

T.C.  
FIRAT ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

$L(f)$  DİZİ UZAYININ BAZI TOPOLOJİK ÖZELLİKLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Şeyma DAĞ

Anabilim Dalı : Matematik

Programı : Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi

Şubat-2015

T.C.  
FIRAT ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

$L(f)$  DİZİ UZAYININ BAZI TOPOLOJİK ÖZELLİKLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Şeyma DAĞ

(121121108)

Anabilim Dalı : Matematik

Programı : Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi

Danışman: Doç. Dr. Yavuz ALTIN

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih:

Şubat-2015

T.C.  
FIRAT ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

$L(f)$  DİZİ UZAYININ BAZI TOPOLOJİK ÖZELLİKLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ  
ŞEYMA DAĞ  
(121121108)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 09.02.2015

Tezin Savunulduğu Tarih: 27.02.2015

Tez Danışmanı: Doç.Dr. Yavuz ALTIN(Fırat Üniversitesi)

Diğer Jüri Üyeleri:

Prof. Dr. Rifat ÇOLAK (Fırat Üniversitesi)

Yrd. Doç. Dr. Murat CANDAN (İnönü Üniversitesi)

Şubat-2015

## TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitiminin boyunca daima yanımda olan, bilgi ve tecrübelerinden her zaman yararlandığım saygıdeğer hocam Doç. Dr. Yavuz ALTIN' a sonsuz teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Ayrıca bu çalışmamın hazırlanması sürecinde desteğini ve yardımını esirgemeyen değerli hocam Doç. Dr. Hıfı ALTINOK 'a teşekkürlerimi sunarım.

Şeyma DAĞ  
ELAZIĞ-2015

## İÇİNDEKİLER

Sayfa No

TEŞEKKÜR .....	II
İÇİNDEKİLER .....	III
ÖZET .....	IV
SUMMARY .....	V
SEMBOLLER LİSTESİ .....	VI
1. GİRİŞ .....	1
2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER .....	2
3. MODÜLÜS FONKSİYONUN BAZI ÖZELLİKLERİ .....	8
4. $L(f, p)$ DİZİ UZAYININ BAZI TOPOLOJİK ÖZELLİKLERİ .....	18
5. $L(f)$ DİZİ UZAYI ÜZERİNDE MINKOWSKI FONKSİYONELİ ....	26
6. SONUÇ .....	30
KAYNAKLAR .....	31
ÖZGEÇMİŞ .....	32

## ÖZET

### $L(f)$ DİZİ UZAYININ BAZI TOPOLOJİK ÖZELLİKLERİ

Beş bölümden oluşan bu çalışmanın ilk bölümünde, Modülüs fonksiyonlarının tarihçesi ile ilgili kısa bir bilgi verilmiştir.

İkinci bölümde temel tanımlar ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde modülüs fonksiyonunun bazı özellikleri incelenmiştir.

Dördüncü bölümde  $L(f, p)$  dizi uzayının bazı topolojik özellikleri ve içerme bağlantıları verilmiştir.

Beşinci bölümde ise,  $L(f)$  dizi uzayı üzerinde Minkowski fonksiyonelinin özellikleri incelenmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Modülüs fonksiyonu, Dizi uzayları.

## SUMMARY

### SOME TOPOLOGICAL PROPERTIES OF SEQUENCE SPACE $L(f)$

In the first chapter, a short information about the history of the modulus function is given.

In the second chapter of this thesis that consists of four chapters, we give some fundamental definitions and theorems.

In the third chapter, we examine some properties of modulus function.

In the fourth chapter, we give some topological properties and inclusion relations of the sequence space  $L(f, p)$ .

In the last chapter, Minkowski functional features on sequence space  $L(f)$  are studied.

**Keywords:** Modulus function, Sequence spaces.

## SEMBOLLER LİSTESİ

Bu çalışmada kullanılan bazı simgeler, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

- $\mathbb{N}$  : Doğal sayılar cümlesi
- $\mathbb{C}$  : Kompleks sayılar cümlesi
- $\mathbb{R}$  : Reel sayılar cümlesi
- $w$  :  $\mathbb{C}$  üzerinde tanımlı diziler uzayı
- $l_{\infty}$  : Kompleks terimli sınırlı diziler uzayı
- $c$  : Kompleks terimli yakınsak diziler uzayı
- $c_0$  : Kompleks terimli sıfıra yakınsak diziler uzayı
- $\mathbb{K}$  : Reel veya kompleks sayılar cismi
- $\circ$  : Bileşke fonksiyon
- $H$  : Tüm sonlu dizilerin cümlesi
- $l_1$  : Mutlak yakınsak serileri oluşturan diziler cümlesi

## 1. GİRİŞ

Son zamanlarda toplanabilme teorisinde modülüs fonksiyonu üzerine yapılan çalışmalar önemli bir yer tutmaktadır.

Modülüs fonksiyonun tanımı ilk defa 1953 de Nakano [1] tarafından verilmiştir. Daha sonra Ruckle [2],  $FK$  uzaylarını tanımlamak için bir modülüs fonksiyonu kullandı. Eğer  $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  fonksiyonu

i)  $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ , ii)  $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$ , iii)  $f$  artan, iv)  $f$  sıfır noktasında sağdan sürekli, şartlarını sağlıyorsa bu fonksiyona modülüs fonksiyonu denir. Ruckle  $L(f)$  dizi uzayını aşağıdaki şekilde tanımlamıştır.

$$L(f) = \left\{ x = (x_k) : \sum_{k=1}^{\infty} f(|x_k|) < \infty \right\}.$$

Ruckle tarafından daha önceden tanımlanmış olan  $w_0, w, w_\infty$  kuvvetli toplanabilir dizi uzaylarını, Maddox [3] genelleştirilerek  $w_0(f), w(f)$  ve  $w_\infty(f)$  dizi uzaylarını  $f$  modülüs fonksiyonu yardımıyla tanımlamış ve bu dizi uzayının bazı topolojik özelliklerini incelemiştir. Deeb ve Hussein [4],  $L(f)$  dizi uzayının kompakt altkümelerini karakterize etmişlerdir. Deeb [5],  $L(f)$  ve  $l_1$  uzaylarının eşitliği için gerek ve yeter şartları incelemiştir. Deeb ve Hussein [6],  $f(1)$  yarıçaplı yuvarın konveks hull'ü üzerinde Minkowski fonksiyoneli yardımıyla tanımlanan topolojiyle  $L(f)$  uzayının tamlanması  $l_1$  olduğunu göstermişlerdir.

Daha sonra Bhardwaj [7] tarafından kesin pozitif reel sayılar dizisi kullanılarak, Ruckle [2] tarafından tanımlanmış olan  $L(f)$  dizi uzayı genelleştirilmiş, bazı topolojik özelliklerini incelemiş kapsama bağıntıları verilmiştir.

## 2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

**Tanım 2.1.**  $X \neq \emptyset$  bir cümle ve  $\mathbb{K}$  reel veya kompleks sayılar cismi olsun.

$$+ : X \times X \rightarrow X$$

ve

$$\cdot : \mathbb{K} \times X \rightarrow X$$

fonksiyonları  $\forall x, y, z \in X$  ve  $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$  için aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa,  $X$  cümlesine  $\mathbb{K}$  cismi üzerinde bir vektör (lineer) uzayı adı verilir.

**L1)**  $x + y = y + x$

**L2)**  $(x + y) + z = x + (y + z)$

**L3)** Her bir  $x \in X$  için  $x + \theta = x$  olacak şekilde bir  $\theta \in X$  vardır

**L4)** Her bir  $x \in X$  için  $x + (-x) = \theta$  olacak şekilde bir  $(-x) \in X$  vardır

**L5)**  $1.x = x$

**L6)**  $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$

**L7)**  $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$

**L8)**  $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$

dir [8].

**Tanım 2.2.**  $X$ ,  $\mathbb{K}$  cismi üzerinde bir lineer uzay olsun.

$$\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa  $\|\cdot\|$  fonksiyonuna  $X$  üzerinde bir norm ve  $(X, \|\cdot\|)$  çiftine de bir normlu uzay adı verilir.

**N1)**  $\|x\| \geq 0$

**N2)**  $\|x\| = 0 \iff x = 0$

**N3)**  $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$  ( $\alpha$  skaler)

**N4)**  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

dir [9].

**Tanım 2.3.**  $(X, \|\cdot\|)$  bir normlu uzay ve  $x = (x_n)$ ,  $X$  uzayında bir dizi olsun. Eğer her  $\varepsilon > 0$  için  $m, n > n_0$  iken

$$\|x_m - x_n\| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir  $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  varsa  $(x_n)$  dizisine bir Cauchy dizisi denir [9].

**Tanım 2.4.** Bir  $x = (x_n)$  dizisi verilsin. Eğer her  $\varepsilon > 0$  sayısına karşılık  $n > n_0$  için

$$\|x_m - s\| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir  $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  varsa  $(x_n)$  dizisi  $s$ ' ye yakınsaktır denir ve  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = s$  yazılır [9].

**Tanım 2.5.**  $(X, \|\cdot\|)$  normlu uzayında her Cauchy dizisi uzayın bir noktasına yakınsak ise bu normlu uzaya tam normlu uzay veya Banach uzayı denir [9].

