

GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BULANIK LİNEER METRİK UZAYLAR

MATEMATİK BÖLÜMÜ
YÜKSEK LİSANS TEZİ

SEVİNÇ TAN
HAZİRAN 2015

HAZİRAN, 2015

YÜKSEK LİSANS –MATEMATİK BÖLÜMÜ

SEVİNÇ TAN

Bulanık Lineer Metrik Uzaylar

Gaziantep Üniversitesi

Matematik Bölümü

Yüksek Lisans Tezi

Danışman

Doç. Dr. Mehmet ŞAHİN

Sevinç TAN


Haziran 2015

© 2015 [Sevinç TAN]

T.C.
GAZIANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

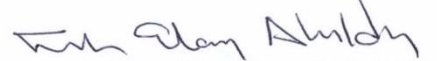
Tezin Adı: Bulanık Lineer Metrik Uzaylar
Öğrencinin, Adı Soyadı: Sevinç TAN
Tez Savunma Tarihi: 29.06.2015

Fen Bilimleri Enstitüsü onayı




Prof. Dr. Metin BEDİR
FBE Müdürü

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak gerekli şartları sağladığını onaylarım.



Prof. Dr. Fahir Talay AKYILDIZ
Enstitü ABD Başkanı

Bu tez tarafımda okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.



Doç. Dr. Mehmet ŞAHİN
Tez Danışmanı

Bu tez tarafımızca okunmuş, kapsam ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak oy birliği ile kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri :


Yrd. Doç. Dr. İrfan DELİ

Doç. Dr. Necati OLGUN

Doç. Dr. Kuddusi KAYADUMAN

Doç. Dr. Mehmet ŞAHİN

Yrd. Doç. Dr. Özge ÖZTEKİN

İmzası


İlgili tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek ilgili tezde yer aldığını beyan ederim.

Sevinç TAN

ABSTRACT
FUZZY LINEAR METRIC SPACES

TAN, Sevinç

M. Sc. in Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Mehmet ŞAHİN

June 2015

45 Pages

In this thesis, we have made an attempt to fuzzy linear metric spaces. Firstly we have formulated the concepts; fuzzy sets, metric spaces, linear metric spaces and related to these examined introductions and theorems.

After that the examined about the fuzzy linear metric spaces and introduction, theorem and example in fuzzy linear metric spaces.

Key Words: Fuzzy Set, Fuzzy Set Operations, Metric Spaces, Fuzzy Metric Spaces, Linear Metric Spaces, Fuzzy Linear Metric Spaces

ÖZET
BULANIK LİNEER METRİK UZAYLAR

TAN, Sevinç

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Bölümü

Tez Yöneticisi: Doç. Dr. Mehmet ŞAHİN

Haziran 2015

45 sayfa

Bu tezde, bulanık lineer metrik uzaylar incelenmiştir. Öncelikle bulanık kümeler, metrik uzaylar, lineer metrik uzaylar üzerinde durulmuştur. Bunlarla ilgili tanım ve teoremler incelenmiştir.

Daha sonra da bulanık lineer metrik uzaylarla ilgili tanım, teorem ve örneklere yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Bulanık Küme, Bulanık Küme İşlemleri, Klasik Metrik Uzay, Bulanık Metrik Uzaylar, Lineer Metrik Uzaylar, Bulanık Lineer Metrik Uzaylar

Çok kıymetli eşime ve aileme...

TEŞEKKÜR

Bu alıŐma sűresince tűm bilgilerini benimle paylaŐmaktan kaçınmayan, her tűrlű konuda desteęini benden esirgemeyen ve tezimde bűyűk emeęi olan, aynı zamanda kiŐilik olarak ta bana çok Őey katan Gaziantep Ŭniversitesi űęretim űyelerinden danıŐman hocam, Sayın Doç. Dr. Mehmet ŐAHİN' e sonsuz minnet ve teŐekkűrlerimi sunarım.

ÇalıŐma sűresince beni destekleyen ve her zaman yanımda olan babama ve aileme, tabi ki her koŐulda yanımda olan deęerli eŐime sonsuz teŐekkűrlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	vi
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR.....	vii
İÇİNDEKİLER.....	ix
SEMBOLLER DİZİNİ.....	xi
BÖLÜM 1: GİRİŞ.....	1
BÖLÜM 2: BULANIK KÜMELER.....	4
2.1. Bulanık Küme Kavramları.....	4
2.2. Bulanık Küme İşlemleri	8
BÖLÜM 3.....	10
3.1. Klasik Metrik Uzaylar.....	10
3.2. Metrik Uzaylarda Yakınsaklık ve Süreklilik.....	16
3.3. Metrik Uzaylarda Açık Küme, Kapalı Küme Kavramları.....	17
3.4. Bulanık Metrik Uzaylar.....	19
3.5. Bulanık Metrik Uzaylarda Bazı Kavramlar.....	21
BÖLÜM 4.....	25
4.1. Lineer Uzaylar.....	25
4.2. Lineer Metrik Uzaylar.....	31

BÖLÜM 5.....	37
5.1. Bulanık Lineer Metrik Uzaylar.....	37
SONUÇ.....	42
KAYNAKÇA.....	43

SEMBOLLER DİZİNİ

μ_A : A kümesinin üyelik fonksiyonu

A_α : En küçük derecesi α olan A bulanık kümesine mensup olan elemanların kümesi

$|A|$: A kümesinin kardinalitesi

\mathbb{R} : Reel Sayılar Kümesi

\mathbb{C} : Kompleks Sayılar Kümesi

\mathbb{R}^+ : Pozitif Reel Sayılar Kümesi

inf : Minimum (İnfimum)

sup : Maksimum (Supremum)

$\text{çap}(A)$: A kümesinin çapı

\emptyset : Boş Küme

\mathbb{N} : Doğal Sayılar Kümesi

\wedge : Minimum (İnfimum)

\vee : Maksimum (Supremum)

\cdot : Genel Çarpım

\mathcal{L} : Lukasiewicz t- normu

F : Cisim

$+$: Toplama İşlemi

θ : Etkisiz Eleman

1: Birim Eleman

$Span(A)$: A kümesini kapsayan en dar alt uzay

X / M : M alt uzayına göre X' in Bölüm Uzayı

$L(X, Y)$: X' den Y' ye bütün lineer dönüşümlerin kümesi

$Ker f$: f' nin çekirdeği

$S_F^+(R)$: Negatif Olmayan Bulanık Sayıların Kümesi

\mathbb{R}^n : n-boyutlu Öklit Uzayı

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Bulanık küme kavramı ilk olarak 1965' de Zadeh tarafından [1] makalesinde tanımlandı. Daha sonra Zadeh [2,3] makalelerinde bulanık küme kavramını genelleştirdi. Bunun üzerine birçok yazar bulanık küme kavramını farklı alanlarda tartışmaya başladı. Bulanık topolojik uzaylar, bulanık metrik uzaylar gibi bulanık küme uygulamaları ve teorisi farklı yaklaşımlarla tartışılmaya başlandı. Özellikle Deng [4], Erceg [5], Kaleva and Seikkala [6], Kramosil and Michalek [7] farklı yollarla bulanık metrik uzayın kavramlarını tanımladı.

Metrik lineer uzay kavramı ilk kez 1969' da Köthe [8] makalesinde tanımlandı. Ondan sonra 1973' de A. P. Robertson and W. J. Robertson [9] ve 1984' de Stefan Rolewicz [10] farklı yollarla metrik lineer uzayı tanımladı.

Günlük hayatta rastgele kullandığımız birçok terim genellikle bulanık bir yapıya sahiptir. Bir şeyi tanımlarken, bir olayı açıklarken, komut verirken ve daha birçok durumda kullandığımız sözel veya sayısal ifadeler bulanıklık içerir. Bu terimlere örnek olarak , yaşlı, genç, uzun, kısa, sıcak, soğuk, ılık gibi daha pek çok sözel terim gösterilebilir. Bizler bir olayı anlatıp, bir durum karşısında karar verirken bu tür kesinlik ifade etmeyen terimler kullanırız. Kişinin yaş durumuna göre ona yaşlı, orta yaşlı, genç, çok yaşlı veya çok genç deriz. Bütün bunlar insan beyninin belirsiz ve kesinlik içermeyen durumlarda nasıl davrandığına ve olayları nasıl değerlendirip, tanımlanıp, komut verdiğine dair birer örnektir. Bulanık mantığın ve bu mantık kurallarını kullanan bulanık küme teorisinin Lotfi A. Zadeh tarafından geliştirilip 1965 tarihli orijinal makalesinde [1] yayınlanmasından sonra belirsizlik içeren sistemlerin incelenmesi yeni bir boyut kazanmıştır. 1965' de ortaya atılmasına rağmen, bulanık küme kavramı ancak 1970' li yılların ikinci yarısından sonra kullanılmaya başlanmıştır. Bunda özellikle Zadeh' in 1965' deki ilk makalesinden sonra bulanık mantığın belirsizlik içeren sistemlere uygulanabilirliğini açıklayan makaleleri [2,3] etkili olmuştur.

Zadeh bu teoriyi ilk ortaya attığı zaman olumsuz bir yığın tepki ile karşılaşmıştır. Fakat bu alanın çok kullanışlı olduğunu gören bilim adamları bu alana yönelmeye başlamışlardır. Bulanık mantığın Amerikalı sadık savunucularından Bart Kosko [11] bulanık kümelere örnek vermek için konferanslarda dinleyicilerden ‘erkek’ olanların ellerini kaldırmasını ister. Erkekler ellerini kaldırır, bayanlar kaldırmaz. Bu bayan olmayan bir dizidir. Bu kez de bayanların ellerini kaldırmasını ister; başka bir dizi oluşur. Bu ise erkek olmayan bir dizidir. Bu belirlemede katılımcılar, siyah ya da beyaz gibi iki diziyeye bölünürler. Burada yapılan mantıksal işlem klasik usavurmadır. ‘ Erkekler ve erkek olmayanlar ’ veya ‘ bayanlar ve bayan olmayanlar ’ kümesi iki değerli bir sınırlandırmadır, kümelenendir. Kosko daha zor bir soru sorar:

- Kaç kişi işinden memnun?

Eller kalkar, iner, çoğu dirsekler kırılmış halde sükuna ererler. Ancak çok azı ellerini iyice kaldırır veya hiç kaldırmaz. Çoğu insan ise bu iki uç arasında yer alır. Tam da bu durum bulanık bir kümeyi, yani ‘ işinden memnun olanları ’ tanımlamaktadır. Sonra eller indirilir ve bu kez işinden memnun olmayanların ellerini kaldırması istenir. Aynı ellerden birçoğu kalkar, iner, ortalarında bir yerlerde asılı kalır. Bu da ‘ işinden memnun olmayanların ’ ın bulanık kümesini, yani birincinin tersini tanımlamaktadır. Meslek dizileri, erkek bayan dizilerinden farklıdır. Erkek dizisi bayan dizisiyle kesişmez. Bir insan ya erkektir ya da bayan, ikisi birden olamaz. ‘ A veya A değil ’ . Ancak çoğu insan işinden biraz memnun biraz memnun değildir; yani hem memnun hem de memnun değildir. İşinden memnun olmayı ‘1’ ile memnun olmamayı ‘0’ ile gösterirsek; işinden tam memnun olmaya daha yakın ama az da olsa şikayeti olan biri uzmanlar tarafından iyi tanımlanmış bulanık küme içinde 0.85 veya 1’ e yakın başka bir oranda temsil edilebilir. Bulanık mantık bu tür kümeleri ve tanımları kullanarak işlem yapar.[12]

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, konuya giriş yapılarak konu hakkında bilgi verilmiştir. İkinci bölümde, bulanık küme kavramı ile ilgili tanımlar ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde, metrik uzay kavramı ve metrik uzaylar ile ilgili tanımlar ve teoremler verilmiştir. Dördüncü bölümde, lineer uzaylar ile ilgili tanım ve teoremler ve lineer metrik uzay ile ilgili tanım ve teoremler verilmiştir. Beşinci bölümde, bulanık lineer metrik uzay kavramı ve bununla ilgili

tanım ve teoremler verilmiştir. Altıncı bölümde ise tezin sonuç kısmına yer verilmiştir.

BÖLÜM 2

BULANIK KÜMELER

2.1 Bulanık Küme Kavramı

Bugüne kadar bir kümenin belirtilmesi için iyi tanımlı olması lazımdı. Yani bir eleman ya kümeye dahildi ya da değildi. Bunu $X \neq \emptyset$ bir küme olmak üzere; A kümesinin $\forall x \in X$ için ;

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

ile tanımlı $\mu_A: X \rightarrow \{0,1\}$ üyelik fonksiyonu ile ifade ediliyordu[6]. Zadeh [1] de ortaya koyduğu aşağıdaki tanıma göre $0 \leq r \leq 1$ olmak üzere $x \in X$ elemanı, A kümesinin üyelik derecesi r olan bir elemanı olmaktadır.

Tanım 2.1.1: $X = \{x|x \in X\}$ kümesi verilmiş olsun. $\forall x \in X$ için $\mu_A(x) \in [0,1]$ olmak üzere $\mu_A: X \rightarrow [0,1]$ kümesine X in A bulanık kümesi denir. μ_A fonksiyonuna A bulanık kümesinin üyelik fonksiyonu, $\mu_A(x)$ değerine x ' in üyelik derecesi denir.[1]. Eğer;

$$\sup_{x \in X} \mu_A(x) = 1 \text{ ise}$$

bulanık kümeye normal denir.

Örneğin; bir A bulanık kümesi genel anlamda aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$$A = \{(x, \mu_A(x)) | x \in X\}$$

$$A = \sum_{x_i \in X} \frac{\mu_A(x_i)}{x_i} \quad (\text{ayrık biçim})$$

$$A = \int_X \frac{\mu_A(x)}{x} \quad (\text{sürekli biçim})$$

Bu denklemlerde;

X : Uzay Kümesi (Kesin Küme)

x :Uzay kümesinin kesin küme elemanları

A = Bulanık küme

$\mu_A(x)$: x kesin sayılarının A bulanık kümesindeki üyelik dereceleridir. [11]

Tanım 2.1.2:[1] $X \neq \emptyset$ bir küme , $A \subset X$ bulanık küme olsun. Eğer $\forall x \in X$ için $\mu_A(x) = 0$ ise A bulanık kümesine boştur denir.

