(t-\varepsilon))$, $f(t, x(t))$ ye düzgün olarak yakınsar. $\varepsilon_n = \varepsilon$ ve $\gamma_1 = \gamma$ alınmasıyla ve (2.5) in terim terime integre edilmesiyle

$$x(t) = x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s)) ds$$

elde edilir. Bu da (2.4) başlangıç değer probleminin bir $x(t)$ çözümünün varlığını verir. ■

Teorem 2.2 $R_0 = [(t, x) : 0 \leq t \leq a,\ |x - x_0| \leq b]$ için $f \in C[R_0, R]$ ve R_0 üzerinde $|f(t, x)| \leq M$ olacak şekilde $M \geq 0$ olsun. f, R_0 üzerinde ikinci değişkenine göre Lipschitz koşulunu sağlasın, yani

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq A|x_1 - x_2|$$

olsun. Bu durumda $0 \leq t \leq \gamma$ üzerinde (2.4) başlangıç değer probleminin tek bir çözümü vardır. Burada $\gamma = \min\left(a, \left[\frac{b}{M}\Gamma(\alpha+1)\right]^{1/\alpha}\right)$, $0 < \alpha < 1$ dir.

Bu teoremin ispatı için (Podlubny 1999) a bakılabilir.

2.3.2 Denge noktalarının asimptotik kararlılığı

$\alpha \in (0,1]$ olmak üzere

$$\begin{aligned} D_*^\alpha x_1(t) &= f_1(x_1, x_2, ..., x_k) \\ D_*^\alpha x_2(t) &= f_2(x_1, x_2, ..., x_k) \\ &\vdots \\ D_*^\alpha x_k(t) &= f_k(x_1, x_2, ..., x_k) \end{aligned} \tag{2.6}$$

otonom sistemini

$$x_1(0) = x_{01},\ x_2(0) = x_{02},\ \dots\ , x_k(0) = x_{0k} \tag{2.7}$$

başlangıç değerleri ile birlikte göz önüne alalım. (2.6) sisteminin denge noktaları,

$$D_*^\alpha x_i(t) = 0 \Longrightarrow f_i(x_1^*, x_2^*, ..., x_k^*) = 0, \qquad i = 1, 2, ..., k$$

koşullarını sağlayan $E^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_k^*)$ noktalarıdır.

Denge noktalarının asimptotik kararlılığını elde etmek için

$$x_i(t) = x_i^* + \delta_i(t)$$

diyelim. $x_i(t)$, (2.6)-(2.7) başlangıç değer probleminin çözümü olduğundan

$$D_*^\alpha(x_i^* + \delta_i) = f_i(x_1^* + \delta_1, x_2^* + \delta_2, ..., x_k^* + \delta_k), \qquad i = 1, 2, ..., k$$

yani

$$D_*^\alpha \delta_i(t) = f_i(x_1^* + \delta_1, x_2^* + \delta_2, ..., x_k^* + \delta_k), \qquad i = 1, 2, ..., k \tag{2.8}$$

yazılabilir. $*$ denge noktasını göstermek üzere

$$\begin{aligned} f_i(x_1^* + \delta_1, x_2^* + \delta_2, ..., x_k^* + \delta_k) &= f_i(x_1^*, x_2^*, ..., x_k^*) \\ &\quad + \left.\frac{\partial f_i}{\partial x_1}\right|_* \delta_1 + \left.\frac{\partial f_i}{\partial x_2}\right|_* \delta_2 + ... + \left.\frac{\partial f_i}{\partial x_k}\right|_* \delta_k \\ &\quad + ... \end{aligned}$$

ve $f_i(x_1^*, x_2^*, ..., x_k^*) = 0$ olduğundan

$$f_i(x_1^* + \delta_1, x_2^* + \delta_2, ..., x_k^* + \delta_k) \simeq \left.\frac{\partial f_i}{\partial x_1}\right|_* \delta_1 + \left.\frac{\partial f_i}{\partial x_2}\right|_* \delta_2 + ... + \left.\frac{\partial f_i}{\partial x_k}\right|_* \delta_k \tag{2.9}$$

yazılabilir. (2.8) ve (2.9) dan

$$D_*^\alpha \delta_i(t) = \left.\frac{\partial f_i}{\partial x_1}\right|_* \delta_1 + \left.\frac{\partial f_i}{\partial x_2}\right|_* \delta_2 + ... + \left.\frac{\partial f_i}{\partial x_k}\right|_* \delta_k, \qquad i = 1, 2, ..., k \tag{2.10}$$

dır. Bu şekilde aşağıdaki indirgenmiş sistem elde edilir.

$$D_*^\alpha \delta = J\delta, \quad \delta = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_k \end{bmatrix}, \quad J(E^*) = \begin{bmatrix} \partial f_1/\partial x_1 & \partial f_1/\partial x_2 & ... & \partial f_1/\partial x_k \\ \partial f_2/\partial x_1 & \partial f_2/\partial x_2 & ... & \partial f_2/\partial x_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial f_k/\partial x_1 & \partial f_k/\partial x_2 & ... & \partial f_k/\partial x_k \end{bmatrix} \tag{2.11}$$

ve

$$M^{-1}JM = N, \qquad N = \begin{bmatrix} \lambda_1 & ... & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_k \end{bmatrix} \tag{2.12}$$

dir. Burada $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ lar J Jakobiyan matrisin özdeğerleri, M ise özvektörüdür. İndirgenmiş sistem

$$\delta_i(0) = x_i(0) - x_i^*, \qquad i = 1, 2, ..., k$$

başlangıç değerlerine sahiptir. (2.11) ve (2.12) den

$$D_*^\alpha \delta = (MNM^{-1})\delta \text{ ve } D_*^\alpha (M^{-1}\delta) = N(M^{-1}\delta)$$

olduğundan

$$D_*^\alpha \xi = N\xi, \qquad \xi = M^{-1}\delta, \quad \xi = [\xi_1 \; \xi_2 \; ... \; \xi_k]^T$$

elde edilir. O halde

$$D_*^\alpha \xi_1 = \lambda_1 \xi_1, \quad D_*^\alpha \xi_2 = \lambda_2 \xi_2, \quad ... \quad , \; D_*^\alpha \xi_k = \lambda_k \xi_k \tag{2.13}$$

sistemi mevcuttur. (2.13) ile verilen sistemin çözümü Mittag-Leffler fonksiyonları yardımı ile

$$\xi_i(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda_i)^n t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha + 1)} \xi_i(0) = E_\alpha(\lambda_i t^\alpha)\xi_i(0), \qquad (i = 1, 2, ..., k)$$

şeklinde elde edilir (Podlubny 1999).

Matignon (1996) tarafından elde edilen sonuçlar kullanılırsa,

$$|\arg(\lambda_i)| > \frac{\alpha\pi}{2}, \qquad (i = 1, 2, ..., k)$$

olduğunda $\xi_i(t)$ azalandır. Böylece $\delta_i(t)$ de azalandır. Yani $|\arg(\lambda_i)| > \frac{\alpha\pi}{2}$ koşulları tüm λ_i $(i = 1, 2, ..., k)$ özdeğerleri için geçerliyse $(x_1^*, x_2^*, ..., x_k^*)$ denge noktaları yerel olarak asimptotik kararlıdır (Ahmed vd. 2007).

2.3.3 Kesirli türev içeren modellerde hafıza etkisi

Nüfus modellerinde bir nüfusun gelecekteki durumu geçmişteki durumuna bağlıdır. Buna hafıza etkisi denir. Bir gecikme terimi eklenerek veya modelde kesirli türev kullanarak nüfusun hafıza etkisi incelenebilir (Podlubny 1999, Machado 2014).

$f \in C([0,T] \times R, R)$, $0 < q < 1$ olmak üzere Caputo-tipi diferensiyel denklem ile verilen aşağıdaki başlangıç değer problemini ele alalım.

$$D^q x(t) = f(t, x(t)) \ , \qquad x(0) = x_0 \tag{2.14}$$

x fonksiyonunun (2.14) başlangıç değer probleminin çözümü olması için gerek ve yeter şart x in aşağıdaki Volterra intragral denkleminin çözümü olmasıdır.

$$x(t) = x_0 + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-\tau)^{q-1} f(\tau, x(\tau)) d\tau. \tag{2.15}$$

$q = 1$ aldığımızda (2.14) başlangıç değer problemindeki kesirli türev klasik türev olur.

Şimdi t nin iki farklı değeri için, örneğin $t_1 < t_2$ olacak şekilde t_1 ve t_2 için $x(t)$ yi yazalım. İkincisinden birincisini çıkarırsak

$$\begin{aligned} x(t_2) - x(t_1) &= \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^{t_1} \left((t_2-\tau)^{q-1} - (t_1-\tau)^{q-1} \right) \ f(\tau, x(\tau)) d\tau \\ &+ \frac{1}{\Gamma(q)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2-\tau)^{q-1} f(\tau, x(\tau)) d\tau \end{aligned} \tag{2.16}$$

olur. $q = 1$ için, yani klasik durum için, (2.16) eşitliğindeki birinci integral yok olur. Bu, $t \in [0, t_1]$ için $x(t)$ ile ilgili herhangi bir bilgiye ihtiyacımız yok demektir ve gelecekteki davranışını hesaplamak için birinci mertebeden bir sistemin keyfi bir noktadaki durumunu gözlemlemek yeterlidir.

Kesirli duruma gelince, yani $0 < q < 1$ için, (2.16) eşitliğindeki ilk integral yok olmaz. Böylece, t_2 noktasındaki x çözümünü bulmak istediğimizde $x(t)$ nin 0 başlangıç noktasından t_2 noktasına kadar olan geçmişini dikkate almamız gerekir.

Açıkçası bu gözlem böyle eşitlikler için nümerik yöntemler kurmada büyük etkiye sahiptir. Dolayısıyla kesirli mertebeden diferensiyel denkemler hafıza içeren sistemlerin tanımlanmasında daha uygun bir yöntem iken; tamsayı mertebeden denklemler hafıza içermeyen sistemlerin modellenmesinde daha uygun araçlardır (Diethelm 2010).

3. LİNEER OLMAYAN İKİ DİLLİLİK MODELLERİ

Tarih boyunca birçok ülkede farklı dil gruplarından insanlar sürekli etkileşim içerisinde olmuşlardır. Bu etkileşim, örneğin Miami'de olduğu gibi İspanyolca-İngilizce arasında, Montreal'de yaklaşık 200 yıldır İngilizce-Fransızca arasında , İsviçre'de yüzyıllardır Almanca-Fransızca-İtalyanca arasında meydana gelmiştir ve iletişim için ortak bir dil ihtiyacı belli bir seviyeye kadar iki dilliliği, hatta çok dilliliği ortaya çıkarmıştır (El-Owaidy ve Ismail 2002). Wardaugh'a göre Whale dili, Galce ve İrlandaca yaşayan diller olarak varlıklarını devam ettirmektedir ve bunlardan yanlızca birini konuşanlar sayıca çok azdır (Wardaugh 1987).

Sanayileşme, göç ve kentleşme gibi faktörler, farklı dil grupları arasındaki etkileşimi artırmıştır. Örneğin Avrupa'da ulus dilleri 1800'lerde 16 iken 1937'de 53'e çıkmıştır. Diller arasında giderek artan bu etkileşim, çoğunluk dillerinin azınlık dilleri üzerinde ciddi bir baskı kurmasına neden olmuştur (El-Owaidy ve Ismail 2002). İngilizce, Çince, Rusça ve Japonca gibi bazı diller, uluslararası ilişkilerde ve ticaretteki rolleri açısından önemini korurken, Fransızca ve İspanyolca gibi bazı diller önemini kaybetmiş hatta daha az konuşulan bazı diller giderek yok olmayla karşı karşıya kalmıştır (Wagner 1981, Baggs ve Freedman 1990, El-Owaidy ve Ismail 2002).