**Tanım 2.6.** Kompleks terimli bütün  $x = (x_n)$ ,  $(n = 1, 2, 3, \dots)$  dizilerinin kümesini  $\omega$  ile göstereceğiz.

$x = (x_n), y = (y_n)$  ve  $\alpha$  bir skaler olmak üzere

$$x + y = (x_n) + (y_n)$$

$$\alpha x = (\alpha x_n)$$

şeklinde tanımlanan işlemler altında  $\omega$  bir lineer uzaydır.  $\omega$ ' nin her alt lineer uzayına bir dizi uzayı denir [10].

**Tanım 2.7.**  $X$  boş olmayan bir cümle olsun.  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu, her  $x, y, z \in X$  için,

a)  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ ,

b)  $d(x, y) = d(y, x)$ ,

c)  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(z, y)$

özelliklerini sağlarsa  $d$  ye  $X$  üzerinde bir metrik,  $(X, d)$  ye de metrik uzay denir [11].

**Tanım 2.8.**  $X = (X, d)$  metrik uzayındaki her  $(x_n)$  Cauchy dizisi yakınsak ise  $(X, d)$  metrik uzayına tam metrik uzay denir [11].

**Tanım 2.9.**  $X = (X, d)$  bir metrik uzay olsun  $X$  deki her bir dizi yakınsak bir alt diziyeye sahip ise  $X$ ' e kompakt denir [11].

**Lemma 2.10.** Bir metrik uzayın kompakt her alt cümlesi kapalı ve sınırlıdır [11].

**Tanım 2.11.**  $X = (X, d)$  bir metrik uzay olsun. Her  $\varepsilon > 0$  için bu uzay  $\varepsilon$  yarıçaplı sonlu sayıda açık yuvarlarla örtülebiliyorsa  $X$  total sınırlıdır denir [11].

**Tanım 2.12.**  $X$  bir vektör uzayı ve  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$  bir fonksiyon olsun.

a)  $g(0) = 0$ ,

b)  $g(-x) = g(x)$ ,

c)  $g(x + y) \leq g(x) + g(y)$ ,

d)  $(t_n)$  skalerlerin bir dizisi ve  $t_n \rightarrow t$  olmak üzere  $g(x_n - x) \rightarrow 0$  olan  $(x_n) \subset X$  için,  $g(t_n x_n - tx) \rightarrow 0$  (skalerle çarpımın sürekliliği),

şartları sağlanıyorsa  $g$  ye  $X$  üzerinde bir paranorm ve  $(X, g)$ ' ye de paranormlu uzay denir. Ayrıca  $g(x) = 0 \Rightarrow x = 0$  şartı da sağlanırsa paranorma totaldir denir [12].

**Tanım 2.13.**  $X, \mathbb{K}$  cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. Eğer,  $q : X \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu  $\forall x, y \in X$  ve  $\forall \lambda \in \mathbb{K}$  için aşağıdaki şartları sağlıyorsa  $q'$  ya bir yarınorm  $(X, q)$ ' ya da yarınormlu uzay denir [12].

i)  $q(x) \geq 0$ ,

ii)  $q(\lambda x) = |\lambda| q(x)$ ,

iii)  $q(x + y) \leq q(x) + q(y)$ .

**Tanım 2.14.**  $X$  bir dizi uzayı ve  $(x_k) \in X$  olsun. Bu durumda  $|\alpha_k| \leq 1$  şartını sağlayan tüm  $(\alpha_k)$  skalerleri için  $(\alpha_k x_k) \in X$  oluyorsa  $X$  uzayı normaldir denir [12].

Bu çalışmada kullanacağımız,

$$\ell_\infty = \{x = (x_k) : \sup_k |x_k| < \infty\}$$

sınırlı,

$$c = \{x = (x_k) : \lim_k x_k \text{ mevcut}\}$$

yakınsak ve

$$c_0 = \{x = (x_k) : \lim_k x_k = 0\}$$

sıfır dizilerinin uzayı

$$\|x\|_\infty = \sup_k |x_k|$$

normu ile birer Banach uzaylarıdır [8]. Ayrıca

$$l_p = \left\{ x = (x_k) : \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty, 1 \leq p < \infty \right\}$$

uzayı

$$\|x\| = \left( \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

normu ile bir Banach uzayıdır.

Özel olarak  $l_p$  uzayında  $p = 1$  alınırsa

$$l_1 = \left\{ x = (x_k) : \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| < \infty \right\}$$

mutlak yakınsak seri teşkil eden dizilerin uzayı edilir [8].

**Tanım 2.15. (Minkowski eşitsizliği)**  $a_k, b_k \geq 0, k = 1, 2, \dots, n$  olmak üzere,

a)  $0 < p < 1$  ise

$$\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p \leq \sum_{k=1}^n a_k^p + \sum_{k=1}^n b_k^p,$$

b)  $p \geq 1$  ise

$$\left\{ \sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p \right\}^{\frac{1}{p}} \leq \left\{ \sum_{k=1}^n a_k^p \right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{ \sum_{k=1}^n b_k^p \right\}^{\frac{1}{p}}$$

dir [8].

**Tanım 2.16.**  $L$  bir lineer uzay,  $A \subseteq L$  ve  $x, y \in A$  keyfi olmak üzere

$$B = \{z \in L : z = \alpha x + (1 - \alpha)y, 0 \leq \alpha \leq 1\} \subseteq A$$

ise  $A$  cümlesine konveks küme denir [11].

**Tanım 2.17.** Bir Frechet uzayı; bir tam metrik lineer uzay veya buna denk olarak bir tam total paranormlu uzaydır.  $X$  sürekli koordinat izdüşümlere sahip bir Frechet uzay olacak şekilde  $w$  nin lineer bir altuzayı olsun. Bu durumda  $X$  bir  $FK$  – uzayı veya bir Frechet Koordinat uzayı adını alır [7].

**Tanım 2.18.**  $X$  boş olmayan bir cümle ve  $\tau$ ,  $X$  in alt cümlelerinin bir ailesi olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa  $\tau$  ya  $X$  için bir topoloji ve  $(X, \tau)$  ikilisine de bir topolojik uzay denir [11].

**T1)**  $X, \emptyset \in \tau$

**T2)**  $\tau$  nun herhangi sayıdaki elemanlarının birleşimi  $\tau$  nun elemanıdır.

**T3)**  $\tau$  ya ait sonlu sayıdaki elemanların arakesiti yine  $\tau$  ya aittir.

**Tanım 2.19.**  $\lambda$  lineer topolojiye sahip bir dizi uzayı olsun. Her bir  $i \geq 1$  için  $P_i(x) = \lambda \rightarrow F$  ( $\mathbb{R}$  veya  $\mathbb{C}$ ) dönüşümleri sürekli ise  $\lambda$  dizi uzayına  $K$ – uzayı denir.  $\lambda$  bir Banach uzayı ise  $K$ – uzayına  $BK$ – uzayı denir.

$(\lambda, \tau)$  bir  $K$ – uzayı ve bir  $x \in \lambda$  için

$$x^{(n)} = \sum_{i=1}^n x_i e_i \rightarrow x \text{ } (\tau \text{ topolojisine göre})$$

ise  $x \in \lambda$  ya  $AK$  – özelliğine sahiptir denir. Eğer her bir  $x \in \lambda$ ,  $AK$ – özelliğine sahip ise  $\lambda$  dizi uzayına  $AK$  – uzayı denir [13].

**Tanım 2.20.**  $X$  bir lineer uzay olsun.  $E$  ' de  $X$  'de boş olmayan keyfi bir küme ise bu durumda  $\lambda_i \geq 0$ ,  $\sum \lambda_i = 1$  olmak üzere her  $x_i \in E$  için tüm  $\sum \lambda_i x_i$  sonlu lineer kombinasyonlarının kümesine  $E$  'nin konveks hull'ü denir ve  $C(E)$  ile gösterilir [14].  $C^*(E)$  ile  $C(E)$ ' nin  $l_1^*$  deki kapanışını göstermektedir.

**Tanım 2.21.**  $X$  bir lineer uzay ve  $E \subset X$  olsun. Herhangi  $x \in E$  ve  $0 < |\lambda| \leq 1$  olacak şekilde  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $\lambda x \in E$  ise  $E'$  ye dengeli alt küme denir [14].

**Tanım 2.22.**  $X$  bir lineer uzay ve  $E \subset X$  olsun. Her  $x \in X$  için en az bir  $\alpha = \alpha(x) > 0$  vardır öyle ki her  $0 < |\lambda| \leq \alpha(x)$  için  $\lambda x \in A$  ise  $A$  ya absorbing küme denir [14].

**Tanım 2.23.**  $X$  bir lineer uzay  $M \subset X$  konveks ve absorbing bir alt küme olsun.  $p_M : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$p_M(x) = \inf \{ \alpha > 0 : \alpha^{-1}x \in M \} = \inf \{ \alpha > 0 : x \in \alpha M \}$$

fonksiyonuna  $M$  nin Minkowski fonksiyoneli denir [14].

**Tanım 2.24.**  $\lambda$  bir dizi uzayı olsun.  $i \geq 1$  ve en az bir  $x \in \lambda$  için  $|y_i| \leq |x_i|$  iken  $y \in \lambda$  ise  $\lambda$  ya normal veya solid dizi uzayı denir [13].