Tanım 2.1.3:[1] $X \neq \emptyset$ bir küme olmak üzere $A, B \subset X$ bulanık kümeler olsun.

$\forall x \in X$ için $\mu_A(x) = \mu_B(x)$ ise A ve B bulanık kümelerine eşittir denir ve $A = B$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.4:[1] $X \neq \emptyset$ bir küme olmak üzere $A \subset X$ bulanık kümesinin tümleyeni \bar{A} ile gösterilir ve

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$$

dir.

Tanım 2.1.5:[1] $X \neq \emptyset$ bir küme olmak üzere $A, B \subset X$ iki bulanık küme olsun. $\forall x \in X$ için $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ ise A bulanık kümesine B bulanık kümesinin alt kümesidir denir. Sembolik olarak;

$$A \subset B \Leftrightarrow \mu_A(x) \leq \mu_B(x)$$

dir.

Tanım 2.1.6:[1] $X \neq \emptyset$ bir küme, $A, B \subset X$ iki bulanık küme olsun. A ve B bulanık kümelerinin üyelik fonksiyonları $\mu_A(x)$ ve $\mu_B(x)$ ve C bulanık kümesi $C = A \cup B$ olsun. O halde

$$\mu_C(x) = \mu_{A \cup B}(x) = \max[\mu_A(x), \mu_B(x)] , x \in X$$

veya

$$\mu_C = \mu_A \vee \mu_B$$

ile gösterilir.

Tanım 2.1.7:[1] $X \neq \emptyset$ bir küme, $A, B \subset X$ iki bulanık küme olsun. A ve B bulanık kümelerinin kesişimi $C = A \cap B$ bulanık kümesi ve A ve B bulanık kümelerinin üyelik fonksiyonları $\mu_A(x)$ ve $\mu_B(x)$ olmak üzere; C bulanık kümesinin üyelik fonksiyonu

$$\mu_C(x) = \min[\mu_A(x), \mu_B(x)]$$

veya

$$\mu_C = \mu_A \wedge \mu_B$$

ile temsil edilir.

Açıklama 2.1.8:[1] A ve B 'nin birleşimi A ve B 'yi içeren en küçük bulanık kümedir. Eğer D kümesi A ve B 'yi içeren keyfi bir bulanık küme ise D kümesi A ve B 'yi içerir. O halde;

$$\max[\mu_A, \mu_B] \geq \mu_A \quad \text{ve} \quad \max[\mu_A, \mu_B] \geq \mu_B$$

dir. Ayrıca, eğer $C \subset D$ olmak üzere A ve B 'yi içeren keyfi bir bulanık küme ise;

$$\mu_D \geq \mu_A, \quad \mu_D \geq \mu_B \quad \text{ve} \quad \mu_D \geq \max[\mu_A, \mu_B] = \mu_C$$

dir.

Açıklama 2.1.9:[1] A ve B bulanık kümelerinin kesişimi A ve B 'yi içeren en büyük bulanık kümedir. O halde;

$$\mu_A \geq \min[\mu_A, \mu_B] \quad \text{ve} \quad \mu_B \geq \min[\mu_A, \mu_B]$$

dir.

Tanım 2.1.10:[1] A ve B bulanık kümeler olsun. $A \cap B = \emptyset$ ise A ve B bulanık kümelerine ayrıktır denir.

Teorem 2.1.11:[13] Bulanık kümelerde kesişim, birleşim ve tümleyen işlemleri aşağıdaki özellikleri sağlar.

Tek Kuvvet Özelliği: $A \cup A = A, \quad A \cap A = A$

Değişme Özelliği: $A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A$

Birleşme Özelliği: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$

Dağılma Özelliği: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Tümleyenin Tümleyeni: $\overline{\overline{A}} = A$

E ve \emptyset ile Yutma Özelliği: $A \cup E = E$, $A \cap \emptyset = \emptyset$

Etkisiz Eleman Özelliği: $A \cup \emptyset = A$, $A \cap E = A$

De Morgan Kuralı: $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$, $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Denklik Formülü: $(\overline{A} \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = (\overline{A} \cap \overline{B}) \cup (A \cap B)$

Simetrik Fark Formülü: $(\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = (\overline{A} \cup \overline{B}) \cap (A \cup B)$.

Tanım 2.1.12:[14] A bulanık kümesinin yüksekliği, elemanlarının üyelik değerlerinin supremumudur.

$$\text{Yükseklik}(A) = \sup_{x \in X} \mu_A(x)$$

Tanım 2.1.13:[14] X uzayında tanımlı A bulanık kümesinin dayanağı, üyelik derecesi sıfırdan farklı olan tüm elemanların oluşturduğu kesin alt kümedir.

$$\text{Dayanak}(A) = \{x | \mu_A(x) > 0\}$$

Tanım 2.1.14:[14] X uzayında tanımlı A bulanık kümesinin özü, üyelik derecesi 1'e eşit olan tüm elemanların oluşturduğu kesin alt kümedir.

$$\text{Öz}(A) = \{x | \mu_A(x) = 1\}$$

Tanım 2.1.15:[14] En küçük derecesi α olan A bulanık kümesine mensup olan elemanların kümesine α – kesim kümesi denilir.

$$A_\alpha = \{x \in X | \mu_A(x) \geq \alpha\} \text{ ile gösterilir.}$$

$$A_{\overline{\alpha}} = \{x \in X | \mu_A(x) > \alpha\}$$

kümesine güçlü α – kesim kümesi denilir.

Tanım 2.1.16:[14] A bulanık kümesi $\mu_A(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \min\{\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)\}$ $x_1, x_2 \in X$, $\lambda \in [0,1]$ koşulunu sağlarsa A bulanık kümesi konvektir denir.

Başka bir deyişle, eğer bütün α – kesim kümeleri konveks ise bulanık küme konvektir.

Tanım 2.1.17:[14] Sonlu bulanık A kümesi için kardinalite $|A|$ ile tanımlanır ve

$$|A| = \sum_{x \in X} \mu_A(x)$$

dir.

2.2 Bulanık Küme İşlemleri

Bu kısımda bulanık küme işlemcileri hakkında bilgi verilecektir. Bulanık kümelerde iki tip işlemci vardır. Bunlar t –norm ve t –conorm’ dur. t –norm klasik mantıktaki ‘ ve ’ işleminin, t –conorm da klasik mantıktaki ‘ veya ’ işleminin karşılığıdır. t –norm ve t –conorm işlemleri bulanık kümelerde modelleme amacı ile kullanılır. t –norm için T , t –conorm için \perp sembolleri kullanılır.

Tanım 2.2.1:[13] $T: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ ve $\forall x, y, z, \bar{x}, \bar{y} \in [0,1]$ olmak üzere aşağıdaki dört şartı sağlayan T işlemine t – norm denir.

- 1) $T(x, 0) = 0$, $T(x, 1) = x$ (Sınır Koşulu)
- 2) $T(x, y) = T(y, x)$ (Değişme özelliği)
- 3) $(x \leq \bar{x}, y \leq \bar{y}) \rightarrow T(x, y) \leq T(\bar{x}, \bar{y})$ (Monotonisite Özelliği)
- 4) $T(T(x, y), z) = T(x, T(y, z))$ (Birleşme Özelliği)

İlk koşul klasik kümelere genelleştirmeyi sağlar. İkinci koşul t – norm işlemi sonucunun birleştirilerek kümelerin sıralanmasıyla değişmediğini, üçüncü koşul A veya B’ nin üyelik fonksiyonu değerindeki azalmanın, işlem sonucu oluşturulacak kümede üyelik fonksiyonu değerinde artışa neden olamayacağını, dördüncü koşul kümelerle değişik grup ve sıralamalarla t – norm işlemi yapılabileceğini anlatır.

Tanım 2.2.2.:[13] $\perp: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ ve $\forall x, y, z, \bar{x}, \bar{y} \in [0,1]$ olmak üzere aşağıdaki dört şartı sağlayan \perp işlemine t – conorm ya da s – norm denir.

- 1) $\perp(x, 0) = 0$, $\perp(x, 1) = x$ (Sınır Koşulu)

- 2) $\perp(x, y) = \perp(y, x)$ (Değişme Özelliği)
 3) $(x \leq \bar{x}, y \leq \bar{y}) \rightarrow \perp(x, y) \leq \perp(\bar{x}, \bar{y})$ (Monotonite Özelliği)
 4) $\perp(\perp(x, y), z) = \perp(x, \perp(y, z))$ (Birleşme Özelliği)

2.2.4 t – norm ve t – conorm İlişkisi

t – norm ile t – conorm arasında bir ilişki olduğunu görebiliriz. T fonksiyonu t – norm işlemcisini, \perp fonksiyonu da t – conorm işlemcisini temsil etsin. Eğer \bar{T} 'yi; $\bar{T}(x, y) = 1 - T(1 - x, 1 - y)$ olarak tanımlarsak, bu

t – conorm olur. Yani $\perp(x, y) = 1 - T(x, y)$ dir.

Yine $x, y \in [0,1]$ için x ve y 'nin tümleyenleri olarak $\bar{x} = 1 - x$ ve $\bar{y} = 1 - y$ olsun. İşlemciden tümleyen sonucu;

$$\overline{x T y} = 1 - T(x, y)$$

Buradan De Morgan kuralı kullanılarak aşağıdaki çıkarımlar elde edilir. [13]

$$\bar{x} \perp \bar{y} = \overline{x T y}$$

$$\bar{x} T \bar{y} = \overline{x \perp y}$$

3. BÖLÜM

Bu bölümde klasik anlamdaki metrik uzay kavramı ve bulanık metrik uzay ile ilgili genel tanım ve teoremler verilmiştir.

3.1 Klasik Metrik Uzaylar

Tanım 3.1.1:[15] X boş olmayan herhangi bir küme olmak üzere $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall x, y, z \in X$ için;

$$i) d(x, y) \geq 0$$

$$ii) d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$iii) d(x, y) = d(y, x)$$

$$iv) d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad (\text{Üçgen Eşitsizliği})$$

koşullarını sağlıyor ise d fonksiyonuna X kümesi üzerinde metriktir denir. Üzerinde bir d metriği ile tanımlı olan uzaya da metrik uzay denir ve genellikle (X, d) veya X_d simgeleri ile gösterilir. X kümesinin elemanlarına da (X, d) metrik uzayının noktaları denir.

Metrik tanımındaki (ii) koşulunun sağlanmaması durumunda (ii) koşulu yerine;

$$(ii)' \forall x \in X \text{ için } d(x, x) = 0$$

koşulu alınırsa $(i), (ii)', (iii)$ ve (iv) koşullarını sağlayan d fonksiyonuna yarı-metrik, uzaya da yarı-metrik uzay denir.

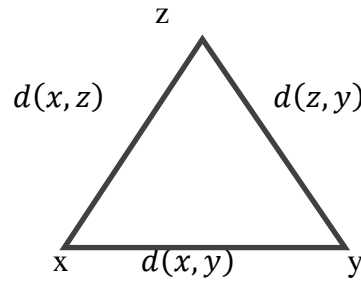
Uyarı 3.1.2:[15] Boştan farklı herhangi bir X kümesi üzerinde farklı metrikler tanımlanabilir. Böylece farklı metrik uzaylar elde edilir.

Uyarı 3.1.3:[15] d metrik fonksiyonuna genellikle uzaklık fonksiyonu da denilir. $d(x, y)$ değeri d fonksiyonuna göre x ve y noktaları arasındaki uzaklığı belirtir.

Uyarı 3.1.4:[15] Doğal olarak $x, y \in X$ olmak üzere bu noktalar arasındaki uzaklık negatif olmayan bir sayıdır. (ii) koşulundan $\forall x \in X$ için $d(x, x) = 0$ ve

$x \neq y$ olduğunda da $d(x, y) > 0$ olduğu görülmektedir. Diğer yandan (iii) koşulu gereği x noktasının y noktasına olan uzaklığı ile y noktasının x noktasına olan uzaklığı aynıdır. Yani x ve y noktaları arasındaki uzaklık bunların sırasından bağımsızdır.

Uyarı 3.1.5:[15] Ayrıca x noktasının y noktasına olan uzaklığı, x noktasının üçüncü bir z noktasına olan uzaklığı ile y noktasının z noktasına olan uzaklığının toplamından daha büyük olamaz. (iv) koşuluna üçgen eşitsizliği denmesinin sebebi, Euclid düzleminde bir üçgenin herhangi bir kenarının uzunluğunun diğer iki kenarının uzunlukları toplamından daha büyük olamayacağıdır.



Tümevarım ile üçgen eşitsizliğinden $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ olmak üzere $d(x_1, x_n) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + \dots + d(x_{n-1}, x_n)$ genelleştirilmiş üçgen eşitsizliği elde edilir.

Uyarı 3.1.6:[15] Aslında (i) koşuluna gerek yoktur. Diğer üç koşul yardımı ile bu koşul elde edilebilir. Gerçekten de;

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

eşitliğinde y yerine x alınırsa ve üçüncü koşul dikkate alınırsa,

$$0 = d(x, x) \leq d(x, z) + d(z, x) = d(x, z) + d(x, z) = 2d(x, z)$$

$\Rightarrow 0 \leq 2d(x, z) \Rightarrow d(x, z) \geq 0$ elde edilir.

Örnek 3.1.7:[15] X boş olmayan herhangi bir küme olmak üzere; $\forall x, y \in X$ için;

$$d_A: X \times X \rightarrow \mathbb{R} \quad d_A(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$$

olarak tanımlanan d_A fonksiyonu X üzerinde bir metriktir ve dolayısıyla (X, d_A) bir metrik uzaydır. Bu şekilde tanımlanan d_A metriğine ayrık metrik, (X, d_A) ikilisine de ayrık metrik uzay denilir.