Bu bölümde, bir dil konuşanlar ile iki dil konuşanların birarada bulunduğu topluluklardaki dil gruplarının birbiri üzerindeki etkileşimini inceleyen bazı modeller ele alınacaktır. Örneğin ABD ve Kanada'da sadece İngilizce konuşanların yanında Almanca-İngilizce, Fransızca-İngilizce, İspanyolca-İngilizce gibi iki dil konuşan nüfus grupları vardır (Baggs ve Freedman 1990, Baggs ve Freedman 1993, El-Owaidy ve Ismail 2002).

Tek dil veya iki dil konuşanların nüfusundaki büyüme dinamiğini etkileyen birçok faktör vardır. Tabii ki doğum ve ölüm oranları ile kültürel arka plan en büyük faktörlerdendir. Bunun yanında sosyal faktörler başlıca öneme sahiptir. Lewis bir dilin yayılmasında etkili olan dört sosyal etken tanımlar:

1. Davranışlar,

2. Uluslararası ilişkiler,
3. Modernleşme ve kültürel ideoloji,
4. Dini ve politik inançlar (Lewis 1982).

Dil grupları arasındaki etkileşimi belli parametrelere bağlı olarak matematiksel anlamda modelleme çalışmaları Freedman öncülüğünde başlamıştır. Özellikle 1990'da Baggs ile birlikte yayınladıkları bir makale (Baggs ve Freedman 1990) bu konudaki çalışmalar için önemli bir kaynak olma özelliği taşımaktadır.

Söz konusu çalışmada tek dilli grup ile iki dilli grubun etkileşimi, x_1 tek dilli, x_2 iki dilli nüfus yoğunluğunu göstermek üzere aşağıdaki otonom adi diferensiyel denklem sistemi ile ifade edilmiştir.

$$\begin{cases} x_1'(t) = (B_1 - D_1)x_1(t) - L_1 x_1^2(t) - \dfrac{\alpha x_1(t) x_2(t)}{1 + x_1(t)} + P_1 B_2 x_2(t) \\ x_2'(t) = (P_2 B_2 - D_2)x_2(t) - L_2 y_2^2(t) + \dfrac{\alpha x_1(t) x_2(t)}{1 + x_1(t)} \end{cases}$$

Burada B_i, x_i nin doğum oranı; $D_i + L_i x_i$ ise x_i nin ölüm oranıdır $(i = 1, 2)$. x_2 ye doğan çocukların P_1 oranındaki kısmı x_1 e katılmış; P_2 oranındaki kısmı ise x_2 de kalmıştır. Ayrıca dil kazanımı yoluyla x_1 den x_2 ye geçiş, α dönüşüm parametresi olmak üzere, $\dfrac{\alpha x_1(t) x_2(t)}{1 + x_1(t)}$ terimi ile ifade edilmiştir.

3.1 İki Bileşenli İki Dillilik Modeli

Türkiye'de Türkçe konuşan tek dilli çoğunluğun yanısıra, Kürtçe, Arapça, Lazca, vb. dillerden birini Türkçe'yle birlikte konuşan bazı iki dilli gruplar da mevcuttur. Modelimizde, yalnızca Türkçe konuşan nüfus tek dilli bileşen olarak; Türkçe ile birlikte anadilini de konuşan nüfus ise iki dilli bileşen olarak alınmıştır. Bu iki bileşen arasındaki etkileşim, iki tane kesirli diferensiyel denklemden oluşan otonom bir sistemle ifade edilmiştir. Bu bileşenlerin $t \geq 0$ anındaki yoğunlukları, sırasıyla $x(t)$ ve $y(t)$ ile temsil edilmiştir.

Modelde, çevrenin göç alma ve göç verme etkisi dikkate alınmamıştır. Ayrıca tek dilli gruptan iki dilli gruba geçişin olmadığı varsayılmıştır. Bir de, iki dilli ebeveynlerin doğan çocuklarının nüfusa tek dilli veya iki dilli olarak katılabileceği, fakat tek dilli ebeveynlerin doğan çocuklarının nüfusa tek dilli olarak katılacağı varsayılmıştır.

Tüm bu kabulleri dikkate aldığımızda, $0 < q \leq 1$, $B_i > D_i$ $(i = 1, 2)$, $0 < P_1 < 1$ ve $P_2 = 1 - P_1$ olmak üzere, modelimizi

$$\begin{cases} D^q x(t) = (B_1 - D_1)x(t) - L_1 x^2(t) + P_1 B_2 y(t) \\ D^q y(t) = (P_2 B_2 - D_2)y(t) - L_2 y^2(t) \end{cases} \tag{3.1}$$

şeklinde yazabiliriz. Burada P_1, y'den nüfusa tek dilli olarak katılan çocukların oranını temsil eder. B_1 ve $D_1 + L_1 x$ sırasıyla x'in spesifik doğum ve ölüm oranlarını; benzer şekilde B_2 ve $D_2 + L_2 y$ de y'nin doğum ve ölüm oranlarını gösterir. Ayrıca x ve y'nin çevre taşıma kapasiteleri $K_1 = \dfrac{B_1 - D_1}{L_1}$, $K_2 = \dfrac{B_2 - D_2}{L_2}$ olmak üzere sırasıyla K_1 ve K_2 ile ifade edilmiştir. İki dilli ebeveynlerin doğurdukları çacukların yani $B_2 x_2$ nin P_1 oranındaki kısmının tek dilli nüfusa dahil olması, $P_1 B_2 y(t)$ teriminin ikinci denklemden çıkarılıp birinci denkleme eklenmesiyle ifade edilmiştir.

3.1.1 Denge noktaları ve kararlılık

$D^q x(t) = 0$, $D^q y(t) = 0$ ve $D^q x(t) + D^q y(t) = 0$ aldığımızda, bu denklemleri temsil eden eğrilerin kesiştiği noktalar yardımıyla denge noktalarını buluruz. Bu eğrileri $\gamma_1$ve γ_2 ile gösterirsek,

$$\begin{aligned} \gamma_1 &: \; y = \frac{x}{P_1 B_2} \left[L_1 x - (B_1 - D_1) \right] \\ \gamma_2 &: \; L_1 \left[x - \frac{B_1 - D_1}{2L_1} \right]^2 + L_2 \left[y - \frac{B_2 - D_2}{2L_2} \right]^2 = \frac{(B_1 - D_1)^2}{4L_1} + \frac{(B_2 - D_2)^2}{4L_2} \end{aligned}$$

şeklindeki, $(0, 0)$ ve $(K_1, 0)$ noktalarından geçen γ_1 parabolü ile, merkezi $(\frac{K_1}{2}, \frac{K_2}{2})$ olan ve $(0, 0)$, $(K_1, 0)$, $(0, K_1)$, (K_1, K_2) noktalarından geçen γ_2 elipsini elde ederiz. Böylece negatif olmayan bileşenlere sahip denge noktaları $E_0(0, 0)$, $E_1(K_1, 0)$ ve olası $E^* \left(\dfrac{1}{2} K_1 + \dfrac{1}{2} \sqrt{K_1^2 + \dfrac{4 P_1 B_2 (P_2 B_2 - D_2)}{L_1 L_2}}, \dfrac{P_2 B_2 - D_2}{L_2} \right)$ noktasıdır.

(3.1) sistemi için $J(x^*, y^*)$ Jakobiyen matrisi

$$J(x^*, y^*) = \begin{bmatrix} B_1 - D_1 - 2L_1 x^* & P_1 B_2 \\ 0 & P_2 B_2 - D_2 - 2L_2 y^* \end{bmatrix}$$

şeklindedir. E_0 daki Jakobiyen matris

$$J(E_0) = J(0,0) = \begin{bmatrix} B_1 - D_1 & P_1B_2 \\ 0 & P_2B_2 - D_2 \end{bmatrix}$$

olur. Eğer $J(E_0)$ ın tüm λ_i $(i = 1, 2)$ özdeğerleri $|\arg \lambda_i| > \frac{q\pi}{2}$ şartını sağlıyorsa bu durumda E_0 ın asimptotik kararlı olduğunu söyleyebileceğimizi biliyoruz (Matignon 1996, Ahmed vd 2007). $\det(J(E_0) - \lambda I) = 0$ karakteristik denklemini çözdüğümüzde $(B_1 - D_1 - \lambda)(P_2B_2 - D_2 - \lambda) = 0$ denklemini elde ederiz. Bu denklemin kökleri $\lambda_1 = B_1 - D_1$ ve $\lambda_2 = P_2B_2 - D_2$ dir. $B_1 - D_1 > 0$ olduğunu kabul ettiğimizden dolayı E_0 kararsızdır. E_0 ın kararlılığının incelenmesindeki yolun aynısını kullanarak E_1 in Jakobiyen matrisini

$$J(E_1) = \begin{bmatrix} -(B_1 - D_1) & P_1B_2 \\ 0 & P_2B_2 - D_2 \end{bmatrix}$$

olarak ve $\det(J(E_1) - \lambda I) = 0$ karakteristik denkleminin özdeğerlerini $\lambda_1 = -(B_1 - D_1)$ ve $\lambda_2 = P_2B_2 - D_2$ olarak buluruz. $\lambda_1 = -(B_1 - D_1) < 0$ olduğundan, E_1 i asimptotik kararlı yapan koşulu $\lambda_2 = P_2B_2 - D_2 < 0$ olarak tanımlayabiliriz.

Öte yandan, $E_0(0, 0)$ noktası her iki nüfusun da olmaması; $E_1(K_1, 0)$ noktası ise iki dilli nüfusun olmaması anlamına geldiğinden, bu denge noktaları üzerinde çok durmaya gerek yoktur. Dolayısıyla iki bileşeni de pozitif olan E^* denge noktasının analizi ile ilgileneceğiz, zira böyle bir denge noktası sosyolojik açıdan gerçek hayata daha uygundur.

Şimdi E^* denge noktasının varlığı, tekliği ve kararlılığını araştıracağız.

Teorem 3.1 Eğer $\dfrac{-L_1K_1^2}{4B_2P_1} < \dfrac{K_2}{2} - \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{L_1K_1^2 + L_2K_2^2}{L_2}}$ ise bu durumda E^* vardır ve tektir. Eğer $\dfrac{-L_1K_1^2}{4B_2P_1} \geq \dfrac{K_2}{2} - \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{L_1K_1^2 + L_2K_2^2}{L_2}}$ ise bu durumda E^* yoktur.

İspat. γ_1 parabolünün tepe noktası $A\left(\dfrac{K_1}{2}, \dfrac{-L_1K_1^2}{4B_2P_1}\right)$ ve $x = \dfrac{K_1}{2}$ noktasının γ_2 elipsi üzerindeki görüntüsü

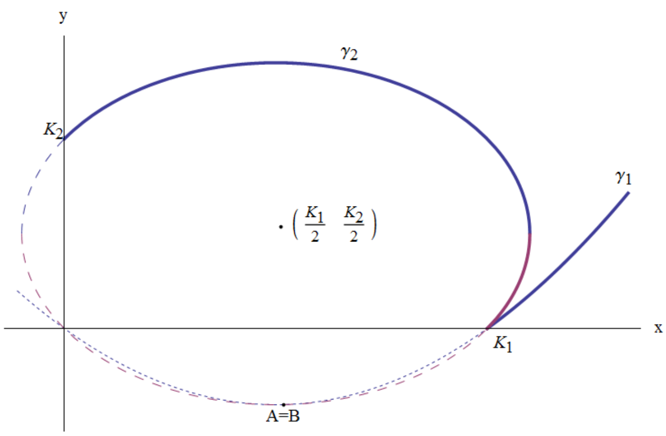
$$B\left(\frac{K_1}{2}, \frac{K_2}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L_1K_1^2 + L_2K_2^2}{L_2}}\right)$$

noktasıdır. A ve B arasındaki ilişki bakımından üç durum söz konusudur.

