

**İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**İNCE CİDARLI SİLİNDİRİK KOMPOZİT YAPILARIN YANAL BASINÇ  
ALTINDA BURKULMA DAVRANIŞLARININ ANALİTİK VE SONLU  
ELEMEN YÖNTEMLERİYLE İNCELENMESİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Murat Emre ÖZTÜRK**

**Makina Mühendisliği Anabilim Dalı**

**Katı Cisimlerin Mekanik Programı**

**TEMMUZ 2015**



**İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**İNCE CİDARLI SİLİNDİRİK KOMPOZİT YAPILARIN YANAL BASINÇ  
ALTINDA BURKULMA DAVRANIŞLARININ ANALİTİK VE SONLU  
ELEMEN YÖNTEMLERİYLE İNCELENMESİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Murat Emre ÖZTÜRK  
(503111507)**

**Makina Mühendisliği Anabilim Dalı**

**Katı Cisimlerin Mekaniği Programı**

**Tez Danışmanı: Prof. Dr. Ekrem TÜFEKÇİ**

**TEMMUZ 2015**







İTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 503111507 numaralı Yüksek Lisans Öğrencisi **Murat Emre ÖZTÜRK**, ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı “**İNCE CİDARLI SİLİNDİRİK KOMPOZİT YAPILARIN YANAL BASIÇ ALTINDA BURKULMA DAVRANIŞLARININ ANALİTİK VE SONLU ELEMEN YÖNTEMLERİYLE İNCELENMESİ**” başlıklı tezini aşağıda imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

**Tez Danışmanı :**      **Prof. Dr. Ekrem TÜFEKÇİ**      .....

İstanbul Teknik Üniversitesi

**Jüri Üyeleri :**      **Prof. Dr. Ekrem TÜFEKÇİ**      .....

İstanbul Teknik Üniversitesi

**Yrd. Doç. Dr. Oğuz ALTAY**      .....

İstanbul Teknik Üniversitesi

**Yrd. Doç. Dr. Şule KAPKIN**      .....

İstanbul Üniversitesi

**Teslim Tarihi :**      **24 Temmuz 2015**

**Savunma Tarihi :**      **30 Temmuz 2015**



*Aileme ,*



## **ÖNSÖZ**

Bu çalışmada bana yol gösteren İstanbul Teknik Üniversitesi Makine Fakültesi hocalarımıza, danışmanım Prof. Dr. Ekrem TÜFEKÇİ'ye ve Yrd. Doç. Dr. Ahmad Partovi MERAN'a teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim. Deney çalışması için destek veren Türk Hava Yolları Teknik Birimi'ne ve makale çalışması için katkıda bulunan Repkon Makine ve Kalıp Sanayi ve Ticaret A.Ş.'e teşekkür ederim.

Temmuz 2015

Murat Emre ÖZTÜRK  
Makina Mühendisi



## İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
<b>ÖNSÖZ</b> .....	vii
<b>İÇİNDEKİLER</b> .....	ix
<b>KISALTMALAR</b> .....	xiii
<b>ÇİZELGE LİSTESİ</b> .....	xv
<b>ŞEKİL LİSTESİ</b> .....	xvii
<b>ÖZET</b> .....	xix
<b>SUMMARY</b> .....	xxiii
<b>1. GİRİŞ</b> .....	<b>1</b>
1.1. Tezin Amacı .....	1
1.2. Literatür Araştırması .....	2
<b>2. KOMPOZİT MALZEMELER TEORİSİ</b> .....	<b>7</b>
2.1. Kompozit Malzemeler.....	7
2.1.1. Kompozit Malzemelerin Avantajları.....	7
2.1.2. Kompozit Malzemelerin Dezavantajları .....	8
2.2. Lamina ve Lamine.....	8
2.2.1. Kompozit malzemelerde lamina düzeni.....	11
2.3. Genelleştirilmiş Hooke Yasası .....	14
2.4. Farklı Tür Malzemeler İçin Hooke Yasası.....	15
2.4.1. Anizotropik Malzeme.....	15
2.4.2. Monoklinik malzeme .....	15
2.4.3. Ortotropik Malzeme .....	17
2.4.4. Enine İzotropik Malzeme .....	19
2.4.5. İzotropik Malzeme .....	19
2.4.6. Özet .....	21
2.5. Ortotropik Malzeme İçin Rijitlik Matrisinin Mühendislik Katsayıları İle Yazılması .....	21
2.5.1. Temel Denklemler.....	21
2.5.2. Rijitlik ve Esneklik Matrisinin Mühendislik Katsayıları İle Gösterimi .....	22
2.6. İki Boyutlu Tek Doğrultulu Lamina İçin Hooke Yasası.....	31
2.6.1. Düzlemsel gerilme yaklaşımı .....	31
2.6.2. Hooke Yasası'nın iki boyut için yazılması .....	32
2.6.3. İki boyutlu açılı lamina için Hooke Yasası .....	32
<b>3. AÇILI LAMİNALARDA HASAR TEORİLERİ</b> .....	<b>37</b>
3.1. Emniyet Katsayısı .....	37
3.2. Maksimum Gerilme Hasar Teorisi.....	38
3.3. Maksimum Şekil Değiştirme Hasar Teorisi.....	38
3.4. Tsai – Hill Hasar Teorisi .....	39
3.5. Düzenlenmiş Tsai – Hill Hasar Teorisi .....	40
<b>4. KOMPOZİT KABUK YAPILARIN BURKULMASI</b> .....	<b>43</b>
4.1. Kabuk Yapı .....	43
4.2. Kompozit Silindirik Kabukların Analizi .....	43

4.2.1.	Genel denklemler .....	43
4.2.2.	Eksenel simetri .....	46
4.3.	Sınır Yükleri ve Kısmi Çözümleri .....	49
4.3.1.	$x=0$ 'da <b>M0</b> gerilme çiftine maruz yarı sonlu boyuttaki silindirik kabuk .....	49
4.3.2.	$x=0$ 'da <b>Q0</b> enine kayma kuvvetine maruz yarı sonlu boyuttaki silindirik kabuk.....	50
4.3.3.	$x=L$ 'de enine kayma kuvveti ve kenar momentine maruz yarı sonlu boyuttaki silindirik kabuk .....	51
4.3.4.	Genelleştirme .....	52
4.3.5.	Kısmi Çözümler .....	52
4.3.6.	Sınır tabaka eğilmesini içeren en iyi çözüm formu.....	52
4.4.	Eksenel Simetrik Yük Altındaki Kompozit Silindirik Kabuklar İçin Genel Çözüm .....	54
4.5.	Orta Düzlemde Asimetrik Silindirik Kabuk Yapılar.....	55
4.5.1.	Diferansiyel denklemlerin elde edilmesi.....	55
4.5.2.	Pertürbasyon çözümü .....	57
4.5.3.	Orta düzlemde asimetrik kabuklar için sınır tabaka eğilmesi ve kenar yükleri çözümü.....	58
4.6.	Kabuk Yapıların Burkulması .....	58
4.7.	Silindirik Kompozit Kabuk Yapıların Yanal Basınç Altında Burkulması .....	59
4.8.	Kabuk Yapıların Burkulması (2. Teori) .....	61
4.8.1.	Silindirlerin burkulması.....	65
<b>5.</b>	<b>ANALİTİK ÇÖZÜM VE OPTİMİZASYON ÇALIŞMASI .....</b>	<b>67</b>
5.1.	MATLAB .....	67
5.2.	İnce Cidarlı Silindirik Yapılarda Burkulma Optimizasyonu.....	67
5.2.1.	Matlab çözümü .....	68
<b>6.</b>	<b>SONLU ELEMANLAR METODU .....</b>	<b>73</b>
6.1.	ABAQUS Analiz Programı .....	73
6.2.	Problemin Tanımı.....	73
6.3.	Sonlu Eleman Yöntemi Aşamaları .....	73
6.3.1.	İnce cidarlı silindirik yapının modellenmesi .....	73
6.3.2.	Kompozit malzeme modellenmesi .....	74
6.3.3.	Sınır şartları ve yüklerin verilmesi .....	76
6.3.4.	Sonlu eleman yapısının oluşturulması.....	78
6.3.5.	Sonucun elde edilmesi.....	79
6.3.6.	Sonlu elemanların büyüklüklerinin sonuca etkisi .....	80
<b>7.</b>	<b>ANALİTİK VE SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ SONUÇLARI..</b>	<b>81</b>
7.1.	D/L ve kalınlık sabit iken hacimsel değişimin kritik burkulma basıncı ve optimum tabaka açlarına etkisi .....	81
7.2.	Boy değişiminin kritik burkulma basıncına etkisi.....	82
7.2.1.	Analitik çözümden elde edilen sonuçlar .....	82
7.2.2.	Sonlu eleman çözümünden elde edilen sonuçlar.....	83
7.3.	Çap değişiminin kritik burkulma basıncına etkisi .....	84
7.3.1.	Analitik çözümden elde edilen sonuçlar .....	84
7.3.2.	Sonlu eleman çözümünden elde edilen sonuçlar.....	85
7.4.	Tabaka kalınlık değişiminin kritik burkulma basıncına etkisi .....	86
7.4.1.	Analitik çözümden elde edilen sonuçlar .....	86
7.4.2.	Sonlu eleman çözümünden elde edilen sonuçlar.....	87
7.5.	Malzeme değişiminin kritik burkulma basıncına etkisi .....	88

7.5.1.	Analitik çözümden elde edilen sonuçlar .....	88
7.5.2.	Sonlu eleman çözümünden elde edilen sonuçlar .....	89
7.6.	Tabaka aç ı değişiminin kritik burkulma basıncına etkisi.....	90
<b>8.</b>	<b>SONUÇ VE ÖNERİLER.....</b>	<b>91</b>
	<b>KAYNAKLAR .....</b>	<b>93</b>
	<b>EKLER.....</b>	<b>97</b>
	<b>ÖZGEÇMİŞ.....</b>	<b>109</b>



## **KISALTMALAR**

<b>ASME</b>	: American Society of Mechanical Engineers
<b>CFRP</b>	: Carbon fiber reinforced polymer (karbon epoksi kompozit malzeme)
<b>GFRP</b>	: Glass fiber reinforced polymer (cam epoksi kompozit malzeme)
<b>SI</b>	: System International



## ÇİZELGE LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Çizelge 2.1 : Bazı metal ve kompozit malzemelerin özellikleri .....	8
Çizelge 6.1 : Karbon Epoksi kompozit malzeme özellikleri.....	75
Çizelge 6.2 : Özdeğerlerin girilmesi .....	79
Çizelge 6.3 : Sonlu eleman büyüklüğünün, yaklaşma oranı ve çözüm süresine etkisi .....	80
Çizelge 7.1 : Hacimsel değişimin tabaka açısı burkulma yükü ve basıncına etkisi ...	81
Çizelge 7.2 : Analitik çözümde boy değişiminin burkulma yükü ve basıncına etkisi	82
Çizelge 7.3 : Sonlu eleman çözümünde boy değişiminin burkulma yükü ve basıncına etkisi .....	83
Çizelge 7.4 : Analitik çözüme çap değişiminin burkulma yükü ve basıncına etkisi..	84
Çizelge 7.5 : Sonlu eleman çözümünde çap değişiminin burkulma yükü ve basıncına etkisi .....	83
Çizelge 7.6 : Analitik çözümde kalınlık değişiminin burkulma yükü ve basıncına etkisi .....	86
Çizelge 7.7 : Sonlu eleman çözümünde kalınlık değişiminin burkulma yükü ve basıncına etkisi .....	87
Çizelge 7.8 : Malzeme özellikleri .....	88
Çizelge 7.9 : Malzeme değişiminin optimum burkulma yüküne etkisi .....	89
Çizelge 7.10 : CFRP, GFRP ve Çelik malzemelerde optimum burkulma yükleri.....	89
Çizelge 7.11 : CFRP, GFRP ve Çelik için aynı ağırlıkta burkulma yükleri .....	89
Çizelge 7.12 : Tabaka açısı değişiminin burkulma yüküne etkisi .....	87



## ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Şekil 2.1 : 3 laminadan oluşan laminate yapı.....	9
Şekil 2.2 : İzotropik malzemede kare bir elemanın deformasyonu.....	9
Şekil 2.3 : Kompozit malzemede kare bir elemanın deformasyonu .....	10
Şekil 2.4 : Lamina ve laminate yapı.....	11
Şekil 2.5 : Lamina açılı düzeni.....	12
Şekil 2.6 : Negatif yöndeki lamina.....	12
Şekil 2.7 : Negatif ve pozitif yöndeki laminalar .....	12
Şekil 2.8 : Simetrik laminate.....	13
Şekil 2.9 : Tek sayıda laminaya sahip simetrik laminate.....	13
Şekil 2.10 : Tekrar eden düzene sahip laminate.....	13
Şekil 2.11 : Monoklinik bir malzemede simetri düzlemi.....	16
Şekil 2.12 : Monoklinik malzemenin deformasyonu .....	17
Şekil 2.13 : Dikdörtgen düzendeki fiberlere sahip tek doğrultulu lamina .....	17
Şekil 2.14 : Ortotropik malzemenin deformasyonu .....	18
Şekil 2.15 : Kare düzendeki fiberlere sahip tek doğrultulu lamina.....	19
Şekil 2.16 : Ortotropik bir malzemenin yük altındaki durumu .....	23
Şekil 2.17 : İnce plaka için düzlemsel gerilme durumları.....	31
Şekil 2.18 : Açılı lamina için lokal ve global eksen takımları .....	33
Şekil 4.1 : Silindirik kabuk geometrisi.....	43
Şekil 4.2 : Gerilme bileşenlerinin pozitif doğrultuları .....	44
Şekil 4.3 : Bir sınırına kenar momenti uygulanmış silindirik kabuk .....	49
Şekil 4.4 : Bir sınırına kayma kuvveti uygulanmış silindirik kabuk.....	50
Şekil 4.5 : Silindirik kabukta kenar üzerinde pozitif doğrultudaki yüklemeler .....	51
Şekil 4.6 : Yanal basınç altındaki silindirik kompozit kabuk yapı .....	59
Şekil 4.7 : Kabuk yapı üzerindeki yüzey ve kenar yüklemeleri ile membran kuvvetleri.....	61
Şekil 4.8 : Farklı kabuk yapıların eğrisellikleri.....	63
Şekil 4.9 : Kabuk yapının lokal burkulma durumundaki burkulma desenleri .....	64
Şekil 4.10 : Lokal burkulma deseni ve kontur grafiği gösterimi .....	64
Şekil 4.11 : Ortotropik bir silindirin aksenal yük ve üniform basınç altında lokal burkulması durumunda oluşan dama tahtası deseninin gösterimi.....	65
Şekil 4.12 : Aksenal yük ve üniform basınç altındaki ortotropik silindirin lokal dama tahtası burkulma deseni ve kontur grafiği gösterimi.....	66
Şekil 5.1 : Tabaka açılılarına bağlı olarak burkulma yükünün değişimi.....	72
Şekil 6.1 : Abaqus model oluşturma aşaması .....	74
Şekil 6.2 : Oluşturulmuş ince cidarlı silindirik yapı .....	74
Şekil 6.3 : Kompozit malzeme özelliklerinin verilmesi.....	75
Şekil 6.4 : Kompozit malzemenin tabaka sayısı ve kalınlıkları ile fiber açılarının girilmesi.....	76
Şekil 6.5 : Basınç değerinin girilmesi .....	77
Şekil 6.6 : Sınır şartlarının girilmesi .....	77

Şekil 6.7 : Silindir yapının üzerinde kuvvet ve sınır şartları .....	78
Şekil 6.8 : Sonlu elemanların büyüklüklerinin belirlenmesi .....	78
Şekil 6.9 : İnce cidarlı silindirik kompozit malzemenin sonlu eleman ağı gösterimi	79
Şekil 6.10 : Sonlu eleman analiz sonucu .....	79
Şekil 6.11 : Sonlu eleman boyutunun burkulma yüküne etkisi .....	80
Şekil 7.1 : Hacimsel değişimin burkulma yüküne etkisi .....	82
Şekil 7.2 : Analitik çözümde boy değişiminin burkulma yüküne etkisi .....	83
Şekil 7.3 : Sonlu eleman çözümünde boy değişiminin burkulma yüküne etkisi.....	84
Şekil 7.4 : Analitik çözümde çap değişiminin burkulma yüküne etkisi.....	85
Şekil 7.5 : Sonlu eleman çözümünde çap değişiminin burkulma yüküne etkisi .....	86
Şekil 7.6 : Analitik çözümde çap değişiminin burkulma yüküne etkisi.....	87
Şekil 7.7 : Sonlu eleman çözümünde çap değişiminin burkulma yüküne etkisi .....	88

# İNCE CİDARLI SİLİNDİRİK KOMPOZİT YAPILARIN YANAL BASIÇ ALTINDA BURKULMA DAVRANIŞLARININ ANALİTİK VE SONLU ELEMEN YÖNTEMLERİYLE İNCELENMESİ

## ÖZET

Günümüzde karbon fiber malzemelerin önemi giderek artmaktadır. Bu malzemeler yüksek mukavemet gereken veya düşük yoğunlukları sayesinde hafiflik istenilen uygulamalarda tercih edilmektedirler.