**Tanım 2.25.** Bir  $(X, \|\cdot\|)$  normlu uzayında bir dizi  $(x_n)$  olsun. Her  $x \in X$  için

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\| x - \sum_{n=1}^k \alpha_n x_n \right\| = 0$$

olacak şekilde  $\mathbb{C}$  içinde bir tek  $(\alpha_n)$  dizisi varsa bu  $(x_n)$  dizisine  $X$  uzayının bir Schauder bazıdır denir [13].

### 3. MODÜLÜS FONKSİYONUNUN BAZI ÖZELLİKLERİ

Modülüs fonksiyonun tanımı ilk defa 1953 de Nakano [1] tarafından verilmiştir.

**Tanım 3.1. (Modülüs fonksiyonu)** Eğer  $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  fonksiyonu

- i)  $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ,
- ii)  $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$ ,
- iii)  $f$  artan,
- iv)  $f$  sıfır noktasında sağdan süreklidir,

şartlarını sağlıyorsa bu fonksiyona modülüs fonksiyonu denir [2]. Herhangi bir  $f$  modülüs fonksiyonu sınırlı veya sınırsız olabilir. Tüm modülüs fonksiyonlarının oluşturduğu küme  $C$  ile gösterilir.

Ruckle [2], Wilansky nin " $\{e_1, e_2, \dots\}$  birim vektörlerinin sınırlı kümesini bulunduran en küçük  $FK$ - uzayı var mıdır?" sorusuna cevap ararken

$$L(f) = \left\{ x = (x_k) : \sum_{k=1}^{\infty} f(|x_k|) < \infty \right\},$$

dizi uzayını  $f$  modülüs fonksiyonu yardımıyla tanımlamış ve bu dizi uzayının bazı özelliklerini incelemiştir.

Şimdi modülüs fonksiyonlara örnekler verelim.

**Örnek 3.2. (a)**  $f(x) = \frac{x}{x+1}$  sınırlı fonksiyonu bir modülüs fonksiyonudur.

- (i)  $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$  şartını sağlayacağı fonksiyonun tanımından açıktır.
- (ii)  $f(x + y) = \frac{x+y}{1+x+y} \leq \frac{x}{1+x} + \frac{y}{1+y} = f(x) + f(y)$  olduğu göz önüne alınırsa  $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$  eşitsizliği sağlanır.
- (iii)  $f$  artandır. Çünkü  $f(x) = \frac{x}{x+1}$  den  $f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} > 0$  olduğundan fonksiyon artandır.
- (iv)  $f$  sıfırda sağdan süreklidir.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x+1} = 0 = f(0)$$

dır. O halde  $f(x) = \frac{x}{x+1}$  bir modülüs fonksiyonudur.

(b)  $f(x) = \log(1 + x)$  sınırsız fonksiyonu da bir modülüs fonksiyonudur.

- (i)  $\log(1 + x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$  dir. Çünkü  $\log(1 + 0) = \log 1 = 0$  dir. O halde  $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$  şartı sağlanır.

(ii)  $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$  dir.

$1 + x + y \leq (1+x)(1+y)$  eşitsizliği ve logaritma özelliğinden  $\log(1+x+y) \leq \log(1+x) + \log(1+y)$  elde ederiz. Dolayısıyla  $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$  dir.

(iii)  $f$  artandır.

$f(x) = \log(x+1)$  den  $f'(x) = \frac{\log e}{1+x} > 0$  pozitif olduğundan fonksiyon artandır.

(iv)  $f$  sıfır noktasında sağdan süreklidir.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log(x+1) = 0 = f(0)$$

dir. O halde  $f(x) = \log(x+1)$  bir sınırsız modülüs fonksiyonudur.

**Teorem 3.3.**  $f$  bir modülüs fonksiyonu ise  $f^v$ , ( $v \in \mathbb{N}$ ) fonksiyonları da birer modülüs fonksiyonudur. Burada  $f^v = f \circ f \circ f \circ \dots \circ f$  ( $f$  nin  $v$  defa bileşkesi) şeklindedir [2].

**Lemma 3.4.**  $f$  bir modülüs fonksiyonu ve  $0 < \delta < 1$  olsun. Bu takdirde her  $v \in \mathbb{N}$  ve  $t \in [0, \infty)$  için,

$$f^{v-1}(t) > \delta \text{ ise } f^v(t) \leq \frac{2f(1)}{\delta} f^{v-1}(t)$$

olur. Burada  $f^0 = I$  özdeşlik dönüşümüdür [2].

**Uyarı 3.5.**  $f$  ve  $g$  herhangi iki modülüs fonksiyonu iken  $f^{-1}$ ,  $f.g$ ,  $f - g$  ve  $f/g$  fonksiyonları modülüs fonksiyon olmayabilir [2].

**Lemma 3.6.**  $f$  ve  $g$  herhangi iki modülüs fonksiyonu ise  $f \circ g$ ,  $\alpha f$  ( $\alpha \geq 0$ ),  $\frac{f}{1+f}$ ,  $f + g$  fonksiyonları da modülüs fonksiyonlarıdır [2].

**Teorem 3.7.**  $f$  bir modülüs fonksiyonu ve  $|X|_f = \sum_{n=1}^{\infty} f(|x_n|)$  olsun.  $d(X, Y) = |X - Y|_f$  olmak üzere  $(L(f), d)$  bir tam metrik uzaydır [4].

**İspat.**  $X = (x_n)$ ,  $Y = (y_n)$  ve  $Z = (z_n) \in L(f)$  olsun.

i)  $d(X, Y) = 0$  olsun. Bu durumda  $|X - Y|_f = \sum_{n=1}^{\infty} f(|x_n - y_n|) = 0$  yazılabilir buradan her bir  $n$  için  $f(|x_n - y_n|) = 0$  olacağından ve modülüs fonksiyonun tanımından  $|x_n - y_n| = 0$  ve böylece  $x_n = y_n$ , yani  $X = Y$  elde edilir. Tersine  $X = Y$  olması halinde  $d(X, Y) = 0$  olacağı benzer şekilde kolayca elde edilir.

ii)

$$|X - Y|_f = \sum_{n=1}^{\infty} f(|x_n - y_n|) = \sum_{n=1}^{\infty} f(|y_n - x_n|) = |Y - X|_f$$

iii)

$$\begin{aligned} |X - Y|_f &= \sum_{n=1}^{\infty} f(|x_n - y_n|) \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(|x_n - z_n| + |z_n - y_n|) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} f(|x_n - z_n|) + \sum_{n=1}^{\infty} f(|z_n - y_n|) = |X - Z|_f + |Y - Z|_f \end{aligned}$$

$L(f)$  tamdır. Gerçekten  $(X^{(n)})$  dizisi  $L(f)$  'de bir Cauchy dizisi olsun. Her bir  $i$  için  $(x_i^{(n)} : n = 1, 2, \dots)$  bir Cauchy dizisidir.  $X$  sayısı,  $(X^{(n)})$  nin noktasal limiti olsun. Eğer  $m, n > K$  için  $|X^{(m)} - X^{(n)}| < \varepsilon$  sağlanıyorsa her bir  $N$  için

$$\sum_{i=1}^N f(|x_i^{(m)} - x_i^{(n)}|) < \varepsilon$$

olur. Bu nedenle her  $N$  için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N f(|x_i^{(m)} - x_i^{(n)}|) = \sum_{i=1}^N f(|x_i^{(m)} - x_i|) \leq \varepsilon$$

elde edilir. Buradan  $X \in L(f)$  ve  $m > K$  için  $|X - X^{(m)}| < \varepsilon$  elde edilir.

**Lemma 3.8.** Her bir  $f$  modülüs fonksiyonu için  $H \subseteq L(f)$  dir [4].

**İspat.**  $f(x_1) < \frac{1}{2}$  olacak şekilde  $x_1 \in (0, \infty)$  seçelim. Her  $j < k$  ve  $f(x_k) < \frac{1}{2^k}$  için  $x_k \neq x_j$  olacak şekilde  $x_k \in (0, \infty)$  seçelim.  $f$  modülüs fonksiyonu  $0$ 'da süreklidir ve  $f(0) = 0$  dir.  $X = (x_n)$  olsun. Bu taktirde

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(|x_n|) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \infty,$$

ve böylece  $X \in L(f)$  ve  $X \notin H$  dir.

**Teorem 3.9.**  $f$  bir modülüs fonksiyonu,  $A \subset L(f)$  olsun.  $A$  nın,  $L(f)$  nin kompakt bir alt kümesi olması için gerek ve yeter şartlar şunlardır:

i)  $A$  kapalı ve sınırlı,

ii)  $\varepsilon > 0$  verildiğinde, her  $n > n_0$  ve her  $X = (x_n) \in A$  için  $\sum_{n=1}^{\infty} f(|x_n|) < \varepsilon$  olacak şekilde  $n_0 = n_0(\varepsilon)$  vardır.

iii) Eğer  $p_k : L(f) \rightarrow \mathbb{R}$ , her  $X = (x_k) \in L(f)$  için  $p_k(X) = x_k$  şeklinde verilmiş ise her  $k \geq 1$  için  $p_k(A)$  kompakttır [4].