Durum i) $A = B$. Bu durumda bu noktaların ikinci bileşenleri birbirine eşit olmalı, yani

$$\frac{-L_1K_1^2}{4B_2P_1} = \frac{K_2}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L_1K_1^2 + L_2K_2^2}{L_2}}$$

olmalı. Böylece $\gamma_1$ve γ_2 eğrilerinin kesiştiği negatif olmayan tek nokta $(K_1, 0)$ noktasıdır (Şekil 3.1). Pozitif bileşenlere sahip bir E^* denge noktası aradığımızdan ve $(K_1, 0)$ noktasının ikinci bileşeni pozitif olmadığından dolayı E^* yoktur.



Şekil 3.1 Durum i

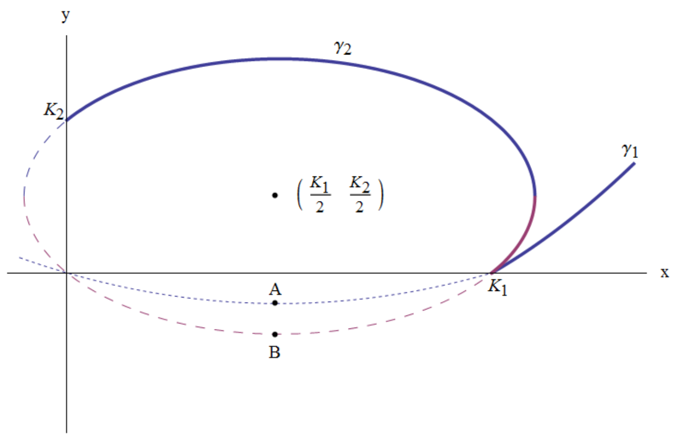
Durum ii) A noktası B noktasının yukarısındadır. Bu durumda

$$\frac{-L_1K_1^2}{4B_2P_1} > \frac{K_2}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L_1K_1^2 + L_2K_2^2}{L_2}}$$

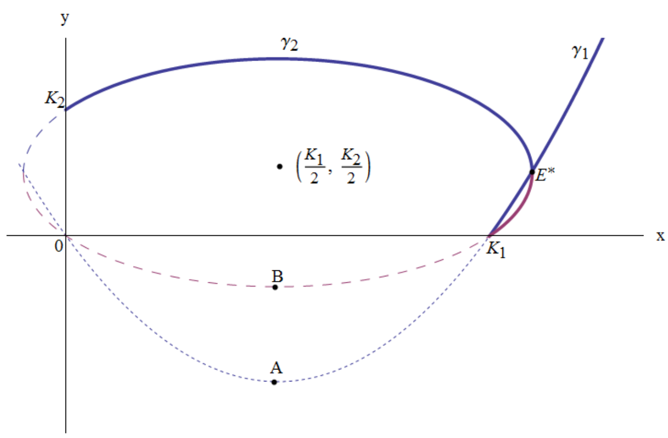
eşitsizliği sağlanır ve Durum i'de olduğu gibi E^* yoktur (Şekil 3.2).

Durum iii) A noktası B noktasının aşağısındadır. Yani $\frac{-L_1K_1^2}{4B_2P_1} < \frac{K_2}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L_1K_1^2 + L_2K_2^2}{L_2}}$ dir. Bu durumda E^* vardır ve tektir (Şekil 3.3). ■

Teorem 3.2 Eğer $P_2B_2 - D_2 > 0$ ise bu durumda E^* asimptotik kararlıdır.



Şekil 3.2 Durum ii



Şekil 3.3 Durum iii

İspat. E^* ın Jakobiyen matrisi

$$J(E^*) = \begin{bmatrix} -L_1\sqrt{K_1^2 + \dfrac{4P_1B_2(P_2B_2 - D_2)}{L_1L_2}} & P_1B_2 \\ 0 & -(P_2B_2 - D_2) \end{bmatrix}$$

şeklindedir ve $\det(J(E^*) - \lambda I) = 0$ karakteristik denkleminin kökleri

$$\lambda_1 = -L_1\sqrt{K_1^2 + \frac{4P_1B_2(P_2B_2 - D_2)}{L_1L_2}} \text{ ve } \lambda_2 = -(P_2B_2 - D_2)$$

dir. $P_2B_2 - D_2 > 0$ olduğundan $\lambda_2 < 0$ dır. Dolayısıyla, E^* asimptotik kararlıdır.

■

3.1.2 Simülasyon ve nümerik çözüm

Demirci ve Özalp (2012)'de verilen aşağıdaki iki teorem, kesirli diferensiyel denklem sisteminin çözümünün bulunmasında kullanılacaktır.

Teorem 3.3 $\|.\|$, R^n üzerinde uygun bir normu göstersin.
$R_1 = [(t, X) : 0 \le t \le a \text{ ve } \|X - X_0\| \le b]$, $f = (f_1, f_2, ..., f_n)^T$, $X = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$ olmak üzere $f \in C[R_1, R^n]$ olsun ve R_1 üzerinde $\|f(t, X)\| \le M$ olsun. Bu durumda $\beta = \min\left(a, \left[\frac{b}{M}\Gamma(\alpha + 1)\right]^{1/\alpha}\right)$, $0 < q < 1$ olmak üzere aşağıda başlangıç koşuluyla verilen

$$D^qX(t) = f(t, X(t)) \tag{3.2}$$

$$X(0) = X_0 \tag{3.3}$$

kesirli diferensiyel denklem sisteminin $0 \le t \le \beta$ aralığında en az bir çözümü vardır.

Teorem 3.4 (3.2)-(3.3) ile verilen q $(0 < q < 1)$ mertebeli başlangıç değer problemini ele alalım. $g(v, X_*(v)) = f(t - (t^q - v\Gamma(q+1))^{1/q}, X(t - (t^q - v\Gamma(q+1))^{1/q}))$ olsun ve Teorem 3.3'ün koşulları sağlansın. Bu durumda

$$\begin{aligned} D^qx(t) &= f(t, x(t)) \\ x(0) &= x_0 \end{aligned}$$

sisteminin bir $X(t)$ çözümü $X(t) = X_*(t^q/\Gamma(q+1))$ olarak verilebilir. Burada $X_*(v)$,

$$X_*(0) = X_0.$$

başlangıç koşuluyla verilen, tamsayı mertebeden

$$\frac{d(X_*(v))}{dv} = g\left(v, X_*(v)\right)$$

diferensiyel denklem sisteminin bir çözümüdür.

Türkiye için beklenen değerler olarak $B_1 = 0.14$, $B_2 = 0.2$, $D_1 = D_2 = 0.02$, $P_1 = 0.6$, $P_2 = 0.4$, $L_1 = L_2 = 0.002$ değerlerini alıp (3.1) sisteminde yazarsak ve $q = 0.9$ alırsak

$$\begin{aligned} D^{0.9}x &= 0.12x - 0.002x^2 + 0.12y \\ D^{0.9}y &= 0.06y - 0.002y^2 \end{aligned} \tag{3.4}$$

sistemini ve $E^*(81.9615,\ 30)$ pozitif denge noktasını buluruz. Başlangıç koşullarını (milyon cinsinden)

$$x(0) = 60,\ y(0) = 15 \tag{3.5}$$

olarak alıp, (3.4)-(3.5) başlangıç değer problemini çözmek için Teorem 3.4'ü kullandığımızda, karşılık gelen tamsayı merteben sistemi

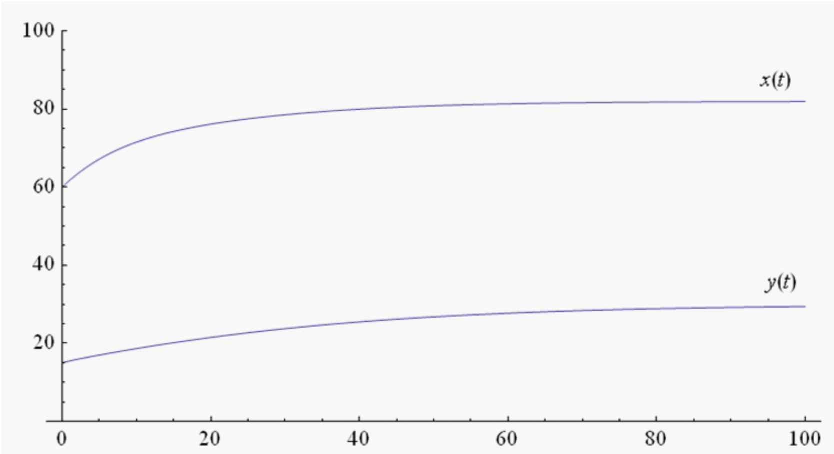
$$\begin{aligned} \frac{dx_*(v)}{dv} &= 0.12x_*(v) - 0.002x_*^2(v) + 0.12y_*(v) \\ \frac{dy_*(v)}{dv} &= 0.06y_*(v) - 0.002y_*^2(v) \end{aligned} \tag{3.6}$$

şeklinde; başlangıç koşullarını da

$$x_*(0) = 60,\ y_*(0) = 15. \tag{3.7}$$

olarak bulmuş oluruz.

Teorem 3.4'e göre tamsayı mertebeden sistemin $(x_*(v), y_*(v))$ çözümü, kesirli mertebeden (3.4)-(3.5) sisteminin $(x_*(t^{0.9}/\Gamma(1.9)), y_*(t^{0.9}/\Gamma(1.9)))$ çözümüne karşılık gelir. Adams-Bashforth-Moulton yöntemini uyguladığımızda sistemin nümerik çözümünü Şekil 3.4'teki gibi elde ederiz. Şekilde $x(t)$ ve $y(t)$'nin sırasıyla 81.9615 ve 30 noktalarına yakınsadığı görülür ki bu noktalar pozitif denge noktası olan E^* ın bileşenleridir. Yani, modeli oluştururken yapılan kabuller altında, Türkiye'deki tek dilli ve iki dilli nüfus (ve elbetteki verilen simülatif değerlere göre) 81.9615 ve 30 (milyon) noktalarında denge durumundadır.



Şekil 3.4 (3.4)-(3.5) sisteminin çözümü

Son olarak, (3.6)-(3.7) sisteminin çözümü, (Diethelm vd. 2002)'de verilen direkt yöntemle ayrıca elde edilebilir. Bu yöntem, (3.2)-(3.3) formundaki kesirli mertebeden başlangıç değer problemlerini çözmek için geliştirilmiş bir nümerik yöntemdir. Yöntemin, (3.2)-(3.3) kesirli sistemimizdeki notasyona uygun genel programlama kodu aşağıda verilmiştir.