Karbon fiber malzemelerin bazı avantaj ve dezavantajları bulunmaktadır. Hafiflik, yüksek mukavemet ve rijitlik, yüzey pürüzlülüğünün az olması avantajları arasında sayılabilir. Dezavantajları ise yüksek maliyet, üretim zorluğu ve boyut toleranslarının üretim metoduna bağlı olmasıdır.

Mühendislik tasarımlarında burkulma üzerinde dikkatle durulması gereken konulardan biridir. Malzemelerin burkulma mukavemetleri; çekme, basma, eğilme veya burulma gibi diğer mukavemetlerinden farklıdır. Çekme, basma, eğilme ve burulma mukavemetleri için malzemenin uygulanan kuvvete dayanıp dayanamayacağına bakılır. Bunun için malzemenin gerilme şekil değiştirme eğrisindeki akma mukavemetinin bilinmesi gerekmektedir. Malzemeye etkiyen kuvvete bağlı olarak mukavemet denklemlerinden oluşan gerilme değeri bulunmaktadır. Bu değer akma mukavemetiyle karşılaştırılıp malzemenin hasar alıp almadığı bulunur.

Malzemenin burkulma mukavemeti ise üzerinde oluşan gerilmeden bağımsızdır. Kritik burkulma kuvveti, malzeme geometrisine bağlı olarak değişmektedir. Çekme, basma, eğilme ve burulma mukavemetleri için limit değeri olan akma mukavemeti bir malzeme özelliğidir fakat burkulma mukavemeti için limit değeri olan kritik burkulma yükü, burkulma denklemleriyle hesaplanabilmektedir.

Ayrıca burkulma için önemli olan bir diğer durum ise burkulma hasarının malzemenin gerilme şekil değiştirme eğrisinde belirtilen elastik bölge içerisinde gerçekleşmesidir.

Çekme, basma, eğilme ve burulma mukavemeti problemlerinde malzeme kırılması, şekil değiştirme aşaması tamamlandıktan sonra gerçekleşmektedir. Bu nedenle malzeme kırılma belirtileri görülebilmektedir. İlk aşamada, uygulanan kuvvet arttıkça malzeme elastik olarak şekil değiştirmektedir, yani uygulanan kuvvetin kaldırılması sonucu malzeme ilk haline dönebilmektedir.

Eğer uygulanan kuvvet yeteri artırılmaya devam edilirse, malzeme akma sınırına ulaşacaktır. Bu noktadan sonra malzemenin üzerindeki kuvvet kaldırılırsa bile ilk boyutuna geri dönemeyecektir.

Akma sınırından sonra kuvvet artırılmaya devam edilirse malzeme şekil değiştirmesi de artar ve çekme durumu için boyun verme durumu gözlemlenebilir. Bu durum malzeme kırılmasının da boyun veren bölgede oluşacağı göstermektedir. Eğer

uygulanan kuvvet arttırılmaya devam edilirse malzeme boyun veren bölgeden kırılıp hasar görecektir.

Çekme, basma, eğilme ve burulma durumları için kırılma belirtileri görülebilmese rağmen burkulma problemlerinde hasar elastik bölgede oluştuğu için bu tarz belirtiler görülmemektedir ve kırılma bir anda gerçekleşmektedir. Bu yüzden burkulma problemlerine önem gösterilmesi gereklidir.

Burkulma çeşitlerine örnek olarak aksenal basma kuvveti, hidrostatik basınç, eğilme kuvveti veya burulma momenti altında burkulma verilebilir. Yani burkulma durumu sadece basma kuvveti altında gerçekleşmemektedir, diğer kuvvetler altında da gerçekleşebilmektedir.

Yapılan bu çalışma kompozit silindirik kabuk yapıların burkulmasıyla ilgilidir. Kabuk yapılar uygulamada birçok yerde kullanılmaktadırlar. Bu durum kabuk yapıların mukavemet analizlerini önemli kılmaktadır. Kabuk yapı teorileri, kiriş teorilerine kıyasla kullanılan diferansiyel denklemler ve çözümleri bakımından çok daha karmaşıklardır. Ayrıca karbon fiber gibi izotropik olmayan kompozit malzemelerin teorileri de daha karmaşık olmaktadır.

Karbon fiber lamina bir ortotropik malzemedir ve  $6 \times 6$  rijitlik matrisi içerisinde 9 adet bağımsız malzeme sabiti bulunmaktadır. Yüzey gerilme yaklaşımı yapılarak bu durum basitleştirilebilir. Böylece malzeme rijitlik matrisi  $3 \times 3$  boyutuna indirgenmektedir. Bu yaklaşım lamina kalınlığı çok az ve kalınlık doğrultusundaki gerilme değişimi ihmal edilebilecek düzeyde olduğu için uygulanabilmektedir.

Çalışmanın amacı aynı geometrik ve malzeme özellikleri için maksimum burkulma kuvvetini taşıyabilecek en uygun fiber açılarını analitik ve sonlu eleman yöntemleri yardımıyla bulmaktır.

Fiberlerin açı düzeni, bütün kuvvet koşullarında karbon fiber yapıların mukavemeti için önemli bir rol oynamaktadır. Eğer kuvvet doğrultusu ve lamina sayısı biliniyorsa, fiberlerin açı düzeni her lamina için bulunabilmektedir.

Burkulma durumunda, kuvvet koşulları önem kazanmaktadır. Çünkü fiber açıları kuvvet doğrultusu ile değişmektedirler. Bu durum burkulma modunun ve burkulma deformasyon şeklinin de değişmesine yol açmaktadır.

Bu çalışmada önemli bir diğer nokta ise yapının burkulmaya bağlı ya da akmaya bağlı olarak hasar aldığı belirlenebilmesidir.

Bu amaçla öncelikle maksimum burkulma kuvvetini taşıyabilen fiber açı düzeni hesaplanmıştır. Daha sonra Tsai - Hill hasar teorisi kullanılarak yapının akma sınırına bağlı hasar alıp almadığı araştırılmıştır. Bu şekilde yapının akmaya bağlı hasar almadığı, sadece burkularak hasar aldığı durumlar belirlenmiştir.

Analitik çözüm süreci için MATLAB sayısal hesaplama programından yararlanılmıştır. Programda kritik burkulma kuvvetinin hesaplanması için burkulma teorisindeki denklemler kullanılmıştır.

Fiber açı optimizasyonunu sağlamak için lamina sayısına bağlı olarak ve programda tanımlanan bir hassasiyetle rastgele bir açı matrisi oluşturulmuştur. Oluşturulan bu açı matrisi hassasiyet oranına bağlı olarak  $0^\circ$  ile  $90^\circ$  arasında bütün açı kombinasyonlarını içermektedir. Açı matrisinin kolon sayısı oluşturulan açı düzenlerinin sayısı kadar olmaktadır. Bu açı düzenlerinin hepsi için ayrı olarak rijitlik matrisi ve burkulma kuvvetleri program tarafından hesaplanmıştır. Daha önce

belirlenmiş olan malzeme geometrisi için maksimum burkulma kuvvetini veren açı düzeni belirlenmiştir. Bu açı düzeni malzemenin optimum açı düzeni olmaktadır.

Daha sonra malzemenin Tsai – Hill hasar teorisi kullanılarak akmaya bağlı olarak hasar alıp almadığı kontrol edilmiştir. Böylece akmaya bağlı hasar alan durumlar elenmiş ve optimum açı düzeni sadece burkulmaya bağlı olan durumlar için bulunmuştur.

Bundan sonra analitik çözümü kıyaslamak için sonlu elemanlar analizi gerçekleştirilmiştir. Bu analiz için ABAQUS sonlu elemanlar analiz programı kullanılmıştır. Malzeme kabuk yapı olarak tanımlanmış ve malzeme özellikleri MATLAB programındaki optimizasyon çalışmasından çıkan duruma göre yazılmıştır. Daha sonra ABAQUS sonlu eleman çözümü ve MATLAB analitik çözümleri kıyaslanmıştır.

Sonuç olarak ince cidarlı silindirik kompozit yapıların tasarımında kullanılacak bir optimizasyon yöntemi elde edilmiştir.



# **INVESTIGATION OF BUCKLING BEHAVIOR OF CYLINDRICAL COMPOSITE SHELL STRUCTURES UNDER LATERAL PRESSURE BY ANALYTICAL AND FINITE ELEMENT METHOD**

## **SUMMARY**

Nowadays, carbon fiber materials are increasingly important. These materials are used not only for strength applications but also for low density, which means that low mass applications.

Carbon fiber materials have some advantages and some disadvantages. The advantages can be listed as; low mass, high strength, which means that high strength/weight ratio, high stiffness, good surface finish and so on. The disadvantages can be listed as; high cost, difficult to manufacture, the dimensional tolerances are dependent to the manufacturing method.

Buckling strength of a material is different when compared with other kinds of strength properties such as axial loading, bending and torsion. As known, every material has a stress strain curve.

For axial loading, bending and torsion strength, the applied force is known and the problem is to find whether or not the material resist that force. To do that, the yield strength of the material is known from the stress strain curve of that specific material. First of all, the stress occurred because of the force exerted on the material, is calculated from the strength equations. Then, the calculated stress value is compared with the yield strength of the material to see if the material is strong enough.

The buckling strength of the material is independent from the stress occurred on the material. The yield strength of the material is compared with the stress occurred on the material whereas in buckling point of view the critical buckling load is different from one geometry to the other geometry and it cannot be generalized.

The important thing in buckling is the limit value (the critical buckling load) is calculated by using the buckling equations but for axial loading, bending and torsion; the limit value (yield strength) is known and it is a material property.

Another difficult and critical thing for buckling is the buckling failure is seen in the elastic region of the material's stress strain curve.

As it is known, for the axial loading, bending and torsional strength problems, the material fractures after the permanent deformation occurs. For that reason, the material gives signals for fracture. In the first stage, by increasing the applied force, the material elongates elastically which means that if the force is reduced, the material saves its original shape.

After that, again by increasing the force, the material reaches its yield point. Beyond that point, the original dimensions of the material has changed permanently even if the applied force is reduced to zero.

By increasing the force after the yield point, the material deforms more and the necking situation is seen. This situation gives a brief signal for the fracture region because the necking situations occurs where the fracture occurs. If the force is increased more the material fractures from the necking point.

For the compression, bending and torsional strength problems, as it is seen the fracture region is seen before the fracture.

However; for buckling problems, since the buckling occurs in the elastic region, there is no sign when or where the fracture occurs. This makes the buckling problem is very important.

There are also some types of buckling such as, buckling under compression load, buckling due to the hydrostatic pressure, buckling due to bending and buckling due to torsion. This means that buckling not only occurs because of compression but also occurs because of torsion or bending.

Fraction due to buckling is an immediate fracture that is because it occurs in the elastic region. This shows the importance of buckling problem.

The other thing that this thesis studies is shell theories. Many structures are made of shells. Therefore, the strength analysis of shells is important.

The shell theories are much more complex when they are compared to the beam theories. The differential equations become more complex.

This study is about the buckling of composite shells. The purpose of this study is to find the optimum fiber angles that carry the maximum buckling load in different loading conditions for the same geometrical properties by analytically and Finite Element Method.

The fiber angle orientation plays a very crucial role for strength of the carbon fiber structures in every loading condition.

If the loading direction and sequence is known, the fiber angle orientation can be calculated for plies.

For buckling point of view, the loading conditions are important because, the fiber angle orientation differs from the load direction. This also makes the buckling modes different. The shape that occurs from buckling deformation differs due to loading condition and the fiber angle orientation.

Another crucial thing in this study is to see if the part is fractured due to yield or buckling.

To see that first, the optimum fiber angles that carries the maximum load is calculated iteratively. Then, Tsai – Hill failure theory is applied to the structure to see if the structure is yielded or buckled. If the structure is yielded, the maximum load that makes the structure was not to yield but buckled is found out.

In this study, MATLAB is used for the analytical solution procedure. The buckling equations for composite shell structures are used for calculating the critical buckling load.

As mentioned before, the shell theories are harder than other strength equations. In addition, the composite equations are complex because the carbon fiber material is not isotropic material.

A carbon fiber lamina is an orthotropic material, which means that, it must have 9 independent material constants and the stiffness matrix is 6x6. A simplification can be performed by using plane stress assumption. This reduces the material's stiffness matrix from 6x6 to 3x3. This assumption can be performed because the stress distribution along the layer thickness axis is negligible when compared the longitudinal and lateral axes. Since a shell type of material is very thin this assumption does not make a big change.

Moreover, as mentioned before, the crucial thing in this thesis is to make angle optimization. This is also performed by MATLAB.

To do that, an angle matrix is created randomly depending on the precision of the program, and the layer amount. The precision of the MATLAB program can be defined in the MATLAB code. This is the angle increments from 0° to 90° such as, 0-30-60-90 or 0-15-30-45-...-90 or 0-1-2-3-...-90.

This angle matrix consists of all angle configurations. The column number of this matrix gives the angle configurations. The stiffness matrix must be computed for all angle configurations and at the end of the program, the buckling load must be calculated for all angle configurations. The angle configuration that gives the maximum buckling load for the specified geometry (diameter, length, and layer thicknesses) is the optimum angle configuration for that geometry.

In addition, one more thing must be checked. That is the yielding or buckling. To check that Tsai – Hill failure theory is used. If the structure is yielded before it is buckled, the load that makes the structure is buckled but not yielded is found.

After all, a finite element analysis is performed to verify the analytical solution. To do that, ABAQUS CAE is used. The structure is defined as shell and all of the properties are written from the results of MATLAB analytical solution. At the end, the results are compared for MATLAB analytical solution and ABAQUS finite element solution.



## **1. GİRİŞ**

Denizcilik, otomotiv, uzay ve havacılık sanayinde ince cidarlı elemanlar yaygın bir şekilde kullanılmaktadır. Özellikle hafiflik istenilen uygulamalarda kompozit malzemeler tercih edilmektedir. Kullanılan bu elemanların kalınlığı boya oranla çok küçüktür. Kuvvet etkisi altında kaldığında çekme gerilmesi oluşan ince cidarlı yapılar mukavemet sınırına kadar dayanabilmektedirler. Fakat kuvvetler eğer bir basma gerilmesi oluşturuyorsa karşımıza burkulma problemi çıkmaktadır. Bu yüzden basma gerilmelerine maruz ince cidarlı yapıların analizinin dikkatli bir şekilde yapılması gerekir.

