



**GENELLEŞTİRİLMİŞ KOMPİLEKS GENUINE SZÁS-Z-DURRMEYER
OPERATÖRLERİ İLE YAKLAŞIM**

Nursel ETİN

**DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜŐÜ**

NİSAN 2015

Nursel ÇETİN tarafından hazırlanan “GENELLEŞTİRİLMİŞ KOMPLEKS GENUINE SZÁSZ-DURRMEYER OPERATÖRLERİ İLE YAKLAŞIM” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Gazi Üniversitesi MATEMATİK Anabilim Dalında DOKTORA TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Nurhayat İSPİR

Matematik, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum

Başkan : Prof. Dr. Ahmet Ali ÖÇAL

Matematik, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum

Üye : Prof. Dr. Ogün DOĞRU

Matematik, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum

Üye : Prof. Dr. Gülen BAŞCANBAZ TUNCA

Matematik, Ankara Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum

Üye : Prof. Dr. Fatma TAŞDELEN YEŞİLDAL

Matematik, Ankara Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum

Tez Savunma Tarihi: 30/04/2015

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Doktora Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....
Prof. Dr. Şeref SAĞIROĞLU
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Nursel ÇETİN

30/04/2015

GENELLEŞTİRİLMİŞ KOMPLEKS GENUINE SZÁSZ-DURRMEYER
OPERATÖRLERİ İLE YAKLAŞIM

(Doktora Tezi)

Nursel ÇETİN

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Nisan 2015

ÖZET

Bu tezde, ilk olarak kompakt disklerde üstel büyüyen analitik fonksiyonlara ilişkin genelleştirilmiş kompleks Szász operatörlerinin yaklaşım özellikleri incelendi. Bu operatörler için yakınsaklık oranı üzerine bazı tahminler, Voronovskaja tip teorem ve yaklaşımın tam mertebesi verildi. Daha sonra, Lebesgue integrallenebilir fonksiyonlara yaklaşmak için, genelleştirilmiş kompleks genuine Szász-Durrmeyer operatörleri tanımlandı ve bu operatörlerin nicel tahminli yaklaşım özellikleri araştırıldı. Bu operatörler ile üstel büyüyen analitik fonksiyonların yakınsaklık oranı ve Voronovskaja tip asimptotik formülü için nicel tahminler verilerek, eşanlı yaklaşımın tam mertebesi elde edildi. Böylece bu operatörlerin yaklaşım özellikleri $[0, \infty)$ aralığından kompleks düzlemdeki kompakt disklere nicel tahminlerle genişletildi.

Bilim Kodu : 204.1.095
Anahtar Kelimeler : Kompleks Szász operatörleri, kompleks genuine Szász-Durrmeyer operatörleri, Voronovskaja tip teorem, yaklaşımın tam mertebesi.
Sayfa Adedi : 85
Danışman : Prof. Dr. Nurhayat İSPİR

APPROXIMATION BY GENERALIZED COMPLEX GENUINE SZÁSZ-
DURRMEYER OPERATORS

(Ph. D. Thesis)

Nursel ÇETİN

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

April 2015

ABSTRACT

In this thesis, firstly the approximation properties of generalized complex Szász operators attached to analytic functions having exponential growth on compact disks were studied. Some estimates on the rate of convergence, Voronovskaja type theorem and the exact order of approximation for these operators were given. Later, generalized complex genuine Szász-Durrmeyer operators to approximate Lebesgue integrable functions were introduced and the approximation properties with quantitative estimates of these operators were investigated. Giving quantitative estimates for Voronovskaja type asymptotic formula and the rate of convergence of analytic functions having exponential growth by these operators, the exact order of simultaneous approximation were obtained. Thus, approximation properties of these operators were extended with quantitative estimates from the interval $[0, \infty)$ to compact disks in the complex plane.

Science Code : 204.1.095

Key Words : Complex Szász operators, complex genuine Szász-Durrmeyer operators, Voronovskaja type theorem, exact order of approximation.

Page Number : 85

Supervisor : Prof. Dr. Nurhayat İSPİR

TEŞEKKÜR

Bu alıőmanın her aőamasında bilgi, gürőő ve enerjisini cömerte sunan, umutsuz anlarda beni cesaretlendiren değerli hocam Prof. Dr. Nurhayat İSPIR'e, ayrıca hayallerimi gülümseyiőleriyle destekleyen, hayata pozitif gözlerle bakabilmemi sağlayan, sabrı ve ilgisiyle bana büyük destek olan sevgili aileme en içten duygularımınla teşekkürlerimi sunuyorum.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	ix
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	7
2.1. Temel Tanım ve Teoremler	7
3. GENELLEŞTİRİLMİŞ KOMPLEKS SZÁSZ OPERATÖRLERİ İLE YAKLAŞIM	11
3.1. Reel Değişkenli Szász Operatörleri	11
3.2. Kompleks Szász Operatörleri.....	12
3.3. S_{a_n, b_n} Genelleştirilmiş Kompleks Szász Operatörleri ile Yaklaşım	14
3.3.1. Yardımcı Sonuçlar	14
3.3.2. S_{a_n, b_n} Operatörünün Yakınsama Oranı	20
3.3.3. Voronovskaja Tip Sonuç	30
3.3.4. Yaklaşımın Tam Mertebesi	36
3.3.5. Eşanlı Yaklaşımın Tam Mertebesi	39
4. GENELLEŞTİRİLMİŞ KOMPLEKS GENUINE SZÁSZ-DURRMEYER OPERATÖRLERİ İLE YAKLAŞIM	43
4.1. Reel Değişkenli Genuine Szász-Durrmeyer Operatörleri.....	43
4.2. Kompleks Genuine Szász-Durrmeyer Operatörleri	44
4.3. L_{a_n, b_n} Genelleştirilmiş Kompleks Genuine Szász-Durrmeyer Operatörleri ile Yaklaşım	45

	Sayfa
4.3.1. Yardımcı Sonuçlar	46
4.3.2. L_{a_n, b_n} Operatörünün Yakınsama Oranı	53
4.3.3. Voronovskaja Tip Sonuç	64
4.3.4. Yaklaşımın Tam Mertebesi	71
4.3.5. Eşanlı Yaklaşımın Tam Mertebesi	73
5. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	79
KAYNAKLAR.....	81
ÖZGEÇMİŞ.....	85

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklamalar
D_R	$\{z \in \mathbb{C}: z < R\}$
\bar{D}_R	$\{z \in \mathbb{C}: z \leq R\}$
$B[0, \infty)$	$[0, \infty)$ da tanımlı sınırlı fonksiyonların uzayı
$C[0, \infty)$	$[0, \infty)$ da tanımlı sürekli fonksiyonların uzayı
$C(\bar{D}_r)$	\bar{D}_r diskinde sürekli fonksiyonların uzayı
$\ f\ _r$	$C(\bar{D}_r)$ uzayında $\ f\ _r = \max \{ f(z) : z \leq r\}$ ile tanımlı norm
$[x_0, x_1, \dots, x_m; f]$	f nin x_0, \dots, x_m noktalarındaki m -inci bölünmüş farkı
$S_n(f; x)$	Reel Szász operatörü
$L_n(f; x)$	Reel Genuine Szász-Durrmeyer operatörü
$S_n(f; z)$	Kompleks Szász operatörü
$L_n(f; z)$	Kompleks genuine Szász-Durrmeyer operatörü
$S_{a_n, b_n}(f; z)$	Genelleştirilmiş kompleks Szász operatörü
$L_{a_n, b_n}(f; z)$	Genelleştirilmiş kompleks genuine Szász-Durrmeyer operatörü

1. GİRİŞ

Matematiksel analizin geniş bir dalı olan Yaklaşım Teorisinin temel amacı, bir fonksiyon uzayından alınan karmaşık yapıdaki fonksiyonların bu uzayın bir alt uzayından olan daha basit ve daha kolay hesaplanabilen fonksiyonlar (örneğin polinomlar veya rasyonel fonksiyonlar) cinsinden bir gösterimini bulmaktır. Polinomlarla sürekli fonksiyonların yaklaşımı üzerine yapılan Weierstrass'ın iyi bilinen teoremi ile Chebyshev'in çalışması, reel değişkenli fonksiyonların yaklaşım teorisinin merkezini oluşturmaktadır.

Yaklaşım üzerine Chebyshev'in çalışmalarının arka planında “mekanizmaların yapısı” konusu yer almaktadır. Özellikle Watt'ın buhar makinesi, Watt'inkinden daha küçük bir farkla dairesel hareketi doğrusal harekete dönüştüren bir mekanizmanın inşası konusunda Chebyshev'e öncülük etmiştir. 1853 yılında Chebyshev bu problem üzerinde çalışırken “ $[a, b]$ aralığında tanımlı sürekli bir f fonksiyonu ve n pozitif tam sayısı için, f fonksiyonu $\max_{a \leq x \leq b} |f(x) - p(x)|$ hatası minimum olacak şekilde derecesi en çok n olan bir $p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ polinomu ile temsil edilebilir mi?” yaklaşım problemi ortaya çıkmıştır.

1885 yılında da Weierstrass tarafından reel değişkenli fonksiyonların yaklaşım teorisinin temelini oluşturan, Weierstrass yaklaşım teoremi olarak bilinen teorem elde edilmiştir. Weierstrass yaklaşım teoremi, $[a, b]$ aralığında sürekli herhangi bir $f(x)$ fonksiyonu için, $f(x)$ e $[a, b]$ aralığında düzgün yakınsayan bir polinomlar dizisinin var olduğunu ifade etmektedir (Weierstrass, 1885). Dikkat edilirse bu teorem sadece bir varlık teoremi olup pratikte verilen bir fonksiyona yaklaşan polinomun nasıl seçileceği hakkında bilgi vermemektedir.

Weierstrass'ın ve Chebyshev'in yaklaşımının bir birleşimi ilk defa S. N. Bernstein tarafından elde edilmiştir. 1912 yılında Bernstein, Weierstrass yaklaşım teoreminin basit bir ispatını vermek amacıyla, $[0,1]$ aralığında sürekli f fonksiyonları için n . dereceden

$$B_n(f; x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right), \quad x \in [0,1], n \in \mathbb{N}$$

polinomlarını tanımlayarak, bu $B_n(f; x)$ dizisinin $[0,1]$ aralığında düzgün olarak f fonksiyonuna yaklaştığını ispatlamıştır (Bernstein, 1912-1913). Çok basit ve yaklaşım özellikleri açısından şık bir yapıya sahip olduğundan Bernstein polinomları en çok çalışılan lineer pozitif operatörlerdir. Ayrıca bu operatörlerin bulunma yöntemi birçok yeni lineer pozitif operatörlerin tanımlanmasına da yardımcı olmuştur.

1951 yılında Popoviciu, 1952 yılında Bohman, 1953 yılında ise Korovkin, birbirlerinden bağımsız olarak, lineer pozitif operatörlerin birim operatöre yaklaşım problemini ele alarak literatürde “Bohman-Korovkin Teoremi” olarak bilinen en basit ve en güçlü kriteri ispatlamışlardır (Popoviciu, 1950; Bohman 1952; Korovkin,1953). Bu teorem, bir $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ lineer pozitif operatörler dizisinin $[a, b]$ kapalı aralığında sürekli f fonksiyonuna düzgün yakınsak olabilmesi için gerek ve yeter koşul sadece $f \in \{1, x, x^2\}$ için $L_n(f)$ dizisinin f fonksiyonuna düzgün yakınsak olmasıdır. Sonlu aralıklarda tanımlı lineer pozitif operatörlerin yaklaşım özellikleri bu teorem yardımıyla incelenir. Ancak sınırsız aralıklarda tanımlı lineer pozitif operatörlerin yaklaşımı için 1974 yılında A. D. Gadjiev tarafından ağırlıklı uzaylarda ispatlanan Korovkin-tipi teorem kullanılır (Gadjiev, 1974). Lineer pozitif operatörler ile verilen bir f fonksiyonuna yaklaşma problemi incelenirken aşağıdaki iki problem karşımıza çıkar. Bunlardan ilki nitel bir problem olan, lineer pozitif operatörler ile fonksiyona yaklaşım süreci için gerekli koşulların tespit edilmesidir. Diğeri ise nicel bir problem olan, fonksiyona yaklaşım sürecinde yapılan hatanın ölçülmesidir.

Durrmeyer, 1967 yılında $[0,1]$ kapalı aralığında Lebesgue integrallenebilir fonksiyonlara yaklaşmak için Bernstein operatörlerinin bir integral modifikasyonunu

$$n \in \mathbb{N}, \quad x \in [0,1], \quad p_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

olmak üzere

$$D_n(f; x) = (n+1) \sum_{k=0}^n p_{n,k}(x) \int_0^1 p_{n,k}(t) f(t) dt$$

şeklinde tanımlamış ve yaklaşım özelliklerini incelemiştir (Altomare ve Campiti, 1994). 2003 yılında da Srivastava ve Gupta, $[0, \infty)$ aralığında Lebesgue integrallenebilir

fonksiyonlara yaklaşmak için toplamsal integral tip operatörlerin genel bir dizisini tanımlamıştır (Srivastava ve Gupta, 2003). Bu operatörler dizisi, özel durumları yaklaşım teorisinde önemli bir yer tutan Bernstein-Durrmeyer, Szász-Durrmeyer ve Baskakov-Durrmeyer tip operatörleri içermektedir. Daha sonra bu operatörler dizisinden ilham alarak Gupta vd. farklı ağırlık fonksiyonlarına sahip toplamsal integral tip operatörlerin bir ailesini tanımlamış ve bu operatörlerin yaklaşım özelliklerine ilişkin sonuçlar elde etmiştir (Gupta, Mohapatra ve Finta, 2005).

Reel değişkenli fonksiyonların yaklaşım teorisinin temelini oluşturan Weierstrass Teoreminin birçok alanda önemli gelişme, genelleşme ve yansımalarının olması; kompleks yaklaşım teorisinde de benzer problemlerin araştırılmasına öncülük etmiştir. Runge, 1885 yılında belirli bir bölgede kaldırılabilir singülerliklere veya kutuplara sahip herhangi bir f fonksiyonuna rasyonel fonksiyonların düzgün yakınsak bir serisiyle yaklaşılabilirliğini ifade etmiştir (Runge, 1885). Bu ifade ile reel değerli yaklaşım teorisi için verilen Weierstrass teoremine benzer bir sonuç elde edilmeye çalışılmıştır. Daha sonra yaklaşım istenen f fonksiyonunun özelliklerine göre benzer problemler Walsh (1926), Hartogs-Rosenthal (1931), Lavrentiev (1936), Keldysh (1945) ve Mergelyan (1952) tarafından da incelenmiştir. Weierstrass yaklaşım teoreminin kompleks analitik fonksiyonlara en önemli genelleşmesi ise 1952 yılında Mergelyan tarafından ispatlanmıştır. Mergelyan teoremi, $K \subset \mathbb{C}$ kompakt ve $\mathbb{C} \setminus K$ bağlantılı olmak üzere eğer f fonksiyonu K üzerinde sürekli ve K nın içinde analitik ise, K üzerinde f ye düzgün yakınsayan bir polinom dizisinin var olduğunu ifade eder (Mergelyan, 1952).

\mathbb{R} den \mathbb{C} kompleks düzlemine yaklaşım problemini genişletme fikri ilk olarak Bernstein polinomları ile başlamıştır. Böylece $B_n(f; x)$ ifadesinde $x \in [0,1]$ değişkeni, f nin analitik olduğu ve $[0,1]$ aralığını içeren \mathbb{C} nin uygun bölgelerindeki z kompleks sayısı ile değiştirilerek elde edilen kompleks Bernstein polinomlarının yakınsaklık özelliklerinin bulunması problemi ortaya çıkmıştır. Bu problem Wright (1930), Kantorovich (1931), Bernstein (1943), Lorentz (1986) ve Tonne (1969) tarafından çalışılmıştır. Ayrıca Lorentz'in kitabında kompakt diskler, elipsler, ilmikler gibi kompleks düzlemin çeşitli bölgelerinde kompleks Bernstein operatörlerinin yakınsaklık özellikleri incelenmiştir (Lorentz, 1986). Kompleks Szász operatörlerinin yaklaşım problemi ise ilk olarak 1963 yılında Gergen vd. tarafından çalışılmıştır (Gergen, Dressel ve Purcell; 1963). Daha sonra, Deeba ve Wood kompleks Szász operatörlerinin bazı genelleştirmelerini tanımlamış ve

kompleks düzlemin farklı bölgelerinde yakınsaklık sonuçlarını araştırmışlardır (Deeba, 1982; Wood, 1969). Ancak bu çalışmalarda yakınsaklık oranına ilişkin herhangi bir nicel sonuç elde edilmemiştir.

Kompleks Bernstein ve kompleks Szász operatörlerinin, kompakt disklerde analitik fonksiyonlara yakınsaklık oranına ilişkin nicel tahminler ilk defa Gal tarafından elde edilmiştir (Gal, 2009). Ayrıca Gal kitabında, çok iyi bilinen bazı kompleks operatörlerin de kompakt disklerde analitik fonksiyonlara nicel tahminli yaklaşım özelliklerini incelemiştir (Gal, 2009). Daha sonra, Anastassiou ve Gal (2010), Gal ve Gupta, (2011), Mahmudov (2011a) gibi bazı araştırmacılar kompleks Bernstein-Durrmeyer tip operatörlerin kompakt disklerdeki yaklaşım özellikleri ile ilgili nicel tahminler elde etmişlerdir.

Son zamanlarda, Bernstein-Durrmeyer operatörlerinin değişik bir biçiminin kompleks formu tanımlanmış ve bu operatörlerin yaklaşım özellikleri araştırılmıştır (Gal, 2010). Yeni tanımlanan bu operatörlerin yaklaşım özellikleri Bernstein-Durrmeyer operatörlerinden farklıdır. Temel fark ise sabit fonksiyonların yanı sıra lineer fonksiyonları da koruyan bir özelliğe sahip olmasıdır. Bu özelliğinden dolayı bu operatörler genuine Bernstein-Durrmeyer operatörleri olarak isimlendirilir. Bu operatörler için elde edilen kompleks yaklaşım teoremleri, kompleks genuine Bernstein-Durrmeyer operatörlerinin çeşitli genelleştirmeleri üzerine yapılan çalışmalara ışık tutmuştur. Bu yöndeki çalışmalara Gal (2010), Mahmudov (2011b), Mahmudov ve Gupta (2012) gibi araştırmalar örnek olarak verilebilir.

Bu tezde, genelleştirilmiş kompleks Szász operatörleri ile genelleştirilmiş kompleks genuine Szász-Durrmeyer operatörlerinin yaklaşım özellikleri araştırılacaktır.

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde, çalışmamızda kullandığımız temel tanımlar ve kompleks analizdeki yardımcı teoremler verilmiştir.

Bu tezin üçüncü ve dördüncü bölümleri tamamen orijinal olup aşağıdaki yönde incelemeler yapılmıştır.

Üçüncü bölümde, genelleştirilmiş kompleks Szász operatörleri tanımlanarak, kompakt disklerde üstel büyüyen analitik fonksiyonlara ilişkin bu operatörlerin nicel tahminli yaklaşım özellikleri araştırılmıştır. Bu operatörler ile kompakt disklerde yakınsaklık oranı ve Voronovskaja-tip sonuç için üst nicel tahminler verilerek eşanlı yaklaşımın tam mertebesi elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde, Bernstein-Durrmeyer operatörlerinin bir genelleşmesi olan genelleştirilmiş kompleks genuine Szász-Durrmeyer operatörleri tanımlanmıştır. Kompakt disklerdeki analitik fonksiyonlar için, bu operatörlerin yakınsaklık oranı ile Voronovskaja tip teorem için üst nicel tahminler bulunarak, yaklaşım ve eşanlı yaklaşımın tam mertebesi elde edilmiştir.

Böylece, genelleştirilmiş kompleks Szász operatörleri ile genelleştirilmiş kompleks genuine Szász-Durrmeyer operatörlerinin yaklaşım özellikleri $[0, \infty)$ aralığından kompleks düzlemdeki kompakt disklere nicel tahminlerle genişletilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, çalışmamız esnasında kullanılan bazı temel tanım ve teoremler verilecektir.

2.1. Temel Tanım ve Teoremler

2.1.1. Tanım

X ve Y iki normlu fonksiyon uzayı olsun. X den alınan her f fonksiyonuna Y de bir g fonksiyonu karşılık getiren bir L kuralı varsa, L ye X den Y ye bir operatör denir. $f \in X$, $g \in Y$ ve x , g nin tanım kümesinin elemanı olmak üzere $L(f; x) = g(x)$ ile gösterilir (Hacısalıhoğlu ve Hacıyev, 1995).

2.1.2. Tanım

$L: X \rightarrow Y$ bir operatör olsun. Eğer her $f_1, f_2 \in X$ ve her $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ için

$$L(a_1f_1 + a_2f_2; x) = a_1L(f_1; x) + a_2L(f_2; x)$$

koşulu sağlanıyorsa, L ye lineer operatör denir (Hacısalıhoğlu ve Hacıyev, 1995).

2.1.3. Tanım

$m \in \mathbb{N}$, $x_0, x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}$ ler de birbirinden farklı noktalar olmak üzere f fonksiyonunun $i = 0, 1, \dots, m$ için x_i noktasındaki değerini $[x_i; f]$ ile gösterelim.

$$[x_0, x_1, \dots, x_m; f] = \sum_{j=0}^m \frac{f(x_j)}{\prod_{i=0, i \neq j}^m (x_j - x_i)}$$

ifadesine f fonksiyonunun x_0, x_1, \dots, x_m noktalarındaki m –inci bölünmüş farkı denir (Dzyadyk ve Shevchuk, 2008).

Bu durumda, f nin sıfırncı bölünmüş farkı

$$[x_0; f] = f(x_0),$$

f nin birinci bölünmüş farkı

$$[x_0, x_1; f] = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} + \frac{f(x_1)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} = \frac{[x_0; f] - [x_1; f]}{x_0 - x_1},$$

f nin ikinci bölünmüş farkı

$$\begin{aligned} [x_0, x_1, x_2; f] &= \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \\ &= \frac{[x_0, x_1; f] - [x_1, x_2; f]}{x_0 - x_2}, \end{aligned}$$

olup bu şekilde devam edilirse f nin m –inci bölünmüş farkı

$$[x_0, x_1, \dots, x_m; f] = \frac{[x_0, x_1, \dots, x_{m-1}; f] - [x_1, x_2, \dots, x_m; f]}{x_0 - x_m}$$

şeklinde yazılabilir.

2.1.4. Teorem (Cauchy Türev Formülü)

$r > 0$ olmak üzere $f: \bar{D}_r \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu D_r de analitik ve \bar{D}_r da sürekli olsun. Bu durumda herhangi $p \in \{0, 1, \dots\}$ ve her $|z| < r$ için $\Gamma = \{z \in \mathbb{C}: |z| = r\}$ iken

$$f^{(p)}(z) = \frac{p!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(u)}{(u - z)^{p+1}} du$$

sağlanır (Gal, 2009).