$h := T/N$

$m := \lceil q \rceil$

FOR $k := 1$ TO N DO BEGIN

$b_k := k^q - (k-1)^q$

$a_k := (k+1)^q - 2k^{q+1} + (k-1)^{q+1}$

END

FOR $j := 1$ TO N DO BEGIN

$$p_1 := x_0 + \frac{h^q}{\Gamma(q+1)} \sum_{k_1=0}^{j-1} b_{j-k_1}\ f_1(x_{k_1}, y_{k_1})$$

$$p_2 := y_0 + \frac{h^q}{\Gamma(q+1)} \sum_{k_2=0}^{j-1} b_{j-k_2}\ f_2(x_{k_2}, y_{k_2})$$

$$x_j := x_0 + \frac{h^q}{\Gamma(q+1)} \times \left(f_1(p_1, p_2) + ((j-1)^{q+1} - (j-1-q)j^q)\, f_1(x_0, y_0) + \sum_{k=1}^{j} a_{j-k+1} f_1(x_k, y_k) \right)$$

$$y_j := y_0 + \frac{h^q}{\Gamma(q+1)} \times \left(f_2(p_1, p_2) + ((j-1)^{q+1} - (j-1-q)j^q)\, f_2(x_0, y_0) + \sum_{k=1}^{j} a_{j-k+1} f_2(x_k, y_k) \right)$$

END

Burada T, çözümü içinde arayacağımız aralığın üst sınırını; N ise algoritmanın kaç adımda uygulanacağını gösterir ve her iki sayı da pozitif tamsayıdır. Ayrıca f_i $(i = 1, 2)$, (3.4) sistemindeki i. eşitliğin sağ yanını temsil eder. Tercih ettiğimiz bir programlama diline göre yöntem, (3.4)-(3.5) sistemine uygulanmış ve elde edilen sonuç Şekil 3.4'te gösterilmiştir.

3.2 Üç Bileşenli İki Dillilik Modeli

Önceki kesimde farklı dilleri konuşsalar dahi, tek dil konuşanların tamamı bir bileşen olarak ele alınıp bu bileşenin iki dilli bileşenle etkileşimi incelenmişti. Bu kesimde ise tek dil konuşanlar kendi içerisinde iki farklı dil grubuna ayrılarak, bu grupların hem iki dilli grup ile hem de kendi aralarında gerçekleşen etkileşimi ele alınmıştır. İkisi tek dilli, biri iki dilli olmak üzere üç bileşen arasındaki etkileşim kesirli mertebeden diferensiyel denklemlerden oluşan otonom bir sistemle ifade edilmiştir. Çevredeki diğer azınlık dillerinin etkileşimi dikkate alınmamıştır.
Modelimizde yaptığımız kabuller aşağıda listelenmiştir.

1. Doğum ve ölüm sürekli işlemlerdir.
2. Tek dilli ebeveynlerin çocukları nüfusa tek dilli olarak dahil olur.
3. İki dilli ailelerin çocukları nüfusa tek dilli veya iki dilli olarak dahil olabilir.
4. Çevrenin göç alması ve göç vermesi dikkate alınmamıştır.
5. İki dillilikten tek dilliliğe geçiş vardır.
6. Baskın tek dillilikten iki dilliliğe geçiş yoktur.

(1) kabulü, orta ve büyük ölçekteki insan popülasyonlarında standart bir kabuldür. (2), (3) ve (5) kabulleri Baggs-Freedman modellerinde de vardır. Göç vermenin dahil edildiği model (Baggs ve Freedman 1990) çalışılmıştır. Fakat, göç almanın dahil edilmesi bu tür modeller için uygun değildir.

(6) kabulü bizim modelimizde kritik bir öneme sahiptir, çünkü özellikle son yıllarda bazı politik, sosyal ve ekonomik sebeplerden ötürü azınlık dillerinin kullanımı ihtiyacının azaldığını kabul ediyoruz.

Modelimiz, Fransızca ve İngilizce'nin konuşulduğu Kübek; Fransızca ve Flemence'nin konuşulduğu Brüksel gibi yerler; veya İngilizce ve İspanyolca'nın konuşulduğu ABD nin bazı bölgeleri için uygundur. Bunun yanında modelimiz özel olarak, Türkçe'nin yaygın tek dil olarak kullanıldığı ve Kürtçe'nin Türkçe ile birlikte ikinci dil olarak kullanıldığı Türkiye'deki durumun bir modellenmesidir.

Türkçe konuşan baskın tek dilli bileşenin $t \geq 0$ anındaki yoğunluğu $x_1(t)$ ile temsil edilirken, iki dilli grubun yoğunluğu $x_2(t)$ ile; Kürtçe konuşan tek dilli grubun yoğunluğu da $x_3(t)$ ile gösterilmiştir.

Bütün bu kabullerle birlikte modelimiz

$$
\begin{aligned}
D^q x_1 &= (B_1 - D_1)x_1 - L_1 x_1^2 + \left(P_1 - \frac{P_3 x_3}{x_1 + x_2 + x_3}\right) B_2 x_2 \\
D^q x_2 &= (P_2 B_2 - D_2)x_2 - L_2 x_2^2 + \frac{x_2 x_3}{1 + x_2 + x_3}\left(\alpha + \frac{\beta x_1}{1 + x_1}\right) \\
D^q x_3 &= (B_3 - D_3)x_3 - L_3 x_3^2 - \frac{x_2 x_3}{1 + x_2 + x_3}\left(\alpha + \frac{\beta x_1}{1 + x_1}\right) + \frac{P_3 x_3}{x_1 + x_2 + x_3} B_2 x_2.
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

şeklinde ifade edilmiştir. $B_i > D_i$ olmak üzere bu sistemde, B_i ve $D_i + L_i x_i$, x_i $(i = 1, 2, 3)$ nin doğum ve ölüm oranlarıdır. $P_1 + P_2 = 1$, $P_3 \leq P_1$ olmak üzere, iki dilli ebeveynlerin doğurdukları çocukların yani $B_2 x_2$ nin P_2 oranındaki kısmı iki dilli grupta kalırken; P_1 oranındaki kısmı tek dilli gruplara dahil olmaktadır. Bunun da $\dfrac{P_3 x_3}{x_1 + x_2 + x_3}$ kısmı x_3 e dahil olup, $P_1 - \dfrac{P_3 x_3}{x_1 + x_2 + x_3}$ oranındaki kısmı x_1 de kalmaktadır. Birim zamanda x_3 tek dilli bileşeninin x_2 iki dilli bileşenine geçiş oranı $\dfrac{1}{1 + x_2 + x_3}(\alpha + \dfrac{\beta x_1}{1 + x_1})$ şeklindedir (Freedman 1980, Baggs ve Freedman 1993, Wyburn 2004, Wyburn ve Hayward 2008).

3.2.1 Denge noktaları ve kararlılık

$D^q x_i = 0$ $(i = 1, 2, 3)$ alırsak (3.8) sisteminin denge noktaları $E_0(0, 0, 0)$, $E_1(K_1, 0, 0)$, $E_3(0, 0, K_3)$, $\tilde{E}(K_1, 0, K_3)$, $\hat{E}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, 0)$ noktaları ve olası $\bar{E}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ noktasıdır. Burada $K_i = \dfrac{B_i - D_i}{L_i}$, x_i $(i = 1, 2, 3)$ nin taşıma kapasitesidir. $\hat{E}$ nin sıfırdan farklı bileşenleri $\hat{x}_1 = \frac{1}{2}K_1 + \frac{1}{2}\sqrt{K_1^2 + \frac{4P_1B_2(P_2B_2 - D_2)}{L_1L_2}}$ ve $\hat{x}_2 = \frac{P_2B_2 - D_2}{L_2}$ dir.

$$
\begin{aligned}
\tilde{a}_{11} &= D_1 - B_1 \\
\tilde{a}_{12} &= P_1B_2 - \frac{P_3B_2K_3}{(K_1 + K_3)} \\
\tilde{a}_{22} &= P_2B_2 - D_2 + \frac{K_3}{1 + K_1}\left(\alpha + \frac{\beta K_1}{1 + K_1}\right) \\
\tilde{a}_{32} &= -\frac{K_3}{1 + K_1}\left(\alpha + \frac{\beta K_1}{1 + K_1}\right) + \frac{P_3B_2K_3}{(K_1 + K_3)} \\
\tilde{a}_{33} &= D_3 - B_3
\end{aligned}
$$

olmak üzere $J(\tilde{E})$ nin Jakobiyen matrisi

$$
J(\tilde{E}) = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & 0 \\ 0 & \tilde{a}_{22} & 0 \\ 0 & \tilde{a}_{32} & \tilde{a}_{33} \end{bmatrix}
$$

olarak bulunmuş olup $J(\tilde{E})$ nin özdeğerleri $\tilde{\lambda}_1 = D_1 - B_1$, $\tilde{\lambda}_2 = P_2B_2 - D_2 + \frac{K_3}{1 + K_1}\left(\alpha + \frac{\beta K_1}{1 + K_1}\right)$ ve $\tilde{\lambda}_3 = D_3 - B_3$ dir.
Benzer şekilde

$$
\begin{aligned}
\hat{a}_{11} &= -L_1\sqrt{K_1^2 + \frac{4P_1B_2(P_2B_2 - D_2)}{L_1L_2}} \\
\hat{a}_{12} &= P_1B_2 \\
\hat{a}_{13} &= \frac{-P_3B_2\left(\frac{P_2B_2 - D_2}{L_2}\right)}{\hat{x}_1 + \hat{x}_2} \\
\hat{a}_{22} &= -(P_2B_2 - D_2) \\
\hat{a}_{23} &= \left(\alpha + \frac{\beta\hat{x}_1}{1 + \hat{x}_1}\right)\frac{\hat{x}_2}{1 + \hat{x}_2} \\
\hat{a}_{33} &= B_3 - D_3 - \left(\alpha + \frac{\beta\hat{x}_1}{1 + \hat{x}_1}\right)\frac{\hat{x}_2}{1 + \hat{x}_2} + \frac{P_3B_2\hat{x}_2}{\hat{x}_1 + \hat{x}_2}
\end{aligned}
$$

olmak üzere $\hat{E}$ nin Jakobiyen matrisi

$$
J(\hat{E}) = \begin{bmatrix} \hat{a}_{11} & \hat{a}_{12} & \hat{a}_{13} \\ 0 & \hat{a}_{22} & \hat{a}_{23} \\ 0 & 0 & \hat{a}_{33} \end{bmatrix}
$$

şeklinde olup $J(\hat{E})$ nin özdeğerleri $\hat{\lambda}_1 = -L_1\sqrt{K_1^2 + \frac{4P_1B_2(P_2B_2 - D_2)}{L_1L_2}}$, $\hat{\lambda}_2 = -(P_2B_2 - D_2)$ ve $\hat{\lambda}_3 = B_3 - D_3 - \left(\alpha + \frac{\beta\hat{x}_1}{1 + \hat{x}_1}\right)\frac{\hat{x}_2}{1 + \hat{x}_2} + \frac{P_3B_2\hat{x}_2}{\hat{x}_1 + \hat{x}_2}$ dir.

E_0, E_1, E_3, $\tilde{E}$ ve $\hat{E}$ denge noktalarının herbirinin en az bir sıfır bileşeni olduğundan bu noktalar gerçek hayat durumları için uygun değildir. Bütün bileşenleri pozitif olan denge noktaları gerçek hayat durumlarına daha uygun olduğundan, $\bar{x}_i > 0$ $(i = 1, 2, 3)$ olmak şartıyla $\bar{E}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ pozitif denge noktasının varlığını incelemeliyiz. Baggs ve Freedman (1993)'de ispatlanmış olan aşağıdaki sonuç bu amaçla verilmiştir.