Burkulma olaylarına birçok sistemde rastlamak mümkündür. Yanal olarak takviye edilmemiş dar kirişler uygulanan aksel basma kuvvetleri altında yana doğru bükülerek kırılabilirler. Çekme kuvvetine karşı oldukça dayanıklı olan ince levhalar, basma kuvvetleri altında oldukça dayanıksızdırlar. Denizaltı veya vakum tankları da uygun şekilde tasarlanmadıkları takdirde dış basınç altında burkulur ve kullanılmaz hale gelirler. Füzelerin ince kaplamaları da ateşlemenin bazı kademelerinde yüksek basınç kuvvetlerine maruz kaldıklarından burkulabilirler. Ayrıca güç ileten şaftlarda burulma kuvveti etkisinde burkulma problemi ile karşılaşılabilir.

Bu ve benzer problemler mühendislik tasarımlarında üzerinde titizlikle durulması gereken konulardır. Bu yüzden yapıların burkulma davranışları dikkatle incelenmelidir.

### **1.1. Tezin Amacı**

Bu çalışmada kompozit ince cidarlı yapıların yanal basınç altında meydana gelen burkulma davranışları araştırılmıştır. Bu amaçla lamina fiber açılarının, tabaka sayısının ve cidar kalınlığının burkulma yüküne etkisi incelenmiştir. Analitik çözümler kullanılarak oluşturulan optimizasyon çalışması ile tabaka sayısı ve kalınlığı belli olan bir yapı için en uygun fiber açıları tespit edilmeye çalışılmıştır.

Ayrıca problemin sayısal çözümü sonlu elemanlar metodu ile gerçekleştirilmiştir ve optimizasyon sonucu elde edilen verilerle karşılaştırılmıştır.

## **1.2. Literatür Araştırması**

Bisagni ve Cordisco (2003), ince cidarlı kompozit karbon fiber silindirik yapıların, aksenal ve burulma yüklerine ayrı ayrı ve birlikte maruz kalması durumundaki, burkulma ve burkulma sonrası davranışlarını deneysel olarak incelemişlerdir. Tabaka yerleşimi ve fiber açılarının yapı üzerindeki etkisini tespit etmişlerdir.

Meyer-Piening, Farshad, Geier ve Zimmermann (2001), ince cidarlı kompozit karbon fiber silindirik yapıların, deneysel, analitik ve sonlu eleman yöntemleriyle burkulma davranışını incelemişlerdir. Bu amaçla aksenal ve burulma yükleri birlikte uygulanmıştır.

Bisagni (2000), ince cidarlı kompozit karbon fiber silindirik yapıların aksenal basınç altındaki burkulma ve burkulma sonrası davranışlarını incelemiştir. Bu problemi incelemek için sonlu elemanlar yöntemini kullanmıştır, eigenvalue, nonlinear Riks ve dynamic analiz metotlarıyla karşılaştırmıştır. Yapıdaki geometrik kusurların kritik burkulma yükü üzerindeki etkisinden bahsedilmiştir.

Smerdov (2000), çok tabakalı ince cidarlı kompozit silindirlerin aksenal basınç altında burkulma problemi ve optimizasyonu ile ilgilenmiştir. Farklı tabaka sayıları ve açıları için formülasyonlar karşılaştırılmıştır. Çoğu durumda tabaka sayısının 4'den ve formülasyondaki değişken sayısının 2'den fazla olmasının bir kazanç sağlamayacağı belirtilmiştir.

Smerdov (2000), dış basınç altındaki burkulma davranışı gösteren çok tabakalı ince cidarlı kompozit silindirlerin optimizasyonu ile ilgilenmiştir. Çoğu durumda tabaka sayısının 3'den fazla olması burkulma yükünün artmasında önemli bir etki göstermemiştir.

Moon, Kim, Choi, Kweon ve Choi (2009), ince cidarlı sargılı karbon fiber epoksi kompozit silindirleri, dış basınç altında incelemişlerdir. Sarım açısı 30-45-60 şeklinde olan 3 farklı model için sonlu eleman ve deneysel yöntem karşılaştırılmıştır. Silindirlerin burkulma davranışında bu açıların önemli etken olduğu belirtilmiştir.

Lopatin ve Morozov (2011), üniform dış yan basınç altındaki, tek tarafı ankastre silindirik kompozit ince cidarlı yapının burkulma problemini incelemiştir. Galerkin yöntemini kullanarak kritik basıncı bulmaya çalışılmıştır ve çıkan sonuçlar sonlu elemanlar yöntemi ile karşılaştırılmıştır. Kullanılan analitik yöntemin tutarlı olduğu ve kompozit yapıların dizaynında kullanılabileceği belirtilmiştir.

S. E. Kim ve C. S. Kim (2001), eksenel basınç kuvveti altındaki silindirik ince cidarlı yapıların burkulma dayanımını araştırmışlardır. İki tarafı açık ve tek tarafı kapalı modeller, geometrik olarak kusursuz ve kusurlu olması durumu için ayrı ayrı incelenmiştir. Burkulma dayanımının çap-kalınlık oranı arttıkça önemli ölçüde azaldığı ve boy-çap oranı arttıkça az miktarda azaldığı kaydedilmiştir. Ayrıca geometrik kusurların burkulma dayanımını önemli ölçüde azalttığı belirtilmiştir.

Gal, Levy, Abramovich ve Pavsner (2006), geliştirdikleri sonlu eleman modelinin geçerliliğini araştırmışlardır. Yapılan deney ve literatürdeki sonuçların tekrar denemesiyle, kullanılan sonlu elemanın, kompozit panellerin eksenel basınç yükü altında iyi sonuçlar verdiği belirtilmiştir.

Chen, Yang, Cao ve Guo (2012), eksenel doğrultuda değişken kalınlık faktörü bulunan silindirik ince cidarlı yapının, eksenel basınç altında burkulmasını incelemişlerdir. Kalınlık arasındaki fark arttıkça burkulma dayanımının azaldığı görülmüştür.

Kirkpatrick ve Holmes (1989), ince cidarlı silindirik yapının eksenel yük altında burkulma ve burkulma sonrası davranışlarını deneysel ve sonlu eleman yöntemiyle incelemiştir. Sonlu eleman yönteminde geometrik ve kuvvet dağılımı kusurları göz önüne alınmıştır. Bu durumların burkulma ve burkulma sonrasını içeren sonuçlarda büyük önem taşıdığı görülmüştür.

Goldfeld, Arbocz ve Rothwell (2005), ince cidarlı konik kompozit karbon fiber yapılar için optimum tabaka düzenini bulmaya çalışmışlardır. Bu amaçla kalınlık ve tabaka açıları değişimi incelenmiştir. Bu iki değişkeninin burkulma dayanımı ve ağırlık kazancı üzerinde büyük etkileri olduğu belirtilmiştir.

Tafreshi (2004), izotropik ve kompozit ince cidarlı silindirik yapıların içinde oluşabilecek delaminasyonların burkulma dayanımı üzerindeki etkisini araştırmıştır. Sonlu elemanlar yöntemini kullanılarak, eksenel yük altında, malzeme özellikleri, delaminasyon boyutları ve yerleşimi değiştirilerek yapılan deneyler sonucu,

delaminasyonun boyutu ve yüzeye yakınlığı arttıkça dayanımın oldukça düştüğü vurgulanmıştır.

Bert ve Kim(1994), burulma yüklerine maruz kalan ince cidarlı silindirik yapıların burkulma dayanımlarını araştırmışlardır. Tabaka açıları, sınır şartları ve boyut değişimleri ile balanstan meydana gelebilecek eğilmelerin burkulma yükü üzerindeki etkileri incelenmiştir.

Shokrieh, Hasani ve Lessard (2004), güç ileten ince cidarlı kompozit yapıların burulma ile oluşan burkulma davranışlarını incelemişlerdir. Sonlu elemanlar yöntemini kullanarak bulunan sonuçlar daha önceki çalışmaların analitik ve deneysel sonuçları ile karşılaştırılmıştır. Ayrıca fiber açıları, tabaka düzeni ve sınır şartlarının etkileri incelenmiştir.

Lennon, Das (2000), burulma şekil değişimine ve burkulmaya maruz bir silindir için sonlu elemanlar modeli oluşturmuşlardır ve destek yapısı bulunmayan silindir kullanarak bu yöntemin geçerliliğini ispatlamaya çalışmışlardır. Enine kirişler ve çemberlerle desteklenmiş yapı üzerinde bu destek yapıların etkisi araştırılmıştır. Ayrıca elastik sınır içinde dış basınç ve eksenel yüke maruz silindiri hasar bölgesine kadar burulmaya maruz bırakılıp, bu etkilerin burulma burkulması dayanımı üzerinde etkileri araştırılmıştır.

Hassani, Darvizeh ve Haftchenari (1997), farklı sınır şartları altında ince cidarlı kompozit silindirlerin teorik olarak burkulma davranışlarını incelemişlerdir. Oluşturulan teorik yöntemin daha önceki yöntemlerle ve deneylerle karşılaştırılması yapılmış, farklı yükleme ve sınır şartları altında kullanılabileceği belirtilmiştir.

Bisagni ve Cordisco (2006), ince cidarlı destekli kompozit silindirik yapıların burkulma ve burkulma sonrası dayanımlarını deneysel yolla araştırmışlardır. Eksenel yük altında ve burulma momenti altında yapılan testler sonucu burkulma yükleri ve hasar oluşumu incelenmiştir.

Messenger, Pyrz, Gineste ve Chauchot (2002), ince cidarlı lamine edilmiş kompozit silindirik yapıların hidrostatik basınç altında maksimum dayanımı için optimizasyon çalışması yapmışlardır. Fiber açıları ve tabaka sayısını, genetik algoritma ile yapılan optimizasyon, sonlu eleman yöntemi ve deneyler yardımıyla cam fiber ve karbon fiber kompozit yapılar için denenmiştir. Dizayn aşamasında yapılan optimizasyon çalışmasının burkulma dayanımını artırmada oldukça önemli olduğu vurgulanmıştır.

Tafreshi (2006), farklı malzeme, tabaka dizilimi ve delaminasyon boyutlarına sahip ince cidarlı kompozit silindirlerin aksenal yük, dış basınç ve bu kuvvetlerin beraber etkiği durumlarda, burkulma ve burkulma sonrası davranışlarını incelemiştir. Sonlu elemanlar yöntemiyle yapılan çalışma, tabaka diziliminin burkulma yükü ve hasar oluşumunda önemli etkileri olduğunu ortaya koymuştur.



## **2. KOMPOZİT MALZEMELER TEORİSİ**

### **2.1. Kompozit Malzemeler**

Kompozit malzemeler, iki ya da daha fazla farklı malzemenin bir araya gelmesiyle oluşurlar. Bir araya getirilen bu malzemeler, birbiri içerisinde çözünmeden, makroskobik seviyede birleşirler. Kompozit malzemelerde genellikle yapının bir arada durmasını sağlayan matris malzemesi ve yapıya dayanıklılık katan takviye malzemesi bulunmaktadır.

Kompozit malzemelerde genellikle matris yapısını polimer, seramik veya metal malzemeler, takviye yapısını ise partikül, whiskers ya da fiber malzemeler oluşturmaktadır.

Kompozitler, içerdikleri malzemelerin yapısal özelliklerine de sahip olurlar. Örnek olarak karbon fiber destekli kompozit yapı, içerdiği karbon fiberin ve polimer reçine olan epoksinin özelliklerini bulundurmaktadır. Karbon fiber yüksek mukavemetli fakat gevrek bir malzemedir. Epoksi ise elastik bir malzeme olmasına karşın çok yüksek mukavemete sahip değildir. Bu iki farklı özelliğe sahip malzeme birleştirilince hem elastikliği hem de dayanıklılığı yüksek bir malzeme olan karbon fiber kompozit yapı elde edilir.

Çizelge 2.1’de bazı kompozit ve metal malzemelerin özellikleri gösterilmiştir.

#### **2.1.1. Kompozit Malzemelerin Avantajları**

- Tasarımda hafiflik sağlarlar.
- Yüksek dayanıklılığa sahiptirler.
- Yüzey pürüzlülüğü azdır.
- Yorulma dayanımı metallere yüksektir.
- Titreşim sönümlenme özelliği metallere göre çok daha yüksektir.
- Korozyon dayanımı çok yüksektir.
- Farklı yükleme koşulları için malzeme optimizasyonu yapabilmektedir.
- Özel uygulamalar için uygundur.

**Çizelge 2.1 : Bazı metal ve kompozit malzemelerin özellikleri**

Material Units	Specific gravity	Young's modulus (GPa)	Ultimate strength (MPa)	Specific modulus (GPa-m <sup>3</sup> /kg)	Specific strength (MPa-m <sup>3</sup> /kg)
<i>System of Units: SI</i>					
Graphite fiber	1.8	230.00	2067	0.1278	1.148
Aramid fiber	1.4	124.00	1379	0.08857	0.9850
Glass fiber	2.5	85.00	1550	0.0340	0.6200
Unidirectional graphite/epoxy	1.6	181.00	1500	0.1131	0.9377
Unidirectional glass/epoxy	1.8	38.60	1062	0.02144	0.5900
Cross-ply graphite/epoxy	1.6	95.98	373.0	0.06000	0.2331
Cross-ply glass/epoxy	1.8	23.58	88.25	0.01310	0.0490
Quasi-isotropic graphite/epoxy	1.6	69.64	276.48	0.04353	0.1728
Quasi-isotropic glass/epoxy	1.8	18.96	73.08	0.01053	0.0406
Steel	7.8	206.84	648.1	0.02652	0.08309
Aluminum	2.6	68.95	275.8	0.02652	0.1061

### 2.1.2. Kompozit Malzemelerin Dezavantajları

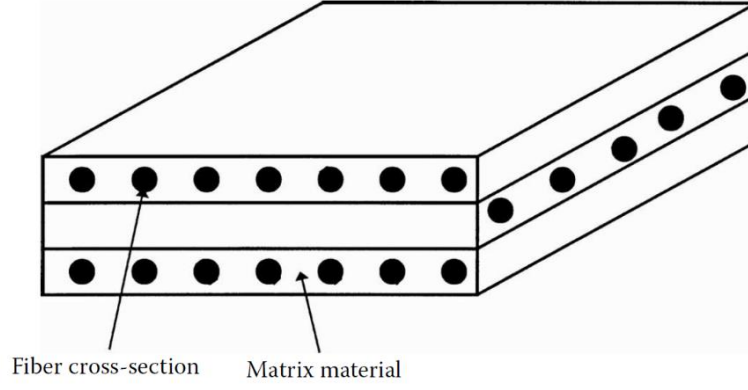
- Metal malzemelere göre daha pahalıdır.
- Seri üretim için çok uygun değildir.
- Metal malzemelere kıyasla üretimi zordur.
- Yapının kalitesi ve boyut toleransları üretim metoduna bağlıdır.
- Gevrek olduklarından kolay hasar alabilirler.

### 2.2. Lamina ve Laminate

Lamina yaklaşık olarak 0.125 mm kalınlığa sahip kompozit malzeme katmanıdır. Laminate ise bu katmanların aynı ya da farklı açılarla birleştirilmiş halidir. Bu katmanlar kullanılarak farklı kuvvet kombinasyonlarını taşıyabilen süspansiyon, boru, basınç tüpü gibi birçok eleman imal edilebilmektedirler.