Şimdi d_A fonksiyonunun metrik koşullarını gerçeklediğini görelim:

$$(i) \ x = y \Rightarrow d_A(x, y) = d_A(x, x) = 0$$

$$x \neq y \Rightarrow d_A(x, y) = 1$$

Buradan $\forall x, y \in X$ için $d(x, y) \geq 0$ koşulunun sağlandığı görülür.

$$(ii) \ d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$$

$$(iii) \ x = y \Rightarrow d(x, y) = d(x, x) = 0 \quad \text{ve} \quad d(y, x) = d(x, x) = 0$$

$$\Rightarrow d(x, y) = d(y, x)$$

$$x \neq y \Rightarrow d(x, y) = 1 = d(y, x)$$

$$(iv) \ x = y \Rightarrow d_A(x, y) = 0$$

olur ve dolayısıyla;

$$d_A(x, z) + d_A(z, y) \geq d_A(x, y)$$

eşitsizliği bu durumda sağlanır.

$x \neq y \Rightarrow x \neq z$ veya $y \neq z$ hallerinden en az biri sağlanacağından $d_A(x, z) + d_A(z, y)$ ifadesinin değeri 1 ya da 2 olur. Halbuki $d_A(x, y) = 1$ dir. Dolayısıyla bu durumda da üçgen eşitsizliği sağlanır.

Bu örnek boş olmayan her bir kümenin bir metrik uzay olarak düşünülebileceğini göstermektedir.

Teorem 3.1.8[16] (Cauchy Eşitsizliği)

$X = \mathbb{R}$ veya $X = \mathbb{C}$ olmak üzere $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n \in X$ olsun. Bu durumda; $\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n |y_i|^2}$ dir.

İspat:

$$f(t) = \sum_{i=1}^n (|x_i|t + |y_i|)^2$$

şeklinde tanımlı $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ikinci derece polinomu tanımlayalım. $\forall t \in \mathbb{R}$ için $f(t) \geq 0$ olduğundan,

$$f(t) = \sum_{i=1}^n (|x_i|t + |y_i|)^2 = t^2 \sum_{i=1}^n |x_i|^2 + 2t \sum_{i=1}^n |x_i y_i| + \sum_{i=1}^n |y_i|^2 \geq 0$$

dır. $\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \geq 0$ olduğundan f polinomunun iki farklı reel kökü yoktur. Böylece

f' nin diskriminantı pozitif olamaz. Bu durumda;

$$(2 \sum_{i=1}^n |x_i y_i|)^2 - 4(\sum_{i=1}^n |x_i|^2)(\sum_{i=1}^n |y_i|^2) = 4(\sum_{i=1}^n |x_i y_i|)^2 - 4(\sum_{i=1}^n |x_i|^2)(\sum_{i=1}^n |y_i|^2) \leq 0$$

olur. Buradan;

$$(\sum_{i=1}^n |x_i y_i|)^2 \leq (\sum_{i=1}^n |x_i|^2)(\sum_{i=1}^n |y_i|^2)$$

$$\text{Yani; } \sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n |y_i|^2}$$

elde edilir.

Tanım 3.1.10: [17] (X, d) bir metrik uzay ve N, X 'in boştan farklı bir alt kümesi olsun. $d_N: N \times N \rightarrow \mathbb{R}$, $d_N(x, y) = d(x, y) \forall x, y \in N$ biçiminde tanımlanan d_N metriğine d 'nin N alt kümesine kısıtlanması denir. d_N , N de bir metriktir. Ayrıca (X, d_N) metrik uzayına da (X, d) metrik uzayının alt metrik uzayı denir.

Tanım 3.1.11:[18] (X, d) metrik uzay, $x_0 \in X$, $r \in \mathbb{R}^+$ verilsin. $d(x_0, x) < r$ koşulunu sağlayan $x \in X$ noktalarının kümesine x_0 noktasının r komşuluğu denir ve $B_d(x_0, r)$ ile gösterilir.

$$B_d(x_0, r) = \{x \in X | d(x_0, x) < r\}$$

dir.

Tanım 3.1.12: [18] (X, d) metrik uzay, $x_0 \in X$ ve $r > 0$ verilsin.

$S(x_0; r) \equiv \{x \in X | d(x_0, x) = r\}$ kümesine x_0 merkezli r yarıçaplı küre (yuvar) denir.

$B(x_0, r) \equiv \{x \in X | d(x_0, x) < r\}$ kümesine x_0 merkezli r yarıçaplı açık top (yuvar) denir.

$B[x_0, r] \equiv \{x \in X | d(x_0, x) \leq r\}$ kümesine x_0 merkezli r yarıçaplı kapalı top (yuvar) denir.

Örnek 3.1.13:[18] (X, d) ayrık metrik uzay, $x_0 \in X$ olsun.

$S(x_0; 1) \equiv \{x \in X | d(x_0, x) = 1\} = X - \{x_0\}$ dir. Fakat $r > 0$ ve $r \neq 1$ için

$S(x_0; r) \equiv \{x \in X | d(x_0, x) = r\} = \emptyset$

$r > 1$ için; $B[x_0, r] \equiv B(x_0, r) \equiv B[x_0, 1] \equiv X$ ve

$0 < r < 1$ için; $B[x_0, r] \equiv B(x_0, r) \equiv B[x_0, 1] \equiv \{x_0\}$.

Tanım 3.1.14:[15] (X, d) metrik uzay, A X ' in boştan farklı bir alt kümesi olsun. Herhangi bir $x \in X$ noktasının A kümesine olan uzaklığı $d(x, A)$ simgesi ile gösterilir ve

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a) | a \in A\}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 3.1.15:[19] (X, d) metrik uzay, A ve B X 'in boştan farklı iki alt kümesi olsun. O halde A ve B kümeleri arasındaki uzaklık $d(A, B)$ ile gösterilir ve

$$d(A, B) = \inf\{d(x, y) | x \in A, y \in B\}$$

biçimindedir.

Tanım 3.1.16:[19] (X, d) metrik uzay, $A \subseteq X$ ve $A \neq \emptyset$ olsun.

(a) A 'nın çapı $\text{çap}(A)$ ile gösterilir ve $\text{çap}(A) = \sup\{d(x, y) | x, y \in A\}$ biçiminde tanımlanır. Supremumun sonlu olmadığı yerlerde A sonsuz çaplıdır denir. Aksi taktirde A sonlu çaplıdır.

(b) A alt kümesinin çapı sonlu ise A kümesine sınırlı küme denir. Aksi taktirde A kümesine sınırsız küme denir.

Metrik uzayın sınırlı veya sınırsız olmasına göre X kümesine sınırlıdır veya sınırsızdır denir. (X, d) sınırlı ise d ' ye X ' de sınırlı metrik denir.

Önerme 3.1.17:[20] (X, d) bir metrik uzay, A kümesi X ' in boş kümeden farklı bir alt kümesi ve $x, y, z \in X$ olsun.

$$(a) |d(x, y) - d(x, z)| \leq d(y, z)$$

$$(b) |d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$$

olduğunu gösteriniz.

İspat: (a) $\forall x, y, z \in X$ için d bir metrik uzay olduğundan

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \Rightarrow d(x, y) - d(x, z) \leq d(y, z) \quad (1)$$

ve

$$\begin{aligned} d(x, z) &\leq d(x, y) + d(y, z) \Rightarrow d(x, z) - d(x, y) \leq d(y, z) \Rightarrow \\ &-(d(x, y) - d(x, z)) \leq d(y, z) \end{aligned} \quad (2)$$

dir. Böylece (1) ve (2) den $|d(x, y) - d(x, z)| \leq d(y, z)$ elde edilir.

(b) $\forall a \in A$ için $d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a)$ dır. Böylece $a \in A$ için

$d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, a)$ ve dolayısıyla $a \in A$ için $d(x, A) - d(x, y) \leq d(y, a)$ dır. O halde $d(x, A) - d(x, y)$ sayısı $\{d(y, a) | a \in X\}$ kümesinin bir alt sınırıdır. Dolayısıyla $d(x, A) - d(x, y) \leq d(y, A)$ dır. O halde ;

$$d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y)$$

dir. Benzer şekilde $d(y, A) - d(x, A) \leq d(x, y)$ olduğu gösterilir. Böylece ;

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$$

dir.

Teorem 3.1.18:[19] (X, d) bir metrik uzay ve $A, B \in X$ olsun.

$$(a) A \subseteq B \Rightarrow \text{çap}(A) \leq \text{çap}(B)$$

$$(b) a \in A, b \in B \Rightarrow 0 \leq d(A, B) \leq d(a, b) \leq \text{çap}(A \cup B)$$

$$(c) x, y \in X \Rightarrow |d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$$

$$(d) \text{çap}(A \cup B) \leq \text{çap}(A) + \text{çap}(B) + d(A, B)$$

$$(e) A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow \text{çap}(A \cup B) \leq \text{çap}(A) + \text{çap}(B)$$

$$(f) \text{çap}(A) = 0 \Leftrightarrow A \text{ tek elemanlıdır.}$$

İspat: (a), (b) ve (f) nin ispatı açıktır.

(c) Eğer $d(x, A) = d(y, A)$ ise $0 \leq d(x, y)$ elde edilir ki bu metrik uzay tanımından doğrudur. Biz $d(x, A) \neq d(y, A)$ alalım ve $d(x, A) > d(y, A)$ ve keyfi $\varepsilon > 0$ olsun. $d(y, A) = \inf\{d(y, a) | a \in A\}$ tanımından $a \in A$ vardır öyle ki

$d(y, A) < d(y, A) + \varepsilon$ dir. O halde;

$$|d(x, A) - d(y, A)| = d(x, A) - d(y, A) < d(x, A) - d(y, a) + \varepsilon \leq$$

$$\leq d(x, a) - d(y, a) + \varepsilon \quad \{d(x, A) \leq d(x, a)\}$$

$$\leq d(x, y) + \varepsilon \quad \{\text{Önerme 3.1.17 (b) den dolayı}\}$$

O halde $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$ dir.

(d) $\text{çap}(A \cup B) > \text{çap}(A) + \text{çap}(B) + d(A, B)$ olsun. Supremumun özelliğinden $x, y \in A \cup B$ vardır öyle ki

$$d(x, y) > \text{çap}(A) + \text{çap}(B) + d(A, B) \quad (i)$$

dir. Fakat x ve y ikisi birden A 'ya ait olamayacağından

$$d(x, y) \leq \text{çap}(A) \leq \text{çap}(A) + \text{çap}(B) + d(A, B) \quad (i) \text{ ye çelişki.}$$

Benzer şekilde $x, y \notin B \times B$ olsun. O halde x ve y 'nin biri A 'ya diğeri B 'ye aittir.

$x \in A$, $y \in B$ alalım. Şimdi (i) de

$$d(x, y) - \text{çap}(A) - \text{çap}(B) > d(A, B) = \inf\{d(a, b) | a \in A, b \in B\}$$

ve infimumun özelliğinden $a, b \in A \times B$ vardır öyle ki

$$d(a, b) < d(x, y) - \text{çap}(A) - \text{çap}(B) \quad (ii)$$

Fakat elimizde

$$d(x, y) \leq d(x, a) + d(a, b) + d(b, y) \leq \text{çap}(A) + d(a, B) + \text{çap}(B)$$

$$\{x, a \in A \text{ ve } b, y \in B\}$$

$$\Rightarrow d(a, b) \geq d(x, y) - \text{çap}(A) - \text{çap}(B) \quad (ii)' \text{ ye karşıt.}$$

O halde $\text{çap}(A \cup B) \leq \text{çap}(A) + \text{çap}(B) + d(A, B)$ dir.

(e) (d)' den $A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow d(A, B) = 0$ dır. O halde ,

$$\text{çap}(A \cup B) \leq \text{çap}(A) + \text{çap}(B)$$

dir. ■

3.2 Metrik Uzaylarda Yakınsaklık ve Süreklilik

Tanım 3.2.1:[21] (X, d) bir metrik uzay olsun. X ' de noktaların dizisi \mathbb{N} (Doğal Sayılar Kümesi) den X içine tanımlanan f fonksiyonudur. Diziyi $f(n) = x_n$, $\{x_n\}_{n \geq 1}$, $\{x_n\}$ veya $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ biçiminde gösterilir.

Tanım 3.2.2:[21] d, X ' de bir metrik ve $\{x_n\}$ X ' de bir dizi olsun. Her bir

$\varepsilon > 0$ için n_0 doğal sayısı vardır öyle ki $n \geq n_0$ olduğunda $d(x_n, x) < \varepsilon$ ise

$x \in X$ elemanına $\{x_n\}$ ' nin limiti denir.. Bu durumda $\{x_n\}$ dizisine x ' e yakınsaktır denir ve $x_n \rightarrow x$ sembolü ile gösterilir. Eğer böyle bir x elemanı yoksa $\{x_n\}$ dizisine ıraksaktır denir.

Uyarı 3.2.3:[21] \mathbb{R} (veya \mathbb{C}) de yakınsaklık tanımları ile d , \mathbb{R}' de metrik olmak üzere $x_n \rightarrow x \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0$ biçiminde yazabiliriz.

Uyarı 3.2.4:[21] $x \in X$ ve $x' \in X$ için $x_n \rightarrow x, x_n \rightarrow x'$ ise $x = x'$ dir. Gerçekten, $\varepsilon > 0$ için n_1, n_2 doğal sayıları vardır öyle ki $n \geq n_1$ olduğunda $d(x_n, x) < \varepsilon/2$ ve $n \geq n_2$ olduğunda $d(x_n, x') < \varepsilon/2$ dir. Sonuç olarak;

$n \geq \max\{n_1, n_2\}$ sağlandığında $d(x, x') \leq d(x_n, x) + d(x_n, x') < \varepsilon$ dir. Buradan anlıyoruz ki $d(x, x') \leq 0$. Bu yüzden $d(x, x') = 0$ ve $x = x'$ elde edilir. Bunun anlamı dizinin birden fazla limiti olamaz. Biz bunu $\lim x_n$ veya $\lim_n x_n$ veya $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ sembollerinden biri ile gösterebiliriz.