Sonuç 3.1 *Eğer $\tilde{\lambda}_2 > 0$ ve $\hat{\lambda}_3 > 0$ ise, bu durumda $\bar{E}$ pozitif denge noktası vardır.*

Şimdi $\bar{E}$ nin kararlılığını inceleyelim. $\det(J(\bar{E}) - \lambda I) = 0$ karakteristik denklemi aşağıdaki eşitliği verir.

$$P(\lambda) = \lambda^3 + A_1\lambda^2 + A_2\lambda + A_3 = 0$$

Burada

$$\begin{aligned}
A_1 &= -(a_{11} + a_{22} + a_{33}),\\
A_2 &= -a_{12}a_{21} + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{31} - a_{23}a_{32} + a_{11}a_{33} + a_{22}a_{33},\\
A_3 &= a_{13}a_{31}a_{22} - a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{21}a_{32} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{22}a_{33},\\
a_{11} &= B_1 - D_1 - 2L_1\bar{x}_1,\\
a_{12} &= P_1B_2 - \frac{P_3B_2\bar{x}_3(\bar{x}_1 + \bar{x}_3)}{(\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3)^2},\\
a_{13} &= -\frac{P_3B_2\bar{x}_2(\bar{x}_1 + \bar{x}_2)}{(\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3)^2},\\
a_{21} &= \frac{P_3\bar{x}_2\bar{x}_3}{(1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3)(1 + \bar{x}_1)^2},\\
a_{22} &= P_2B_2 - D_2 - 2L_2\bar{x}_2 + \frac{\bar{x}_3(1 + \bar{x}_3)}{(\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3)^2}\left(\alpha + \frac{\beta\bar{x}_1}{1 + \bar{x}_1}\right),\\
a_{23} &= \frac{\bar{x}_2(1 + \bar{x}_2)}{(\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3)^2}\left(\alpha + \frac{\beta\bar{x}_1}{1 + \bar{x}_1}\right),\\
a_{31} &= \frac{-\beta\bar{x}_2\bar{x}_3}{(1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3)(1 + \bar{x}_1)^2} - \frac{P_3B_2\bar{x}_2\bar{x}_3}{(\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3)^2},\\
a_{32} &= -\left(\alpha + \frac{\beta\bar{x}_1}{1 + \bar{x}_1}\right)\frac{\bar{x}_3(1 + \bar{x}_3)}{(1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3)^2} + \frac{P_3B_2\bar{x}_3(\bar{x}_1 + \bar{x}_3)}{(\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3)^2},\\
a_{33} &= B_3 - D_3 - 2L_3\bar{x}_3 - \frac{\bar{x}_2(1 + \bar{x}_2)}{(1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3)^2}\left(\alpha + \frac{\beta\bar{x}_1}{1 + \bar{x}_1}\right) + \frac{P_3B_2\bar{x}_2(\bar{x}_1 + \bar{x}_2)}{(\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3)^2}.
\end{aligned}$$

şeklindedir.

Sonuç 3.2 *$D(P)$, $P(\lambda) = \lambda^3 + A_1\lambda^2 + A_2\lambda + A_3$ polinomunun diskriminantı olsun. Eğer aşağıdaki şartlardan biri sağlanırsa bu durumda $\bar{E}$ pozitif denge noktası* *asimptotik kararlıdır.*

i) $D(P) > 0,\ A_1 > 0,\ A_3 > 0$ *ve* $A_1A_2 > A_3$.

ii) $D(P) < 0,\ A_1 \geq 0,\ A_2 \geq 0,\ A_3 > 0$ *ve* $q < \frac{2}{3}$.

iii) $D(P) < 0,\ A_1 < 0,\ A_2 < 0$ *ve* $q > \frac{2}{3}$.

İspat. Eğer denge noktasının Jakobiyen matrisinin bütün λ özdeğerleri $|\arg(\lambda)| > \frac{q\pi}{2}$ şartını sağlarsa bu durumda denge noktası asimptotik kararlıdır (Matignon 1996, Ahmed vd. 2007). $\bar{E}$ denge noktasının Jakobiyen matrisinin tüm λ özdeğerleri $P(\lambda) = \lambda^3 + A_1\lambda^2 + A_2\lambda + A_3$ polinom eşitliğinin kökleridir. Bu polinomun tüm köklerine $|\arg(\lambda)| > \frac{q\pi}{2}$ eşitsizliğini sağlatan şartlar (Ahmed vd. 2006), $D(P) = 18A_1A_2A_3 + (A_1A_2)^2 - 4A_3A_1^3 - 4A_2^3 - 27A_3^2$ olmak üzere i, ii ve iii de belirtilmiştir.

■

3.2.2 Simülasyon ve nümerik çözüm

(3.8) sisteminde, Türkiye için beklenen değerler olarak

$$\begin{aligned} B_1 &= 0.017, D_1 = 0.006, L_1 = 0.0001, P_1 = 0.3, \\ B_2 &= 0.020, D_2 = 0.007, L_2 = 0.0004, P_2 = 0.7, \\ B_3 &= 0.022, D_3 = 0.007, L_3 = 0.0001, P_3 = 0.2, \\ \alpha &= \beta = 0.005, \end{aligned}$$

değerlerini ve $q = 0.9$ alırsak, $x_i = x_i(t)$ olmak üzere aşağıdaki sistemi elde etmiş oluruz.

$$\begin{aligned} D^{0.9}x_1 &= 0.011x_1 - 0.0001x_1^2 + \left(0.3 - \frac{0.2x_3}{x_1 + x_2 + x_3}\right)0.02x_2 \\ D^{0.9}x_2 &= 0.007x_2 - 0.0004x_2^2 + \frac{x_2x_3}{1 + x_2 + x_3}\left(0.005 + \frac{0.005x_1}{1 + x_1}\right) \\ D^{0.9}x_3 &= 0.015x_3 - 0.0001x_3^2 - \frac{x_2x_3}{1 + x_2 + x_3}\left(0.005 + \frac{0.005x_1}{1 + x_1}\right) + \frac{0.004x_2x_3}{x_1 + x_2 + x_3}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Pozitif denge noktası da $\bar{E}(121.35,\ 23.85,\ 8.50)$ olur.

$$\begin{aligned} X(t) &= (x_1(t), x_2(t), x_3(t)), \\ X^*(\tau) &= (x_1^*(\tau), x_2^*(\tau), x_3^*(\tau)), \\ f^*(\tau, X^*(\tau)) &= f(t - (t^q - \tau\Gamma(q+1))^{1/q}, X(t - (t^q - \tau\Gamma(q+1))^{1/q})). \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} D^{0.9}X(t) &= f(t, X(t)), \\ \frac{dX^*(\tau)}{d\tau} &= f^*(\tau, X^*(\tau)), \end{aligned}$$

olsun ve başlangıç koşulları da milyon cinsinden

$$x_1(0) = 60,\ x_2(0) = 15, x_3(0) = 0.5, \tag{3.10}$$

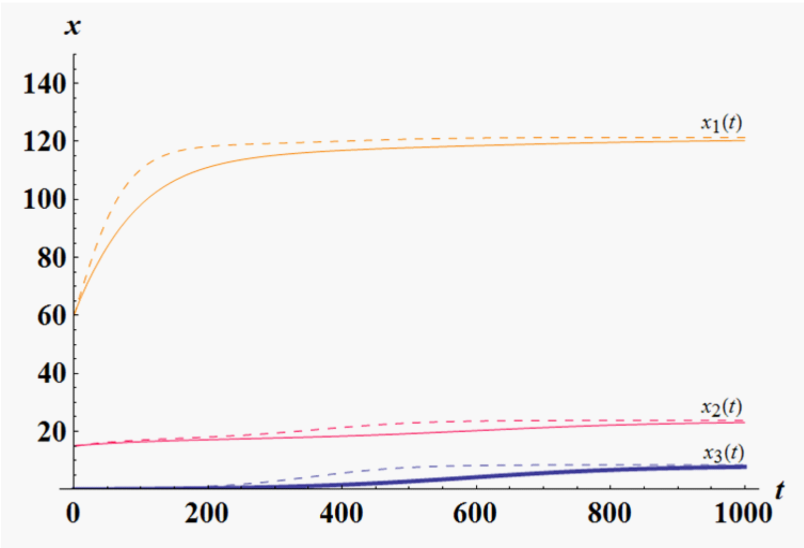
olsun. Teorem 3.4 yardımıyla (3.9) sistemine karşılık gelen tamsayı mertebeden sistem

$$\begin{aligned} \frac{dx_1^*}{d\tau} &= 0.011x_1^* - 0.0001x_1^{*2} + \left(0.3 - \frac{0.2x_3^*}{x_1^* + x_2^* + x_3^*}\right) 0.02x_2^* \\ \frac{dx_2^*}{d\tau} &= 0.007x_2^* - 0.0004x_2^{*2} + \frac{x_2^* x_3^*}{1 + x_2^* + x_3^*}\left(0.005 + \frac{0.005x_1^*}{1 + x_1^*}\right) \\ \frac{dx_3^*}{d\tau} &= 0.015x_3^* - 0.0001x_3^{*2} - \frac{x_2^* x_3^*}{1 + x_2^* + x_3^*}\left(0.005 + \frac{0.005x_1^*}{1 + x_1^*}\right) + \frac{0.004x_2^* x_3^*}{x_1^* + x_2^* + x_3^*} \end{aligned} \tag{3.11}$$

şeklini alır ve başlangıç koşulları $x_i^* = x_i^*(\tau)$ olmak üzere

$$x_1^*(0) = 60,\ x_2^*(0) = 15, x_3^*(0) = 0.5, \tag{3.12}$$

olur. (3.11) sistemi tamsayı mertebeden diferensiyel denklem sistemi olduğuna göre, (3.11)-(3.12) başlangıç değer problemini çözmek için herhangi bir uygun yöntem kullanılabilir. Biz burada Adams-Bashforth-Moulton formüllerini kullandık. Tamsayı mertebeden olan (3.11)-(3.12) sisteminin $(x_1^*(\tau), x_2^*(\tau), x_3^*(\tau))$ çözümünü bulduktan sonra, kesirli mertebeden (3.9)-(3.10) sistemine geri dönüş yapmak için (Teorem 3.4'e göre), (3.11) sisteminde $\tau = t^{0.9}/\Gamma(1.9)$ aldık. Yani kesirli mertebeden sistemin $(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ çözümü, tamsayı mertebeden (3.9)-(3.10) sisteminin $(x_1^*(t^{0.9}/\Gamma(1.9)), x_2^*(t^{0.9}/\Gamma(1.9)), x_3^*(t^{0.9}/\Gamma(1.9)))$ çözümüne karşılık gelir. Böylece kesirli mertebeden (3.9)-(3.10) sisteminin çözümünü şekil 3.5'te gösterildiği gibi bulmuş oluruz. Burada $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ çözümleri, $\bar{E}$ pozitif denge noktasının ilgili bileşenlerine, yani sırasıyla 121.35, 23.85 ve 8.50 değerlerine yakınsar. Gerçekten Sonuç 3.2'nin birinci şartı vermiş olduğumuz değerler için sağlandığından modelimizdeki dil gruplarının üçü de asimptotik kararlıdır. Ayrıca, şekil 3.5'te görüleceği gibi, q nun 1 e doğru arttırılması durumunda nüfus denge noktasına daha hızlı yakınsarken, q'nun azaltılması yakınsamayı yavaşlatmaktadır.



Şekil 3.5 (3.9)-(3.10) in çözümleri. $q = 0.9$ (——); $q = 1$(- - -)

4. MONOTON İTERATİF TEKNİK İLE ÇÖZÜM

Monoton iteratif teknik, kapalı bir kümede, teorik olduğu kadar yapısal sonuçlar öneren, etkin ve esnek bir mekanizmadır. Özellikle iterasyon şemaları, çözümlerin niteliksel özelliklerinin araştırılmasında oldukça faydalıdır. Son yıllarda, bu yöntemin özünü oluşturan fikirlerin bilhassa lineer olmayan çeşitli problemlerin biraraya getirilmesinde büyük bir rol oynadığı ve çok değerli olduğu ispatlanmıştır (Ladde vd. 1985).