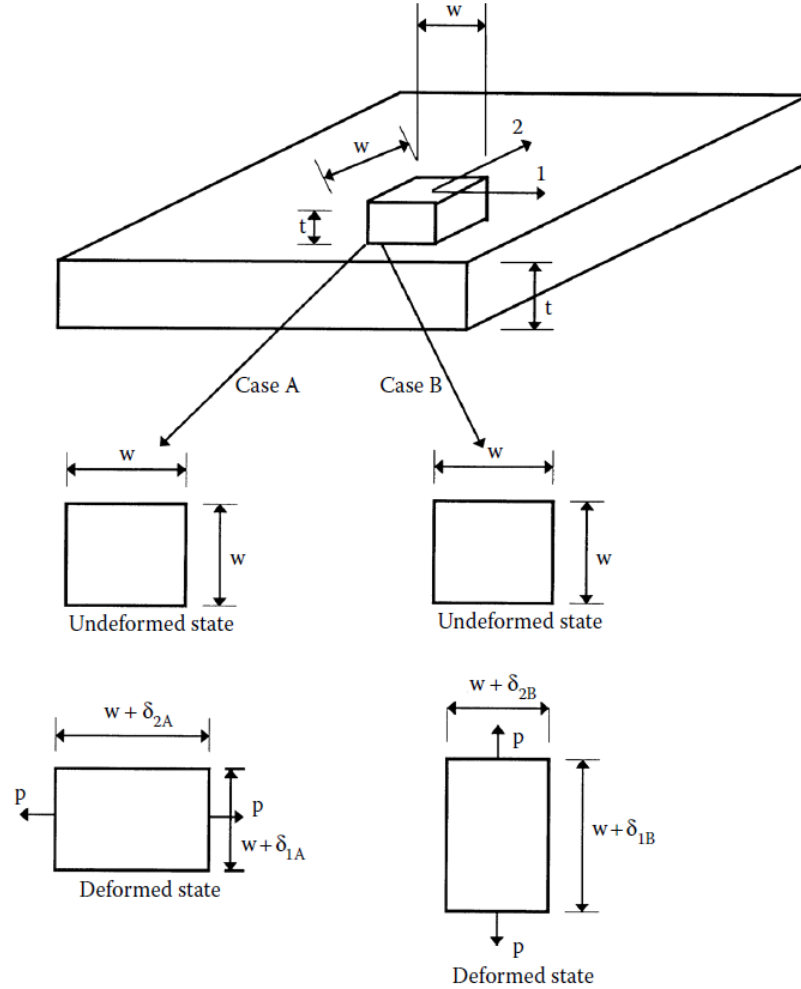
Bir lamina içerisinde fiber ve matris kesit düzlemleri bulunmaktadır. Fiber kesiti yüksek dayanımlı ve gevrek olmakla beraber matris kesiti elastik ve daha az dayanıklıdır. Kompozit malzemenin rijitliği bu iki yapının mekanik özelliklerine bağlıdır.

Şekil 2.1'de farklı fiber açılara sahip 3 laminadan oluşan laminate yapı gösterilmiştir.



**Şekil 2.1 :** 3 laminadan oluşan laminate yapı

İzotropik bir malzemede  $t$  kalınlığına,  $w$  en ve boyuna sahip bir eleman üzerindeki kuvvetler Şekil 2.2’de gösterilmiştir.

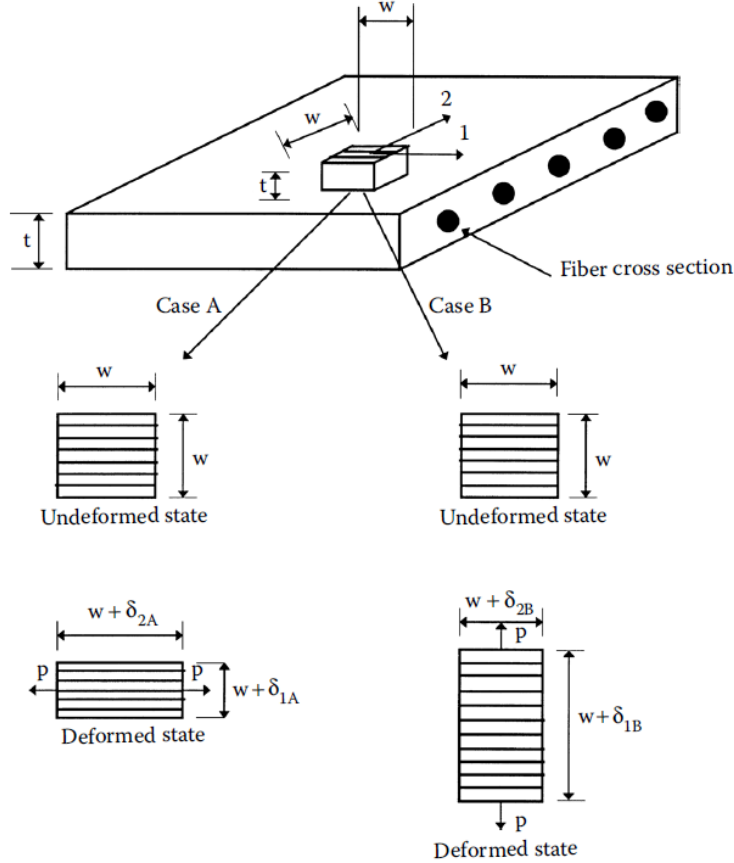


**Şekil 2.2 :** İzotropik malzemede kare bir elemanın deformasyonu

A durumunda 1 doğrultusundaki normal yük altında  $\delta_{1A}$  ve  $\delta_{2A}$  deformasyonları oluşmuştur. B durumunda ise 2 doğrultusunda normal yük altında  $\delta_{1B}$  ve  $\delta_{2B}$  deformasyonları oluşmuştur. Oluşan bu deformasyonlar aşağıdaki gibi bağlantılıdır.

$$\begin{aligned}\delta_{1A} &= \delta_{2B} \\ \delta_{2A} &= \delta_{1B}\end{aligned}\quad (2.1)$$

Burada belirtildiği gibi deformasyon miktarları yük doğrultusundan bağımsızdır.



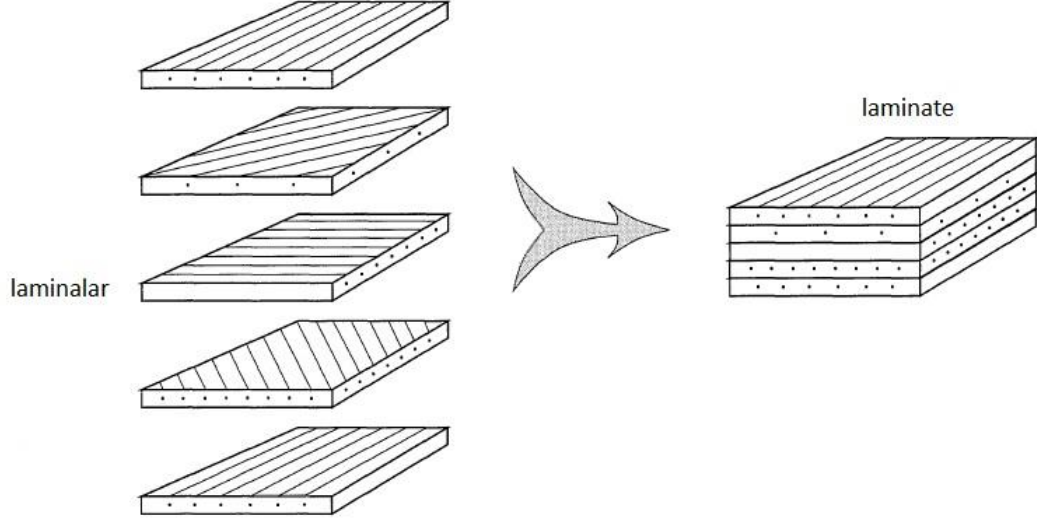
**Şekil 2.3 :** Kompozit malzemede kare bir elemanın deformasyonu

Şekil 2.3’de A durumu için fiber doğrultusunda ve B durumu için fibere dik doğrultuda yük altında bulunan kompozit malzeme görülmektedir. Burada deformasyon miktarları, yük doğrultusundan bağımsız değildir. Bunun sebebi kompozit malzemenin mekanik özelliklerin fiber doğrultusuna bağımlı olmasıdır.

$$\begin{aligned}\delta_{1A} &\neq \delta_{1B} \\ \delta_{2A} &\neq \delta_{2B}\end{aligned}\quad (2.2)$$

### 2.2.1. Kompozit malzemelerde lamina düzeni

Kompozit malzemelerde genellikle tek lamina yerine, bu laminaların birleştirilmesinden oluşan laminate yapılar kullanılmaktadır. Bu durum Şekil 2.4'te gösterilmiştir.



Şekil 2.4 : Lamina ve laminate yapı

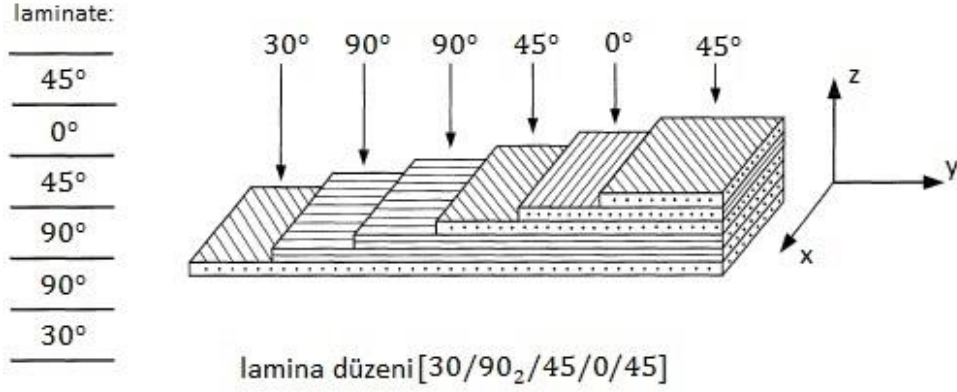
Lamine yapılar,

- tek doğrultulu fiberlerden oluşan,
- farklı açılarda örülmüş kumaş şeklinde olan,
- farklı fiber malzemeleri içeren,
- ortasında bal peteği yapısı veya köpük gibi çekirdek yapı bulunan,
- kesik fiberlerden oluşan ya da metal tozları içeren

lamina yapılarından meydana gelebilir.

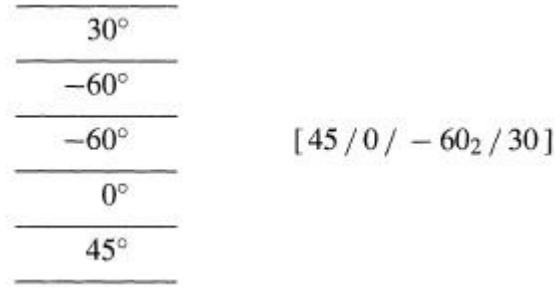
Bu çalışmada kullanılmış olan tek doğrultulu fiberlerin oluşturduğu kompozit yapılarda, lamina düzenine bağlı olarak, laminatenin mekanik özellikleri değişim gösterebilmektedir.

Laminatenin açı düzenini göstermek için, her laminanın fiberlerinin x eksenine ile yaptığı açı belirlenmelidir. Bundan sonra farklı açılara sahip laminalar için aralarına / işareti, aynı açılara sahip olanlar için sayısal indis konularak art arda köşeli parantez içinde yazılırlar. Bu durum Şekil 2.5'te gösterilmiştir. Buradaki açı düzeni [30/90<sub>2</sub>/45/0/45] şeklinde yazılmaktadır.



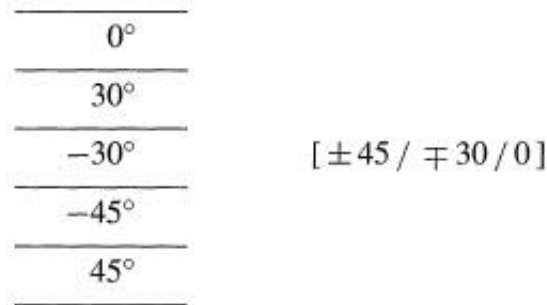
Şekil 2.5 : Lamina açı düzeni

Eğer lamina açı negatif yönde ise “-“ konularak yazılmaktadır. Bu durum Şekil 2.6’da gösterilmiştir.



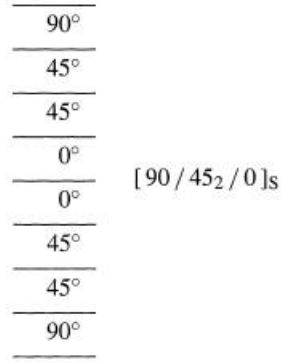
Şekil 2.6 : Negatif yöndeki lamina

Negatif ve pozitif yönde aynı açı değerine sahip laminalar yan yana bulunuyorsa “+” ve “-“ işaretleri kullanılmaktadır. Şekil 2.7’de bu durum gösterilmiştir.



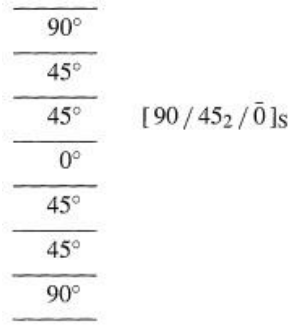
Şekil 2.7 : Negatif ve pozitif yöndeki laminalar

Laminat orta düzlemde simetrik bir düzene sahip ise Şekil 2.8 deki gibi laminatenin üst yüzeyinden başlayarak orta düzleme kadar yarısı yazılıp, parantezin sonuna “s” işareti konulabilmektedir.



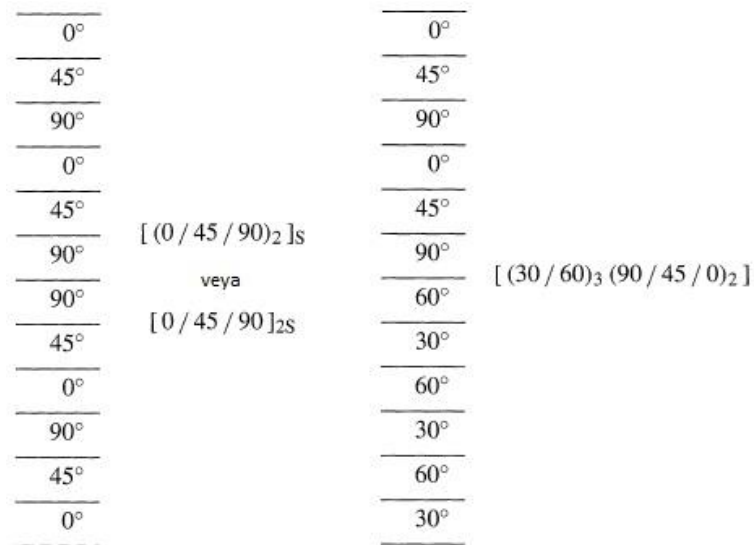
**Şekil 2.8 :** Simetrik laminate

Simetrik bir laminatede tek sayıda lamina bulunuyorsa ve farklı olan lamina orta düzlemde ise Şekil 2.9'daki gibi üzerinde “-” işareti ile gösterilebilmektedir.



**Şekil 2.9 :** Tek sayıda laminaya sahip simetrik laminate

Tekrar eden lamina düzenlerine sahip laminate yapıda Şekil 2.10'daki gibi tekrar ettiği miktar alt indis ile gösterilebilmektedir.



**Şekil 2.10 :** Tekrar eden düzene sahip laminate

### 2.3. Genelleştirilmiş Hooke Yasası

Gerilme-şekil değiştirme ilişkisi Hooke Yasası ile belirtilmektedir. Lineer elastik ve izotropik olmayan bir malzeme için bu ilişki aşağıda gösterilmiştir.

$$[\sigma] = [C][\varepsilon] \rightarrow \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Burada,

$[\sigma]$ : Gerilme vektör

$[\varepsilon]$ : Şekil değiştirme vektörü

$[C]$ : Rijitlik matrisidir.

Bu eşitlik indis gösterimi ile aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\sigma_i = \sum_{j=1}^6 C_{ij} \varepsilon_j, \quad i = 1, 2, \dots, 6 \quad (2.4)$$

Bu eşitlikte gerilme vektörü, rijitlik matrisi ve şekil değiştirme vektörünün çarpılması ile bulunabilir. Şekil değiştirme vektörünün bulunabilmesi için gerilme vektörü ile rijitlik matrisinin tersinin çarpılması gerekmektedir. Rijitlik matrisinin tersi olan  $[S]$  esneklik matrisi kullanılarak eşitlik aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$[\varepsilon] = [S][\sigma] \rightarrow \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{54} & S_{55} & S_{56} \\ S_{61} & S_{62} & S_{63} & S_{64} & S_{65} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

$$[C]^{-1} = [S] \quad OR \quad [S]^{-1} = [C]$$

Rijitlik ve esneklik matrisleri 6x6 boyutundadırlar ve 36 elemana sahiplerdir. Bu matrisler simetrik oldukları için eleman sayıları 21'e düşecektir.

$$S_{ij} = S_{ji} \quad ve \quad C_{ij} = C_{ji} \quad (2.6)$$

## 2.4. Farklı Tür Malzemeler İçin Hooke Yasası

Bazı malzemeler farklı doğrultudaki yüklemeler altında farklı özellikler gösterirler. Bir başka deyişle, bu malzemelerde özellikler bir nokta için her doğrultuda farklıdır ve malzeme özellikleri simetrik değildir. Bu özelliğe anizotropi denmektedir. Bazı malzemelerde ise bir nokta için bazı doğrultularda simetriklik özelliği olabilir. Bu özellik sayesinde rijitlik ve esneklik matrisindeki birbirinden bağımsız elemanlar arasında bağlantı kurulabilmektedir.