Tanım 3.2.5:[21] d, X ' de bir metrik olsun. Her bir $\varepsilon > 0$ için n_0 doğal sayısı vardır öyle ki $n \geq n_0$ ve $m \geq n_0$ olduğunda $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ ise X kümesinde $\{x_n\}_{n \geq 1}$ dizisine cauchy dizisi denir.

Önerme 3.2.6:[21] Metrik uzayda yakınsak dizi cauchy dizisidir.

İspat: $\{x_n\}$, d metriği ile X kümesinde bir dizi olsun ve x, X ' in elemanı olsun öyle ki $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. Keyfi bir $\varepsilon > 0$ için n_0 doğal sayısı vardır öyle ki $n \geq n_0$ olduğunda $d(x_n, x) < \varepsilon/2$ dir. Keyfi n ve m doğal sayılarını alalım ve $n \geq n_0$ ve $m \geq n_0$ olsun. O halde $d(x_n, x) < \varepsilon/2$ ve $d(x_m, x) < \varepsilon/2$ dir. Bu yüzden; $d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x_m, x) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$ dir. O halde yakınsak her dizi cauchy dizisidir.

Tanım 3.2.7:[22] (X, d_x) ve (Y, d_y) metrik uzaylar ve $f: X \rightarrow Y$ bir dönüşüm olsun.

- (a) Keyfi $\varepsilon > 0$ için $\delta > 0$ vardır öyle ki $d_x(x, x_0) < \delta$ iken $d_y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ ise f ' ye $x_0 \in X$ de süreklidir denir
- (b) f her $x_0 \in X$ ' e sürekli ise f ' ye süreklidir denir.

Tanım 3.2.8:[23] Her $\{x_n\} \subseteq X$ cauchy dizisi yakınsak ve yakınsadığı nokta X ' e ait ise (X, d) metrik uzayına tam metrik uzay denir.

3.3 Metrik Uzaylarda Açık Küme, Kapalı Küme Kavramları

Tanım 3.3.1:[23] (X, d) metrik uzay, $A \subset X$ olsun. Her bir $a \in A$ için a merkezli açık yuvarlar A kümesi tarafından kapsanıyorsa A ' ya açık küme denir.

Önerme 3.3.2:[23] Keyfi (X, d) metrik uzayı için;

- (a) \emptyset açıktır.
- (b) X açıktır.
- (c) X ' in açık alt kümelerinin keyfi birleşimi açıktır.
- (d) X ' in sonlu sayıda açık alt kümelerinin kesişimi açıktır.

Önerme 3.3.3:[23] Keyfi metrik uzayda açık yuvar açık kümedir.

Tanım 3.3.4:[23] (X, d) metrik uzayında A kümesinin tümleyeni açık ise A kümesine kapalıdır denir.

Önerme 3.3.5:[23] Keyfi metrik uzayda kapalı yuvar kapalı kümedir.

Önerme 3.3.6:[23] Keyfi (X, d) metrik uzayı için;

- (a) X kapalıdır.
- (b) \emptyset kapalıdır.
- (c) X ' in keyfi sayıda kapalı alt kümelerinin kesişimi kapalıdır.
- (d) X ' in sonlu sayıda kapalı alt kümelerinin birleşimi kapalıdır.

3.4: Bulanık Metrik Uzaylar

Tanım 3.4.1:[24] $*$: $[0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ ikili işlemleri aşağıdaki şartları sağlarsa $*$ işlemine sürekli $t - norm$ denir.

- (i) $*$ kapalı ve birleşmeli,
- (ii) $*$ sürekli,
- (iii) $\forall a \in [0,1]$ için $a * 1 = a$,
- (iv) $a, b, c, d \in [0,1]$ ve $a \leq c, b \leq d$ iken $a * b \leq c * d$.

Tanım 3.4.2:[25] X boştan farklı bir küme, $*$ sürekli $t - norm$ ve

$\mu: X^2 \times (0, \infty)$ un bulanık kümesi olsun. $(X, \mu, *)$ üçlüsü $\forall x, y, z \in X$,

$s, t > 0$ için aşağıdaki şartları sağlarsa $(X, \mu, *)$ üçlüsüne bulanık metrik uzay denir.

- (i) $\mu(x, y, t) > 0$;
- (ii) $\mu(x, y, t) = 1 \Leftrightarrow x = y$;
- (iii) $\mu(x, y, t) = \mu(y, x, t)$;
- (iv) $\mu(x, y, t) * \mu(y, z, s) \leq \mu(x, z, t + s)$;
- (v) $\mu(x, y, -): (0, \infty) \rightarrow [0,1]$ sürekli.

Eğer $(X, \mu, *)$ bulanık metrik uzaysa $(\mu, *)$ veya sadece μ, X 'de bulanık metriktir.

Bulanık mantıkta sürekli $t - normlar \wedge$ ile gösterilen minimum, \cdot ile gösterilen genel çarpım ve $\mathcal{L}(x \mathcal{L} y = \max\{0, x + y - 1\})$ ile gösterilen *Lukasiewicz*

$t - normu$ dur. Onlar aşağıdaki eşitsizlikleri sağlarlar:

$$x \mathcal{L} y \leq x \cdot y \leq x \wedge y \text{ ve her bir } * t - normu \text{ için}$$

$$x * y \leq x \wedge y$$

Lemma 3.4.3:[25] $\mu(x, y, -)$ reel fonksiyonu $\forall x, y \in X$ için artandır.

Örnek 3.4.4:[25] (X, d) metrik uzay olsun. $\mu_d, X^2 \times (0, \infty)$ 'da tanımlanan bulanık küme,

$$\mu_d(x, y, t) = \frac{t}{t + d(x, y)}$$

olsun. O halde (μ_d, \cdot) 'e X bulanık kümesinde standart bulanık metrik denilir.

Tanım 3.4.5:[26] $(X, \mu, *)$ bulanık metrik uzay olsun.

- (1) X 'de $\{x_n\}$ dizisine $\forall t > 0$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(x_n, x, t) = 1$ ise $x \in X$ noktasına yakınsaktır denir ve $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ ile gösterilir.
- (2) X 'de $\{x_n\}$ dizisine $\forall t > 0$ ve $p > 0$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(x_{n+p}, x_n, t) = 1$ ise cauchy dizisi denir.

(3) Her cauchy dizisinin yakınsak olduğu bulanık metrik uzaya tamdır denir.

Uyarı 3.4.6:[26] * sürekli olduğundan (iv) ' den bulanık metrik uzaydaki herhangi bir dizinin limitinin tek olduğu anlaşılır. $(X, \mu, *)$ aşağıdaki şart ile bulanık metrik uzaydır.

$$(vi) \quad \forall x, y \in X \text{ için } \lim_{t \rightarrow \infty} \mu(x, y, t) = 1 .$$

Lemma 3.4.7:[26] $\{y_n\}$ dizisi (vi) şartı ile $(X, \mu, *)$ bulanık metrik uzayında bir dizi olsun. $q \in (0,1)$ sayısı $\forall t > 0$ ve $n = 1,2,3, \dots$ için

$$\mu(y_{n+2}, y_{n+1}, qt) \geq \mu(y_{n+1}, y_n, t) \quad (*)$$

ise $\{y_n\}$ X ' de cauchy dizisidir.

İspat: $t > 0$ ve $q \in (0,1)$ için

$$\mu(y_2, y_3, qt) \geq \mu(y_1, y_2, t) \geq \mu(y_0, y_1, t/q) \quad \text{veya} \quad \mu(y_2, y_3, t) \geq \mu(y_0, y_1, t/q^2)$$

dir. (*) şartı ile tümevarımdan $\forall t > 0$ ve $n = 1,2,3, \dots$ için

$$\mu(y_{n+1}, y_{n+2}, t) \geq \mu(y_1, y_2, t/q^n) \quad (**)$$

Böylece (**) ve (iv) ' den keyfi pozitif p tamsayısı ve $t > 0$ reel sayısı ile,

$$\begin{aligned} \mu(y_n, y_{n+p}, t) &\geq \mu(y_n, y_{n+1}, t/p) \geq \text{p-kez} \dots \geq \mu(y_{n+p-1}, y_{n+p}, t/p) \geq \\ &\mu(y_1, y_2, t/pq^{n-1}) \geq \text{p-kez} \dots \geq \mu(y_1, y_2, t/pq^{n+p-2}) \text{ dir.} \end{aligned}$$

Böylece (vi)' dan; $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(y_n, y_{n+p}, t) \geq 1 \geq \text{p-kez} \dots \geq 1 .$

$\{y_n\}$ X ' de cauchy dizisidir. Bu ispatı tamamlar ■

Lemma 3.4.8:[26] $\forall x, y \in X$, $t > 0$ ve $q \in (0,1)$ sayısı için

$$\mu(x, y, qt) \geq \mu(x, y, t) \text{ ise } x = y \text{ dir.}$$

Tanım 3.4.9:[26] Bulanık metrik uzayda $x_n \rightarrow x$, $y_n \rightarrow y$ olduğunda her bir $t > 0$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(x_n, y_n, t) = \mu(x, y, t)$ ise μ fonksiyonu süreklidir.

Tanım 3.4.10:[27] $(X, \mu, *)$ bulanık metrik uzay, $r \in (0,1)$ ve $A \in X$ olsun. X ' de $S(A, r)$ ve $\bar{S}(A, r)$ aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$S(A, r) = \{B: B \in X, \mu(B, A) < r\}$$

$$\bar{S}(A, r) = \{B: B \in X, \mu(B, A) \leq r\}$$

$S(A, r)$ ve $\bar{S}(A, r)$ kümelerine sırasıyla A merkezli r yarıçaplı bulanık-açık küre (yuvar) ve bulanık -kapalı küre (yuvar) denir. $\varepsilon > 0$ yarıçapı ile bulanık küresel komşuluk veya bulanık komşuluk $S(A, \varepsilon)$ ile gösterilir. Açıktır ki, $0 < r_1 < r_2$

ise $S(A, r_1) \subset S(A, r_2) \subset \bar{S}(A, r_2)$.

3.5: Bulanık Metrik Uzaylarda Bazı Kavramlar

Tanım 3.5.1:[27] $G \subset X$ olsun. $\forall A \in G$ için $\exists r > 0$ vardır öyle ki

$S(A, r) \subseteq G$ ise G ' ye bulanık açık küme denir. \emptyset ve X ' in bulanık açık küme oldukları açıktır.

Teorem 3.5.2:[27] $(X, \mu, *)$ bulanık metrik uzay olsun. O halde her bir bulanık açık küre bulanık açık kümedir.

İspat: $S(A, r)$, $(X, \mu, *)$ ' da bulanık açık küre olsun. $B \in S(A, r)$ alalım.

$B \in S(A, r)$ ise tanımdan $\mu(B, A) < r$ dir. Buradan $r_1 = r - \mu(B, A)$ iken $S(B, r_1) \subseteq S(A, r)$ dir. Buradan teorem ispatlanır ■

Teorem 3.5.3:[27] $(X, \mu, *)$ bulanık metrik uzay olsun. X ' in G alt kümesi bulanık açık kürelerin birleşimi şeklinde yazılabiliyorsa bulanık açık kümedir denir.

İspat: İspatın ilk kısmı açıktır. Biz sadece tersini ispatlayacağız. G kümesi bulanık açık kürelerin birleşimi olsun. Eğer $X = \emptyset$ ise ispatı tamamlar.

$X \neq \emptyset, G \neq \emptyset, B \in G$ olsun. G kümesi bulanık açık kürelerin birleşimi olduğundan \exists bulanık açık küre $S(A, r) \in X$ vardır öyle ki $B \in S(A, r)$ dir. Bulanık açık küre bulanık açık küme olduğundan $\exists r_1 > 0$ öyle ki $S(B, r_1) \subseteq S(A, r) \Rightarrow S(B, r_1) \subseteq G \Rightarrow G$ bulanık açıktır ■

Teorem 3.5.4:[27] $(X, \mu, *)$ bulanık metrik uzayında aşağıdakiler sağlanır.

- (i) Keyfi sayıda bulanık açık kümelerin birleşimi bulanık açıktır.
- (ii) Sonlu sayıda bulanık açık kümelerin kesişimi bulanık açıktır.

İspat: (i) Açıktır.

(ii) $G_i = 1, 2, 3, \dots, n$ X' de sonlu sayıda bulanık açık kümeler olsun.

$G = \bigcap_{i=1}^n G_i$ olsun. $G_i = \emptyset$ ise $\forall i$ için ispat açıktır. $G \neq \emptyset$ olsun. O halde $A \in G$ alalım. Buradan $\forall i$ için $A \in G_i$ dir. Fakat $\forall i$ için G_i bulanık açık olduğundan $\exists r_i > 0$ vardır öyle ki $S(A, r_i) \subseteq G_i$ dir. Eğer $r = \min_i \{r_i\}$ ise o halde $\forall i, S(A, r) \subseteq G_i \Rightarrow S(A, r) \subseteq G \Rightarrow G$ bulanık açıktır.

Sonuç 3.5.5:[27] $(X, \mu, *)$ bulanık metrik uzayında her bulanık açık küre (veya bulanık kapalı küre) boştan farklıdır.

Tanım 3.5.6:[27] $(X, \mu, *)$ bulanık metrik uzay olsun. $A \in X$ elemanına her A merkezli bulanık açık küresi G' nin en az bir elemanını içeriyorsa X' in G alt kümesinin bulanık bağlı noktası denir.

Bulanık bağlı noktalar iki tanedir.

(i) Bulanık limit noktası veya bulanık birikim noktası .