2.1.5. Teorem

Bir $G \subset \mathbb{C}$ açık kümesi verilsin. G üzerinde analitik fonksiyonların bir $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi f analitik fonksiyonuna yakınsak ve G deki her kompakt kümede düzgün yakınsak ise, bu durumda herhangi $p \in \mathbb{N}$ için p . türev dizisi $(f_n^{(p)})_{n \in \mathbb{N}}$ de G deki kompakt kümeler üzerinde $f^{(p)}$ ye düzgün yakınsaktır (Gal, 2009).

2.1.6. Teorem (Maksimum Modül)

$\Omega \subset \mathbb{C}$ sınırlı bir bölge olsun. Eğer $f: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu Ω da analitik ve $\bar{\Omega}$ da sürekli ise, bu durumda Ω nın sınırı Γ ile gösterilirse

$$\max \{|f(z)|: z \in \bar{\Omega}\} = \max \{|f(z)|: z \in \Gamma\}$$

sağlanır (Gal, 2009).

2.1.7. Teorem (Özdeşlik)

$\Omega \subset \mathbb{C}$ bir bölge ve $f, g: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, Ω da analitik iki fonksiyon olsun. Eğer $\{z \in \mathbb{C}: f(z) = g(z)\}$ kümesi Ω da en az bir yığılma noktasına sahipse, bu durumda Ω üzerinde $f \equiv g$ dir (Gal, 2009).

2.1.8. Teorem (Bernstein Eşitsizliği)

Her $k \in \{0, 1, \dots\}$ için $a_k \in \mathbb{C}$ olmak üzere $P_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ ve $r > 0$ için $\|P_n\|_r = \max \{|P_n(z)|: |z| \leq r\}$ olsun. Bu durumda

- i) Her $|z| \leq 1$ için $|P_n'(z)| \leq n \|P_n\|_1$;
- ii) $r > 0$ ise her $|z| \leq r$ için $|P_n'(z)| \leq \frac{n}{r} \|P_n\|_r$

eşitsizlikleri gerçekleşir (Gal, 2009).

2.1.9. Teorem (Taylor)

f fonksiyonu bir z_0 noktasında analitikse bu noktanın bir komşuluğundaki z ler için geçerli olmak üzere

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

açılımı vardır. Bu kuvvet serisi bir $D(z_0, r)$ diski üzerinde mutlak yakınsar ve bu diskin kompakt alt kümeleri üzerinde yakınsama düzgündür (Başkan, 2005).

2.1.10. Sonuç

A, \mathbb{C} de bir bölge ve $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ tanımlı olsun. f nin A da analitik olması için gerek ve yeter koşul her bir $z_0 \in A$ noktası için f nin, üzerinde yakınsak bir kuvvet serisine eşit olabileceği bir $D(z_0, R) = \{z: |z - z_0| < R\}$ diskinin bulunabilmesidir (Başkan, 2005).

2.1.11. Teorem

- i) A, \mathbb{C} de bir bölge ve (f_n) , A üzerinde analitik olan f_n fonksiyonlarının bir dizisi olsun. Eğer A da bulunan her kapalı disk üzerinde $f_n \rightarrow f$ yakınsaması düzgün ise f , A da analiktir. A daki kapalı diskler üzerinde $f'_n \rightarrow f'$ yakınsaması düzgün, A üzerinde ise $f'_n \rightarrow f'$ noktasaldır.
- ii) Eğer $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere g_k fonksiyonları A üzerinde analitik ve $g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(z)$ yakınsaklığı A içindeki her kapalı disk üzerinde düzgünse g , A da analiktir. Üstelik $g'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} g'_k(z)$ yakınsaklığı A üzerinde noktasal ve A daki kapalı diskler üzerinde düzgündür (Başkan, 2005).

3. GENELLEŞTİRİLMİŞ KOMPLEKS SZÁSZ OPERATÖRLERİ İLE YAKLAŞIM

3.1. Reel Değişkenli Szász Operatörleri

$x \in [0, \infty)$, $f \in C[0, \infty)$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere reel değişkenli Szász operatörleri

$$S_n(f; x) := e^{-nx} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(nx)^j}{j!} f\left(\frac{j}{n}\right) \quad (3.1)$$

olarak tanımlanmıştır.

Szász, $A > 0$ bir sabit olmak üzere $x \rightarrow \infty$ iken $f(x) = O(x^A)$ koşulunu sağlayan sürekli f fonksiyonları için; Favard ise daha genel olan $f(x) = O(e^{Ax})$ koşuluna sahip sürekli fonksiyonlar için $(S_n(f; x))_{n \in \mathbb{N}}$ operatörler dizisinin $[0, \infty)$ aralığında $f(x)$ e yakınsadığını ispatlamıştır (Szász, 1950; Favard, 1944).

Ayrıca Totik, f üzerinde bazı ek hipotezler altında $S_n(f; x)$ operatörleri ile $f(x)$ e yaklaşım için aşağıdaki nicel tahmini elde etmiştir:

$$|S_n(f; x) - f(x)| \leq \frac{K}{n}; \quad x \in [0, \infty), n \in \mathbb{N}, K > 0.$$

(Totik, 1984).

Sonlu bir aralıktaki Bernstein yaklaşım polinomlarının $[0, \infty)$ aralığı için bir genelleşmesi olan Szász operatörleri, yaklaşım teorisinde merkezi bir rol oynadığından bu operatörler ve çeşitli genelleştirmeleri farklı uzaylarda yoğun bir şekilde çalışılmaktadır.

Walczak Eş. 3.1 ile verilen reel değişkenli Szász operatörlerinin önemli bir genelleştirmesini, $(a_n), (b_n)$ dizileri

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} = 0 \text{ ve } \frac{a_n}{b_n} = 1 + o\left(\frac{1}{b_n}\right)$$

koşullarını sağlayan pozitif sayıların artan ve sınırsız dizileri olmak üzere

$$S_n(f; a_n, b_n; x) = e^{-a_n x} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(a_n x)^j}{j!} f\left(\frac{j}{b_n}\right), x \in [0, \infty), n \in \mathbb{N} \quad (3.2)$$

şeklinde tanımlamış ve polinom ağırlıklı uzaylarda bu operatörlerin yaklaşım özelliklerini araştırmıştır (Walczak, 2000).

İspir ve Atakut, Gadjiev (1974) tarafından ispatlanan ağırlıklı Korovkin tip teoremleri kullanarak pozitif reel eksen üzerinde tanımlı sürekli ve sınırsız fonksiyonların polinom ağırlıklı uzaylarında Eş 3.2 ile verilen operatörlerin tek ve iki değişkenli fonksiyonlara yaklaşım özelliklerini incelemişler ve ağırlıklı süreklilik modülü yardımıyla yaklaşım derecesini elde etmişlerdir (İspir ve Atakut, 2002).

Ayrıca reel Szász operatörlerinin farklı genelleştirmeleri, Lesniewicz ve Rempulska (1997), Walczak (2002), Mortici (2009), Rempulska ve Graczyk (2010), çalışmalarında da bulunabilir.

3.2. Kompleks Szász Operatörleri

3.2.1. Tanım

Szász operatörlerinin kompleks genelleşmesi Gal tarafından

$$S_n(f; z) = e^{-nz} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(nz)^j}{j!} f\left(\frac{j}{n}\right), z \in \mathbb{C} \quad (3.3)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Gal, kompleks Szász operatörlerinin analitik fonksiyonlara yakınsaklık oranı ve Voronovskaja-tip sonuç için üst nicel tahminler vererek, eşanlı yaklaşımın tam mertebesini elde etmiştir (Gal, 2008, 2009).

Bu tezde, Eş. 3.2 ile verilen reel Szász operatörlerinin bir genelleştirmesinden ilham alarak, genelleştirilmiş kompleks Szász operatörleri aşağıdaki gibi tanımlanmış ve kompakt disklerde nicel tahminli yaklaşım özellikleri araştırılmıştır.

3.2.2. Tanım

$R > 1$ olmak üzere $f: \bar{D}_R \cup [R, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ için f fonksiyonu $\bar{D}_R \cup [R, \infty)$ da sürekli, D_R de analitik ve üstel büyümeye sahip ve ayrıca $(a_n), (b_n)$ dizileri

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = 0 \quad \text{ve} \quad \frac{b_n}{a_n} \leq 1$$

koşullarını sağlayan kesin pozitif sayıların birer dizisi olmak üzere genelleştirilmiş kompleks Szász operatörleri

$$S_{a_n, b_n}(f; z) := e^{-\frac{a_n}{b_n}z} \sum_{j=0}^{\infty} f\left(\frac{jb_n}{a_n}\right) \frac{(a_n z)^j}{j! b_n^j}, \quad z \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N} \quad (3.4)$$

şeklinde inşa edilmiştir (Çetin ve İspir, 2013).

Burada f fonksiyonunun D_R üzerindeki analitikliği $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ gösterimini garanti eder; bu ise $[0, \infty)$ aralığında reel değişkenli durumda iyi bilinen bazı tahminler kullanılırken, $1 \leq r < R$ olmak üzere herhangi bir \bar{D}_r kompakt diskinde nicel tahminlerin ispatı için gerekli olur.

Eş. 3.4 ile tanımlı operatörler, $a_n = n$ ve $b_n = 1$ durumunda Eş. 3.3 ile verilen kompleks Szász operatörlerine dönüşür. Ayrıca yeni tanımlanan operatörün yaklaşım oranı (a_n) ve (b_n) dizilerinin seçimine göre uygun şekilde ayarlanabilir olduğundan, burada elde edilen yakınsaklık oranının Gal (2008, 2009) tarafından kompleks Szász operatörleri için verilen sonuçlardan daha iyi olduğu görülür.

3.3. S_{a_n, b_n} Genelleştirilmiş Kompleks Szász Operatörleri ile Yaklaşım

Bu bölümde kompakt disklerde üstel büyümeye sahip analitik fonksiyonlara ilişkin S_{a_n, b_n} genelleştirilmiş kompleks Szász operatörünün yaklaşım özellikleri incelenecektir. Bu bağlamda operatörün fonksiyona yakınsaklık oranı, Voronovskaja tip yaklaşım ve yaklaşımın tam mertebesi bulunacaktır. Ayrıca eşanlı yaklaşım içinde benzer sonuçlar verilecektir.

3.3.1. Yardımcı sonuçlar

Yakınsaklık oranını vermek için öncelikle S_{a_n, b_n} nin bazı özelliklerini gösteren aşağıdaki yardımcı lemmalara ihtiyaç vardır.

3.3.1. Lemma

$j = 0, 1, \dots$ için $0, \frac{b_n}{a_n}, \dots, \frac{jb_n}{a_n}$ noktalarında S_{a_n, b_n} operatörünün bölünmüş farklar ile ifadesi

$$S_{a_n, b_n}(f; z) = \sum_{j=0}^{\infty} \left[0, \frac{b_n}{a_n}, \dots, \frac{jb_n}{a_n}; f \right] z^j \quad (3.5)$$

biçimindedir (Çetin ve İspir, 2013).

İspat

S_{a_n, b_n} operatörünü tanımlayan seri düzgün yakınsak olduğundan bu seri terim terim türevlenebilirdir. Eş. 3.4 ile verilen formülde z ye göre türev alınırsa

$$S'_{a_n, b_n}(f; z) = \frac{d}{dz} \left\{ e^{-\frac{a_n z}{b_n}} \sum_{j=0}^{\infty} f \left(\frac{jb_n}{a_n} \right) \frac{(a_n z)^j}{j! b_n^j} \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=0}^{\infty} f\left(\frac{jb_n}{a_n}\right) \frac{1}{j! b_n^j} \frac{d}{dz} \left\{ e^{-\frac{a_n z}{b_n}} (a_n z)^j \right\} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} f\left(\frac{jb_n}{a_n}\right) \frac{1}{j! b_n^j} \left\{ -\frac{a_n}{b_n} e^{-\frac{a_n z}{b_n}} (a_n z)^j + e^{-\frac{a_n z}{b_n}} j (a_n z)^{j-1} a_n \right\} \\
&= -\frac{a_n}{b_n} e^{-\frac{a_n z}{b_n}} \sum_{j=0}^{\infty} f\left(\frac{jb_n}{a_n}\right) \frac{(a_n z)^j}{j! b_n^j} \\
&\quad + \frac{a_n}{b_n} e^{-\frac{a_n z}{b_n}} \sum_{j=1}^{\infty} f\left(\frac{jb_n}{a_n}\right) \frac{(a_n z)^{j-1}}{(j-1)! b_n^{j-1}} \\
&= -\frac{a_n}{b_n} e^{-\frac{a_n z}{b_n}} \sum_{j=0}^{\infty} f\left(\frac{jb_n}{a_n}\right) \frac{(a_n z)^j}{j! b_n^j} \\
&\quad + \frac{a_n}{b_n} e^{-\frac{a_n z}{b_n}} \sum_{j=0}^{\infty} f\left(\frac{(j+1)b_n}{a_n}\right) \frac{(a_n z)^j}{j! b_n^j} \\
&= e^{-\frac{a_n z}{b_n}} \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \frac{f\left(\frac{(j+1)b_n}{a_n}\right) - f\left(\frac{jb_n}{a_n}\right)}{\frac{b_n}{a_n}} \right\} \frac{(a_n z)^j}{j! b_n^j} \\
&= e^{-\frac{a_n z}{b_n}} \sum_{j=0}^{\infty} \left[\frac{jb_n}{a_n}, \frac{(j+1)b_n}{a_n}; f \right] \frac{(a_n z)^j}{j! b_n^j} \tag{3.6}
\end{aligned}$$

elde edilir. Eş. 3.6 da z ye göre türev alınırsa

$$S''_{a_n, b_n}(f; z) = \frac{d}{dz} \left\{ e^{-\frac{a_n z}{b_n}} \sum_{j=0}^{\infty} \left[\frac{jb_n}{a_n}, \frac{(j+1)b_n}{a_n}; f \right] \frac{(a_n z)^j}{j! b_n^j} \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=0}^{\infty} \left[\frac{jb_n}{a_n}, \frac{(j+1)b_n}{a_n}; f \right] \frac{1}{j! b_n^j} \frac{d}{dz} \left\{ e^{-\frac{a_n z}{b_n}} (a_n z)^j \right\} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \left[\frac{jb_n}{a_n}, \frac{(j+1)b_n}{a_n}; f \right] \frac{1}{j! b_n^j} \left\{ -\frac{a_n}{b_n} e^{-\frac{a_n z}{b_n}} (a_n z)^j + e^{-\frac{a_n z}{b_n}} j (a_n z)^{j-1} a_n \right\} \\
&= -\frac{a_n}{b_n} e^{-\frac{a_n z}{b_n}} \sum_{j=0}^{\infty} \left[\frac{jb_n}{a_n}, \frac{(j+1)b_n}{a_n}; f \right] \frac{(a_n z)^j}{j! b_n^j} \\
&\quad + \frac{a_n}{b_n} e^{-\frac{a_n z}{b_n}} \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{jb_n}{a_n}, \frac{(j+1)b_n}{a_n}; f \right] \frac{(a_n z)^{j-1}}{(j-1)! b_n^{j-1}} \\
&= -\frac{a_n}{b_n} e^{-\frac{a_n z}{b_n}} \sum_{j=0}^{\infty} \left[\frac{jb_n}{a_n}, \frac{(j+1)b_n}{a_n}; f \right] \frac{(a_n z)^j}{j! b_n^j} \\
&\quad + \frac{a_n}{b_n} e^{-\frac{a_n z}{b_n}} \sum_{j=0}^{\infty} \left[\frac{(j+1)b_n}{a_n}, \frac{(j+2)b_n}{a_n}; f \right] \frac{(a_n z)^j}{j! b_n^j} \\
&= \frac{a_n}{b_n} e^{-\frac{a_n z}{b_n}} \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \left[\frac{(j+1)b_n}{a_n}, \frac{(j+2)b_n}{a_n}; f \right] - \left[\frac{jb_n}{a_n}, \frac{(j+1)b_n}{a_n}; f \right] \right\} \frac{(a_n z)^j}{j! b_n^j} \\
&= \frac{a_n}{b_n} e^{-\frac{a_n z}{b_n}} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{(j+2)b_n}{a_n} - \frac{jb_n}{a_n} \right) \left[\frac{jb_n}{a_n}, \frac{(j+1)b_n}{a_n}, \frac{(j+2)b_n}{a_n}; f \right] \frac{(a_n z)^j}{j! b_n^j} \\
&= 2e^{-\frac{a_n z}{b_n}} \sum_{j=0}^{\infty} \left[\frac{jb_n}{a_n}, \frac{(j+1)b_n}{a_n}, \frac{(j+2)b_n}{a_n}; f \right] \frac{(a_n z)^j}{j! b_n^j}
\end{aligned}$$

bulunur. Benzer düşünce ile devam edilirse $k = 0, 1, \dots$ için

$$S_{a_n, b_n}^{(k)}(f; z) = k! e^{-\frac{a_n z}{b_n}} \sum_{j=0}^{\infty} \left[\frac{jb_n}{a_n}, \frac{(j+1)b_n}{a_n}, \dots, \frac{(j+k)b_n}{a_n}; f \right] \frac{(a_n z)^j}{j! b_n^j}$$

olur. Burada seri açılıp ilk terimleri yazılırsa

$$S_{a_n, b_n}^{(k)}(f; z) = k! e^{-\frac{a_n z}{b_n}} \left[0, \frac{b_n}{a_n}, \dots, \frac{kb_n}{a_n}; f \right] \\ + k! e^{-\frac{a_n z}{b_n}} \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{jb_n}{a_n}, \frac{(j+1)b_n}{a_n}, \dots, \frac{(j+k)b_n}{a_n}; f \right] \frac{(a_n z)^j}{j! b_n^j}$$

elde edilir ve $z = 0$ alınırsa

$$S_{a_n, b_n}^{(k)}(f; 0) = k! \left[0, \frac{b_n}{a_n}, \dots, \frac{kb_n}{a_n}; f \right] \quad (3.7)$$

olduğu görülür. Eş. 3.7 ifadesi S_{a_n, b_n} operatörünün Maclaurin seri açılımında yerine yazılırsa

$$S_{a_n, b_n}(f; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{S_{a_n, b_n}^{(k)}(f; 0)}{k!} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left[0, \frac{b_n}{a_n}, \dots, \frac{kb_n}{a_n}; f \right] z^k$$

ifadesi elde edilir.

3.3.2. Lemma

Eğer f fonksiyonu k . dereceden bir polinomsa, bu durumda $S_{a_n, b_n}(f; z)$ de derecesi $\leq k$ olan bir polinomdur (Çetin ve İspir, 2013).

İspat

f fonksiyonu k . dereceden bir polinom olarak alınırsa $j > k$ olduğunda f nin j -yinci bölünmüş farkı sıfır olacağından Eş. 3.5 ten k . dereceden bir polinomun S_{a_n, b_n} operatörü altındaki görüntüsünün de k . dereceden bir polinom olduğu açıktır.

3.3.3. Lemma

$R > 1$ olmak üzere $f: \bar{D}_R \cup [R, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ şeklinde tanımlı f fonksiyonu $\bar{D}_R \cup [R, \infty)$ da sürekli, D_R de analitik yani her $z \in D_R$ için $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ olsun. Her $k = 0, 1, \dots$ için $|c_k| \leq M \frac{A^k}{k!}$ (bu eşitsizlik her $z \in D_R$ için $|f(z)| \leq M e^{A|z|}$ olmasını gerektirir) ve her $x \in [R, \infty)$ için $|f(x)| \leq C e^{Bx}$ olacak biçimde $M, C, B > 0$ ve $A \in \left(\frac{1}{R}, 1\right)$ sabitleri bulunsun. Bu durumda her $k = 0, 1, \dots$ için $e_k(z) = z^k$ olmak üzere her $z \in D_R$ için

$$S_{a_n, b_n}(f; z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k S_{a_n, b_n}(e_k; z) \quad (3.8)$$

eşitliği sağlanır (Çetin ve İspir, 2013).

İspat

Herhangi bir $m \in \mathbb{N}$ için

$$f_m(z) = \begin{cases} \sum_{j=0}^m c_j z^j, & |z| \leq r \text{ ise} \\ f(x) & , x \in (r, +\infty) \text{ ise} \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. f fonksiyonu kompakt disklerde üstel büyüyen analitik bir fonksiyon olduğundan açıktır ki her $m \in \mathbb{N}$ ve $x \in [0, \infty)$ için $|f_m(x)| \leq C_m e^{B_m x}$ sağlanır. Böylece her $m, n \in \mathbb{N}$ ve $z \in \mathbb{C}$ için

$$\begin{aligned} |S_{a_n, b_n}(f_m; z)| &= \left| e^{-\frac{a_n}{b_n} z} \sum_{j=0}^{\infty} f_m \left(\frac{j b_n}{a_n} \right) \frac{(a_n z)^j}{j! b_n^j} \right| \\ &\leq \left| e^{-\frac{a_n}{b_n} z} \sum_{j=0}^{\infty} \left| f_m \left(\frac{j b_n}{a_n} \right) \right| \frac{(a_n |z|)^j}{j! b_n^j} \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left| e^{-\frac{a_n z}{b_n}} \right| \sum_{j=0}^{\infty} C_m e^{B_m \frac{j b_n}{a_n}} \frac{(a_n |z|)^j}{j! b_n^j} \\
&= C_m \left| e^{-\frac{a_n z}{b_n}} \right| \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{a_n}{b_n} |z| e^{B_m \frac{b_n}{a_n}} \right)^j}{j!}
\end{aligned} \tag{3.9}$$

elde edilir. Son seri oran testinden yakınsak olduğundan dolayı $S_{a_n, b_n}(f_m; z)$ iyi tanımlı ve analitiktir. Benzer düşünceyle f üstel büyümeye sahip analitik bir fonksiyon olduğundan $S_{a_n, b_n}(f; z)$ nin de iyi tanımlı ve analitik olduğu elde edilir.