Malzemeler birbirinden bağımsız eleman sayılarına göre anizotropikten izotropiğe göre aşağıdaki gibi sıralanabilirler.

- Anizotropik malzeme
- Monoklinik malzeme
- Ortotropik malzeme
- Enine izotropik malzeme
- İzotropik malzeme

### 2.4.1. Anizotropik Malzeme

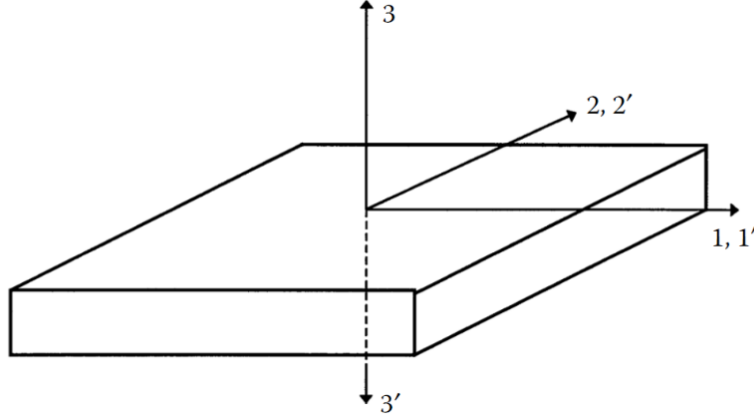
Anizotropik malzemeler 21 bağımsız elastik sabite sahiptir. Hiçbir doğrultuda simetriklik göstermezler. Anizotropik malzemelerde malzeme üzerindeki bir noktada gerilme ve şekil değiştirme arasında ilişki kurulmasına yarayan rijitlik matrisi aşağıdaki gibi yazılabilmektedir.

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

### 2.4.2. Monoklinik malzeme

Malzeme üzerinde tek bir düzlemde simetri olursa, bu malzemeler monoklinik malzeme olarak adlandırılır. Bu simetriklik düzlemine göre malzeme özellikleri birbirinin aynısı olmaktadır.

Şekil 2.11'de bu simetri düzlemi gösterilmiştir.



**Şekil 2.11** : Monoklinik bir malzemede simetri düzlemi

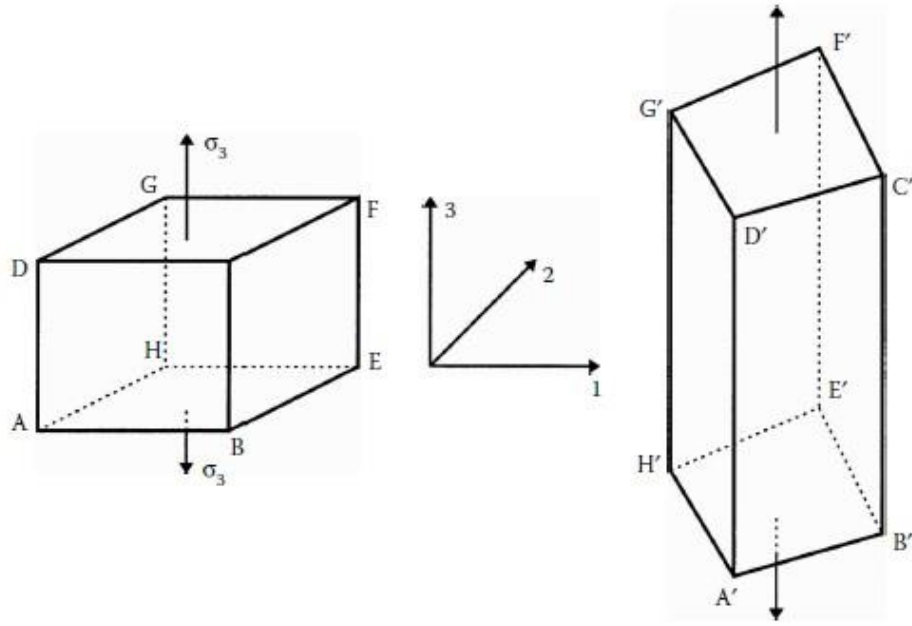
Bu simetri düzlemine dik olan 3 doğrultusu asal doğrultu diye adlandırılmaktadır. Monoklinik malzemelerin rijitlik ve esneklik matrislerinde 13 tane bağımsız elastik sabit bulunmaktadır.

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Hooke Yasası'na göre monoklinik malzemede şekil değiştirmeler aşağıdaki biçimde yazılabilir.

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= S_{13}\sigma_3 \\ \varepsilon_2 &= S_{23}\sigma_3 \\ \varepsilon_3 &= S_{33}\sigma_3 \\ \gamma_{23} &= 0 \\ \gamma_{31} &= 0 \\ \gamma_{12} &= S_{36}\sigma_3 \end{aligned} \quad (2.9)$$

Şekil 2.12'de monoklinik malzemelerin deformasyon karakteristiği gösterilmiştir. 1-2 yüzeyi olarak belirtilen BEHA ve CFGD yüzeyleri asal olan 3 doğrultusuna dik bulunmaktadır. Bu yüzeyler normal yük altında çarpılmaya maruz kalırken diğer yüzeylerde kayma şekil değişimi olmamaktadır.

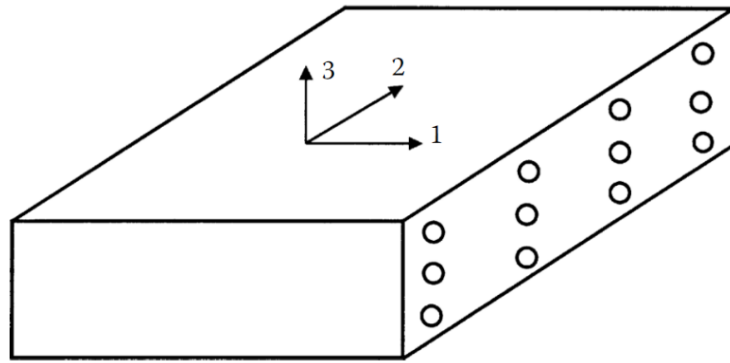


Şekil 2.12 : Monoklinik malzemenin deformasyonu

### 2.4.3. Ortotropik Malzeme

Ortotropik malzemelerde 3 adet birbirine dik malzeme simetri düzlemi bulunmaktadır. Malzeme özellikleri bu 3 doğrultuda da birbirinden farklıdır.

Bu malzemelere örnek olarak ahşap malzeme verilebilir. Ayrıca tek doğrultuda hizalanmış ve dikdörtgen düzendeki fiberlere sahip kompozitler de ortotropik malzemeler için örnek verilebilir.



Şekil 2.13 : Dikdörtgen düzendeki fiberlere sahip tek doğrultulu lamina

Ortotropik malzemelerde rijitlik ve esneklik matrislerinin bağımsız elastik sabit sayısı 9 adettir.

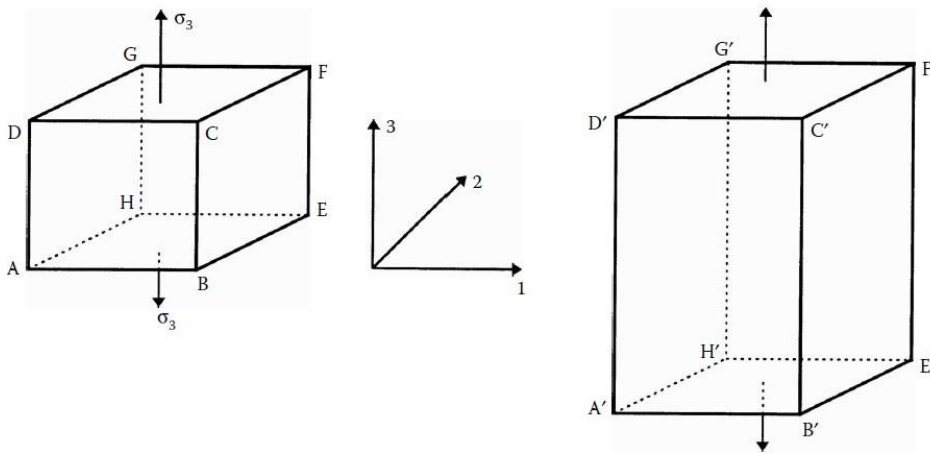
$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}$$

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Şekil 2.14'te ortotropik bir malzemenin deformasyonu gösterilmiştir. Küp şeklindeki bir yapıya 3 doğrultusunda normal bir yük uygulandığı zaman ortaya çıkan şekil değiştirmeler aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= S_{13}\sigma_3 \\ \varepsilon_2 &= S_{23}\sigma_3 \\ \varepsilon_3 &= S_{33}\sigma_3 \\ \gamma_{23} &= 0 \\ \gamma_{31} &= 0 \\ \gamma_{12} &= 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

Yapının üzerinde normal doğrultularda şekil değişimi olmasına rağmen, herhangi bir düzlemde kayma şekil değiştirmesi olmadığı görülmektedir.



Şekil 2.14 : Ortotropik malzemenin deformasyonu

#### 2.4.4. Enine İzotropik Malzeme

Ortotropik yapı içerisinde herhangi bir düzlemde malzeme simetri eksenini bulunduğu durumda, 1 doğrultusu bu izotropi düzlemine (2-3) dik olursa malzeme enine izotropik diye adlandırılır.

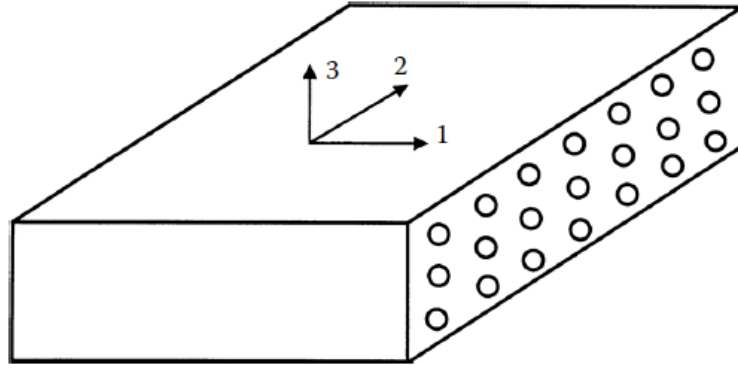
Enine izotropik malzemelerde rijitlik ve esneklik matrisleri 5 adet bağımsız elastik sabite sahiptirler.

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{22} - C_{23}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Elastik sabitler arasındaki ilişki aşağıdaki gibi gösterilmiştir.

- $C_{22} = C_{33}$
- $C_{12} = C_{13}$
- $C_{55} = C_{66}$
- $C_{44} = \frac{C_{22} - C_{23}}{2}$

Kare düzende ve tek doğrultuda fiberlere sahip lamina, enine izotropik malzemelere örnek verilebilir.



Şekil 2.15 : Kare düzende fiberlere sahip tek doğrultulu lamina

#### 2.4.5. İzotropik Malzeme

Ortotropik malzemedeki özellikler bütün simetri düzlemleri için aynı olursa, malzeme izotropik malzeme olarak adlandırılır.

İzotropik malzemelere örnek olarak, demir, alüminyum gibi metaller verilebilir.

İzotropik malzemede bağımsız elastik sabit sayısı 2'dir. Buna bağlı olarak rijitlik ve esneklik matrisleri aşağıdaki gibi gösterilmiştir.

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11} - C_{12}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11} - C_{12}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11} - C_{12}}{2} \end{bmatrix}$$

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{11} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{12} & S_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(S_{11} - S_{12}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(S_{11} - S_{12}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(S_{11} - S_{12}) \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Burada  $C_{11}, C_{12}$  ve  $(C_{11}-C_{12})/2$  sabitleri, mühendislik katsayıları olan Elastiklik modülü ( $E$ ) ve Poisson oranı ( $\nu$ ) ile yazılabilmektedir.

$$C_{11} = \frac{E(1 - \nu)}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)}$$

$$C_{12} = \frac{\nu E}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)}$$

$$\frac{C_{11} - C_{12}}{2} = \frac{1}{2} \left[ \frac{E(1 - \nu)}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)} - \frac{\nu E}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)} \right] = \frac{E}{2(1 + \nu)} = G \quad (2.14)$$

Bunun sonucunda rijitlik ve esneklik matrisleri aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$[C] = \begin{bmatrix} \frac{E(1 - \nu)}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)} & \frac{\nu E}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)} & \frac{\nu E}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu E}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)} & \frac{E(1 - \nu)}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)} & \frac{\nu E}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu E}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)} & \frac{\nu E}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)} & \frac{E(1 - \nu)}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix}$$

$$[S] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

#### 2.4.6. Özet

Farklı malzeme türleri için bağımsız elastik sabit sayıları aşağıda gösterilmiştir.

- Anizotropik: 21
- Monoklinik: 13
- Ortotropik: 9
- Enine izotropik: 5
- İzotropik: 2

Burada da görüldüğü üzere en karmaşık malzeme türü anizotropik, en basiti ise izotropik malzemedir. Gerilme ve şekil değiştirme ilişkisinin belirlenebilmesi için Hooke Yasası kullanılmaktadır. İzotropik malzemede sabit sayısı 2 olduğundan ortaya çıkan eşitlikler basit olacaktır. Fakat anizotropik malzemelerde 21 adet sabit yüzünden bu eşitliğin çözümü oldukça zorlaşacaktır. Bu tezin konusu olan karbon fiber kompozit malzemesi ise ortotropik bir malzemedir ve 9 adet bağımsız elastik sabiti bulunmaktadır. Bu sabitler deneysel olarak hesaplanmaktadır ve fiber tipine göre çok farklı değerler almaktadır. Ayrıca fiber açısı ve malzeme kalınlığının da malzeme özellikleri üzerinde büyük önemi vardır. Bu durumlar daha sonraki bölümlerde araştırılacaktır.

### 2.5. Ortotropik Malzeme İçin Rijitlik Matrisinin Mühendislik Katsayıları İle Yazılması

#### 2.5.1. Temel Denklemler

Mühendislik katsayıları; elastiklik modülü E, kayma modülü G ve Poisson oranı  $\nu$  olarak gösterilen, deneyler yolu ile elde edilen sabitlerdir.

1 yönündeki elastiklik modülü,  $E_1$ ,

$$E_1 = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_1} = \frac{1}{S_{11}}$$

ve benzer şekilde 2 ve 3 yönündeki elastiklik modülleri,

$$E_2 = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_2} = \frac{1}{S_{22}}$$

$$E_3 = \frac{\sigma_3}{\varepsilon_3} = \frac{1}{S_{33}} \quad (2.16)$$

şeklinde yazılabilir.

1-2 düzlemindeki Poisson oranları,  $\nu_{12}$  ve  $\nu_{21}$  aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$\nu_{12} = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \quad ve \quad \nu_{21} = -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

Diğer düzlemlerdeki oranlar da aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\nu_{13} = -\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1} \quad ve \quad \nu_{31} = -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3}$$

$$\nu_{23} = -\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2} \quad ve \quad \nu_{32} = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3} \quad (2.17)$$

2-3 düzlemindeki kayma modülü ise

$$G_{23} = G_{32} = \frac{\tau_{23}}{\gamma_{23}}$$

şeklinde yazılabilir.

