9. Mertebeden Sol Yaklaşık Cisim Düzleminde Fano Düzlemi İçeren Arklar Üzerine

Elif Altıntaş

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı

Haziran 2015

On Arcs Containing the Fano Plane in the Left Nearfield Plane of Order 9

Elif Altıntaş

MASTER OF SCIENCE THESIS

Department of Mathematics-Computer

June 2015

9. Mertebeden Sol Yaklaşık Cisim Düzleminde Fano Düzlemi İçeren Arklar Üzerine

Elif Altıntaş

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı
Geometri Bilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Prof. Dr. Ayşe Bayar

Haziran 2015

ONAY

Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi Elif Altıntaş'ın YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı "**9. Mertebeden Sol Yaklaşık Cisim Düzleminde Fano Düzlemi İçeren Arklar Üzerine**" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Danışman **:** Prof. Dr. Ayşe Bayar

İkinci Danışman **: -**

Yüksek Lisans Tez Savunma Jürisi:

Üye : Prof. Dr. Ziya Akça

Üye : Prof. Dr. Süheyla Ekmekçi

Üye : Prof. Dr. Ayşe Bayar

Üye : Doç. Dr. Nilüfer Özdemir

Üye : Doç. Dr. Özcan Gelişgen

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .... tarih ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Hürriyet ERŞAHAN

Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre, Prof. Dr. Ayşe Bayar danışmanlığında hazırlamış olduğum “9. Mertebeden Sol Yaklaşık Cisim Düzleminde Fano Düzlemi İçeren Arklar Üzerine ” başlıklı YÜKSEK LİSANS tezimin özgün bir çalışma olduğunu; tez çalışmamın tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; tezimde verdiğim bilgileri, verileri akademik ve bilimsel etik ilke ve kurallara uygun olarak elde ettiğimi; tez çalışmamda yararlandığım eserlerin tümüne atıf yaptığımı ve kaynak gösterdiğimi ve bilgi, belge ve sonuçları bilimsel etik ilke ve kurallara göre sunduğumu beyan ederim. 23/06/2015

Elif Altıntaş

İmza

ÖZET

Bu çalışmada, 9.mertebeden Sol Yaklaşık Cisim düzleminde bir Fano düzlemini kapsayan tam arklar incelenmiştir.

Birinci bölümde, grup teorisindeki ve projektif geometrideki temel kavramlar tanıtılmıştır. İkinci bölümde Sol Yaklaşık Cisim üzerinde ikinci mertebeden indirgenemez bir polinom seçilerek elde edilen 9. mertebeden bir projektif düzlem homogen koordinatlarla verilmiştir. Daha sonra bu düzlemdeki bütün Fano düzlemlerinin noktaları ve doğruları belirlenmiştir. Üçüncü bölümde, projektif düzlemde bir Fano düzlemi içeren tam arklar tamamlama metoduyla elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Projektif düzlem, Sol yaklaşık cisim düzlemi, Arklar

SUMMARY

In this thesis, the complete arcs containing the Fano plane in the left nearfield plane of order 9 are determined. In the first chapter, fundamental definitions and concepts of group theory, projective geometry and arcs in projective plane are given. In the second chapter, the projective plane whose algebric structure is the left nearfield plane of order 9 is constructed by using homogen coordinates. Then, all of points and lines of all Fano planes in this projective plane are given. In the last chapter, all complete arcs containing the Fano plane are obtained by using "completion procedure" in this projective plane.

Keywords: Projective plane, Left nearfield plane , Arcs.

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans çalışmalarında, gerek derslerimde ve gerekse tez çalışmalarında, bana danışmanlık ederek, beni yönlendiren ve her türlü olanağı sağlayan danışmanım

Prof. Dr. Ayşe Bayar

başta olmak üzere tez sürecinde ve diğer zamanlarda benden yardımlarını esirgemeyen

Prof. Dr. Ziya Akça'ya, Prof. Dr. Süheyla Ekmekçi'ye

ve beni her zaman destekleyen,

sevgili aileme

sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

İÇİNDEKİLER (devam)

ŞEKİLLER DİZİNİ

ÇİZELGELER DİZİNİ

1. BAZI TEMEL KAVRAMLAR

1.1. GİRİŞ

Bu çalışmada, Sol Yaklaşık Cisim üzerindeki 9. mertebeden projektif düzlemin arkları incelendi.

Birinci bölümde, tez boyunca kullanılan bazı temel kavramlara yer verildi. Öncelikle grup, alt grup, cisim, sol (sağ) yaklaşık cisim tanımlandı. Daha sonra projektif uzay, projektif düzlem ve ark yapıları tanıtıldı.

İkinci bölümde, Sol Yaklaşık Cisim hakkında bazı teoremler verilerek başlandı, sol yaklaşık cisim üzerinde $\oplus$ ve $\odot$ işlem tabloları verildi. Daha sonra $(S, \oplus, \odot)$ Sol Yaklaşık Cismi üzerine kurulan projektif düzlemin inşaası anlatıldı. Son olarak Fano düzlemi oluşturan homogen koordinatlı noktalar ve doğrular belirlendi.

Üçüncü bölümde ise Fano düzlemi oluşturan özel bir dörtgen seçilerek, bu dörtgenin köşe noktalarını kapsayan tam arklar bulundu ve sınıflandırıldı.

1.2. CEBİRSEL VE GEOMETRİK YAPILAR

1.2.1. Bazı Cebirsel Kavramlar

Tanım 1.2.1. *A boş olmayan bir küme olsun. $A \times A$ dan A ya tanımlı bir*

$$\begin{array}{rccc} *: & A \times A & \longrightarrow & A \\ & (x, y) & \longrightarrow & (x * y) \end{array}$$

*fonksiyonuna A içinde **ikili işlem** denir. Bu tanıma göre ikili işlem iki değişkenli bir fonksiyondur. $A \times A$ nın herhangi bir (a, b) elemanının ikili işlem denilen böyle bir fonksiyon altındaki görüntüsü genel olarak $a+b, ab, a.b, a \circ b, a \oplus b, a \odot b$ ve benzeri biçimde gösterilir (Karakaş, 1998).*

Tanım 1.2.2. *G boş olmayan bir küme ve $*$, G de bir ikili işlem olsun. $(G,*)$ cebirsel yapısı aşağıdaki aksiyomları sağlıyorsa bir* ***grup*** *denir.*

G1) $*$, G de bir ikili işlemdir. Yani G kümesi $*$ işlemine göre kapalıdır.

G2) $*$ işleminin G de birleşme özelliği vardır. Yani $\forall x,y,z \in G$ için, $x*(y*z)=(x*y)*z$ dir.

G3) G kümesinin $*$ işlemine göre etkisiz (birim) elemanı vardır. Yani $\forall x \in G$ için, $x*e=e*x=x$ olacak şekilde $\exists_1 e \in G$ vardır.

G4) G nin her elemanının $*$ işlemine göre tersi vardır. Yani $x \in G$ için, $x*x^{-1}=x^{-1}*x=e$ olacak şekilde $\exists_1 x^{-1} \in G$ vardır (Çallıalp, 2011).

Tanım 1.2.3. *$(G,*)$ bir grup olsun, $\forall x,y,\in G$ için $x*y=y*x$ özelliği sağlanıyorsa bu gruba* ***değişmeli grup*** *veya* ***abelyan grup*** *denir (Çallıalp, 2011).*

Not 1.2.4. *Grubun işlemi $+$ ise* ***toplamsal grup****, $\cdot$ ise* ***çarpımsal grup*** *denir (Çallıalp, 2011).*

Tanım 1.2.5. *$(G,*)$ bir grup olsun, G sonlu bir küme ise $(G,*)$ grubuna bir* ***sonlu grup*** *denir ve grubun eleman sayısınada* ***grubun mertebesi*** *denir (Çallıalp, 2011).*

Tanım 1.2.6. *G bir grup ve G nin boş olmayan alt kümesi H olsun. Eğer H, G deki işleme göre kendi başına bir grup ise H ye, G nin* ***alt grubu*** *denir ve $H<G$ ile gösterilir (Çallıalp, 2011).*

Önerme 1.2.7. *G grubunun, boş olmayan H alt kümesinin, alt grup olması için gerek ve yeter şart $\forall x,y \in H$ için $xy^{-1} \in H$ (veya $x^{-1}y \in H$) olmasıdır (Çallıalp, 2011).*

Tanım 1.2.8. *F boş olmayan bir küme ve bu kümenin elemanları arasında $+ : F \times F \to F$ ve $\cdot : F \times F \to F$ ile göstereceğimiz iki tane ikili işlem tanımlanmış olsun. $(F,+,\cdot)$ cebirsel yapısı aşağıdaki şartları sağlıyorsa, bu cebirsel yapıya* ***cisim*** *adı verilir.*

C1) Her $a,b \in F$ için $a+b=b+a$ ve $a\cdot b=b\cdot a$ dır.

C2) Her $a,b,c \in F$ için $(a+b)+c=a+(b+c)$ ve $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$ dır.

C3) Her $a, b, c \in F$ *için* $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (b \cdot c)$ *dır.*

C4) F *kümesinde öyle bir* 0 *elemanı vardır ki, her* $a \in F$ *için* $a + 0 = a$ *eşitliğini sağlar.*

C5) F *kümesinde öyle bir* 1 *elemanı vardır ki,* 0 *dan farklı her* $a \in F$ *için* $a \cdot 1 = a$ *eşitliğini sağlar.*

C6) Her $a \in F$ *elemanı için,* F *kümesinde öyle bir* $-a$ *elemanı vardır ki,* $a + (-a) = 0$ *eşitliğini sağlar.*

C7) Her $0 \neq a \in F$ *için,* F *kümesinde öyle bir* a^{-1} *elemanı vardır ki,* $a \cdot a^{-1} = 1$ *eşitliğini sağlar.*

Tanım 1.2.9. V *boş olmayan bir küme ve* F *bir cisim olsun.* $+ : V \times V \to V$ *ve* $\cdot : F \times V \to V$ *iki fonksiyon olmak üzere* $(V, F, +, \cdot)$ *cebirsel yapısı aşağıdaki şartları sağlıyorsa,* V *kümesine* F *cismi üzerinde bir* ***vektör uzayı****dır denir.*

V1) Her $x, y \in V$ *için* $x + y = y + x$ *dir.*

V2) Her $x, y, z \in V$ *için* $(x + y) + z = x + (y + z)$ *dir.*

V3) Her $x \in V$ *için* $x + \theta = x$ *olacak şekilde* V *de bir tek* θ *elemanı vardır.*

V4) Her $x \in V$ *elemanı için,* $x + y = \theta$ *eşitliğini sağlayan* V *de bir tek* y *elemanı vardır.*

V5) Her $a, b \in F$ *ve her* $x \in V$ *için* $a \cdot (b \cdot x) = (a \cdot b) \cdot x$ *dir.*

V6) Her $a, b \in F$ *ve her* $x \in V$ *için* $(a + b) \cdot x = a \cdot x + b \cdot x$ *dir.*

V7) Her $a \in F$ *ve her* $x, y \in V$ *için* $a \cdot (x + y) = a \cdot x + a \cdot y$ *dir.*

V8) Her $x \in V$ *için* $1 \cdot x = x$ *dir. (1 cismin birim elemanı)*

Tanım 1.2.10. S, 0 *ve* 1 *ile gösterilem iki elemanıda içinde bulunduran bir küme olsun.* T *de* S *üzerinde*

T1) *her* $a, b, c \in S$ *için* $T(0, b, c) = T(a, 0, c) = c$,

T2) *her* $a \in S$ *için* $T(a, 1, 0) = T(1, a, 0) = a$,

T3) *verilen* $a, b, c \in S$ *için* $T(a, b, x) = c$ *olacak biçimde bir tek* $x \in S$ *vardır,*

T4) $a \neq c$ *olmak üzere verilen* $a, b, c, d \in S$ *için* $T(a, x, b) = T(c, x, d)$ *olacak biçimde bir tek* $x \in S$ *vardır,*

T5) $a \neq c$ *olmak üzere verilen* $a, b, c, d \in S$ *için* $T(x, a, y) = b$ *ve* $T(x, c, y) = d$ *olacak biçimde bir tek* $(x, y) \in S^2$ *vardır,* *koşullarını gerçekleyen bir üçlü işlemse (S, T) ikilisine üçlü halka denir (Kaya, 2005).*

Tanım 1.2.11. *Herhangi bir $(S, +, .)$ sistemi eğer bir (S, T) lineer üçlü halkasından*

$T : S \times S \longrightarrow \ S$

$(1, a, b) \longrightarrow a + b$ *ve*

$(a, b, 0) \longrightarrow ab$ *ile elde edilen cebirsel yapıysa buna **düzlemsel halka** denir.*

Tanım 1.2.12. *Çarpma işlemi birleşmeli olan herhangi (S, T) sol yarıcismine, yani,*

(1) T *lineer,*

(2) (S, T) *bir değişimli grup ve $(S - \{0\}, .)$ bir grup,*

(3) *Her $a, b, c \in S$ için $a(b + c) = ab + ac$, özelliklerine sahip (S, T) üçlü halkasına **sol yaklaşık cisim** denir. Benzer olarak çarpma işlemi birleşimli olan herhangi sağ yarıcisme **sağ yaklaşık cisim** denir*

1.2.2. Projektif Uzay Kavramları

Tanım 1.2.13. *V bir vektör uzayı $D(V)$ de V nin alt uzaylarının bir kolleksiyonu ve $\circ$ da bu alt uzaylar arasında bir üzerinde bulunma bağıntısı olsun. $D(V)$ ve $D(V)$ üzerinde tanımlanan üzerinde bulunma bağıntısı yardımıyla tanımlanan $PG(V) = (D(V), \circ)$ geometrik yapısına **projektif uzay** denir. U ve U' alt uzayları V nin altuzayları olsun. Eğer $U \subseteq U'$ veya $U' \subseteq U$ şartlarından biri sağlanıyorsa U ve U' birbirinin üzerindedir denir ve $U \circ U'$ ile gösterilir (Kujken vd. , 1999).*

Tanım 1.2.14. *V bir vektör uzayı ve V nin bir alt uzayı U olsun. U alt uzayının boyutu tabanındaki vektör sayısına eşittir ve $boy(U)$ ile gösterilir. U alt uzayının **projektif boyutu** da U nun boyutunun bir eksiğidir ve $pboy(U) = boy(U) - 1$ ile gösterilir (Kujken vd. , 1999).*

V bir vektör uzayı ve V nin alt uzaylarının projektif boyutu i olsun;

$i = 0$ olan alt uzaylara projektif noktalar,

$i = 1$ olan alt uzaylara projektif doğrular,

$i = 2$ olan alt uzaylara projektif düzlemler,

$i = 3$ olan alt uzaylara projektif uzaylar denilir.

Tanım 1.2.15. *n-boyutlu projektif uzayda boyutu $n - 1$ olan alt uzaylar* ***hiperdüzlem*** *olarak adlandırılır (Casse, 2006).*

Sonlu boyutlu bir projektif uzayda bütün doğrular eşit sayıda nokta içerir ve projektif uzayın mertebesi herhangi bir doğrusu üzerindeki nokta sayısının bir eksiğidir. Eğer q mertebeli sonlu bir cisim üzerindeki projektif uzaylar üzerinde çalışırsak, bir doğru üzerindeki noktaların sayısı $q + 1$ e eşittir, böylece projektif uzayın mertebesi q olacaktır. q mertebeli bir cisim üzerindeki n-boyutlu projektif uzay $PG(n, q)$ ile gösterilir.

1.2.3. Projektif Düzlem Kavramları

Tanım 1.2.16. *Biri noktalardan diğeri doğrulardan oluşan ayrık $\mathcal{N}$ ve $\mathcal{D}$ kümeleri ile $\mathcal{N}\times\ \mathcal{D}$ üzerinde bir $\circ$ bağıntısından meydana gelen $(\mathcal{N},\mathcal{D},\circ)$ üçlüsüne bir* ***geometrik yapı*** *denir. $\mathcal{N}$ nin elemanları $A, B, C, ..., X, Y, Z, ...$ gibi büyük harflerle, $\mathcal{D}$ nin elemanları a, b, $c, ...,$ x, y, $z, ...$ gibi küçük harflerle gösterilir.*

$\mathcal{N}_1$, $\mathcal{N}_2$, $\mathcal{N}_3, ... \in \mathcal{N}$ noktaları için $\mathcal{N}_i \circ d$, $i = 1, 2, 3, ...$ olacak şekilde bir $d \in \mathcal{D}$ varsa, yani bu noktaların hepsi aynı doğru üzerinde ise bunlara ***doğrudaş noktalar*** *denir.*

$d_1, d_2, d_3, ... \in \mathcal{D}$ doğruları için $\mathcal{N} \circ d_i$, $i = 1, 2, 3, ...$ olacak şekilde bir $N \in \mathcal{N}$ varsa, yani bu doğruların hepsi aynı noktadan geçerlerse bunlara ***noktadaş doğrular*** *denir.*

$d_1, d_2 \in \mathcal{D}$ ve $d_1 \neq d_2$ olsun. Eğer $\mathcal{N} \circ d_1$ ve $\mathcal{N} \circ d_2$ olacak şekilde hiçbir $N \in \mathcal{N}$ noktası yoksa $d_1$ve d_2 ye ***paralel doğrular*** *denir ve $d_1 \parallel d_2$ ile gösterilir. Buna karşın $d_1 \parallel d_2$ değilse $d_1 \nparallel d_2$ ile gösterilir (Kaya, 2005).*

Tanım 1.2.17. ***(Afin Düzlem)*** *$\mathcal{N}$ ve $\mathcal{D}$ elemanları sırası ile noktalar ve doğrular olan ve $\mathcal{N} \cap \mathcal{D} = \varnothing$ özelliğine sahip iki küme $\circ$ da $\mathcal{N} \times \mathcal{D}$ kümesinde tanımlanan bir üzerinde bulunma bağıntısı (yani $\circ \subset \mathcal{N} \times \mathcal{D}$) olmak üzere aşağıda verilen A1, A2 ve A3 aksiyomlarını gerçekleyen $(\mathcal{N},\mathcal{D},\circ)$ sistemine bir* ***afin düzlem*** *denir (Kaya, 2005).*

A1) Farklı iki noktadan bir tek doğru geçer.

A2) Bir doğruya dışındaki bir noktadan bir tek paralel doğru çizilebilir.

A3) Doğrudaş olmayan üç nokta vardır.

Teorem 1.2.18. *Verilen her F cismi için nokta ve doğruları bu cismin elemanlarıyla cebirsel olarak belirtilebilen bir afin düzlem vardır (Kaya, 2005). (Bu düzlem $\mathbb{A}_2F$ ile gösterilir.)*

Örnek 1.2.19. *Öklid düzlemi bir afin düzlemdir. Çünkü "Verilen her F cismi için nokta ve doğruları bu cismin elemanlarıyla cebirsel olarak belirtilebilen bir afin düzlem vardır." teoreminde F cismi yerine gerçel sayılar cismi $\mathbb{R}$ alındığında Öklid* *düzleminin analitik gösterimi bulunmaktadır. Gerçek afin düzlem adıyla da anılan bu düzlem $\mathbb{A}_2\mathbb{R}$ ile gösterilir (Kaya, 2005).*

Teorem 1.2.20. *Her sonlu $\mathbb{A}$ düzlemi için aşağıdaki koşullara uyan $n \geq 2$ tamsayısı vardır (Kaya, 2005). Bu tamsayıya $\mathbb{A}$ nın mertebesi denir.*

(1) $\mathbb{A}$ nın her doğrusu üzerinde tam olarak n tane nokta bulunur.

(2) $\mathbb{A}$ nın her noktası tam olarak $n+1$ tane doğru üzerindedir.

(3) $\mathbb{A}$ daki noktaların toplam sayısı n^2 dir.

(4) $\mathbb{A}$ daki doğruların tam sayısı n^2+n dir.

Örnek 1.2.21. $\mathcal{N} = \{A, B, C, D\}$, $\mathcal{D} = \{AB, AC, AD, BC, BD, CD\}$ve $\circ =\in$ *olmak üzere ($\mathcal{N}$,$\mathcal{D}$,$\circ$) sistemi bir afin düzlemdir. Bu en küçük afin düzlemdir (Kaya, 2005).*

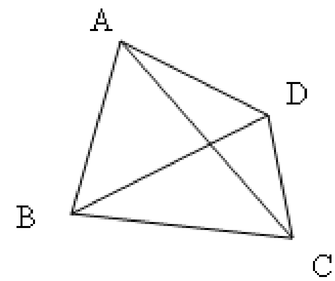
A1) A ve D farklı iki nokta çiftini ele alalım. A ve D noktalarından geçen bir tek AD doğrusu vardır. A ve D noktalarından geçen başka bir doğru bulmak mümkün değildir. Bu durum diğer farklı nokta çiftleri içinde geçerlidir. O halde bu düzlemde farklı iki noktadan bir tek doğru geçer.

A2) D noktası ve BC doğrusunu ele alalım. D noktasından geçen ve BC doğrusuna paralel olan AD doğrusundan başka bir doğru çizilemez. Diğer nokta ve doğrular içinde bu durum geçerlidir. O halde bu düzlemde bir doğruya dışındaki bir noktadan tek bir paralel doğru çizilir. Diğer yandan bu düzlemde $AC \parallel BD$ dir.

A3) B, D ve C noktaları doğrudaş olmayan üç noktadır.

Buradan şu sonuçlara varılır:

Dört noktalı bir afin düzlem vardır ve bu en küçük afin düzlemdir. En küçük afin düzlemin mertebesi 2 dir. Bir afin düzlemde bir nokta en az üç doğru üzerinde bulunur.



Şekil 1.1. Afin düzlem

Teorem 1.2.22. *F herhangi bir cisim olsun. Bu F cismi yardımıyla analitik olarak tanımlanan*

$$\mathcal{N} = F \times F = \{(x, y) : x, y \in F\}$$

$$\mathcal{D} = \{[m, b] : m, b \in F\} \cup \{[a] : a \in F\}$$

ve üzerinde bulunma bağıntısı

$$(x, y) \circ [m, b] \Leftrightarrow y = mx + b$$

$$(x, y) \circ [a] \Leftrightarrow x = a$$

ile verilen ($\mathcal{N}$, $\mathcal{D}$,$\circ$) sistemi bir afin düzlemdir (Kaya, 2005).

$F = GF(p^r)$ sonlu cisimleri yardımıyla tanımlanan sonlu afin düzlemler vardır (Kaya, 2005).

Örnek 1.2.23. *$F = GF(3)$ olmak üzere $\mathbb{A}_2F$ düzleminin noktaları (karşılarında da üzerinde bulundukları doğrular gösterilmiş biçimde) şunlardır (Kaya, 2005).*

$$\begin{array}{lcl}
(0,0) & : & [0,0], [1,0], [2,0], [0] \\
(0,1) & : & [0,1], [1,1], [2,1], [0] \\
(0,2) & : & [0,2], [1,2], [2,2], [0] \\
(1,0) & : & [0,0], [1,2], [2,1], [1] \\
(1,1) & : & [0,1], [1,0], [2,2], [1] \\
(1,2) & : & [0,2], [1,1], [2,0], [1] \\
(2,0) & : & [0,0], [1,1], [2,2], [2] \\
(2,1) & : & [0,1], [1,2], [2,0], [2] \\
(2,2) & : & [0,2], [1,0], [2,1], [2]
\end{array}$$

A1) $(0,0)$ ve $(0,1)$ farklı iki nokta çiftini ele alalım. $(0,0)$ ve $(0,1)$ noktalarından geçen bir tek $[0]$ doğrusu vardır. $(0,0)$ ve $(0,1)$ noktalarından geçen başka bir doğru bulmak mümkün değildir. Bu durum diğer farklı nokta çiftleri içinde geçerlidir. O halde bu düzlemde farklı iki noktadan bir tek doğru geçer.