**İspat.** i) Kabul edelim ki;  $A \subseteq L(f)$  kompakt olsun. Bu takdirde i) açıktır.

ii)  $\varepsilon > 0$  verildiğinde, her bir  $a = (a_k) \in A$  için

$$U\left(a, \frac{\varepsilon}{2}\right) = \left\{ X \in L(f) : \sum_{n=1}^{\infty} f(|x_n - a_n|) < \frac{\varepsilon}{2} \right\}$$

cümlesini gözönüne alalım.

Böylece  $A \subseteq \bigcup_{a \in K} \left(a, \frac{\varepsilon}{2}\right)$  dir. Fakat  $A$  kompaktır. Bu yüzden  $A \subseteq \bigcup_{j=1}^N \left(a^j, \frac{\varepsilon}{2}\right)$  olacak şekilde

$$a^1 = (a_k^1), a^2 = (a_k^2), \dots, a^N = (a_k^N)$$

mevcuttur. Buradan eğer  $a = (a_k) \in A$  ise

$$|a - a^i|_f = \sum_{n=1}^{\infty} f(|a_n - a_n^i|) < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde  $a^i, 1 \leq i \leq N$  mevcuttur.

Her  $i$  için  $\sum_{n=1}^{\infty} f(|a_n^i|) < \infty$  olduğundan  $\sum_{n=n_i}^{\infty} f(|a_n^i|) < \frac{\varepsilon}{2}$  olacak şekilde bir  $n_i$  mevcuttur. Bu yüzden  $a \in U\left(a^i, \frac{\varepsilon}{2}\right)$  için

$$\begin{aligned} \sum_{n=n_i}^{\infty} f(|a_n|) &\leq \sum_{n=n_i}^{\infty} f(|a_n - a_n^i|) + \sum_{n=n_i}^{\infty} f(|a_n^i|) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

elde ederiz.  $n_0 = \max_{1 \leq i \leq N} n_i$  alırsak ve her  $a \in A$  ve  $n > n_0$  için

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} f(|a_i|) < \varepsilon$$

bulunur.

iii)  $p_k$  sürekli olduğundan  $p_k(A)$  kompaktır.

Tersine i), ii) ve iii)' nin sağlandığını kabul edelim.  $A$  kapalı olduğundan ve  $L(f)$  tam olduğundan  $A$  nın total sınırlı olduğunu göstermek yeterlidir.

$\varepsilon > 0$  verilsin. Bu durumda her  $a \in A$  için  $n > n_0$  olduğunda

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} f(|a_k|) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir  $n_0 = n_0(\varepsilon)$  mevcuttur.

$f$  modülüs fonksiyonu 0' da sürekli olduğundan ve  $f(0) = 0$  olduğundan

$$f(\varepsilon^*) \leq \frac{\varepsilon}{2n_0}$$

olacak şekilde bir  $\varepsilon^* > 0$  sayısı seçebiliriz.

Her  $k \geq 1$  için  $p_k(A)$ ,  $\mathbb{R}$  nin kompakt bir alt kümesi olduğundan total sınırlıdır. Bu yüzden her bir  $k = 1, 2, \dots, n_0$  için ve  $i \in [1, n_k]$  için  $a_k \in p_k(A)$  iken

$$|a_k - a_k^i| < \varepsilon^*$$

olacak şekilde  $a_k^{(1)}, \dots, a_k^{(n)} \in p_k(A)$  mevcuttur.

$$A_0 = \left\{ b : b = \left( a_1^{i_1}, a_2^{i_2}, \dots, a_{n_0}^{i_{n_0}}, 0, \dots, 0, \dots, 1 \leq i_1 \leq n_1, 1 \leq i_2 \leq n_2, \dots, 1 \leq i_{n_0} \leq n_{n_0} \right) \right\}$$

olsun. Eğer her  $k \geq 1$  için  $a = (a_k) \in A$  ise  $a_k \in p_k(A)$  dir.  $b \in A_0$ ,

$$b = \left( a_1^{i_1}, a_2^{i_2}, \dots, a_{n_0}^{i_{n_0}}, 0, 0, \dots, 0, \dots \right)$$

ile verilsin. Burada

$$|a_k - a_k^{i_k}| < \varepsilon^*, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n_0$$

dir. Buna göre

$$\begin{aligned} |a - b|_f &= \sum_{k=1}^{n_0} f(|a_k - a_k^{i_k}|) + \sum_{k=n_0+1}^{\infty} f(|a_k|) \\ &< n_0 f(\varepsilon^*) + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$A \subseteq \bigcup_{b \in A_0} U(b, \varepsilon)$$

dir. Fakat  $A_0$  sonludur, bu yüzden  $A$  total sınırlıdır.

**Tanım 3.10.**  $a$  pozitif bir tamsayı ve  $f$  modülüs fonksiyonu olmak üzere

$$B_a = \{X \in L(f) : |X|_f \leq a\}$$

dir [5].

**Teorem 3.11.** Eğer bazı  $a > 0$ ' lar için  $B_{f(a)}$  konveks ise bu durumda  $\sum_{i=1}^n c_i = 1$  olacak şekildeki  $(c_1, \dots, c_n)$  pozitif reel sayılarının herhangi sonlu koleksiyonu için

$$f(a) = \sum_{i=1}^n f(c_i a)$$

elde edilir [19].

**İspat.**  $X_m = a e_m, (m = 1, \dots, n)$  olsun. Bu takdirde  $B_{f(a)}$  konveks olduğundan her  $m$  için  $X_m \in B_{f(a)}$  dir.  $X = \sum c_i X_i$  dizisi  $B_{f(a)}$  nın elemanıdır. Böylece

$$|X|_f = \sum f(c_i a) \leq f(a)$$

dir. Diğer yandan

$$f(a) = f(\sum c_i a) \leq \sum f(c_i a)$$

ve böylece

$$f(a) = \sum f(c_i a)$$

elde edilir.

**Teorem 3.12.**  $f$  bir modülüs fonksiyonu olsun.  $L(f) = l_1$  olması için gerek ve yeter şart her  $x \in [0, \varepsilon]$  için  $f(x) \leq rx$  olacak şekilde  $r$  ve  $\varepsilon$  pozitif sayılarının mevcut olmasıdır [5].

**İspat.** Her pozitif  $r$  reel sayısı ve her  $\varepsilon$  pozitif reel sayısı için  $f(x) > rx$  olacak şekilde bir  $x \in [0, \varepsilon]$  mevcut olduğunu farzedelim.

Bu yüzden her  $n$  pozitif tamsayısı için  $f(x_n) > nx_n$  olacak şekilde  $x_n \in (0, \frac{1}{n^2}]$  mevcuttur.  $f$  sürekli olduğu için her  $x \in I_n$  için  $f(x) > nx$  olacak şekilde bir  $I_n \subseteq (0, \frac{1}{n^2})$  aralığı mevcuttur. Herbir  $n$  için  $1/n^2 \leq \sum_{k=1}^{t(n)} x_{n_k} \leq 2/n^2$  olacak şekilde  $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_{t(n)}}$  noktalarından oluşan sonlu bir sayı seçelim. Her  $x \in I_n$ ,  $x_n \leq \frac{1}{n^2}$  için herhangi bir  $x_{n_1} \in I_n$  noktası alınabilir ve böylece

$$\sum_{k=1}^{t(n)-1} x_{n_k} \leq \frac{2}{n^2} \text{ ve } \sum_{k=1}^{t(n)} x_{n_k} \geq \frac{1}{n^2}$$

olacak şekilde  $x_{n_2}, x_{n_3}, \dots, x_{n_{t(n)}}$  seçebiliriz.

$$X = (x_{1_1}, x_{1_2}, \dots, x_{1_{t(1)}}, x_{2_1}, \dots, x_{2_{t(2)}}, \dots)$$

olsun. Bu takdirde

$$|X|_f = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{t(n)} f(x_{n_k}) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{t(n)} nx_{n_k} = \sum_{n=1}^{\infty} n \sum_{k=1}^{t(n)} x_{n_k} \geq \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

olur. Böylece  $X \notin L(f)$ ' dir. Buradan

$$\|X\| = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{t(n)} x_{n_k} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2},$$

ve böylece  $X \in l_1$  ve  $L(f) \neq l_1$  olur.

Tersine, bazı pozitif  $r$  reel sayıları için  $(0, \varepsilon]$  aralığında  $f(x) \leq rx$  olduğunu farzedelim. Böylece  $l_1 \subseteq L(f)$  dir.

Fakat her  $f$  için  $L(f) \subseteq l_1$ ' dir. Böylece  $L(f) = l_1$  dir.

**Teorem 3.13.** Bir  $f$  modülüs fonksiyonu için aşağıdakiler denktir.

i) En az bir  $a > 0$  için  $B_{f(a)}$  konvektir.

ii) Her  $x \in [0, a]$  için,

$$f(x) = \frac{f(a)}{a}x$$

olacak şekilde pozitif bir  $a$  reel sayısı mevcuttur.

iii) Her  $r \leq b$  için  $B_{f(r)}$  konveks olacak şekilde pozitif bir  $b$  reel sayısı mevcuttur [5].

**İspat.** (1) $\Rightarrow$ (2):  $n$  herhangi bir pozitif tamsayı olsun. Teorem 3.11'den

$$f(a) = nf\left(\frac{a}{n}\right)$$

elde edilir.