Benzer şekilde 3-1 ve 1-2 düzlemlerindeki kayma modülleri,

$$G_{31} = G_{13} = \frac{\tau_{31}}{\gamma_{31}}$$

$$G_{12} = G_{21} = \frac{\tau_{12}}{\gamma_{12}} \quad (2.18)$$

yazılabilir.

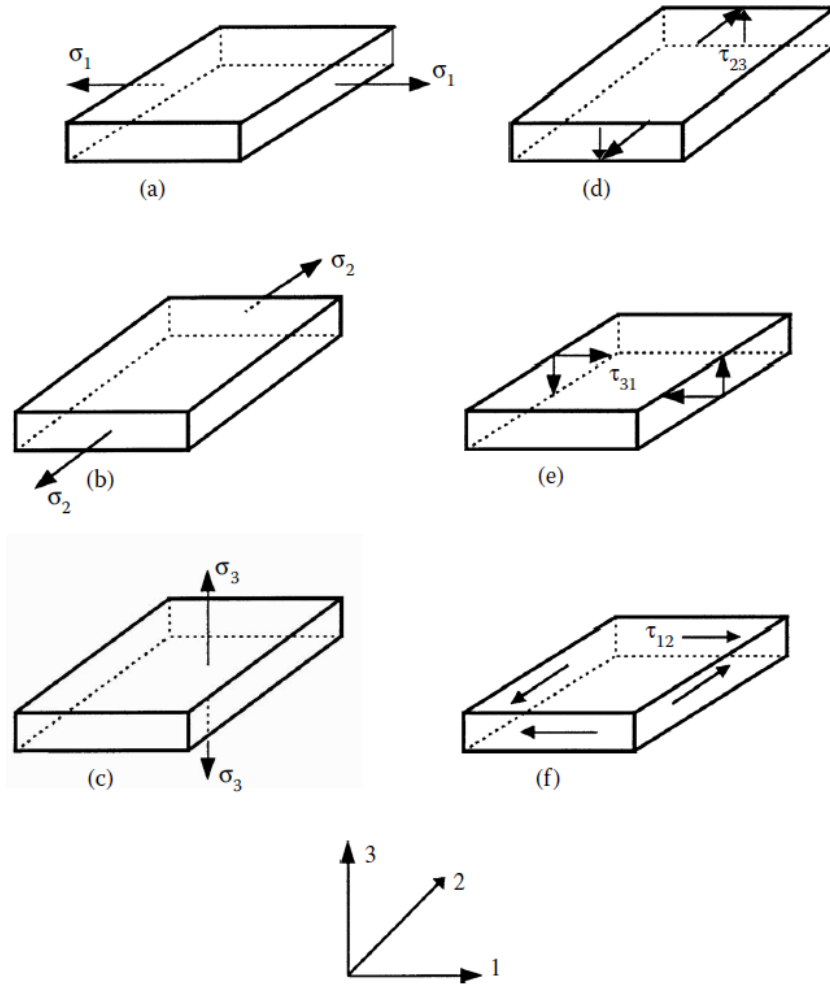
## 2.5.2. Rijitlik ve Esneklik Matrisinin Mühendislik Katsayıları İle Gösterimi

Mühendislik sabitleri tek eksenli gerilme ve kayma testleri gibi deneylerle bulunabilir. Böylece rijitlik ve esneklik matrislerindeki elemanlar fiziksel anlam taşıyan mühendislik katsayıları ile ifade edilebilirler.

Şekil 2.16'da ortotropik bir malzemenin çekme ve kayma yükleri altındaki durumu gösterilmiştir.

Buradaki yükleme durumlarında oluşan gerilmeler aşağıdaki gibi yazılabilir.

- Şekil 2.16a'da  $\sigma_1 \neq 0$  iken  $\sigma_2 = \sigma_3 = \tau_{23} = \tau_{31} = \tau_{12} = 0$
- Şekil 2.16b'de  $\sigma_2 \neq 0$  iken  $\sigma_1 = \sigma_3 = \tau_{23} = \tau_{31} = \tau_{12} = 0$
- Şekil 2.16c'de  $\sigma_3 \neq 0$  iken  $\sigma_1 = \sigma_2 = \tau_{23} = \tau_{31} = \tau_{12} = 0$
- Şekil 2.16d'de  $\tau_{23} \neq 0$  iken  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \tau_{31} = \tau_{12} = 0$
- Şekil 2.16e'de  $\tau_{31} \neq 0$  iken  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \tau_{23} = \tau_{12} = 0$
- Şekil 2.16f'de  $\tau_{12} \neq 0$  iken  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \tau_{23} = \tau_{31} = 0$



**Şekil 2.16 :** Ortotropik bir malzemenin yük altındaki durumu

Ortotropik bir malzeme için genelleştirilmiş Hooke Yasası ve rijitlik ile esneklik matrisleri aşağıda gösterilmiştir.

$$\begin{aligned}
[\sigma] = [C][\varepsilon] &\xrightarrow{\text{veya}} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \\
[\varepsilon] = [S][\sigma] &\xrightarrow{\text{veya}} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \quad (2.19)
\end{aligned}$$

Şekil 2.16'da gösterilen yükleme durumları ayrı ayrı incelenecektir.

### 2.5.2.1. Şekil 2.16a'daki durum

Şekil 2.16a'daki yük altında oluşan şekil değiştirmeler Hooke Yasası kullanılarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= S_{11} \sigma_1 \\
\varepsilon_2 &= S_{12} \sigma_1 \\
\varepsilon_3 &= S_{13} \sigma_1 \\
\gamma_{23} &= 0 \\
\gamma_{31} &= 0 \\
\gamma_{12} &= 0 \quad (2.20)
\end{aligned}$$

Üstteki eşitliklerden,

$$S_{11} = \frac{\varepsilon_1}{\sigma_1} \quad (2.21)$$

elde edilir.

Elde edilen bu eşitlik elastiklik modülü kullanılarak aşağıdaki gibi yeniden yazılabilir.

$$E_1 = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_1} = \frac{1}{S_{11}} \rightarrow S_{11} = \frac{1}{E_1} \quad (2.22)$$

Şekil değiştirmeler arasındaki ilişkiler kullanılarak,

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= S_{11}\sigma_1 \rightarrow \frac{S_{11}}{S_{12}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \\ \varepsilon_2 &= S_{12}\sigma_1 \\ \varepsilon_1 &= S_{11}\sigma_1 \rightarrow \frac{S_{11}}{S_{13}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3} \\ \varepsilon_3 &= S_{13}\sigma_1\end{aligned}\quad (2.23)$$

elde edilebilir. Buradan Poisson oranı eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned}v_{12} &= -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \rightarrow v_{12} = -\frac{S_{12}}{S_{11}} \\ v_{13} &= -\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1} \rightarrow v_{13} = -\frac{S_{13}}{S_{11}}\end{aligned}\quad (2.24)$$

yazılabilir.

### 2.5.2.2. Şekil 2.16b'deki durum

Şekil 2.16b'deki yük altında oluşan şekil değiştirmeler Hooke Yasası kullanılarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= S_{12}\sigma_2 \\ \varepsilon_2 &= S_{22}\sigma_2 \\ \varepsilon_3 &= S_{23}\sigma_2 \\ \gamma_{23} &= 0 \\ \gamma_{31} &= 0 \\ \gamma_{12} &= 0\end{aligned}\quad (2.25)$$

Üstteki eşitliklerden,

$$S_{22} = \frac{\varepsilon_2}{\sigma_2}\quad (2.26)$$

yazılabilir.

Elde edilen bu eşitlik elastiklik modülü kullanılarak aşağıdaki gibi yeniden yazılabilir.

$$E_2 = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_2} = \frac{1}{S_{22}} \rightarrow S_{22} = \frac{1}{E_2}\quad (2.27)$$

Şekil değiştirmeler arasındaki eşitliklerden,

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 &= S_{22} \sigma_2 \rightarrow \frac{S_{22}}{S_{12}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \\ \varepsilon_1 &= S_{12} \sigma_2 \\ \varepsilon_2 &= S_{22} \sigma_2 \rightarrow \frac{S_{22}}{S_{23}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3} \\ \varepsilon_3 &= S_{23} \sigma_2 \end{aligned} \quad (2.28)$$

elde edilebilir. Burada Poisson oranları kullanılarak,

$$\begin{aligned} \nu_{21} &= -\frac{\varepsilon_1 \text{ yields}}{\varepsilon_2} \rightarrow \nu_{21} = -\frac{S_{12}}{S_{22}} \\ \nu_{23} &= -\frac{\varepsilon_3 \text{ yields}}{\varepsilon_2} \rightarrow \nu_{23} = -\frac{S_{23}}{S_{22}} \end{aligned} \quad (2.29)$$

yazılabilir.

### 2.5.2.3. Şekil 2.16c'deki durum

Şekil 2.16c'deki yük altında oluşan şekil değiştirmeler Hooke Yasası kullanılarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= S_{13} \sigma_3 \\ \varepsilon_2 &= S_{23} \sigma_3 \\ \varepsilon_3 &= S_{33} \sigma_3 \\ \gamma_{23} &= 0 \\ \gamma_{31} &= 0 \\ \gamma_{12} &= 0 \end{aligned} \quad (2.30)$$

Üstteki eşitliklerden,

$$S_{33} = \frac{\varepsilon_3}{\sigma_3} \quad (2.31)$$

elde edilir.

Elde edilen bu eşitlik elastiklik modülü kullanılarak aşağıdaki gibi yeniden yazılabilir.

$$E_3 = \frac{\sigma_3}{\varepsilon_3} = \frac{1}{S_{33}} \rightarrow S_{33} = \frac{1}{E_3} \quad (2.32)$$

Şekil değiştirmeler arasındaki eşitliklerden,

$$\begin{aligned} \varepsilon_3 = S_{33}\sigma_3 \rightarrow \frac{S_{33}}{S_{13}} &= \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1} \\ \varepsilon_1 = S_{13}\sigma_3 & \\ \varepsilon_3 = S_{33}\sigma_3 \rightarrow \frac{S_{33}}{S_{23}} &= \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2} \\ \varepsilon_2 = S_{23}\sigma_3 & \end{aligned} \quad (2.33)$$

elde edilebilir. Burada Poisson oranları kullanılarak,

$$\begin{aligned} \nu_{31} = -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3} \rightarrow \nu_{31} &= -\frac{S_{13}}{S_{33}} \\ \nu_{32} = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3} \rightarrow \nu_{32} &= -\frac{S_{23}}{S_{33}} \end{aligned} \quad (2.34)$$

yazılabilir.

#### 2.5.2.4. Şekil 2.16d'deki durum

Şekil 2.16d'deki yük altında oluşan şekil değiştirmeler Hooke Yasası kullanılarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= 0 \\ \varepsilon_2 &= 0 \\ \varepsilon_3 &= 0 \\ \gamma_{23} &= S_{44}\tau_{23} \\ \gamma_{31} &= 0 \\ \gamma_{12} &= 0 \end{aligned} \quad (2.35)$$

Üstteki eşitliklerden,

$$S_{44} = \frac{\gamma_{23}}{\tau_{23}} \quad (2.36)$$

elde edilir.

Burada kayma modülü kullanılarak eşitlik tekrar yazılabilir.

$$G_{23} = \frac{\tau_{23}}{\gamma_{23}} = \frac{1}{S_{44}} \rightarrow S_{44} = \frac{1}{G_{23}} \quad (2.37)$$

### 2.5.2.5. Şekil 2.16e'deki durum

Şekil 2.16e'deki yük altında oluşan şekil değiştirmeler Hooke Yasası kullanılarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= 0 \\ \varepsilon_2 &= 0 \\ \varepsilon_3 &= 0 \\ \gamma_{23} &= 0 \\ \gamma_{31} &= S_{55}\tau_{31} \\ \gamma_{12} &= 0\end{aligned}\tag{2.38}$$

Üstteki eşitliklerden,

$$S_{55} = \frac{\gamma_{31}}{\tau_{31}}\tag{2.39}$$

elde edilir. Burada kayma modülü kullanılarak eşitlik tekrar yazılabilir.

$$G_{31} = \frac{\tau_{31}}{\gamma_{31}} = \frac{1}{S_{55}} \rightarrow S_{55} = \frac{1}{G_{31}}\tag{2.40}$$

### 2.5.2.6. Şekil 2.16f'deki durum

Şekil 2.16f'deki yük altında oluşan şekil değiştirmeler Hooke Yasası kullanılarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= 0 \\ \varepsilon_2 &= 0 \\ \varepsilon_3 &= 0 \\ \gamma_{23} &= 0 \\ \gamma_{31} &= 0 \\ \gamma_{12} &= S_{66}\tau_{12}\end{aligned}\tag{2.41}$$

Üstteki eşitliklerden,

$$S_{66} = \frac{\gamma_{12}}{\tau_{12}}\tag{2.42}$$

elde edilir.

Burada kayma modülü kullanılarak eşitlik tekrar yazılabilir.

$$G_{12} = \frac{\tau_{12}}{\gamma_{12}} = \frac{1}{S_{66}} \rightarrow S_{66} = \frac{1}{G_{12}} \quad (2.43)$$

### 2.5.2.7. Bölüm Özeti

Önceki bölümlerde görüldüğü üzere esneklik matrisi elemanları ( $S_{ij}$ ) mühendislik katsayıları ile ilişkilidirler.

Toplamda, 3 adet elastiklik modülü  $E_1$ ,  $E_2$  ve  $E_3$ ; 6 adet Poisson oranı  $\nu_{12}$ ,  $\nu_{13}$ ,  $\nu_{21}$ ,  $\nu_{23}$ ,  $\nu_{31}$ ,  $\nu_{32}$  ve 3 adet kayma modülü  $G_{23}$ ,  $G_{31}$ ,  $G_{12}$  esneklik matrisi elemanları ( $S_{ij}$ ) ile aşağıdaki gibi ilişkilendirilmiştir.

$$\begin{aligned} S_{11} &= \frac{1}{E_1} S_{22} = \frac{1}{E_2} S_{33} = \frac{1}{E_3} \\ \nu_{12} &= -\frac{S_{12}}{S_{11}} \nu_{13} = -\frac{S_{13}}{S_{11}} \nu_{21} = -\frac{S_{12}}{S_{22}} \\ \nu_{23} &= -\frac{S_{23}}{S_{22}} \nu_{31} = -\frac{S_{13}}{S_{33}} \nu_{32} = -\frac{S_{23}}{S_{33}} \\ S_{44} &= \frac{1}{G_{23}} = \frac{1}{G_{32}} S_{55} = \frac{1}{G_{31}} = \frac{1}{G_{13}} S_{66} = \frac{1}{G_{12}} = \frac{1}{G_{21}} \end{aligned} \quad (2.44)$$

Böylece  $S_{ii}$  sabitleri, bilinen mühendislik katsayıları ile ilişkilendirilmiştir.

Ayrıca elastiklik modülleri arasındaki ilişkilerden faydalanılarak Poisson oranları arasında bağlantı kurulabilmektedir.

Bunun için Poisson oranlarını  $S$  cinsinden yazarsak,

$$\nu_{12} = -\frac{S_{12}}{S_{11}} \quad ve \quad \nu_{21} = -\frac{S_{12}}{S_{22}} \quad (2.45)$$

Aşağıda gösterildiği üzere  $S$  ve  $E$ 'ler arasındaki bağıntılar kullanılarak,

$$S_{11} = \frac{1}{E_1} \rightarrow \frac{1}{S_{11}} = E_1 \quad ve \quad S_{22} = \frac{1}{E_2} \rightarrow \frac{1}{S_{22}} = E_2 \quad (2.46)$$

Poisson oranları bu katsayılar cinsinden yazılabilir.

$$\nu_{12} = -S_{12}E_1 \quad ve \quad \nu_{21} = -S_{12}E_2 \quad (2.47)$$

Bu denklemlerde  $S_{12}$  ortak değeri kullanılarak Poisson oranları,

$$\begin{aligned} S_{12} &= -\frac{\nu_{12}}{E_1} \\ S_{12} &= -\frac{\nu_{21}}{E_2} \end{aligned} \rightarrow \frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2}$$

yazılabilir. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned} \frac{\nu_{13}}{E_1} &= \frac{\nu_{31}}{E_3} \\ \frac{\nu_{23}}{E_2} &= \frac{\nu_{32}}{E_3} \end{aligned} \quad (2.48)$$

Buradan esneklik matrisi elemanları,

$$\begin{aligned} S_{12} &= -\frac{\nu_{12}}{E_1} = -\frac{\nu_{21}}{E_2} \\ S_{13} &= -\frac{\nu_{13}}{E_1} = -\frac{\nu_{31}}{E_3} \\ S_{23} &= -\frac{\nu_{23}}{E_2} = -\frac{\nu_{32}}{E_3} \end{aligned} \quad (2.49)$$

yazılabilir.