(ii) Bulanık yalıtım (isole) noktası

Tanım 3.5.7:[27] $(X, \mu, *)$ bulanık metrik uzay olsun. $A \in X$ elemanına, A merkezli her bulanık açık küre G' nin A' dan başka en az bir elemanını içeriyorsa X' in G alt kümesinin bulanık limit noktası veya bulanık birikim noktası denir.

Tanım 3.5.8:[27] X' in G alt kümesinin A bulanık bağlı noktasına, G' nin A noktasını içermeyen en az bir tane A merkezli bulanık açık küresi varsa bulanık yalıtım noktası denir. G' nin her elemanı bulanık yalıtım noktası ise G' ye bulanık yalıtım (izole) kümesi denir.

$(X, \mu, *)$ bulanık metrik uzay ve $G \subseteq X$ olsun. $A \in X$ olduğunda A ve G arasındaki uzaklık :

$$d(A, G) = \inf\{\mu(A, y) : y \in G\}$$

biçiminde tanımlanır.

Teorem 3.5.9:[27] $(X, \mu, *)$ bulanık metrik uzayının A elemanı $d(A, G) = 0$ koşulunu sağlıyorsa X' in G alt kümesinin bulanık bağlı noktasıdır.

İspat: $d(A, G) = \inf\{\mu(A, y) : y \in G\}$. Bu yüzden $d(A, G) = 0 \Rightarrow$ Her $S(A, r)$ bulanık açık küresi G' nin bulanık bağlı noktasının A olduğu yerde G' nin elemanını içerir. Tersine, A, G' nin bulanık bağlı noktası ise ya A, G' nin bulanık yalıtım (izole) noktasıdır ya da G' nin bulanık limit noktasıdır. İki durumda da $d(A, G) = 0$. Buradan teorem ispatlanmış olur ■

Tanım 3.5.10:[27] $(X, \mu, *)$ bulanık metrik uzay ve G, X' in keyfi bir alt kümesi olsun. X' de G' nin bütün bulanık limit noktalarının kümesine X' de G' nin bulanık türev kümesi denir. Bu küme G' ile gösterilir.

Tanım 3.5.11:[27] $(X, \mu, *)$ bulanık metrik uzay ve $G \subseteq X$ olsun. X' de G' nin bütün bulanık yalıtım noktalarının kümesine bulanık kapalıdır denir ve \bar{G} ile gösterilir. Böylece A, G' ye aitse her A merkezli bulanık açık küre G' nin elemanını içerir ve tersi de doğrudur.

Tanım 3.5.12:[27] $(X, \mu, *)$ bulanık metrik uzay, $A \in X$ olsun. G' de içeren bulanık açık küre $S(A, r)$ varsa X' de G alt kümesinin bulanık iç (interior) kümesi denir. G' nin bütün bulanık iç (interior) noktalarının kümesine G' nin bulanık içi (interior) denir ve $X_{int}(G)$ ile gösterilir. Bir de $X_{int}(G)$ bulanık açık kümedir.

Tanım 3.5.13:[27] $(X, \mu, *)$ bulanık metrik uzay $A \in X$ olsun. A kümesi G' nin tümleyeninin bulanık açık (interior) noktası ise X' de G alt kümesinin bulanık dış (exterior) kümesi denir. G' nin bütün bulanık dış (exterior) noktalarının kümesine G' nin bulanık dış kümesi denir ve $X_{ext}(G)$ ile gösterilir.

Tanım 3.5.14:[27] $(X, \mu, *)$ bulanık metrik uzay olsun. X, G' nin bulanık kapalı kümesi ise X' de G alt kümesine bulanık her yerde yoğun denir. $(X, \mu, *)$ bulanık metrik uzayının G alt kümesi G' nin bulanık kapallığı bulanık iç (interior) noktalarına sahip değilse X' de bulanık hiçbir yerde yoğun denir.

Tanım 3.5.15:[27] $(X, \mu, *)$ bulanık metrik uzay olsun. X' de G alt kümesi, X' de G' nin tümleyeni bulanık açık ise X' in bulanık kapalı kümesi denir.

Sonuç 3.5.16:[27] (i) Bulanık kapalı kümenin tümleyeni bulanık açıktır ve bulanık açık kümenin tümleyeni bulanık kapalıdır.

(ii) \emptyset ve X' in her ikisi de hem bulanık açıktır hem de bulanık kapalıdır.

Teorem 3.5.17:[27] Bulanık metrik uzayda her bulanık kapalı küre bulanık kapalı kümedir.

İspat: $(X, \mu, *)$ bulanık metrik uzay ve $\bar{S}(A, r) = \{B: B \in X, \mu(B, A) \leq r\}$ olsun. Biz bulanık kapalı olan $\bar{S}(A, r)$ ' nin tümleyeninin $\{\bar{S}(A, r)\}^C$ nin bulanık açık olduğunu göstereceğiz. Keyfi $B \in \{\bar{S}(A, r)\}^C$ alalım. O halde $\mu(B, A) \not\leq r$ olduğundan $\mu(B, A) > r$. $\mu(B, A) = r + 2\varepsilon$, $\varepsilon > 0$ olsun. Şimdi biz $\{\bar{S}(A, r)\}^C$ de içeren $S(B, \varepsilon)$ bulanık açık küresini düşünelim. Çünkü $S(B, \varepsilon)$ ' nin her elemanı $r + \varepsilon$ dan daha büyük uzaklığa sahiptir.

Sonuç olarak, $\{\bar{S}(A, r)\}^C$ bulanık açık kümedir ve tersine $\bar{S}(A, r)$ bulanık kapalıdır ■

Teorem 3.5.18:[27] Bulanık metrik uzayda bulanık kapalı kümelerin keyfi sayıda ailelerinin kesişimi bulanık kapalıdır.

İspat: $(X, \mu, *)$ bulanık metrik uzayında bulanık kapalı kümelerin ailesi $\{G_\alpha\}$ olsun. $G = \bigcap_\alpha G_\alpha$ olsun. Açıktır ki, her bir α için G_α^C bulanık açık olduğundan

$G = \bigcup_\alpha G_\alpha^C$ de açıktır ve bulanık açık kümelerinin keyfi sayıda birleşimi bulanık açıktır. Bu yüzden G^C bulanık açıktır. Buradan G bulanık kapalı olur. İspat tamamlanmış oldu ■

Teorem 3.5.19:[27] Bulanık metrik uzayda bulanık kapalı kümelerinin sonlu sayıda ailelerinin birleşimi bulanık kapalıdır.

İspat: $(X, \mu, *)$ bulanık metrik uzayında bulanık kapalı kümelerinin sonlu ailesi $\{G_1, G_2, \dots, G_n\}$ olsun. $G = \bigcup_{\alpha=1}^n G_\alpha$ olsun. O halde her G_α^C bulanık açık olduğundan $G^C = \bigcap_{\alpha=1}^n G_\alpha^C$ bulanık açıktır ve X ' de bulanık açık kümelerinin sonlu sayıda arakesiti bulanık açıktır. Bu yüzden, G bulanık kapalıdır ■

4. BÖLÜM

Bu bölümde lineer uzay ve lineer metrik uzay kavramları, bunlarla ilgili genel tanım ve teoremler verilmiştir.

4.1 Lineer Uzaylar

Tanım 4.1.1:[28] $X \neq \emptyset$ bir küme ve F ' de bir cisim olsun.

$$+ : X \times X \rightarrow X \quad (x, y) \rightarrow x + y \quad \text{ve} \quad \cdot : F \times X \rightarrow X \quad (\lambda, x) \rightarrow \lambda \cdot x$$

fonksiyonları aşağıdaki koşulları sağlarsa, X ' e F üzerinde bir lineer uzay denir.

$$\forall x, y, z \in X, \forall \lambda, \mu \in F \text{ için;}$$

- (1) $x + y = y + x$, (+ işleminin değişme özelliği)
- (2) $(x + y) + z = x + (y + z)$, (+ işleminin birleşme özelliği)
- (3) $\exists \theta \in X$ öyle ki $x + \theta = x$, (+ işleme göre etkisiz elemanın varlığı)
- (4) $\exists -x \in X$ öyle ki $x + (-x) = \theta$, (+ işleme göre ters elemanın varlığı)
- (5) $1 \cdot x = x$, (Birim elemanla çarpma özelliği)
- (6) $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$
- (7) $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$ (Skalerle çarpmanın dağılma özelliği)
- (8) $\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda \cdot \mu) \cdot x$ (Skalerle çarpmanın birleşme özelliği)

Burada $1 \in F$ cismin çarpma işlemine göre birim elemanıdır. $\lambda \cdot x$ bundan sonra λx ile gösterilecektir. İlk dört aksiom X ' in $+$ işlemine göre bir Abel grubu olduğunu gösterir. Geriye kalan dört aksiom ise skalerle çarpma aksiyomları olarak anılır. Bir grupta birim eleman ve her elemanın tersinin tek olduğu bilindiğine göre bu özellikler açık olarak lineer uzaylar için de geçerlidir.

Lineer uzaylar, üzerinde tanımlandıkları cisme göre isim alırlar. Örneğin; \mathbb{C} kompleks sayılar cismi üzerinde tanımlı ise kompleks lineer uzay, \mathbb{R} reel sayılar cismi üzerinde tanımlı ise reel lineer uzay gibi.

Örnek 4.1.2:[28] \mathbb{R}^n , \mathbb{R} üzerinde bir reel lineer uzaydır.

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ ise

$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$\lambda \cdot x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$ ile tanımlanır. Fakat $\lambda \in \mathbb{C}$ ise λx , \mathbb{R}^n 'ye ait olmayabilir. Yani \mathbb{R}^n kompleks lineer uzay değildir. X kümesi bir lineer uzay ise, X 'in elemanlarına vektör, \mathbb{C} cisminin elemanlarına da skaler denir. Skalerler vektörlere katsayı olarak gelecektir.

Tanım 4.1.3:[29] X kompleks lineer uzay olsun.

- (1) x vektörü için $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ kompleks sayıları vardır öyle ki $x = \sum_{i=1}^k \alpha_i x_i$ ise x_1, x_2, \dots, x_k 'nin lineer kombinasyonu denir.
- (2) $x_1, x_2, \dots, x_k \in X$ vektörleri için sıfırdan farklı $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ kompleks sayıları vardır öyle ki $\alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2 + \dots + \alpha_k \cdot x_k = 0 \dots (*)$ ise $x_1, x_2, \dots, x_k \in X$ vektörlerine lineer bağımlıdır denir.
- (3) Eğer * sadece $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$ için sağlanırsa $x_1, x_2, \dots, x_k \in X$ vektörlerine lineer bağımsızdır denir.

Uyarı 4.1.4:[29] (i) Eğer reel vektör uzayı ile ilgileniyorsak tanımlarda sadece $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ sayıları reel sayılar olarak değişir.

(ii) x_1, x_2, \dots, x_k bağımlı ise vektörlerden en az biri diğer vektörlerin lineer kombinasyonu biçiminde yazılır.

(iii) Vektörlerin kümesine 0 (sıfır) sayısı dahilse, küme bağımlıdır.

Tanım 4.1.5:[30] X bir lineer uzay ve $E \subset X$ olsun. $x \in E, y \in E$ ve $\forall \lambda \in X$ için $x + y \in E$ ve $\lambda \cdot x \in E$ ise E kümesine X lineer uzayının alt uzayı denir. Her X lineer uzayı iki alt uzaya sahiptir. Bunlardan ilki 0 (sıfır) elemanını içeren tek elemanlı küme, ikincisi ise X 'in kendisidir.

Teorem 4.1.6:[28] X bir lineer uzay ve $E \subset X$ olsun. $\forall x, y \in E$ ve $\forall \lambda, \mu \in X$ için $\lambda x + \mu y \in E$ ise E bir alt uzaydır.

Şimdi X bir lineer uzay I bir damga kümesi ve $(E_i)_{i \in I}$ 'de X 'in bir alt uzaylar ailesini gösterebiliriz. O halde $\bigcap_{i \in I} E_i = E$ de bir alt uzaydır.

X bir lineer uzay, $\emptyset \neq A \subset X$ olsun. A 'nın elemanlarının bütün sonlu lineer kombinasyonlarının kümesini yani;

$$A_L = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i : \forall i \in \mathbb{N} \text{ için } x_i \in A, \lambda_i \in \mathbb{C} \text{ ve } n \geq 1 \text{ sabit değil} \right\}$$

kümesini göz önüne alalım. Açık olarak $A \subset A_L$ ve A_L 'nin teorem 4.1.6' dan alt uzay olma koşullarını sağladığı kolayca gösterilebilir. Böylece A_L 'nin A 'yı kapsayan bir alt uzay olduğu anlaşılır. Üstelik A_L , A 'yı kapsayan en dar alt uzaydır. A_L 'ye A ile üretilen alt uzay da denilir.

Şimdi A_L 'nin A 'yı kapsayan en dar alt uzay olduğunu göstereyim.

E bir alt uzay ve $A \subset E$ olsun. $x \in A_L$, $\lambda_i \in \mathbb{C}$ ve $x_i \in A$ ($1 \leq i \leq n$) ise

$$x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$$

şeklinde dir. $x_1, x_2, \dots, x_n \in A \Rightarrow x_1, x_2, \dots, x_n \in E$ ve E alt uzay olduğundan

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = x \in E \Rightarrow A_L \subset E$$

dir.

Tanım 4.1.7:[28] X bir lineer uzay ve $A \subset X$ bir alt küme olsun. A 'yı kapsayan en dar alt uzaya A 'nın gereni denir ve $\text{span}A$ ile gösterilir.

Yukarıdaki tartışma $A_L = \text{span}A$ olduğunu gösterir. Ayrıca A 'yı kapsayan bütün alt uzayların ailesi $(E_i)_{i \in I}$ ise $\text{span}A = A_L = \bigcap_{i \in I} E_i$ sonucu elde edilir.

Örnek 4.1.8:[28] X bir lineer uzay, $\emptyset \subset X$ olduğuna göre $\text{span}\emptyset = \{\theta\}$

(θ lineer uzayın sıfırıdır) dir.