Şimdi  $m < n$  olacak şekilde bir pozitif  $m$  sayısını alalım. Bu takdirde Teorem 3.11' den

$$\begin{aligned} f(a) &= f\left(\frac{m}{n}a + \frac{n-m}{n}a\right) \\ &= f\left(\frac{m}{n}a + \frac{1}{n}a + \frac{1}{n}a + \dots + \frac{1}{n}a\right) \\ &= f\left(\frac{m}{n}a\right) + (n-m)f\left(\frac{1}{n}a\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$f(a) = f\left(\frac{m}{n}a\right) + \frac{n-m}{n}f(a)$$

olup bundan dolayı

$$\frac{m}{n}f(a) = f\left(\frac{m}{n}a\right)$$

olur.

Herhangi  $r < 1$  rasyonel sayısı için  $f(ra) = rf(a)$  olduğu ve  $f$ ' nin sürekliliğinden

$$f(xa) = af(x), \forall x \in [0, 1]$$

eşitliğine ulaşılır.

Herhangi bir  $y \in (0, a]$  için  $\frac{y}{a} \leq 1$  elde edilir. Böylece  $f(y) = \frac{y}{af(a)}$  olur.

(2) $\Rightarrow$ (3):  $f(x) = \frac{f(a)}{a}x$ , her  $x \in [0, a]$  ve böylece  $L(f) = l_1$  dir. Ayrıca  $r \leq a$  için

$$\begin{aligned} B_r &= \{X \in L(f) : |X|_f \leq r\} \\ &= \left\{ X \in L(f) : \|X\|_1 = \frac{|X|_f}{\alpha} \leq \frac{r}{\alpha}, \alpha = \frac{f(a)}{a} \right\} \\ &= \left\{ X \in l_1 : \|X\|_1 \leq \frac{r}{\alpha} \right\} \end{aligned}$$

dir. Böylece her  $r \leq a$  için  $B_r$  konveks kümedir.

(3) $\Rightarrow$ (1): Aşıkardır.

**Teorem 3.14.** Eğer  $L(f) \neq l_1$  ise ve  $f$

$$f(xy) \leq f(x)f(y)$$

şartını sağlarsa  $L(f)$  bir Banach uzayına izomorfik olan hiçbir sonsuz boyutlu alt uzayı içermez [5].

**İspat.** İlk olarak;  $B, L(f)$ ' nin kapalı sonsuz boyutlu alt uzayı ise  $B$  nin  $L(f)$ ' ye izomorfik bir alt uzay ihtiva ettiğini göstereceğiz.

Eğer  $B$  sonsuz boyutlu ise

$$b_n = (0, \dots, 0, b_{k_n}^n, b_{k_{n+1}}^n, 0, \dots)$$

formunda ve  $|b_n|_f = 1$  olacak şekilde bir  $(b_n)$  dizisi ihtiva eder. Burada  $k_n$  keyfi büyüklükte seçilmiştir.

$$\sum_{k=k_{n+1}}^{\infty} f|b_{k_n}^n| < \frac{1}{2^{n+1}}$$

olarak seçelim.

$$C_n = (0, \dots, 0, b_{k_n}^n, \dots, b_{k_{n+1}-1}^n, 0, \dots), \quad n = 1, 2, \dots$$

olsun.  $(C_n)$ ,

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n C_n \right|_f &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k_n}^{k_{n+1}-1} f |b_k^n \lambda_n| \geq \sum_{n=1}^{\infty} f \left( \sum_{k_n}^{k_{n+1}-1} |\lambda_n b_k^n| \right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} f \left( \sum_{k_n}^{\infty} |\lambda_n b_k^n| - \sum_{k_{n+1}}^{\infty} |\lambda_n b_k^n| \right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} f \left( |\lambda_n| \left( \sum_{k_n}^{\infty} |b_k^n| - \sum_{k_{n+1}}^{\infty} |b_k^n| \right) \right) \\
&\geq \sum_{n=1}^{\infty} f \left( |\lambda_n| \left( 1 - \frac{1}{2^{n+1}} \right) \right) \\
&\geq \sum_{n=1}^{\infty} f \left( \frac{1}{2} |\lambda_n| \right) \\
&\geq \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} f(|\lambda_n|) \tag{3.1}
\end{aligned}$$

için  $L(f)$ ' de  $(e_n)$ ' ye denk dizidir.

Diğer yandan

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n C_n \right|_f &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k_n}^{k_{n+1}-1} f |\lambda_n b_k^n| \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} f |\lambda_n| \sum_{k_n}^{k_{n+1}-1} f |b_k^n| \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} f |\lambda_n| \cdot |b_n|_f \\
&\leq |\lambda|_f
\end{aligned}$$

dir.

Ayrıca eğer  $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n b_n$  yakınsak ise  $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n C_n$ ,  $(C_n)$ ' nin tanımından dolayı yakınsak olur. Bu sebeple  $(C_n)$ ' nin  $(b_n)$  'ye denk olduğunu elde ederiz. Diğer yandan

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{n=1}^m \lambda_n (b_n - C_n) \right|_f &= \left| \sum_{n=1}^m \lambda_n (0, \dots, 0, b_{k_{n+1}}, \dots) \right|_f \\
&\leq \sum_{n=1}^m \sum_{k_{n+1}}^{\infty} f |\lambda_n b_k^n|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{n=1}^m f |\lambda_n| \sum_{k_{n+1}}^{\infty} f |b_k^n| \\
&\leq \sum_{n=1}^m f |\lambda_n| \cdot \frac{1}{2^{n+1}} \\
&\leq \frac{1}{2} \sum_{n=1}^m f |\lambda_n| \\
&\leq \left| \sum_{n=1}^m \lambda_n C_n \right|
\end{aligned}$$

olur. Son eşitsizlik (3.1)' den elde edilir. Böylece  $(b_n)$ ,  $L(f)$ ' ye izomorfik olan  $B$ ' nin bir alt uzayı için bir bazdır.

#### 4. $L(f, p)$ DİZİ UZAYININ BAZI TOPOLOJİK ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde  $L(f, p)$  dizi uzayının bazı topolojik özellikleri ve içerme bağıntıları verilmiştir.

**Tanım 4.1.**  $p = (p_k)$  pozitif reel sayıların bir dizisi,  $f$  herhangi bir modülüs fonksiyonu ve  $w$  bütün kompleks dizilerin uzayı olmak üzere,

$$L(f, p) = \left\{ x = (x_k) \in w : \sum_{k=1}^{\infty} \{f(|x_k|)\}^{p_k} < \infty \right\}$$

cümlesi tanımlansın.

Her  $\lambda$  kompleks sayısı için ve  $G = \sup p_k < \infty$  için

$$|\lambda|^{p_k} \leq \max(1, |\lambda|^G) \quad (4.1)$$

dir [7].

**Teorem 4.2.**  $G = \sup p_k < \infty$  olsun. Bu takdirde  $L(f, p)$  uzayı,  $\mathbb{C}$  üzerinde bir lineer uzaydır [7].

**İspat.**  $x, y \in L(f, p)$  olsun.  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$  için  $|\lambda| \leq M_\lambda$  ve  $|\mu| \leq N_\mu$  olmak üzere  $M_\lambda, N_\mu$  tamsayıları vardır. Modülüs fonksiyonun tanımından ve (4.1) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} \{f(|\lambda x_k + \mu y_k|)\}^{p_k} \\ & \leq \max(1, 2^{G-1}) (\max(1, M_\lambda^G) \sum_{k=1}^{\infty} \{f(|x_k|)\}^{p_k} + \max(1, N_\mu^G) \sum_{k=1}^{\infty} \{f(|y_k|)\}^{p_k}) \end{aligned}$$

elde edilir ki bu  $\lambda x + \mu y \in L(f, p)$  demektir. Bu ise  $L(f, p)$  nin  $\mathbb{C}$  üzerinde bir lineer uzay olduğunu gösterir.

**Teorem 4.3.**  $L(f, p)$  uzayı  $G = \sup p_k < \infty$  ve  $M = \max(1, G)$  olmak üzere

$$g(x) = \left( \sum_{k=1}^{\infty} \{f(|x_k|)\}^{p_k} \right)^{1/M}$$

ile bir total paranormlu uzaydır [7].

**İspat.**  $g(x) = 0 \iff x = \theta$  ve  $g(x) = g(-x)$  olduğu aşıkardır.  $p_k/M \leq 1$  ve  $M \geq 1$  olduğundan Minkowski eşitsizliklerinden ve  $f$  modülüs fonksiyonun tanımından ve (4.1) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \{f(|x_k + y_k|)\}^{p_k} \right)^{1/M} &\leq \left( \sum_{k=1}^{\infty} \{f(|x_k|)\} + \sum_{k=1}^{\infty} \{f(|y_k|)\} \right)^{1/M} \\ &\leq \left( \sum_{k=1}^{\infty} \{f(|x_k|)\}^{p_k} \right)^{1/M} + \left( \sum_{k=1}^{\infty} \{f(|y_k|)\}^{p_k} \right)^{1/M} \end{aligned}$$

bulunur.

Buradan  $g$  nin alt toplamsal olduğu anlaşılır. Son olarak skaler çarpımın sürekli olduğunu ispatlayalım.