Bu bölümde, monoton iteratif yöntem kullanarak Caputo tipi türevler içeren kesirli mertebeden diferensiyel denklemleri çözmek için bir algoritma geliştirdik. Ayrıca algoritmayı Kesim 3.1'de verdiğimiz iki bileşenli iki dillilik modeline uyguladık.

4.1 Ön Bilgiler

Tanım 4.1 $f \in C[J \times R, R]$ ve $J = [0, T]$ olmak üzere

$$u' = f(t, u), \quad u(0) = u_0 \tag{4.1}$$

başlangıç değer problemini (BDP) ele alalım. $t \in J$ için $w' \geq f(t, w), \quad w(0) \geq u_0$ eşitsizliğini sağlayan bir $w \in C^1[J, R]$ fonksiyonuna (4.1)'in bir üst çözümü; $v' \leq f(t, w), \quad v(0) \leq u_0$ eşitsizliğini sağlayan bir $v \in C^1[J, R]$ fonksiyonuna da (4.1)'in bir alt çözümü denir.

Tanım 4.2 $r(t)$ ve $\rho(t)$ (4.1)'in $I = [t_0, t_0 + h]$ aralığında herhangi iki çözümü olsun. Eğer (4.1)'in I aralığındaki her $u(t)$ çözümü için $u(t) \leq r(t)$ ve $\rho(t) \leq u(t)$ eşitsizlikleri $t \in I$ için sağlanıyorsa, bu durumda $r(t)$ ve $\rho(t)$'ye (4.1)'in sırasıyla maximal ve minimal çözümleri denir.

Teorem 4.1 $f \in C[J \times R, R]$ ve $v_0,\ w_0$ (4.1)'in J aralığında $v_0 \leq w_0$ şartını sağlayan alt ve üst çözümleri olsun. Ayrıca $v_0 \leq \bar{u} \leq u \leq w_0$ ve $M \geq 0$ olacak şekilde

$$f(t, u) - f(t, \bar{u}) \geq -M(u - \bar{u})$$

olsun. Bu durumda $v,\ w$ (4.1)'in sırasıyla minimal ve maximal çözümleri olmak üzere J üzerinde, $n \to \infty$ için $v_n \to v,\quad w_n \to w$ şeklinde düzgün ve monoton yakınsak $\{v_n\},\ \{w_n\}$ dizileri vardır (Ladde vd. 1985).

Teorem 4.2 Eğer f, u ya göre artmayan fonksiyon ise bu durumda;
i) $v'_{n+1} = f(t, v_n),\ \ v_{n+1}(0) = u_0$ ile verilen $v_n(t)$ iterasyonları ve (2.1) in tek çözümü $u(t), (v_2(t) \geq v_0(t))$ olmak üzere

$$v_0(t) \leq v_2(t) \leq ... \leq v_{2n}(t) \leq u(t) \leq v_{2n+1}(t) \leq ... \leq v_3(t) \leq v_1(t)$$

eşitsizliğini sağlar. Ayrıca $\{v_{2n}(t)\}$, $\{v_{2n+1}(t)\}$ alterne dizileri $\rho(t)$ ve $r(t)$ ye düzgün monoton yakınsaktır ve $\rho(t) \leq u(t) \leq r(t)$ dir;
veya
ii) $w'_{n+1} = f(t, w_n),\ \ w_{n+1}(0) = u_0$ ile verilen $w_n(t)$ iterasyonları (2.1) in tek çözümü $u(t)$, $(w_2(t) \leq w_0(t))$ olmak üzere

$$w_1(t) \leq w_3(t) \leq ... \leq w_{2n+1}(t) \leq u(t) \leq w_{2n}(t) \leq ... \leq w_2(t) \leq w_0(t)$$

eşitsizliğini sağlar. Ayrıca $\{w_{2n+1}(t)\}$, $\{w_{2n}(t)\}$ alterne dizileri $\tilde{\rho}(t)$ ve $\tilde{r}(t)$ ye monoton düzgün yakınsaktır ve $\tilde{\rho}(t) \leq u(t) \leq \tilde{r}(t)$ dir (Ladde vd. 1985).

Sonuç 4.1 Theorem 4.2 nin kabullerine ek olarak, $u_1 \geq u_2$ olacak şekilde $f(t, u_1) - f(t, u_2) \geq -M(u_1 - u_2)$ olsun. Bu durumda $\rho(t) = u(t) = r(t)$ dir (Ladde vd. 1985).

$f \in C[[0, T] \times R,\ R]$ olmak üzere

$$D^q u(t) = f(t, u(t)), \quad u(0) = u_0 \tag{4.2}$$

ile verilen Caputo tipi kesirli mertebeden diferensiyel denklem içeren başlangıç değer problemini ele alalım.

Teorem 4.3 $R_0 = [(t, u) :\ 0 \leq u \leq a$ ve $|u - u_0| \leq b]$ olmak üzere $f \in C[R_0, R]$; R_0 da $|f(t, u)| \leq M$ ve

$$f^*(\tau, u^*(\tau)) = f(t - (t^q - \tau\Gamma(q+1))^{1/q}, u(t - (t^q - \tau\Gamma(q+1))^{1/q})$$

olsun. Bu durumda, $u^*(\tau)$

$$\frac{du^*(\tau)}{d\tau} = f^*(\tau, u^*(\tau)) \tag{4.3}$$

ile verilen tamsayı mertebeden diferensiyel denkleminin çözümü olmak üzere, (4.2) nin bir $u(t)$ çözümü $u(t) = u^*(t^q/\Gamma(q+1))$ şeklindedir (Demirci 2012).

4.2 Temel Sonuçlar

Teorem 4.4 $f \in C[[0,T] \times R,\ R]$; $v_0,\ w_0$ (4.2) in $v_0 \leq w_0$ şartını sağlayan alt ve üst çözümleri olsun. Ayrıca $v_0 \leq \bar{u} \leq u \leq w_0$ ve $M \geq 0$ olacak şekilde

$$f(t,u) - f(t,\bar{u}) \geq -M(u - \bar{u})$$

olsun. Bu durumda v ile w (4.2) nin sırasıyla minimal ve maximal çözümleri olmak üzere J üzerinde, $n \to \infty$ için $v_n \to v$, $w_n \to w$ şeklinde düzgün ve monoton yakınsak $\{v_n\},\ \{w_n\}$ dizileri vardır.

İspat. Kesirli diferensiyel denklemin (KDD) alt ve üst çözümleri, kesirli mertebeden eşitsizlikleri sağlamalı, yani eğer $v_0,\ w_0$ (4.2) KDD nin alt ve üst çözümleri ise, bu durumda $D^q v_0(t) \leq f(t, v_0(t))$, $v_0(0) \leq u_0$ ve $D^q w_0(t) \geq f(t, w_0(t))$, $w_0(0) \geq u_0$ eşitsizliklerini sağlamaları gerekir. Aşağıdaki iterasyon dizilerini ele alalım.

$$D^q v_n(t) = f(t, v_{n-1}(t)) - M(v_n(t) - v_{n-1}(t)), \qquad v_n(0) = u_0 \tag{4.4}$$

$$D^q w_n(t) = f(t, w_{n-1}(t)) - M(w_n(t) - w_{n-1}(t)), \qquad w_n(0) = u_0 \tag{4.5}$$

Teorem 4.3'ten, (4.4) ile (4.5) e karşılık gelen tamsayı mertebeden diferensiyel denklemler

$$\frac{dv_n^*(\tau)}{d\tau} = f^*(\tau, v_{n-1}^*(\tau)) - M(v_n^*(\tau) - v_{n-1}^*(\tau)), \qquad v_n^*(0) = u_0 \tag{4.6}$$

$$\frac{dw_n^*(\tau)}{d\tau} = f^*(\tau, w_{n-1}^*(\tau)) - M(w_n^*(\tau) - w_{n-1}^*(\tau)), \qquad w_n^*(0) = u_0 \tag{4.7}$$

dir. Burada $f^*(\tau, u^*(\tau)) = f(t-(t^q-\tau\Gamma(q+1))^{1/q}, u(t-(t^q-\tau\Gamma(q+1))^{1/q})$, $w_n^*(\tau) = w_n(t-(t^q-\tau\Gamma(q+1))^{1/q})$, $v_n^*(\tau) = v_n(t-(t^q-\tau\Gamma(q+1))^{1/q})$ ve $\tau \in [0, T^q/\Gamma(q+1)]$ dir.

(4.6) ve (4.7) tamsayı mertebeden diferensiyel denklemler olduğundan, Teorem 4.1 den, $\{v_n^*(\tau)\}$, $\{w_n^*(\tau)\}$ monoton ve düzgün yakınsak dizileri vardır öyleki $[0, T^q/\Gamma(q+1)]$ üzerinde $n \to \infty$ için $v_n^*(\tau) \to \rho^*(\tau)$, $w_n^*(\tau) \to r^*(\tau)$ dir. Burada $\rho^*(\tau)$ ve $r^*(\tau)$ (4.3) nin maximal ve minimal çözümleridir.

$$\rho(t) = \rho^*(t^q/\Gamma(q+1)), \quad r(t) = r^*(t^q/\Gamma(q+1))$$

aldığımızda ve yine Teorem 4.3 ten, $n \to \infty$ için J üzerinde $v_n \to \rho$, $w_n \to r$ şeklinde düzgün ve monoton yakınsama olduğunu ifade edebiliriz. ■

Teorem 4.5 Eğer f, u ya göre artmayan ise bu durumda Teorem 4.2 de verilen durumlardan biri aşağıda verilen $v_n(t)$ ve $w_n(t)$ iterasyonları için J aralığında sağlanır.

$$D^q v_{n+1}(t) = f(t, v_n(t)), \qquad v_{n+1}(0) = u_0 \tag{4.8}$$

$$D^q w_{n+1}(t) = f(t, w_n(t)), \qquad w_{n+1}(0) = u_0 \tag{4.9}$$

İspat. Teorem 4.3'e göre (4.8) ile (4.9) a karşılık gelen tamsayı mertebeden diferensiyel denklemler

$$\frac{dv_{n+1}^*(\tau)}{d\tau} = f^*(\tau, v_n^*(\tau)), \qquad v_{n+1}^*(0) = u_0 \tag{4.10}$$

$$\frac{dw_{n+1}^*(\tau)}{d\tau} = f^*(\tau, w_n^*(\tau)), \qquad w_{n+1}^*(0) = u_0. \tag{4.11}$$

dir. (4.10) ve (4.11) tamsayı mertebeden olduğundan Teorem 4.2 deki durumlardan biri (4.10) ile (4.11) deki $v_{n+1}^*(\tau)$ ve $w_{n+1}^*(\tau)$ iterasyonları için sağlanır. Yani, ya;

i)

$$v_i^*(\tau) = v_i(t), \quad i = 1, 2, ..., 2n+1, \quad u^*(\tau) = u(t) \tag{4.12}$$

olmak üzere $J^* = [0, T^q/\Gamma(q+1)]$ üzerinde $v_2^*(\tau) \geq v_0^*(\tau)$ olacak şekilde

$$v_0^*(\tau) \leq v_2^*(\tau) \leq ... \leq v_{2n}^*(\tau) \leq u^*(\tau) \leq v_{2n+1}^*(\tau) \leq ... \leq v_3^*(\tau) \leq v_1^*(\tau) \tag{4.13}$$

dir. Ayrıca J^* üzerinde $\{v_{2n}^*(\tau)\}$, $\{v_{2n+1}^*(\tau)\}$ alterne dizileri $\rho^*(\tau)$ ve $r^*(\tau)$ ye düzgün ve monoton yakınsaktır ve $\rho^*(\tau) \leq u^*(\tau) \leq r^*(\tau)$ dir;

ya da

ii) J^* üzerinde $w_2^*(\tau) \leq w_0^*(\tau)$ olmak şartıyla

$$w_1^*(\tau) \leq w_3^*(\tau) \leq ... \leq w_{2n+1}^*(\tau) \leq u^*(\tau) \leq w_{2n}^*(\tau) \leq ... \leq w_2^*(\tau) \leq w_0^*(\tau).$$