Tanım 4.1.9:[29] X bir lineer uzay olsun. X uzayı n tane lineer bağımsız vektör içeriyorsa X uzayına n -boyutludur denir.

Tanım 4.1.10:[29] Eğer her k pozitif tamsayısı için X ' de k tane lineer bağımsız vektör bulabiliyorsa X lineer uzayı sonsuz boyutludur denir. Başka bir deyişle X lineer uzayı sonlu boyutlu değilse sonsuz boyutludur denir.

Tanım 4.1.11:[29] Sonlu e_1, e_2, \dots, e_k vektörlerinin kümesine X lineer uzayı için aşağıdaki iki şartı sağlarsa baz (Hamel Baz) denir.

(a) e_1, e_2, \dots, e_k vektörleri lineer bağımsız,

(b) X ' de her x vektörü baz vektörlerinin lineer kombinasyonu şeklinde

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_k e_k \quad (*)$$

yazılır.

Teorem 4.1.12:[29] $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_k e_k$ eşitliği tektir.

İspat: $x = \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2 + \dots + \eta_k e_k$ daha önceden elimizde vardı.

$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_k e_k$ olsun. Bunları alt alta çıkardığımızda;

$0 = (\eta_1 - \alpha_1)e_1 + (\eta_2 - \alpha_2)e_2 + \dots + (\eta_k - \alpha_k)e_k$ olur. e_1, e_2, \dots, e_k vektörleri lineer bağımsız olduğundan $\eta_1 = \alpha_1$, $\eta_2 = \alpha_2$, \dots , $\eta_k = \alpha_k$ olur ki buradan (*) tektir ■

Teorem 4.1.13:[29] Eğer X n -boyutlu ise e_1, e_2, \dots, e_n lineer bağımsız vektörlerinin keyfi kümesi bazdır.

İspat: $x \in X$ ise x, e_1, e_2, \dots, e_n lineer bağımlıdır.

$$\alpha x + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n = 0$$

e_1, e_2, \dots, e_n lineer bağımsız olduğundan $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$. Fakat $\alpha \neq 0$ dır. O halde;

$$x = \frac{\alpha_1}{\alpha} \cdot e_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha} \cdot e_2 + \dots + \frac{\alpha_n}{\alpha} \cdot e_n$$

dir. Böylece her x vektörü e_1, e_2, \dots, e_n vektörlerinin lineer kombinasyonu biçiminde ifade edilir.

Tanım 4.1.14:[28] X bir lineer uzay $A, B \subset X$, $\Lambda \subset \mathbb{C}$ olsun. İki kümenin toplamı ve çarpımı ;

- (i) $A + B = \{x + y | x \in A, y \in B\}$
- (ii) $\Lambda \cdot A = \{\lambda x | x \in A, \lambda \in \Lambda\}$ ile tanımlanır.

Bir $x \in X$ için $A + \{x\}$ yerine kısaca $A + x$ ve $\lambda \in \mathbb{C}$ olmak üzere $\{\lambda\} \cdot A$ yerine λA yazılır.

Tanım 4.1.15:[28] X bir lineer uzay $M \subset X$ bir alt uzay, $x \in X$ olsun.

$x + M'$ yi düşünelim. $E_x = x + M$ olsun. O halde $y \in E_x \Leftrightarrow x - y \in M$ dir. Buna göre $y \in E_x \Leftrightarrow x \in E_y$ olur.

Şimdi $\{E_x | x \in X\}$ kümesini göz önüne alalım. Bu küme üzerinde

$\forall x, y \in X, \forall \lambda \in \mathbb{C}$ için,

$$E_x + E_y = (x + M) + (y + M) = (x + y) + M$$

$$\lambda E_x = \lambda \cdot (x + M) = \lambda x + M = E_{\lambda x}$$

işlemlerini tanımlarsak bunlar altında $\{E_x | x \in X\}$ kümesi bir lineer uzaydır. $E_\theta = \theta + M = M$, $E_x + E_\theta = E_x$ olduğuna göre bu uzayın sıfırı M' dir.

Kısaca $X/M = \{E_x | x \in X\}$ uzayına M alt uzayına göre X' in bölüm uzayı denir.

$y \in E_x$ ise $x - y \in M$ olduğundan $x \equiv y(mod M) \Leftrightarrow x - y \in M$ ile \equiv bağıntısı tanımlayalım. Bu bağıntı X üzerinde bir denklik bağıntısıdır. E_x bu bağıntıya göre x' in denklik sınıfıdır. O halde bölüm uzayı \equiv bağıntısına göre bütün denklik sınıflarının kümesidir. Denklik sınıfları özelliğinden $x, y \in X$ ise ya $E_x = E_y$ ' dir veya $E_x \cap E_y = \emptyset$ dir.

$\{\theta\} \subset X$ bir alt uzay olduğuna göre $X/\{\theta\} = \{\{x\} | x \in X\}$ olduğundan X' in kendisi olarak düşünülebilir.

$X \subset X$ olduğundan $\forall x \in X$ için $E_x = x + X = x$ dir. O halde

$$X/X = \{x\} \text{ dir.}$$

Tanım 4.1.16:[28] X bir lineer uzay $x, y \in X$ olsun.

$L_{[x,y]} = \{tx + (1-t)y | t \in [0,1]\}$ kümesine x ile y 'yi birleştiren doğru parçası denir.

Tanım 4.1.17:[28] X bir lineer uzay, $E \subset X$ olsun.

- (i) $\forall x, y \in E$ için $L_{[x,y]} \subset E$ ise E' ye bir konveks alt küme,
- (ii) $\forall x, y \in E$ ve $|\lambda| + |\mu| \leq 1$ koşulu altında $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$ için $\lambda x + \mu y \in E$ ise E' ye mutlak konveks alt küme,
- (iii) $\forall x \in E$ ve $|\lambda| \leq 1$ koşulu altında $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ için $\lambda x \in E$ ise E' ye dengeli alt küme,
- (iv) $\forall x \in E, -x \in E$ ise E' ye simetrik alt küme denilir.

Teorem 4.1.18:[28] X bir lineer uzay $A, B \subset X$ konveks alt kümeler ise;

- (1) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $\lambda A + \mu B$ kümesi de konvekstir.
- (2) $\forall \alpha, \beta \in [0, \infty)$ için $\alpha A + \beta A = (\alpha + \beta)A$ dır.

İspat: (1) $u, v \in \lambda A + \mu B$ ise $u = \lambda a_1 + \mu b_1$ ve $v = \lambda a_2 + \mu b_2$.

$(a_1, a_2 \in A, b_1, b_2 \in B)$ şeklindedir. $t \in [0,1]$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} tu + (1-t)v &= t\lambda a_1 + t\mu b_1 + (1-t)\lambda a_2 + (1-t)\mu b_2 \\ &= \lambda[ta_1 + (1-t)a_2] + \mu[tb_1 + (1-t)b_2] \end{aligned}$$

A ve B konveks olduklarından $ta_1 + (1-t)a_2 \in A$ ve $tb_1 + (1-t)b_2 \in B \Rightarrow$

$\Rightarrow tu + (1-t)v \in \lambda A + \mu B \Rightarrow \lambda A + \mu B$ konvekstir.

(2) $\alpha = 0$ veya $\beta = 0$ ise durum açıktır.

$\alpha > 0$ ve $\beta > 0$ olsun. $x \in (\alpha + \beta)A$ ise $x = (\alpha + \beta)a, a \in A$ dır. Böylece $x = \alpha a + \beta a \Rightarrow x \in \alpha A + \beta A \Rightarrow (\alpha + \beta)A \subset \alpha A + \beta A$ dır.

Şimdi $x \in \alpha A + \beta A$ olsun. O zaman $x = \alpha a_1 + \beta a_2$ ($a_1, a_2 \in A$) şeklindedir.

$$\frac{1}{\alpha + \beta} x = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} a_1 + \frac{\beta}{\alpha + \beta} a_2 \in A$$

dır. Çünkü $\frac{\alpha}{\alpha + \beta} + \frac{\beta}{\alpha + \beta} = 1$ dir. Böylece $x \in (\alpha + \beta)A \Rightarrow \alpha A + \beta A \subset (\alpha + \beta)A$

olur ki ispat tamamlanır ■

Tanım 4.1.19:[28] X, Y lineer uzaylar $f: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. $\forall x, x' \in X$ ve $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$ için $f(\lambda x + \mu x') = \lambda f(x) + \mu f(x')$ ise f ' ye bir lineer dönüşüm denir. Bu tanımı şu şekilde de yapabiliriz. Eğer f fonksiyonu aşağıdaki iki koşulu sağlarsa f ' ye bir lineer dönüşüm denir. Lineer dönüşüme homomorfizm de denilir.

$$(i) \quad \forall x, x' \in X \text{ için } f(x + x') = f(x) + f(x')$$

$$(ii) \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \text{ ve } \forall x \in X \text{ için } f(\lambda x) = \lambda f(x).$$

X ' den Y ' ye bütün lineer dönüşümlerin kümesini $L(X, Y)$ ile göstereceğiz.

Tanım 4.1.20:[28] X, Y lineer uzaylar, $f \in L(X, Y)$ olsun. $\{x \in X | f(x) = \theta\}$ kümesine f ' nin çekirdeği denir ve $Ker f$ ile gösterilir.

$Ker f = \{x \in X | f(x) = \theta\} = f^{-1}(\theta)$ olduğuna göre çekirdek en az bir elemanlıdır. f bire-bir ise $ker f = \{\theta\}$ dir ve üstelik $ker f$ ' in tek elemanlı olması bire-bir' lik için gerekli ve yeterli koşuldur.

Tanım 4.1.21:[28] X, Y lineer uzaylar $f \in L(X, Y)$ olsun. f fonksiyonu bire-bir ve örten ise f ' ye bir lineer izomorfizm denir. X ve Y arasında bir izomorfizm varsa bu iki uzay izomorftur denir. İzomorf uzaylar cebirsel olarak eş yapılıdır. f bir izomorfizm ise açık olarak f^{-1} ' de bir izomorfizmdir.

4.2: Lineer Metrik Uzaylar

Bu bölümde temel kaynağımız $\forall x, y \in \mathbb{C}$ için $d(x, y) = |x - y|$ ile verilen d metriği ile \mathbb{C} lineer uzaydır.

Eğer \mathbb{C} ' de keyfi a ve b noktalarını alırsak $x \rightarrow a$ ve $y \rightarrow b$ ise $x + y \rightarrow a + b$ olur. Çünkü;

$$d(x + y, a + b) = |(x + y) - (a + b)| = |x - a + y - b| \leq d(x, a) + d(y, b) \text{ dir.}$$

Bu durumda \mathbb{C} ' de toplama işleminin sürekli olduğu tanımlanabilir.

Aynı şekilde, eğer $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ ve keyfi $a \in \mathbb{C}$ seçersek $\lambda \rightarrow \lambda_0$ ve $x \rightarrow a$ ise $\lambda x \rightarrow \lambda_0 a$ dır. Çünkü,

$$\begin{aligned} d(\lambda x, \lambda_0 a) &= |\lambda x - \lambda_0 a| = |(\lambda - \lambda_0)(x - a) + \lambda_0(x - a) + (\lambda - \lambda_0)a| \\ &\leq |\lambda - \lambda_0|d(x, a) + |\lambda_0|d(x, a) + |\lambda - \lambda_0||a| \end{aligned}$$

Bu nedenle \mathbb{C} ' de skaler çarpma işleminin sürekli olduğunu söyleyebiliriz. Eğer X lineer uzay (genellikle kompleks skalerler ile, fakat bazı durumlarda reel durumlarda da olabilir) d X ' de bir metrik ise toplama işlemi her bir $a, b \in X$ ve her bir $\varepsilon > 0$ için $\delta = \delta(a, b, \varepsilon) > 0$ vardır öyle ki $d(x, a) + d(y, b) < \delta$ olduğunda $d(x + y, a + b) < \varepsilon$ ise (X, d) ' de sürekli denir.

Aynı şekilde (X, d) ' de skaler çarpım, her bir $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ ve her bir $a \in X$ ve $\varepsilon > 0$ için $\delta = \delta(\lambda_0, a, \varepsilon) > 0$ vardır öyle ki $|\lambda - \lambda_0| + d(x, a) < \delta$ olduğunda $d(\lambda x, \lambda_0 a) < \varepsilon$ ise sürekli denir. Diğer bir sabit, öteleme sabitidir (translation invariance). X lineer uzayında d metriği $d(x + z, y + z) = d(x, y) \quad \forall x, y, z \in X$ koşulunu sağlarsa d metriğine translation invariant denir. [31]

Örnek 4.2.1:[31] $d(x, y) = |x^3 - y^3|$ metriği reel lineer uzayda tanımlansın. Fakat d translation invariant değildir. Açık ki d metrik koşullarını sağlar. Fakat d metriği $d(1 + 1, 0 + 1) - d(1, 0) = d(2, 1) - d(1, 0) = 6$ olduğundan translation invariant değildir.