Görüldüğü üzere  $S_{12}$ ,  $S_{13}$  ve  $S_{23}$  sabitleri  $\nu_{ij}$  ve  $\nu_{ji}$  simetrikleri kullanılarak yazılmıştır.

Buradan esneklik matrisi Poisson oranları kullanılarak yazılırsa,

$$S = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

Rijitlik matrisi  $C$  esneklik matrisi  $S$ 'in tersi biçimde yazılabilir. Aşağıda ortotropik bir malzeme için rijitlik matrisi yazılmıştır.

$$C = \begin{bmatrix} \frac{1 - \nu_{23}\nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta} & \frac{\nu_{21} + \nu_{23}\nu_{31}}{E_2 E_3 \Delta} & \frac{\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{23}}{E_2 E_3 \Delta} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_{21} + \nu_{23}\nu_{31}}{E_2 E_3 \Delta} & \frac{1 - \nu_{13}\nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta} & \frac{\nu_{23} + \nu_{12}\nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{23}}{E_2 E_3 \Delta} & \frac{\nu_{23} + \nu_{12}\nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta} & \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21}}{E_1 E_2 \Delta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

Burada,

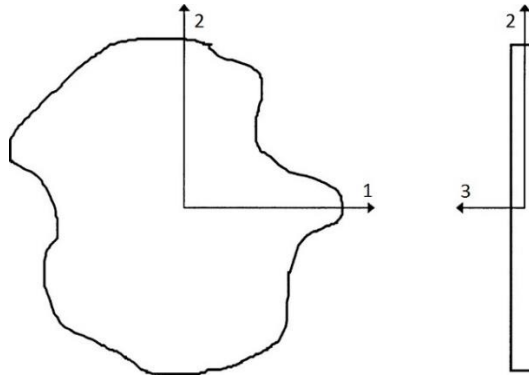
$$\Delta = \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{13}\nu_{31} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{12}}{E_1 E_2 E_3}$$

Görüldüğü üzere, rijitlik matrisi  $C$ 'nin hesaplanması esneklik matrisi  $S$ 'den daha zordur. Bu yüzden öncelikle esneklik matrisinin hesaplanıp, tersinin alınmasıyla rijitlik matrisinin elde edilmesi daha kolay olacaktır.

## 2.6. İki Boyutlu Tek Doğrultulu Lamina İçin Hooke Yasası

### 2.6.1. Düzlemsel gerilme yaklaşımı

Genel olarak laminalar, kalınlıkları az oldukları için, levha yapılar olarak kabul edilebilir. Levhanın alt ve üst yüzeylerinde yük olmadığı zaman gerilme durumu  $\sigma_3 = \tau_3 = \tau_{33} = 0$  olmaktadır. Levha çok ince olduğu için bu gerilme durumları levha içerisinde de çok az farklılık göstermekte ve 0 olarak kabul edilebilmektedir. Şekil 2.17'deki gibi levha yapılarında düzlem dışı yükleme durumu olmadığından düzlem gerilme yaklaşımı kullanılabilir. Bu yaklaşım kullanılarak 3 boyutlu gerilme - şekil değiştirme denklemleri 2 boyutta yazılabilmektedir.



Şekil 2.17 : İnce plaka için düzlemsel gerilme durumları

### 2.6.2. Hooke Yasası'nın iki boyut için yazılması

Tek doğrultulu laminalar ortotropik malzemeler grubuna girmektedir. Eğer lamina ince ise ve düzlem dışı bir yük taşıyorsa düzlemsel gerilme kabulü yapılabilmektedir. 2.5 ve 2.10 denklemleri kullanılarak ve  $\sigma_3 = \tau_3 = \tau_3 = 0$  alınarak

$$\begin{aligned}\varepsilon_3 &= S_{13}\sigma_1 + S_{23}\sigma_2 \\ \gamma_{23} &= \gamma_{31} = 0\end{aligned}\quad (2.52)$$

elde edilir. Burada  $\varepsilon_3$  bağımsız değildir,  $\varepsilon_1$  ve  $\varepsilon_2$  bir fonksiyondur. Bu yüzden  $\varepsilon_3$  2.10 denkleminde çıkarılabilir. Ayrıca  $\gamma_{23}$  ve  $\gamma_{31}$  0 olduğu için 2.10 denkleminde çıkarılabilir ve ortotropik malzemelerde düzlem gerilme durumu

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix}\quad (2.53)$$

şeklinde yazılabilir. Burada bağımsız 4 adet esneklik matris terimi  $S_{ij}$  bulunmaktadır. 2.53 denklemini gerilme şekil değiştirme durumu için ters biçimde yazılırsa

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix}\quad (2.54)$$

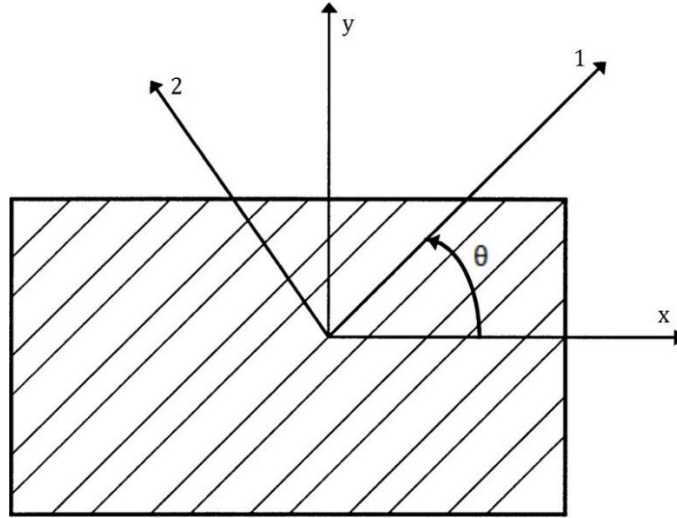
elde edilir. Burada  $Q_{ij}$ 'ler indirgenmiş rijitlik sabitleridir ve aşağıdaki gibi esneklik sabitlerine bağımlı yazılmaktadırlar.

$$\begin{aligned}Q_{11} &= \frac{S_{22}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2} \\ Q_{12} &= \frac{S_{12}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2} \\ Q_{22} &= \frac{S_{11}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2} \\ Q_{66} &= \frac{1}{S_{66}}\end{aligned}\quad (2.55)$$

### 2.6.3. İki boyutlu açılı lamina için Hooke Yasası

Genellikle kompozit malzemelerde enine doğrultuda rijitlik ve mukavemeti az olduğu için tek doğrultulu laminalar tercih edilmemektedir. Bu yüzden laminalar açılı olarak yerleştirilmektedir.

Açılı lamina için koordinat sistemleri Şekil 2.18’de gösterilmiştir. 1-2 koordinat sistemindeki eksenler, lokal eksen veya malzeme eksenini olarak adlandırılabilir. 1 doğrultusu fiberlere paralel, 2 doğrultusu ise fiberlere dik doğrultüdür. Bazı kaynaklarda fiber doğrultusu L ve dik doğrultü T olarak da gösterilmektedir. x-y koordinat sistemindeki eksenler ise global eksen takımı olarak adlandırılmaktadır. Bu 2 eksen takımı arasındaki açı  $\theta$  ile gösterilmektedir. 1-2 eksen takımı için gerilme-şekil değiştirme denklemleri daha önceki bölümlerde elde edilmiştir ve x-y eksen takımı için bu bölümde elde edileceklerdir.



**Şekil 2.18 :** Açılı lamina için lokal ve global eksen takımları

Global ve lokal eksen takımlarındaki gerilmeler birbirine  $\theta$  açısı ile aşağıdaki gibi ilişkilidir.

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = [T]^{-1} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

Burada  $[T]$  transformasyon matrisidir ve

$$[T]^{-1} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & -2sc \\ s^2 & c^2 & 2sc \\ sc & -sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix}$$

$$[T] = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2sc \\ s^2 & c^2 & -2sc \\ -sc & sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$c = \text{Cos}(\theta)$$

$$s = \text{Sin}(\theta) \quad (2.58)$$

2.54'teki gerilme-şekil değiştirme bağıntısı ve 2.56 denklemini kullanarak, lokal ve global gerilme-şekil değiştirme arasındaki ilişki

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = [T]^{-1}[Q] \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

şeklinde yazılabilir.

Ayrıca global ve lokal eksen takımlarındaki şekil değiştirmeler transformasyon matrisi ile ilişkili olarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12}/2 \end{bmatrix} = [T] \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy}/2 \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

Bu eşitlik,

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12}/2 \end{bmatrix} = [R][T][R]^{-1} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy}/2 \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

formuna dđnüşürülebilir. Burada,

$$[R] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

olmaktadır.

2.61 denklemini 2.59'da yerine koyarsak,

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = [T]^{-1}[Q][R][T][R]^{-1} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.63)$$

elde edilir. Bu eşitliği

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.64)$$

şeklinde yazabiliriz. Burada  $\bar{Q}_{ij}$  dđnüşürölmüş indirgenmiş rijitlik matrisidir ve

$$\bar{Q}_{11} = Q_{11}c^4 + Q_{22}s^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})s^2c^2$$

$$\bar{Q}_{12} = (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})s^2c^2 + Q_{12}(c^4 + s^2)$$

$$\begin{aligned}
\bar{Q}_{22} &= Q_{11}s^4 + Q_{22}c^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})s^2c^2 \\
\bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})c^3s - (Q_{22} - Q_{12} - 2Q_{66})s^3c \\
\bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})s^3c - (Q_{22} - Q_{12} - 2Q_{66})c^3s \\
\bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - Q_{12} - 2Q_{66})s^2c^2 + Q_{66}(s^4 + c^4) \quad (2.65)
\end{aligned}$$

şeklinde gösterilmektedir. Bu elemanlar  $Q_{11}$ ,  $Q_{12}$ ,  $Q_{22}$ ,  $Q_{66}$  ve lamina açısı  $\theta$ 'nın bir fonksiyonudur.

2.64 eşitliğinin tersi alınırsa

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{S}_{11} & \bar{S}_{12} & \bar{S}_{16} \\ \bar{S}_{12} & \bar{S}_{22} & \bar{S}_{26} \\ \bar{S}_{16} & \bar{S}_{26} & \bar{S}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

eşitliği elde edilir. Burada  $S_{ij}$  dönüştürülmüş indirgenmiş esneklik matrisi elemanlarıdır ve

$$\begin{aligned}
\bar{S}_{11} &= S_{11}c^4 + S_{22}s^4 + (2Q_{12} + Q_{66})s^2c^2 \\
\bar{S}_{12} &= (S_{11} + S_{22} - S_{66})s^2c^2 + S_{12}(s^4 + c^4) \\
\bar{S}_{22} &= S_{11}s^4 + S_{22}c^4 + (2S_{12} + S_{66})s^2c^2 \\
\bar{S}_{16} &= (2S_{11} - 2S_{12} - S_{66})c^3s - (2S_{22} - 2S_{12} - S_{66})s^3c \\
\bar{S}_{26} &= (2S_{11} - 2S_{12} - S_{66})s^3c - (2S_{22} - 2S_{12} - S_{66})c^3s \\
\bar{S}_{66} &= 2(2S_{11} + 2S_{22} - 4S_{12} - S_{66})s^2c^2 + S_{66}(s^4 + c^4) \quad (2.67)
\end{aligned}$$

şeklinde gösterilmektedir. Bu elemanlar  $S_{11}$ ,  $S_{12}$ ,  $S_{22}$ ,  $S_{66}$  ve lamina açısı  $\theta$ 'nın bir fonksiyonudur.

2.53 ve 2.54 denklemlerinde gösterilen, malzeme doğrultusunda yüklenmiş tek doğrultulu laminada gerilme ve şekil değiştirmeler için normal ve kayma terimleri arasında bağlantı oluşmamaktadır. Fakat 2.64 ve 2.66 eşitliklerinde açılı laminada normal ve kayma terimlerinde bağlantı oluşmaktadır. Açılı bir laminaya sadece normal gerilmeler etkidiğinde kayma şekil değiştirmeleri oluşmaktadır. Ayrıca bu laminaya sadece kayma gerilmeleri etkiyince normal şekil değiştirmeler meydana gelmektedir. Bu yüzden 2.64 ve 2.66 denklemleri genel ortotropik laminalar için gerilme ve şekil değiştirme bağıntıları olarak adlandırılmaktadır.



### 3. AÇILI LAMİNALARDA HASAR TEORİLERİ

Tasarımların başarılı olabilmesi için malzemelerin en az ve en etkili şekilde kullanılması gereklidir. Bu yüzden yapı üzerindeki gerilmelerin hasar oluşturma etkileri teorik ve deneysel olarak incelenmelidir.

Tabakalı bir yapı olan laminatelerin mukavemeti her laminanın mukavemeti ile ilişkilidir. Bu durum laminatenin mukavemetini bulmayı oldukça kolaylaştırmaktadır. Tek doğrultulu laminaların kayma ve normal gerilme dayanımlarını temel alarak açılı laminaların hasar dayanımlarını incelemek mümkündür.

İzotropik bir malzeme olan çelikleri incelerken genel olarak normal ve kayma dayanımları önemlidir. Ayrıca dökme demir veya beton gibi bazı malzemelerde normal gerilme, çekme ve basma altında farklı olabilmektedir. Bu durumlar göze alındığında izotropik bir malzemede hasar teorisi, asal normal gerilme ve maksimum kayma gerilmesine bağlı olmaktadır. Yapı üzerinde oluşan maksimum gerilme bu değerlerden büyükse hasar meydana gelecektir.

#### 3.1. Emniyet Katsayısı

Hasar teorilerinde laminanın hasar alıp almadığını bulabiliriz. Fakat bu tek başına yeterli olmayabilir. Eğer lamina hasar almadıysa daha ne kadar yük taşıyabildiği ya da hasar aldıysa ne kadar yük düşürülmesi gerektiğini de bilmek önemlidir. Bu amaçla emniyet katsayısı

$$SR = \frac{\text{Uygulanabilecek maksimum yük}}{\text{Uygulanan yük}} \quad (3.1)$$

şeklinde tanımlanabilir.

Bu katsayı bütün hasar teorilerinde uygulanabilmektedir. Eğer  $SR > 1$  ise uygulanan yük güvenlidir ve emniyet katsayısı oranında artırılabilir. Eğer  $SR < 1$  ise uygulanan yük fazladır ve emniyet katsayısı oranında azaltılması gereklidir.  $SR = 1$  durumunda uygulanan yük hasarın oluşacağı yüküdür.

### 3.2. Maksimum Gerilme Hasar Teorisi

Maksimum gerilme hasar teorisi, izotropik malzemelerde kullanılan Rankine maksimum normal gerilme ve Tresca maksimum kayma gerilmesi teorilerine benzerdir. Lamina üzerine etkiyen gerilmeler, lokal eksenlerdeki normal ve kayma gerilmelerine indirgenmektedir. Laminanın lokal eksenlerindeki bu gerilmeler, tek doğrultulu bir laminanın mukavemet değerleriyle kıyaslanmaktadır. Bu değerlere eşit veya fazla olması durumunda hasar meydana gelecektir.