Ayrıca, $\{w_{2n+1}^*(\tau)\}$, $\{w_{2n}^*(\tau)\}$ alterne dizileri $\tilde{\rho}^*(\tau)$ ile $\tilde{r}^*(\tau)$ ye düzgün ve monoton yakınsaktır ve $\tilde{\rho}^*(\tau) \leq u^*(\tau) \leq \tilde{r}^*(\tau)$ dir. Teorem 4.3, ve (4.12) ile (4.13) den, ya **i)** J üzerinde $v_2(t) \geq v_0(t)$ olmak şartıyla $v_0(t) \leq v_2(t) \leq ... \leq v_{2n}(t) \leq u(t) \leq v_{2n+1}(t) \leq ... \leq v_3(t) \leq v_1(t)$ dir; ya da
ii) J üzerinde $w_2(t) \leq w_0(t)$ olmak şartıyla $w_1(t) \leq w_3(t) \leq ... \leq w_{2n+1}(t) \leq u(t) \leq w_{2n}(t) \leq ... \leq w_2(t) \leq w_0(t)$ dir. ■

Sonuç 4.2 Teorem 4.5 teki kabule $u_1 \geq u_2$ olacak şekilde $f(t, u_1) - f(t, u_2) \geq -M(u_1 - u_2)$ şartını da eklersek, J üzerinde $\rho(t) = u(t) = r(t)$ olur.

4.3 Algoritma

(4.2) ile verilen Caputo tipi kesirli diferensiyel denklemli BDP problemini monoton iteratif yöntem kullanarak çözmek için aşağıdaki algoritma izlenebilir.

1. Kesirli mertebeden (4.2) BDP nin tamsayı mertebeden karşılığı

   $$\frac{du^*(\tau)}{d\tau} = f^*(\tau, u^*(\tau)) \tag{4.14}$$

   şeklinde yazılır. Burada

   $$f^*(\tau, u^*(\tau)) = f(t - (t^q - \tau\Gamma(q+1))^{1/q}, u(t - (t^q - \tau\Gamma(q+1))^{1/q})$$

   dir.

2. $v_0 \leq \bar{u}^* \leq u^* \leq w_0$ olmak üzere $f^*(\tau, u^*) - f^*(\tau, \bar{u}^*) \geq -M(u^* - \bar{u}^*)$ eşitsizliğinden (tek-yanlı Lipschitz şartı) $M \geq 0$ sayısı bulunur.

3. (4.14) için üst ve alt çözümler, yani $w_0(\tau)$ ve $v_0(\tau)$ bulunur (bunlardan sadece birisi de kullanılabilir).

4. $v_1, v_2, ..., v_n$ ve $w_1, w_2, ..., w_n$ iterasyonlarını ardışık olarak bulmak için aşağıdaki iterasyon dizileri kullanılır.

$$v_n'(\tau) = f^*(\tau, v_{n-1}(\tau)) - M(v_n(\tau) - v_{n-1}(\tau)), \qquad v_n(0) = u_0 \qquad (4.15)$$

$$w_n'(\tau) = f^*(\tau, w_{n-1}(\tau)) - M(w_n(\tau) - w_{n-1}(\tau)), \qquad w_n(0) = u_0 \qquad (4.16)$$

5. (4.15) ve (4.16) tamsayı mertebeden lineer diferensiyel denklemler olduğundan, çözümleri

$$v_n(\tau) = e^{-M\tau} \left\{ u_0 + \int_0^\tau e^{Ms} \left[f^*(s, v_{n-1}(s)) + Mv_{n-1}(s) \right] ds \right\} \qquad (4.17)$$

$$w_n(\tau) = e^{-M\tau} \left\{ u_0 + \int_0^\tau e^{Ms} \left[f^*(s, w_{n-1}(s)) + Mw_{n-1}(s) \right] ds \right\} \qquad (4.18)$$

olarak bulunur.

6. (4.17) ve (4.18) in limitleri sırası ile $\rho^*(\tau)$ ve $r^*(\tau)$ minimal ve maximal çözümlerini vereceğinden dolayı, tamsayı mertebeden BDP nin çözümü bu yaklaşımlardan biri olarak alınabilir. Eğer teklik şartları sağlanırsa bu durumda minimal ve maksimal çözüm aynı olacağından dolayı, $u^*(\tau)$ (4.3) BDP nin tek çözümüdür.

7. $u(t) = u^*(t^q/\Gamma(q+1))$, kesirli mertebeden (4.2) diferensiyel denkleminin çözümüdür.

4.4 Yöntemin İki Bileşenli İki Dillilik Modeline Uygulanması

Önceki kesimde verdiğimiz algoritmayı Kesim 3.1'de verilen iki bileşenli iki dillilik modeline uygulayalım. Modeli,

$$\begin{aligned} D^q x(t) &= (B_1 - D_1)x(t) - L_1 x^2(t) + P_1 B_2 y(t) \qquad (4.19) \\ D^q y(t) &= (P_2 B_2 - D_2)y(t) - L_2 y^2(t) \end{aligned}$$

şeklinde, kesirli mertebeden iki tane diferensiyel denklemden oluşan bir sistemle ifade etmiştik.

Kesirli mertebeden (4.19) sisteminin tamsayı mertebeden karşılığı, Teorem 4.3'e göre

$$
\begin{aligned}
\frac{dx^*(\tau)}{d\tau} &= (B_1 - D_1)x^*(\tau) - L_1 x^{*2}(\tau) + P_1 B_2 y^*(\tau) \qquad (4.20) \\
\frac{dy^*(\tau)}{d\tau} &= (P_2 B_2 - D_2)y^*(\tau) - L_2 y^{*2}(\tau)
\end{aligned}
$$

şeklindedir. Burada başlangıç koşulları $x^*(0) = x_0$, $y^*(0) = y_0$ olup $x(t) = x^*(t^q/\Gamma(q+1))$ ve $y(t) = y^*(t^q/\Gamma(q+1))$ dir. Sistem artık tamsayı mertebeden olduğuna göre (4.20) deki ikinci denklem Bernoulli tipinde bir diferensiyel denklemdir ve çözümü

$$
y^*(\tau) = \frac{(P_2B_2 - D_2)y_0 e^{(P_2B_2 - D_2)\tau}}{(P_2B_2 - D_2) - L_2y_0 + L_2y_0 e^{(P_2B_2-D_2)\tau}}
$$

dir. $y^*(\tau)$ yu (4.20) sisteminin ilk denkleminde yerine yazdığımızda

$$
\begin{aligned}
\frac{dx^*(\tau)}{d\tau} &= (B_1 - D_1)x^*(\tau) - L_1 x^{*2}(\tau) \qquad (4.21) \\
&\quad + P_1 B_2 \frac{(P_2B_2 - D_2)y_0 e^{(P_2B_2 - D_2)\tau}}{(P_2B_2 - D_2) - L_2y_0 + L_2y_0 e^{(P_2B_2-D_2)\tau}}.
\end{aligned}
$$

olur.

$$
\begin{aligned}
f^*(\tau, x^*(\tau)) &= (B_1 - D_1)x^*(\tau) - L_1 x^{*2}(\tau) \\
&\quad + P_1 B_2 \frac{(P_2B_2 - D_2)y_0 e^{(P_2B_2 - D_2)\tau}}{(P_2B_2 - D_2) - L_2y_0 + L_2y_0 e^{(P_2B_2-D_2)\tau}}
\end{aligned}
$$

olsun ve sade olması açısından

$$
A(\tau) = P_1 B_2 \frac{(P_2B_2 - D_2)y_0 e^{(P_2B_2 - D_2)\tau}}{(P_2B_2 - D_2) - L_2y_0 + L_2y_0 e^{(P_2B_2-D_2)\tau}}
$$

olsun. Tek yanlı Lipschitz şartından M yi bulmak için, $K_1 = \frac{B_1 - D_1}{L_1}$ taşıma kapasitesi olduğundan dolayı $0 \leq \bar{x}^* \leq x^* \leq K_1$ eşitsizliğini de dikkate alırsak,

$$
\begin{aligned}
f^*(\tau, x^*) - f^*(\tau, \bar{x}^*) &= (B_1 - D_1)x^* - L_1 x^{*2} \\
&\quad + A(\tau) - [(B_1 - D_1)\bar{x}^* - L_1 \bar{x}^{*2} + A(\tau)] \\
&= [(B_1 - D_1) - L_1(x^* + \bar{x}^*)](x^* - \bar{x}^*) \\
&\geq [(B_1 - D_1) - 2L_1K_1](x^* - \bar{x}^*) \\
&\geq (D_1 - B_1)(x^* - \bar{x}^*).
\end{aligned}
$$

olur ve böylece $M = |B_1 - D_1|$ alınabilir.

Türkiye için tahmini değerler olarak $B_1 = 0.14$, $B_2 = 0.2$, $D_1 = D_2 = 0.02$, $P_1 = 0.6$, $P_2 = 0.4$, $L_1 = L_2 = 0.002$, değerlerini (4.21)'de yerine yazıp $q = 0.9$ aldığımızda ve başlangıç koşullarını $x^*(0) = 60,\ y^*(0) = 15$ aldığımızda

$$\frac{dx^*(\tau)}{d\tau} = 0.12x^*(\tau) - 0.002x^{*2}(\tau) + \frac{0.108e^{0.06\tau}}{0.03 + 0.03e^{0.06\tau}} \tag{4.22}$$

ve

$$f^*(\tau, x^*(\tau)) = 0.12x^*(\tau) - 0.002x^{*2}(\tau) + \frac{0.108e^{0.06\tau}}{0.03 + 0.03e^{0.06\tau}}.$$

olur. (4.22) ün üst çözümü olarak $w_0^*(\tau) = 100$ seçersek, gerçekten

$$0 = \frac{dw_0^*(\tau)}{d\tau} \geq f^*(\tau, w_0^*(\tau)) = -8 + \frac{0.108e^{0.06\tau}}{0.03 + 0.03e^{0.06\tau}}$$

ve $100 = w_0^*(0) \geq x_0 = 60$ şartları sağlanır. $w_0^*(\tau)$,

$$\frac{dw_1^*(\tau)}{d\tau} = f^*(\tau, w_0^*(\tau)) - M(w_1^*(\tau) - w_0^*(\tau)), \qquad w_1^*(0) = x_0,$$

iterasyon dizisinde yazıldığında, $w_1^*(\tau)$ yu bulmak için herhangi bir uygun metod kullanılarak bu lineer diferensiyel denklem çözülebilir. $w_1^*(0) = 60$ koşuluyla birlikte $w_1^*(\tau)$ nun nümerik çözümünü bulmak için Adams-Bashforth-Moulton yöntemini uyguladık. Adams-Bashforth-Moulton metoduyla bulduğumuz $w_1^*(\tau)$ çözümü noktalardan oluşuyor. Diğer taraftan bir sonraki

$$\frac{dw_2^*(\tau)}{d\tau} = f^*(\tau, w_1^*(\tau)) - M(w_2^*(\tau) - w_1^*(\tau)), \qquad w_2^*(0) = x_0$$

iterasyonunda $w_2^*(\tau)$ yu bulmak için $w_1^*(\tau)$ nun tam fonksiyon olarak çözümüne ihtiyacımız var. Dolayısıyla uygun bir interpolasyona ihtiyaç var ve bunun için de doğal kübik bağlayıcı fonksiyonundan yararlandık.