Her $m \in \mathbb{N}$ ve $k = 0, 1, \dots$ için

$$f_{m,k}(z) = \begin{cases} c_k e_k(z), & |z| \leq r \quad \text{ise} \\ \frac{f(x)}{m+1}, & x \in (r, +\infty) \text{ ise} \end{cases}$$

ile gösterelim. Açık ki her $f_{m,k}$ fonksiyonu $[0, \infty)$ da üstel büyümeye sahiptir ve $f_m(z) = \sum_{k=0}^m f_{m,k}(z)$ tir. S_{a_n, b_n} nin lineerliğinden her $|z| \leq r$ için

$$S_{a_n, b_n}(f_m; z) = S_{a_n, b_n} \left(\sum_{k=0}^m c_k e_k; z \right) = \sum_{k=0}^m c_k S_{a_n, b_n}(e_k; z)$$

sağlanır. O halde her $n \in \mathbb{N}$ ve $|z| \leq r$ için

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_{a_n, b_n}(f_m; z) = S_{a_n, b_n}(f; z)$$

olduğunu göstermek yeterlidir. Bunun için ise;

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|f_m - f\|_r = \lim_{m \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=0}^m c_k e_k(z) - \sum_{k=0}^{\infty} c_k e_k(z) \right\|_r, |z| \leq r$$

$$\begin{aligned}
&= \left\| \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^m c_k e_k(z) - \sum_{k=0}^{\infty} c_k e_k(z) \right\|_r \\
&= 0
\end{aligned}$$

ve $\|\cdot\|_{B[0,\infty)}$, $C[0,+\infty)$ daki düzgün normu göstermek üzere, $x \in (r,+\infty)$ için $f_m(x) = f(x)$ olduğundan $\|f_m - f\|_{B[0,\infty)} \leq \|f_m - f\|_r$ kalır ve diğer taraftan her $|z| \leq r$ için

$$\begin{aligned}
|S_{a_n,b_n}(f_m; z) - S_{a_n,b_n}(f; z)| &= \left| e^{-\frac{a_n z}{b_n}} \sum_{j=0}^{\infty} f_m \left(\frac{j b_n}{a_n} \right) \frac{(a_n z)^j}{j! b_n^j} - e^{-\frac{a_n z}{b_n}} \sum_{j=0}^{\infty} f \left(\frac{j b_n}{a_n} \right) \frac{(a_n z)^j}{j! b_n^j} \right| \\
&= \left| e^{-\frac{a_n z}{b_n}} \sum_{j=0}^{\infty} (f_m - f) \left(\frac{j b_n}{a_n} \right) \frac{(a_n z)^j}{j! b_n^j} \right| \\
&\leq \left| e^{-\frac{a_n z}{b_n}} \right| \sum_{j=0}^{\infty} \left| (f_m - f) \left(\frac{j b_n}{a_n} \right) \right| \frac{(a_n |z|)^j}{j! b_n^j} \\
&\leq \left| e^{-\frac{a_n z}{b_n}} \right| \|f_m - f\|_{B[0,\infty)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(a_n |z|)^j}{j! b_n^j}
\end{aligned}$$

bulunur. Son seriye oran testi uygulanırsa bu serinin yakınsak olduğu görülür. Buradan $\lim_{m \rightarrow \infty} \|f_m - f\|_r = 0$ ve $\|f_m - f\|_{B[0,\infty)} \leq \|f_m - f\|_r$ ifadeleri dikkate alınırsa $m \rightarrow \infty$ için $\|f_m - f\|_{B[0,\infty)} \rightarrow 0$ olur. Böylece $\lim_{m \rightarrow \infty} S_{a_n,b_n}(f_m; z) = S_{a_n,b_n}(f; z)$ elde edilir ve ispat tamamlanır.

3.3.2. S_{a_n,b_n} Operatörünün Yakınsama Oranı

Bu kısımda $(S_{a_n,b_n}(f))$ dizisinin f ye yakınsama ve eşanlı yakınsama oranına ilişkin sonuçlar verilecektir.

3.3.4. Teorem

$R > 1$ olmak üzere $f: \bar{D}_R \cup [R, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu $\bar{D}_R \cup [R, \infty)$ da sürekli, D_R de analitik yani her $z \in D_R$ için $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ olsun. Her $k = 0, 1, \dots$ için $|c_k| \leq M \frac{A^k}{k!}$ (bu eşitsizlik her $z \in D_R$ için $|f(z)| \leq M e^{A|z|}$ olmasını gerektirir) ve her $x \in [R, \infty)$ için $|f(x)| \leq C e^{Bx}$ olacak biçimde $M, C, B > 0$ ve $A \in \left(\frac{1}{R}, 1\right)$ sabitlerinin bulunduğunu kabul edelim. Bu durumda

(i) $1 \leq r < \frac{1}{A}$ keyfi sabit olmak üzere her $|z| \leq r$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$|S_{a_n, b_n}(f; z) - f(z)| \leq \frac{b_n}{a_n} C_r(f)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada

$$C_r(f) = \frac{M}{2r} \sum_{k=2}^{\infty} (k+1)(rA)^k < \infty$$

dur.

(ii) S_{a_n, b_n} operatörü ile eşanlı yaklaşım için, $1 \leq r < r_1 < \frac{1}{A}$ keyfi sabitler olmak üzere her $|z| \leq r$ ve $n, p \in \mathbb{N}$ için

$$|S_{a_n, b_n}^{(p)}(f; z) - f^{(p)}(z)| \leq \frac{b_n}{a_n} \frac{p! r_1 C_{r_1}(f)}{(r_1 - r)^{p+1}}$$

eşitsizliği gerçekleşir. Buradaki $C_{r_1}(f)$ ifadesi (i) de tanımlandığı gibidir (Çetin ve İspir, 2013).

İspat

(i) f fonksiyonu üzerindeki hipotez dikkate alındığında $k = 0, 1, \dots$ için $e_k(z) = z^k$ olmak üzere her $z \in D_R$ için Lemma 3.3.3 ten;

$$S_{a_n, b_n}(f; z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k S_{a_n, b_n}(e_k; z)$$

olur. Eş. 3.4 formülü yardımıyla

$$S_{a_n, b_n}(e_k; z) = e^{-\frac{a_n}{b_n}z} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{j b_n}{a_n}\right)^k \frac{(a_n z)^j}{j! b_n^j} \quad (3.10)$$

şeklinde yazılabildiğinden her $z \in \mathbb{C}$ için

$$\begin{aligned} S_{a_n, b_n}(e_0; z) &= e^{-\frac{a_n}{b_n}z} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{a_n}{b_n}z\right)^j}{j!} \\ &= e^{-\frac{a_n}{b_n}z} e^{\frac{a_n}{b_n}z} = 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{a_n, b_n}(e_1; z) &= e^{-\frac{a_n}{b_n}z} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{j b_n (a_n z)^j}{a_n j! b_n^j} \\ &= e^{-\frac{a_n}{b_n}z} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(a_n z)^{j-1}}{(j-1)! b_n^{j-1}} z \\ &= z e^{-\frac{a_n}{b_n}z} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{a_n}{b_n}z\right)^j}{j!} \\ &= z e^{-\frac{a_n}{b_n}z} e^{\frac{a_n}{b_n}z} = z \end{aligned}$$

bulunur. Böylece Lemma 3.3.3 ve $S_{a_n, b_n}(e_0; z) = 1$, $S_{a_n, b_n}(e_1; z) = z$ ifadeleri birlikte düşünüldüğünde

$$\begin{aligned} |S_{a_n, b_n}(f; z) - f(z)| &= \left| \sum_{k=0}^{\infty} c_k S_{a_n, b_n}(e_k; z) - \sum_{k=0}^{\infty} c_k e_k(z) \right| \\ &\leq \sum_{k=2}^{\infty} |c_k| |S_{a_n, b_n}(e_k; z) - e_k(z)| \end{aligned} \quad (3.11)$$

eşitsizliği elde edilir. Şimdi de $|S_{a_n, b_n}(e_k; z) - e_k(z)|$ için bir üst sınır bulalım. Eş. 3.10 da $z \neq 0$ ye göre türev alırsa

$$\begin{aligned} S'_{a_n, b_n}(e_k; z) &= \frac{d}{dz} \left\{ e^{-\frac{a_n z}{b_n}} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{j b_n}{a_n} \right)^k \frac{(a_n z)^j}{j! b_n^j} \right\} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{j b_n}{a_n} \right)^k \frac{1}{j! b_n^j} \frac{d}{dz} \left\{ e^{-\frac{a_n z}{b_n}} (a_n z)^j \right\} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{j b_n}{a_n} \right)^k \frac{1}{j! b_n^j} \left\{ -\frac{a_n}{b_n} e^{-\frac{a_n z}{b_n}} (a_n z)^j + e^{-\frac{a_n z}{b_n}} j (a_n z)^{j-1} a_n \right\} \\ &= -\frac{a_n}{b_n} e^{-\frac{a_n z}{b_n}} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{j b_n}{a_n} \right)^k \frac{(a_n z)^j}{j! b_n^j} \\ &\quad + e^{-\frac{a_n z}{b_n}} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{j b_n}{a_n} \right)^k j \frac{(a_n z)^{j-1} a_n}{j! b_n^{j-1} b_n} \\ &= -\frac{a_n}{b_n} S_{a_n, b_n}(e_k; z) + \frac{a_n}{z b_n} e^{-\frac{a_n z}{b_n}} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{j b_n}{a_n} \right)^{k+1} \frac{(a_n z)^j}{j! b_n^j} \end{aligned}$$

$$= -\frac{a_n}{b_n} S_{a_n, b_n}(e_k; z) + \frac{a_n}{zb_n} S_{a_n, b_n}(e_{k+1}; z)$$

olur. Buradan da her $n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}$ ve $k = 0, 1, \dots$ için

$$S_{a_n, b_n}(e_{k+1}; z) = \frac{zb_n}{a_n} S'_{a_n, b_n}(e_k; z) + z S_{a_n, b_n}(e_k; z) \quad (3.12)$$

indirgeme bağıntısı elde edilir. Eş. 3.12 kullanılarak her $n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}$ ve $k = 0, 1, \dots$ için

$$\begin{aligned} S_{a_n, b_n}(e_k; z) - z^k &= \frac{zb_n}{a_n} [S_{a_n, b_n}(e_{k-1}; z) - z^{k-1}]' + \frac{zb_n}{a_n} (k-1)z^{k-2} \\ &\quad + z[S_{a_n, b_n}(e_{k-1}; z) - z^{k-1}] + z z^{k-1} - z^k \\ &= \frac{zb_n}{a_n} [S_{a_n, b_n}(e_{k-1}; z) - z^{k-1}]' + z[S_{a_n, b_n}(e_{k-1}; z) - z^{k-1}] \\ &\quad + (k-1) \frac{b_n}{a_n} z^{k-1} \end{aligned} \quad (3.13)$$

şeklinde yeni bir indirgeme bağıntısı bulunur. Son eşitlikte $|z| \leq r$ için modüle geçilirse her $k \geq 2$ için

$$\begin{aligned} |S_{a_n, b_n}(e_k; z) - z^k| &= \left| \frac{zb_n}{a_n} [S_{a_n, b_n}(e_{k-1}; z) - z^{k-1}]' + z[S_{a_n, b_n}(e_{k-1}; z) - z^{k-1}] \right. \\ &\quad \left. + (k-1) \frac{b_n}{a_n} z^{k-1} \right| \\ &\leq \frac{|z|b_n}{a_n} \left| [S_{a_n, b_n}(e_{k-1}; z) - z^{k-1}]' \right| + |z| |S_{a_n, b_n}(e_{k-1}; z) - z^{k-1}| \\ &\quad + (k-1) \frac{b_n}{a_n} |z|^{k-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{rb_n}{a_n} \left| [S_{a_n, b_n}(e_{k-1}; z) - z^{k-1}]' \right| + r |S_{a_n, b_n}(e_{k-1}; z) - z^{k-1}| \\ &\quad + (k-1) \frac{b_n}{a_n} r^{k-1} \end{aligned}$$

olduğu görülür. Diğer taraftan Lemma 3.3.2 den $S_{a_n, b_n}(e_{k-1}; z)$ fonksiyonu $k-1$. dereceden bir polinom olup, Teorem 2.1.8 Bernstein eşitsizliği yardımıyla yazılabilen aşağıdaki

$$\left| [S_{a_n, b_n}(e_{k-1}; z) - z^{k-1}]' \right| \leq \frac{k-1}{r} \max \{ |S_{a_n, b_n}(e_{k-1}; z) - z^{k-1}| : |z| \leq r \}$$

eşitsizliği yukarıdaki son eşitsizlikte yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} |S_{a_n, b_n}(e_k; z) - z^k| &\leq (k-1) \frac{b_n}{a_n} \|S_{a_n, b_n}(e_{k-1}; z) - z^{k-1}\|_r + r |S_{a_n, b_n}(e_{k-1}; z) - z^{k-1}| \\ &\quad + (k-1) \frac{b_n}{a_n} r^{k-1} \end{aligned}$$

elde edilir ve

$$\begin{aligned} |S_{a_n, b_n}(e_k; z) - z^k| &\leq (k-1) \frac{b_n}{a_n} \|S_{a_n, b_n}(e_{k-1}; z) - z^{k-1}\|_r \\ &\quad + r \|S_{a_n, b_n}(e_{k-1}; z) - z^{k-1}\|_r + (k-1) \frac{b_n}{a_n} r^{k-1} \\ &= \left[(k-1) \frac{b_n}{a_n} + r \right] \|S_{a_n, b_n}(e_{k-1}; z) - z^{k-1}\|_r + (k-1) \frac{b_n}{a_n} r^{k-1} \quad (3.14) \end{aligned}$$

olur. Şimdi de $\|S_{a_n, b_n}(e_{k-1}; z) - z^{k-1}\|_r$ için bir üst sınır bulalım. Bu amaçla Eş. 3.13 ten $k=2$ için;

$$\begin{aligned}
S_{a_n, b_n}(e_2; z) - z^2 &= z \frac{b_n}{a_n} [S_{a_n, b_n}(e_1; z) - z]' + z[S_{a_n, b_n}(e_1; z) - z] + \frac{b_n}{a_n} z \\
&= z \frac{b_n}{a_n} [z - z]' + z[z - z] + \frac{b_n}{a_n} z \\
&= \frac{b_n}{a_n} z
\end{aligned}$$

bulunur ve

$$\|S_{a_n, b_n}(e_2; z) - z^2\|_r \leq \frac{b_n}{a_n} r$$

elde edilir. $k = 3$ için;

$$\begin{aligned}
S_{a_n, b_n}(e_3; z) - z^3 &= z \frac{b_n}{a_n} [S_{a_n, b_n}(e_2; z) - z^2]' + z[S_{a_n, b_n}(e_2; z) - z^2] + 2 \frac{b_n}{a_n} z^2 \\
&= z \frac{b_n}{a_n} \left[\frac{b_n}{a_n} z \right]' + z \left[\frac{b_n}{a_n} z \right] + 2 \frac{b_n}{a_n} z^2 \\
&= z \left(\frac{b_n}{a_n} \right)^2 + z^2 \frac{b_n}{a_n} + 2 \frac{b_n}{a_n} z^2 \\
&= \left(\frac{b_n}{a_n} \right)^2 z + 3 \frac{b_n}{a_n} z^2
\end{aligned}$$

olur ve

$$\|S_{a_n, b_n}(e_3; z) - z^3\|_r \leq \left(\frac{b_n}{a_n} \right)^2 r + 3 \frac{b_n}{a_n} r^2$$

yazılır. Burada $\frac{b_n}{a_n} \leq 1$ ve $r \geq 1$ olduğu göz önünde bulundurulursa

$$\begin{aligned} \|S_{a_n, b_n}(e_3; z) - z^3\|_r &\leq \frac{b_n}{a_n} r^2 + 3 \frac{b_n}{a_n} r^2 \\ &= 4 \frac{b_n}{a_n} r^2 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu şekilde devam edilirse k ya göre matematiksel induksiyonla her $k \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$ ve $|z| \leq r$ için

$$\|S_{a_n, b_n}(e_k; z) - e_k(z)\|_r \leq \frac{(k+1)! b_n}{2 a_n} r^{k-1} \quad (3.15)$$

eşitsizliği sağlanır. Eş. 3.15, Eş. 3.14 te kullanılırsa

$$|S_{a_n, b_n}(e_k; z) - e_k(z)| \leq \left[(k-1) \frac{b_n}{a_n} + r \right] \frac{k! b_n}{2 a_n} r^{k-2} + (k-1) \frac{b_n}{a_n} r^{k-1}$$

olur ve $\frac{b_n}{a_n} \leq 1$ olduğundan

$$|S_{a_n, b_n}(e_k; z) - e_k(z)| \leq [(k-1) + r] \frac{k! b_n}{2 a_n} r^{k-2} + (k-1) \frac{b_n}{a_n} r^{k-1}$$

şeklinde yazılabilir. O halde geriye her $k \geq 2$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$[(k-1) + r] \frac{k! b_n}{2 a_n} r^{k-2} + (k-1) \frac{b_n}{a_n} r^{k-1} \leq \frac{(k+1)! b_n}{2 a_n} r^{k-1}$$

eşitsizliğini ya da basit bir düzenlemeyle yukarıdaki eşitsizliğe denk olan aşağıdaki

$$[(k-1) + r]k! + 2(k-1)r \leq (k+1)! r$$

eşitsizliği ispatlamak kalır. Yukarıdaki eşitsizliğin sol tarafını $A(k)$, sağ tarafını ise $B(k)$ ile gösterelim. $k = 2$ için

$$\begin{aligned} [1+r]2! + 2r &\leq 3!r \\ 2 + 4r &\leq 6r \end{aligned}$$

elde edilir ve her $r \geq 1$ için $A(2) \leq B(2)$ olur. Kabul edelim ki $A(k) \leq B(k)$ ifadesi $k = n$ için doğru olsun. Bu durumda,

$$[(n-1)+r]n! + 2(n-1)r \leq (n+1)!r \quad (3.16)$$

ifadesi geçerlidir. Şimdi $k = n + 1$ için bu eşitsizliğin doğru olduğunu yani

$$(n+r)(n+1)! + 2nr \leq (n+2)!r \quad (3.17)$$

eşitsizliğinin gerçekleştiğini gösterelim. Eş. 3.16'nın her iki yanını $n + 2$ ile çarparsak

$$\begin{aligned} (n+2)!r &\geq [(n-1)+r](n+2)n! + 2(n+2)(n-1)r \\ &= [(n-1)+r](n+1)! + [(n-1)+r]n! + 2(n+2)(n-1)r \\ &= (n+r)(n+1)! - (n+1)! + [(n-1)+r]n! + 2n(n-1)r + 4(n-1)r \\ &= (n+r)(n+1)! + (-n-1+n-1+r)n! + 4nr + 2n(n-1)r - 4r \\ &= (n+r)(n+1)! + 2nr + (r-2)n! + 2n(n-1)r + 2nr - 4r \\ &= (n+r)(n+1)! + 2nr + (r-2)n! + 2r[n(n-1) + n - 2] \\ &\geq (n+r)(n+1)! + 2nr \end{aligned}$$

elde edilir. Çünkü her $r \geq 2$ ve $n \geq 2$ için

$$(r-2)n! + 2r[n(n-1) + n - 2] \geq 0$$

sağlanır. Bu ise her $r \geq 2$ ve $n \geq 2$ için $B(n+1) \geq A(n+1)$ olduğunu gösterir. Diğer taraftan Eş. 3.17 ifadesi $r = 1$ için incelenirse

$$(n+1)(n+1)! + 2n \leq (n+2)!$$

yazılır ve aşağıdaki düzenlemeyle

$$\begin{aligned}
(n+1)(n+1)! + 2n &\leq (n+2)! \\
2n &\leq [n+2-n-1](n+1)! \\
2n &\leq (n+1)!
\end{aligned}$$

biçiminde elde edilen son eşitsizliğin de her $n \geq 2$ için sağlandığı görülür. Böylece her $r \geq 1$ ve $n \geq 2$ için $B(n+1) \geq A(n+1)$ olur. Demek ki $A(k) \leq B(k)$ ifadesi her $k \geq 2$ için doğrudur.

Dolayısıyla c_k üzerindeki hipotez ile birlikte Eş. 3.15 ifadesi Eş. 3.11 de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
|S_{a_n, b_n}(f; z) - f(z)| &\leq \sum_{k=2}^{\infty} M \frac{A^k (k+1)!}{k!} \frac{b_n}{2 a_n} r^{k-1} \\
&= \frac{b_n}{a_n} \frac{M}{2r} \sum_{k=2}^{\infty} (k+1)(rA)^k \\
&= \frac{b_n}{a_n} C_r(f)
\end{aligned}$$

elde edilir. Her $1 \leq r < \frac{1}{A}$ için

$$C_r(f) = \frac{M}{2r} \sum_{k=2}^{\infty} (k+1)(rA)^k < \infty$$

dur. Çünkü $f(z) = \sum_{k=2}^{\infty} z^{k+1}$ ve onun türevi $f'(z) = \sum_{k=2}^{\infty} (k+1)z^k$ serisi herhangi $1 \leq r < \frac{1}{A}$ için $|z| \leq r$ de mutlak ve düzgün yakınsaktır.

(ii) Eşanlı yaklaşım için, $1 \leq r < r_1 < \frac{1}{A}$ keyfi sabitler ve $n, p \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\gamma, 0$ merkezli $r_1 > r$ yarıçaplı çemberi gösterebilirsin. Herhangi $|z| \leq r$ ve $v \in \gamma$ için $|v - z| \geq r_1 - r$ olduğundan Teorem 2.1.4 ve (i) den

$$\begin{aligned}
\left| S_{a_n, b_n}^{(p)}(f; z) - f^{(p)}(z) \right| &= \left| \frac{p!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{S_{a_n, b_n}(f; v) - f(v)}{(v - z)^{p+1}} dv \right| \\
&\leq \frac{p!}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{|S_{a_n, b_n}(f; v) - f(v)|}{|v - z|^{p+1}} |dv| \\
&\leq \frac{p!}{2\pi} \frac{\frac{b_n}{a_n} C_{r_1}(f)}{(r_1 - r)^{p+1}} \int_{\gamma} |dv| \\
&= \frac{p!}{2\pi} \frac{\frac{b_n}{a_n} C_{r_1}(f)}{(r_1 - r)^{p+1}} 2\pi r_1 \\
&= \frac{b_n}{a_n} C_{r_1}(f) \frac{p! r_1}{(r_1 - r)^{p+1}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $C_{r_1}(f)$ ifadesi (i) de verilen özellikleri sağlar. Böylece operatör ve operatörün türevi yardımıyla analitik fonksiyonların yaklaşım oranına ilişkin bir üst oranın $\frac{b_n}{a_n}$ olduğu sonucuna ulaşılır.

3.3.3. Voronovskaja Tip Sonuç

3.3.5. Teorem

f fonksiyonu ve R, M, C, B, A sabitleri için Teorem 3.3.4 teki hipotezler geçerli olsun ve $1 \leq r < \frac{1}{A}$ sabitini alalım. Bu durumda her $|z| \leq r$ ve $n \in \mathbb{N}$ için aşağıdaki Voronovskaja-tip sonuç sağlanır:

$$\left| S_{a_n, b_n}(f; z) - f(z) - \frac{b_n}{2a_n} z f''(z) \right| \leq \left(\frac{b_n}{a_n} \right)^2 M_r(f).$$

Burada

$$M_r(f) = \frac{3MA|z|}{r^2} \sum_{k=2}^{\infty} (k+1)(rA)^{k-1} < \infty$$

dur (Çetin ve İspir, 2013).