Örnek 4.2.2:[31] $\ell(p)$ metrik uzayını düşünelim. $\forall k \in \mathbb{N}$ için $0 < p_k \leq 1$,

$\ell(p) = \{x = (x_k) | \sum |x_k|^{p_k} < \infty\}$ $\ell(p)$ metrik uzayında verilen d metriği aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$d(x, y) = \sum |x_k - y_k|^{p_k} = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|^{p_k}, \quad 0 < p_k \leq \sup p_k = H < \infty$$

$\ell(p)$ s ' nin lineer alt uzayıdır. (s, X lineer uzayının alt uzayıdır.) Çünkü;

$$|x_k + y_k|^{p_k} \leq |x_k|^{p_k} + |y_k|^{p_k} \quad \text{ve} \quad |\lambda x_k|^{p_k} \leq \max(1, |\lambda|) \cdot |x_k|^{p_k} \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \text{ için.}$$

Şimdi d ' nin translation invariant olduğunu gösterelim.

$$d(x + z, y + z) = \sum |(x_k + z_k) - (y_k + z_k)|^{p_k} = d(x, y) \quad \forall x, y, z \in \ell(p)$$

Toplama sürekli, çünkü her $a, b \in \ell(p)$ için eğer $x, y \in \ell(p)$ ise o halde;

$$d(x + y, a + b) = \sum |(x_k + y_k) - (a_k + b_k)|^{p_k}$$

$$\leq \sum |x_k - a_k|^{p_k} + \sum |y_k - b_k|^{p_k} = d(x, a) + d(y, b)$$

Eğer $d(x, a) + d(y, b) < \delta$ ise o halde $d(x + y, a + b) < \varepsilon$ dir. Sonuç olarak skaler çarpım süreklidir. Çünkü;

$$d(\lambda x, \lambda_0 a) = \sum |\lambda - \lambda_0|(x - a) + \lambda_0(x - a) + (\lambda - \lambda_0)a|^p \leq \sum |\lambda - \lambda_0|^p |x - a|^p + \sum |\lambda_0|^p |x - a|^p + \sum |\lambda - \lambda_0|^p |a|^p = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3$$

Şimdi $\forall k \in \mathbb{N}$ için $|\lambda_0|^{p_k} \leq \max(1, \lambda_0) = M$.

$|\lambda - \lambda_0| < 1$ olsun. Bu nedenle $|\lambda - \lambda_0|^{p_k} < 1$ dir. O halde

$$\Sigma_1 \leq d(x, a)$$

ve

$$\Sigma_2 \leq M \cdot d(x, a)$$

$$\Sigma_3 \leq \sum_{k=1}^m |\lambda - \lambda_0|^{p_k} |a_k|^{p_k} + \sum_{k=m+1}^{\infty} |a_k|^{p_k} = A + B$$

dir.

$\varepsilon > 0$ alalım. O halde $\sum |a_k|^{p_k}$ yakınsaklığı için $m = m(\varepsilon, a) \in \mathbb{N}$ alalım öyle ki $B < \varepsilon/3$, $A < \varepsilon/3$ olduğu yerde $\lambda \rightarrow \lambda_0, A \rightarrow 0$ olur. $|\lambda - \lambda_0|$ yeteri kadar küçükse $0 < \alpha < 1$ için $|\lambda - \lambda_0| < \alpha$ diyelim.

Sonuç olarak, $\delta = \min(\alpha, \varepsilon/3(1 + M))$ dir. Eğer; $|\lambda - \lambda_0| + d(x, a) < \delta$ ise ;

$$d(\lambda x, \lambda_0 a) \leq d(x, a) + M \cdot d(x, a) + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = (1 + M)d(x, a) + \frac{2\varepsilon}{3} = \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Bu nedenle skaler çarpım $(\ell(p), d)$ metrik uzayında süreklidir.

Tanım 4.2.3:[10] X uzayı kompleks veya reel sayılardan biri ile bir lineer uzay olsun.

x, y elemanlarının toplamı $x + y$ biçiminde, λ skaleri ile x elemanın çarpımı λx biçiminde gösterilir. A ve B iki küme olmak üzere

$A + B = \{x + y | x \in A, y \in B\}$ ve $tA = \{tx | x \in A\}$ biçiminde olsun.

İkinci bölümde $d(x, y)$ reel değerli fonksiyonu ile X uzayının metrik uzay olduğunu incelemiştik. Buradaki X uzayı toplama ve çarpma işlemleri $d(x, y)$ metriği ile sürekli ise X uzayına lineer metrik uzay denir. Lineer metrik uzay (X, d) ile gösterilir. [10]

$U \subset X$ kümesine $\forall a$ sayısı için $|a| \leq 1$ iken $aU \subset U$ ise dengelidir denir. \mathcal{W} sıfırının keyfi komşuluğu \mathcal{V} sıfırının dengeli komşuluğunu içerir. Açıkçası çarpımın sürekliliği için \mathcal{V} sıfırının komşuluğu vardır öyle ki pozitif ε sayısı için $|a| < \varepsilon$ sağlandığında $a\mathcal{V} \subset \mathcal{V}$ olur. Bu nedenle $U = \bigcup_{|a| < \varepsilon} a\mathcal{V}$ kümesi \mathcal{W} ' de içerilir. U ' nın sıfırının dengeli komşuluğu olduğu kolayca gösterilebilir.

$d(x, y)$ ve $d'(x, y)$ metrikleri $\forall \varepsilon > 0$ ve $x \in X$ için $\delta, \delta' > 0$ vardır

öyle ki;

$$\{y: d'(x, y) < \delta\} \subset \{y: d(x, y) < \varepsilon\}$$

$$\{y: d(x, y) < \delta'\} \subset \{y: d'(x, y) < \varepsilon\}$$

olduğundan denktir.

X ' de $\{x_n\}$ dizisi için $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0$ ise $x \in X$ noktasına yakınsaktır denir.

$d(x, y)$ metriği $\forall x, y, z \in X$ olduğunda $d(x + z, y + z) = d(x, y)$ ise $d(x, y)$ metriğine invariant metrik denir.

Teorem 4.2.4:[32] (X, d) lineer metrik uzay olsun. O halde $d(x, y)$ metriğine denk olan $d'(x, y)$ invariant metriği vardır.

İspat: U sıfırın keyfi dengeli komşuluğu olsun. $U(1) = U$ ve

$$U(n) = U + \dots + U \text{ (n tane) olsun.}$$

Toplamanın sürekliliğinden $U\left(\frac{1}{2}\right)$ sıfırın komşuluğu vardır öyle ki

$$U\left(\frac{1}{2}\right) + U\left(\frac{1}{2}\right) \subset U(1). \text{ Elbette } U\left(\frac{1}{2}\right) \text{ dengelidir ve}$$

$$U\left(\frac{1}{2}\right) \subset K_{1/2} = \left\{x: p(x, 0) < \frac{1}{2}\right\} . \quad U\left(\frac{1}{2^n}\right) \text{ sıfırın dengeli komşuluğudur öyle ki}$$

$$U\left(\frac{1}{2^n}\right) + U\left(\frac{1}{2^n}\right) \subset U\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right) \quad (1)$$

$$U\left(\frac{1}{2^n}\right) \subset K_{1/2^n} = \left\{x: p(x, 0) < \frac{1}{2^n}\right\} \quad (2)$$

Keyfi ikili sayı r olsun. $i = 1, 2, \dots, n$, 0 veya 1' e eşit olan a_i için

$$r = n + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2} + \dots + \frac{a_n}{2^n}$$

$$U(r) = U(n) + a_1 U\left(\frac{1}{2}\right) + \dots + a_n U\left(\frac{1}{2^n}\right)$$

Gerçekten $U(r)$ sıfırın dengeli komşuluğudur. (1)' den keyfi ikili sayı r_1, r_2 olmak üzere,

$$U(r_1) + U(r_2) \subset U(r_1 + r_2) \quad (3)$$

$d'(x, y) = \inf\{r: x - y \in U(r)\}$ olsun. Şimdi $d'(x, y)$ ' nin $d(x, y)$ metriğine denk invariant metrik olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} d'(x + z, y + z) &= \inf\{r: (x + z) - (y + z) \in U(r)\} \\ &= \inf\{r: x - y \in U(r)\} \\ &= d'(x, y) \end{aligned}$$

$U(r)$ dengeli olduğu için $d'(x, y) = d'(y, x)$ dir. (3) . sonuç için üçgen eşitsizliği sağlanır.

$$\begin{aligned} d'(x, z) + d'(z, y) &= \inf\{r_1: x - z \in U(r_1)\} + \inf\{r_2: z - y \in U(r_2)\} \\ &= \inf\{r_1 + r_2: x - z \in U(r_1), z - y \in U(r_2)\} \\ &\geq \inf\{r_1 + r_2: (x - z) + (z - y) \in U(r_1) + U(r_2)\} \\ &\geq \inf\{r_1 + r_2: x - y \in U(r_1 + r_2)\} \\ &= \inf\{r = x - y \in U(r)\} \\ &= d'(x, y) \end{aligned}$$

Şimdi $d'(x, y)$ 'nin invariant olduğunu ispatlayalım. Bunun için $\lim_{n \rightarrow \infty} d'(x_n, x) = 0$
 $\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0$ olduğunu gösterelim. $d'(x, y)$ metrik olma koşullarını sağlar.
Bu nedenle $d'(x, y)$, $d(x, y)$ metriğine denktir.

$d'(x_k, x) \rightarrow 0$ olsun. O halde (2)'den $d(x_k - x, 0) = 0$ 'a yakınsaktır.
Toplamanın sürekliliğinden $x_k - x = 0$ 'a yakınsaktır. $U\left(\frac{1}{2^n}\right)$ sıfırın komşuluğu
olduğundan keyfi n için k_0 indisi vardır öyle ki $k > k_0$ için $x_k - x \in U\left(\frac{1}{2^n}\right)$
dir. $k > k_0$ için $d'(x_k, x) < \frac{1}{2^n}$. n 'nin keyfi olmasından dolayı $\lim_{n \rightarrow \infty} d'(x_k, x) = 0$
.

BÖLÜM 5

5.1: Bulanık Lineer Metrik Uzaylar

Bu bölümde bulanık lineer metrik uzaylarla ilgili bazı tanım ve örnekler verilmiştir.

Tanım 5.1:[33] F , sıfırdan farklı μ_F üyelik fonksiyonu ile X alanında tanımlı bulanık küme olsun. Aşağıdaki şartların sağlandığını varsayalım.

- (i) $\mu_F(a + b) \geq \mu_F(a) \wedge \mu_F(b) \quad \forall a, b \in X$,
- (ii) $\mu_F(-a) = \mu_F(a) \quad \forall a \in X$,
- (iii) $\mu_F(a \cdot b) \geq \mu_F(a) \wedge \mu_F(b) \quad \forall a, b \in X$
- (iv) $\mu_F(a^{-1}) = \mu_F(a) \quad \forall 0 \neq a \in X$

O halde F' ye X' de bulanık alan denir. Ayrıca, $(F, X)'$ e X' in bulanık alanı denir.

Önerme 5.2:[33] (F, X) , X' in bulanık alanı ise $\mu_F(0) \geq \mu_F(1) \geq \mu_F(a)$

$\forall 0 \neq a \in X$ dir.

Önerme 5.3:[33] $K \subseteq X$ olsun. (x_K, X) X' in bulanık alanı ise K X' in bulanık alanıdır. [x_K , K' nin karakteristik fonksiyonudur.]

İspat: Varsayalım ki K , X' in alt alanı olsun. $a, b \in X$ alalım.

- (i) $a, b \in K$ ise $a + b \in K$ ve böylece
 $x_K(a + b) = 1 = x_K(a) \wedge x_K(b)$.

$a \notin K$ veya $b \notin K$ ise $x_K(a + b) \geq 0 = x_K(a) \wedge x_K(b)$. Böylece

$\forall a, b \in X$ için $x_K(a + b) \geq x_K(a) \wedge x_K(b)$ dir.

- (ii) $a \in K$ ise $-a \in K$ dir. Böylece $x_K(-a) = 1 = x_K(a)$.
 $a \notin K$ ise $-a \notin K$ dir. Böylece $x_K(-a) = 0 = x_K(a)$.
- (iii) Eğer $a = 0$ veya $b = 0$ ise $a \cdot b = 0$ dir. Böylece

$$x_K(a \cdot b) = 1 \geq x_K(a) \wedge x_K(b) .$$

$a, b \neq 0$ olduğunu varsayalım. Eğer $a, b \in K$ ise $ab \in K$, böylece

$$x_K(ab) = 1 = x_K(a) \wedge x_K(b) . \text{ Eğer } a \notin K \text{ veya } b \notin K \text{ ise}$$

$$x_K(ab) \geq 0 = x_K(a) \wedge x_K(b). \text{ Böylece } x_K(ab) \geq x_K(a) \wedge x_K(b) \quad \forall a, b \in X.$$

(iv) Varsayalım ki $a \neq 0$ olsun. $a \in K$ ise $a^{-1} \in K$ dir. Böylece

$$x_K(a^{-1}) = 1 = x_K(a) . \text{ } a \notin K \text{ ise } a^{-1} \notin K$$

dir. Böylece

$$x_K(a^{-1}) = 0 = x_K(a) .$$

Böylece (x_K, X) X ' in bulanık alanıdır.

Tersine; (x_K, X) ' in X ' de bulanık alan olduğunu varsayalım. $a, b \in K$ olsun. O halde;

$$x_K(a - b) \geq x_K(a) \wedge x_K(-b) = x_K(a) \wedge x_K(b) = 1 \wedge 1 = 1 .$$

Böylece $x_K(a - b) = 1$ ve bu nedenle $a - b \in K$ dir.

Ayrıca, $b \neq 0$ ise;

$$x_K(ab^{-1}) \geq x_K(a) \wedge x_K(b^{-1}) = x_K(a) \wedge x_K(b) = 1 \wedge 1 = 1 \text{ ve bu nedenle}$$

$ab^{-1} \in K$ dir.

Böylece K, X ' in alt alanıdır.

Tanım 5.4:[33] (F, X) , X ' in bulanık alt alanı olsun. Y, X ' de lineer uzay, V ' de sıfırdan farklı μ_V üyelik fonksiyonu ile Y ' nin bulanık kümesi olsun. Aşağıdaki şartların sağlandığını varsayalım:

- (i) $\mu_V(u + v) \geq \mu_V(u) \wedge \mu_V(v) \quad \forall u, v \in Y$
- (ii) $\mu_V(-u) = \mu_V(u) \quad \forall u \in Y$
- (iii) $\mu_V(au) \geq \mu_F(a) \wedge \mu_F(u) \quad \forall a \in X \text{ ve } \forall u \in Y$
- (iv) $\mu_F(1) \geq \mu_V(0)$

O halde (V, Y) ' ye (F, X) ' de bulanık lineer uzay denir.

Önerme 5.5:[33] (V, Y) , (F, X) ' de bulanık lineer uzay ise $\mu_F(0) \geq \mu_F(1) \geq \mu_V(0) \geq \mu_V(u) \quad \forall u \in Y$ dir.