A2) $(0,0)$ noktası ve $[1,1]$ doğrusunu ele alalım. $(0,0)$ noktasından geçen ve $[1,1]$ doğrusuna paralel olan $[1,2]$ doğrusundan başka bir doğru çizilemez. Diğer nokta ve doğrular içinde bu durum geçerlidir. O halde bu düzlemde bir doğruya dışındaki bir noktadan tek bir paralel doğru çizilir.

A3) $(0,0),(0,1)$ ve $(1,0)$ noktaları doğrudaş olmayan üç noktadır.

Tanım 1.2.24. ***(Projektif Düzlem)*** *$\mathcal{N}$ ve $\mathcal{D}$ elemanları sırası ile noktalar ve doğrular olan ayrık iki küme (yani $\mathcal{N} \cap \mathcal{D} = \varnothing$ özelliğine sahip iki küme) ve $\circ$ da $\mathcal{N} \times \mathcal{D}$ kümesinde tanımlanan bir üzerinde bulunma bağıntısı (yani $\circ \subset \mathcal{N} \times \mathcal{D}$) olmak üzere aşağıda verilen P1, P2 ve P3 aksiyomlarını gerçekleyen $(\mathcal{N},\mathcal{D},\circ)$ sistemine bir* ***projektif düzlem*** *denir (Kaya, 2005).*

P1: Her M, $N \in \mathcal{N}$, $M \neq N$ için $M \circ d$ ve $N \circ d$ olacak şekilde bir tek $d \in \mathcal{D}$ doğrusu vardır. Yani farklı iki nokta bir tek doğru belirtir.

P2: Her c, $d \in \mathcal{D}$, için $N \circ c$ ve $N \circ d$ olacak şekilde en az bir $N \in \mathcal{N}$ noktası vardır. Yani iki doğrunun en az bir ortak noktası vardır.

P3: Herhangi üçü doğrudaş olmayan dört nokta vardır.

Teorem 1.2.25. *Bir $\mathbb{P} = (\mathcal{N},\mathcal{D},\circ)$ projektif düzleminde farklı iki doğru tek bir noktada kesişir (Kaya, 2005).*

Teorem 1.2.26. *Her sonlu $\mathbb{P} = (\mathcal{N},\mathcal{D},\circ)$ projektif düzlemi için aşağıdaki koşullara uyan bir $n \geq 2$ pozitif tam sayısı vardır (Kaya, 2005). Bu tam sayıya ilgili projektif düzlemin mertebesi denir.*

(1) $\mathbb{P}$ nin her doğrusu üzerinde tam olarak $n+1$ tane nokta bulunur.

(2) $\mathbb{P}$ nin her noktası tam olarak $n+1$ tane doğru üzerindedir.

(3) $\mathbb{P}$ deki noktaların toplam sayısı n^2+n+1 dir.

(4) $\mathbb{P}$ deki doğruların tam sayısı n^2+n+1 dir.

Tanım 1.2.27. *S bir projektif düzleme ilişkin herhangi bir ifade olsun. S de "nokta" yerine "doğru" ve "doğru" yerine "nokta" koyarak bulunan yeni ifadeye S nin* ***dual ifadesi*** *denir ve bu S^* ile gösterilir.*

Bu tanımdan hemen şu çıkar: birbirlerinin duali olan nokta ve doğru kavramlarından başka aşağıda yanyana yazılan kavramlar birbirlerinin duali olup dual ifade bulunurken onlarında yer değiştirmeleri gerekir (Kaya, 2005).

noktadaş	$-$	*doğrudaş*
$\vee$, *birleşme*	$-$	$\wedge$, *kesişme*
...üzerinde bulunur	$-$	*...dan geçer*

Teorem 1.2.28. ***(Projektif düzlemlerde duallik ilkesi)*** *Bir projektif düzleme ilişkin her teoremin ifadesinin duali de bir başka teoremin ifadesidir (Kaya, 2005).*

Sonuç 1.2.29. *Eğer $\mathbb{P} = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ bir projektif düzlemse $\mathbb{P}^* = (\mathcal{D}, \mathcal{N}, \circ^{-1})$ de bir projektif düzlemdir. $\mathbb{P}^*$ a, $\mathbb{P}$ nin* ***dual projektif düzlemi*** *denir (Kaya, 2005).*

Teorem 1.2.30. *Verilen her F cismi için nokta ve doğruları bu cismin elemanlarıyla cebirsel olarak belirlenebilen bir projektif düzlem vardır.*

F herhangi bir cisim olsun.

$\mathcal{N} = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1, x_2, x_3 \in F, (x_1, x_2, x_3) \neq (0,0,0), (x_1, x_2, x_3) \equiv \lambda(x_1, x_2, x_3),$
$\lambda \in F, \lambda \neq 0\}$

$\mathcal{D} = \{[a_1, a_2, a_3] : a_1, a_2, a_3 \in F, (a_1, a_2, a_3) \neq (0,0,0), (a_1, a_2, a_3) \equiv \lambda(a_1, a_2, a_3),$
$\lambda \in F, \lambda \neq 0\}$

$(x_1, x_2, x_3) \circ [a_1, a_2, a_3] \Leftrightarrow a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$ olmak üzere

$(\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ sistemi bir projektif düzlemdir. F cismi yardımıyla tanımlanan bu projektif düzlemlere cisim düzlemleri denir ve genel olarak $\mathbb{P}_2F$ ile gösterilir. Özel olarak $F = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ve $\mathbb{Q}$ cisimleri için $\mathbb{P}_2\mathbb{R}$ gerçel projektif düzlem, $\mathbb{P}_2\mathbb{C}$ kompleks projektif düzlem, $\mathbb{P}_2\mathbb{Q}$ rasyonel projektif düzlem olarak adlandırılır. Bunlardan özellikle $\mathbb{P}_2\mathbb{R}$ düzlemi düzlemler teorisinin en önemli ve iyi bilinen örneğidir (Kaya, 2005). Yukarıdaki teoremlerden sonlu cisim düzlemlerine ilişkin şu sonuç hemen verilebilir.

Sonuç 1.2.31. *r pozitif bir tam sayı p de bir asal sayı olmak üzere p^r elemanlı $GF(p^r)$ cismi var olduğu için bu cismin elemanlarından homogen koordinatlarla belirtilen düzlemde*

$$\frac{(p^r)^3-1}{p^r-1} = (p^r)^2 + p^r + 1$$

nokta vardır. Bu da düzlemin mertebesinin p^r olduğunu gösterir. Yani her r pozitif tam sayısı ve her p asal sayısı için mertebesi $n = p^r$ olan sonlu bir projektif düzlem vardır. Buna karşın cisimler yardımıyla elde edilen bir çok projektif düzlem vardır. Üstelik cisimler yardımıyla elde edilmemiş olsalar bile bilinen bütün sonlu projektif düzlemlerin mertebeleri p^r biçiminde yazılabilen pozitif tam sayılardır (Kaya, 2005).

Tanım 1.2.32. *A, B, C, D hepsi aynı projektif düzlemde bulunan ve herhangi üçü doğrudaş olmayan dört nokta olsun. Bu noktaları ikişer ikişer birleştiren doğruların çizilmesi ve bulunan doğruların ikişer ikişer kesiştirilmesiyle elde edilen altı doğru ve yedi noktadan oluşan bir konfigürasyona* ***tamdörtgen*** *denir. Ayrıca A, B, C, D noktalarına tamdörtgenin* ***köşeleri****, AB ve CD, AC ve BD, BC ve AD doğru ikililerine tamdörtgenin* ***karşılıklı kenarları****, karşılıklı kenarların kesişme noktalarına, yani $U = AB \cap CD$, $V = AC \cap BD$, $W = AD \cap BC$ noktalarına tamdörtgenin* ***köşegen noktaları*** *denir.*

Tanım 1.2.33. *İçindeki bütün tamdörtgenlerin köşegen noktaları doğrudaş olan projektif düzleme* ***Fano düzlemi*** *denir.*

En küçük projektif düzlemde 7 nokta ve 7 doğru vardır.

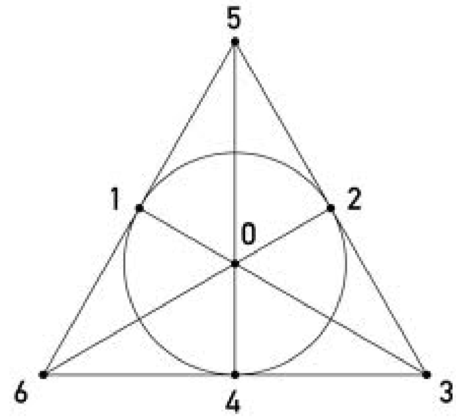
$$\mathcal{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$\mathcal{D} = \{d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6, d_7\}$$

ve

$$d_1 = \{3,4,6\} \quad , \quad d_2 = \{1,5,6\} \quad , \quad d_3 = \{0,6,2\} \quad , \quad d_4 = \{0,4,5\}$$
$$d_5 = \{0,1,3\} \quad , \quad d_6 = \{2,3,5\} \quad , \quad d_7 = \{1,2,4\}$$

olsun.



Şekil 1.2. Fano düzlemi

P1) 4 ve 6 farklı iki nokta çiftini ele alalım. 4 ve 6 dan geçen bir tek d_1 doğrusu vardır. 4 ve 6 noktalarından geçen başka bir doğru bulmak mümkün değildir. Bu durum diğer farklı nokta çiftleri içinde geçerlidir. O halde bu düzlemde farklı iki noktadan tek bir doğru geçer.

P2) d_1 ve d_2 doğrularını ele alalım. Bu iki doğrunun tek bir ortak noktası vardır. Bu da 6 dır. Diğer doğru çiftlerinin de benzer şekilde tek bir ortak noktası vardır. O halde bu düzlemde farklı iki doğrunun bir tek ortak noktası vardır.

P3) $1, 2, 3$ ve 6 noktaları herhangi üçü doğrudaş olmayan dört noktadır.

Fano Aksiyomu: Kapsadığı herbir tamdörtgenin köşegen noktaları doğrudaş olmayan noktalardır.

Tanım 1.2.34. $\mathbb{P}= (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ *ve* $\mathbb{P}'= (\mathcal{N}', \mathcal{D}', \circ')$ *iki projektif düzlem olsun. Eğer* $\mathcal{N}' \subset \mathcal{N}$ *ve her* $d' \in D$ *doğrusu için* $d' = d \cap \mathcal{N}'$ *olacak biçimde bir* $d \in D$ *doğrusu varsa* $\mathbb{P}'$ *ye* $\mathbb{P}$ *nin* ***projektif altdüzlemi*** *denir. Eğer* $\mathbb{P}' \neq \mathbb{P}$ *ise* $\mathbb{P}'$ *ye* $\mathbb{P}$ *nin* ***projektif öz altdüzlemi*** *denir.*

Teorem 1.2.35. $\mathbb{P}$, *mertebesi* n *olan sonlu bir projektif düzlem ve* $\mathbb{P}'$ *de* $\mathbb{P}$ *nin, mertebesi* m *olan bir projektif öz altdüzlemi olsun. Eğer* $\mathbb{P}$ *nin her doğrusu* $\mathbb{P}'$ *nün bir noktasını kapsarsa* $n = m^2$, *aksi halde* $n \geq m^2 + m$ *dir.*

Teorem 1.2.36. ***(P4 Dezarg Teoremi)*** *İki üçgenin karşılıklı köşelerini birleştiren doğrular noktadaşsa, bunların karşılıklı kenarlarının arakesit noktaları doğrudaştır.*

Tanım 1.2.37. *Bir afin düzleme bir takım yeni noktalar ve bütün bu yeni noktaları üzerinde bulunduran tek bir doğru katarak bir projektif düzlemin nasıl elde edildiğini görelim. Afin düzleme katılacak doğruya* ***ideal doğru*** *ya da* ***sonsuzdaki doğru****, yeni noktaların her birine de* ***ideal nokta*** *ya da* ***sonsuzdaki nokta*** *denir. Buradaki sonsuz deyimi biraz sonra anlaşılacağı gibi (gerçel düzlem ve bir kaç hal hariç) uzaklıkla ilgili değildir.* $\mathbb{A} = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ *bir afin düzlem olsun. Bu düzlemde birbirine paralel olan bütün doğrular kümesine bir* ***paralel doğru demeti*** *denir. Düzlemde her bir demet için bu demetin tüm doğrularının üzerinde bulunan ama* $\mathcal{N}$ *de bulunmayan yeni bir nokta göz önüne alalım. Böylece düzleme her doğrultuda yeni bir (ideal) nokta katılmış olur. Afin düzleme ideal noktalar katılırken* $\mathbb{A}$ *nın her* d *doğrusu bir nokta ile genişletildi.* d *doğrusu ve* d *ye paralel tüm doğrular üzerine koyulan bu ideal nokta* D_∞ *ile gösterilir. Tüm ideal noktaların üzerinde bulunduğu ideal doğruyu da* d_∞ *ile göstererek* $\mathbb{A}$ *ya katalım. Böylece* $\mathbb{A}$ *daki* $\circ$ *bağıntısıda biraz genişletilerek (ki bu şimdilik* $\circ$ *ile gösterilir) bir* $(\mathcal{N}', \mathcal{D}', \circ)$ *sistemi elde edilir. Buna* A ***nın tamamlanmışı*** *denir (Kaya, 2005).*

Teorem 1.2.38. *Her afin düzlemin tamamlanmışı bir projektif düzlemdir (Kaya, 2005).*

Teorem 1.2.39. *Bir projektif düzlemden herhangi bir doğru ve üzerinde bulunan tüm noktalar çıkarılırsa geriye kalan geometrik yapı bir afin düzlemdir (Kaya, 2005).*

Tanım 1.2.40. $\mathbb{P}$ *ve* $\mathbb{P}'$ *herhangi iki projektif düzlem olsun.* $\mathbb{P}$ *den* $\mathbb{P}'$ *ye* $\mathbb{P}$ *nin noktalarını* $\mathbb{P}'$ *nin noktalarına,* $\mathbb{P}$ *nin doğrularını* $\mathbb{P}'$ *nin doğrularına dönüştüren ve üzerinde bulunma bağıntısını koruyan bire-bir ve örten bir fonksiyon varsa bu* ***projektif (afin) düzlemler izomorftur*** *denir; bu fonksiyona da* $\mathbb{P}$ *den* $\mathbb{P}'$ *ye giden bir* ***izomorfizm*** *denir (Kaya, 2005).*

Teorem 1.2.41. $\mathbb{A}_2F$ *afin düzleminin tamamlanmışı* $\mathbb{P}_2F$ *projektif düzlemine izomorftur (Kaya, 2005).*

Sonuç 1.2.42. $\mathbb{A}_2F$ *afin düzlemi* $\mathbb{P}_2F$ *projektif düzleminden* $[0,0,1]$ *doğrusu ve* $(x_1, x_2, 0)$ *noktalarının çıkarılmasıyla elde edilen yapıya izomorftur (Kaya, 2005).*

Özel olarak $\mathbb{P}_2\mathbb{R}$ den $x_3 = 0$ özelliğine sahip noktalar ve $[0, 0, 1]$ doğrusu atılarak $\mathbb{A}_2\mathbb{R}$ Öklid düzlemi (gerçel afin düzlem) bulunur veya $\mathbb{A}_2\mathbb{R}$ afin düzlemine ideal doğru ve noktalarının katılmasıyla $\mathbb{P}_2\mathbb{R}$ gerçel projektif düzlemi elde edilir. Dolayısıyla Öklid düzlemin noktaları $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ olmak üzere $(x_1, x_2, 1)$ biçiminde homogen koordinatlarla belirtilebilir. Öklid düzlemin doğruları da $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$ olmak üzere $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$ denklemiyle belirtilebilir.

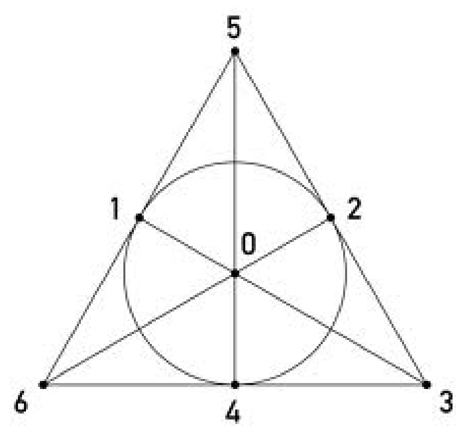
$\mathbb{P}_2\mathbb{R}$ projektif düzlemi, Öklid düzleminin genişletilmesidir ($Kaya$, 2005).

1.2.4. Ark İle İlgili Kavramlar

Tanım 1.2.43. *$PG(2, q)$ da herhangi üçü doğrudaş olmayan k noktalı küme $k-$ark olarak adlandırılır (Casse, 2006).*

Tanım 1.2.44. *Projektif düzlemin her doğrusu $k-$arkı en çok n tane noktada kesiyorsa bu ark $\{k; n\}-$ark denir (Hoadley, 2003).*

Örnek 1.2.45. 2.*mertebeden en küçük projektif düzlem olan Fano düzleminin herhangi üçü doğrudaş olmayan en çok* 4 *noktası vardır. Bu yüzden Fano düzlemi* $4-$*ark içerir. Şekil.1.3. te Fano düzleminin noktalarının* $\{0, 1, 2, 5\}$ *kümesi bir* $4-$*ark belirtir.*



Şekil 1.3. Fano düzleminde 4-ark

Tanım 1.2.46. *$PG(2, q)$ da bir $\{k; n\}-$ark ile m noktada kesişen doğru $m-$sekant olarak adlandırılır (Hoadley,2003).*

Teorem 1.2.47. ***(Tallini Scafati)*** *$PG(2,q)$ bir projektif düzlemde K bir $\{k;n\}-$ark ise $k \leq (q+1)(n-1)+1$ eşitsizliği sağlanır (Hoadley,2003).*

İspat: P, K nın herhangi bir noktası olsun. Bu durumda P noktasından geçen projektif düzlemin $(q+1)$ tane doğrusu geçer. Bu doğrular K yı en çok P hariç $(n-1)$ noktada keserler. Dolayısıyla $(q+1)$ doğrunun herbirinin üzerinde K ya ait P noktası hariç en çok $(n-1)$ nokta vardır. P noktası da katılırsa $k \leq (q+1)(n-1)+1$ elde edilir.

Örnek 1.2.48. *Fano düzlemi 2. mertebeden bir projektif düzlem olduğundan $q=2$ dir. Örnek 1.2.44. de $4-$ark örneği verildi. Şekil 1.3. de görüldüğü gibi Fano düzleminde herhangi bir noktadan 3 doğru geçer ve herhangi üçü doğrudaş olmayan k noktalı kümeyi en çok 2 noktada keser. Bu durumda Fano düzleminden $n=2$ dir. $k \leq (q+1)(n-1)+1$ eşitsizliğinde yerine konulursa $k \leq 3 \cdot 1 + 1 = 4$ sağlanır. Böylece Fano düzlemi bir $\{4;2\}-$ark içerir. Yani Fano düzleminde bir ark en çok 4 noktaya sahiptir.*

Tanım 1.2.49. *K, q. mertebeden bir projektif düzlemde bir $\{k;n\}-$ark olsun. Eğer K, $k=(q+1)(n-1)+1$ eşitliğini sağlıyorsa K maksimal ark olarak isimlendirilir (Hoadley,2003).*

Örnek 1.2.50. *Fano düzlemindeki $\{4;2\}-$arklar maksimal arklardır. Şekil 1.3. Fano düzleminin noktalarının $\{0,1,2,5\}$ kümesi bir maksimal arktır.*

Teorem 1.2.51. *K, q. mertebeden bir projektif düzlemde $\{k;n\}$ bir maksimal ark ise, her doğru K yı ya hiç kesmez yada n tane noktada keser (Hoadley,2003).*

İspat: K, q. mertebeden bir projektif düzlemde bir maksimal ark $\{k;n\}$ ark olsun. Herhangi bir l doğrusunun K yı m nin $1 \leq m \leq n$ aralığında m noktada kestiğini farzedelim. P, K arkında ve l doğrusu üzerinde olan bir nokta olsun. P den geçen $q+1$ doğrusu olduğundan P noktası l nin dışında q tane doğru üzerindedir. Bu q tane doğru K nın P hariç $n-1$ tane noktasını içerir. Böylece K nın içerdiği nokta sayısı için $k \leq m + q(n-1) < n + q(n-1)$ eşitsizliği geçerlidir ve K bir maksimal ark değildir. K, q. mertebeden bir projektif düzlemde maksimal $\{k; n\}$ arkının bütün doğruları K ile ya hiç kesişmez ya da n tane noktasında kesişir, $2 \leq n \leq q$ eşitsizliği sağlanır ve $k = q(n-1) + n$ dır (Hoadley,2003).

Tanım 1.2.52. *K , q. mertebeden bir projektif düzlemde $\{k; n\}$-ark olsun. Projektif düzlemin bir doğrusu bir k-arkı bir noktada kesiyorsa tanjant doğru, iki noktada kesiyorsa sekant doğru, hiç kesişmiyorsa harici (dışsal) doğru olarak isimlendirilir. n ye $\{k; n\}$-arkın derecesi denir (Hoadley,2003).*

Teorem 1.2.53. *K, q. mertebeden projektif düzlemde $n < q$ için bir maksimal $\{q(n-1) + n; n\}$ $-$ark olsun.*

O zaman K nın harici doğrular kümesi K^D bir maksimal $\{q(\frac{q-n+1}{n}); \frac{q}{n}\}$$-$arktır (Maes,2011).

Tanım 1.2.54. *q. mertebeden projektif düzlemde bir $k-$ark, $(k+1)-$ark tarafından oluşmuyorsa bu arka bütün(tam) bir ark denir. Bir $k-$arkının sahip olabileceği nokta eğer; q çiftse $(q+2)$; eğer q tekse$(q+1)$'dir. $(q+1)-$arka oval ve $(q+2)-$arka da hiperoval denir (Marshall,2010). q. mertebeden projektif düzlemin bütün doğruları hiperovaller ile ya hiç kesişmez yada iki noktada kesişir. Sonuç olarak, hiperovaller maksimal $\{q+2; 2\}-$arklardır.*

Teorem 1.2.55. ***(Barlotti)*** *Eğer K, q. mertebeden bir π projektif düzlemde bir $\{q(n-1) + n - 1; n\}$ ark ise tam(bütün) bir ark değildir ve bir maksimal $\{q(n-1) + n - 1; n\}$-arka bir tek yolla tamamlanabilir (Maes,2011).*

Teorem 1.2.56. *q. mertebeden bir projektif düzlemde K_1 ve K_2, n. dereceden iki maksimal ark olsun. K_1 ve K_2 deki nokta sayısı $k = q(n-1) + n$ iken*

$|K_1 \cap K_2| > k - (q - \frac{q}{n} + 1)$ ise $K_1 = K_2$ dir.