İspat

$k = 0, 1, \dots$ için $e_k(z) = z^k$ olmak üzere her $z \in D_R$ için Lemma 3.3.3 ten

$$S_{a_n, b_n}(f; z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k S_{a_n, b_n}(e_k; z)$$

yazabiliriz. Buradan, $S_{a_n, b_n}(e_0; z) = 1$, $S_{a_n, b_n}(e_1; z) = z$ eşitliklerinin de kullanılmasıyla her $z \in D_R$, $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} \left| S_{a_n, b_n}(f; z) - f(z) - \frac{b_n}{2a_n} z f''(z) \right| &= \left| \sum_{k=0}^{\infty} c_k S_{a_n, b_n}(e_k; z) - \sum_{k=0}^{\infty} c_k e_k(z) \right. \\ &\quad \left. - \frac{b_n}{2a_n} z \sum_{k=2}^{\infty} c_k k(k-1) z^{k-2} \right| \\ &= |c_0[S_{a_n, b_n}(e_0; z) - e_0(z)] + c_1[S_{a_n, b_n}(e_1; z) - e_1(z)] \\ &\quad + \sum_{k=2}^{\infty} c_k S_{a_n, b_n}(e_k; z) - \sum_{k=2}^{\infty} c_k e_k(z) \\ &\quad - \frac{b_n}{2a_n} z \sum_{k=2}^{\infty} c_k k(k-1) z^{k-2} | \\ &= \left| \sum_{k=2}^{\infty} c_k S_{a_n, b_n}(e_k; z) - \sum_{k=2}^{\infty} c_k e_k(z) \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{b_n}{2a_n} \sum_{k=2}^{\infty} c_k k(k-1) z^{k-1} \Big| \\
& = \left| \sum_{k=2}^{\infty} c_k \left[S_{a_n, b_n}(e_k; z) - e_k(z) - \frac{b_n}{2a_n} k(k-1) z^{k-1} \right] \right| \\
& \leq \sum_{k=2}^{\infty} |c_k| \left| S_{a_n, b_n}(e_k; z) - e_k(z) - \frac{b_n}{2a_n} k(k-1) z^{k-1} \right| \quad (3.18)
\end{aligned}$$

olur. Bu durumda $\left| S_{a_n, b_n}(e_k; z) - e_k(z) - \frac{b_n}{2a_n} k(k-1) z^{k-1} \right|$ için bir üst sınır bulmalıyız. $E_{k,n}(z) = S_{a_n, b_n}(e_k; z) - e_k(z) - \frac{b_n}{2a_n} k(k-1) z^{k-1}$ ile gösterelim. Eş. 3.13 teki indirgeme bağıntısı kullanılırsa her $k \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$ ve $z \in D_R$ için

$$\begin{aligned}
E_{k,n}(z) &= \frac{zb_n}{a_n} [S_{a_n, b_n}(e_{k-1}; z) - e_{k-1}(z)]' + z[S_{a_n, b_n}(e_{k-1}; z) - e_{k-1}(z)] \\
&\quad + (k-1) \frac{b_n}{a_n} z^{k-1} - \frac{b_n}{2a_n} k(k-1) z^{k-1} \\
&= \frac{zb_n}{a_n} \left[S_{a_n, b_n}(e_{k-1}; z) - e_{k-1}(z) - \frac{b_n}{2a_n} (k-1)(k-2) z^{k-2} \right]' \\
&\quad + \frac{zb_n}{a_n} \left[\frac{b_n}{2a_n} (k-1)(k-2) z^{k-2} \right]' + z[S_{a_n, b_n}(e_{k-1}; z) - e_{k-1}(z)] \\
&\quad - \frac{b_n}{2a_n} (k-1)(k-2) z^{k-2} \Big] + z \frac{b_n}{2a_n} (k-1)(k-2) z^{k-2} \\
&\quad + (k-1) \frac{b_n}{a_n} z^{k-1} \left[1 - \frac{k}{2} \right] \\
&= \frac{zb_n}{a_n} E'_{k-1,n}(z) + \frac{zb_n}{a_n} \left[\frac{b_n}{2a_n} (k-1)(k-2)^2 z^{k-3} \right] + z E_{k-1,n}(z)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{b_n}{2a_n} (k-1)(k-2)z^{k-1} - (k-1) \frac{(k-2)}{2} \frac{b_n}{a_n} z^{k-1} \\
& = \frac{zb_n}{a_n} E'_{k-1,n}(z) + zE_{k-1,n}(z) + \frac{zb_n}{a_n} \left[\frac{b_n}{2a_n} (k-1)(k-2)^2 z^{k-3} \right] \\
& = \frac{zb_n}{a_n} E'_{k-1,n}(z) + zE_{k-1,n}(z) + \frac{b_n^2}{2a_n^2} (k-1)(k-2)^2 z^{k-2}
\end{aligned}$$

şeklinde $E_{k,n}(z)$ için bir indirgeme bağıntısı elde edilir. Son eşitlikte modüle geçilirse

$$\begin{aligned}
|E_{k,n}(z)| & = \left| \frac{zb_n}{a_n} E'_{k-1,n}(z) + zE_{k-1,n}(z) + \frac{b_n^2}{2a_n^2} (k-1)(k-2)^2 z^{k-2} \right| \\
& \leq \frac{|z|b_n}{2a_n} 2|E'_{k-1,n}(z)| + |z||E_{k-1,n}(z)| + \frac{|z|b_n}{2a_n} \frac{b_n}{a_n} (k-1)(k-2)^2 |z|^{k-3} \quad (3.19)
\end{aligned}$$

bulunur. Yukarıdaki ifade de yer alan $E_{k-1,n}(z)$ polinomu

$$E_{k-1,n}(z) = S_{a_n, b_n}(e_{k-1}; z) - e_{k-1}(z) - \frac{b_n}{2a_n} (k-1)(k-2)z^{k-2}$$

olarak yazılabilir. Lemma 3.3.2 den $S_{a_n, b_n}(e_{k-1}; z)$ fonksiyonu $k-1$. dereceden bir polinom olduğundan $E_{k-1,n}(z)$ in derecesi $\leq k-1$ olur. O halde Teorem 2.1.8 kullanılırsa Eş. 3.19 ifadesi basit düzenlemelerle

$$\begin{aligned}
|E_{k,n}(z)| & \leq \frac{|z|b_n}{2a_n} 2 \frac{(k-1)}{r} \|E_{k-1,n}(z)\|_r + r|E_{k-1,n}(z)| \\
& \quad + \frac{|z|b_n}{2a_n} \frac{b_n}{a_n} (k-1)(k-2)^2 r^{k-3} \\
& \leq r|E_{k-1,n}(z)| + \frac{|z|b_n}{2a_n} \left[2 \frac{(k-1)}{r} \|E_{k-1,n}(z)\|_r + \frac{b_n}{a_n} (k-1)(k-2)^2 r^{k-3} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= r|E_{k-1,n}(z)| + \frac{|z|b_n}{2a_n} \left[2 \frac{(k-1)}{r} \|S_{a_n,b_n}(e_{k-1};z) - e_{k-1}(z)\| \right. \\
&\quad \left. - \frac{b_n}{2a_n} (k-1)(k-2)z^{k-2} \right\|_r + \frac{b_n}{a_n} (k-1)(k-2)^2 r^{k-3} \left. \right] \\
&\leq r|E_{k-1,n}(z)| + \frac{|z|b_n}{2a_n} \left[2 \frac{(k-1)}{r} \|S_{a_n,b_n}(e_{k-1};z) - e_{k-1}(z)\|_r \right. \\
&\quad \left. + 2 \frac{(k-1)}{r} \frac{b_n}{2a_n} (k-1)(k-2)r^{k-2} + \frac{b_n}{a_n} (k-1)(k-2)^2 r^{k-3} \right] \\
&= r|E_{k-1,n}(z)| + \frac{|z|b_n}{2a_n} \left[2 \frac{(k-1)}{r} \|S_{a_n,b_n}(e_{k-1};z) - e_{k-1}(z)\|_r \right. \\
&\quad \left. + \frac{b_n}{a_n} (k-1)^2 (k-2)r^{k-3} + \frac{b_n}{a_n} (k-1)(k-2)^2 r^{k-3} \right]
\end{aligned}$$

bulunur. Eş. 3.15 ifadesi yukarıda yerine yazılırsa her $|z| \leq r$ için

$$\begin{aligned}
|E_{k,n}(z)| &\leq r|E_{k-1,n}(z)| + \frac{|z|b_n}{2a_n} \left[2 \frac{(k-1)}{r} \frac{k!}{2} \frac{b_n}{a_n} r^{k-2} + \frac{b_n}{a_n} (k-1)^2 (k-2)r^{k-3} \right. \\
&\quad \left. + \frac{b_n}{a_n} (k-1)(k-2)^2 r^{k-3} \right] \\
&\leq r|E_{k-1,n}(z)| + \frac{|z|b_n}{2a_n} \left[\frac{b_n}{a_n} (k-1)k! r^{k-3} + \frac{b_n}{a_n} (k-1)k! r^{k-3} \right. \\
&\quad \left. + \frac{b_n}{a_n} (k-1)k! r^{k-3} \right] \\
&= r|E_{k-1,n}(z)| + \frac{3|z|b_n^2}{2a_n^2} r^{k-3} (k-1)k!
\end{aligned}$$

$$\leq r|E_{k-1,n}(z)| + \frac{3|z|b_n^2}{2a_n^2} r^{k-3}(k+1)! \quad (3.20)$$

olduğu görülür. $k = 0$ için $E_{0,n}(z) = S_{a_n,b_n}(e_0; z) - e_0(z) = 1 - 1 = 0$ ve $k = 1$ için $E_{1,n}(z) = S_{a_n,b_n}(e_1; z) - e_1(z) = z - z = 0$ dır. Eş. 3.20 de $k = 2, 3, \dots$ için adım adım yazılırsa

$$|E_{2,n}(z)| \leq r|E_{1,n}(z)| + \frac{3|z|b_n^2}{2a_n^2} r^{-1} \cdot 3! = \frac{3|z|b_n^2}{2a_n^2} r^{-1} \cdot 3!$$

$$|E_{3,n}(z)| \leq r|E_{2,n}(z)| + \frac{3|z|b_n^2}{2a_n^2} r^0 \cdot 4!$$

$$\leq \frac{3|z|b_n^2}{2a_n^2} r^0 \cdot 3! + \frac{3|z|b_n^2}{2a_n^2} r^0 \cdot 4! = \frac{3|z|b_n^2}{2a_n^2} r^0 (3! + 4!)$$

$$|E_{4,n}(z)| \leq r|E_{3,n}(z)| + \frac{3|z|b_n^2}{2a_n^2} r^1 \cdot 5!$$

$$\leq \frac{3|z|b_n^2}{2a_n^2} r^1 (3! + 4!) + \frac{3|z|b_n^2}{2a_n^2} r^1 \cdot 5!$$

$$= \frac{3|z|b_n^2}{2a_n^2} r^1 (3! + 4! + 5!)$$

⋮

$$|E_{k,n}(z)| \leq \frac{3|z|b_n^2}{2a_n^2} r^{k-3} \sum_{j=3}^{k+1} j!$$

$$\leq \frac{3|z|b_n^2}{a_n^2} r^{k-3} (k+1)!$$

bulunur. Bu ifade Eş. 3.18 de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\left| S_{a_n, b_n}(f; z) - f(z) - \frac{b_n}{2a_n} z f''(z) \right| &\leq \sum_{k=2}^{\infty} |c_k| |E_{k,n}(z)| \\
&\leq \sum_{k=2}^{\infty} M \frac{A^k}{k!} \frac{3|z|b_n^2}{a_n^2} r^{k-3} (k+1)! \\
&= \frac{3M|z|b_n^2}{a_n^2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{A^k}{k!} r^{k-3} (k+1)! \\
&= \frac{b_n^2}{a_n^2} \frac{3MA|z|}{r^2} \sum_{k=2}^{\infty} (k+1)(rA)^{k-1}
\end{aligned}$$

olur. $rA < 1$ için $\sum_{k=2}^{\infty} (k+1)(rA)^{k-1} < \infty$ olduğu açıktır.

3.3.4. Yaklaşımın Tam Mertebesi

Aşağıdaki teoremde yukarıda elde edilen nicel tahminli Voronovskaja-tip sonuç kullanılarak $|S_{a_n, b_n}(f; z) - f(z)|$ için bir alt tahmin elde edilecektir.

3.3.6. Teorem

f fonksiyonu ve R, M, C, B, A sabitleri için Teorem 3.3.4 teki hipotezler sağlansın. Eğer f derecesi ≤ 1 olan bir polinom değilse, bu durumda $1 \leq r < \frac{1}{A}$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\|S_{a_n, b_n}(f) - f\|_r \geq \frac{b_n}{a_n} C_r(f)$$

eşitsizliği gerçekleşir. Burada $C_r(f)$ sabiti sadece f ve r ye bağlıdır (Çetin ve İspir, 2013).

İspat

Her $z \in D_R$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}
S_{a_n, b_n}(f; z) - f(z) &= \left\{ S_{a_n, b_n}(f; z) - f(z) - \frac{b_n}{2a_n} z f''(z) \right\} + \frac{b_n}{2a_n} z f''(z) \\
&= \frac{b_n}{a_n} \left\{ \frac{z}{2} f''(z) + \frac{b_n}{a_n} \left[\frac{a_n^2}{b_n^2} \left(S_{a_n, b_n}(f; z) - f(z) - \frac{b_n}{2a_n} z f''(z) \right) \right] \right\}
\end{aligned}$$

yazılabilir. Bu ifadeye

$$\|F + G\|_r \geq \| \|F\|_r - \|G\|_r \| \geq \|F\|_r - \|G\|_r$$

eşitsizliği uygulanırsa

$$\|S_{a_n, b_n}(f) - f\|_r \geq \frac{b_n}{a_n} \left\{ \left\| \frac{e_1}{2} f'' \right\|_r - \frac{b_n}{a_n} \left[\frac{a_n^2}{b_n^2} \left\| S_{a_n, b_n}(f) - f - \frac{b_n}{2a_n} e_1 f'' \right\|_r \right] \right\}$$

elde edilir. D_R de f derecesi ≤ 1 olan bir polinom olmadığından, $\left\| \frac{e_1}{2} f'' \right\|_r > 0$ eşitsizliği sağlanır. Gerçekten, aksi kabul edilirse her $z \in \bar{D}_r$ için $\frac{z}{2} f''(z) = 0$ dır. Bu ise her $z \in \bar{D}_r \setminus \{0\}$ için $f''(z) = 0$ olması demektir. f fonksiyonu analitik olduğundan Teorem 2.1.7 den her $z \in D_R$ için $f''(z) = 0$ olur. Dolayısıyla $f'(z) = c$ (sabit) olup f derecesi ≤ 1 olan bir polinomdur. Bu da hipotezle çelişir.

Teorem 3.3.5 ten

$$\frac{a_n^2}{b_n^2} \left\| S_{a_n, b_n}(f) - f - \frac{b_n}{2a_n} e_1 f'' \right\|_r \leq \frac{3MA}{r} \sum_{k=2}^{\infty} (k+1)(rA)^{k-1} < \infty$$

yazılır. Ayrıca $n \rightarrow \infty$ iken $\frac{b_n}{a_n} \rightarrow 0$ olduğundan

$$\frac{b_n}{a_n} \left[\frac{a_n^2}{b_n^2} \left\| S_{a_n, b_n}(f) - f - \frac{b_n}{2a_n} e_1 f'' \right\|_r \right] \rightarrow 0$$

dır. Bu durumda her $n \geq n_1$ için

$$\left\| \frac{e_1}{2} f'' \right\|_r - \frac{b_n}{a_n} \left[\frac{a_n^2}{b_n^2} \left\| S_{a_n, b_n}(f) - f - \frac{b_n}{2a_n} e_1 f'' \right\|_r \right] \geq \frac{1}{2} \left\| \frac{e_1}{2} f'' \right\|_r$$

olacak biçimde sadece f ve r ye bağlı bir n_1 sayısı vardır. Böylece her $n \geq n_1$ için

$$\|S_{a_n, b_n}(f) - f\|_r \geq \frac{b_n}{2a_n} \left\| \frac{e_1}{2} f'' \right\|_r$$

eşitsizliği elde edilir. $n \in \{1, 2, \dots, n_1 - 1\}$ için $M_{r, n}(f) = \frac{a_n}{b_n} \|S_{a_n, b_n}(f) - f\|_r > 0$ iken

$\|S_{a_n, b_n}(f) - f\|_r \geq \frac{b_n}{a_n} M_{r, n}(f)$ olacağı açıktır. Aslında eğer $\|S_{a_n, b_n}(f) - f\|_r = 0$ olursa

her $|z| \leq r$ için $S_{a_n, b_n}(f; z) = f(z)$ elde edilir. Bu ise sadece derecesi ≤ 1 olan bir f fonksiyonu için geçerli olup hipotezle çelişir. Sonuç olarak, her $n \in \mathbb{N}$ için

$$C_r(f) = \min \left\{ M_{r, 1}(f), M_{r, 2}(f), \dots, M_{r, n_1 - 1}(f), \frac{1}{2} \left\| \frac{e_1}{2} f'' \right\|_r \right\}$$

olmak üzere $\|S_{a_n, b_n}(f) - f\|_r \geq \frac{b_n}{a_n} C_r(f)$ bulunur.

Teorem 3.3.4 (i) ile Teorem 3.3.6 birlikte düşünüldüğünde yaklaşımın tam mertebesinin

$\frac{b_n}{a_n}$ olduğunu gösteren aşağıdaki sonuç elde edilir.

3.3.7. Sonuç

f fonksiyonu ve R, M, C, B, A sabitleri için Teorem 3.3.4 teki hipotezler sağlansın. Eğer f derecesi ≤ 1 olan bir polinom değilse, bu durumda $1 \leq r < \frac{1}{A}$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\|S_{a_n, b_n}(f) - f\|_r \sim \frac{b_n}{a_n}$$

sağlanır. Burada denklikteki sabitler sadece f ve r ye bağlıdır (Çetin ve İspir, 2013).

3.3.5. Eşanlı Yaklaşımın Tam Mertebesi

3.3.8. Teorem

f fonksiyonu ve R, M, C, B, A sabitleri için Teorem 3.3.4 teki hipotezler sağlansın ve $1 \leq r < r_1 < \frac{1}{A}$, $p \in \mathbb{N}$ sabitlerini alalım. Eğer f derecesi $\leq p$ olan bir polinom değilse, bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\left\| S_{a_n, b_n}^{(p)}(f) - f^{(p)} \right\|_r \sim \frac{b_n}{a_n}$$

sağlanır. Burada denklikteki sabitler sadece f, r, r_1 ve p ye bağlıdır (Çetin ve İspir, 2013).

İspat

Teorem 3.3.4 (ii) de $\left\| S_{a_n, b_n}^{(p)}(f) - f^{(p)} \right\|_r$ için üst tahmin elde edilmişti. O halde geriye $\left\| S_{a_n, b_n}^{(p)}(f) - f^{(p)} \right\|_r$ için bir alt tahmin bulmak kalır. İlk olarak $r_1 > r \geq 1$ olmak üzere γ , 0 merkezli r_1 yarıçaplı çemberi gösterebiliriz. Bu durumda her $|z| \leq r$ ve $v \in \gamma$ için $|v - z| \geq ||v| - |z|| \geq r_1 - r$ eşitsizliği sağlanır. Teorem 2.1.4 den

$$S_{a_n, b_n}^{(p)}(f; z) - f^{(p)}(z) = \frac{p!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{S_{a_n, b_n}(f; v) - f(v)}{(v - z)^{p+1}} dv \quad (3.21)$$

yazılır. Diğer taraftan her $v \in \gamma$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$S_{a_n, b_n}(f; v) - f(v) = \frac{b_n}{a_n} \left\{ \frac{v}{2} f''(v) + \frac{b_n}{a_n} \left[\frac{a_n^2}{b_n^2} \left(S_{a_n, b_n}(f; v) - f(v) - \frac{b_n}{2a_n} v f''(v) \right) \right] \right\}$$

yazılabilir. Bu ifade Eş. 3.21 de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
S_{a_n, b_n}^{(p)}(f; z) - f^{(p)}(z) &= \frac{b_n}{a_n} \left\{ \frac{p!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{v f''(v)}{2(v-z)^{p+1}} dv \right. \\
&\quad \left. + \frac{b_n}{a_n} \frac{p!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\frac{a_n^2}{b_n^2} \left(S_{a_n, b_n}(f; v) - f(v) - \frac{b_n}{2a_n} v f''(v) \right)}{(v-z)^{p+1}} dv \right\} \\
&= \frac{b_n}{a_n} \left\{ \left[\frac{z}{2} f''(z) \right]^{(p)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{b_n}{a_n} \frac{p!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\frac{a_n^2}{b_n^2} \left(S_{a_n, b_n}(f; v) - f(v) - \frac{b_n}{2a_n} v f''(v) \right)}{(v-z)^{p+1}} dv \right\}
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Her $|z| \leq r$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $\| \cdot \|_r$ normuna geçilirse

$$\begin{aligned}
\| S_{a_n, b_n}^{(p)}(f) - f^{(p)} \|_r &\geq \frac{b_n}{a_n} \left\{ \left\| \left[\frac{e_1}{2} f'' \right]^{(p)} \right\|_r \right. \\
&\quad \left. - \frac{b_n}{a_n} \left\| \frac{p!}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{\frac{a_n^2}{b_n^2} \left(S_{a_n, b_n}(f; v) - f(v) - \frac{b_n}{2a_n} v f''(v) \right)}{(v-z)^{p+1}} dv \right\|_r \right\}
\end{aligned}$$

olur. Teorem 3.3.5 ten her $|z| \leq r$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$\left\| \frac{p!}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{\frac{a_n^2}{b_n^2} \left(S_{a_n, b_n}(f; v) - f(v) - \frac{b_n}{2a_n} v f''(v) \right)}{(v-z)^{p+1}} dv \right\|_r$$

$$\begin{aligned}
& \leq \left\| \left\| \frac{p!}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{\frac{a_n^2}{b_n^2} \left(S_{a_n, b_n}(f; v) - f(v) - \frac{b_n}{2a_n} v f''(v) \right)}{(v-z)^{p+1}} dv \right\|_{r_1} \right\| \\
& \leq \frac{p!}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{\frac{a_n^2}{b_n^2} \left\| S_{a_n, b_n}(f; v) - f(v) - \frac{b_n}{2a_n} v f''(v) \right\|_{r_1}}{\|(v-z)^{p+1}\|_{r_1}} \|dv\|_{r_1} \\
& \leq \frac{p!}{2\pi} \frac{\frac{a_n^2}{b_n^2} \left\| S_{a_n, b_n}(f; v) - f(v) - \frac{b_n}{2a_n} v f''(v) \right\|_{r_1}}{(r_1 - r)^{p+1}} \int_{\gamma} \|dv\|_{r_1} \\
& \leq \frac{p!}{2\pi} \frac{\frac{3MA}{r_1} \sum_{k=2}^{\infty} (k+1)(r_1 A)^{k-1}}{(r_1 - r)^{p+1}} 2\pi r_1 \\
& = \frac{3MA}{r_1} \sum_{k=2}^{\infty} (k+1)(r_1 A)^{k-1} \frac{p! r_1}{(r_1 - r)^{p+1}} < \infty \quad (3.22)
\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca f üzerindeki hipotezden $\left\| \left[\frac{e_1}{2} f'' \right]^{(p)} \right\|_r > 0$ olur. Gerçekten, aksini kabul edelim yani $\frac{z}{2} f''(z)$ derecesi $\leq p-1$ olan bir polinom olsun. Bu durumda f fonksiyonunun analitikliğinden, f derecesi $\leq p$ olan bir polinom olur ki bu da hipotezle çelişir. Dolayısıyla Eş. 3.22 ile $n \rightarrow \infty$ iken $\frac{b_n}{a_n} \rightarrow 0$ olduğu dikkate alınırsa

$$\frac{b_n}{a_n} \left\| \left\| \frac{p!}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{\frac{a_n^2}{b_n^2} \left(S_{a_n, b_n}(f; v) - f(v) - \frac{b_n}{2a_n} v f''(v) \right)}{(v-z)^{p+1}} dv \right\|_r \right\| \rightarrow 0$$

olur. O halde her $n \geq n_1$ için

$$\left\| \left[\frac{e_1}{2} f'' \right]^{(p)} \right\|_r - \frac{b_n}{a_n} \left\| \frac{p!}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{\frac{a_n^2}{b_n^2} \left(S_{a_n, b_n}(f; v) - f(v) - \frac{b_n}{2a_n} v f''(v) \right)}{(v-z)^{p+1}} dv \right\|_r \geq \frac{\left\| \left[\frac{e_1}{2} f'' \right]^{(p)} \right\|_r}{2}$$

olacak biçimde sadece f ve r ye bağlı bir n_1 sayısı vardır. Böylece her $n \geq n_1$ için

$$\left\| S_{a_n, b_n}^{(p)}(f) - f^{(p)} \right\|_r \geq \frac{b_n}{2a_n} \left\| \left[\frac{e_1}{2} f'' \right]^{(p)} \right\|_r$$

elde edilir. $n \in \{1, 2, \dots, n_1 - 1\}$ için $M_{r, n, p}(f) = \frac{a_n}{b_n} \left\| S_{a_n, b_n}^{(p)}(f) - f^{(p)} \right\|_r > 0$ iken