Herhangi bir  $\lambda$  kompleks sayısı için  $f$  in tanımından ve (4.1) eşitsizliğinden

$$g(\lambda x) = \left( \sum_{k=1}^{\infty} \{f(|\lambda x_k|)\}^{p_k} \right)^{1/M} \leq (1 + [|\lambda|]^{G/M}).g(x)$$

elde edilir.  $\lambda \rightarrow 0$  ve  $x \rightarrow \theta$  olması  $\lambda x \rightarrow \theta$  olmasını gerektirir.

Kabul edelim ki  $\lambda_n \rightarrow 0$  olsun. Keyfi  $\varepsilon > 0$  için  $K$  ' yi  $\sum_{k=K+1}^{\infty} \{f(|x_k|)\}^{p_k} < (\varepsilon/2)^M$  olacak şekilde seçelim. Bu

$$\left( \sum_{k=K+1}^{\infty} \{f(|x_k|)\}^{p_k} \right)^{1/M} < \varepsilon/2$$

olmasını gerektirir.  $f$ ,  $[0, \infty)$  aralığında her yerde sürekli olduğundan

$$g(t) = \sum_{k=1}^K \{f(|tx_k|)\}^{p_k}$$

fonksiyonu  $0'$  da süreklidir. Böylece  $0 < t < \delta$  için  $|g(t)| < (\varepsilon/2)^M$  olacak şekilde  $1 > \delta > 0$  vardır.  $n > N$  için  $|\lambda_n| < \delta$  olacak şekilde  $N$  sayısını alalım. Bu takdirde  $n > N$  için

$$\left( \sum_{k=1}^K \{f(|\lambda_n x_k|)\}^{p_k} \right)^{1/M} < \varepsilon/2$$

dir.

Buna göre  $n > N$  için

$$\left( \sum_{k=1}^{\infty} (\{f(|\lambda_n x_k|)\}^{p_k})^{1/M} \right) < \varepsilon/2$$

olur ki bu  $\lambda \rightarrow 0$  iken  $g(\lambda x) \rightarrow 0$  olmasını gerektirir. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

**Teorem 4.4.**  $L(f, p)$  uzayı;

$$g(x) = \left( \sum_{k=1}^{\infty} \{f(|x_k|)\}^{p_k} \right)^{1/M}$$

paranormu ile bir  $FK$ - uzayıdır. Burada  $G = \sup p_k < \infty$  ve  $M = \max(1, G)$  dır [7].

**İspat.**  $L(f, p)$  nin tamlığını ve koordinat fonksiyonlarının sürekliliğini ispatlamak yeterlidir.  $L(f, p)$  nin tam olduğunu göstermek için  $L(f, p)$  de bir  $(x^{(n)})$  Cauchy dizisi alalım. Bu takdirde

$$\sum_{k=1}^{\infty} f \left\{ \left( |x_k^{(n)} - x_k^{(m)}| \right) \right\}^{p_k} \rightarrow 0, (n, m \rightarrow \infty) \quad (4.2)$$

olur. Böylece herbir  $k$  sabiti için  $n, m \rightarrow \infty$  iken

$$\left\{ f \left( |x_k^{(n)} - x_k^{(m)}| \right) \right\}^{p_k} \rightarrow 0 \quad (4.3)$$

bulunur. Böylece herbir  $k$  sabiti için  $(x_k^{(n)})$  dizisi  $\mathbb{C}$  de bir Cauchy dizisidir.  $\mathbb{C}$  tam olduğundan  $n \rightarrow \infty$  iken  $x_k^{(n)} \rightarrow x_k$  dır. (4.3) den  $\varepsilon > 0$  için

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\{ f \left( |x_k^{(n)} - x_k^{(m)}| \right) \right\}^{p_k} < \varepsilon, (m, n > K) \quad (4.4)$$

olacak şekilde bir  $K$  doğal sayısı mevcuttur. Herhangi bir sabit  $N$  doğal sayısı için (4.4) den

$$\sum_{k=1}^N \left\{ f \left( |x_k^{(m)} - x_k^{(n)}| \right) \right\}^{p_k} < \varepsilon, (m, n > K)$$

elde edilir.  $n \rightarrow \infty$  iken limit almırsa yukarıdaki ifade

$$\sum_{k=1}^N \left\{ f \left( |x_k^{(m)} - x_k| \right) \right\}^{p_k} \leq \varepsilon, (m > K)$$

olur.

$N$  keyfi olduğundan  $N \rightarrow \infty$  iken

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\{ f \left( |x_k^{(m)} - x_k| \right) \right\}^{p_k} \leq \varepsilon, (m > K)$$

bulunur. Yani  $m \rightarrow \infty$  iken  $g(x^m - x) \rightarrow 0$  dır.

$x \in L(f, p)$  olduğunu göstermek için  $t > K$  olsun ve  $k_0$  sabitini alalım.  $p_k/M \leq 1$  ve  $M \geq 1$  olduğundan Minkowski eşitsizliğinden ve  $f$  modülüs fonksiyonun tanımından

$$\begin{aligned}
\left( \sum_{k=1}^{k_0} \{f(|x_k|)\}^{p_k} \right)^{1/M} &= \left( \sum_{k=1}^{k_0} \{f(|x_k - x_k^{(t)} + x_k^{(t)}|)\}^{p_k 1/M} \right) \\
&\leq \left( \sum_{k=1}^{k_0} \{f(|x_k - x_k^{(t)}|) + f(|x_k^{(t)}|)\}^{p_k} \right)^{1/M} \\
&\leq \left( \sum_{k=1}^{k_0} \{f(|x_k - x_k^{(t)}|)\}^{p_k} \right)^{1/M} + \left( \sum_{k=1}^{k_0} \{f(|x_k^{(t)}|)\}^{p_k} \right)^{1/M} \\
&\leq \varepsilon + g(x^{(t)})
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\sum_{k=1}^{\infty} \{f(|x_k|)\}^{p_k}$$

ifadesinin yakınsak olduğu ve  $x = (x_k) \in L(f, p)$  olduğu anlaşılır. Böylece uzay tamdır.

Şimdi de  $P_i : L(f, p) \rightarrow \mathbb{C}$  koordinat fonksiyonelinin sürekli olduğunu gösterelim.  $\varepsilon > 0$  için  $0 < \delta < 1$  ve  $\delta^{M/G} \leq f(\varepsilon)$  olacak şekilde  $\delta > 0$  olsun.

$$\left( \sum_{k=1}^{\infty} \{f(|x_k|)\}^{p_k} \right)^{1/M} < \delta$$

olacak şekilde  $g(x) < \delta$  alalım. Bu

$$\{f(|x_k|)\}^{p_k} \leq \sum_{k=1}^{k_0} \{f(|x_k|)\}^{p_k} < \delta^M$$

ve böylece

$$f(|x_k|) < \delta^{M/p_k} \leq \delta^{M/G} \leq f(\varepsilon)$$

olmasını gerektirir.

$f$  artan olduğundan herbir  $k$  için  $|x_k| < \varepsilon$  elde edilir. Buna göre koordinat fonksiyonelleri süreklidir ve bu da ispatı tamamlar.

**Teorem 4.5.**  $L(f, p)$  bir  $AK$ -uzayıdır [7].

**İspat.**  $(e_k) = (e_1, e_2, \dots)$  birim vektörler dizisinin  $L(f, p)$  için bir Schauder bazı olduğunu göstermek yeterlidir.

$x = (x_k) \in L(f, p)$  alalım ve

$$y_n = x - (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots)$$

yazalım öyle ki;

$$y_n = x - \sum_{k=1}^n x_k e_k = (0, 0, \dots, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots)$$

$$[g(y_n)]^M = \sum_{k=n+1}^{\infty} \{f(|x_k|)\}^{p_k} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

dır.

Çünkü

$$\sum_{k=1}^{\infty} \{f(|x_k|)\}^{p_k}$$

yakınsaktır. Burada  $g(y_n) \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ) elde edilir ki bu da

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k$$

olmasını gerektirir.  $x$  için bu gösterim tektir. Yani

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k, \quad (n \rightarrow \infty)$$

için

$$g\left(\sum_{k=1}^n (\lambda_k - x_k) e_k\right) \leq g\left(x - \sum_{k=1}^n x_k e_k\right) + g\left(x - \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k\right) \rightarrow 0$$

elde edilir. Burada

$$|\lambda_1 - x_1|^{p_1} + \dots + |\lambda_n - x_n|^{p_n} \rightarrow 0$$

olması her  $k = 1, 2, \dots$  için  $\lambda_k = x_k$  olmasını gerektirir. Bu da ispatı tamamlar.

**Teorem 4.6.** (i) Her bir  $k$  için eğer  $0 < p_k \leq q_k < \infty$  ise bu takdirde herhangi bir  $f$  modülüsü için

$$L(f, p) \subseteq L(f, q)$$

dur.

(ii) Eğer  $(r_k)$  ve  $(t_k)$  kesin pozitif reel sayı dizileri ise ve

$$p_k = \min(r_k, t_k)$$

$$q_k = \max(r_k, t_k)$$

ise bu takdirde herhangi bir  $f$  modülüsü için

$$L(f, p) = L(f, r) \cap L(f, t)$$

$$L(f, q) = G$$

dir. Burada  $G$ ,

$$L(f, r) \cup L(f, t)$$

tarafından üretilen  $w$  nın alt uzayıdır [7].