Teorem 1.2.57. ***(Tallini Scafati)*** *K, q. mertebeden π projektif düzlemindeki k noktalı küme olsun. $0 \leq i \leq q+1$ aralığındaki her i için, π nin K yı i tane noktada kesen doğruların sayısı t_i olsun.*

O zaman

$$\begin{aligned} \sum_{0<i<q+1} t_i &= q^2+q+1 \\ \sum_{1<i<q+1} it_i &= k(q+1) \\ \sum_{2\leq i\leq q+1} i(i-1)t_i &= k(k-1) \end{aligned}$$

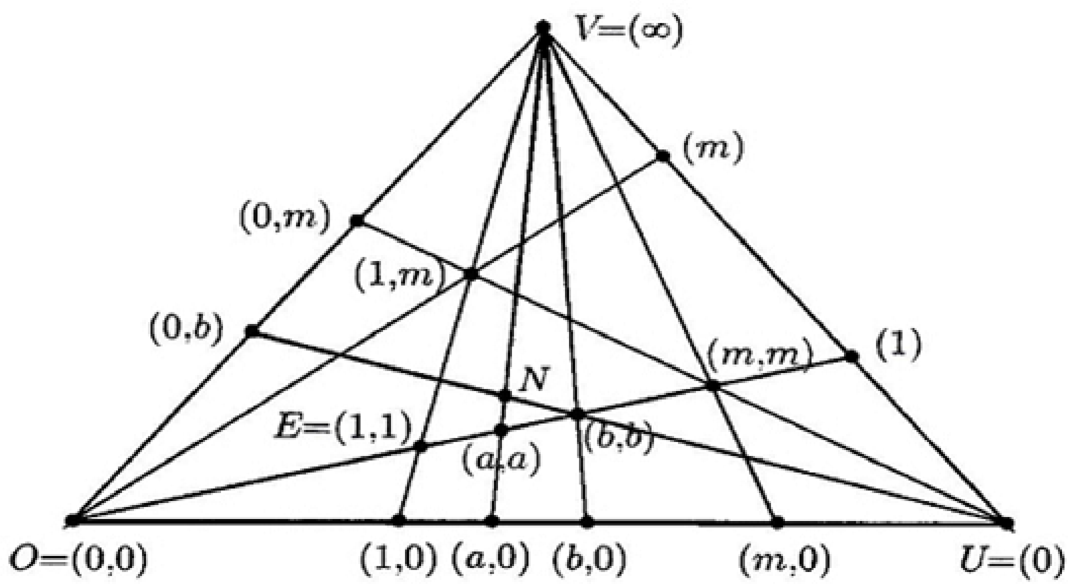
dir (Hirschfeld, 1998).

1.3. Projektif Düzlemin Koordinatlanması

Her projektif düzlem, uygun bir S kümesinin elemanlarıyla koordinatlanabilir.

Tanım 1.3.1. *$\mathbb{P}$, mertebesi n olan sonlu bir projektif düzlem, S de 0 ve 1 ile gösterilen iki özel elemanı bulunan ve kardinalitesi $n \geq 2$ olan bir küme olsun. $\mathbb{P}$ de herhangi üçü doğrudaş olmayan O, E, U, V noktalarından oluşan, seçimli $\{O, E, U, V\}$ koordinatlama dörtgeni ve S kümesini kullanarak $\mathbb{P}$ nin noktalarını, doğrularını ve üzerinde bulunma bağıntısını belirleyelim.*

1.3.1. Noktaların Koordinatlanması



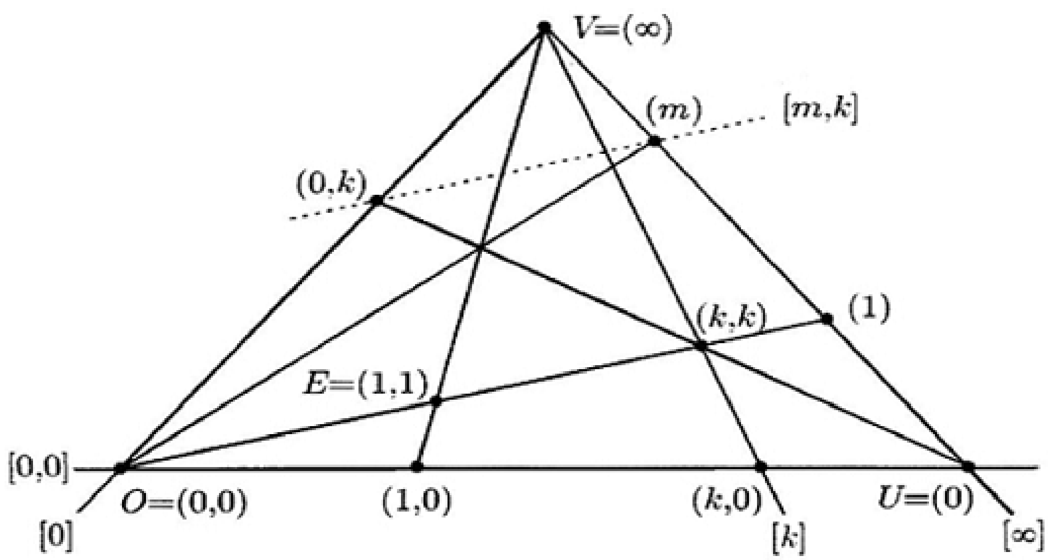
Şekil 1.4. Noktaların Koordinatlanması

OE doğrusu üzerinde $OE \cap UV$ den başka herbir noktaya S^2 nin (a, a) biçiminde birtek elemanını eşleyelim. Özel olarak $O = (0,0)$, $E = (1,1)$ olsun. UV doğrusu üzerinde bulunmayan seçimli herbir N noktası için eğer, $NU \cap OE = (b, b)$ ve $NV \cap OE = (a, a)$ ise $N = (a, b)$ diyelim. Özel olarak, OU doğrusu üzerindeki noktalar $(a, 0)$ ve OV doğrusu üzerindeki noktalar $(0, b)$ biçiminde koordinatlara sahip olur. UV nin $[(0,0) \cup (1,m)] \cap UV$ noktasına (m) koordinatını verelim. Buna göre $U = [(0,0) \cup (1,0)] \cap UV$ olduğundan $U = (0)$ dır.

$OE \cap UV = [(0,0) \cup (1,1)] \cap UV$ olup, $OE \cap UV = (1)$ dir. $\infty \notin S$ olmak üzere UV nin V noktası için $V = (\infty)$ olsun. (bkz. Şekil 1.4.)

1.3.2. Doğruların Koordinatlanması

$V = (\infty)$ noktasından geçmeyen ve dolayısıyla UV ile bir (m) ortak noktasına ve OV ile bir $(0, k)$ ortak noktasına sahip olan doğruya $[m, k]$ koordinatını; $V = (\infty)$ dan geçen ve $OU = [0,0]$ doğrusuyla bir $(k, 0)$ ortak noktasına sahip olan doğruya $[k]$ koordinatını ve UV doğrusuna da $[\infty]$ koordinatını tayin edelim.



Şekil 1.5. Doğruların Koordinatlanması

Burada dikkat edilmesi gereken önemli bir husus,bu koordinatlamanın seçilen $\{O, E, U, V\}$ dörtgenine bağlı olmasıdır.

1.3.3. Üzerinde Bulunma Bağıntısı

Her $m, k, x, y \in S$ için,

$(\infty) \circ [\infty]$, $\quad (\infty) \circ [k]$, $\quad (\infty)ø[m, k]$

$(x) \circ [\infty]$, $\quad (x)ø[k]$, $\quad (x)ø[m, k] \iff x = m$

$(x, y)ø[\infty]$, $\quad (x, y) \circ [k] \iff x = k$, $\quad (x, y) \circ [m, k] \iff y = T(m, x, k)$

S kümesi ve "$T : S^3 \to S \ni T(m, x, k) = y \iff (x, y) \circ [m, k]$" olacak biçimde T üçlü işleminin birlikte düşünülmesiyle bazı kavramlar tanımlanabilir.

Buraya kadar kullanılan tanım ve kavramlar (Kaya, 2005) den alınmıştır.

1.4. Dokuzuncu Mertebeden 4 Farklı Projektif Düzlem

Dokuzuncu mertebeden dört farklı profektif düzlem bilinmektedir. Bunlar Dezarg düzlemi, Sol yaklaşık cisim düzlemi, Sağ yaklaşık cisim düzlemi ve Hughes düzlemidir. Aşağıda bu düzlemlerin cebirsel yapıları üzerinde kısaca durulacaktır.

$S = \{0, 1, 2, a, b, c, d, e, f\}$ olsun ve S üzerindeki $\oplus$ işlemi $F = GF(9)$ cisminin toplama işlemi olarak alınsın. Burada $b = a + 1$, $c = a + 2$, $d = a + a$, $e = d + 1$, $f = d + 2$ ve $1 + 2 = a + d = 0$ dır. S üzerindeki $\otimes$ işlemi aşağıda verilen Çizelge 1.1. deki gibi tanımlansın.

Çizelge 1.1. $GF(9)$ cisminde $\otimes$ İşlemi

$\otimes$	0	1	2	a	b	c	d	e	f
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	a	b	c	d	e	f
2	0	2	1	d	f	e	a	c	b
a	0	a	d	2	e	b	1	f	c
b	0	b	f	c	2	d	e	a	1
c	0	c	e	f	a	2	b	1	d
d	0	d	a	1	c	f	2	b	e
e	0	e	c	b	d	1	f	2	a
f	0	f	b	e	1	a	c	d	2

$(S, \oplus, \otimes)$ bir sağ yaklaşık cisimdir. Bu yaklaşık cisim $S(9)$ ile gösterilir.

1.4.1. Sağ Yaklaşık Cisim Düzlemi

Cebirsel yapısı 9. mertebeden bir sağ yaklaşık cisim olan projektif düzlem aşağıdaki gibi inşa edilir:

$\mathcal{N} = \{(x, y, 1) : x, y \in S\} \cup \{(1, x, 0) : x \in S\} \cup \{(0, 1, 0)\}$ noktalar kümesi,

$\mathcal{D} = \{[m, 1, k] : m, k \in S\} \cup \{[1, 0, k] : k \in S\} \cup \{[0, 0, 1]\}$ doğrular kümesi ve

$\circ$: $(x, y, z) \circ [m, n, k] \iff xm + yn + zk = 0$ üzerinde bulunma bağıntısı olmak üzere $\mathbb{P} = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ düzleminin bir projektif düzlem olduğu bilinmektedir (Stevensen, 1972).

$S(9)$ yardımıyla kurulan 9. mertebeden projektif düzlem $\pi_s(9)$ ile gösterilir.

1.4.2. Sol Yaklaşık Cisim Düzlemi

Her $x, y \in S(9)$ için $*$ işlemi $x * y = y \otimes x$ olarak tanımlanırsa $(S, \oplus, *)$ bir sol yaklaşık cisimdir. Bu sol yaklaşık cisim üzerine kurulan $\pi_s(9)$ un duali olup farklı bir projektif düzlemdir (Stevensen, 1972). Bu projektif düzlem $\pi_s^d(9)$ ile gösterilir.

1.4.3. Hughes Düzlemi

9. mertebeden diğer bir düzlem ise düzlemsel halkası lineer olmayan, bu yüzden $\pi_S(9)$ ve $\pi_S^d(9)$ projektif düzlemlerinden farklı olan $\pi_H(9)$ ile gösterilen Hughes düzlemidir.

p tek asal sayı ve h pozitif tamsayı olmak üzere $q = p^h$ olsun. q^2 mertebeli bir sağ yaklaşık cismin varlığı ve bu yaklaşık cisim üzerine kurulan Hughes düzlemlerinin elde edilişi için (Hughes, Piper 1973) ye bakılabilir.

1.4.4. Dezarg Düzlemi

P4 Dezarg aksiyomunu gerçekleyen bir projektif düzleme **Dezarg düzlemi** ya da **Dezargsel düzlem** denir.

Bu şekilde kurulan $\mathbb{P}_2\mathcal{F}$ cisim düzlemi $\pi_s(9), \pi_s^d(9)$ ve $\pi_H(9)$ düzlemleri 9. mertebeden bilinen projektif düzlemlerin tamamını teşkil etmektedir. Bu farklı 4 projektif düzlem ile ilgili ayrıntılı bilgi (*Room*, *Kırkpatick* 1971) de verilmiştir.

2. 9. MERTEBEDEN SOL YAKLAŞIK CİSİMDEN ELDE EDİLEN PROJEKTİF DÜZLEM

Bu bölümde bir sol yaklaşık cisim üzerinde 9. mertebeden projektif düzlem homogen koordinatlarla kurulmaktadır.

Her projektif düzlem bir kümenin elemanlarıyla nasıl koordinatlanabildiği ve her projektif düzlemin geometrik yapısına ilaveten bir cebirsel yapısının var olduğu bilinmektedir (Kaya,2005).

Bölüm 1 de çarpma işlemi birleşimli olan sol yarıcisim sol yaklaşık cisim ve aynı özellikte bir sağ yarıcisim bir sağ yaklaşık cisim olarak tanımlanmıştı. Hall sistemi olarak elde edilen birtek sol yaklaşık cisim vardır. Aşağıdaki teorem bu sol yaklaşık cismi belirtir.

Teorem 2.0.1. *Herhangi bir F cisminden elde edilen sol Hall sisteminin çarpma işleminin birleşimli olması (yani yaklaşık cisim olması) için gerek ve yeter şart ya $F = GF(2)$ yada $F = GF(3)$ ve $f(t) = t^2 + 1$ olmasıdır (Kaya, 2005).*

Örnek 2.0.2. ***Seçkin sol yaklaşık cisim:*** *Yukarıdaki teorem gereği $F = GF(3)$ ve $f(t) = t^2 + 1$ olmak üzere üretilen Hall sistemi aynı zamanda bir sol yaklaşık cisimdir. Bu sol yaklaşık cisim bilinen bütün diğer sol yaklaşık cisimlerden farklıdır. Bu farklılığın en ilginci $(S - \{0\}, \odot)$ çarpım grubunun iç yapısından ortaya çıkmaktadır. Şöyle ki, her $x \in S$, $x \neq 0, 1, -1$ için $x^2 = -1$ dir ve bu sol yaklaşık cisimden başka hiçbir sol yaklaşık cisim bu özelliği sağlamaz. $x^2 = -x$ biçimindede ifade edilebilecek olan özellik bazı geometrik sonuçlar doğurmaktadır. Şöyle ki bu yaklaşık cismin belirttiği düzlemde öyle bir*

f involusyonu vardır ki bu involusyon $[\infty]$ doğrusunu değişmez bırakır ama bu doğrunun hiçbir noktasını değişmez bırakmaz. Üstelik bu düzlem her $X \circ [\infty]$ ve $f(X) \circ x$ geçişkendir. Sağ yarıcisimlerin elde edilişine benzer olarak aşağıdaki teoremleri hemen verebiliriz (Kaya, 2005).

Teorem 2.0.3. *Herhangi bir $(S, \oplus, \odot)$ sisteminin $T(a,b,c) = a.b + c$ üçlü işlemiyle birleştirilmesinden elde edilen (S,T) ikilisinin bir sağ yaklaşık cisim olması için gerek ve yeter koşullar*

$i.(S,T)$ nın (birim elemanı 0 olan) bir grup olması,

$ii.(S - \{0\}, \odot)$ nın (birim elemanı 1 olan) bir grup olması,

$iii.\forall\ x \in S$ için $x.0 = 0$ olması,

$iv.\forall\ x, y, z \in S$ için $(x+y).z = x.z + y.z$ olması,

$v.a \neq b$ olmak üzere verilen $\forall\ a, b, c \in S$ için $xa - xb = c$ denkleminin bir tek $x \in S$ çözümünün bulunmasıdır (Kaya, 2005).

2.1. Dokuz Elemanlı Bir Sol Yaklaşık Cisim

$\mathcal{F} = \{0, 1, 2\}$ ve

Çizelge 2.1. $GF(3)$ cisminde $+$ ve $\cdot$ İşlemleri

$+$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

$\cdot$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

olmak üzere $(\mathcal{F}, +, .) = GF(3)$ bir Galois cismidir. Bu cisim yardımıyla oluşturulan sol yaklaşık cisim:

$$S = \quad \{a + \lambda b \mid a, b \in \mathcal{F}, \lambda \notin \mathcal{F}\}$$

yani,

$$\begin{aligned} S &= \{0, \lambda, 2\lambda, 1, 1+1\lambda, 1+2\lambda, 2, 2+1\lambda, 2+2\lambda\} \\ &= \{00, 01, 02, 10, 11, 12, 20, 21, 22\} \end{aligned}$$

dir. S kümesi üzerinde $\oplus$ ve $\odot$ işlemleri aşağıdaki biçimde tanımlansın:

$$(a+\lambda b) \oplus (c+\lambda d) \quad = (a+c) + \lambda(b+d)$$

$$(a+\lambda b) \odot (c+\lambda d) \quad = \begin{cases} ca + \lambda(da) & , b = 0 \text{ iken} \\ ca - db(a^2+1) + \lambda(cb - da) & , b \neq 0 \text{ iken} \end{cases}$$

$$f(t) \quad = t^2 + 1$$

de $\mathcal{F}$ üzerinde indirgenemez bir polinom olsun. Yani, $\mathcal{F}$ cismi üzerinde dereceleri 2 den küçük herhangi $b(t)$ ve $k(t)$ polinomları için daima $f(t) \neq b(t).k(t)$ olsun. (Aşikar olarak bu, $f(t) = 0$ denkleminin $\mathcal{F}$ içinde çözümünün bulunmamasını gerektirir.) Bu işlemler kullanılarak, S kümesi üzerinde $\oplus$ ve $\odot$ işlem tabloları şu şekilde elde edilir.

2.1.1. S kümesi üzerinde $\oplus$ ve $\odot$ işlem çizelgeleri:

Bu çalışmada kısalık sağlamak amacıyla, her $x + \lambda y \in S$ elemanı için xy gösterimi kullanılacaktır. Örneğin i. satırın başındaki $a+\lambda b$ ve j.sütunun başındaki $c+\lambda d$ elemanları yerine sırasıyla ab ve cd gösterimini kullanacağız. $\oplus$ ve $\odot$ işlem tablolarında ab elemanı i.satır ve cd elemanı da j. sütunda iken işlem sonucu i.satır ve j.sütunun kesişiminde yer alır. Örneğin $\oplus$ tablosunda $02 \oplus 22 = 21$, $\odot$ tablosunda $11 \odot 20 = 22$ bulunur.

Çizelge 2.2. S kümesi üzerinde $\oplus$ İşlemi

$\oplus$	00	01	02	10	11	12	20	21	22
00	00	01	02	10	11	12	20	21	22
01	01	02	00	11	12	10	21	22	20
02	02	00	01	12	10	11	22	20	21
10	10	11	12	20	21	22	00	01	02
11	11	12	10	21	22	20	01	02	00
12	12	10	11	22	20	21	02	00	01
20	20	21	22	00	01	02	10	11	12
21	21	22	20	01	02	00	11	12	10
22	22	20	21	02	00	01	12	10	11

Çizelge 2.3. S kümesi üzerinde $\odot$ İşlemi

$\odot$	00	01	02	10	11	12	20	21	22
00	00	00	00	00	00	00	00	00	00
01	00	20	10	01	21	11	02	22	12
02	00	10	20	02	12	22	01	11	21
10	00	01	02	10	11	12	20	21	22
11	00	12	21	11	20	02	22	01	10
12	00	22	11	12	01	20	21	10	02
20	00	02	01	20	22	21	10	12	11
21	00	11	22	21	02	10	12	20	01
22	00	21	12	22	10	01	11	02	20

Böyle oluşturulan $(\mathcal{S}, \oplus, \odot)$ sistemi bir sol yarıcisim aksiyomlarını sağlar (Taş, 2015).

Burada iki girdi ile belirtilen S kümesinin elemanlarını aşağıda tanımlanan dönüşüm yardımıyla tek bileşenli hale getirebiliriz.

$$\begin{aligned} 00 &\rightarrow 0 \\ 10 &\rightarrow 1 \\ 20 &\rightarrow 2 \\ 01 &\rightarrow 3 \\ 11 &\rightarrow 4 \\ 21 &\rightarrow 5 \\ 02 &\rightarrow 6 \\ 12 &\rightarrow 7 \\ 22 &\rightarrow 8 \end{aligned}$$

Bu durumda $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ kümesi üzerindeki $\oplus$ ve $\odot$ işlem tabloları aşağıdaki şekilde verilebilir.

Çizelge 2.4. S kümesi üzerinde $\oplus$ ve $\odot$ İşlemleri

$\oplus$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	2	0	4	5	3	7	8	6
2	2	0	1	5	3	4	8	6	7
3	3	4	5	6	7	8	0	1	2
4	4	5	3	7	8	6	1	2	0
5	5	3	4	8	6	7	2	0	1
6	6	7	8	0	1	2	3	4	5
7	7	8	6	1	2	0	4	5	3
8	8	6	7	2	0	1	5	3	4

$\odot$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
2	0	2	1	6	8	7	3	5	4
3	0	3	6	2	5	8	1	4	7
4	0	4	8	7	2	3	5	6	1
5	0	5	7	4	6	2	8	1	3
6	0	6	3	1	7	4	2	8	5
7	0	7	5	8	3	1	4	2	6
8	0	8	4	5	1	6	7	3	2

2.2. $(S,\oplus,\odot)$ Sol Yaklaşık Cismi Üzerine Kurulan 9. Mertebeden Projektif Düzlemin İnşaası

9. mertebeden projektif düzlemde 91 nokta ve 91 doğru vardır. $(S,\oplus,\odot)$ yapısı ile 9. mertebeden projektif düzlemi aşağıdaki gibi kurulmuştur (Taş,2015).

Düzlemin noktalar kümesi:

$N = \{(x,y) : x,y \in S\} \cup \{(m) : m \in S\} \cup \{(\infty) : \infty \notin S\}$ biçiminde tanımlanmıştır.

Buradan görülüyor ki noktalar kümesinde $x,y,m \in S$ ve $\infty \notin S$ olmak üzere

81 tane (x,y) biçiminde afin nokta, 9 tane (m) biçiminde ideal nokta ve 1 tane de (∞) ideal nokta vardır.

Düzlemin doğrular kümesi $\mathcal{D}$:

$\mathcal{D} = \{[m,k] : m,k \in S\} \cup \{[a] : a \in S\} \cup \{[\infty] : \infty \notin S\}$biçiminde tanımlanmıştır.

Buradan görülüyor ki doğrular kümesinde $m,k,a \in S$ ve $\infty \notin S$ olmak üzere

81 tane $[m,k]$ biçiminde afin doğru, 9 tane $x = [a]$ biçiminde afin doğru ve 1 tane $[\infty]$ biçiminde ideal doğru vardır.

Üzerinde bulunma bağıntısı :

Noktalar ve doğrular arasındaki üzerinde bulunma bağıntısı $\circ$, aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$(x,y) \circ [m,k] \Leftrightarrow y = m \odot x \oplus k, \forall m,k \in S$$
$$(x,y) \circ [a] \Leftrightarrow x = a$$
$$(m) \circ [\infty]$$
$$(\infty) \circ [\infty]$$

(x,y) afin noktaları $[\infty]$ doğrusu üzerinde değildir.