$\left\| S_{a_n, b_n}^{(p)}(f) - f^{(p)} \right\|_r \geq \frac{b_n}{a_n} M_{r, n, p}(f)$ olacağı açıktır. Sonuç olarak, her $n \in \mathbb{N}$ için

$$C_{r, p}(f) = \min \left\{ M_{r, 1, p}(f), \dots, M_{r, n_1 - 1, p}(f), \frac{1}{2} \left\| \left[\frac{e_1}{2} f'' \right]^{(p)} \right\|_r \right\}$$

olmak üzere $\left\| S_{a_n, b_n}^{(p)}(f) - f^{(p)} \right\|_r \geq \frac{b_n}{a_n} C_{r, p}(f)$ bulunur. Bu da ispatı tamamlar.

4. GENELLEŞTİRİLMİŞ KOMPLEKS GENUINE SZÁSZ-DURRMEYER OPERATÖRLERİ İLE YAKLAŞIM

4.1. Reel Değişkenli Genuine Szász-Durrmeyer operatörleri

$f \in C_\alpha[0, \infty) := \{f \in C[0, \infty) : |f(t)| \leq Me^{\alpha t}, \alpha > 0, t \in [0, \infty)\}$ için, reel değişkenli genuine Szász-Durrmeyer operatörleri

$$p_{n,j}(x) = e^{-nx} \frac{(nx)^j}{j!}, n \in \mathbb{N}$$

olmak üzere

$$L_n(f; x) = n \sum_{j=1}^{\infty} p_{n,j}(x) \int_0^{\infty} p_{n,j-1}(t) f(t) dt + p_{n,0}(x) f(0), \quad n > \alpha \quad (4.1)$$

şeklinde tanımlanmıştır (Phillips, 1954). Bu operatörler ilk olarak Phillips tarafından tanımlandığından literatürde Phillips operatörleri olarak da bilinmektedir. Szász-Durrmeyer operatörlerinin farklı bir biçimi olan bu operatörler sabitlerin yanı sıra lineer fonksiyonları da koruduğundan genuine Szász-Durrmeyer operatörleri olarak adlandırılmıştır.

1977 yılında May, ilk defa Eş. 4.1 ile verilen Phillips operatörlerinin lineer kombinasyonlarını dikkate alarak bu operatörlerin yaklaşım özelliklerini incelemiştir (May, 1977). Gupta ve Srivastava, Phillips operatörlerinin sınırlı salınımlı fonksiyonlara yakınsaklık oranı üzerine bir tahmin vermişlerdir (Gupta ve Srivastava, 1996). Daha sonra, Srivastava ve Gupta, özel durumu Phillips operatörleri olan toplamsal integral tip operatörlerin genel bir dizisini tanımlamış ve yaklaşım özelliklerini araştırmışlardır (Srivastava ve Gupta, 2003). Govil ve Gupta, son kırk yılda reel Phillips operatörleri üzerine elde edilen sonuçları toplayıp bir araya getirmişlerdir (Govil ve Gupta, 2013).

4.2. Kompleks Genuine Szász-Durrmeyer Operatörleri

4.2.1. Tanım

Kompleks genuine Szász-Durrmeyer operatörleri Gal ve Gupta tarafından

$$p_{n,j}(z) = e^{-nz} \frac{(nz)^j}{j!}, n \in \mathbb{N}, z \in \mathbb{C}$$

olmak üzere

$$L_n(f; z) = n \sum_{j=1}^{\infty} p_{n,j}(z) \int_0^{\infty} p_{n,j-1}(t) f(t) dt + p_{n,0}(z) f(0) \quad (4.2)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Gal ve Gupta, bu operatörlerin üstel büyüyen analitik fonksiyonlara yakınsaklık oranı ve Voronovskaja tip sonuç için nicel tahminler vererek, eşanlı yaklaşımın tam mertebesini elde etmiştir (Gal ve Gupta, 2014).

Bu tezde, Eş. 4.2 ile tanımlı kompleks genuine Szász-Durrmeyer operatörleri ile Eş. 3.4 ile tanımlı genelleştirilmiş kompleks Szász operatörleri dikkate alınarak genelleştirilmiş kompleks genuine Szász-Durrmeyer operatörleri aşağıdaki gibi tanımlanmış ve kompakt disklerde yaklaşım özellikleri incelenmiştir.

4.2.2. Tanım

Genelleştirilmiş kompleks genuine Szász-Durrmeyer operatörlerini; $R > 1$ olmak üzere $f: \bar{D}_R \cup [R, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ için f fonksiyonu $[0, \infty)$ da integrallenebilir, $\bar{D}_R \cup [R, \infty)$ da sürekli, D_R de analitik ve üstel büyümeye sahip ve ayrıca $(a_n), (b_n)$ dizileri

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = 0 \text{ ve } \frac{b_n}{a_n} \leq \frac{1}{2}$$

koşullarını sağlayan kesin pozitif sayıların birer dizisi ve

$$p_{a_n, b_n, j}(z) = e^{-\frac{a_n z}{b_n}} \frac{(a_n z)^j}{j! b_n^j}$$

olmak üzere

$$L_{a_n, b_n}(f; z) = \frac{a_n}{b_n} \sum_{j=1}^{\infty} p_{a_n, b_n, j}(z) \int_0^{\infty} p_{a_n, b_n, j-1}(t) f(t) dt + p_{a_n, b_n, 0}(z) f(0) \quad (4.3)$$

olarak tanımlıyoruz (Çetin ve İspir, 2014).

Eş. 4.3 ile tanımlı operatörlerde, $a_n = n$ ve $b_n = 1$ olması durumunda Eş. 4.2 ile verilen kompleks genuine Szász-Durrmeyer operatörlerinin elde edilmesi ve Eş. 4.3 ile tanımlı operatörün yaklaşım oranının (a_n) ve (b_n) dizilerinin seçimine göre uygun şekilde ayarlanabilir olması L_{a_n, b_n} operatörünün önemini daha da artırmaktadır.

4.3. L_{a_n, b_n} Genelleştirilmiş Kompleks Genuine Szász-Durrmeyer Operatörleri ile Yaklaşım

Bu kısımda L_{a_n, b_n} genelleştirilmiş kompleks genuine Szász-Durrmeyer operatörünün kompleks bölgelerdeki nicel tahminli yaklaşım özellikleri araştırılacaktır. Bu amaçla, öncelikle kompakt disklerde üstel büyüyen analitik fonksiyonlar için eşanlı yaklaşım ile Voronovskaja tip yaklaşım teoremi için üst nicel tahmin bulunacak, daha sonra da L_{a_n, b_n} operatörü ve operatörün türevi ile yaklaşımın tam mertebesi elde edilecektir.

Burada belirtmeliyiz ki L_{a_n, b_n} operatörleri bölünmüş farklarla ifade edilemediğinden bu operatörlerin yaklaşım metodları, standart metodları kullanarak çalışılan kompleks Bernstein-Durrmeyer tip operatörlerden farklıdır.

4.3.1. Yardımcı Sonuçlar

4.3.1. Lemma

$f(z)$ fonksiyonu bir polinom olsun. Bu durumda $L_{a_n, b_n}(f; z)$ de $f(z)$ ile aynı dereceden bir polinomdur (Çetin ve İspir, 2014).

İspat

Kabul edelim ki belirli bir $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $f(t) = t^m$ olsun. Eş. 4.3 ten her n, m için

$$\begin{aligned} L_{a_n, b_n}(t^m; z) &= \frac{a_n}{b_n} \sum_{j=1}^{\infty} p_{a_n, b_n, j}(z) \int_0^{\infty} e^{-\frac{a_n t}{b_n}} \frac{(a_n t)^{j-1}}{(j-1)! b_n^{j-1}} t^m dt \\ &= \frac{a_n}{b_n} \sum_{j=1}^{\infty} p_{a_n, b_n, j}(z) \frac{a_n^{j-1}}{(j-1)! b_n^{j-1}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{a_n t}{b_n}} t^{j+m-1} dt \end{aligned} \quad (4.4)$$

yazılır. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-\frac{a_n t}{b_n}} t^{j+m-1} dt &= \int_0^{\infty} e^{-u} \left(\frac{b_n}{a_n} u \right)^{j+m-1} \frac{b_n}{a_n} du \\ &= \left(\frac{b_n}{a_n} \right)^{j+m} \int_0^{\infty} e^{-u} u^{j+m-1} du \\ &= \left(\frac{b_n}{a_n} \right)^{j+m} \Gamma(j+m) \end{aligned}$$

olup; burada Γ ifadesi Gama fonksiyonudur. Böylece son eşitlik Eş. 4.4 te yerine yazılırsa Gama fonksiyonu yardımıyla

$$L_{a_n, b_n}(t^m; z) = \frac{a_n}{b_n} \sum_{j=1}^{\infty} p_{a_n, b_n, j}(z) \frac{a_n^{j-1}}{(j-1)! b_n^{j-1}} \left(\frac{b_n}{a_n} \right)^{j+m} \Gamma(j+m)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{\infty} p_{a_n, b_n, j}(z) \left(\frac{a_n}{b_n}\right)^{-m} \frac{(j+m-1)!}{(j-1)!} \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} p_{a_n, b_n, j}(z) \left(\frac{b_n}{a_n}\right)^m j(j+1) \dots (j+m-1)
\end{aligned} \tag{4.5}$$

elde edilir. $j, m \in \mathbb{N}$ ve $j \neq m-1$ olmak üzere

$$\prod_{p=0}^{m-1} (j+p) = \sum_{i=0}^{m-1} \delta_i \prod_{p=0}^{m-1-i} (j-p); \quad \delta_0 = 1 \text{ ve } \delta_1, \dots, \delta_{m-1} \in \mathbb{N}$$

ifadesi Eş. 4.5 te kullanılırsa basit düzenlemelerle

$$\begin{aligned}
L_{a_n, b_n}(t^m; z) &= \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\frac{a_n z}{b_n}} \frac{(a_n z)^j}{j! b_n^j} \left(\frac{b_n}{a_n}\right)^m \sum_{i=0}^{m-1} \delta_i j(j-1) \dots (j-(m-1-i)) \\
&= \sum_{i=0}^{m-1} \delta_i \left[\sum_{j=1}^{\infty} e^{-\frac{a_n z}{b_n}} \frac{(a_n z)^j}{b_n^j} \left(\frac{b_n}{a_n}\right)^m \frac{1}{(j-(m-i))!} \right] \\
&= \sum_{i=0}^{m-1} \delta_i \left[\sum_{j=1}^{\infty} e^{-\frac{a_n z}{b_n}} \frac{(a_n z)^{j-(m-i)}}{b_n^{j-(m-i)}} \frac{(a_n z)^{m-i}}{b_n^{m-i}} \left(\frac{b_n}{a_n}\right)^m \frac{1}{(j-(m-i))!} \right] \\
&= \sum_{i=0}^{m-1} \delta_i \left(\frac{b_n}{a_n}\right)^i z^{m-i} e^{-\frac{a_n z}{b_n}} \sum_{j=m-i}^{\infty} \frac{\left(\frac{a_n z}{b_n}\right)^{j-(m-i)}}{(j-(m-i))!} \\
&= \sum_{i=0}^{m-1} \delta_i \left(\frac{b_n}{a_n}\right)^i z^{m-i} e^{-\frac{a_n z}{b_n}} e^{\frac{a_n z}{b_n}} \\
&= \sum_{i=0}^{m-1} d_i z^{m-i}
\end{aligned}$$

olur. Burada $d_i := d_i(a_n, b_n)$ katsayıları

$$d_i(a_n, b_n) = \begin{cases} 1 & , \quad i = 0 \text{ ise} \\ \delta_i \left(\frac{b_n}{a_n} \right)^i & , \quad i = 1, \dots, m-1 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklindedir. $n \rightarrow \infty$ iken $\frac{b_n}{a_n} \rightarrow 0$ olduğundan $i = 1, \dots, m-1$ için $d_i \rightarrow 0$ bulunur. Böylece $L_{a_n, b_n}(t^m; z)$, m . dereceden bir polinom olur.

4.3.2. Lemma

$R > 1$ olmak üzere $f: \bar{D}_R \cup [R, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu $[0, \infty)$ da integrallenebilir, $\bar{D}_R \cup [R, \infty)$ da sürekli, D_R de analitik yani her $z \in D_R$ için $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ olsun. Her $k = 0, 1, \dots$ için $|c_k| \leq M \frac{A^k}{k!}$ (bu eşitsizlik her $z \in D_R$ için $|f(z)| \leq M e^{A|z|}$ olmasını gerektirir) ve her $x \in [R, \infty)$ için $|f(x)| \leq C e^{Bx}$ olacak biçimde $M, C, B > 0$ ve $A \in \left(\frac{1}{R}, 1\right)$ sabitlerinin bulunduğu kabul edelim. Aynı zamanda $\forall n > n_0$ için $\frac{a_n}{b_n} - B > 0$ olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ alalım. Bu durumda $k = 0, 1, \dots$ için $e_k(z) = z^k$ olmak üzere her $z \in D_R$ için

$$L_{a_n, b_n}(f; z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k L_{a_n, b_n}(e_k; z) \quad (4.6)$$

sağlanır (Çetin ve İspir, 2014).

İspat

Herhangi bir $m \in \mathbb{N}$ ve $r < R$ için

$$f_m(z) = \begin{cases} \sum_{j=0}^m c_j z^j, & |z| \leq r \text{ ise} \\ f(x) & , x \in (r, +\infty) \text{ ise} \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. $|z| \leq r$ için $|f_m(z)| \leq \sum_{j=0}^{\infty} |c_j| r^j := C_r$ ve f fonksiyonu $[r, R]$

aralığında sürekli olduğundan, f üzerindeki hipotezden her $m \in \mathbb{N}$ ve $x \in [0, \infty)$ için $|f_m(x)| \leq C_{r,R} e^{Bx}$ şartını sağlayan m den bağımsız bir $C_{r,R} > 0$ sabiti vardır. Buradan her $m, n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}$ ve her $n > n_0$ için $\frac{a_n}{b_n} - B > 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
|L_{a_n, b_n}(f_m; z)| &= \left| \frac{a_n}{b_n} \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\frac{a_n}{b_n} z} \frac{(a_n z)^j}{j! b_n^j} \int_0^{\infty} e^{-\frac{a_n}{b_n} t} \frac{(a_n t)^{j-1}}{(j-1)! b_n^{j-1}} f_m(t) dt + e^{-\frac{a_n}{b_n} z} f_m(0) \right| \\
&\leq \frac{a_n}{b_n} \sum_{j=1}^{\infty} \left| e^{-\frac{a_n}{b_n} z} \right| \frac{(a_n |z|)^j}{j! b_n^j} \int_0^{\infty} e^{-\frac{a_n}{b_n} t} \frac{(a_n t)^{j-1}}{(j-1)! b_n^{j-1}} |f_m(t)| dt \\
&\quad + \left| e^{-\frac{a_n}{b_n} z} \right| |f_m(0)| \\
&\leq \frac{a_n}{b_n} \left| e^{-\frac{a_n}{b_n} z} \right| \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(a_n |z|)^j}{j! b_n^j} \int_0^{\infty} e^{-\frac{a_n}{b_n} t} \frac{(a_n t)^{j-1}}{(j-1)! b_n^{j-1}} C_{r,R} e^{Bt} dt \\
&\quad + \left| e^{-\frac{a_n}{b_n} z} \right| |c_0| \\
&= C_{r,R} \frac{a_n}{b_n} \left| e^{-\frac{a_n}{b_n} z} \right| \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(a_n |z|)^j}{j! b_n^j} \frac{a_n^{j-1}}{(j-1)! b_n^{j-1}} \int_0^{\infty} e^{-\left(\frac{a_n}{b_n} - B\right)t} t^{j-1} dt \\
&\quad + \left| e^{-\frac{a_n}{b_n} z} \right| |c_0| \tag{4.7}
\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} e^{-\left(\frac{a_n}{b_n} - B\right)t} t^{j-1} dt &= \int_0^{\infty} e^{-u} \frac{u^{j-1}}{\left(\frac{a_n}{b_n} - B\right)^{j-1}} \frac{du}{\left(\frac{a_n}{b_n} - B\right)} \\
&= \frac{1}{\left(\frac{a_n}{b_n} - B\right)^j} \int_0^{\infty} e^{-u} u^{j-1} du
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{a_n}{b_n} - B\right)^j} \Gamma(j)$$

olup, bu ifade Eş. 4.7 de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
|L_{a_n, b_n}(f_m; z)| &\leq C_{r, R} \frac{a_n}{b_n} \left| e^{-\frac{a_n z}{b_n}} \right| \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(a_n |z|)^j}{j! b_n^j} \frac{a_n^{j-1}}{(j-1)! b_n^{j-1}} \frac{1}{\left(\frac{a_n}{b_n} - B\right)^j} (j-1)! \\
&\quad + \left| e^{-\frac{a_n z}{b_n}} \right| |c_0| \\
&= C_{r, R} \left| e^{-\frac{a_n z}{b_n}} \right| \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(a_n |z|)^j}{j! b_n^j} \frac{a_n^j}{b_n^j \left(\frac{a_n}{b_n} - B\right)^j} + \left| e^{-\frac{a_n z}{b_n}} \right| |c_0| \\
&\leq C_{r, R} \left| e^{-\frac{a_n z}{b_n}} \right| \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left[\left(\frac{a_n}{b_n}\right)^2 |z| / \left(\frac{a_n}{b_n} - B\right) \right]^j}{j!} + |c_0| \left| e^{-\frac{a_n z}{b_n}} \right| \\
&\leq (C_{r, R} + |c_0|) \left| e^{-\frac{a_n z}{b_n}} \right| \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left[\left(\frac{a_n}{b_n}\right)^2 |z| / \left(\frac{a_n}{b_n} - B\right) \right]^j}{j!} \tag{4.8}
\end{aligned}$$

bulunur. Son seri ise oran testinden yakınsaktır. Dolayısıyla $L_{a_n, b_n}(f_m; z)$ iyi tanımlı ve analitiktir. Ayrıca f üstel büyüyen bir fonksiyon olduğundan $L_{a_n, b_n}(f; z)$ de iyi tanımlı ve z nin bir fonksiyonu olarak analitiktir. f fonksiyonu üzerindeki hipotez dikkate alındığında $L_{a_n, b_n}(f; z)$ nin analitikliği Gergen vd. (1963) referanslı makaleden de görülebilir.