Önerme 5.6:[33] (F, X) kendi bulanık lineer uzayında bulanık alandır ancak ve ancak $\mu_F(0) = \mu_F(1)$ dir.

İspat: Eğer (F, X) kendi kendisinin bulanık lineer uzayı ise tanım 5.4' deki (iv) kuralından $\mu_F(1) \geq \mu_F(0)$ dir. Fakat; önerme 5.5' den $\mu_F(0) \geq \mu_F(1)$ olduğundan $\mu_F(0) = \mu_F(1)$ ' dir.

Tersine, $\mu_F(0) = \mu_F(1)$ ise tanım 5.4' deki (iv) kuralı sağlar. Böylece tanım 5.4' deki diğer kuralları da otomatik olarak sağlar. Bu nedenle (F, X) kendi kendisinin bulanık lineer uzayıdır.

Tanım 5.7:[34] $X \neq \emptyset$ bir küme, $F(X)$ X ' in bütün bulanık kümelerinin kümesi olsun. Eğer $f \in F(X)$ ise $f = \{(x, a) | x \in X, a \in (0,1)\}$ dir. Açıkçası

$f, |f(x)| \leq 1$ olduğundan sınırlı fonksiyondur. K reel sayıların uzayı olsun. O halde $F(X)$ aşağıda tanımlanan toplama ve skaler çarpma işlemleri ile K alanında vektör uzayıdır.

$$f + g = \{(x, \alpha) + (y, \beta)\} = \{(x + y, \alpha + \beta) | (x, \alpha) \in f, (y, \beta) \in g\} \quad \text{ve}$$

$$k.f = \{k.(x, a) | (x, a) \in f, k \in K\}$$

$F(X)$ vektör uzayına her $f \in F(X)$ için $d: F(X) \times F(X) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlarsa metrik fonksiyon denir.

$$(1) d(f, g) \geq 0 \quad \forall f, g \in F(X)$$

$$(2) d(f, g) = 0 \Leftrightarrow f = g \quad \text{veya} \quad f, g \in F(X)$$

$$(3) d(f, g) = d(g, f) \quad \forall f, g \in F(X)$$

$$(4) d(f, g) \leq d(f, h) + d(h, g) \quad \forall f, g, h \in F(X)$$

O halde $(F(X), d)$ metrik uzayıdır.

Tanım 5.8:[35] Varsayalım ki (x, λ) ve (y, γ) iki bulanık skaler olsun.

$$(1) \text{ Eğer } a > b \text{ veya } (a, \lambda) = (b, \gamma) \text{ ise diyeceğiz ki } (a, \lambda) \succcurlyeq (b, \gamma)$$

(2) Eğer $a \geq b$ ($(a, \lambda) \succ (b, \gamma)$ veya $(b, \gamma) \prec (a, \lambda)$) ise $(a, \lambda), (b, \gamma)$ ' dan daha az değildir.

(3) $a \geq 0$ ise (a, λ) negatif değildir. Bütün negatif olmayan bulanık sayıların kümesini $S_F^+(R)$ ile göstereceğiz.

Tanım 5.9:[35] $X \neq \emptyset$ bir küme ve $d_F: P_F(X) \times P_F(X) \rightarrow S_F^+(R)$ dönüşümü tanımlansın. Herhangi bir $\{(x, \lambda), (y, \gamma), (z, p)\} \subset P_F(X)$ için aşağıdaki şartlar sağlanırsa $(P_F(X), d_F)$ ' ye bulanık metrik uzay denir.

$$(1) d_F((x, \lambda), (y, \gamma)) = 0 \Leftrightarrow x = y, \lambda = \gamma = 1$$

$$(2) d_F((x, \lambda), (y, \gamma)) = d_F((y, \gamma), (x, \lambda))$$

$$(3) d_F((x, \lambda), (z, p)) < d_F((x, \lambda), (y, \gamma)) + d_F((y, \gamma), (z, p))$$

d_F fonksiyonuna $P_F(X)$ ' de tanımlanan bulanık metrik denir ve $d_F((x, \lambda), (y, \gamma))$ ' ya iki bulanık nokta arasındaki bulanık uzaklık denir.

Aşağıdaki iki örnek bu tanıma uyan bazı örneklerdir.

Örnek 5.10:[35] Varsayalım ki (X, d) sıradan metrik uzay olsun. $P_F(X)$ ' de herhangi $(x, \lambda), (y, \gamma)$ iki bulanık nokta arasındaki uzaklık, (X, d) ' de x ve y arasındaki uzaklık $d(x, y)$ olduğunda; $d_F((x, \lambda), (y, \gamma)) = (d(x, y), \min\{\lambda, \gamma\})$ biçiminde tanımlansın. O halde $(P_F(X), d_F)$ bulanık metrik uzaydır.

İspat: d_F ' nin tanım 9' daki üç şartı sağladığını ispatlayalım.

(1) $(x, \lambda), (y, \gamma) \in P_F(X)$ ' de iki bulanık nokta olsun. $d(x, y) \geq 0$ ' dir. Tanım 8' den $d_F((x, \lambda), (y, \gamma)) = (d(x, y), \min\{\lambda, \gamma\})$ negatif olmayan bulanık skalerdir. Açıktır ki $d_F((x, \lambda), (y, \gamma)) = 0 \Leftrightarrow d(x, y) = 0$ ve $\min\{\lambda, \gamma\} = 1, x = y$ ve $\lambda = \gamma = 1$ olduğunda.

(2) Herhangi $\{(x, \lambda), (y, \gamma)\} \subset P_F(X)$ için;

$$\begin{aligned} d_F((x, \lambda), (y, \gamma)) &= (d(x, y), \min\{\lambda, \gamma\}) \\ &= (d(y, x), \min\{\gamma, \lambda\}) \\ &= d_F((y, \gamma), (x, \lambda)) \end{aligned}$$

(3) Herhangi $\{(x, \lambda), (y, \gamma), (z, p)\} \subset P_F(X)$,

$$\begin{aligned} d((x, \lambda), (z, p)) &= (d(x, z), \min\{\lambda, p\}) \\ &< (d(x, y) + d(y, z), \min\{\lambda, p, \gamma\}) \\ &= (d(x, y), \min\{\lambda, \gamma\}) + (d(y, z), \min\{\gamma, p\}) \\ &= d((x, \lambda), (y, \gamma)) + d((y, \gamma), (z, p)) \end{aligned}$$

Örnek 5.11:[35] \mathbb{R}^n n-boyutlu Öklit uzayını gösterebiliriz. L' yi \mathbb{R}^n ' de tanımlanan bulanık lineer uzay olduğunu varsayalım. $d_{FE}((x, \lambda), (y, \gamma))$ şeklinde tanımlanan L' ye ait $(x, \lambda), (y, \gamma)$ keyfi iki bulanık nokta arasındaki uzaklık, d_E genel Öklit uzaklık olduğunda;

$$d_{FE}((x, \lambda), (y, \gamma)) = (d_E(x, y), \min\{\lambda, \gamma\})$$

tanımlansın. O halde (L, d_{FE}) bulanık metrik uzaydır.

İspat: d_{FE} örnek 5.10' dan bulanık metriktir. Bu nedenle (L, d_{FE}) bulanık metrik uzaydır.

Verilen iki örnek gösteriyor ki bulanık lineer metrik uzaylar lineer metrik uzaylarla oluşturulur ve bulanık lineer metrik uzaylar lineer metrik uzaylar tarafından içerilir.

6. BÖLÜM

SONUÇ

Bu çalışmada bulanık lineer metrik uzay kavramı incelenmiştir. Öncelikle klasik anlamda metrik uzaylara yer verilmiş, sonrasında bulanık metrik uzaylar üzerinde durulmuştur. Klasik anlamda lineer metrik uzaylar incelenmiş, bunlarla ilgili tanım, teorem, önerme ve örneklere yer verilmiştir. Son olarak bulanık lineer metrik uzay ile ilgili bazı tanım, teorem ve örneklere yer verilmiştir. Bulanık mantık kavramı günümüzde çok popüler bir alan olup, matematikçiler tarafından birçok alana uyarlanmaktadır.

KAYNAKÇA

- [1] Zadeh L.A. (1965). *Fuzzy Sets, Information and Control* **8**, 338-353
- [2] Zadeh L.A. (1973). Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes, IEEE Transactions on Systems, man, and Cybernetics. Vol. **SMC-3**, No.1, 28-44
- [3] Zadeh L.A. (1975). The concept of linguistic variable and its application to approximate reasoning, Part 1,2 and 3. *Information Sciences*, **8**: 199-249, **8**: 301-357, **9**: 43-80
- [4] Z. Deng. (1982). *Fuzzy Pseudo- Metric Space*, J. Math. Anal. Apply. **86**, 74-95
- [5] M. A. Erceg. (1979). *Metric Space in Fuzzy Set Theory*, J. Math. Anal. Apply., **69**, 205-230
- [6] K. Osmo And S. Seikkala. (1984). *On fuzzy metric spaces*. Fuzzy Sets and Systems, **12**, 215-229
- [7] O. Kramosil and J. Michalek. (1975). *Fuzzy metric and statistical metric spaces*, Kybernetika, **11**, 326-334
- [8] G. Köthe. (1969). *Topological Vectör Spaces*, I (English translation by D.H.J. Garling, Springer- Verlag)
- [9] A.P. Robertson and W. J. Robertson. (1973). *Topological Vectör Spaces*, Cambridge University Press, Second Edition
- [10] Stefan Rolewicz. (1985). *Metric Linear Spaces*, Springer, Vol.2, Reidel
- [11] Kosko Bart. (1993). *Fuzzy thinking: The new science of fuzzy logic*, London: Flamingo
- [12] Işıklı Ş., *Bulanık Mantık ve Bulanık Teknolojiler*, <http://dergiler.ankara.edu.tr/dergiler/34/923/11510.pdf>

- [13] Baykal N., Beyan T. (2004). *Bulanık Mantık İlke ve Temelleri*, Yayın No:9; Matematik Dizisi No:1, Ankara, Bıçaklar Kitapevi
- [14] Zimmermann H.J. (1992). *Fuzzy Set Theory and its Applications*, Academic Publishers, 4th ed. Boston/Dordrecht/London, <http://books.google.com.tr/books>
- [15] Başkan T., Bizim O., Cangül İ. N. (2006). *Metrik Uzaylar ve Genel Topolojiye Giriş*, Ankara, 2. Baskı, Nobel Yayınevi
- [16] Prof. Dr. Mahmut Koçak. (2009). *Genel Topolojiye Giriş ve Çözümlü Alıştırmalar*, Eskişehir, <http://www2.ogu.edu.tr/~mkocak/kitaplar/fancytop1-2.pdf>
- [17] Bryan P. Rynne, Martin A. Youngson. (2000). *Linear Functional Analysis*, Departman of Mathematics, Heriot- Watt University, Riccarton, Edinburg EH 144AS, UK
- [18] Giles J.R. (1987). *Introduction to the analysis of metric spaces* (Australian Mathematical Society: Lecture Series; 3), Australian
- [19] Mukherjee M.N. (2005). *Elements of Metric Spaces*, San Jose State University, California, USA
- [20] Prof. Dr. Mahmut Koçak. (2006). *Genel Topolojiye Giriş I-II Problem Çözümleri*, Cilt 3, Eskişehir, Gülen Ofset Yayınevi
- [21] Satish Shirali, Harkrishan L. Vasudeva. (2000). *Metric Spaces*, <http://mcs.lugave.net/math511/MetricSpaces.pdf>
- [22] Wilson Alexander Sutherland. (2009). *Introduction to Metric and Topological Spaces*, Second Edition, Oxford University Press
- [23] Maxwell Rosenlicht. (1986). *Introduction to Analysis*, Courier Dover Publications, http://books.google.com.tr/books?id=krW_SbmTe9UC&printsec=f=false
- [24] T.K. Samanta, Igbal H. Jerbil. (2009). *Finite Dimensional Intuitionistic Fuzzy Normed Linear Space*, *Int. J. Open Problems Compt. Math.*, Vol. 2, No.4
- [25] Valentin Gregori, Samuel Morillas, Almanzor Sapena. (2010). *On class of completable fuzzy metric spaces*, *Fuzzy Sets and Systems* 161, 2193-2205

- [26] Sushil Sharma. (2002). *On Fuzzy Metric Spaces*, Southeast Asian Bulletin of Mathematics **26**, 133-145
- [27] Kankona Chakrabarty, Ranjit Biswas, Sudarsan Nanda. (1998). *On Fuzzy Metric Spaces*, Fuzzy Sets and Systems **99**, 111-114
- [28] Doç. Dr. Hüsnu Kızmaz. (1993). *Fonksiyonel Analize Giriş*, KTÜ Yayınları
- [29] İvar Stakgold. (2000). *Boundary Value Problems of Mathematical Physics*, Volume **I**, 92-191
- [30] Georgi E. Shilov. (1996). *Elementary Functional Analysis*, Courier Dover Publications, MIT Press, Cambridge, Massachusetts, Vol. **2**
- [31] I.J. Maddox. (1988). *Elements of Functional Analysis*, 2nd. Ed., Cambridge University Press, 69-102
- [32] Shizuo Kakutani. (1938). *Two Fixed-Point Theorems Concerning Bicomact Convex Sets*, Vol. **14**, Number 7, 242-245
- [33] G. Wenxiang and L. Tu. (1992). *Fuzzy Linear Spaces*, Fuzzy Sets and Systems, **49**, 377-380
- [34] Noori F. AL- Mayahi and Layth S. İbrahim. (2013). *Some of Two- Fuzzy Metric Spaces*, *Gen. Math. Notes*, Vol. **17**, No. 2, pp. 41-52
- [35] Zun Quan Xia and Fang- Fang Guo. (2004). *Fuzzy Metric Spaces*, *J. Apply. Math. & Computing*, Vol. **16**, No. 1-2, pp. 371-381