$(S,\oplus,\odot)$ sol yaklaşık cismi ile elde ettiğimiz $(N,D,\circ)$ geometrik yapısı 9.mertebeden bir projektif düzlemdir ve $\mathbb{P}_2 S$ ile gösterilir.

2.2.1. Noktaların ve Doğruların Homogen Koordinatlanması

Bölüm.2 de $\mathcal{P} = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ 9. mertebeden projektif düzleminin noktalar kümesi

$$\mathcal{N} = \{(x,y) : x, y \in S\} \cup \{(m) : m \in S\} \cup \{(\infty) : \infty \notin S\},$$

doğrular kümesi

$$\mathcal{D} = \{[m,k] : m, k \in S\} \cup \{[a] : a \in S\} \cup \{[\infty] : \infty \notin S\}$$

ve üzerinde bulunma bağıntısı

$$\begin{aligned} (x,y) \circ [m,k] &\iff y = m \odot x \oplus k \\ (x,y) \circ [\lambda] &\iff x = \lambda \end{aligned}$$

şeklinde verilmişti. Bu bölümde 9. mertebeden projektif düzlemin bütün nokta ve doğruları homogen koordinatlarla koordinatlanır.

(x,y) ikili noktasına karşılık $\lambda \in S$ ve $\lambda \neq 0$ olmak üzere $\lambda \odot (x, y, 1) = (\lambda \odot x, \lambda \odot y, \lambda \odot 1)$ biçiminde koordinatlanan bütün noktalar karşılık getirilir. Tersine $x_3 \neq 0$ olmak üzere her (x_1, x_2, x_3) üçlüsü $x_3^{-1} \odot x_1 = x$, $x_3^{-1} \odot x_2 = y$ olmak üzere birtek (x,y) noktası belirtir. $m, \lambda \in S$, $m \neq 0$ ve $\lambda \neq 0$ olmak üzere (m) tipindeki ideal noktalara $\lambda \odot (x, 1, 0) = (\lambda \odot x, \lambda \odot 1, \lambda \odot 0)$ biçiminde koordinatlanan bütün noktalar karşılık getirilir. (∞) noktasına $(\lambda, 0, 0)$ homogen koordinatlı noktalar karşılık gelir.

$[m,k]$ biçimindeki doğrulara da $[m, -1, k]$ $\mu \in S$ ve $\mu \neq 0$ olmak üzere $\mu \odot [m, -1, k] = [\mu \odot m, \mu \odot (-1), \mu \odot k]$ biçiminde koordinatlanan bütün doğrular karşılık getirilir. Burada $[m, -1, k]$ ifadesini öncelikle 1 in toplamaya göre tersi 2 olduğundan dolayı $[m, 2, k]$ şeklinde yazılabilir. Eğer k nın tersi ile soldan çarpma işlemi uygularsak doğruların ifadesi $[k^{-1} \odot m, k^{-1} \odot 2, 1]$ biçimini alır. $[a]$ tipindeki doğrulara $\mu \odot [x, 0, 1] = [\mu \odot x, \mu \odot 0, \mu \odot 1]$ biçiminde koordinatlanan bütün doğrular karşılık getirilir. $[\infty]$ doğrusuna $[0, 0, \mu]$, $\mu \in S, \mu \neq 0$ homogen koordinatlı bütün doğrular karşılık gelir.

Homogen koordinatlarda (x_1, x_2, x_3) noktasının $[a_1, a_2, a_3]$ homogen koordinatlı doğru üzerinde olması için gerek ve yeter koşul

$$a_1 \odot x_1 \oplus a_2 \odot x_2 \oplus a_3 \odot x_3 = 0$$

olmasıdır.

$\mathcal{P}_2\mathcal{S}$ projektif düzlemin bütün noktaları ve bu noktalardan geçen doğrular homogen koordinatlarda aşağıdaki gibi verilebilir:

$(0,1,0)$	$\{[1,0,0],[3,0,1],[6,0,1],[2,0,1],[4,0,1],[7,0,1],[1,0,1],[5,0,1],[8,0,1],[0,0,1]\}$
$(1,0,0)$	$\{[0,1,0],[0,3,1],[0,6,1],[0,2,1],[0,4,1],[0,7,1],[0,1,1],[0,5,1],[0,8,1],[0,0,1]\}$
$(6,1,0)$	$\{[6,1,0],[1,3,1],[2,6,1],[3,2,1],[5,4,1],[4,7,1],[6,1,1],[8,5,1],[7,8,1],[0,0,1]\}$
$(3,1,0)$	$\{[3,1,0],[2,3,1],[1,6,1],[6,2,1],[7,4,1],[8,7,1],[3,1,1],[4,5,1],[5,8,1],[0,0,1]\}$
$(1,1,0)$	$\{[2,1,0],[6,3,1],[3,6,1],[1,2,1],[8,4,1],[5,7,1],[2,1,1],[7,5,1],[4,8,1],[0,0,1]\}$
$(8,1,0)$	$\{[8,1,0],[7,3,1],[5,6,1],[4,2,1],[1,4,1],[6,7,1],[8,1,1],[3,5,1],[2,8,1],[0,0,1]\}$
$(5,1,0)$	$\{[5,1,0],[8,3,1],[4,6,1],[7,2,1],[3,4,1],[1,7,1],[5,1,1],[2,5,1],[6,8,1],[0,0,1]\}$
$(2,1,0)$	$\{[1,1,0],[3,3,1],[6,6,1],[2,2,1],[4,4,1],[7,7,1],[1,1,1],[5,5,1],[8,8,1],[0,0,1]\}$
$(7,1,0)$	$\{[7,1,0],[4,3,1],[8,6,1],[5,2,1],[6,4,1],[2,7,1],[7,1,1],[1,5,1],[3,8,1],[0,0,1]\}$
$(4,1,0)$	$\{[4,1,0],[5,3,1],[7,6,1],[8,2,1],[2,4,1],[3,7,1],[4,1,1],[6,5,1],[1,8,1],[0,0,1]\}$
$(0,0,1)$	$\{[0,1,0],[6,1,0],[3,1,0],[2,1,0],[8,1,0],[5,1,0],[1,1,0],[7,1,0],[4,1,0],[1,0,0]\}$
$(0,3,1)$	$\{[0,3,1],[1,3,1],[2,3,1],[6,3,1],[7,3,1],[8,3,1],[3,3,1],[4,3,1],[5,3,1],[1,0,0]\}$
$(0,6,1)$	$\{[0,6,1],[2,6,1],[1,6,1],[3,6,1],[5,6,1],[4,6,1],[6,6,1],[8,6,1],[7,6,1],[1,0,0]\}$
$(0,1,1)$	$\{[0,2,1],[3,2,1],[6,2,1],[1,2,1],[4,2,1],[7,2,1],[2,2,1],[5,2,1],[8,2,1],[1,0,0]\}$
$(0,4,1)$	$\{[0,4,1],[5,4,1],[7,4,1],[8,4,1],[1,4,1],[3,4,1],[4,4,1],[6,4,1],[2,4,1],[1,0,0]\}$

$(0,7,1)$	$\{[0,7,1],[4,7,1],[8,7,1],[5,7,1],[6,7,1],[1,7,1],[7,7,1],[2,7,1],[3,7,1],[1,0,0]\}$
$(0,2,1)$	$\{[0,1,1],[6,1,1],[3,1,1],[2,1,1],[8,1,1],[5,1,1],[1,1,1],[7,1,1],[4,1,1],[1,0,0]\}$
$(0,5,1)$	$\{[0,5,1],[8,5,1],[4,5,1],[7,5,1],[3,5,1],[2,5,1],[5,5,1],[1,5,1],[6,5,1],[1,0,0]\}$
$(0,8,1)$	$\{[0,8,1],[7,8,1],[5,8,1],[4,8,1],[2,8,1],[6,8,1],[8,8,1],[3,8,1],[1,8,1],[1,0,0]\}$
$(3,0,1)$	$\{[0,1,0],[3,2,1],[3,1,1],[3,6,1],[3,5,1],[3,4,1],[3,3,1],[3,8,1],[3,7,1],[3,0,1]\}$
$(3,3,1)$	$\{[0,3,1],[5,4,1],[4,5,1],[2,1,0],[2,8,1],[1,7,1],[6,6,1],[7,1,1],[8,2,1],[3,0,1]\}$
$(3,6,1)$	$\{[0,6,1],[4,7,1],[5,8,1],[6,3,1],[8,1,1],[7,2,1],[1,1,0],[1,5,1],[2,4,1],[3,0,1]\}$
$(3,1,1)$	$\{[0,2,1],[6,1,1],[3,1,0],[5,7,1],[7,3,1],[2,5,1],[4,4,1],[8,6,1],[1,8,1],[3,0,1]\}$
$(3,4,1)$	$\{[0,4,1],[8,5,1],[2,3,1],[1,2,1],[5,6,1],[6,8,1],[7,7,1],[7,1,0],[4,1,1],[3,0,1]\}$
$(3,7,1)$	$\{[0,7,1],[7,8,1],[1,6,1],[8,4,1],[8,1,0],[5,1,1],[2,2,1],[4,3,1],[6,5,1],[3,0,1]\}$
$(3,2,1)$	$\{[0,1,1],[6,1,0],[6,2,1],[4,8,1],[1,4,1],[8,3,1],[5,5,1],[2,7,1],[7,6,1],[3,0,1]\}$
$(3,5,1)$	$\{[0,5,1],[1,3,1],[7,4,1],[2,1,1],[6,7,1],[4,6,1],[8,8,1],[5,2,1],[4,1,0],[3,0,1]\}$
$(3,8,1)$	$\{[0,8,1],[2,6,1],[8,7,1],[7,5,1],[4,2,1],[5,1,0],[1,1,1],[6,4,1],[5,3,1],[3,0,1]\}$
$(6,0,1)$	$\{[0,1,0],[6,1,1],[6,2,1],[6,3,1],[6,7,1],[6,8,1],[6,6,1],[6,4,1],[6,5,1],[6,0,1]\}$
$(6,3,1)$	$\{[0,3,1],[8,5,1],[7,4,1],[3,6,1],[4,2,1],[5,1,1],[1,1,0],[2,7,1],[1,8,1],[6,0,1]\}$
$(6,6,1)$	$\{[0,6,1],[7,8,1],[8,7,1],[2,1,0],[1,4,1],[2,5,1],[3,3,1],[5,2,1],[4,1,1],[6,0,1]\}$
$(6,1,1)$	$\{[0,2,1],[6,1,0],[3,1,1],[8,4,1],[2,8,1],[4,6,1],[7,7,1],[1,5,1],[5,3,1],[6,0,1]\}$
$(6,4,1)$	$\{[0,4,1],[1,3,1],[4,5,1],[5,7,1],[8,1,1],[5,1,0],[2,2,1],[3,8,1],[7,6,1],[6,0,1]\}$
$(6,7,1)$	$\{[0,7,1],[2,6,1],[5,8,1],[1,2,1],[3,5,1],[8,3,1],[4,4,1],[7,1,1],[4,1,0],[6,0,1]\}$

$(6,2,1)$	$\{[0,1,1],[3,2,1],[3,1,0],[7,5,1],[5,6,1],[1,7,1],[8,8,1],[4,3,1],[2,4,1],[6,0,1]\}$
$(6,5,1)$	$\{[0,5,1],[5,4,1],[2,3,1],[4,8,1],[8,1,0],[7,2,1],[1,1,1],[8,6,1],[3,7,1],[6,0,1]\}$
$(6,8,1)$	$\{[0,8,1],[4,7,1],[1,6,1],[2,1,1],[7,3,1],[3,4,1],[5,5,1],[7,1,0],[8,2,1],[6,0,1]\}$
$(1,0,1)$	$\{[0,1,0],[2,6,1],[2,3,1],[2,1,1],[2,8,1],[2,5,1],[2,2,1],[2,7,1],[2,4,1],[2,0,1]\}$
$(1,3,1)$	$\{[0,3,1],[6,1,0],[1,6,1],[7,5,1],[8,1,1],[6,8,1],[4,4,1],[5,2,1],[3,7,1],[2,0,1]\}$
$(1,6,1)$	$\{[0,6,1],[1,3,1],[3,1,0],[4,8,1],[3,5,1],[5,1,1],[7,7,1],[6,4,1],[8,2,1],[2,0,1]\}$
$(1,1,1)$	$\{[0,2,1],[4,7,1],[7,4,1],[2,1,0],[5,6,1],[8,3,1],[1,1,1],[3,8,1],[6,5,1],[2,0,1]\}$
$(1,4,1)$	$\{[0,4,1],[3,2,1],[8,7,1],[6,3,1],[8,1,0],[4,6,1],[5,5,1],[7,1,1],[1,8,1],[2,0,1]\}$
$(1,7,1)$	$\{[0,7,1],[5,4,1],[6,2,1],[3,6,1],[7,3,1],[5,1,0],[8,8,1],[1,5,1],[4,1,1],[2,0,1]\}$
$(1,2,1)$	$\{[0,1,1],[7,8,1],[4,5,1],[1,2,1],[6,7,1],[3,4,1],[1,1,0],[8,6,1],[5,3,1],[2,0,1]\}$
$(1,5,1)$	$\{[0,5,1],[6,1,1],[5,8,1],[8,4,1],[4,2,1],[1,7,1],[3,3,1],[7,1,0],[7,6,1],[2,0,1]\}$
$(1,8,1)$	$\{[0,8,1],[8,5,1],[3,1,1],[5,7,1],[1,4,1],[7,2,1],[6,6,1],[4,3,1],[4,1,0],[2,0,1]\}$
$(4,0,1)$	$\{[0,1,0],[4,7,1],[4,5,1],[4,8,1],[4,2,1],[4,6,1],[4,4,1],[4,3,1],[4,1,1],[4,0,1]\}$
$(4,3,1)$	$\{[0,3,1],[3,2,1],[5,8,1],[2,1,1],[1,4,1],[5,1,0],[7,7,1],[8,6,1],[6,5,1],[4,0,1]\}$
$(4,6,1)$	$\{[0,6,1],[5,4,1],[3,1,1],[7,5,1],[6,7,1],[8,3,1],[2,2,1],[7,1,0],[1,8,1],[4,0,1]\}$
$(4,1,1)$	$\{[0,2,1],[7,8,1],[2,3,1],[3,6,1],[8,1,1],[1,7,1],[5,5,1],[6,4,1],[4,1,0],[4,0,1]\}$
$(4,4,1)$	$\{[0,4,1],[6,1,1],[1,6,1],[2,1,0],[3,5,1],[7,2,1],[8,8,1],[2,7,1],[5,3,1],[4,0,1]\}$
$(4,7,1)$	$\{[0,7,1],[8,5,1],[3,1,0],[6,3,1],[2,8,1],[3,4,1],[1,1,1],[5,2,1],[7,6,1],[4,0,1]\}$
$(4,2,1)$	$\{[0,1,1],[2,6,1],[7,4,1],[5,7,1],[8,1,0],[6,8,1],[3,3,1],[1,5,1],[8,2,1],[4,0,1]\}$

$(4,5,1)$	$\{[0,5,1],[6,1,0],[8,7,1],[1,2,1],[7,3,1],[5,1,1],[6,6,1],[3,8,1],[2,4,1],[4,0,1]\}$
$(4,8,1)$	$\{[0,8,1],[1,3,1],[6,2,1],[8,4,1],[5,6,1],[2,5,1],[1,1,0],[7,1,1],[3,7,1],[4,0,1]\}$
$(7,0,1)$	$\{[0,1,0],[7,8,1],[7,4,1],[7,5,1],[7,3,1],[7,2,1],[7,7,1],[7,1,1],[7,6,1],[7,0,1]\}$
$(7,3,1)$	$\{[0,3,1],[6,1,1],[8,7,1],[4,8,1],[5,6,1],[3,4,1],[2,2,1],[1,5,1],[4,1,0],[7,0,1]\}$
$(7,6,1)$	$\{[0,6,1],[8,5,1],[6,2,1],[2,1,1],[8,1,0],[1,7,1],[4,4,1],[3,8,1],[5,3,1],[7,0,1]\}$
$(7,1,1)$	$\{[0,2,1],[2,6,1],[4,5,1],[6,3,1],[1,4,1],[5,1,1],[8,8,1],[7,1,0],[3,7,1],[7,0,1]\}$
$(7,4,1)$	$\{[0,4,1],[6,1,0],[5,8,1],[3,6,1],[6,7,1],[2,5,1],[1,1,1],[4,3,1],[8,2,1],[7,0,1]\}$
$(7,7,1)$	$\{[0,7,1],[1,3,1],[3,1,1],[2,1,0],[4,2,1],[6,8,1],[5,5,1],[8,6,1],[2,4,1],[7,0,1]\}$
$(7,2,1)$	$\{[0,1,1],[4,7,1],[2,3,1],[8,4,1],[3,5,1],[5,1,0],[6,6,1],[5,2,1],[1,8,1],[7,0,1]\}$
$(7,5,1)$	$\{[0,5,1],[3,2,1],[1,6,1],[5,7,1],[2,8,1],[8,3,1],[1,1,0],[6,4,1],[4,1,1],[7,0,1]\}$
$(7,8,1)$	$\{[0,8,1],[5,4,1],[3,1,0],[1,2,1],[8,1,1],[4,6,1],[3,3,1],[2,7,1],[6,5,1],[7,0,1]\}$
$(2,0,1)$	$\{[0,1,0],[1,3,1],[1,6,1],[1,2,1],[1,4,1],[1,7,1],[1,1,1],[1,5,1],[1,8,1],[1,0,1]\}$
$(2,3,1)$	$\{[0,3,1],[2,6,1],[3,1,0],[8,4,1],[6,7,1],[7,2,1],[5,5,1],[3,8,1],[4,1,1],[1,0,1]\}$
$(2,6,1)$	$\{[0,6,1],[6,1,0],[2,3,1],[5,7,1],[4,2,1],[3,4,1],[8,8,1],[7,1,1],[6,5,1],[1,0,1]\}$
$(2,1,1)$	$\{[0,2,1],[5,4,1],[8,7,1],[2,1,1],[3,5,1],[6,8,1],[1,1,0],[4,3,1],[7,6,1],[1,0,1]\}$
$(2,4,1)$	$\{[0,4,1],[4,7,1],[6,2,1],[7,5,1],[2,8,1],[5,1,1],[3,3,1],[8,6,1],[4,1,0],[1,0,1]\}$
$(2,7,1)$	$\{[0,7,1],[3,2,1],[7,4,1],[4,8,1],[8,1,1],[2,5,1],[6,6,1],[7,1,0],[5,3,1],[1,0,1]\}$
$(2,2,1)$	$\{[0,1,1],[8,5,1],[5,8,1],[2,1,0],[7,3,1],[4,6,1],[2,2,1],[6,4,1],[3,7,1],[1,0,1]\}$
$(2,5,1)$	$\{[0,5,1],[7,8,1],[3,1,1],[6,3,1],[5,6,1],[5,1,0],[4,4,1],[2,7,1],[8,2,1],[1,0,1]\}$

$(2,8,1)$	$\{[0,8,1],[6,1,1],[4,5,1],[3,6,1],[8,1,0],[8,3,1],[7,7,1],[5,2,1],[2,4,1],[1,0,1]\}$
$(5,0,1)$	$\{[[0,1,0],[5,4,1],[5,8,1],[5,7,1],[5,6,1],[5,1,1],[5,5,1],[5,2,1],[5,3,1],[5,0,1]\}$
$(5,3,1)$	$\{[0,3,1],[4,7,1],[3,1,1],[1,2,1],[8,1,0],[2,5,1],[8,8,1],[6,4,1],[7,6,1],[5,0,1]\}$
$(5,6,1)$	$\{[0,6,1],[3,2,1],[4,5,1],[8,4,1],[7,3,1],[6,8,1],[1,1,1],[2,7,1],[4,1,0],[5,0,1]\}$
$(5,1,1)$	$\{[0,2,1],[8,5,1],[1,6,1],[4,8,1],[6,7,1],[5,1,0],[3,3,1],[7,1,1],[2,4,1],[5,0,1]\}$
$(5,4,1)$	$\{[0,4,1],[7,8,1],[3,1,0],[2,1,1],[4,2,1],[8,3,1],[6,6,1],[1,5,1],[3,7,1],[5,0,1]\}$
$(5,7,1)$	$\{[0,7,1],[6,1,1],[2,3,1],[7,5,1],[1,4,1],[4,6,1],[1,1,0],[3,8,1],[8,2,1],[5,0,1]\}$
$(5,2,1)$	$\{[0,1,1],[1,3,1],[8,7,1],[3,6,1],[2,8,1],[7,2,1],[4,4,1],[7,1,0],[6,5,1],[5,0,1]\}$
$(5,5,1)$	$\{[0,5,1],[2,6,1],[6,2,1],[2,1,0],[8,1,1],[3,4,1],[7,7,1],[4,3,1],[1,8,1],[5,0,1]\}$
$(5,8,1)$	$\{[0,8,1],[6,1,0],[7,4,1],[6,3,1],[3,5,1],[1,7,1],[2,2,1],[8,6,1],[4,1,1],[5,0,1]\}$
$(8,0,1)$	$\{[0,1,0],[8,5,1],[8,7,1],[8,4,1],[8,1,1],[8,3,1],[8,8,1],[8,6,1],[8,2,1],[8,0,1]\}$
$(8,3,1)$	$\{[0,3,1],[7,8,1],[6,2,1],[5,7,1],[3,5,1],[4,6,1],[1,1,1],[7,1,0],[2,4,1],[8,0,1]\}$
$(8,6,1)$	$\{[0,6,1],[6,1,1],[7,4,1],[1,2,1],[2,8,1],[5,1,0],[5,5,1],[4,3,1],[3,7,1],[8,0,1]\}$
$(8,1,1)$	$\{[0,2,1],[1,3,1],[5,8,1],[7,5,1],[8,1,0],[3,4,1],[6,6,1],[2,7,1],[4,1,1],[8,0,1]\}$
$(8,4,1)$	$\{[0,4,1],[2,6,1],[3,1,1],[4,8,1],[7,3,1],[1,7,1],[1,1,0],[5,2,1],[6,5,1],[8,0,1]\}$
$(8,7,1)$	$\{[0,7,1],[6,1,0],[4,5,1],[2,1,1],[5,6,1],[7,2,1],[3,3,1],[6,4,1],[1,8,1],[8,0,1]\}$
$(8,2,1)$	$\{[0,1,1],[5,4,1],[1,6,1],[6,3,1],[4,2,1],[2,5,1],[7,7,1],[3,8,1],[4,1,0],[8,0,1]\}$
$(8,5,1)$	$\{[0,5,1],[4,7,1],[3,1,0],[3,6,1],[1,4,1],[6,8,1],[2,2,1],[7,1,1],[5,3,1],[8,0,1]\}$
$(8,8,1)$	$\{[0,8,1],[3,2,1],[2,3,1],[2,1,0],[6,7,1],[5,1,1],[4,4,1],[1,5,1],[7,6,1],[8,0,1]\}$

2.2.2. $\mathcal{P}_2\mathcal{S}$ nin noktaları ve doğruları

$\mathcal{P}_2\mathcal{S}$ nin üzerinde bulunma çizelgeleri aşağıdaki gibidir:

Çizelge 2.5. Noktadan geçen doğrular

i	P_i					l_i					
1	(1,0,0)	2	11	20	29	38	47	56	65	74	83
2	(0,1,0)	1	11	12	13	14	15	16	17	18	19
3	(1,1,0)	4	11	22	30	44	55	63	68	79	87
4	(2,1,0)	3	11	21	31	41	51	61	71	81	91
5	(3,1,0)	5	11	23	35	40	54	60	66	82	88
6	(4,1,0)	6	11	24	37	43	49	62	72	77	84
7	(5,1,0)	7	11	25	36	46	50	58	69	75	89
8	(6,1,0)	8	11	26	32	39	52	64	67	78	90
9	(7,1,0)	9	11	27	34	42	53	57	73	76	86
10	(8,1,0)	10	11	28	33	45	48	59	70	80	85
11	(0,0,1)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
12	(1,0,1)	2	13	22	31	40	49	58	67	76	85
13	(2,0,1)	2	12	21	30	39	48	57	66	75	84
14	(3,0,1)	2	14	23	32	41	50	59	68	77	86
15	(4,0,1)	2	15	24	33	42	51	60	69	78	87
16	(5,0,1)	2	16	25	34	43	52	61	70	79	88
17	(6,0,1)	2	17	26	35	44	53	62	71	80	89
18	(7,0,1)	2	18	27	36	45	54	63	72	81	90
19	(8,0,1)	2	19	28	37	46	55	64	73	82	91
20	(0,1,1)	1	29	30	31	32	33	34	35	36	37
21	(1,1,1)	4	13	21	29	46	54	62	70	78	86
22	(2,1,1)	3	12	22	29	42	52	59	72	82	89
23	(3,1,1)	5	14	26	29	45	51	58	73	79	84
24	(4,1,1)	6	15	28	29	40	53	61	68	75	90
25	(5,1,1)	7	16	27	29	41	49	64	66	80	87
26	(6,1,1)	8	17	23	29	43	55	57	69	81	85
27	(7,1,1)	9	18	25	29	44	48	60	67	77	91
28	(8,1,1)	10	19	24	29	39	50	63	71	76	88
29	(0,2,1)	1	20	21	22	23	24	25	26	27	28
30	(1,2,1)	3	13	20	30	43	50	60	73	80	90

31	(2,2,1)	4	12	20	31	45	53	64	69	77	88
32	(3,2,1)	8	14	20	35	46	48	61	72	76	87
33	(4,2,1)	10	15	20	37	41	54	57	67	79	89
34	(5,2,1)	9	16	20	36	39	51	62	68	82	85
35	(6,2,1)	5	17	20	32	42	49	63	70	75	91
36	(7,2,1)	7	18	20	34	40	55	59	71	78	84
37	(8,2,1)	6	19	20	33	44	52	58	66	81	86
38	(0,3,1)	1	38	39	40	41	42	43	44	45	46
39	(1,3,1)	8	13	28	34	38	51	63	66	77	89
40	(2,3,1)	5	12	24	36	38	55	61	67	80	86
41	(3,3,1)	4	14	27	37	38	52	60	71	75	85
42	(4,3,1)	7	15	22	32	38	48	62	73	81	88
43	(5,3,1)	10	16	23	30	38	53	58	72	78	91
44	(6,3,1)	3	17	25	33	38	54	64	68	76	84
45	(7,3,1)	6	18	26	31	38	50	57	70	82	87
46	(8,3,1)	9	19	21	35	38	49	59	69	79	90
47	(0,4,1)	1	47	48	49	50	51	52	53	54	55
48	(1,4,1)	10	13	27	32	44	47	61	69	82	84
49	(2,4,1)	6	12	25	35	41	47	63	73	78	85
50	(3,4,1)	9	14	24	30	40	47	64	70	81	89
51	(4,4,1)	4	15	26	36	43	47	59	66	76	91
52	(5,4,1)	5	16	22	33	46	47	57	71	77	90
53	(6,4,1)	7	17	28	31	39	47	60	72	79	86
54	(7,4,1)	8	18	21	37	42	47	58	68	80	88
55	(8,4,1)	3	19	23	34	45	47	62	67	75	87
56	(0,5,1)	1	56	57	58	59	60	61	62	63	64
57	(1,5,1)	9	13	26	33	41	55	56	72	75	88
58	(2,5,1)	7	12	23	37	44	51	56	70	76	90
59	(3,5,1)	6	14	22	34	39	54	56	69	80	91
60	(4,5,1)	8	15	25	30	45	49	56	71	82	86
61	(5,5,1)	4	16	28	35	42	50	56	67	81	84
62	(6,5,1)	10	17	21	36	40	52	56	73	77	87
63	(7,5,1)	3	18	24	32	46	53	56	66	79	85
64	(8,5,1)	5	19	27	31	43	48	56	68	78	89
65	(0,6,1)	1	65	66	67	68	69	70	71	72	73
66	(1,6,1)	5	13	25	37	39	53	59	65	81	87
67	(2,6,1)	8	12	27	33	40	50	62	65	79	91
68	(3,6,1)	3	14	28	36	44	49	57	65	78	88
69	(4,6,1)	9	15	23	31	46	52	63	65	80	84
70	(5,6,1)	6	16	21	32	45	55	60	65	76	89
71	(6,6,1)	4	17	24	34	41	48	58	65	82	90
72	(7,6,1)	10	18	22	35	43	51	64	65	75	86
73	(8,6,1)	7	19	26	30	42	54	61	65	77	85
74	(0,7,1)	1	74	75	76	77	78	79	80	81	82
75	(1,7,1)	7	13	24	35	45	52	57	68	74	91
76	(2,7,1)	9	12	28	32	43	54	58	71	74	87
77	(3,7,1)	10	14	25	31	42	55	62	66	74	90
78	(4,7,1)	5	15	21	34	44	50	64	72	74	85
79	(5,7,1)	3	16	26	37	40	48	63	69	74	86
80	(6,7,1)	6	17	27	30	46	51	59	67	74	88
81	(7,7,1)	4	18	23	33	39	49	61	73	74	89
82	(8,7,1)	8	19	22	36	41	53	60	70	74	84
83	(0,8,1)	1	83	84	85	86	87	88	89	90	91
84	(1,8,1)	6	13	23	36	42	48	64	71	79	83
85	(2,8,1)	10	12	26	34	46	49	60	68	81	83
86	(3,8,1)	7	14	21	33	43	53	63	67	82	83
87	(4,8,1)	3	15	27	35	39	55	58	70	77	83
88	(5,8,1)	8	16	24	31	44	54	59	73	75	83
89	(6,8,1)	9	17	22	37	45	50	61	66	78	83
90	(7,8,1)	5	18	28	30	41	52	62	69	76	83
91	(8,8,1)	4	19	25	32	40	51	57	72	80	83

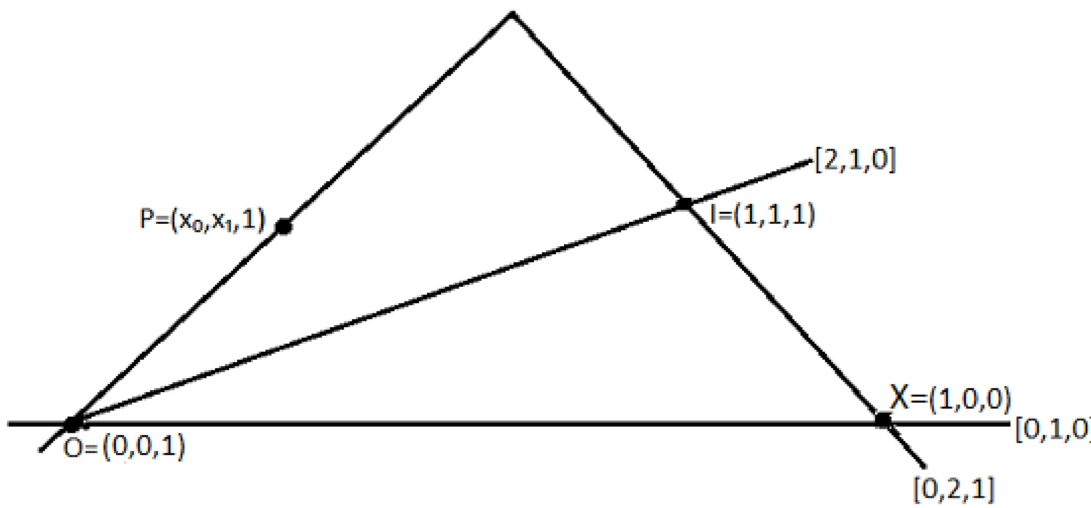
Çizelge 2.6. Doğrudan geçen noktalar

l_i					P_i					
1	2	11	20	29	38	47	56	65	74	83
2	1	11	12	13	14	15	16	17	18	19
3	4	11	22	30	44	55	63	68	79	87
4	3	11	21	31	41	51	61	71	81	91
5	5	11	23	35	40	52	64	66	78	90
6	6	11	24	37	45	49	59	70	80	84
7	7	11	25	36	42	53	58	73	75	86
8	8	11	26	32	39	54	60	67	82	88
9	9	11	27	34	46	50	57	69	76	89
10	10	11	28	33	43	48	62	72	77	85
11	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
12	2	13	22	31	40	49	58	67	76	85
13	2	12	21	30	39	48	57	66	75	84
14	2	14	23	32	41	50	59	68	77	86
15	2	15	24	33	42	51	60	69	78	87
16	2	16	25	34	43	52	61	70	79	88
17	2	17	26	35	44	53	62	71	80	89
18	2	18	27	36	45	54	63	72	81	90
19	2	19	28	37	46	55	64	73	82	91
20	1	29	30	31	32	33	34	35	36	37
21	4	13	21	29	46	54	62	70	78	86
22	3	12	22	29	42	52	59	72	82	89
23	5	14	26	29	43	55	58	69	81	84
24	6	15	28	29	40	50	63	71	75	88
25	7	16	27	29	44	49	60	66	77	91
26	8	17	23	29	45	51	57	73	79	85
27	9	18	25	29	41	48	64	67	80	87
28	10	19	24	29	39	53	61	68	76	90
29	1	20	21	22	23	24	25	26	27	28
30	3	13	20	30	43	50	60	73	80	90

31	4	12	20	31	45	53	64	69	77	88
32	8	14	20	35	42	48	63	70	76	91
33	10	15	20	37	44	52	57	67	81	86
34	9	16	20	36	39	55	59	71	78	85
35	5	17	20	32	46	49	61	72	75	87
36	7	18	20	34	40	51	62	68	82	84
37	6	19	20	33	41	54	58	66	79	89
38	1	38	39	40	41	42	43	44	45	46
39	8	13	28	34	38	53	59	66	81	87
40	5	12	24	36	38	50	62	67	79	91
41	4	14	25	33	38	49	57	71	82	90
42	9	15	22	35	38	54	61	73	77	84
43	6	16	26	30	38	51	64	72	76	86
44	3	17	27	37	38	48	58	68	78	88
45	10	18	23	31	38	55	60	70	75	89
46	7	19	21	32	38	52	63	69	80	85
47	1	47	48	49	50	51	52	53	54	55
48	10	13	27	32	42	47	64	71	79	84
49	6	12	25	35	46	47	60	68	81	85
50	7	14	28	30	45	47	61	67	78	89
51	4	15	23	34	39	47	58	72	80	91
52	8	16	22	37	41	47	62	69	75	90
53	9	17	24	31	43	47	63	66	82	86
54	5	18	21	33	44	47	59	73	76	88
55	3	19	26	36	40	47	57	70	77	87
56	1	56	57	58	59	60	61	62	63	64
57	9	13	26	33	45	52	56	68	75	91
58	7	12	23	37	43	54	56	71	76	87
59	10	14	22	36	46	51	56	66	80	88
60	5	15	27	30	41	53	56	70	82	85
61	4	16	24	32	40	48	56	73	81	89
62	6	17	21	34	42	55	56	67	77	90
63	3	18	28	35	39	49	56	69	79	86
64	8	19	25	31	44	50	56	72	78	84
65	1	65	66	67	68	69	70	71	72	73
66	5	13	25	37	39	51	63	65	77	89
67	8	12	27	33	40	55	61	65	80	86
68	3	14	24	34	44	54	64	65	75	85
69	7	15	26	31	46	48	59	65	79	90
70	10	16	21	35	45	50	58	65	82	87
71	4	17	28	36	41	52	60	65	76	84
72	6	18	22	32	43	53	57	65	78	91
73	9	19	23	30	42	49	62	65	81	88
74	1	74	75	76	77	78	79	80	81	82
75	7	13	24	35	41	55	57	72	74	88
76	9	12	28	32	44	51	58	70	74	90
77	6	14	27	31	39	52	62	73	74	87
78	8	15	21	36	43	49	64	68	74	89
79	3	16	23	33	46	53	63	67	74	84
80	10	17	25	30	40	54	59	69	74	91
81	4	18	26	37	42	50	61	66	74	85
82	5	19	22	34	45	48	60	71	74	86
83	1	83	84	85	86	87	88	89	90	91
84	6	13	23	36	44	48	61	69	82	83
85	10	12	26	34	41	49	63	73	78	83
86	9	14	21	37	40	53	60	72	79	83
87	3	15	25	32	45	55	62	66	76	83
88	5	16	28	31	42	54	57	68	80	83
89	7	17	22	33	39	50	64	70	81	83
90	8	18	24	30	46	52	58	71	77	83
91	4	19	27	35	43	51	59	67	75	83

Önerme 2.2.1. *$\mathcal{P}_2\mathcal{S}$ de $I = (1,1,1)$, $X = (1,0,0)$, $O = (0,0,1)$ ve herhangi bir sonlu afin nokta $P = (x_0, x_1, 1)$ olsun. O zaman O, I, X, P noktalarının dörtgen oluşturursa $x_1 \notin \{0,1\}$ ve $x_0 \neq x_1$ şartları sağlanır. Ayrıca dörtgen oluşturacak P noktalarının sayısı 56 dır.*

İspat: $\mathcal{P}_2\mathcal{S}$ de $I = (1,1,1)$, $X = (1,0,0)$, $O = (0,0,1)$ ve $P = (x_0, x_1, 1)$ herhangi üçü doğrudaş olmayan dört nokta olsun.



Şekil 2.1 $\mathcal{P}_2\mathcal{S}$ de bir dörtgen

O, I, X ve P noktalarından dörtgen elde etmek için P noktası IXO üçgeninin kenar doğruları üzerinde olamaz. O noktası ile I noktasını birleştiren doğruya $[a_1, a_2, 1]$ dersek O ve I bu doğru üzerinde olduğundan $a_1 = 0$ ve $a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 = 0$ bağıntıları elde edilir. Buradan $OI = [2,1,0]$ dir. Benzer biçimde I ile X i birleştiren doğru $IX = [0,2,1]$ ve O ile X i birleştiren doğru $OX = [0,1,0]$ elde edilir. $P \not\in IX$ olduğundan $x_1 \neq 1$, $P \not\in OI$ olduğundan $x_0 \neq x_1$ ve $P \not\in OX$ olduğundan $x_1 \neq 0$ elde edilir.

$P = (x_0, x_1, 1)$ noktasında $x_1 \notin \{0,1\}$ şartının sağlanması için x_1 yerine 0 ve 1 değerleri haricinde 7 değer, $x_0 \neq x_1$ şartından da x_0 yerine de 8 değer seçilebilir. Böylece $7 \cdot 8 = 56$ farklı P noktası elde edilir.

Önerme 2.2.2. *$\mathcal{P}_2\mathcal{S}$ de $I = (1,1,1)$, $X = (1,0,0)$, $O = (0,0,1)$ ve $P = (x_0, x_1, 0)$ herhangi bir ideal nokta olsun. O zaman O, I, X, P noktalarının dörtgen oluşturursa $x_0 \neq x_1 \neq 1$ ve $x_1 \neq 0$ şartları sağlanır. Ayrıca dörtgen oluşturacak P ideal noktalarının sayısı 8 dir.*

İspat: $\mathcal{P}_2\mathcal{S}$ de $I = (1,1,1)$, $X = (1,0,0)$, $O = (0,0,1)$ ve $P = (x_0, x_1, 0)$

herhangi üçü doğrudaş olmayan dört nokta olsun. O, I, X ve P noktalarından dörtgen elde etmek için P noktası IXO üçgeninin kenar doğruları üzerinde olamaz. $P = (x_0, x_1, 0)$ noktası $OI = [2,1,0]$ ve $IX = [0,2,1]$ doğrusu üzerinde olmadığından $x_0 \neq x_1 \neq 1$ ve $x_1 \neq 0$ olur. Böylece bu şartları sağlayan 8 ideal nokta vardır.

Şimdi $OIXP$ dörtgenlerinin tamamlanmışı olan tam dörtgenlerin U, V, W köşegen noktaları P ye bağlı olarak bulunabilir. U köşegen noktası PX ve OI doğrularının arakesiti olduğundan dolayı $U = [(x_0, x_1, 1) \vee (1,0,0)] \wedge [2,1,0]$ dir. Üzerinde bulunma bağıntıları kullanılarak U, P ye bağlı olarak $U = (2 \odot (-x_1), x_1, 1)$ olarak elde edilir. Benzer biçimde

$V = OP \wedge IX = [(0,0,1) \vee (x_0, x_1, 1)] \wedge [0,2,1] = \left(x_0 \odot x_1^{-1}, 1, 1\right)$ ve

$W = PI \wedge OX = [(x_0, x_1, 1) \vee (1,1,1)] \wedge [0,1,0]$

köşegen noktasının koordinatları $k = 2 \odot \left[(1 - x_0) \odot (x_0 - x_1)^{-1} \oplus 1\right]$ olmak üzere son köşegen nokta $W = (k^{-1} \odot 2, 0, 1)$ olarak bulunur.

Eğer $OIXP$ dörtgeninin tamamlanmışı olan konfigürasyonda U, V, W noktaları doğrudaş ise bir Fano düzlemi oluşturur. Fano düzlemini oluşturan $OIXP$ tamdörtgenlerinin tamamı M. Taş' ın yüksek lisans tezinde belirlenmiştir (Taş, 2015). Bu tezde belirlenen Fano konfigürasyonlarındaki P noktalarının ve köşegen noktalarının homogen koordinatlardaki karşılıklarını Önerme 2.2.1 , Önerme 2.2.2 ve yukarıda hesaplanan homogen koordinat karşılıklarından aşağıdaki gibi hesaplayabiliriz :

$P_1 = 38 = (0,3,1)$ için,

$k = 2 \odot \left[(1 - x_0) \odot (x_0 - x_1)^{-1} \oplus 1\right] =$

$= 2 \odot [(1-0) \odot (0-3)^{-1} \oplus 1)] = 2 \odot [3 \oplus 1] = 2 \odot 4 = 8$

olduğundan, köşegen noktaları

$U_1 = (2 \odot (-3), 3, 1) = (3, 3, 1) = 41,$

$V_1 = (0 \odot 3^{-1}, 1, 1) = (0, 1, 1) = 20,$

$W_1 = (8^{-1} \odot 2, 0, 1) = (4 \odot 2, 0, 1) = (8, 0, 1) = 19$

olarak bulunur. Ayrıca $8 \odot 8 \oplus 2 \odot 0 \oplus 1 \odot 1 = 0$ olduğundan $W_1 = 19 = (8, 0, 1)$ noktası $d_1 = UV = 37 = [8, 2, 1]$ doğrusu üzerindedir. Böylece köşegen noktaları doğrudaş olur ve $OIXP$ dörtgeni bir Fano düzlemi oluşturur.

Fano düzlemi oluşturan bütün P_i noktaları ve bunlara karşılık gelen Fano konfigürasyonunun köşegen noktaları U_i, V_i, W_i ler ile köşegen doğruları d_i, $i = 1, 2, ..., 18$ ler aşağıdaki gibi homogen koordinatlarda hesaplanmıştır:

Çizelge 2.7. Fano oluşturan P noktaları, köşegen noktaları ve doğruları

$P_1 = (0, 3, 1)$	$U_1 = (3, 3, 1)$	$V_1 = (0, 1, 1)$	$W_1 = (8, 0, 1)$	$d_1 = [8, 2, 1]$
$P_2 = (0, 6, 1)$	$U_2 = (6, 6, 1)$	$V_2 = (0, 1, 1)$	$W_2 = (5, 0, 1)$	$d_2 = [5, 2, 1]$
$P_3 = (0, 4, 1)$	$U_3 = (4, 4, 1)$	$V_3 = (0, 1, 1)$	$W_3 = (7, 0, 1)$	$d_3 = [7, 2, 1]$
$P_4 = (0, 7, 1)$	$U_4 = (7, 7, 1)$	$V_4 = (0, 1, 1)$	$W_4 = (4, 0, 1)$	$d_4 = [4, 2, 1]$
$P_5 = (0, 5, 1)$	$U_5 = (5, 5, 1)$	$V_5 = (0, 1, 1)$	$W_5 = (6, 0, 1)$	$d_5 = [6, 2, 1]$
$P_6 = (0, 8, 1)$	$U_6 = (8, 8, 1)$	$V_6 = (0, 1, 1)$	$W_6 = (3, 0, 1)$	$d_6 = [3, 2, 1]$
$P_7 = (1, 3, 1)$	$U_7 = (3, 3, 1)$	$V_7 = (6, 1, 1)$	$W_7 = (1, 0, 1)$	$d_7 = [2, 8, 1]$
$P_8 = (1, 6, 1)$	$U_8 = (6, 6, 1)$	$V_8 = (3, 1, 1)$	$W_8 = (1, 0, 1)$	$d_8 = [2, 5, 1]$
$P_9 = (1, 4, 1)$	$U_9 = (4, 4, 1)$	$V_9 = (8, 1, 1)$	$W_9 = (1, 0, 1)$	$d_9 = [2, 7, 1]$
$P_{10} = (1, 7, 1)$	$U_{10} = (7, 7, 1)$	$V_{10} = (5, 1, 1)$	$W_{10} = (1, 0, 1)$	$d_{10} = [2, 4, 1]$
$P_{11} = (1, 5, 1)$	$U_{11} = (5, 5, 1)$	$V_{11} = (7, 1, 1)$	$W_{11} = (1, 0, 1)$	$d_{11} = [2, 6, 1]$
$P_{12} = (1, 8, 1)$	$U_{12} = (8, 8, 1)$	$V_{12} = (4, 1, 1)$	$W_{12} = (1, 0, 1)$	$d_{12} = [2, 3, 1]$
$P_{13} = (2, 3, 1)$	$U_{13} = (3, 3, 1)$	$V_{13} = (3, 1, 1)$	$W_{13} = (3, 0, 1)$	$d_{13} = [3, 0, 1]$
$P_{14} = (2, 6, 1)$	$U_{14} = (6, 6, 1)$	$V_{14} = (6, 1, 1)$	$W_{14} = (6, 0, 1)$	$d_{14} = [6, 0, 1]$
$P_{15} = (2, 4, 1)$	$U_{15} = (4, 4, 1)$	$V_{15} = (4, 1, 1)$	$W_{15} = (4, 0, 1)$	$d_{15} = [4, 0, 1]$
$P_{16} = (2, 7, 1)$	$U_{16} = (7, 7, 1)$	$V_{16} = (7, 1, 1)$	$W_{16} = (7, 0, 1)$	$d_{16} = [7, 0, 1]$
$P_{17} = (2, 5, 1)$	$U_{17} = (5, 5, 1)$	$V_{17} = (5, 1, 1)$	$W_{17} = (5, 0, 1)$	$d_{17} = [5, 0, 1]$
$P_{18} = (2, 8, 1)$	$U_{18} = (8, 8, 1)$	$V_{18} = (8, 1, 1)$	$W_{18} = (8, 0, 1)$	$d_{18} = [8, 0, 1]$

Çizelge 2.7. den Fano düzlemi oluşturan P noktaları, bunlara bağlı köşegen noktaları ve köşegen doğruları $t \geq 3$, $t \in S$ olmak üzere aşağıdaki gibi üç grupta toplanabilir:

1.Grup :$P = (0, t, 1)$, $U = (t, t, 1)$, $V = (0, 1, 1)$ ve $W = (2 \odot t \oplus 2, 0, 1)$ ve köşegen doğrusu $d = [2 \odot t \oplus 2, 2, 1]$ dir.