Her $m \in \mathbb{N}$ ve $k = 0, 1, \dots$ için

$$f_{m, k}(z) = \begin{cases} c_k e_k(z), & |z| \leq r \quad \text{ise} \\ \frac{f(x)}{m+1}, & x \in (r, +\infty) \text{ ise} \end{cases}$$

ile gösterelim. Burada her $f_{m, k}$ fonksiyonunun $[0, \infty)$ aralığında üstel büyümeye sahip

olduğu ve $f_m(z) = \sum_{k=0}^m f_{m,k}(z)$ olacağı açıktır. L_{a_n, b_n} lineer olduğundan, her $|z| \leq r$ için

$$L_{a_n, b_n}(f_m; z) = L_{a_n, b_n}\left(\sum_{k=0}^m c_k e_k; z\right) = \sum_{k=0}^m c_k L_{a_n, b_n}(e_k; z)$$

yazılır. O halde herhangi bir $n \in \mathbb{N}$ sabiti ve $|z| \leq r$ için

$$\lim_{m \rightarrow \infty} L_{a_n, b_n}(f_m; z) = L_{a_n, b_n}(f; z)$$

olduğunu ispatlamak yeterlidir. Bu amaçla; her $|z| \leq r$ için

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \|f_m - f\|_r &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=0}^m c_k e_k(z) - \sum_{k=0}^{\infty} c_k e_k(z) \right\|_r \\ &= \left\| \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^m c_k e_k(z) - \sum_{k=0}^{\infty} c_k e_k(z) \right\|_r \\ &= 0 \end{aligned}$$

ve $\|\cdot\|_{B[0, +\infty)}$, $C[0, +\infty)$ daki düzgün normu göstermek üzere, $x \in (r, +\infty)$ için $f_m(x) = f(x)$ olduğundan $\|f_m - f\|_{B[0, +\infty)} \leq \|f_m - f\|_r$ elde edilir. Ayrıca her $|z| \leq r$ için

$$\begin{aligned} |L_{a_n, b_n}(f_m; z) - L_{a_n, b_n}(f; z)| &= \left| \frac{a_n}{b_n} \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\frac{a_n z}{b_n}} \frac{(a_n z)^j}{j! b_n^j} \int_0^{\infty} e^{-\frac{a_n t}{b_n}} \frac{(a_n t)^{j-1}}{(j-1)! b_n^{j-1}} f_m(t) dt \right. \\ &\quad \left. + e^{-\frac{a_n z}{b_n}} f_m(0) - \frac{a_n}{b_n} \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\frac{a_n z}{b_n}} \frac{(a_n z)^j}{j! b_n^j} \int_0^{\infty} e^{-\frac{a_n t}{b_n}} \frac{(a_n t)^{j-1}}{(j-1)! b_n^{j-1}} f(t) dt \right. \\ &\quad \left. - e^{-\frac{a_n z}{b_n}} f(0) \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \frac{a_n}{b_n} \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\frac{a_n z}{b_n}} \frac{(a_n z)^j}{j! b_n^j} \int_0^{\infty} e^{-\frac{a_n t}{b_n}} \frac{(a_n t)^{j-1}}{(j-1)! b_n^{j-1}} (f_m(t) - f(t)) dt \right. \\
&\quad \left. + e^{-\frac{a_n z}{b_n}} (f_m(0) - f(0)) \right| \\
&\leq \frac{a_n}{b_n} \left| e^{-\frac{a_n z}{b_n}} \right| \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(a_n |z|)^j}{j! b_n^j} \int_0^{\infty} e^{-\frac{a_n t}{b_n}} \frac{(a_n t)^{j-1}}{(j-1)! b_n^{j-1}} |f_m(t) - f(t)| dt \\
&\quad + \left| e^{-\frac{a_n z}{b_n}} \right| |f_m(0) - f(0)| \\
&\leq \frac{a_n}{b_n} \left| e^{-\frac{a_n z}{b_n}} \right| \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(a_n |z|)^j}{j! b_n^j} \|f_m - f\|_{B[0,+\infty)} \int_0^{\infty} e^{-\frac{a_n t}{b_n}} \frac{(a_n t)^{j-1}}{(j-1)! b_n^{j-1}} dt \\
&\quad + \left| e^{-\frac{a_n z}{b_n}} \right| \|f_m - f\|_{B[0,+\infty)} \tag{4.9}
\end{aligned}$$

olup,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} e^{-\frac{a_n t}{b_n}} \frac{(a_n t)^{j-1}}{(j-1)! b_n^{j-1}} dt &= \int_0^{\infty} e^{-u} \frac{u^{j-1}}{(j-1)!} \frac{b_n}{a_n} du \\
&= \frac{b_n}{(j-1)! a_n} \int_0^{\infty} e^{-u} u^{j-1} du \\
&= \frac{b_n}{(j-1)! a_n} \Gamma(j) \\
&= \frac{b_n}{a_n}
\end{aligned}$$

ifadesi Eş. 4.9 da yerine yazılırsa

$$|L_{a_n, b_n}(f_m; z) - L_{a_n, b_n}(f; z)| \leq \frac{a_n}{b_n} \left| e^{-\frac{a_n z}{b_n}} \right| \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(a_n |z|)^j}{j! b_n^j} \|f_m - f\|_{B[0,+\infty)} \frac{b_n}{a_n}$$

$$\begin{aligned}
& + \left| e^{-\frac{a_n z}{b_n}} \right| \|f_m - f\|_{B[0,+\infty)} \\
& = \left| e^{-\frac{a_n z}{b_n}} \right| \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(a_n |z|)^j}{j! b_n^j} \|f_m - f\|_{B[0,+\infty)} \\
& = \left| e^{-\frac{a_n z}{b_n}} \right| e^{\frac{a_n |z|}{b_n}} \|f_m - f\|_{B[0,+\infty)}
\end{aligned}$$

bulunur. Burada $\lim_{m \rightarrow \infty} \|f_m - f\|_r = 0$ ve $\|f_m - f\|_{B[0,+\infty)} \leq \|f_m - f\|_r$ ifadeleri dikkate alınırsa $\lim_{m \rightarrow \infty} \|f_m - f\|_{B[0,+\infty)} = 0$ olduğu görülür. Böylece $\lim_{m \rightarrow \infty} L_{a_n, b_n}(f_m; z) = L_{a_n, b_n}(f; z)$ elde edilir ve ispat tamamlanır.

4.3.2. L_{a_n, b_n} Operatörünün Yakınsama Oranı

4.3.3. Teorem

$R > 1$ olmak üzere $f: \bar{D}_R \cup [R, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu $[0, \infty)$ da integrallenebilir, $\bar{D}_R \cup [R, \infty)$ da sürekli, D_R de analitik yani her $z \in D_R$ için $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ olsun. Her $k = 0, 1, \dots$ için $|c_k| \leq M \frac{A^k}{k!}$ (bu eşitsizlik her $z \in D_R$ için $|f(z)| \leq M e^{A|z|}$ olmasını gerektirir) ve her $x \in [R, \infty)$ için $|f(x)| \leq C e^{Bx}$ olacak biçimde $M, C, B > 0$ ve $A \in \left(\frac{1}{R}, 1\right)$ sabitlerinin bulunduğunu kabul edelim. Aynı zamanda her $n > n_0$ için $\frac{a_n}{b_n} - B > 0$ olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ alalım.

(i) $1 \leq r < \frac{1}{A}$ keyfi sabit olsun. Bu durumda $n, n_0 \in \mathbb{N}$ olmak üzere her $|z| \leq r$ ve $n > n_0$ için

$$|L_{a_n, b_n}(f; z) - f(z)| \leq \frac{b_n}{a_n} C_r(f)$$

eşitsizliği gerçekleşir. Burada

$$C_r(f) = \frac{M}{r} \sum_{k=2}^{\infty} (k+1)(rA)^k < \infty$$

dur.

- (ii) Genelleştirilmiş kompleks genuine Szász-Durrmeyer operatörleri ile eşanlı yaklaşım için; eğer $1 \leq r < r_1 < \frac{1}{A}$ keyfi sabitler ise bu durumda her $n > n_0$, $|z| \leq r$ ve $n, p \in \mathbb{N}$ için

$$\left| L_{a_n, b_n}^{(p)}(f; z) - f^{(p)}(z) \right| \leq \frac{b_n p! r_1 C_{r_1}(f)}{a_n (r_1 - r)^{p+1}}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $C_{r_1}(f)$ ifadesi (i) de tanımlandığı gibidir (Çetin ve İspir, 2014).

İspat

- (i) Her $z \in \mathbb{C}$ ve $k = 1, \dots$ için $e_k(z) = z^k$ olmak üzere, Eş. 4.3 ten

$$L_{a_n, b_n}(e_k; z) = \frac{a_n}{b_n} \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\frac{a_n z}{b_n}} \frac{(a_n z)^j}{j! b_n^j} \int_0^{\infty} e^{-\frac{a_n t}{b_n}} \frac{(a_n t)^{j-1}}{(j-1)! b_n^{j-1}} t^k dt \quad (4.10)$$

yazılabilir. Her $z \in \mathbb{C}$ için Eş. 4.3 yardımıyla

$$\begin{aligned} L_{a_n, b_n}(e_0; z) &= \frac{a_n}{b_n} \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\frac{a_n z}{b_n}} \frac{(a_n z)^j}{j! b_n^j} \int_0^{\infty} e^{-\frac{a_n t}{b_n}} \frac{(a_n t)^{j-1}}{(j-1)! b_n^{j-1}} dt + e^{-\frac{a_n z}{b_n}} \\ &= \frac{a_n}{b_n} \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\frac{a_n z}{b_n}} \frac{(a_n z)^j}{j! b_n^j} \frac{a_n^{j-1}}{(j-1)! b_n^{j-1}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{a_n t}{b_n}} t^{j-1} dt + e^{-\frac{a_n z}{b_n}} \\ &= \frac{a_n}{b_n} \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\frac{a_n z}{b_n}} \frac{(a_n z)^j}{j! b_n^j} \frac{a_n^{j-1}}{(j-1)! b_n^{j-1}} \int_0^{\infty} e^{-u} \left(\frac{b_n u}{a_n}\right)^{j-1} \frac{b_n}{a_n} du + e^{-\frac{a_n z}{b_n}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{a_n}{b_n} \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\frac{a_n z}{b_n}} \frac{(a_n z)^j}{j! b_n^j} \frac{a_n^{j-1}}{(j-1)! b_n^{j-1}} \frac{b_n^j}{a_n^j} \int_0^{\infty} e^{-u} u^{j-1} du + e^{-\frac{a_n z}{b_n}} \\
&= \frac{a_n}{b_n} \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\frac{a_n z}{b_n}} \frac{(a_n z)^j}{j! b_n^j} \frac{a_n^{j-1}}{(j-1)! b_n^{j-1}} \frac{b_n^j}{a_n^j} \Gamma(j) + e^{-\frac{a_n z}{b_n}} \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\frac{a_n z}{b_n}} \frac{(a_n z)^j}{j! b_n^j} + e^{-\frac{a_n z}{b_n}} \\
&= e^{-\frac{a_n z}{b_n}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(a_n z)^j}{j! b_n^j} \\
&= e^{-\frac{a_n z}{b_n}} e^{\frac{a_n z}{b_n}} \\
&= 1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_{a_n, b_n}(e_1; z) &= \frac{a_n}{b_n} \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\frac{a_n z}{b_n}} \frac{(a_n z)^j}{j! b_n^j} \int_0^{\infty} e^{-\frac{a_n t}{b_n}} \frac{(a_n t)^{j-1}}{(j-1)! b_n^{j-1}} t dt \\
&= \frac{a_n}{b_n} \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\frac{a_n z}{b_n}} \frac{(a_n z)^j}{j! b_n^j} \frac{a_n^{j-1}}{(j-1)! b_n^{j-1}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{a_n t}{b_n}} t^j dt \\
&= \frac{a_n}{b_n} \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\frac{a_n z}{b_n}} \frac{(a_n z)^j}{j! b_n^j} \frac{a_n^{j-1}}{(j-1)! b_n^{j-1}} \int_0^{\infty} e^{-u} \left(\frac{b_n u}{a_n}\right)^j \frac{b_n}{a_n} du \\
&= \frac{a_n}{b_n} \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\frac{a_n z}{b_n}} \frac{(a_n z)^j}{j! b_n^j} \frac{a_n^{j-1}}{(j-1)! b_n^{j-1}} \frac{b_n^{j+1}}{a_n^{j+1}} \int_0^{\infty} e^{-u} u^{j+1-1} du \\
&= \frac{a_n}{b_n} \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\frac{a_n z}{b_n}} \frac{(a_n z)^j}{j! b_n^j} \frac{a_n^{j-1}}{(j-1)! b_n^{j-1}} \frac{b_n^{j+1}}{a_n^{j+1}} \Gamma(j+1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{b_n}{a_n} \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\frac{a_n z}{b_n}} \frac{(a_n z)^j}{(j-1)! b_n^j} \\
&= \frac{b_n}{a_n} e^{-\frac{a_n z}{b_n}} \frac{a_n z}{b_n} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(a_n z)^{j-1}}{(j-1)! b_n^{j-1}} \\
&= z e^{-\frac{a_n z}{b_n}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(a_n z)^j}{j! b_n^j} \\
&= z e^{-\frac{a_n z}{b_n}} e^{\frac{a_n z}{b_n}} \\
&= z
\end{aligned}$$

eşitlikleri sağlandığından Lemma 4.3.2 den

$$\begin{aligned}
|L_{a_n, b_n}(f; z) - f(z)| &= \left| \sum_{k=0}^{\infty} c_k L_{a_n, b_n}(e_k; z) - \sum_{k=0}^{\infty} c_k e_k(z) \right| \\
&= |c_0 [L_{a_n, b_n}(e_0; z) - e_0(z)] + c_1 [L_{a_n, b_n}(e_1; z) - e_1(z)] \\
&\quad + \sum_{k=2}^{\infty} c_k [L_{a_n, b_n}(e_k; z) - e_k(z)]| \\
&= \left| \sum_{k=2}^{\infty} c_k [L_{a_n, b_n}(e_k; z) - e_k(z)] \right| \\
&\leq \sum_{k=2}^{\infty} |c_k| |L_{a_n, b_n}(e_k; z) - e_k(z)| \tag{4.11}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda $|L_{a_n, b_n}(e_k; z) - e_k(z)|$ için bir üst sınıra ihtiyaç vardır. Bu amaçla şimdi momentler için bir indirgeme bağıntısı bulalım. Eş. 4.10 daki

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{a_n t}{b_n}} \frac{(a_n t)^{j-1}}{(j-1)! b_n^{j-1}} t^k dt$$

integralini \mathcal{J} ile gösterelim. Dolayısıyla

$$L_{a_n, b_n}(e_k; z) = \frac{a_n}{b_n} \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\frac{a_n z}{b_n}} \frac{(a_n z)^j}{j! b_n^j} \mathcal{J}$$

olur. Son eşitlikte $z \neq 0$ a göre türev alınırsa

$$\begin{aligned} L'_{a_n, b_n}(e_k; z) &= \frac{d}{dz} \left\{ \frac{a_n}{b_n} \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\frac{a_n z}{b_n}} \frac{(a_n z)^j}{j! b_n^j} \mathcal{J} \right\} \\ &= \frac{a_n}{b_n} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j! b_n^j} \frac{d}{dz} \left\{ e^{-\frac{a_n z}{b_n}} (a_n z)^j \right\} \mathcal{J} \\ &= \frac{a_n}{b_n} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j! b_n^j} \left\{ -\frac{a_n}{b_n} e^{-\frac{a_n z}{b_n}} (a_n z)^j + e^{-\frac{a_n z}{b_n}} j (a_n z)^{j-1} a_n \right\} \mathcal{J} \\ &= -\frac{a_n}{b_n} \left\{ \frac{a_n}{b_n} \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\frac{a_n z}{b_n}} \frac{(a_n z)^j}{j! b_n^j} \mathcal{J} \right\} + \frac{a_n}{z b_n} \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\frac{a_n z}{b_n}} \frac{(a_n z)^j}{j! b_n^j} [j \mathcal{J}] \\ &= -\frac{a_n}{b_n} L_{a_n, b_n}(e_k; z) + \frac{a_n}{z b_n} \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\frac{a_n z}{b_n}} \frac{(a_n z)^j}{j! b_n^j} [j \mathcal{J}] \end{aligned} \quad (4.12)$$

bulunur. Ayrıca

$$\mathcal{J} = \int_0^{\infty} e^{-\frac{a_n t}{b_n}} \frac{(a_n t)^{j-1}}{(j-1)! b_n^{j-1}} t^k dt$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{a_n^{j-1}}{(j-1)! b_n^{j-1}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{a_n t}{b_n}} t^{k+j-1} dt \\
&= \frac{a_n^{j-1}}{(j-1)! b_n^{j-1}} \int_0^{\infty} e^{-u} \left(\frac{b_n u}{a_n}\right)^{k+j-1} \frac{b_n}{a_n} du \\
&= \frac{b_n^{k+1}}{(j-1)! a_n^{k+1}} \int_0^{\infty} e^{-u} u^{k+j-1} du \\
&= \frac{b_n^{k+1}}{(j-1)! a_n^{k+1}} \Gamma(k+j)
\end{aligned}$$

ile

$$\Gamma(k+j+1) = k\Gamma(k+j) + j\Gamma(k+j)$$

ifadeleri Eş. 4.12 de kullanılırsa basit düzenlemelerle

$$\begin{aligned}
L'_{a_n, b_n}(e_k; z) &= -\frac{a_n}{b_n} L_{a_n, b_n}(e_k; z) + \frac{a_n}{z b_n} \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\frac{a_n z}{b_n}} \frac{(a_n z)^j}{j! b_n^j} \frac{b_n^{k+1}}{(j-1)! a_n^{k+1}} [j\Gamma(k+j)] \\
&= -\frac{a_n}{b_n} L_{a_n, b_n}(e_k; z) \\
&\quad + \frac{a_n}{z b_n} \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\frac{a_n z}{b_n}} \frac{(a_n z)^j}{j! b_n^j} \frac{b_n^{k+1}}{(j-1)! a_n^{k+1}} [\Gamma(k+j+1) - k\Gamma(k+j)] \\
&= -\frac{a_n}{b_n} L_{a_n, b_n}(e_k; z) + \frac{a_n}{z b_n} \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\frac{a_n z}{b_n}} \frac{(a_n z)^j}{j! b_n^j} \frac{b_n^{k+1}}{(j-1)! a_n^{k+1}} \Gamma(k+j+1) \\
&\quad - \frac{k}{z} \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\frac{a_n z}{b_n}} \frac{(a_n z)^j}{j! b_n^j} \frac{b_n^k}{(j-1)! a_n^k} \Gamma(k+j)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{a_n}{b_n}L_{a_n,b_n}(e_k; z) + \frac{a_n}{zb_n}L_{a_n,b_n}(e_{k+1}; z) - \frac{k}{z}L_{a_n,b_n}(e_k; z) \\
&= \frac{a_n}{zb_n}L_{a_n,b_n}(e_{k+1}; z) - \left(\frac{a_n}{b_n} + \frac{k}{z}\right)L_{a_n,b_n}(e_k; z)
\end{aligned}$$

olup, bu ise her $z \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$ ve $k = 0, 1, \dots$ için

$$L_{a_n,b_n}(e_{k+1}; z) = \frac{b_n}{a_n}zL'_{a_n,b_n}(e_k; z) + \left(z + \frac{b_n}{a_n}k\right)L_{a_n,b_n}(e_k; z) \quad (4.13)$$

olmasını gerektirir. Eş. 4.13 ten her $z \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$ ve $k = 0, 1, \dots$ için

$$\begin{aligned}
L_{a_n,b_n}(e_k; z) - e_k(z) &= \frac{b_n}{a_n}z[L_{a_n,b_n}(e_{k-1}; z) - e_{k-1}(z)]' + \frac{b_n}{a_n}z(k-1)z^{k-2} \\
&\quad + \left(z + \frac{b_n}{a_n}(k-1)\right)[L_{a_n,b_n}(e_{k-1}; z) - e_{k-1}(z)] \\
&\quad + \left(z + \frac{b_n}{a_n}(k-1)\right)z^{k-1} - z^k \\
&= \frac{b_n}{a_n}z[L_{a_n,b_n}(e_{k-1}; z) - e_{k-1}(z)]' + 2\frac{b_n}{a_n}(k-1)z^{k-1} \\
&\quad + \left(z + \frac{b_n}{a_n}(k-1)\right)[L_{a_n,b_n}(e_{k-1}; z) - e_{k-1}(z)] \quad (4.14)
\end{aligned}$$

indirgeme bağıntısı elde edilir. Eş. 4.14 te $|z| \leq r$ için modüle geçilirse her $k \geq 2$ için

$$|L_{a_n,b_n}(e_k; z) - e_k(z)| \leq \frac{b_n}{a_n}|z| \left| [L_{a_n,b_n}(e_{k-1}; z) - e_{k-1}(z)]' \right| + 2\frac{b_n}{a_n}(k-1)|z|^{k-1}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(|z| + \frac{b_n}{a_n}(k-1) \right) |L_{a_n, b_n}(e_{k-1}; z) - e_{k-1}(z)| \\
& \leq \frac{b_n}{a_n} r \left| [L_{a_n, b_n}(e_{k-1}; z) - e_{k-1}(z)]' \right| + 2 \frac{b_n}{a_n} (k-1) r^{k-1} \\
& + \left(r + \frac{b_n}{a_n}(k-1) \right) |L_{a_n, b_n}(e_{k-1}; z) - e_{k-1}(z)| \tag{4.15}
\end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca Lemma 4.3.1 den $L_{a_n, b_n}(e_{k-1}; z)$ fonksiyonu $k-1$. dereceden bir polinomdur. Dolayısıyla Teorem 2.1.8 Bernstein eşitsizliğinden her $|z| \leq r$ için

$$\left| [L_{a_n, b_n}(e_{k-1}; z) - e_{k-1}(z)]' \right| \leq \frac{k-1}{r} \|L_{a_n, b_n}(e_{k-1}; z) - e_{k-1}(z)\|_r$$

sağlanır. Bu ifade Eş. 4.15 te kullanılırsa

$$\begin{aligned}
|L_{a_n, b_n}(e_k; z) - e_k(z)| & \leq \frac{b_n}{a_n} (k-1) \|L_{a_n, b_n}(e_{k-1}; z) - e_{k-1}(z)\|_r + 2 \frac{b_n}{a_n} (k-1) r^{k-1} \\
& + \left(r + \frac{b_n}{a_n}(k-1) \right) |L_{a_n, b_n}(e_{k-1}; z) - e_{k-1}(z)| \\
& \leq \frac{b_n}{a_n} (k-1) \|L_{a_n, b_n}(e_{k-1}; z) - e_{k-1}(z)\|_r + 2 \frac{b_n}{a_n} (k-1) r^{k-1} \\
& + \left(r + \frac{b_n}{a_n}(k-1) \right) \|L_{a_n, b_n}(e_{k-1}; z) - e_{k-1}(z)\|_r \\
& = \left(r + 2 \frac{b_n}{a_n}(k-1) \right) \|L_{a_n, b_n}(e_{k-1}; z) - e_{k-1}(z)\|_r \\
& + 2 \frac{b_n}{a_n} (k-1) r^{k-1}
\end{aligned}$$

olur ve

$$\begin{aligned} \|L_{a_n, b_n}(e_k; z) - e_k(z)\|_r &\leq \left(r + 2 \frac{b_n}{a_n}(k-1)\right) \|L_{a_n, b_n}(e_{k-1}; z) - e_{k-1}(z)\|_r \\ &\quad + 2 \frac{b_n}{a_n}(k-1)r^{k-1} \end{aligned} \quad (4.16)$$

elde edilir. Şimdi $\|L_{a_n, b_n}(e_{k-1}; z) - e_{k-1}(z)\|_r$ için bir üst sınır bulalım. Eş. 4.14 te $k = 2$ için;

$$\begin{aligned} L_{a_n, b_n}(e_2; z) - e_2(z) &= \frac{b_n}{a_n} z [L_{a_n, b_n}(e_1; z) - e_1(z)]' + 2 \frac{b_n}{a_n} z \\ &\quad + \left(z + \frac{b_n}{a_n}\right) [L_{a_n, b_n}(e_1; z) - e_1(z)] \\ &= 2 \frac{b_n}{a_n} z \end{aligned}$$

olup, her $|z| \leq r$ için

$$\|L_{a_n, b_n}(e_2; z) - e_2(z)\|_r \leq 2 \frac{b_n}{a_n} r$$

bulunur.