**İspat.** (i)  $x \in L(f, p)$  olsun. Bu durumda yeterince büyük  $k$ ' lar için  $f(|x_k|) \leq 1$  dir.  $p_k \leq q_k$  olduğundan büyük  $N$  ler için

$$\sum_{k=N}^{\infty} \{f(|x_k|)\}^{q_k} \leq \sum_{k=N}^{\infty} \{f(|x_k|)\}^{p_k}$$

dir. Böylece  $x \in L(f, q)$  olur.

(ii) (i)'den

$$L(f, p) \subseteq L(f, r) \cap L(f, t)$$

elde edilir. Herhangi  $\lambda \in \mathbb{C}$  sayısı için,

$$G \subseteq L(f, q)$$

$$|\lambda^{p_k}| \leq \max(|\lambda^{r_k}|, |\lambda^{t_k}|)$$

dir. Böylece

$$L(f, r) \cap L(f, t) \subseteq L(f, p)$$

dir. Şimdi  $A$  ve  $B$ ' yi

$$A = \{k : r_k \geq t_k\}$$

ve

$$B = \{k : r_k < t_k\}$$

olarak tanımlayalım.

Bu durumda eğer  $x = (x_k) \in L(f, q)$  ise

$$y_k = x_k \quad (k \in A) \quad \text{ve} \quad y_k = 0 \quad (k \in B)$$

$$z_k = 0 \quad (k \in A) \quad \text{ve} \quad z_k = x_k \quad (k \in B)$$

dir. Bu takdirde

$$\sum_{k=1}^{\infty} \{f(|y_k|)\}^{r_k} = \sum_{k \in A} + \sum_{k \in B} = \sum_{k \in A} \{f(|x_k|)\}^{q_k} < \infty$$

ve böylece

$$y = (y_k) \in L(f, r) \subseteq G$$

dir.

$L(f, q) \subseteq G$  olduğu ispatlanmış oldu ki bu da ispatı tamamlar.

**Sonuç 4.7.** Aşağıdaki üç şart denktir.

- (i)  $L(f, r) \subseteq L(f, t)$ ,
- (ii)  $L(f, p) = L(f, r)$ ,
- (iii)  $L(f, q) = L(f, t)$ .

**Sonuç 4.8.**  $L(f, r) = L(f, t) \Leftrightarrow L(f, p) = L(f, q)$

**Teorem 4.9.** Herhangi bir  $f$  modülüsü için  $L(f, p)$  uzayı simetrik, dengeli ve normaldir [7].

**İspat.**  $L(f, p)$  nin simetrik olduğu aşikardır.  $L(f, p)$  nin dengeli olduğunu göstermek için  $x = (x_k) \in L(f, p)$  ve  $|a_k| \leq 1$  olsun.  $f$  artan olduğundan,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \{f(|a_k x_k|)\}^{p_k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \{f(|x_k|)\}^{p_k}$$

olur ki bu  $(a_k x_k) \in L(f, p)$  olduğu ve böylece  $L(f, p)$  nin dengeli olduğu anlamına gelir.

$L(f, p)$  nin normal olduğunu göstermek için her bir  $k = 1, 2, \dots$  için  $|y_k| \leq |x_k|$  olacak şekilde  $x = (x_k) \in L(f, p)$  ve  $y = (y_k)$  dizilerini alalım.  $f$  artan olduğundan,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \{f(|y_k|)\}^{p_k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \{f(|x_k|)\}^{p_k}$$

olur ki bu  $y = (y_k) \in L(f, p)$  olduğu ve böylece  $L(f, p)$  nin normal dizi uzayı olduğunu verir.

$E$  dizi uzayının çarpan uzayı  $M(E)$  ile gösterilir ve

$$M(E) = \{a \in w : ax \in E, \forall x \in E\}$$

şeklinde tanımlanır.

**Teorem 4.10.** Eğer  $G = \sup p_k < \infty$  ise bu takdirde herhangi  $f$  modülüsü için,  $\ell_\infty \subset M(L(f, p))$  elde edilir. Burada kapsama kesindir [7].

**İspat.**  $a \in \ell_\infty$  olsun. Bu durumda her  $k$  için  $|a_k| < 1 + \lceil K \rceil$  olacak şekilde bir  $K > 0$  sayısı vardır. Buna göre her  $x \in L(f, p)$  için

$$\sum_{k=1}^{\infty} \{f(|a_k x_k|)\}^{p_k} \leq (1 + \lceil K \rceil)^G \sum_{k=1}^{\infty} \{f(|x_k|)\}^{p_k} < \infty$$

olacağından  $a \in M(L(f, p))$  olur.  $a \in \ell_\infty$  herhangi bir eleman olduğundan  $\ell_\infty \subset M(L(f, p))$  elde edilir.

Kapsamanın kesin olduğunu göstermek için her  $k$  için  $p_k = \frac{1}{k}$  ve  $a_k = k$  alalım. Bu takdirde  $x \in L(f, p)$  olması

$$\sum_{k=1}^{\infty} \{f(|a_k x_k|)\}^{p_k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} K^{1/k} \{f(|x_k|)\}^{1/k} \leq 2 \sum_{k=1}^{\infty} \{f(|x_k|)\}^{1/k} < \infty$$

olmasını gerektirir.

Bu durumda  $a \notin \ell_\infty$  iken

$$a = (a_k) \in M(L(f, p))$$

olur. O halde kapsama kesindir.

## 5. $L(f)$ DİZİ UZAYI ÜZERİNDE MINKOWSKİ FONKSİYONELİ

Bu bölümde  $f(1)$  yarıçaplı yuvarın konveks hull'ü üzerinde tamamlanmışının Minkowski fonksiyoneli yardımıyla tanımlanan topolojiyle  $L(f)$  uzayının  $l_1$  uzayına eşit olduğu gösterilmiştir.

### 5.1. $L(f)$ Dizi Uzayı Üzerinde Norm Olarak Minkowski Fonksiyoneli

**Lemma 5.1.1.**  $f \in C^*$ ,  $a > 0$  olsun. Eğer  $|X|_f \leq a$  olmak üzere  $X \in L(f)$  ise  $|X|_1 \leq a$  dir. O zaman  $B \subseteq B_1$  dir [6]. Burada  $B = \{X = (x_n) : X \in L(f) \text{ ve } |X|_f \leq f(1)\}$  ve  $B_1 = \{X = (x_n) : X \in l_1 \text{ ve } |X|_1 \leq 1\}$  şeklinde tanımlanır.

**İspat.** Kabul edelim ki  $|X|_f \leq f(a)$  ve  $|X|_1 > a$  olmak üzere  $X = (x_n) \in L(f)$  olsun. Bu durumda  $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| > a$  dir ve  $\sum_{n=1}^N |x_n| > a$  olacak şekilde  $N$  vardır. Böylece  $f\left(\sum_{n=1}^N |x_n|\right) \geq f(a)$  dir. Buradan

$$f(a) < f\left(\sum_{n=1}^N |x_n|\right) \leq \sum_{n=1}^N f(|x_n|) \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(|x_n|) \leq f(a)$$

olur. Bu da çelişkidir.

**Lemma 5.1.2.**  $C(B)$  dengeli ve absorbingdir [6].

**İspat.**  $a$  bir reel sayı olmak üzere  $|a| \leq 1$  ve  $X \in C(B)$  olsun. Bu takdirde her  $i$  ve  $\sum a_i = 1$  için  $X_i \in B$ ,  $a_i \geq 0$  olmak üzere;

$$X = \sum a_i X_i$$

dir.

Eğer  $a \geq 0$  ise  $Y_i = X_i$  ve  $a < 0$  ise  $Y_i = -X_i$  olsun. Açıktır ki  $Y_i \in B$ ,  $aX = \sum a a_i X_i = \sum |a| a_i Y_i$  ve  $\sum |a| a_i \leq 1$  ve böylece  $aX \in C(B)$  dir. Bu da  $C(B)$  nin dengeli olduğunu gösterir. Şimdi  $C(B)$  nin absorbing olduğunu gösterelim.  $X \in L(f)$  olsun.  $|X|_f \leq f(1)$  ise tanımda  $t = 1$  alalım. Eğer  $|X|_f > f(1)$  ise  $1 < i \leq n$  için  $a_i > 0$ ,  $X_i \in B$  olmak üzere  $X = \sum a_i X_i$  yazalım.  $a = \sum a_i$  olsun. Bu takdirde  $\frac{1}{a} X \in C(B)$  dir.

**Sonuç 5.1.3.**  $C(B)$  nin Minkowski fonksiyoneli,  $L(f)$  üzerinde bir normdur [6].

## 5.2. Norm - Sürekli Lineer Fonksiyoneller

**Lemma 5.2.1.**  $C(B)$  üzerindeki  $P$  Minkowski fonksiyoneli yardımıyla  $L(f)$  üzerinde tanımlanan topoloji, metrik topolojiden daha zayıftır [6]. Burada  $f, C^*$  in bir elemanı olmak üzere  $L(f)$  üzerinde  $C(B)$ ' nin Minkowski fonksiyoneli

$$P(X) = \inf \left\{ a > 0 : \frac{1}{a}X \in C(B) \right\}$$

şeklinde tanımlanır.