2.Grup : $P = (1, t, 1)$, $U = (t, t, 1)$, $V = (2 \odot t, 1, 1)$ ve $W = (1, 0, 1)$ ve köşegen doğrusu $d = [2, 2 \odot t \oplus 2, 1]$ dir.

3.Grup : $P = (2, t, 1)$, $U = (t, t, 1)$, $V = (t, 1, 1)$ ve $W = (t, 0, 1)$ ve köşegen doğrusu $d = [t, 0, 1]$ dir.

3. SOL YAKLAŞIK CİSİM ÜZERİNDE ELDE EDİLEN DOKUZUNCU MERTEBEDEN PROJEKTİF DÜZLEMİN ARKLARI

Bu bölümde, $\mathcal{P}_2\mathcal{S}$ projektif düzleminde Bölüm.2 nin sonunda verilen Fano düzlemi oluşturan 2.Grup P noktalarından özel bir nokta seçilerek $OIXP$ tamdörtgeninin tamamlanmışı olan Fano düzlemini içeren maksimal $2-$arklar, bu Fano düzleminin gerdiği kümede olmayan uygun noktalar $\{O,I,X,P\}$ kümesine katılarak belirlendi.

$\mathcal{P}_2\mathcal{S}$ projektif düzleminde

$O = 11 = (0,0,1)$, $X = 1 = (1,0,0)$, $I = 21 = (1,1,1)$ olmak üzere ikinci gruptan seçilen özel nokta $P = 75 = (1,7,1)$ göz alındığında oluşan Fano düzleminin köşegen noktaları $U = 81 = (7,7,1)$, $V = 25 = (5,1,1)$ ve $W = 12 = (1,0,1)$ dir. $\{O,I,X,P\}$ kümesinin elemanlarının herhangi üçü doğrudaş değildir. Bu kümeyi kapsayan 2-arkları oluşturmak için aşağıdaki adımlar izlenir:

1.Adım: $\mathcal{P}_2\mathcal{S}$ de $\{O,I,X,P\}$ kümesinin gerdiği kümede olmayan bir P'noktası seçilir ve bu kümeye katılır.

2.Adım: $\{O,I,X,P,P'\}$ kümesinin gerdiği kümede olmayan bir P''noktası seçilir ve bu kümeye katılır.

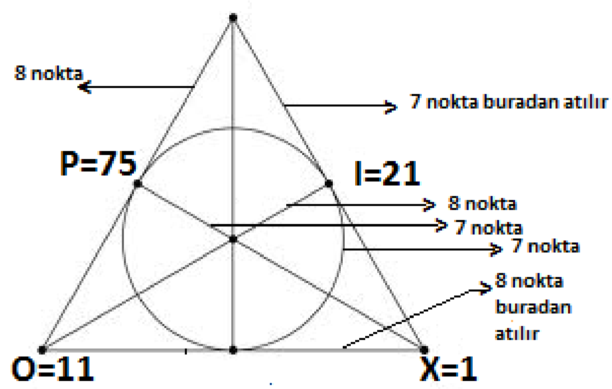
3.Adım: $\{O,I,X,P,P',P''\}$ kümesinin gerdiği kümede olmayan bir P'''noktası seçilir ve bu kümeye katılır.

.

.

.

Bu algoritmadaki adımlar $\mathcal{P}_2\mathcal{S}$ deki seçilecek başka nokta kalmayana kadar devam eder.



Şekil 3.1. Fano düzleminde atılan noktalar

$OIXP$ dörtgenin gerdiği Fano düzleminde $\mathcal{P}_2\mathcal{S}$ ye ait toplam 49 nokta vardır. $\mathcal{P}_2\mathcal{S}$ de toplam nokta sayısı 91 olduğundan P' noktası Fano düzleminde olmayan geriye kalan 42 noktadan biri olabilir.

Bu çalışmada $P' = (5,2,1) = 34$ homogen koordinatlı noktası seçilmiştir. P' noktasından 10 doğru geçer ve farklı iki nokta bir doğru belirtiğinden bu 10 doğrunun dördü Fano düzlemini köşe noktalarında keser, üçü köşegen noktalarında ve diğer üç doğru da Fano düzleminde olmayan ama $\mathcal{P}_2\mathcal{S}$ nin Fano düzleminin doğrularına ait köşegen ve köşe noktalarından farklı noktalarda keser. P' den geçen doğrular aşağıdaki biçimde sınıflandırabiliriz:

1.**tip :** Köşe noktalarından geçen doğrular

2.**tip :** Köşegen noktalarından geçen doğrular

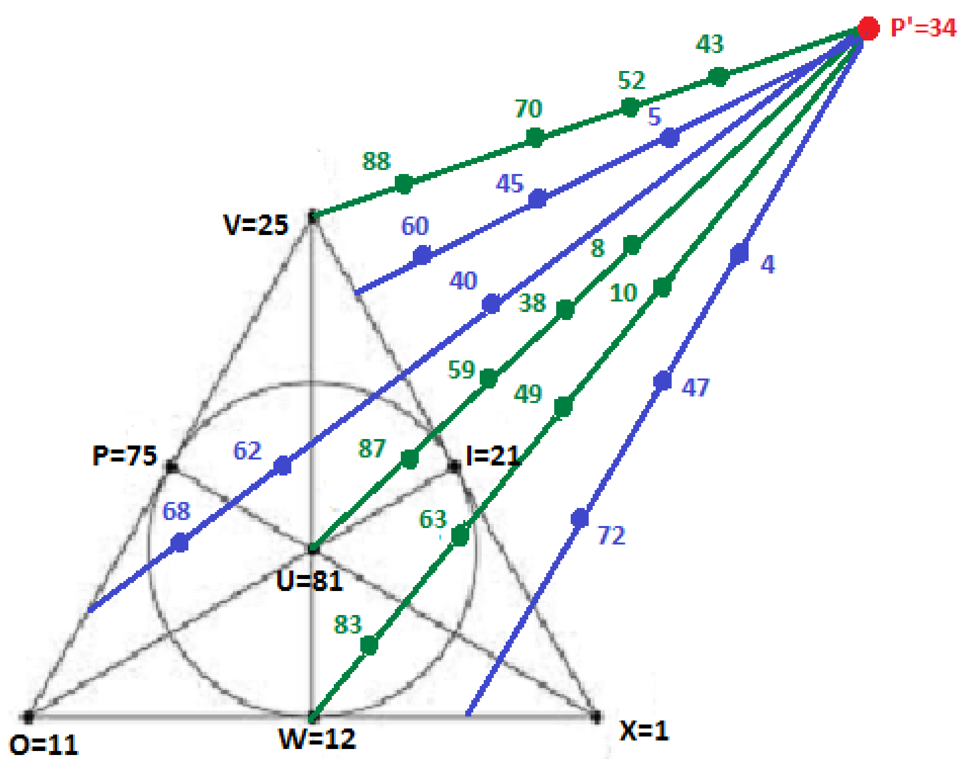
3.**tip :** Fano düzleminin atılmış noktalarından geçen doğrular

Projektif düzlemin bütün noktaları bir noktadan geçen doğru demeti üzerinde olduğundan arka dahil edilecek olan P''noktası, $P' = (5,2,1) = 34$ noktasından geçen 10 tane doğrunun üzerinde aranmalıdır. Ancak bu doğrulardan 4 tanesi 1.tip doğrulardır ve bu doğrular köşe noktaları ile birleştiğinden üzerinde arka dahil edilecek yeni P''noktası yoktur. Bu durumda P''noktası 2.tip yada 3.tip doğrular üzerinde aranmalıdır.

34 ile köşegen noktalarından geçen doğrular 2.tip doğrular 3 tanedir ve bu doğruların her biri Fano düzleminin üç doğrusu ile köşegen noktasında diğer dört doğrusu ile farklı noktalarda kesişir. Dolayısıyla 2.tip doğrular üzerinde arka katılabilecek P''için dört farklı nokta kalır. 3.tip doğrular, köşegen doğrusu hariç Fano düzleminin her doğrusu ile farklı noktalarda kesişir. Sonuç olarak arka katılabilecek nokta için bu tip doğruların her biri üzerinde 34 hariç üçer nokta kalır. Böylece P''için 2.tip ve 3. tip doğrular üzerinde arka katılabilmesi için göz önüne alınacak nokta sayısı 21 dir. Bu 21 noktanın oluşturduğu kümeye S' diyelim.

$S' = \{4, 5, 8, 10, 38, 40, 43, 45, 47, 49, 52, 59, 60, 62, 63, 68, 70, 72, 83, 87, 88\}$ ile gösterelim.

Bu noktaların konumları Çizelge 2.6. dan yararlanılarak aşağıdaki gibi verilebilir:



Şekil 3.2 $\mathcal{P}_2\mathcal{S}$ de S' kümesindeki nokta ve doğruların konumları

$S^{'}$ kümesinin doğrudaş noktalarından oluşan alt kümeleri aşağıdaki gibi sınıflandırılabilir:

Aşağıdaki çizelgede $S^{'}$ kümesine ait dörder nokta içeren doğrular verilmiştir. Çizelge 3.1 de $S^{'}$ nün noktaları beyaz renkli noktalardır, kırmızı renkli olan noktalar köşe noktaları, turuncu renkli olan noktalar sonradan arka dahil edilen noktalar ve mavi renkli olan noktalar da $S^{'}$ de olmayan köşe noktalarından ve 34 ten farklı olan noktalardır.

Çizelge 3.1. $\mathrm{S}^{'}$ kümesine ait dörder nokta içeren doğrular

l_i					P_i						
3	4	11	22	30	44	55	63	68	79	87
6	6	11	24	37	45	49	59	70	80	84
10	10	11	28	33	43	48	62	72	77	85
11	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
16	2	16	25	34	43	52	61	70	79	88
35	5	17	20	32	46	49	61	72	75	87
38	1	38	39	40	41	42	43	44	45	46
39	8	13	28	34	38	53	59	66	81	87
45	10	18	23	31	38	55	60	70	75	89
54	5	18	21	33	44	47	59	73	76	88
55	3	19	26	36	40	47	57	70	77	87
56	1	56	57	58	59	60	61	62	63	64
78	8	15	21	36	43	49	64	68	74	89
85	10	12	26	34	41	49	63	73	78	83
86	9	14	21	37	40	53	60	72	79	83
91	4	19	27	35	43	51	59	67	75	83

Tanım 3.0.3. *$S^{'}$, $\mathcal{P}_2\mathcal{S}$ de herhangi bir nokta kümesi olsun. Bu kümeye ait herhangi bir noktadan geçen ve $S^{'}$ nün noktalarından oluşan $\mathcal{P}_2\mathcal{S}$ ye ait doğruların sayısına o noktanın doğru ağırlığı denir.*

Çizelge 3.1. e göre 59 ve 43 noktalarından geçen beş doğru olduğundan bu noktaların ağırlıkları beştir. Benzer biçimde $10, 49, 70$ ve 87 noktalarının ağırlıkları dört, $4, 5, 8, 38, 40, 60, 63, 72$ ve 83 noktalarının ağırlıkları üç, $45, 47, 62, 68$ ve 88 noktalarının ağırlıkları iki ve 52 noktasının ağırlığı birdir.

3.1. $(7,2)$- ark'ın Elde Edilmesi:

$P^{'} = 34$ noktasından sonra arka dahil edebilecek 21 nokta içerisinden 2.tip doğru üzerindeki dört ağırlıklı olan $P^{''} = 70$ noktası arka dahil edildiğinde 70 noktası ile $\{O, X, I, P, P^{'}\}$ kümesinin elemanları ile oluşan $1 \vee 70$ doğrusu üzerindeki $S^{'}$ ye ait 68,72 noktalarını $P^{'''}$ olarak seçemeyiz. Benzer biçimde $11 \vee 70$ doğrusu üzerindeki 45,49,59 noktaları, $21 \vee 70$ doğrusu üzerindeki 4,62 noktaları, $70 \vee 75$ doğrusu üzerindeki 10,38,60 noktaları ve $34 \vee 70$ doğrusu üzerindeki 43,52,88 noktaları $S^{'}$ den atılırsa arka ilave edilecek $P^{'''}$ noktası

$$S^{''} = S^{'} \setminus \{4, 10, 38, 43, 45, 49, 52, 59, 60, 62, 68, 72, 88\} \quad = \{5, 8, 40, 47, 63, 83, 87\}$$

kümesinden seçilmelidir. Üzerinde bulunma yapısına göre kalan noktaların durumu aşağıdaki çizelgede görülmektedir.

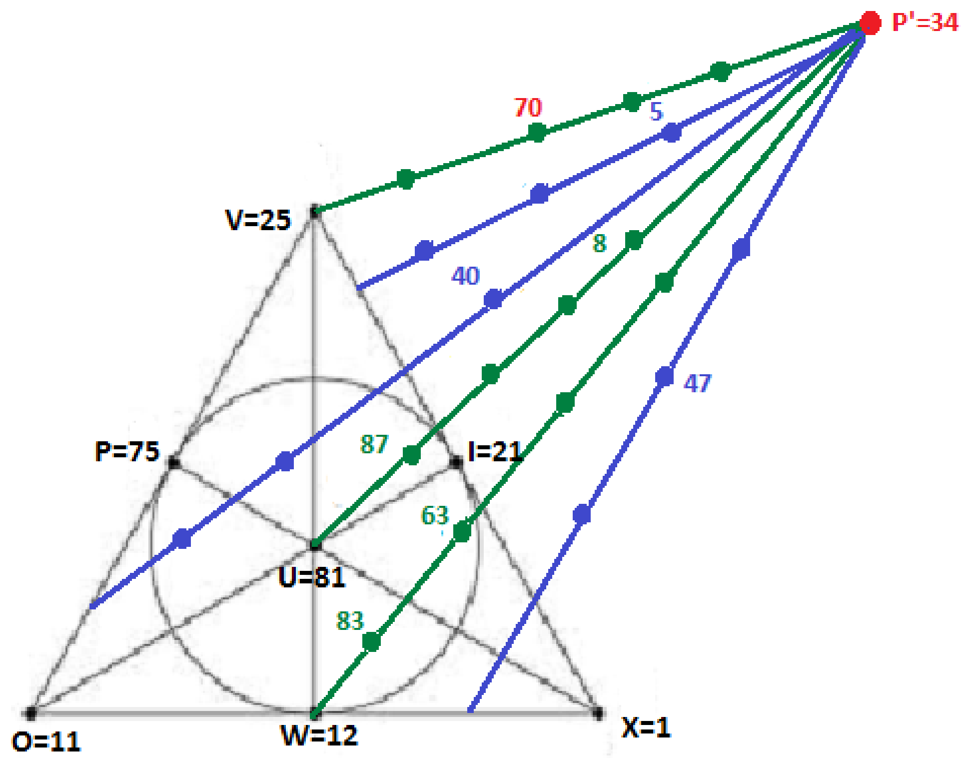
Çizelge 3.2. $P^{''} = 70$ den sonra kalan noktaların durumu

l_i					P_i					
1	2	11	20	29	38	47	56	65	74	83
2	1	11	12	13	14	15	16	17	18	19
3	4	11	22	30	44	55	63	68	79	87
4	3	11	21	31	41	51	61	71	81	91
5	5	11	23	35	40	52	64	66	78	90
6	6	11	24	37	45	49	59	70	80	84
7	7	11	25	36	42	53	58	73	75	86
8	8	11	26	32	39	54	60	67	82	88
9	9	11	27	34	46	50	57	69	76	89
10	10	11	28	33	43	48	62	72	77	85
11	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
12	2	13	22	31	40	49	58	67	76	85
13	2	12	21	30	39	48	57	66	75	84
14	2	14	23	32	41	50	59	68	77	86
15	2	15	24	33	42	51	60	69	78	87
16	2	16	25	34	43	52	61	70	79	88
17	2	17	26	35	44	53	62	71	80	89
18	2	18	27	36	45	54	63	72	81	90
19	2	19	28	37	46	55	64	73	82	91
20	1	29	30	31	32	33	34	35	36	37
21	4	13	21	29	46	54	62	70	78	86
22	3	12	22	29	42	52	59	72	82	89
23	5	14	26	29	43	55	58	69	81	84
24	6	15	28	29	40	50	63	71	75	88
25	7	16	27	29	44	49	60	66	77	91
26	8	17	23	29	45	51	57	73	79	85
27	9	18	25	29	41	48	64	67	80	87
28	10	19	24	29	39	53	61	68	76	90
29	1	20	21	22	23	24	25	26	27	28
30	3	13	20	30	43	50	60	73	80	90

31	4	12	20	31	45	53	64	69	77	88
32	8	14	20	35	42	48	63	70	76	91
33	10	15	20	37	44	52	57	67	81	86
34	9	16	20	36	39	55	59	71	78	85
35	5	17	20	32	46	49	61	72	75	87
36	7	18	20	34	40	51	62	68	82	84
37	6	19	20	33	41	54	58	66	79	89
38	1	38	39	40	41	42	43	44	45	46
39	8	13	28	34	38	53	59	66	81	87
40	5	12	24	36	38	50	62	67	79	91
41	4	14	25	33	38	49	57	71	82	90
42	9	15	22	35	38	54	61	73	77	84
43	6	16	26	30	38	51	64	72	76	86
44	3	17	27	37	38	48	58	68	78	88
45	10	18	23	31	38	55	60	70	75	89
46	7	19	21	32	38	52	63	69	80	85
47	1	47	48	49	50	51	52	53	54	55
48	10	13	27	32	42	47	64	71	79	84
49	6	12	25	35	46	47	60	68	81	85
50	7	14	28	30	45	47	61	67	78	89
51	4	15	23	34	39	47	58	72	80	91
52	8	16	22	37	41	47	62	69	75	90
53	9	17	24	31	43	47	63	66	82	86
54	5	18	21	33	44	47	59	73	76	88
55	3	19	26	36	40	47	57	70	77	87
56	1	56	57	58	59	60	61	62	63	64
57	9	13	26	33	45	52	56	68	75	91
58	7	12	23	37	43	54	56	71	76	87
59	10	14	22	36	46	51	56	66	80	88
60	5	15	27	30	41	53	56	70	82	85

61	4	16	24	32	40	48	56	73	81	89
62	6	17	21	34	42	55	56	67	77	90
63	3	18	28	35	39	49	56	69	79	86
64	8	19	25	31	44	50	56	72	78	84
65	1	65	66	67	68	69	70	71	72	73
66	5	13	25	37	39	51	63	65	77	89
67	8	12	27	33	40	55	61	65	80	86
68	3	14	24	34	44	54	64	65	75	85
69	7	15	26	31	46	48	59	65	79	90
70	10	16	21	35	45	50	58	65	82	87
71	4	17	28	36	41	52	60	65	76	84
72	6	18	22	32	43	53	57	65	78	91
73	9	19	23	30	42	49	62	65	81	88
74	1	74	75	76	77	78	79	80	81	82
75	7	13	24	35	41	55	57	72	74	88
76	9	12	28	32	44	51	58	70	74	90
77	6	14	27	31	39	52	62	73	74	87
78	8	15	21	36	43	49	64	68	74	89
79	3	16	23	33	46	53	63	67	74	84
80	10	17	25	30	40	54	59	69	74	91
81	4	18	26	37	42	50	61	66	74	85
82	5	19	22	34	45	48	60	71	74	86
83	1	83	84	85	86	87	88	89	90	91
84	6	13	23	36	44	48	61	69	82	83
85	10	12	26	34	41	49	63	73	78	83
86	9	14	21	37	40	53	60	72	79	83
87	3	15	25	32	45	55	62	66	76	83
88	5	16	28	31	42	54	57	68	80	83
89	7	17	22	33	39	50	64	70	81	83
90	8	18	24	30	46	52	58	71	77	83
91	4	19	27	35	43	51	59	67	75	83

Sonuç olarak



Şekil 3.3. $P^{''} = 70$ arka dahil edikten sonra oluşan yapı

yapısı kalır. Kalan $S^{''}$ noktalar kümesinden 2.tip doğru üzerindeki dört ağırlıklı $P^{'''} = 87$ noktası arka dahil edildiğinde 87 noktası ile $\{O, X, I, P, P^{'}, P^{''}\}$ kümesinin elemanları ile oluşan $1 \vee 87$ doğrusu üzerindeki $S^{''}$ ye ait 83 noktası, $11 \vee 87$ doğrusu üzerindeki 63 noktası, $87 \vee 75$ doğrusu üzerindeki 5 noktası ve $34 \vee 87$ doğrusu üzerindeki 8 noktası ve $70 \vee 87$ doğrusu üzerindeki 40, 47 noktaları $S^{''}$ den atılırsa geriye kalan noktalardan oluşan $S^{'''} = S^{''} \setminus \{5, 8, 40, 47, 63, 83\} = \varnothing$ kümesi elde edilir.