$k = 3$ için;

$$\begin{aligned} L_{a_n, b_n}(e_3; z) - e_3(z) &= \frac{b_n}{a_n} z [L_{a_n, b_n}(e_2; z) - e_2(z)]' + 4 \frac{b_n}{a_n} z^2 \\ &\quad + \left(z + 2 \frac{b_n}{a_n}\right) [L_{a_n, b_n}(e_2; z) - e_2(z)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{b_n}{a_n} z \left[2 \frac{b_n}{a_n} z \right]' + 4 \frac{b_n}{a_n} z^2 + \left(z + 2 \frac{b_n}{a_n} \right) 2 \frac{b_n}{a_n} z \\
&= 2 \left(\frac{b_n}{a_n} \right)^2 z + 2 \frac{b_n}{a_n} z^2 + 4 \left(\frac{b_n}{a_n} \right)^2 z + 4 \frac{b_n}{a_n} z^2 \\
&= 6 \left(\frac{b_n}{a_n} \right)^2 z + 6 \frac{b_n}{a_n} z^2
\end{aligned}$$

olur. $r \geq 1$ olmak üzere her $|z| \leq r$ ve $\frac{b_n}{a_n} \leq \frac{1}{2}$ olduğu dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}
\|L_{a_n, b_n}(e_3; z) - e_3(z)\|_r &\leq 6 \left(\frac{b_n}{a_n} \right)^2 r + 6 \frac{b_n}{a_n} r^2 \\
&\leq 6 \frac{b_n}{a_n} r^2 + 6 \frac{b_n}{a_n} r^2 \\
&= 12 \frac{b_n}{a_n} r^2
\end{aligned}$$

bulunur. $k = 4, 5, \dots$ alınarak devam edilirse k ya göre matematiksel indüksiyon kullanarak her $k \geq 2, n \in \mathbb{N}$ için

$$\|L_{a_n, b_n}(e_k; z) - e_k(z)\|_r \leq \frac{b_n}{a_n} (k+1)! r^{k-1} \quad (4.17)$$

elde edilir. Eş. 4.17 ifadesi Eş. 4.16 da kullanılırsa

$$\|L_{a_n, b_n}(e_k; z) - e_k(z)\|_r \leq \left(r + 2 \frac{b_n}{a_n} (k-1) \right) \frac{b_n}{a_n} k! r^{k-2} + 2 \frac{b_n}{a_n} (k-1) r^{k-1}$$

yazılır ve $\frac{b_n}{a_n} \leq \frac{1}{2}$ olduğu dikkate alınırsa

$$\|L_{a_n, b_n}(e_k; z) - e_k(z)\|_r \leq [r + (k-1)] \frac{b_n}{a_n} k! r^{k-2} + 2 \frac{b_n}{a_n} (k-1) r^{k-1}$$

olduğu görülür. Bu durumda geriye her $k \geq 2$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$[r + (k - 1)] \frac{b_n}{a_n} k! r^{k-2} + 2 \frac{b_n}{a_n} (k - 1) r^{k-1} \leq \frac{b_n}{a_n} (k + 1)! r^{k-1}$$

ya da basit düzenlemelerle yukarıdaki eşitsizliğe denk olan

$$[r + (k - 1)]k! + 2(k - 1)r \leq (k + 1)! r$$

ifadesini ispatlamak kalır. Son eşitsizliğin her $k \geq 2$ için sağlandığı Teorem 3.3.4 ün (i) şikkının ispatında verilmiştir.

Sonuç olarak Eş. 4.11, Eş. 4.17 ve f nin c_k Taylor katsayıları üzerindeki hipotezden

$$\begin{aligned} |L_{a_n, b_n}(f; z) - f(z)| &\leq \sum_{k=2}^{\infty} M \frac{A^k}{k!} \frac{b_n}{a_n} (k + 1)! r^{k-1} \\ &= \frac{b_n}{a_n} \frac{M}{r} \sum_{k=2}^{\infty} (k + 1)(rA)^k \\ &= \frac{b_n}{a_n} C_r(f) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada her $1 \leq r < \frac{1}{A}$ için

$$C_r(f) = \frac{M}{r} \sum_{k=2}^{\infty} (k + 1)(rA)^k < \infty$$

dur. Çünkü $f(z) = \sum_{k=2}^{\infty} z^{k+1}$ ve onun türevi $f'(z) = \sum_{k=2}^{\infty} (k + 1)z^k$ serisi herhangi $1 \leq r < \frac{1}{A}$ için $|z| \leq r$ de mutlak ve düzgün yakınsaktır.

(ii) $1 \leq r < r_1 < \frac{1}{A}$ keyfi sabitler ve $n, p \in \mathbb{N}$ olmak üzere γ , 0 merkezli ve $r_1 > r$

yarıçaplı çemberi gösterebilirsin. Her $|z| \leq r$ ve $v \in \gamma$ için $|v - z| \geq r_1 - r$ eşitsizliği sağlanır. Teorem 2.1.4 ve (i) kullanılırsa, her $|z| \leq r$ ve $\frac{a_n}{b_n} - B > 0$ olacak şekilde her $n > n_0$ için

$$\begin{aligned} \left| L_{a_n, b_n}^{(p)}(f; z) - f^{(p)}(z) \right| &= \left| \frac{p!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{L_{a_n, b_n}(f; v) - f(v)}{(v - z)^{p+1}} dv \right| \\ &\leq \frac{p!}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{|L_{a_n, b_n}(f; v) - f(v)|}{|v - z|^{p+1}} |dv| \\ &\leq \frac{p!}{2\pi} \frac{\frac{b_n}{a_n} C_{r_1}(f)}{(r_1 - r)^{p+1}} \int_{\gamma} |dv| \\ &= \frac{p!}{2\pi} \frac{\frac{b_n}{a_n} C_{r_1}(f)}{(r_1 - r)^{p+1}} 2\pi r_1 \\ &= \frac{b_n}{a_n} C_{r_1}(f) \frac{p! r_1}{(r_1 - r)^{p+1}} \end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki $C_{r_1}(f)$ ifadesi (i) de verilen özellikleri sağlar. Böylece bu teorem ile yaklaşım ve eşanlı yaklaşım için üst nicel tahminin $\frac{b_n}{a_n}$ olduğu elde edilmiştir.

4.3.3. Voronovskaja Tip Sonuç

4.3.4. Teorem

f fonksiyonu ve n_0, R, M, C, B, A sabitleri için Teorem 4.3.3 teki hipotezler sağlansın ve $1 \leq r < \frac{1}{A}$ keyfi sabitini alalım. Bu durumda her $n > n_0$ ve $|z| \leq r$ için

$$\left| L_{a_n, b_n}(f; z) - f(z) - \frac{b_n}{a_n} z f''(z) \right| \leq \left(\frac{b_n}{a_n} \right)^2 K_r(f)$$

eşitsizliği gerçekleşir. Burada

$$K_r(f) = \frac{4M}{r^2} \sum_{k=2}^{\infty} (k+2)(k+1)(rA)^k < \infty$$

dur (Çetin ve İspir, 2014).

İspat

$k = 0, 1, \dots$ için $e_k(z) = z^k$ olmak üzere Lemma 4.3.2 den,

$$L_{a_n, b_n}(f; z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k L_{a_n, b_n}(e_k; z)$$

yazılır. $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} \frac{b_n}{a_n} z f''(z) &= \frac{b_n}{a_n} z \sum_{k=2}^{\infty} c_k k(k-1) z^{k-2} \\ &= \frac{b_n}{a_n} \sum_{k=2}^{\infty} c_k k(k-1) z^{k-1} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $L_{a_n, b_n}(e_0; z) = e_0(z)$ ve $L_{a_n, b_n}(e_1; z) = e_1(z)$ eşitlikleri dikkate alındığında her $z \in D_R$, $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} \left| L_{a_n, b_n}(f; z) - f(z) - \frac{b_n}{a_n} z f''(z) \right| &= \left| \sum_{k=0}^{\infty} c_k L_{a_n, b_n}(e_k; z) - \sum_{k=0}^{\infty} c_k e_k(z) \right. \\ &\quad \left. - \frac{b_n}{a_n} \sum_{k=2}^{\infty} c_k k(k-1) z^{k-1} \right| \\ &= |c_0[L_{a_n, b_n}(e_0; z) - e_0(z)] + c_1[L_{a_n, b_n}(e_1; z) - e_1(z)]| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left| \sum_{k=2}^{\infty} c_k L_{a_n, b_n}(e_k; z) - \sum_{k=2}^{\infty} c_k e_k(z) - \frac{b_n}{a_n} \sum_{k=2}^{\infty} c_k k(k-1) z^{k-1} \right| \\
& = \left| \sum_{k=2}^{\infty} c_k L_{a_n, b_n}(e_k; z) - \sum_{k=2}^{\infty} c_k e_k(z) - \frac{b_n}{a_n} \sum_{k=2}^{\infty} c_k k(k-1) z^{k-1} \right| \\
& = \left| \sum_{k=2}^{\infty} c_k \left[L_{a_n, b_n}(e_k; z) - e_k(z) - \frac{b_n}{a_n} k(k-1) z^{k-1} \right] \right| \\
& \leq \sum_{k=2}^{\infty} |c_k| \left| L_{a_n, b_n}(e_k; z) - e_k(z) - \frac{b_n}{a_n} k(k-1) z^{k-1} \right| \quad (4.18)
\end{aligned}$$

bulunur. $E_{k, a_n, b_n}(z) = L_{a_n, b_n}(e_k; z) - e_k(z) - \frac{b_n}{a_n} k(k-1) z^{k-1}$ ile gösterelim. $k = 0, 1$ için $E_{k, a_n, b_n}(z) = 0$ olduğundan, Eş. 4.13 teki indirgeme bağıntısı kullanılırsa her $k \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$ ve $z \in D_R$ için

$$\begin{aligned}
E_{k, a_n, b_n}(z) &= \frac{b_n}{a_n} z [L_{a_n, b_n}(e_{k-1}; z) - e_{k-1}(z)]' + 2 \frac{b_n}{a_n} (k-1) z^{k-1} \\
&+ \left(z + \frac{b_n}{a_n} (k-1) \right) [L_{a_n, b_n}(e_{k-1}; z) - e_{k-1}(z)] - \frac{b_n}{a_n} k(k-1) z^{k-1} \\
&= \frac{b_n}{a_n} z \left[L_{a_n, b_n}(e_{k-1}; z) - e_{k-1}(z) - \frac{b_n}{a_n} (k-1)(k-2) z^{k-2} \right]' \\
&+ \frac{b_n}{a_n} z \left[\frac{b_n}{a_n} (k-1)(k-2) z^{k-2} \right]' + 2 \frac{b_n}{a_n} (k-1) z^{k-1} \\
&+ \left(z + \frac{b_n}{a_n} (k-1) \right) \left[L_{a_n, b_n}(e_{k-1}; z) - e_{k-1}(z) - \frac{b_n}{a_n} (k-1)(k-2) z^{k-2} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(z + \frac{b_n}{a_n}(k-1) \right) \frac{b_n}{a_n}(k-1)(k-2)z^{k-2} - \frac{b_n}{a_n}k(k-1)z^{k-1} \\
& = \frac{b_n}{a_n}zE'_{k-1,a_n,b_n}(z) + \frac{b_n}{a_n}z \left[\frac{b_n}{a_n}(k-1)(k-2)^2z^{k-3} \right] + 2\frac{b_n}{a_n}(k-1)z^{k-1} \\
& + \left(z + \frac{b_n}{a_n}(k-1) \right) E_{k-1,a_n,b_n}(z) + \left(z + \frac{b_n}{a_n}(k-1) \right) \frac{b_n}{a_n}(k-1)(k-2)z^{k-2} \\
& - \frac{b_n}{a_n}k(k-1)z^{k-1} \\
& = \frac{b_n}{a_n}zE'_{k-1,a_n,b_n}(z) + \left(\frac{b_n}{a_n} \right)^2 (k-1)(k-2)^2z^{k-2} + 2\frac{b_n}{a_n}(k-1)z^{k-1} \\
& + \left(z + \frac{b_n}{a_n}(k-1) \right) E_{k-1,a_n,b_n}(z) + \frac{b_n}{a_n}(k-1)(k-2)z^{k-1} \\
& + \left(\frac{b_n}{a_n} \right)^2 (k-1)^2(k-2)z^{k-2} - \frac{b_n}{a_n}k(k-1)z^{k-1} \\
& = \frac{b_n}{a_n}zE'_{k-1,a_n,b_n}(z) + \left(z + \frac{b_n}{a_n}(k-1) \right) E_{k-1,a_n,b_n}(z) \\
& + \frac{b_n}{a_n}(k-1)z^{k-1}[k-2+2-k] + \left(\frac{b_n}{a_n} \right)^2 (k-1)(k-2)z^{k-2}[k-2+k-1] \\
& = \frac{b_n}{a_n}zE'_{k-1,a_n,b_n}(z) + \left(z + \frac{b_n}{a_n}(k-1) \right) E_{k-1,a_n,b_n}(z) \\
& + \left(\frac{b_n}{a_n} \right)^2 (k-1)(k-2)(2k-3)z^{k-2}
\end{aligned}$$

şeklinde yeni bir indirgeme bağıntısı elde edilir. Son eşitlikte mutlak değere geçilirse her

$|z| \leq r$ için

$$\begin{aligned}
|E_{k,a_n,b_n}(z)| &\leq \frac{b_n}{a_n} |z| |E'_{k-1,a_n,b_n}(z)| + \left(|z| + \frac{b_n}{a_n} (k-1) \right) |E_{k-1,a_n,b_n}(z)| \\
&\quad + \left(\frac{b_n}{a_n} \right)^2 (k-1)(k-2)(2k-3) |z|^{k-2} \\
&\leq \frac{b_n}{a_n} r |E'_{k-1,a_n,b_n}(z)| + \left(r + \frac{b_n}{a_n} (k-1) \right) |E_{k-1,a_n,b_n}(z)| \\
&\quad + \left(\frac{b_n}{a_n} \right)^2 (k-1)(k-2)(2k-3) r^{k-2} \tag{4.19}
\end{aligned}$$

bulunur. Diğer taraftan $E_{k-1,a_n,b_n}(z)$ polinomu

$$E_{k-1,a_n,b_n}(z) = L_{a_n,b_n}(e_{k-1}; z) - e_{k-1}(z) - \frac{b_n}{a_n} (k-1)(k-2) z^{k-2}$$

olarak yazılabildiğinden, Lemma 4.3.1 in ışığında $E_{k-1,a_n,b_n}(z)$ in derecesinin $\leq k-1$ olduğu görülür. Dolayısıyla Eş. 4.19 da Teorem 2.1.8 uygulanırsa basit hesaplamalarla

$$\begin{aligned}
|E_{k,a_n,b_n}(z)| &\leq \frac{b_n}{a_n} (k-1) \|E_{k-1,a_n,b_n}(z)\|_r + \left(r + \frac{b_n}{a_n} (k-1) \right) |E_{k-1,a_n,b_n}(z)| \\
&\quad + \left(\frac{b_n}{a_n} \right)^2 (k-1)(k-2)(2k-3) r^{k-2} \\
&\leq \frac{b_n}{a_n} (k-1) \|E_{k-1,a_n,b_n}(z)\|_r + r |E_{k-1,a_n,b_n}(z)| \\
&\quad + \frac{b_n}{a_n} (k-1) |E_{k-1,a_n,b_n}(z)| + \left(\frac{b_n}{a_n} \right)^2 (k-1)(k-2)(2k-3) r^{k-2} \\
&\leq \frac{b_n}{a_n} (k-1) \|E_{k-1,a_n,b_n}(z)\|_r + r |E_{k-1,a_n,b_n}(z)|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{b_n}{a_n} (k-1) \|E_{k-1, a_n, b_n}(z)\|_r + \left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2 (k-1)(k-2)(2k-3)r^{k-2} \\
& = r |E_{k-1, a_n, b_n}(z)| + 2 \frac{b_n}{a_n} (k-1) \|E_{k-1, a_n, b_n}(z)\|_r \\
& \quad + \left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2 (k-1)(k-2)(2k-3)r^{k-2} \\
& = r |E_{k-1, a_n, b_n}(z)| + \left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2 (k-1)(k-2)(2k-3)r^{k-2} \\
& \quad + 2 \frac{b_n}{a_n} (k-1) \left\| L_{a_n, b_n}(e_{k-1}; z) - e_{k-1}(z) - \frac{b_n}{a_n} (k-1)(k-2)z^{k-2} \right\|_r \\
& \leq r |E_{k-1, a_n, b_n}(z)| + \left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2 (k-1)(k-2)(2k-3)r^{k-2} \\
& \quad + 2 \frac{b_n}{a_n} (k-1) \left[\|L_{a_n, b_n}(e_{k-1}; z) - e_{k-1}(z)\|_r + \frac{b_n}{a_n} (k-1)(k-2)r^{k-2} \right]
\end{aligned}$$

olur. Eş. 4.17 de elde edilen üst tahmin son eşitsizlikte kullanılırsa

$$\begin{aligned}
|E_{k, a_n, b_n}(z)| & \leq r |E_{k-1, a_n, b_n}(z)| + \left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2 (k-1)(k-2)(2k-3)r^{k-2} \\
& \quad + 2 \frac{b_n}{a_n} (k-1) \left[\frac{b_n}{a_n} k! r^{k-2} + \frac{b_n}{a_n} (k-1)(k-2)r^{k-2} \right] \\
& = r |E_{k-1, a_n, b_n}(z)| + \left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2 (k-1)(k-2)(2k-3)r^{k-2} \\
& \quad + 2 \left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2 (k-1)k! r^{k-2} + 2 \left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2 (k-1)^2(k-2)r^{k-2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq r|E_{k-1,a_n,b_n}(z)| + \left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2 (k-1)(k-2)(2k-2)r^{k-2} \\
&\quad + 2\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2 (k-1)k!r^{k-2} + 2\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2 (k-1)^2(k-2)r^{k-2} \\
&= r|E_{k-1,a_n,b_n}(z)| + 4\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2 (k-1)^2(k-2)r^{k-2} + 2\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2 (k-1)k!r^{k-2} \\
&\leq r|E_{k-1,a_n,b_n}(z)| + 2\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2 (k+1)k!r^{k-2} + 2\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2 (k+1)!r^{k-2}
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır, bu da

$$|E_{k,a_n,b_n}(z)| \leq r|E_{k-1,a_n,b_n}(z)| + 4\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2 (k+1)!r^{k-2} \quad (4.20)$$

olması demektir. $k = 0,1$ için $E_{k,a_n,b_n}(z) = 0$ olduğu dikkate alınarak, Eş. 4.20 de $k = 2,3, \dots$ için adım adım yazılırsa

$$|E_{2,a_n,b_n}(z)| \leq r|E_{1,a_n,b_n}(z)| + 4\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2 3!r^0 = 4\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2 3!r^0$$

$$\begin{aligned}
|E_{3,a_n,b_n}(z)| &\leq r|E_{2,a_n,b_n}(z)| + 4\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2 4!r \\
&\leq 4\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2 3!r + 4\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2 4!r = 4\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2 r(3! + 4!)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|E_{4,a_n,b_n}(z)| &\leq r|E_{3,a_n,b_n}(z)| + 4\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2 5!r^2 \\
&\leq 4\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2 (3! + 4!)r^2 + 4\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2 5!r^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 4 \left(\frac{b_n}{a_n} \right)^2 r^2 (3! + 4! + 5!) \\
&\quad \vdots \\
|E_{k,a_n,b_n}(z)| &\leq 4 \left(\frac{b_n}{a_n} \right)^2 r^{k-2} \sum_{j=3}^{k+1} j! \\
&\leq 4 \left(\frac{b_n}{a_n} \right)^2 r^{k-2} (k-1)(k+1)! \\
&\leq 4 \left(\frac{b_n}{a_n} \right)^2 r^{k-2} (k+2)!
\end{aligned}$$

bulunur. Son eşitsizlik Eş. 4.18 de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\left| L_{a_n,b_n}(f; z) - f(z) - \frac{b_n}{a_n} z f''(z) \right| &\leq \sum_{k=2}^{\infty} |c_k| |E_{k,a_n,b_n}(z)| \\
&\leq \sum_{k=2}^{\infty} M \frac{A^k}{k!} 4 \left(\frac{b_n}{a_n} \right)^2 r^{k-2} (k+2)! \\
&= \frac{4M}{r^2} \left(\frac{b_n}{a_n} \right)^2 \sum_{k=2}^{\infty} (k+2)(k+1)(rA)^k
\end{aligned}$$

elde edilir. $rA < 1$ için $\sum_{k=2}^{\infty} (k+2)(k+1)(rA)^k < \infty$ olur.

4.3.4. Yaklaşımın Tam Mertebesi

4.3.5. Teorem

f fonksiyonu ve n_0, R, M, C, B, A sabitleri için Teorem 4.3.3 teki hipotezler sağlansın. Eğer f derecesi en çok 1 olan bir polinom değilse, bu durumda her $1 \leq r < \frac{1}{A}$ ve her $n > n_0$ için

$$\|L_{a_n, b_n}(f) - f\|_r \sim \frac{b_n}{a_n}$$

sağlanır. Burada denklikteki sabitler sadece f ve r ye bağlıdır (Çetin ve İspir, 2014).

İspat

Her $z \in D_R$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} L_{a_n, b_n}(f; z) - f(z) &= \left\{ L_{a_n, b_n}(f; z) - f(z) - \frac{b_n}{a_n} z f''(z) \right\} + \frac{b_n}{a_n} z f''(z) \\ &= \frac{b_n}{a_n} \left\{ z f''(z) + \frac{b_n}{a_n} \left(\frac{a_n}{b_n} \right)^2 \left[L_{a_n, b_n}(f; z) - f(z) - \frac{b_n}{a_n} z f''(z) \right] \right\} \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu ifade de

$$\|F + G\|_r \geq \| \|F\|_r - \|G\|_r \| \geq \|F\|_r - \|G\|_r$$

eşitsizliği kullanılırsa

$$\|L_{a_n, b_n}(f) - f\|_r \geq \frac{b_n}{a_n} \left\{ \|e_1 f''\|_r - \frac{b_n}{a_n} \left(\frac{a_n}{b_n} \right)^2 \left\| L_{a_n, b_n}(f) - f - \frac{b_n}{a_n} e_1 f'' \right\|_r \right\}$$

elde edilir. D_R de f derecesi en çok 1 olan bir polinom olmadığından, $\|e_1 f''\|_r > 0$ olur.

Aksini kabul edelim. Bu durumda her $z \in \bar{D}_r$ için $z f''(z) = 0$ olup, bu ise her $z \in \bar{D}_r \setminus \{0\}$ için $f''(z) = 0$ olması demektir. f fonksiyonunun analitik olduğu göz önünde bulundurulursa Teorem 2.1.7 den her $z \in D_R$ için $f''(z) = 0$ sağlanır. Böylece $f'(z) = c$ (sabit) olup f nin derecesi en çok 1 olan bir polinom olduğu görülür. Bu da hipotezle çelişir.