$$\frac{dw_n^*(\tau)}{d\tau} = f^*(\tau, w_{n-1}^*(\tau)) - M(w_n^*(\tau) - w_{n-1}^*(\tau)), \qquad w_n^*(0) = x_0,$$

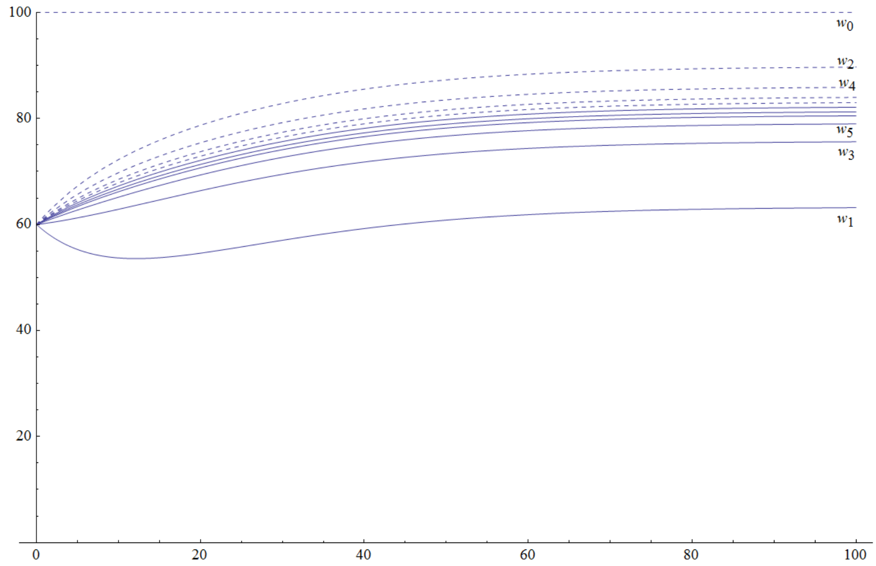
iterasyon dizisi yardımıyla $w_2^*(\tau), w_3^*(\tau), ..., w_n^*(\tau)$ yu ardışık olarak bulmak için, aynı işlemleri uygladığımızda

$$w_1^*(\tau) \leq w_3^*(\tau) \leq ... \leq w_{2n+1}^*(\tau) \leq w_{2n}^*(\tau) \leq ... \leq w_2^*(\tau) \leq w_0^*(\tau) \tag{4.23}$$

olduğunu görürüz. $w_n^*(\tau) = w_n(t - (t^{0.9} - \tau\Gamma(1.9))^{1/0.9})$ ve $\tau \to t^{0.9}/\Gamma(1.9)$ aldığımızda (4.23) eşitsizliğinin aynı zamanda kesirli basamaktan karşılığı için de geçerli olduğunu görürüz, yani,

$$w_1(t) \leq w_3(t) \leq ... \leq w_{2n+1}(t) \leq w_{2n}(t) \leq ... \leq w_2(t) \leq w_0(t)$$

olur. $w_1(t) \leq w_3(t) \leq ... \leq w_9(t) \leq w_{10}(t) \leq ... \leq w_2(t) \leq w_0(t)$ eşitsizliğini sağlayan on tane iterasyon için sonuç Şekil 4.1'de gösterilmiştir.



Şekil 4.1 Problemin çözümüne yakınsayan on tane ardışık üst çözüm.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Günümüzde yeryüzünde 7102 tane dil konuşulmaktadır ve bunların yaklaşık 2400 tanesi yok olmayla karşı karşıyadır (Lewis vd. 2015). Dünyada yaklaşık 200 devlet olduğunu hesaba kattığımızda, dil etkileşimi konusunun hemen hemen her ülkeyi ilgilendiren önemli bir mesele olduğunu ifade edebiliriz. Özellikle sanayileşme, kentleşme, küreselleşme vb. etkenlerle birlikte artan dil etkileşimi ve bu etkileşimin doğurduğu küresel, bölgesel ve yerel bazdaki bir takım problemlerin çözümünde, dil etkileşiminin matematiksel anlamda modellenmesi ve bu modellerin geliştirilmesi büyük bir öneme sahiptir.

Bu tez çalışmasında aynı ortamı paylaşan dil grupları arasındaki etkileşim dinamiğine ait modeller üzerinde çalışılmıştır. Dil kullanımında hafıza etkisinin kesin olması nedeniyle, adi diferensiyel denklemlerle modellleme yerine, kesirli tipten modeller oluşturularak analizler yapılmıştır. Modeller, özellikle Türkiye koşullarına uygun düşecek şekilde yeniden ele alınmış ve olabilecek iki farklı yapı üzerinden dil etkileşiminin gelecekteki dinamiği ve kararlığı incelenmiştir. Elde edilen sonuçlar, dil eğitimi ile ilgili gelecek tahminlerinden; politik, sosyal, kültürel ve ekonomik planlamalara kadar bir çok alanda oldukça önem arz etmektedir.

Tarihten bu yana bir çok farklı topluluğa ve kültüre ev sahipliği yapmış olan Türkiye de, (Lewis vd. 2015)'teki verilere göre, günümüzde Türkçe'nin dışında 46 tane dil konuşulmaktadır ve dünyanın bir çok ülkesinde olduğu gibi Türkiye'de de bu dillerin yaşatılması üzerine tartışmalar yapılmakta, çözüm önerileri geliştirilmektedir. Bu tezin, bu kapsamdaki çalışmalara da önemli katkılar sağlaması mümkündür. Her ne kadar sadece Türkçe ve Kürtçe ile ilgili bazı simülatif değerler üzerinden bazı sonuçlar elde edilmiş ise de, daha ayrıntılı veriler ışığında, tezdeki analizlerin kapsamı diğer dillere de genişletilebilir; bu dillerin dinamikleri incelenerek gelecekteki muhtemel durumları hakkında sağlam öngörülerde bulunulabilir.

Burada ele aldığımız modeller, dil etkileşimini inceleyen nihai modeller olmayıp, matematiksel modellerin genel yapısında da olduğu gibi, belli kabuller altında elde edilmiş ve geliştirilmeye açık modellerdir. Gerçek hayatla bire bir aynı sonuçları elde etmek bir çok durumda neredeyse olanaksız görünse de, gerçek hayata çok yakın sonuçlara ulaşmak mümkündür.

KAYNAKLAR

Ahmed, E., El-Sayed, A.M.A. and El-Saka, H.A.A. 2006. On some Routh-Hurwitz conditions for fractional differential equations and their applications in Lorenz, Rössler, Chua and Chen systems, Physics Letters A 358; 1-4.

Ahmed, E., El-Sayed, A.M.A. and El-Saka, H.A.A. 2007. Equilibrium points, stability and numerical solutions of fractional order predator-prey and rabies model. JMAA, 325; pp. 542-553.

Baggs, I. and Freedman, H.I. 1990. A mathematical model for the dynamics of interactions between a unilingual and a bilingual population: Persistence versus Extinction. Journal of Mathematical Sociology 16(1); 51-75.

Baggs, I. and Freedman, H.I. 1993. Can the speakers of dominated language survive as unilinguals?: A mathematical model on bilingualism, J. Mat. Comp. Model. 18(6); 9-18.

Caputo, M. 1967. Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent. II.Geophys. J.Roy. Astronom. Soc., 13; 529-539.

Demirci, E. and Özalp, N. 2012. A method for solving differential equations of fractional order, Journal of Computational and Applied Mathematics 236; 2754-2762.

Diethelm, K., Neville, J.F. and Alan, D.F. 2002 A predictor-corrector approach for the numerical solution of fractional differential equations, Nonlinear Dynamics 29; 3-22.

Diethelm, K. 2010. The analysis of fractional differential equations: an application-oriented exposition using differential operators of Caputo type. in: Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag.

El-Owaidy, H.M. and Ismail, M. 2002. A mathematical model of bilingualism. Applied Mathematics and Computation 131;415-232.

Freedman, H.I. 1980. Deterministic Mathematical Models in Population Ecology, Markel Dekker Inc., New York.

Kilbas, A.A., Srivastava, H.M. and Trujillo, J.J. 2006. Theory and Applications of Fractional Differential Equations.Elsevier, 204 p. Mathematical Studies.

Ladde, G.S., Lakshmikantham, V. and Vatsala, A.S. 1985. Monotone Iterative Techniques for Nonlinear Differential Equations, Pitman Advanced Publishing Program, London.

Lakshmikantham, V. and Vatsala, A.S. 2007. Theory of Fractional Differential Inequalities and Applications. Communication in Applied Analysis, (11), pp. 395-402.

Lewis, E.G. 1982. Movements and agencies of language spread: Wales and the Soviet Union compared. In Language Spread: Studies in Diffusion and Social Change (Cooper, R.L., ed), Indiana University Press, Bloomington; 214-259.

Lewis, P.M., Simons, G.F. and Fennig, C.H. (eds.) 2015. Ethnologue: Languages of the World, 18th edition.

Machado, J.T. 2014. Numerical analysis of the initial conditions in fractional systems. Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 19; pp. 2935-2941.

Matignon, D. 1996. Stability results for fractional differential equations with applications to control processing. Computational Eng. in Sys. Appl., 2; pp. 963-968.

Miller, K.S. and Ross, B. 1993. An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Eqations. John Willey&Sons Inc., Toronto.

Oldham, K.B. and Spainer, J. 1974. The Fractional Calculus. Academic Press, New York.

Podlubny, I. 1999. Fractional Differential Equations. Academic Press.

Wagner, S.T. 1981. The New Bilingualism.An American Dilemma, University of California Press, Los Angeles; 29-52.

Wardaugh, R. 1987. Languages in Competition: Dominance, Diversity and Decline, Basil Blackwell, Newyork.

Wyburn, J. 2004. A technical report on the derivation of four scenarios imlicit in the Baggs and Freedman model of 1990. Technical report UG-M-04-1, Division of Mathematics and Statistics, University of Glamorgan.

Wyburn, J. and Hayward, J. 2008. The future of bilingualism: An application of the Baggs and Freedman model, Journal of Mathematical Sociology 32; 267-284.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Yusuf SOFUOĞLU

Doğum Yeri : Van

Doğum Tarihi : 01/03/1979

Medeni Hali : Evli

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl):

Lise : Van Atatürk Lisesi (1996)

Lisans : Pamukkale Üniversitesi, Matematik Bölümü (2001)

Yüksek Lisans : YYÜ, Matematik Anabilim Dalı (2010)

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl: Ankara Üniversitesi, Matematik Bölümü

Yayınları: **Sofuoglu, Y.** and Ozalp, N. 2015. A fractional order model on bilingualism. Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Ser. A1 Math. Stat. 63(2); 81-89
Sofuoglu, Y. and Ozalp, N. 2015. Fractional order bilingualism model without conversion from dominant unilingual group to bilingual group. Differential Equations and Dynamical Systems (DOI 10.1007/s12591-015-0239-9).