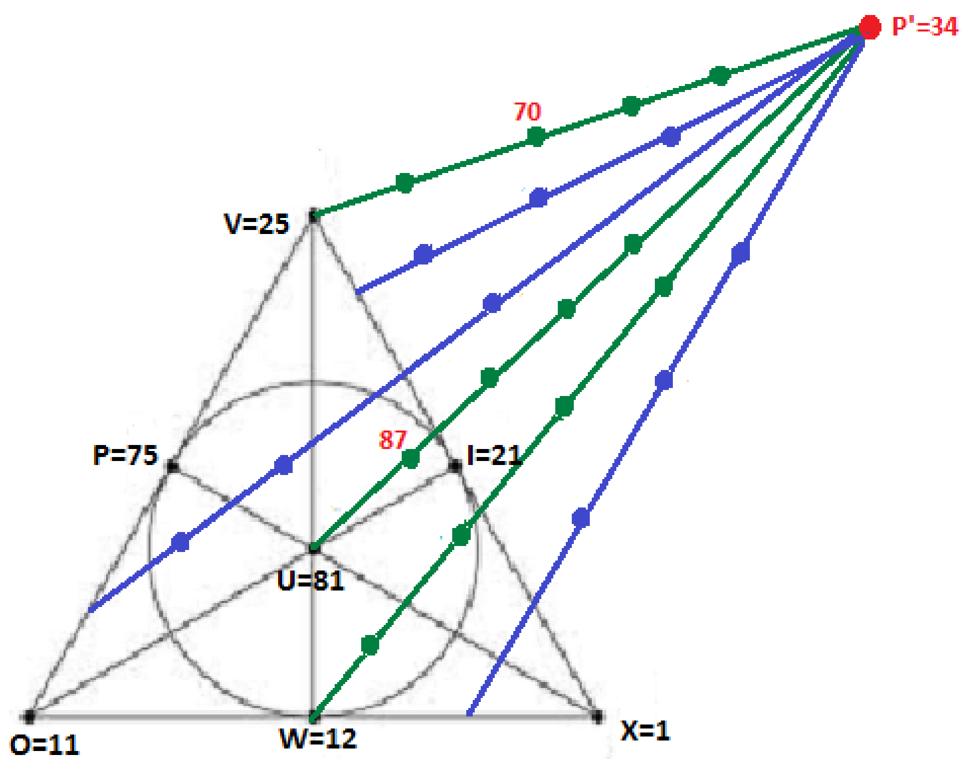
Çizelge 3.3 (7,2)-ark üzerinde bulunma yapısı

l_i				P_i						
1	2	11	20	29	38	47	56	65	74	83
2	1	11	12	13	14	15	16	17	18	19
3	4	11	22	30	44	55	63	68	79	87
4	3	11	21	31	41	51	61	71	81	91
5	5	11	23	35	40	52	64	66	78	90
6	6	11	24	37	45	49	59	70	80	84
7	7	11	25	36	42	53	58	73	75	86
8	8	11	26	32	39	54	60	67	82	88
9	9	11	27	34	46	50	57	69	76	89
10	10	11	28	33	43	48	62	72	77	85
11	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
12	2	13	22	31	40	49	58	67	76	85
13	2	12	21	30	39	48	57	66	75	84
14	2	14	23	32	41	50	59	68	77	86
15	2	15	24	33	42	51	60	69	78	87
16	2	16	25	34	43	52	61	70	79	88
17	2	17	26	35	44	53	62	71	80	89
18	2	18	27	36	45	54	63	72	81	90
19	2	19	28	37	46	55	64	73	82	91
20	1	29	30	31	32	33	34	35	36	37
21	4	13	21	29	46	54	62	70	78	86
22	3	12	22	29	42	52	59	72	82	89
23	5	14	26	29	43	55	58	69	81	84
24	6	15	28	29	40	50	63	71	75	88
25	7	16	27	29	44	49	60	66	77	91
26	8	17	23	29	45	51	57	73	79	85
27	9	18	25	29	41	48	64	67	80	87
28	10	19	24	29	39	53	61	68	76	90
29	1	20	21	22	23	24	25	26	27	28
30	3	13	20	30	43	50	60	73	80	90

31	4	12	20	31	45	53	64	69	77	88
32	8	14	20	35	42	48	63	70	76	91
33	10	15	20	37	44	52	57	67	81	86
34	9	16	20	36	39	55	59	71	78	85
35	5	17	20	32	46	49	61	72	75	87
36	7	18	20	34	40	51	62	68	82	84
37	6	19	20	33	41	54	58	66	79	89
38	1	38	39	40	41	42	43	44	45	46
39	8	13	28	34	38	53	59	66	81	87
40	5	12	24	36	38	50	62	67	79	91
41	4	14	25	33	38	49	57	71	82	90
42	9	15	22	35	38	54	61	73	77	84
43	6	16	26	30	38	51	64	72	76	86
44	3	17	27	37	38	48	58	68	78	88
45	10	18	23	31	38	55	60	70	75	89
46	7	19	21	32	38	52	63	69	80	85
47	1	47	48	49	50	51	52	53	54	55
48	10	13	27	32	42	47	64	71	79	84
49	6	12	25	35	46	47	60	68	81	85
50	7	14	28	30	45	47	61	67	78	89
51	4	15	23	34	39	47	58	72	80	91
52	8	16	22	37	41	47	62	69	75	90
53	9	17	24	31	43	47	63	66	82	86
54	5	18	21	33	44	47	59	73	76	88
55	3	19	26	36	40	47	57	70	77	87
56	1	56	57	58	59	60	61	62	63	64
57	9	13	26	33	45	52	56	68	75	91
58	7	12	23	37	43	54	56	71	76	87
59	10	14	22	36	46	51	56	66	80	88
60	5	15	27	30	41	53	56	70	82	85

61	4	16	24	32	40	48	56	73	81	89
62	6	17	21	34	42	55	56	67	77	90
63	3	18	28	35	39	49	56	69	79	86
64	8	19	25	31	44	50	56	72	78	84
65	1	65	66	67	68	69	70	71	72	73
66	5	13	25	37	39	51	63	65	77	89
67	8	12	27	33	40	55	61	65	80	86
68	3	14	24	34	44	54	64	65	75	85
69	7	15	26	31	46	48	59	65	79	90
70	10	16	21	35	45	50	58	65	82	87
71	4	17	28	36	41	52	60	65	76	84
72	6	18	22	32	43	53	57	65	78	91
73	9	19	23	30	42	49	62	65	81	88
74	1	74	75	76	77	78	79	80	81	82
75	7	13	24	35	41	55	57	72	74	88
76	9	12	28	32	44	51	58	70	74	90
77	6	14	27	31	39	52	62	73	74	87
78	8	15	21	36	43	49	64	68	74	89
79	3	16	23	33	46	53	63	67	74	84
80	10	17	25	30	40	54	59	69	74	91
81	4	18	26	37	42	50	61	66	74	85
82	5	19	22	34	45	48	60	71	74	86
83	1	83	84	85	86	87	88	89	90	91
84	6	13	23	36	44	48	61	69	82	83
85	10	12	26	34	41	49	63	73	78	83
86	9	14	21	37	40	53	60	72	79	83
87	3	15	25	32	45	55	62	66	76	83
88	5	16	28	31	42	54	57	68	80	83
89	7	17	22	33	39	50	64	70	81	83
90	8	18	24	30	46	52	58	71	77	83
91	4	19	27	35	43	51	59	67	75	83

Sonuç olarak Çizelge 3.3 den de görüldüğü gibi arka ilave edilebilecek yeni bir nokta S''' kümesinde kalmadığından elde edilen $\{1, 11, 21, 75, 34, 70, 87\}$ $(7, 2)$- ark tam arktır.



Şekil 3.4. Elde edilen (7,2)-ark

Elde edilen $(7, 2)$- arklar :

$\gamma_1 = \{1, 11, 21, 75, 34, 70, 87\}$

$\gamma_2 = \{1, 11, 21, 75, 34, 52, 4\}$

$\gamma_3 = \{1, 11, 21, 75, 34, 45, 4\}$

$\gamma_4 = \{1, 11, 21, 75, 34, 60, 68\}$

$\gamma_5 = \{1, 11, 21, 75, 34, 40, 59\}$

$\gamma_6 = \{1, 11, 21, 75, 34, 40, 87\}$

$\gamma_7 = \{1, 11, 21, 75, 34, 62, 87\}$

$\gamma_8 = \{1, 11, 21, 75, 34, 68, 83\}$

$\gamma_9 = \{1, 11, 21, 75, 34, 72, 59\}$

3.2. $(8, 2)$- ark'ın Elde Edilmesi:

$P^{'} = 34$ noktasından sonra arka dahil edebilecek 21 nokta içerisinden 2.tip doğru üzerindeki üç ağırlıklı olan $P^{''} = 38$ noktası arka dahil edildiğinde 38 noktası ile $\{O, X, I, P, P^{'}\}$ kümesinin elemanları ile oluşan $1 \vee 38$ doğrusu üzerindeki $S^{'}$ ye ait $40, 43$,45 noktalarını $P^{'''}$ olarak seçemeyiz. Benzer biçimde $11 \vee 38$ doğrusu üzerindeki $47, 83$ noktaları, $21 \vee 38$ doğrusu üzerindeki $52, 63$, $34 \vee 38$ doğrusu üzerindeki $8, 59, 87$ noktaları ve $75 \vee 38$ doğrusu üzerindeki $10, 60, 70$ noktaları $S^{'}$ den atılırsa arka ilave edilecek $P^{'''}$ noktası

$$S^{''} = S^{'} \setminus \{8, 10, 40, 43, 45, 47, 52, 59, 60, 63, 70, 83, 87\} = \{4, 5, 49, 62, 68, 72, 88\}$$

kümesinden seçilmelidir. Üzerinde bulunma yapısına göre kalan noktaların durumu aşağıdaki çizelgede görülmektedir.

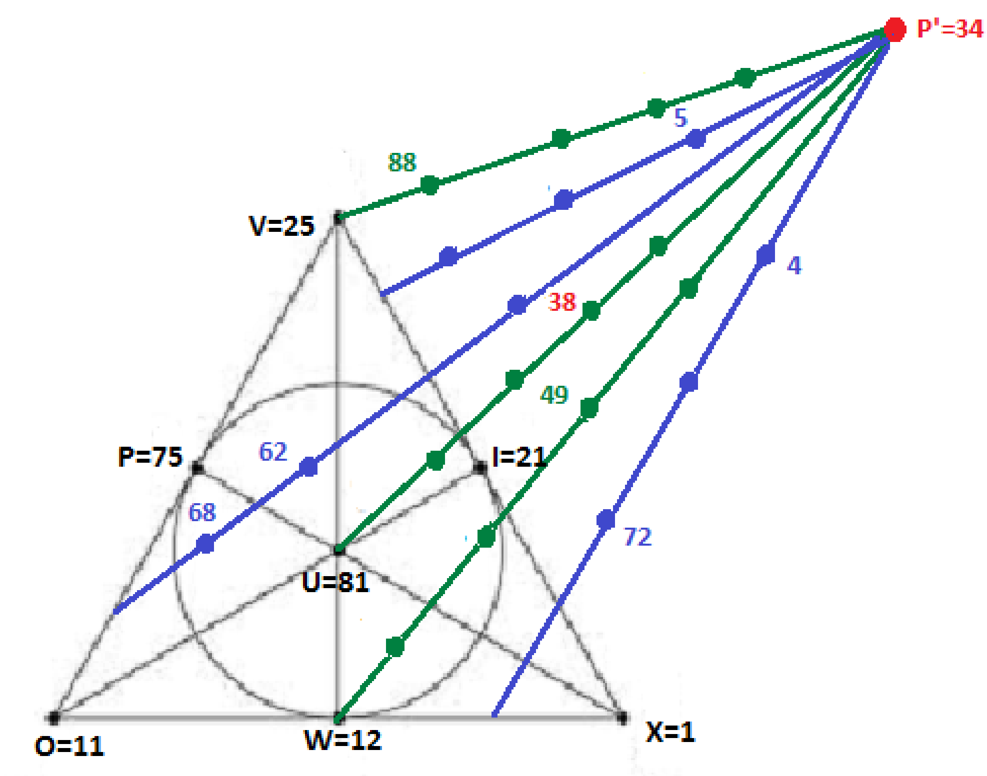
Çizelge 3.4. $P^{''} = 38$ den sonra kalan noktaların durumu

l_i					P_i					
1	2	11	20	29	38	47	56	65	74	83
2	1	11	12	13	14	15	16	17	18	19
3	4	11	22	30	44	55	63	68	79	87
4	3	11	21	31	41	51	61	71	81	91
5	5	11	23	35	40	52	64	66	78	90
6	6	11	24	37	45	49	59	70	80	84
7	7	11	25	36	42	53	58	73	75	86
8	8	11	26	32	39	54	60	67	82	88
9	9	11	27	34	46	50	57	69	76	89
10	10	11	28	33	43	48	62	72	77	85
11	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
12	2	13	22	31	40	49	58	67	76	85
13	2	12	21	30	39	48	57	66	75	84
14	2	14	23	32	41	50	59	68	77	86
15	2	15	24	33	42	51	60	69	78	87
16	2	16	25	34	43	52	61	70	79	88
17	2	17	26	35	44	53	62	71	80	89
18	2	18	27	36	45	54	63	72	81	90
19	2	19	28	37	46	55	64	73	82	91
20	1	29	30	31	32	33	34	35	36	37
21	4	13	21	29	46	54	62	70	78	86
22	3	12	22	29	42	52	59	72	82	89
23	5	14	26	29	43	55	58	69	81	84
24	6	15	28	29	40	50	63	71	75	88
25	7	16	27	29	44	49	60	66	77	91
26	8	17	23	29	45	51	57	73	79	85
27	9	18	25	29	41	48	64	67	80	87
28	10	19	24	29	39	53	61	68	76	90
29	1	20	21	22	23	24	25	26	27	28
30	3	13	20	30	43	50	60	73	80	90

31	4	12	20	31	45	53	64	69	77	88
32	8	14	20	35	42	48	63	70	76	91
33	10	15	20	37	44	52	57	67	81	86
34	9	16	20	36	39	55	59	71	78	85
35	5	17	20	32	46	49	61	72	75	87
36	7	18	20	34	40	51	62	68	82	84
37	6	19	20	33	41	54	58	66	79	89
38	1	38	39	40	41	42	43	44	45	46
39	8	13	28	34	38	53	59	66	81	87
40	5	12	24	36	38	50	62	67	79	91
41	4	14	25	33	38	49	57	71	82	90
42	9	15	22	35	38	54	61	73	77	84
43	6	16	26	30	38	51	64	72	76	86
44	3	17	27	37	38	48	58	68	78	88
45	10	18	23	31	38	55	60	70	75	89
46	7	19	21	32	38	52	63	69	80	85
47	1	47	48	49	50	51	52	53	54	55
48	10	13	27	32	42	47	64	71	79	84
49	6	12	25	35	46	47	60	68	81	85
50	7	14	28	30	45	47	61	67	78	89
51	4	15	23	34	39	47	58	72	80	91
52	8	16	22	37	41	47	62	69	75	90
53	9	17	24	31	43	47	63	66	82	86
54	5	18	21	33	44	47	59	73	76	88
55	3	19	26	36	40	47	57	70	77	87
56	1	56	57	58	59	60	61	62	63	64
57	9	13	26	33	45	52	56	68	75	91
58	7	12	23	37	43	54	56	71	76	87
59	10	14	22	36	46	51	56	66	80	88
60	5	15	27	30	41	53	56	70	82	85

61	4	16	24	32	40	48	56	73	81	89
62	6	17	21	34	42	55	56	67	77	90
63	3	18	28	35	39	49	56	69	79	86
64	8	19	25	31	44	50	56	72	78	84
65	1	65	66	67	68	69	70	71	72	73
66	5	13	25	37	39	51	63	65	77	89
67	8	12	27	33	40	55	61	65	80	86
68	3	14	24	34	44	54	64	65	75	85
69	7	15	26	31	46	48	59	65	79	90
70	10	16	21	35	45	50	58	65	82	87
71	4	17	28	36	41	52	60	65	76	84
72	6	18	22	32	43	53	57	65	78	91
73	9	19	23	30	42	49	62	65	81	88
74	1	74	75	76	77	78	79	80	81	82
75	7	13	24	35	41	55	57	72	74	88
76	9	12	28	32	44	51	58	70	74	90
77	6	14	27	31	39	52	62	73	74	87
78	8	15	21	36	43	49	64	68	74	89
79	3	16	23	33	46	53	63	67	74	84
80	10	17	25	30	40	54	59	69	74	91
81	4	18	26	37	42	50	61	66	74	85
82	5	19	22	34	45	48	60	71	74	86
83	1	83	84	85	86	87	88	89	90	91
84	6	13	23	36	44	48	61	69	82	83
85	10	12	26	34	41	49	63	73	78	83
86	9	14	21	37	40	53	60	72	79	83
87	3	15	25	32	45	55	62	66	76	83
88	5	16	28	31	42	54	57	68	80	83
89	7	17	22	33	39	50	64	70	81	83
90	8	18	24	30	46	52	58	71	77	83
91	4	19	27	35	43	51	59	67	75	83

Sonuç olarak



Şekil 3.5. $P^{''}=38$ arka dahil edikten sonra oluşan yapı

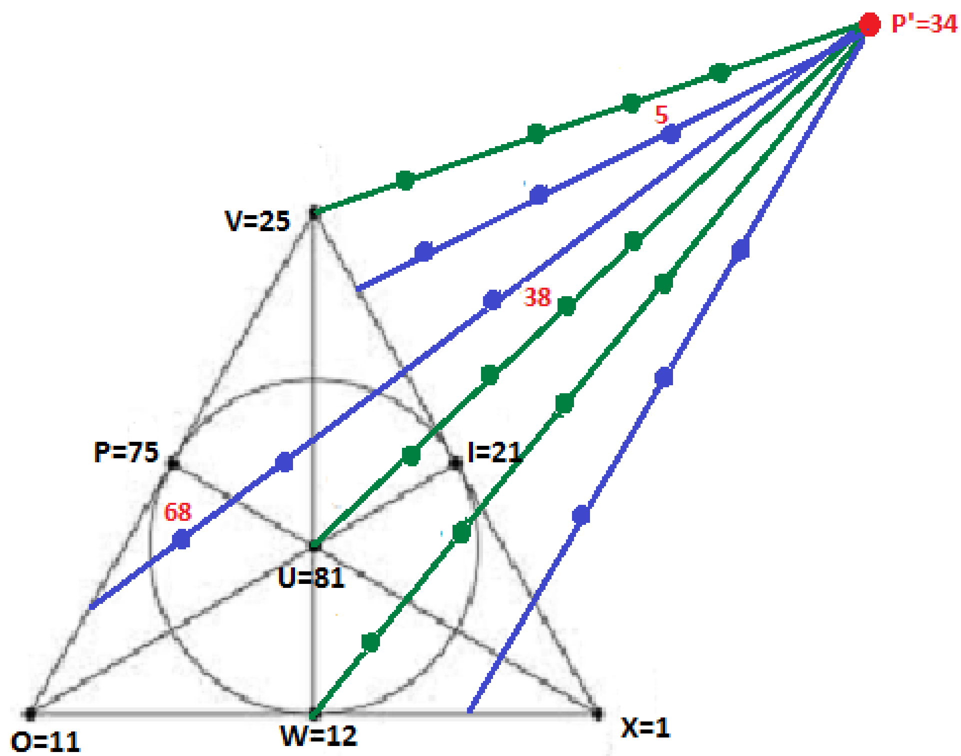
yapısı kalır. Kalan $S^{''}$ noktalar kümesinden 3.tip doğru üzerindeki üç ağırlıklı $P^{'''}=5$ noktası arka dahil edildiğinde 5 noktası ile $\left\{O, X, I, P, P^{'}, P^{''}\right\}$ kümesinin elemanları ile oluşan $1 \vee 5$ doğrusu üzerindeki $S^{''}$ ye ait 4 noktası, $21 \vee 5$ doğrusu üzerindeki 88 noktası, $75 \vee 5$ doğrusu üzerindeki $49, 72$ noktaları ve $38 \vee 5$ doğrusu üzerindeki 62 noktası $S^{''}$ den atılırsa geriye kalan noktalardan oluşan $S^{'''}=S^{''} \setminus \{4, 49, 62, 72, 88\} = \{68\}$ kümesi elde edilir. Sonuç olarak $S^{'''}$ e ait $P^{''''}$ olarak arka dahil edilebilecek bir tek 68 noktası kalır. Bu noktada arka dahil edildiğinde arka dahil edilebilecek başka nokta kalmaz ve $\{1, 11, 21, 75, 34, 38, 5, 68\}$ $(8,2)-$ tam ark elde edilir. Aşağıdaki Çizelge 3.5. ve Şekil 3.6.bulunan $(8,2)-$ ark sonucunda oluşan üzerinde bulunma yapısını göstermektedir.

Çizelge 3.5. (8,2)-ark üzerinde bulunma yapısı

l_i					p_i					
1	2	11	20	29	38	47	56	65	74	83
2	1	11	12	13	14	15	16	17	18	19
3	4	11	22	30	44	55	63	68	79	87
4	3	11	21	31	41	51	61	71	81	91
5	5	11	23	35	40	52	64	66	78	90
6	6	11	24	37	45	49	59	70	80	84
7	7	11	25	36	42	53	58	73	75	86
8	8	11	26	32	39	54	60	67	82	88
9	9	11	27	34	46	50	57	69	76	89
10	10	11	28	33	43	48	62	72	77	85
11	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
12	2	13	22	31	40	49	58	67	76	85
13	2	12	21	30	39	48	57	66	75	84
14	2	14	23	32	41	50	59	68	77	86
15	2	15	24	33	42	51	60	69	78	87
16	2	16	25	34	43	52	61	70	79	88
17	2	17	26	35	44	53	62	71	80	89
18	2	18	27	36	45	54	63	72	81	90
19	2	19	28	37	46	55	64	73	82	91
20	1	29	30	31	32	33	34	35	36	37
21	4	13	21	29	46	54	62	70	78	86
22	3	12	22	29	42	52	59	72	82	89
23	5	14	26	29	43	55	58	69	81	84
24	6	15	28	29	40	50	63	71	75	88
25	7	16	27	29	44	49	60	66	77	91
26	8	17	23	29	45	51	57	73	79	85
27	9	18	25	29	41	48	64	67	80	87
28	10	19	24	29	39	53	61	68	76	90
29	1	20	21	22	23	24	25	26	27	28
30	3	13	20	30	43	50	60	73	80	90

31	4	12	20	31	45	53	64	69	77	88
32	8	14	20	35	42	48	63	70	76	91
33	10	15	20	37	44	52	57	67	81	86
34	9	16	20	36	39	55	59	71	78	85
35	5	17	20	32	46	49	61	72	75	87
36	7	18	20	34	40	51	62	68	82	84
37	6	19	20	33	41	54	58	66	79	89
38	1	38	39	40	41	42	43	44	45	46
39	8	13	28	34	38	53	59	66	81	87
40	5	12	24	36	38	50	62	67	79	91
41	4	14	25	33	38	49	57	71	82	90
42	9	15	22	35	38	54	61	73	77	84
43	6	16	26	30	38	51	64	72	76	86
44	3	17	27	37	38	48	58	68	78	88
45	10	18	23	31	38	55	60	70	75	89
46	7	19	21	32	38	52	63	69	80	85
47	1	47	48	49	50	51	52	53	54	55
48	10	13	27	32	42	47	64	71	79	84
49	6	12	25	35	46	47	60	68	81	85
50	7	14	28	30	45	47	61	67	78	89
51	4	15	23	34	39	47	58	72	80	91
52	8	16	22	37	41	47	62	69	75	90
53	9	17	24	31	43	47	63	66	82	86
54	5	18	21	33	44	47	59	73	76	88
55	3	19	26	36	40	47	57	70	77	87
56	1	56	57	58	59	60	61	62	63	64
57	9	13	26	33	45	52	56	68	75	91
58	7	12	23	37	43	54	56	71	76	87
59	10	14	22	36	46	51	56	66	80	88
60	5	15	27	30	41	53	56	70	82	85

61	4	16	24	32	40	48	56	73	81	89
62	6	17	21	34	42	55	56	67	77	90
63	3	18	28	35	39	49	56	69	79	86
64	8	19	25	31	44	50	56	72	78	84
65	1	65	66	67	68	69	70	71	72	73
66	5	13	25	37	39	51	63	65	77	89
67	8	12	27	33	40	55	61	65	80	86
68	3	14	24	34	44	54	64	65	75	85
69	7	15	26	31	46	48	59	65	79	90
70	10	16	21	35	45	50	58	65	82	87
71	4	17	28	36	41	52	60	65	76	84
72	6	18	22	32	43	53	57	65	78	91
73	9	19	23	30	42	49	62	65	81	88
74	1	74	75	76	77	78	79	80	81	82
75	7	13	24	35	41	55	57	72	74	88
76	9	12	28	32	44	51	58	70	74	90
77	6	14	27	31	39	52	62	73	74	87
78	8	15	21	36	43	49	64	68	74	89
79	3	16	23	33	46	53	63	67	74	84
80	10	17	25	30	40	54	59	69	74	91
81	4	18	26	37	42	50	61	66	74	85
82	5	19	22	34	45	48	60	71	74	86
83	1	83	84	85	86	87	88	89	90	91
84	6	13	23	36	44	48	61	69	82	83
85	10	12	26	34	41	49	63	73	78	83
86	9	14	21	37	40	53	60	72	79	83
87	3	15	25	32	45	55	62	66	76	83
88	5	16	28	31	42	54	57	68	80	83
89	7	17	22	33	39	50	64	70	81	83
90	8	18	24	30	46	52	58	71	77	83
91	4	19	27	35	43	51	59	67	75	83