**İspat.**  $T : (L(f), | \cdot |_f) \rightarrow (L(f), P)$  fonksiyonu  $T(X) = X$  şeklinde tanımlansın.  $T$  nin sürekli olduğunu göstermek yeterlidir.  $(X_n), L(f)$  de  $|X_n|_f \rightarrow 0$  olacak şekilde bir dizi olsun.  $\varepsilon > 0$  olsun ve  $\frac{1}{m} < \varepsilon$  olacak şekilde pozitif bir  $m$  sayısı seçelim. Her  $n \geq N$  için  $|X_n|_f < \frac{f(1)}{m}$  olacak şekilde bir  $N$  vardır.

$X_n = (x_k^n)$  olduğunu kabul edelim. Bu durumda her  $n \geq N$  için,

$$|mX_n|_f = \sum_k f(|mx_k^n|) \leq m \sum_k f(|x_k^n|) = m |X_n|_f \leq f(1)$$

olur ki ispat tamamlanır.

**Teorem 5.2.2.**  $f \in C$  olsun. Bu durumda  $| \cdot |_f$  metriğine göre  $L(f)$  üzerindeki sürekli lineer fonksiyoneller  $P$  normuna göre aynı kalır [6].

**İspat.**  $L(f)$  üzerindeki sürekli lineer bir fonksiyonel  $F$  olsun. Buna göre her  $X = (x_n) \in L(f)$  için  $F(X) = \sum x_n y_n$  olacak şekilde bir  $Y = (y_n) \in \ell_\infty$  elemanı vardır.  $Y \neq 0$  olduğunu kabul edelim.  $\varepsilon > 0$  verilsin ve  $\delta = \frac{\varepsilon}{\|Y\|_\infty}$  olsun. Eğer  $P(X) < \delta$  ise o zaman  $\frac{1}{\delta}X \in C(B)$  olur ve böylece  $X = \sum a_i X_i$  elde edilir. Burada her  $1 \leq i \leq N$  için  $X_i \in B, a_i \geq 0$  elde edilir ve  $\sum_{i=1}^N a_i \leq 1$  dir. Böylece

$$|X|_1 \leq \sum_{i=1}^N a_i |X_i|_1 \leq \delta,$$

$$|F(X)| \leq \|Y\|_\infty$$

$$\sum |x_n| = \|Y\|_\infty |X|_1 < \|Y\|_\infty \delta = \varepsilon$$

olur. Bu yüzden  $P$  ye göre  $F$  süreklidir.

### 5.3. $L(f)$ NİN BANACH ZARFI

$L(f)$ ' nin üzerindeki  $P$  normuna göre  $L(f)$ ' nin tamamlanışı bir Banach uzayıdır. Bu tamamlanışa  $L(f)$ ' nin Banach zarfı denir ve  $\widehat{L}(f)$  ile gösterilir.

**Lemma 5.3.1.** Her  $f \in C^*$  için  $C^*(B) = B_1$  dir [6].

**İspat.**  $X = (x_n) \in B_1$  ve  $S_n = \sum_1^n x_i e_i$  olsun. Burada  $e_i$ ,  $i$ - yinci elemanı hariç 0, diğeri 1 olan bir vektördür.

$x_i \geq 0$  iken  $a_i = x_i$ ,  $Y_i = e_i$  ve  $x_i < 0$  iken  $a_i = -x_i$ ,  $Y_i = -e_i$  olsun. Bu yüzden her  $i$  için  $Y_i \in B$  dir. Böylece  $S_n \in C(B)$  olup  $X \in C^*(B)$  olur. Dolayısıyla  $C^*(B) \subseteq C^*(B_1) = B_1$  elde edilir.

**Lemma 5.3.2.** Eğer  $X = (x_n) \in L(f) \cap B_1$  ise bu durumda herhangi bir  $a \in (0, 1)$  için  $aX \in C(B)$  dir [6].

**İspat.**  $X \in L(f) \cap B_1$  olduğundan herhangi bir  $a \in (0, 1)$  için  $\frac{a}{1-a}X \in L(f)$  elde edilir. Böylece

$$\sum_N^\infty f \left( \left| \frac{a}{1-a} x_n \right| \right) \leq f(1)$$

olacak şekilde  $N$  mevcuttur.

$Y = \frac{a}{1-a}(0, 0, \dots, x_N, x_{N+1}, \dots)$  olmak üzere

$$aX = \sum_{i=1}^{N-1} a x_i e_i + (1-a)Y$$

dir.  $x_i \geq 0$  iken  $a_i = x_i$ ,  $Y_i = e_i$  ve  $x_i < 0$  iken  $a_i = -x_i$ ,  $Y_i = -e_i$  olsun. Böylece  $Y_i \in B$  ve  $aX = \sum_1^{N-1} a a_i Y_i + (1-a)Y$  olur. Fakat

$$\sum_{i=1}^{N-1} a a_i + (1-a) \leq a \sum_{i=1}^{N-1} |x_i| + (1-a) \leq 1$$

dir, çünkü  $X \in B_1$  dir. Ayrıca  $Y_1, Y_2, \dots, Y_{N-1}, Y$  ler  $B$  nin elemanlarıdır, böylece  $aX \in C(B)$  dir.

**Lemma 5.3.3 .**  $f \in C^*$  olsun. Bu takdirde  $L(f)$ ,  $P$  yardımıyla tanımlanan topoloji ile  $l_1$  de sürekli gömülebilirdir [6].

**İspat.**  $T : (L(f), P) \rightarrow l_1$ ,  $T(X) = X$  şeklinde tanımlansın.  $(x_n)$ ,  $L(f)$ ' de  $P(X_n) \rightarrow 0$  olacak şekilde bir dizi olsun ve  $\varepsilon > 0$  verilsin. Bu takdirde her  $n \geq N$  için

$P(X_n) < \varepsilon$  olacak şekilde bir  $N$  mevcuttur. Böylece her  $n \geq N$  için  $\frac{1}{\varepsilon}X_n \in C(B)$  dir ve böylece her  $1 \leq i \leq r$  ve  $\sum a_i \leq 1$  için  $X_i^n \in B$ ,  $a_i \geq 0$  olmak üzere

$$\frac{1}{\varepsilon}X_n = \sum_{i=1}^r a_i X_i^n$$

dir.

Dolayısıyla

$$\frac{1}{\varepsilon}|X_n|_1 \leq \sum_{i=1}^r a_i |X_i^n|_1 \leq \sum_{i=1}^r a_i \leq 1$$

olup  $|X_n|_1 \leq \varepsilon$  olur ki ispat tamamlanır.

## 6. SONUÇ.

Bu tezde modülüs fonksiyonunun bazı özellikleri verilerek  $L(f, p)$  dizi uzayının bilinen bazı topolojik yapıları incelenmiştir. Ayrıca  $f(1)$  yarıçaplı yuvarın konveks hull'ü üzerinde tamamlanmışının Minkowski fonksiyoneli yardımıyla tanımlanan topolojiyle  $L(f)$  uzayının  $l_1$  uzayına çakışık olduğu gösterilmiştir.

## KAYNAKLAR

- [1] Nakano, H., 1953, Concave modulars, J. Math. Soc. Japan 5(1), 29-49.
- [2] Ruckle, W.H., 1973,  $FK$ – Spaces in which the sequence of coordinate vectors is bounded, Canad. J. Math,25, 973-978.
- [3] Maddox, I.J., 1986, Sequence spaces defined by a modulus. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 100, no: 1, 161–166.
- [4] Deeb, W. and Hussein, D., 1980, Results on  $L(f)$  spaces. Arabian J. Sci. Engrg. 5 no: 2, 113–116.
- [5] Deeb, W., 1982, Necessary and sufficient conditions for the equality of  $L(f)$  and  $l_1$ ,. Canad. J. Math. 34, no. 2, 406–410.
- [6] Deeb, W.; Hussein, D., 1982, Minkowski functional on  $L(f)$  spaces. Arabian J. Sci. Engrg. 7 no. 3, 241–244.
- [7] Bhardwaj, V.K., 2003, A generalization of a sequence space of Ruckle. Bull. Calcutta Math. Soc. 95, no. 5, 411–420.
- [8] Maddox, I.J., 1970, Elements of Functional Analysis, Cambridge University Press, Cambridge, Second Edition.
- [9] Kreyszig, E., 1978, Introductory Functional Analysis with Applications, John Wiley Sons New York.
- [10] Goes, G. and Goes, S., 1970, Sequence of variation and sequence of Fourier coefficients 1, Math.Z., 118, 93-102.
- [11] Bayraktar, M., 1994, Fonksiyonel Analiz, Atatürk Üniversitesi yayımları, no: 789, Erzurum.
- [12] Wilansky. A., 1978, Modern Methods in Topological Vector Spaces, McGraw Hill Inc., New York.
- [13] Kamthan, P.K. and Gupta, M., 1981, Sequence Spaces and Series, Marcel Dekker, Inc., New York.
- [14] Kantorovich, L. V.; Akilov, G. P., 1982, Functional Analysis. Translated from the Russian by Howard L. Silcock. Second edition. Pergamon Press, Oxford-Elmsford, N.Y.

## ÖZGEÇMİŞ

1990 yılında Elazığ'da doğdum. İlk, Orta ve Lise öğrenimimi Elazığ'da tamamladım. 2008 yılında Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümüne girdim ve 2012 yılında Matematik Bölümünden mezun oldum. 2012 yılında Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında tezli yüksek lisansa başladım.