Teorem 4.3.4 ten

$$\left(\frac{a_n}{b_n} \right)^2 \left\| L_{a_n, b_n}(f) - f - \frac{b_n}{a_n} e_1 f'' \right\|_r \leq \frac{4M}{r^2} \sum_{k=2}^{\infty} (k+2)(k+1)(rA)^k < \infty$$

elde edilir. Diğer taraftan $n \rightarrow \infty$ iken $\frac{b_n}{a_n} \rightarrow 0$ olduğundan

$$\frac{b_n}{a_n} \left(\frac{a_n}{b_n} \right)^2 \left\| L_{a_n, b_n}(f) - f - \frac{b_n}{a_n} e_1 f'' \right\|_r \rightarrow 0$$

sonucuna ulaşılır. Sonuç olarak, her $n \geq n_1$ için

$$\|e_1 f''\|_r - \frac{b_n}{a_n} \left(\frac{a_n}{b_n} \right)^2 \left\| L_{a_n, b_n}(f) - f - \frac{b_n}{a_n} e_1 f'' \right\|_r \geq \frac{1}{2} \|e_1 f''\|_r$$

olacak biçimde sadece f ve r ye bağlı bir $n_1 > n_0$ indeksi vardır. Böylece her $n \geq n_1$ için

$$\|L_{a_n, b_n}(f) - f\|_r \geq \frac{b_n}{2a_n} \|e_1 f''\|_r$$

eşitsizliği elde edilir. $n \in \{n_0 + 1, \dots, n_1 - 1\}$ için $M_{r, n}(f) = \frac{a_n}{b_n} \|L_{a_n, b_n}(f) - f\|_r > 0$ iken $\|L_{a_n, b_n}(f) - f\|_r \geq \frac{b_n}{a_n} M_{r, n}(f)$ olacağı açıktır. Burada eğer $\|L_{a_n, b_n}(f) - f\|_r = 0$ olursa her $|z| \leq r$ için $L_{a_n, b_n}(f; z) = f(z)$ bulunur. Bu da sadece derecesi ≤ 1 olan bir f fonksiyonu için geçerli olduğundan hipotezle çelişki elde edilir. Sonuç olarak, her $n > n_0$ için

$$C_r(f) = \min \left\{ M_{r, n_0+1}(f), \dots, M_{r, n_1-1}(f), \frac{1}{2} \|e_1 f''\|_r \right\}$$

olmak üzere $\|L_{a_n, b_n}(f) - f\|_r \geq \frac{b_n}{a_n} C_r(f)$ eşitsizliği gerçekleşir. Böylece son eşitsizlik ile Teorem 4.3.3 (i) birlikte düşünülürse yaklaşımın tam mertebesinin $\frac{b_n}{a_n}$ olduğu görülür.

4.3.5. Eşanlı Yaklaşımın Tam Mertebesi

4.3.6. Teorem

f fonksiyonu ve n_0, R, M, C, B, A sabitleri için Teorem 4.3.3 teki hipotezler sağlansın ve

ayrıca $1 \leq r < r_1 < \frac{1}{A}$ ve $p \in \mathbb{N}$ sabitlerini alalım. Eğer f derecesi $\leq p$ olan bir polinom değilse, bu durumda her $n > n_0$ için

$$\|L_{a_n, b_n}^{(p)}(f) - f^{(p)}\|_r \sim \frac{b_n}{a_n}$$

sağlanır. Burada denklikteki sabitler sadece f, r, r_1 ve p ye bağlıdır (Çetin ve İspir, 2014).

İspat

Teorem 4.3.3 (ii) de $\|L_{a_n, b_n}^{(p)}(f) - f^{(p)}\|_r$ için bir üst tahmin bulunmuştu. O halde geriye $\|L_{a_n, b_n}^{(p)}(f) - f^{(p)}\|_r$ için bir alt tahmin elde etmek kalır. $r_1 > r \geq 1$ olmak üzere, 0 merkezli r_1 yarıçaplı çemberi γ ile gösterelim. Bu durumda her $|z| \leq r$ ve $v \in \gamma$ için $|v - z| \geq ||v| - |z|| \geq r_1 - r$ sağlanır. Teorem 2.1.4 ten

$$L_{a_n, b_n}^{(p)}(f; z) - f^{(p)}(z) = \frac{p!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{L_{a_n, b_n}(f; v) - f(v)}{(v - z)^{p+1}} dv \quad (4.21)$$

yazılır. Ayrıca her $v \in \gamma$ ve $n > n_0$ için

$$L_{a_n, b_n}(f; v) - f(v) = \frac{b_n}{a_n} \left\{ v f''(v) + \frac{b_n}{a_n} \left(\frac{a_n}{b_n} \right)^2 \left[L_{a_n, b_n}(f; v) - f(v) - \frac{b_n}{a_n} v f''(v) \right] \right\}$$

elde edilir. Bu ifade Eş. 4.21 de yerine yazılırsa

$$L_{a_n, b_n}^{(p)}(f; z) - f^{(p)}(z) = \frac{b_n}{a_n} \left\{ \frac{p!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{v f''(v)}{(v - z)^{p+1}} dv + \frac{b_n}{a_n} \frac{p!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\left(\frac{a_n}{b_n} \right)^2 \left(L_{a_n, b_n}(f; v) - f(v) - \frac{b_n}{a_n} v f''(v) \right)}{(v - z)^{p+1}} dv \right\}$$

$$= \frac{b_n}{a_n} \{ [zf''(z)]^{(p)} + \frac{b_n}{a_n} \frac{p!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\left(\frac{a_n}{b_n}\right)^2 \left(L_{a_n, b_n}(f; v) - f(v) - \frac{b_n}{a_n} v f''(v) \right)}{(v-z)^{p+1}} dv \}$$

bulunur. Şimdi her $|z| \leq r$ ve $n > n_0$ için $\| \cdot \|_r$ normuna geçilirse

$$\| L_{a_n, b_n}^{(p)}(f) - f^{(p)} \|_r \geq \frac{b_n}{a_n} \left\{ \| [e_1 f'']^{(p)} \|_r - \frac{b_n}{a_n} \left\| \frac{p!}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{\left(\frac{a_n}{b_n}\right)^2 \left(L_{a_n, b_n}(f; v) - f(v) - \frac{b_n}{a_n} v f''(v) \right)}{(v-z)^{p+1}} dv \right\|_r \right\}$$

olduğu görülür. Teorem 4.3.4 ten her $|z| \leq r$ ve $n > n_0$ için

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{p!}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{\left(\frac{a_n}{b_n}\right)^2 \left(L_{a_n, b_n}(f; v) - f(v) - \frac{b_n}{a_n} v f''(v) \right)}{(v-z)^{p+1}} dv \right\|_r \\ & \leq \left\| \frac{p!}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{\left(\frac{a_n}{b_n}\right)^2 \left(L_{a_n, b_n}(f; v) - f(v) - \frac{b_n}{a_n} v f''(v) \right)}{(v-z)^{p+1}} dv \right\|_{r_1} \\ & \leq \frac{p!}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{\left(\frac{a_n}{b_n}\right)^2 \| L_{a_n, b_n}(f; v) - f(v) - \frac{b_n}{a_n} v f''(v) \|_{r_1}}{\| (v-z)^{p+1} \|_{r_1}} \| dv \|_{r_1} \\ & \leq \frac{p!}{2\pi} \frac{\left(\frac{a_n}{b_n}\right)^2 \| L_{a_n, b_n}(f; v) - f(v) - \frac{b_n}{a_n} v f''(v) \|_{r_1}}{(r_1 - r)^{p+1}} \int_{\gamma} \| dv \|_{r_1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{p!}{2\pi} \frac{\frac{4M}{r_1^2} \sum_{k=2}^{\infty} (k+2)(k+1)(r_1 A)^k}{(r_1 - r)^{p+1}} 2\pi r_1 \\
&= \frac{4M}{r_1^2} \sum_{k=2}^{\infty} (k+2)(k+1)(r_1 A)^k \frac{p! r_1}{(r_1 - r)^{p+1}} \quad (4.22)
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Diğer taraftan f fonksiyonu üzerindeki hipotezden $\| [e_1 f'']^{(p)} \|_r > 0$ olur. Aslında, aksini kabul edelim yani $z f''(z)$ derecesi $\leq p - 1$ olan bir polinom olsun. Bu durumda f nin analitikliğinden, f nin derecesi $\leq p$ olan bir polinom olacağı açıktır. Bu da hipotezle çelişir. Dolayısıyla Eş. 4.22 ifadesi ile $n \rightarrow \infty$ iken $\frac{b_n}{a_n} \rightarrow 0$ olduğu göz önünde bulundurulursa

$$\frac{b_n}{a_n} \left\| \frac{p!}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{\left(\frac{a_n}{b_n}\right)^2 \left(L_{a_n, b_n}(f; v) - f(v) - \frac{b_n}{a_n} v f''(v) \right)}{(v - z)^{p+1}} dv \right\|_r \rightarrow 0$$

elde edilir. O halde her $n \geq n_1$ için

$$\| [e_1 f'']^{(p)} \|_r - \frac{b_n}{a_n} \left\| \frac{p!}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{\frac{a_n^2}{b_n^2} \left(L_{a_n, b_n}(f; v) - f(v) - \frac{b_n}{a_n} v f''(v) \right)}{(v - z)^{p+1}} dv \right\|_r \geq \frac{\| [e_1 f'']^{(p)} \|_r}{2}$$

olacak biçimde sadece f ve r ye bağlı bir $n_1 > n_0$ indeksi vardır. Böylece her $n \geq n_1$ için

$$\| L_{a_n, b_n}^{(p)}(f) - f^{(p)} \|_r \geq \frac{b_n}{2a_n} \| [e_1 f'']^{(p)} \|_r$$

elde edilir. $n \in \{n_0 + 1, \dots, n_1 - 1\}$ için $M_{r, n, p}(f) = \frac{a_n}{b_n} \| L_{a_n, b_n}^{(p)}(f) - f^{(p)} \|_r > 0$ iken

$$\| L_{a_n, b_n}^{(p)}(f) - f^{(p)} \|_r \geq \frac{b_n}{a_n} M_{r, n, p}(f) \text{ olacağı açıktır. Sonuç olarak, her } n > n_0 \text{ için}$$

$$C_{r,p}(f) = \min \left\{ M_{r,n_0+1,p}(f), \dots, M_{r,n_1-1,p}(f), \frac{1}{2} \|[e_1 f'']^{(p)}\|_r \right\}$$

olmak üzere $\|L_{a_n,b_n}^{(p)}(f) - f^{(p)}\|_r \geq \frac{b_n}{a_n} C_{r,p}(f)$ bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde sırasıyla genelleştirilmiş kompleks Szász operatörleri ile genelleştirilmiş kompleks genuine Szász-Durrmeyer operatörleri tanımlanarak, bu operatörlerin yakınsaklık oranı ve Voronovskaja tip asimptotik formülü için nicel tahminler verilmiş ve eşanlı yaklaşımın tam mertebesi elde edilmiştir.

Sonuç olarak,

- S_{a_n, b_n} genelleştirilmiş kompleks Szász operatörlerinin yaklaşım özellikleri $[0, \infty)$ reel aralığından kompleks düzlemdeki kompakt disklere nicel tahminlerle genişletilmiştir.
- L_{a_n, b_n} genelleştirilmiş kompleks genuine Szász-Durrmeyer operatörlerinin yaklaşım özellikleri $[0, \infty)$ reel aralığından kompleks düzlemdeki kompakt disklere nicel tahminlerle genişletilmiştir.
- Üçüncü bölümde tanımladığımız S_{a_n, b_n} operatörleri $a_n = n$ ve $b_n = 1$ durumunda Gal (2008, 2009:103-113) tarafından incelenen operatörlere indirgenir. Dolayısıyla elde ettiğimiz sonuçlar Gal (2008,2009:103-113) tarafından verilen sonuçları kapsar.
- Dördüncü bölümde tanımladığımız L_{a_n, b_n} operatörlerinin $a_n = n$ ve $b_n = 1$ özel durumu Gal ve Gupta (2014) tarafından incelenen operatörleri vermektedir. Böylece burada elde ettiğimiz sonuçlar Gal ve Gupta (2014) tarafından elde edilen sonuçlardan daha geneldir.
- Yeni tanımladığımız S_{a_n, b_n} ve L_{a_n, b_n} operatörlerinin yaklaşım oranının a_n ve b_n dizilerinin seçimine göre uygun şekilde ayarlanabilir olması, bu operatörlerin yaklaşım oranının sırasıyla Gal (2008,2009:103-113) ile Gal ve Gupta (2014) tarafından elde edilen sonuçlardan daha iyi olduğunu göstermektedir.

Diğer taraftan,

- Kompakt disklerde üstel büyümeye sahip olmayan analitik fonksiyonlara ilişkin S_{a_n, b_n} ve L_{a_n, b_n} operatörlerinin yaklaşım özellikleri ayrıca incelenecektir.
- L_{a_n, b_n} genelleştirilmiş kompleks genuine Szász-Durrmeyer operatörlerinin Stancu tip genelleştirmesi tanımlanarak, bu operatörlerin yaklaşım özellikleri sonraki

çalışmamızda verilecektir. Ayrıca S_{a_n, b_n} genelleştirilmiş kompleks Szász operatörlerinin Stancu tip genelleştirmesi Çetin (2015) tarafından tanımlanmış ve nicel tahminli yaklaşım özellikleri incelenmiştir.

- Kompleks S_{a_n, b_n} ve L_{a_n, b_n} operatörleri için daha iyi bir yaklaşım derecesi elde edebilmek amacıyla, bu operatörlerin lineer kombinasyonları tanımlanarak, kompakt disklerde kompleks değerli fonksiyonların yakınsaklık oranı için nicel tahminler araştırılabilir.
- S_{a_n, b_n} ve L_{a_n, b_n} operatörlerinin tensör çarpım tip iki değişkenli operatörleri tanımlanarak, bu operatörlerin kompakt polidisklerde yaklaşım özellikleri sonraki çalışmalarımızda verilecektir.

KAYNAKLAR

- Altomare, F. and Campiti M. (1994). *Korovkin- Type Approximation Theory and Its Applications*. Berlin/New York.:Walter de Gryter, 335-338.
- Anastassiou, G.A. and Gal, S.G. (2010). Approximation by complex Bernstein-Durrmeyer polynomials in compact disks. *Mediterr. J. Math.*, 7(4), 471-482.
- Başkan, T. (2005). *Kompleks Fonksiyonlar Teorisi*. Bursa : Nobel Yayınları, 169-181.
- Bernstein, S.N. (1912-1913). Démonstration du théorémé de Weierstrass, fondéé sur le calcul des probabilités. *Commun. Soc. Math. Kharkow*, 13(2), 1-2.
- Bernstein, S.N. (1943). On the domains of convergence of polynomials (in Russian). *Izv. Acad. Nauk., SSSR, ser. math.*, 7, 49-88.
- Bohman, H. (1952). On approximation of continuous and of analytic functions. *Ark. Mat.*, 2, 43-56.
- Çetin, N. ve İspir, N. (2013). Approximation by complex modified Szász-Mirakjan operators. *Stud. Sci. Math. Hung.*, 50(3), 355-372.
- Çetin, N. ve İspir, N. (2014). Approximation properties of complex modified genuine Szász-Durrmeyer operators. *Comput. Methods Funct. Theory*, 14 ,623-638.
- Çetin, N. (2015). Approximation by complex modified Szász-Mirakjan-Stancu operators in compact disks. *Filomat*, 29(5), 1007-1019.
- Deeba, E.Y. (1982). On the convergence of generalized Szász operator on complex plane. *Tamkang J. Math.*, 13(1), 79-86.
- Dzyadyk, V.K. ve Shevchuk I.A. (2008). *Theory of Uniform Approximation of Functions by Polynomials*. Berlin/Germany.:Walter de Gruyter GmbH and Co. KG., 183-186.
- Favard, J. (1944). Sur les multiplicateurs interpolation. *J. Math. Pure et Apple.*, 23, 219-247.
- Gadjiev, A.D. (1974). The convergence problem for a sequence of positive linear operators on unbounded sets and theorems analogous to that of P.P. Korovkin. *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, 218(5), 1001-1004 (in Russian). *Soviet Math. Dokl.*, 15(5), 1433-1436 (in English).
- Gal, S.G. (2009). *Approximation by Complex Bernstein and Convolution Type Operators*. Hackensack/NJ.:Series on Concrete and Applicable Mathematics, 8. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., xii+337.
- Gal, S.G. (2008). Approximation and geometric properties of complex Favard- Szász-Mirakjan operators in compact disks. *Comput. Math. Appl.*, 56(4), 1121-1127.

- Gal, S.G. (2010). Approximation by complex genuine Durrmeyer type polynomials in compact disks. *Appl. Math. Comput.*, 217, 1913-1920.
- Gal, S.G. and Gupta V. (2011). Quantitative estimates for a new complex Durrmeyer operator in compact disks. *Appl. Math. Comput.*, 218(6), 2944-2951.
- Gal, S.G. and Gupta V. (2014). *Approximation by complex Durrmeyer type operators in compact disks*. New York:Mathematics without boundaries surveys in interdisciplinary research, Springer, 263-286.
- Gergen, J.J., Dressel F.G. ve Purcell W.H. (1963). Convergence of extended Bernstein polynomials in the complex domain. *Pac. J. Math.*, 13(4), 1171-1180.
- Govil, N.K. and Gupta V. (2013). *Approximation properties by Phillips operators*. Mathematics without Boundaries: Essays in Pure Mathematics, Eds. Panos Pardalos and Th. M. Rassias, Springer.
- Gupta, V., Mohapatra R.N. ve Finta Z. (2005). A certain family of mixed summation-integral type operators. *Math. Comput. Modelling.*, 42, 181-191.
- Gupta, V. and Srivastava G. S. (1996). On the rate of convergence of Phillips operators for functions of bounded variation. *Annales Societatis Mathematicae Polonae. Seria I. Commentationes Mathematicae*, 36, 123-130.
- Hacısalıhoğlu, H. ve Hacıyev A. (1995). *Lineer pozitif operatör dizilerinin yakınsaklığı*. Ankara/Türkiye.:Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi, 10-11.
- İspir, N. and Atakut Ç. (2002). Approximation by modified Szász-Mirakjan operators on weighted spaces. *Proc. Indian Acad.*, 112(4), 571-578.
- Kantorovitch, L.V. (1931). Sur la convergence de la suite de polynômes de S. Bernstein en dehors de l'interval fundamental. *Bull. Acad. Sci. URSS*, 1103-1115.
- Korovkin, P.P. (1953). On the convergence of linear positive operators in the space of continuous functions (in Russian). *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, 90, 961-964.
- Lesniewicz, M., ve Rempulska, L. (1997). Approximation by some operators of the Szász-Mirakjan type in exponential weight spaces. *Glas. Mat. Ser III*, 32(52)(1), 57-69.
- Lorentz, G.G. (1986). *Bernstein Polynomials*. New York : 2nd edition, Chelsea Publ., 87-92.
- Lupaş, A. (1967). Some properties of the linear positive operators II. *Mathematica (Cluj)*, 9(32), 295-298.
- Mahmudov, N.I. (2011a). Approximation by Bernstein-Durrmeyer-type operators in compact disks. *Appl. Math. Lett.*, 24(7), 1231-1238.

- Mahmudov, N.I. (2011b). Approximation by genuine q -Bernstein-Durrmeyer polynomials in compact disks. *Hacet. J. Math. Stat.*, 40(1), 77-89.
- Mahmudov, N.I. and Gupta V. (2012). Approximation by genuine Durrmeyer-Stancu polynomials in compact disks. *Math. Comput. Model.*, 55(3-4), 278-285.
- May, C.P. (1977). On Phillips operator. *J. Approx. Theory*, 20(4), 315-332.
- Mergelyan, S.N. (1951). On a theorem of M. A. Lavrent'ev. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 77, No. 4, 565-568.
- Mortici, C. (2009). An extension of the Szász-Mirakjan operators. *An. Șt. Univ. Ovidius Constanta*, 17(1), 137-144.
- Phillips, R.S. (1954). An inversion formula for Laplace transforms and semi-groups of linear operators. *Ann. Math.*, 59(2), 352-356.
- Popoviciu, T. (1950). On the proof of Weierstrass theorem using interpolation polynomials. *Lucrările Ses. Gen. Șt. Acad. Române din 1950*, 1-4, translated in english by D. Kasó (1998). *East. J. Approx.* 4, no. 1, 107-110.
- Rempulska L. ve Graczyk S. (2010). On certain class of Szász-Mirakyan operators in exponential weight spaces. *Int. J. Pure Appl. Math.* 60, 259-267.
- Szász, O. (1950). Generalization of Bernstein's polynomials to the infinite interval. *J. Res. Nat. Bur. Stds.* 45, 239-245.
- Srivastava, H.M. ve Gupta V. (2003). A certain family of summation-integral type operators. *Math. Comput. Model.*, 37, 1307-1315.
- Tonne, P.C. (1969). On the convergence of Bernstein polynomials for some unbounded analytic functions. *Proc. Am. Math. Soc.*, 22, 1-6.
- Totik, V. (1984). Uniform approximation by positive operators on infinite intervals. *Anal. Math.*, 10, 163-182.
- Walczak, Z. (2000). On certain modified Szász-Mirakjan operators for functions of two variable. *Demonstratio Math.*, 33(1), 92-100.
- Walczak, Z. (2002). On approximation by modified Szász-Mirakyan operators. *Glas. Mat. Ser. III*, 37(57), 303-319.
- Weierstrass, K. (1885). Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Funktionen einer reellen Veränderlichen. *Sitzungsberichte der Academie zu Berlin*, 633-639, 789-805.
- Wood, B. (1969). Generalized Szász operators for the approximation in the complex domain. *SIAM J. Appl. Math.*, 17(4), 790-801.

Wright, E.M. (1930). The Bernstein approximation polynomials in the complex plane. *J. London Math. Soc.* 5, 265-269.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : ÇETİN, Nursel
 Uyuğu : T.C.
 Doğum tarihi ve yeri : 01.12.1983, Antalya
 e-mail : nurselcetin07@gmail.com



Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Doktora	Gazi Üniversitesi, Fen Fakültesi	2015
Yüksek lisans	Gazi Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi	2009
Lisans	Gazi Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi	2005
Lise	Manavgat Lisesi (Y.D.A.)	2001

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2015 - ...	Meteoroloji Genel Müdürlüğü	Matematikçi
2011-2015	Ankara Üniversitesi	Araştırma Görevlisi

Yabancı Dil

İngilizce



GAZİ GELECEKTİR..