Şekil 3.6. Elde edilen (8,2)-ark

Elde edilen $(8,2)-$ arklar :

$\gamma_1 = \{1, 11, 21, 75, 34, 38, 5, 68\}$

$\gamma_2 = \{1, 11, 21, 75, 34, 10, 59, 68\}$

$\gamma_3 = \{1, 11, 21, 75, 34, 10, 52, 59\}$

$\gamma_4 = \{1, 11, 21, 75, 34, 10, 40, 47\}$

$\gamma_5 = \{1, 11, 21, 75, 34, 10, 47, 68\}$

$\gamma_6 = \{1, 11, 21, 75, 34, 10, 68, 88\}$

$\gamma_7 = \{1, 11, 21, 75, 34, 5, 62, 83\}$

$\gamma_8 = \{1, 11, 21, 75, 34, 5, 70, 63\}$

$\gamma_9 = \{1, 11, 21, 75, 34, 5, 43, 63\}$

$\gamma_{10} = \{1, 11, 21, 75, 34, 5, 83, 70\}$

$\gamma_{11} = \{1, 11, 21, 75, 34, 52, 60, 87\}$

$\gamma_{12} = \{1, 11, 21, 75, 34, 52, 62, 83\}$

$\gamma_{13} = \{1, 11, 21, 75, 34, 52, 72, 8\}$

$\gamma_{14} = \{1, 11, 21, 75, 34, 45, 62, 88\}$

$\gamma_{15} = \{1, 11, 21, 75, 34, 45, 47, 63\}$

$\gamma_{16} = \{1, 11, 21, 75, 34, 45, 72, 8\}$

$\gamma_{17} = \{1, 11, 21, 75, 34, 45, 88, 72\}$

$\gamma_{18} = \{1, 11, 21, 75, 34, 45, 63, 8\}$

$\gamma_{19} = \{1, 11, 21, 75, 34, 45, 83, 8\}$

$\gamma_{20} = \{1, 11, 21, 75, 34, 45, 63, 4\}$

$\gamma_{21} = \{1, 11, 21, 75, 34, 47, 70, 63\}$

$\gamma_{22} = \{1, 11, 21, 75, 34, 60, 4, 49\}$

$\gamma_{23} = \{1, 11, 21, 75, 34, 40, 4, 49\}$

$\gamma_{24} = \{1, 11, 21, 75, 34, 40, 70, 8\}$

$\gamma_{25} = \{1, 11, 21, 75, 34, 62, 88, 38\}$

$\gamma_{26} = \{1, 11, 21, 75, 34, 62, 49, 38\}$

$\gamma_{27} = \{1, 11, 21, 75, 34, 4, 88, 38\}$

$\gamma_{28} = \{1, 11, 21, 75, 34, 4, 49, 88\}$

$\gamma_{29} = \{1, 11, 21, 75, 34, 72, 88, 38\}$

$\gamma_{30} = \{1, 11, 21, 75, 34, 72, 63, 8\}$

$\gamma_{31} = \{1, 11, 21, 75, 34, 88, 49, 38\}$

$\gamma_{32} = \{1, 11, 21, 75, 34, 70, 83, 8\}$

3.3. $(9, 2)$- ark'ın Elde Edilmesi:

$P' = 34$ noktasından sonra arka dahil edebilecek 21 nokta içerisinden 2.tip doğru üzerindeki dört ağırlıklı olan $P'' = 87$ noktası arka dahil edildiğinde 87 noktası ile $\{O, X, I, P, P'\}$ kümesinin elemanları ile oluşan $1 \vee 87$ doğrusu üzerindeki S' ye ait 83,88 noktalarını P''' olarak seçemeyiz. Benzer biçimde $11 \vee 87$ doğrusu üzerindeki 4,63,68 noktaları, $21 \vee 87$ doğrusu üzerindeki 10,45 noktaları, $75 \vee 87$ doğrusu üzerindeki $5, 49, 72$ noktaları ve $34 \vee 87$ doğrusu üzerindeki $8, 38, 59$ noktaları S' den atılırsa arka ilave edilecek P''' noktası

$$S'' = S' \setminus \{4, 5, 8, 10, 38, 45, 49, 59, 63, 68, 72, 83, 88\} = \{40, 43, 47, 52, 60, 62, 70\}$$

kümesinden seçilmelidir.

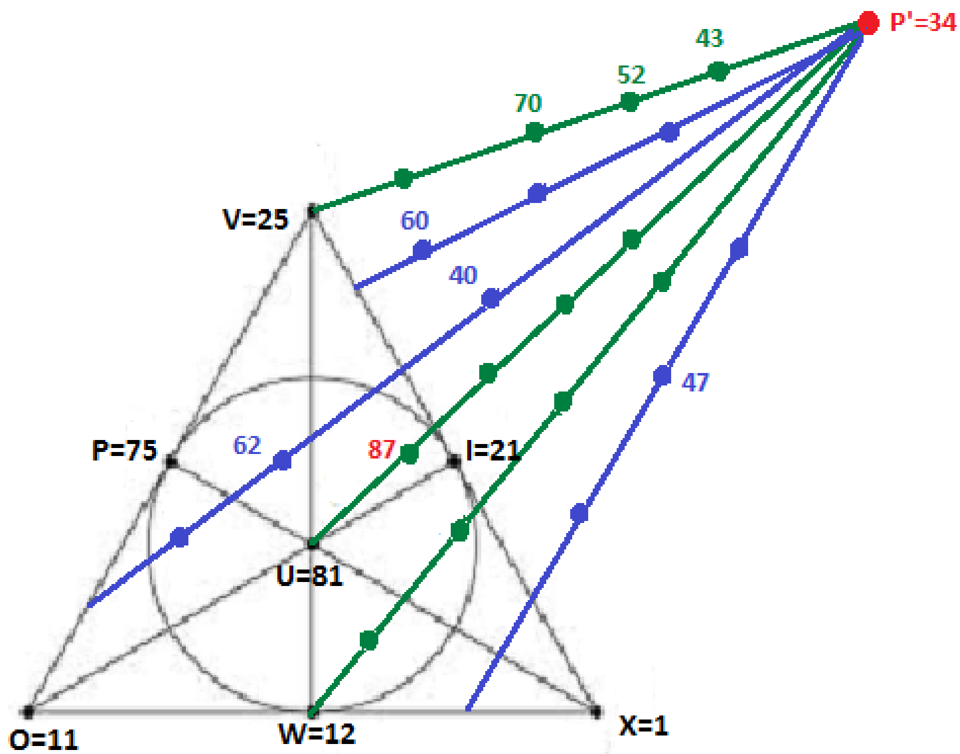
Üzerinde bulunma yapısına göre kalan noktaların durumu aşağıdaki çizelgede görülmektedir.

Çizelge 3.6. $P'' = 87$ den sonra kalan noktaların durumu

l_i					P_i					
1	2	11	20	29	38	47	56	65	74	83
2	1	11	12	13	14	15	16	17	18	19
3	4	11	22	30	44	55	63	68	79	87
4	3	11	21	31	41	51	61	71	81	91
5	5	11	23	35	40	52	64	66	78	90
6	6	11	24	37	45	49	59	70	80	84
7	7	11	25	36	42	53	58	73	75	86
8	8	11	26	32	39	54	60	67	82	88
9	9	11	27	34	46	50	57	69	76	89
10	10	11	28	33	43	48	62	72	77	85
11	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
12	2	13	22	31	40	49	58	67	76	85
13	2	12	21	30	39	48	57	66	75	84
14	2	14	23	32	41	50	59	68	77	86
15	2	15	24	33	42	51	60	69	78	87
16	2	16	25	34	43	52	61	70	79	88
17	2	17	26	35	44	53	62	71	80	89
18	2	18	27	36	45	54	63	72	81	90
19	2	19	28	37	46	55	64	73	82	91
20	1	29	30	31	32	33	34	35	36	37
21	4	13	21	29	46	54	62	70	78	86
22	3	12	22	29	42	52	59	72	82	89
23	5	14	26	29	43	55	58	69	81	84
24	6	15	28	29	40	50	63	71	75	88
25	7	16	27	29	44	49	60	66	77	91
26	8	17	23	29	45	51	57	73	79	85
27	9	18	25	29	41	48	64	67	80	87
28	10	19	24	29	39	53	61	68	76	90
29	1	20	21	22	23	24	25	26	27	28
30	3	13	20	30	43	50	60	73	80	90

31	4	12	20	31	45	53	64	69	77	88
32	8	14	20	35	42	48	63	70	76	91
33	10	15	20	37	44	52	57	67	81	86
34	9	16	20	36	39	55	59	71	78	85
35	5	17	20	32	46	49	61	72	75	87
36	7	18	20	34	40	51	62	68	82	84
37	6	19	20	33	41	54	58	66	79	89
38	1	38	39	40	41	42	43	44	45	46
39	8	13	28	34	38	53	59	66	81	87
40	5	12	24	36	38	50	62	67	79	91
41	4	14	25	33	38	49	57	71	82	90
42	9	15	22	35	38	54	61	73	77	84
43	6	16	26	30	38	51	64	72	76	86
44	3	17	27	37	38	48	58	68	78	88
45	10	18	23	31	38	55	60	70	75	89
46	7	19	21	32	38	52	63	69	80	85
47	1	47	48	49	50	51	52	53	54	55
48	10	13	27	32	42	47	64	71	79	84
49	6	12	25	35	46	47	60	68	81	85
50	7	14	28	30	45	47	61	67	78	89
51	4	15	23	34	39	47	58	72	80	91
52	8	16	22	37	41	47	62	69	75	90
53	9	17	24	31	43	47	63	66	82	86
54	5	18	21	33	44	47	59	73	76	88
55	3	19	26	36	40	47	57	70	77	87
56	1	56	57	58	59	60	61	62	63	64
57	9	13	26	33	45	52	56	68	75	91
58	7	12	23	37	43	54	56	71	76	87
59	10	14	22	36	46	51	56	66	80	88
60	5	15	27	30	41	53	56	70	82	85
61	4	16	24	32	40	48	56	73	81	89
62	6	17	21	34	42	55	56	67	77	90
63	3	18	28	35	39	49	56	69	79	86
64	8	19	25	31	44	50	56	72	78	84
65	1	65	66	67	68	69	70	71	72	73
66	5	13	25	37	39	51	63	65	77	89
67	8	12	27	33	40	55	61	65	80	86
68	3	14	24	34	44	54	64	65	75	85
69	7	15	26	31	46	48	59	65	79	90
70	10	16	21	35	45	50	58	65	82	87
71	4	17	28	36	41	52	60	65	76	84
72	6	18	22	32	43	53	57	65	78	91
73	9	19	23	30	42	49	62	65	81	88
74	1	74	75	76	77	78	79	80	81	82
75	7	13	24	35	41	55	57	72	74	88
76	9	12	28	32	44	51	58	70	74	90
77	6	14	27	31	39	52	62	73	74	87
78	8	15	21	36	43	49	64	68	74	89
79	3	16	23	33	46	53	63	67	74	84
80	10	17	25	30	40	54	59	69	74	91
81	4	18	26	37	42	50	61	66	74	85
82	5	19	22	34	45	48	60	71	74	86
83	1	83	84	85	86	87	88	89	90	91
84	6	13	23	36	44	48	61	69	82	83
85	10	12	26	34	41	49	63	73	78	83
86	9	14	21	37	40	53	60	72	79	83
87	3	15	25	32	45	55	62	66	76	83
88	5	16	28	31	42	54	57	68	80	83
89	7	17	22	33	39	50	64	70	81	83
90	8	18	24	30	46	52	58	71	77	83
91	4	19	27	35	43	51	59	67	75	83

Sonuç olarak



Şekil 3.7. $P'' = 87$ arka dahil edildikten sonra oluşan yapı

yapısı kalır. Kalan S'' noktalar kümesinden 3.tip doğru üzerindeki iki ağırlıklı $P''' = 47$ noktası arka dahil edildiğinde 47 noktası ile $\{O, X, I, P, P', P''\}$ kümesinin elemanları ile oluşan $1 \vee 47$ doğrusu üzerindeki S'' ye ait 52 noktası, $47 \vee 75$ doğrusu üzerindeki 62 noktası ve $47 \vee 87$ doğrusu üzerindeki $40, 70$ noktaları S'' den atılırsa geriye kalan noktalardan oluşan $S''' = S'' \setminus \{40, 52, 62, 70\}$ $=\{43, 60\}$ kümesi elde edilir. Kalan S''' kümesinden P'''' ve P''''' noktaları olarak 43 ve 63 noktaları arka dahil edilir.

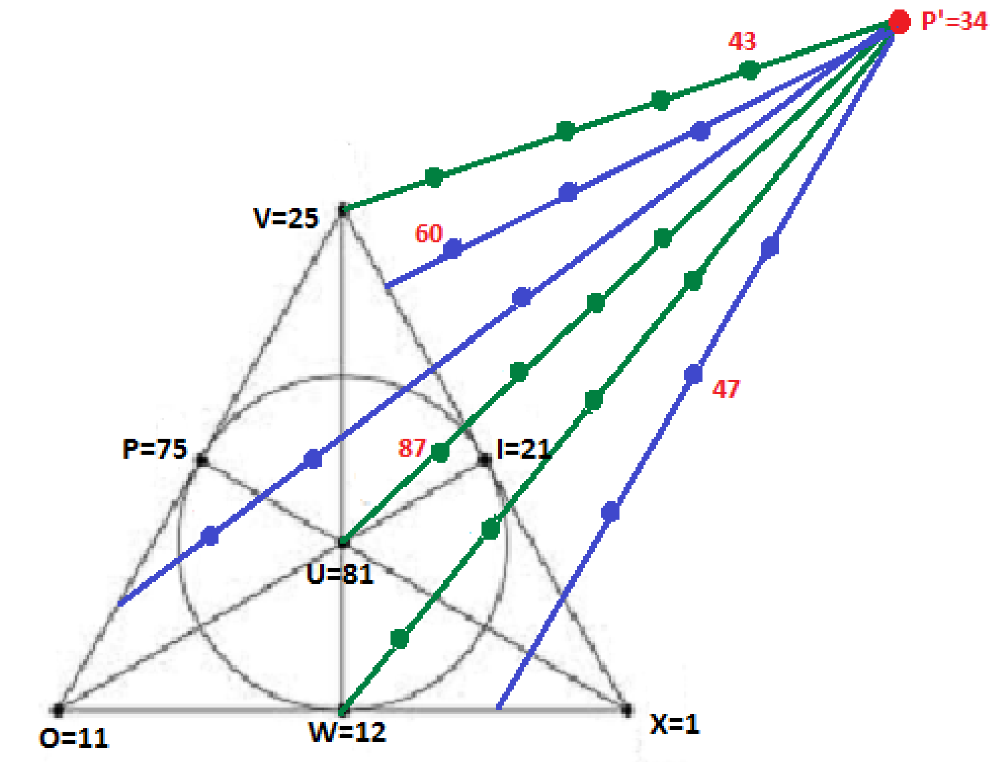
Çizelge 3.7. (9,2)-ark üzerinde bulunma yapısı

l_i					p_i					
1	2	11	20	29	38	47	56	65	74	83
2	1	11	12	13	14	15	16	17	18	19
3	4	11	22	30	44	55	63	68	79	87
4	3	11	21	31	41	51	61	71	81	91
5	5	11	23	35	40	52	64	66	78	90
6	6	11	24	37	45	49	59	70	80	84
7	7	11	25	36	42	53	58	73	75	86
8	8	11	26	32	39	54	60	67	82	88
9	9	11	27	34	46	50	57	69	76	89
10	10	11	28	33	43	48	62	72	77	85
11	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
12	2	13	22	31	40	49	58	67	76	85
13	2	12	21	30	39	48	57	66	75	84
14	2	14	23	32	41	50	59	68	77	86
15	2	15	24	33	42	51	60	69	78	87
16	2	16	25	34	43	52	61	70	79	88
17	2	17	26	35	44	53	62	71	80	89
18	2	18	27	36	45	54	63	72	81	90
19	2	19	28	37	46	55	64	73	82	91
20	1	29	30	31	32	33	34	35	36	37
21	4	13	21	29	46	54	62	70	78	86
22	3	12	22	29	42	52	59	72	82	89
23	5	14	26	29	43	55	58	69	81	84
24	6	15	28	29	40	50	63	71	75	88
25	7	16	27	29	44	49	60	66	77	91
26	8	17	23	29	45	51	57	73	79	85
27	9	18	25	29	41	48	64	67	80	87
28	10	19	24	29	39	53	61	68	76	90
29	1	20	21	22	23	24	25	26	27	28
30	3	13	20	30	43	50	60	73	80	90

31	4	12	20	31	45	53	64	69	77	88
32	8	14	20	35	42	48	63	70	76	91
33	10	15	20	37	44	52	57	67	81	86
34	9	16	20	36	39	55	59	71	78	85
35	5	17	20	32	46	49	61	72	75	87
36	7	18	20	34	40	51	62	68	82	84
37	6	19	20	33	41	54	58	66	79	89
38	1	38	39	40	41	42	43	44	45	46
39	8	13	28	34	38	53	59	66	81	87
40	5	12	24	36	38	50	62	67	79	91
41	4	14	25	33	38	49	57	71	82	90
42	9	15	22	35	38	54	61	73	77	84
43	6	16	26	30	38	51	64	72	76	86
44	3	17	27	37	38	48	58	68	78	88
45	10	18	23	31	38	55	60	70	75	89
46	7	19	21	32	38	52	63	69	80	85
47	1	47	48	49	50	51	52	53	54	55
48	10	13	27	32	42	47	64	71	79	84
49	6	12	25	35	46	47	60	68	81	85
50	7	14	28	30	45	47	61	67	78	89
51	4	15	23	34	39	47	58	72	80	91
52	8	16	22	37	41	47	62	69	75	90
53	9	17	24	31	43	47	63	66	82	86
54	5	18	21	33	44	47	59	73	76	88
55	3	19	26	36	40	47	57	70	77	87
56	1	56	57	58	59	60	61	62	63	64
57	9	13	26	33	45	52	56	68	75	91
58	7	12	23	37	43	54	56	71	76	87
59	10	14	22	36	46	51	56	66	80	88
60	5	15	27	30	41	53	56	70	82	85

61	4	16	24	32	40	48	56	73	81	89
62	6	17	21	34	42	55	56	67	77	90
63	3	18	28	35	39	49	56	69	79	86
64	8	19	25	31	44	50	56	72	78	84
65	1	65	66	67	68	69	70	71	72	73
66	5	13	25	37	39	51	63	65	77	89
67	8	12	27	33	40	55	61	65	80	86
68	3	14	24	34	44	54	64	65	75	85
69	7	15	26	31	46	48	59	65	79	90
70	10	16	21	35	45	50	58	65	82	87
71	4	17	28	36	41	52	60	65	76	84
72	6	18	22	32	43	53	57	65	78	91
73	9	19	23	30	42	49	62	65	81	88
74	1	74	75	76	77	78	79	80	81	82
75	7	13	24	35	41	55	57	72	74	88
76	9	12	28	32	44	51	58	70	74	90
77	6	14	27	31	39	52	62	73	74	87
78	8	15	21	36	43	49	64	68	74	89
79	3	16	23	33	46	53	63	67	74	84
80	10	17	25	30	40	54	59	69	74	91
81	4	18	26	37	42	50	61	66	74	85
82	5	19	22	34	45	48	60	71	74	86
83	1	83	84	85	86	87	88	89	90	91
84	6	13	23	36	44	48	61	69	82	83
85	10	12	26	34	41	49	63	73	78	83
86	9	14	21	37	40	53	60	72	79	83
87	3	15	25	32	45	55	62	66	76	83
88	5	16	28	31	42	54	57	68	80	83
89	7	17	22	33	39	50	64	70	81	83
90	8	18	24	30	46	52	58	71	77	83
91	4	19	27	35	43	51	59	67	75	83

Sonuç olarak başka nokta kalmaz ve



Şekil 3.8. Elde edilen (9,2)-ark

$\{1, 11, 21, 75, 34, 87, 47, 43, 60\}$ olmak üzere sadece bir tek $(9, 2)$- tam ark elde edilir.

4. SONUÇ

Bu çalışmada, Sol Yaklaşık Cisim üzerinde ikinci mertebeden bir indirgenemez polinom seçilerek 9. mertebeden bir projektif düzlem elde edildi ve bu düzlemin homogen koordinatlarda tüm doğruları, bu doğrular üzerindeki noktaları ve üzerinde bulunma yapısı verildi. O, I, X, P noktalarını içeren Fano düzlemleri homogen koordinatlarda verildi.

Fano düzlemi oluşturan dörtgenlerden özel bir tanesi seçilerek bu dörtgenin köşe noktalarını kapsayan tam arkların bulunması için bir algoritma verildi ve bu algoritma yardımıyla elde edilen arklar sınıflandırıldı.

Sonuç olarak $O,\ I,\ X,\ P$ ve P' seçiminden sonra 9 tane $(7,2)-$ark, 32 tane $(8,2)-$ark ve 1 tane $(9,2)-$ark bulunmuştur.

Anahtar Kelimeler: Projektif düzlem, Sol yaklaşık cisim, Arklar

KAYNAKLAR DİZİNİ

Çallıalp, F., 2011, Örneklerle soyut cebir, Birsen Yayınevi, 337 s.

Hirschfeld J. W. P., "projective geometries over finite fields", Second Edition, Clarendon Press, Oxford, 1998.

Hughes,D.R., Piper, F.C., 1973, Projective Planes, Springer-Verlag, New York Inc. 196-201.

Hoadley P.A. , 2003, Maximal Arcs in Finite Field Planes, The University of Adelaide, 13-23 p.

Karakaş, H. İbrahim, 1998, Soyut Cebire Giriş, Matemaik Vakfı Yayınları, 1-6, 140-143 s.

Kaya R., 2005, Projektif Geometri, Osmangazi Üniversitesi Yayınları,104-330.

Kujken, L., Maldeghem, H.V. , Kerre, E., 1999, Fuzzy projektive geometries from Fuzzy groups, Tatra Mountains Mathematical Publication, 16, 95-108.

Maes T., 2011, A Geometric Approach to Mathon Maximal Arcs, Universiteit Gent, 11-12 p.

Marshall D., 2010, Conics, Unitals and Net Replacement, The University of Adelaide 13-21 p.

Rey Casse, 2006, Projective Geometry, Oxford University, 138-143 p.

Room, T.G., Kirkpatrick, P.B., 1971,Miniquaternion Geometry, London Cambridge University Press, 177.

Stevensen, F.W., 1992, Projective Planes, W.H Freeman and Company, San Fransisco, 416.

Taş, M., 2015, Sol Hall Sisteminin Fano Konfigürasyonları Üzerine 64 s.