Laminanın global eksenleri üzerindeki gerilme veya şekil değiştirmeleri, 2.56 eşitliği kullanılarak lokal eksenlere dönüştürülebilir. Lokal eksenlerdeki bu gerilmeler

$$\begin{aligned} -(\sigma_1^C)_{ult} < \sigma_1 < (\sigma_1^T)_{ult} \\ -(\sigma_2^C)_{ult} < \sigma_2 < (\sigma_2^T)_{ult} \\ -(\tau_{12})_{ult} < \tau_{12} < (\tau_{12})_{ult} \end{aligned} \quad (3.2)$$

durumlarından herhangi birini sağlamadığında hasara yol açacaktır.

Burada  $(\sigma_1^C)_{ult}$ ,  $(\sigma_2^C)_{ult}$ , maksimum basma gerilmesi dayanımı,  $(\sigma_1^T)_{ult}$ ,  $(\sigma_2^T)_{ult}$ , maksimum çekme gerilmesi dayanımı,  $(\tau_{12})_{ult}$  maksimum kayma gerilmesi dayanımı ve  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\tau_{12}$  malzemenin lokal eksenlerinde oluşan gerilmeleri ifade etmektedir. Basma gerilmeleri ters yönde oluşacağı için negatif olarak yazılmıştır.

### 3.3. Maksimum Şekil Değiştirme Hasar Teorisi

Bu teori izotropik malzemelerde kullanılan, St. Venant'ın maksimum normal şekil değiştirme teorisi ve Tresca'nın maksimum kayma gerilmesi teorisini temel almaktadır. Laminada oluşan şekil değiştirmeler lokal eksenlere indirgenip, tek doğrultulu laminalar için maksimum şekil değiştirme dayanımlarıyla karşılaştırılır. Eğer lokal eksenlerdeki bu şekil değiştirmeler maksimum değerlere ulaşır veya geçerse hasar meydana gelecektir. 2.59 ve 2.60 eşitlikleri kullanılarak gibi açılı bir laminadaki gerilme ve şekil değiştirmeler lokal eksenlere indirgenebilir. Lokal eksenlerdeki bu şekil değiştirmeler

$$\begin{aligned} -(\varepsilon_1^C)_{ult} < \varepsilon_1 < (\varepsilon_1^T)_{ult} \\ -(\varepsilon_2^C)_{ult} < \varepsilon_2 < (\varepsilon_2^T)_{ult} \\ -(\gamma_{12})_{ult} < \gamma_{12} < (\gamma_{12})_{ult} \end{aligned} \quad (3.3)$$

durumlarından herhangi birini sağlamadığında hasara yol açacaktır.

Burada  $(\varepsilon_1^C)_{ult}$ ,  $(\varepsilon_2^C)_{ult}$ , maksimum basma şekil değiştirmesi dayanımı,  $(\varepsilon_1^T)_{ult}$ ,  $(\varepsilon_2^T)_{ult}$ , maksimum çekme şekil değiştirmesi dayanımı,  $(\gamma_{12})_{ult}$  maksimum kayma şekil değiştirmesi dayanımı ve  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $\gamma_{12}$  malzemenin lokal eksenlerinde oluşan şekil değiştirmeleri ifade etmektedir.

Malzemenin maksimum şekil değiştirme dayanımı, maksimum gerilme dayanımı ve elastik modülü kullanılarak, hasar oluşuncaya kadar gerilme – şekil değiştirme ilişkisinin lineer olduğu kabul edilerek bulunabilir. Maksimum şekil değiştirme hasar teorisinde de maksimum gerilme hasar teorisinde olduğu gibi şekil değiştirme elemanları arasında bağlantı yoktur, yani bütün elemanlar ayrı ayrı incelenmelidir. Ayrıca bu iki teori birbirinden farklı sonuçlar vermektedir. Çünkü laminadaki lokal şekil değiştirmeleri Poisson oranından etkilenecektir. Bu iki teorisinin aynı sonuçları vermesi sadece Poisson oranının 0 olmasıyla gerçekleşebilir.

#### 3.4. Tsai – Hill Hasar Teorisi

Bu teori, izotropik malzemelerdeki Von – Mises şekil değiştirme enerjisi hasar teorisinin anizotropik malzemeler için oluşturulmuş halidir. Buradaki çarpılma enerjisi yapının tamamındaki şekil değiştirmenin bir parçasıdır. Yapı içerisindeki şekil değiştirme enerjisi iki bölüme ayrılmaktadır. Bunlar, hacimdeki değişime bağlı olan genişleme enerjisi ve şekildeki değişime bağlı olan çarpılma enerjisidir. Yapının hasar alabilmesi için çarpılma enerjisinin yapının taşıyabileceği değeri geçmesi gerekmektedir. Bu teoriye göre laminanın hasar alması için

$$(G_2 + G_3)\sigma_1^2 + (G_1 + G_3)\sigma_2^2 + (G_1 + G_2)\sigma_3^2 - 2G_3\sigma_1\sigma_2 - 2G_2\sigma_1\sigma_3 - 2G_1\sigma_2\sigma_3 + 2G_4\tau_{23}^2 + 2G_5\tau_{13}^2 + 2G_6\tau_{12}^2 < 1 \quad (3.4)$$

kuralını sağlamaması gerekmektedir.  $G_1$ ,  $G_2$ ,  $G_3$ ,  $G_4$ ,  $G_5$  ve  $G_6$  değerleri hasar dayanımlarına bağlı olarak bulunan mukavemet kriterleridir ve aşağıdaki gibi elde edilirler.

- Tek doğrultulu lamina için 3.3 denkleminde  $\sigma_1 = (\sigma_1^T)_{ult}$  konulursa laminada hasar meydana gelecektir ve denklem aşağıda forma dönüşecektir.

$$(G_2 + G_3)(\sigma_1^T)_{ult}^2 = 1 \quad (3.5)$$

- Tek doğrultulu lamina için 3.3 denklemine  $\sigma_2 = (\sigma_2^T)_{ult}$  konulursa laminada hasar meydana gelecektir ve denklem aşağıda forma dönüşecektir.

$$(G_1 + G_3)(\sigma_2^T)_{ult}^2 = 1 \quad (3.6)$$

- Tek doğrultulu lamina için 3.3 denklemine  $\sigma_3 = (\sigma_2^T)_{ult}$  konulursa laminada hasar meydana gelecektir ve denklem aşağıda forma dönüşecektir.

$$(G_1 + G_3)(\sigma_2^T)_{ult}^2 = 1 \quad (3.7)$$

- Tek doğrultulu lamina için 3.3 denklemine  $\tau_{12} = (\tau_{12})_{ult}$  konulursa laminada hasar meydana gelecektir ve denklem aşağıda forma dönüşecektir.

$$2G_6(\tau_{12})_{ult}^2 = 1 \quad (3.8)$$

Böylece

$$\begin{aligned} G_1 &= \frac{1}{2} \left( \frac{2}{[(\sigma_2^T)_{ult}]^2} - \frac{1}{[(\sigma_1^T)_{ult}]^2} \right) \\ G_2 &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{[(\sigma_1^T)_{ult}]^2} \right) \\ G_3 &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{[(\sigma_1^T)_{ult}]^2} \right) \\ G_3 &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{[(\tau_{12})_{ult}]^2} \right) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Tek doğrultulu laminalardaki düzlem gerilme yaklaşımında  $\sigma_3 = \tau_{31} = \tau_{23} = 0$  olduğuna göre 3.4 denklemini

$$\left[ \frac{\sigma_1}{(\sigma_1^T)_{ult}} \right]^2 - \left[ \frac{\sigma_1 \sigma_2}{(\sigma_1^T)_{ult}^2} \right] + \left[ \frac{\sigma_2}{(\sigma_2^T)_{ult}} \right]^2 + \left[ \frac{\tau_{12}}{(\tau_{12})_{ult}} \right]^2 < 1 \quad (3.10)$$

şeklinde yazılabilir. Lamina üzerindeki global gerilmelerden lokal gerilmeler elde edilerek ve bu denklem kullanılarak yapının hasar alıp almadığı bulunabilmektedir.

### 3.5. Düzenlenmiş Tsai – Hill Hasar Teorisi

Tsai – Hill hasar teorisinde 3 adet çekme gerilme değişkeni kullanılmıştır. Bu durum basma gerilmeleri altında çıkan sonucun düşük olmasına yol açmaktadır. Çünkü tek doğrultulu bir laminada enine çekme dayanımı, enine basma dayanımından daha düşüktür. Denklem içine basma gerilmelerini de ekleyerek,

$$\left[\frac{\sigma_1}{X_1}\right]^2 - \left[\left(\frac{\sigma_1}{X_2}\right)\left(\frac{\sigma_2}{X_2}\right)\right] + \left[\frac{\sigma_2}{Y}\right]^2 + \left[\frac{\tau_{12}}{S}\right]^2 < 1 \quad (3.11)$$

Düzenlenmiş Tsai – Hill hasar teorisini elde etmiş oluruz. Burada

$$\sigma_1 > 0 \text{ ise } X_1 = (\sigma_1^T)_{ult} \quad \sigma_1 < 0 \text{ ise } X_1 = (\sigma_1^C)_{ult}$$

$$\sigma_2 > 0 \text{ ise } X_2 = (\sigma_1^T)_{ult} \quad \sigma_2 < 0 \text{ ise } X_2 = (\sigma_1^C)_{ult}$$

$$\sigma_2 > 0 \text{ ise } Y = (\sigma_2^T)_{ult} \quad \sigma_2 < 0 \text{ ise } Y = (\sigma_2^C)_{ult}$$

$$S = (\tau_{12})_{ult}$$

şeklindedir.

Düzenlenmiş Tsai – Hill hasar teorisinden çıkan sonuçlar diğer teorilere göre gerçeğe daha yakındır.



## 4. KOMPOZİT KABUK YAPILARIN BURKULMASI

### 4.1. Kabuk Yapı

Kabuklar, orta yüzeyleri en az bir doğrultuda kavisli olan ince cidarlı yapılardır. Silindirik ve konik kabuklar bir doğrultuda kavisli olmasına rağmen küresel kabuklar iki doğrultuda kavislidir.

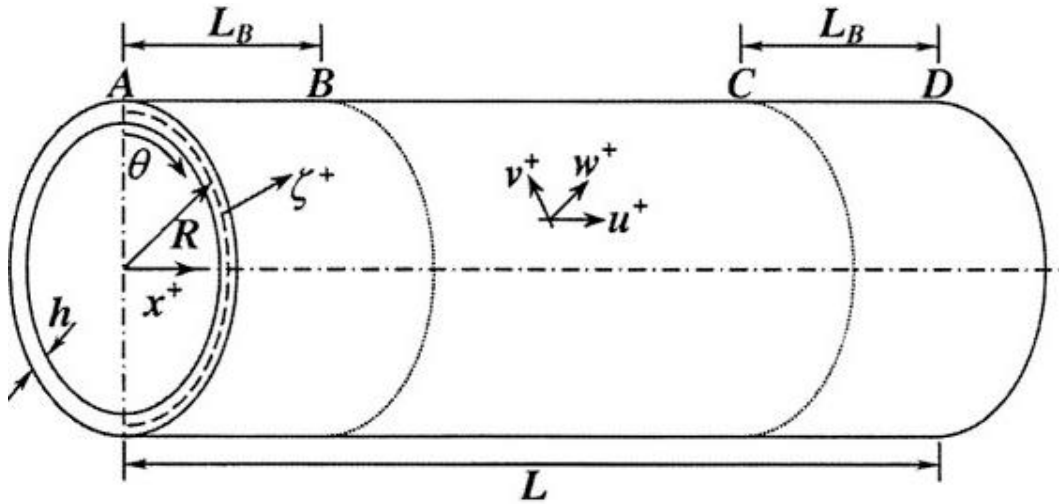
Bu yapılara örnek olarak, otomobil dış yüzey sacları ve yumurta kabuğu gibi yapılar verilebilir.

### 4.2. Kompozit Silindirik Kabukların Analizi

#### 4.2.1. Genel denklemler

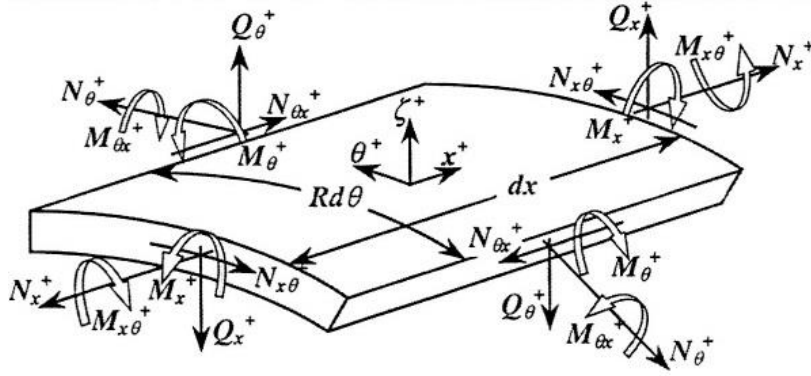
Şekil 4.1’de en basit kabuk yapı olan silindirik kabuk yapı gösterilmiştir.

$u$ ,  $v$  ve  $w$  yer değiştirmelerin pozitif doğrultularını göstermektedir.  $x$  ve  $\xi$  koordinatların pozitif doğrultularını,  $\theta$  ise çevresel doğrultuyu göstermektedir.



Şekil 4.1 : Silindirik kabuk geometrisi

Şekil 4.2’de pozitif gerilme bileşenleri ve gerilme çiftleri gösterilmiştir.



**Şekil 4.2 :** Gerilme bileşenlerinin pozitif doğrultuları

Klasik plak teorisine benzer şekilde klasik kabuk teorisi de aşağıdaki yer değiştirme yaklaşımlarını içermektedir.

$$\sigma_{\xi} = \varepsilon_{\xi} = \varepsilon_{x\xi} = \varepsilon_{\theta\xi} = 0$$

$$u(x, \theta, \xi) = u_0(x, \theta) + \xi\beta_x(x, \theta)$$

$$v(x, \theta, \xi) = v_0(x, \theta) + \xi\beta_{\theta}(x, \theta) \quad (4.1)$$

Ayrıca Love'ın 1. yaklaşımına göre

$$\frac{h}{R} \ll 1 \quad (4.2)$$

olduğu durumlarda enine kayma deformasyonları ihmal edilebilmektedir. Kompozit kabuk yapıların tam olarak analiz edilebilmesi için enine kayma deformasyonu göz önüne alınması gerekmektedir. Çünkü elastiklik modülü fiber doğrultusunda baskın bir özellik olmasına rağmen matris doğrultusunda enine kayma modülü baskındır. Fakat ön tasarım çalışmalarında eşitlikleri basitleştirmek için enine kayma deformasyonları ihmal edilebilir.

Silindirik kabuklar için denge denklemleri,

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial \theta} + q_x = 0 \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_x}{\partial \theta} + \frac{Q_{\theta}}{R} + q_{\theta} = 0 \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial Q_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{R} N_{\theta} + p(x, \theta) = 0 \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial \theta} - (Q_x - m_x) = 0 \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} - (Q_\theta - m_\theta) = 0 \quad (4.7)$$

şeklinde yazılabilir. Burada,

$$q_x = \sigma_{\xi x}(h/2) - \sigma_{\xi x}(-h/2) = \tau_{1x} - \tau_{2x}$$

$$q_\theta = \sigma_{\xi \theta}(h/2) - \sigma_{\xi \theta}(-h/2) = \tau_{1\theta} - \tau_{2\theta}$$

$$m_x = \frac{h}{2} [\sigma_{\xi x}(h/2) + \sigma_{\xi x}(-h/2)] = \frac{h}{2} [\tau_{1x} + \tau_{2x}]$$

$$m_\theta = \frac{h}{2} [\sigma_{\xi \theta}(h/2) + \sigma_{\xi \theta}(-h/2)] = \frac{h}{2} [\tau_{1\theta} + \tau_{2\theta}]$$

şeklindedir.

Denge denklemleri malzeme sisteminden bağımsızdır. Çevresel terimler yay uzaklığı  $ds = R d\theta$  olacak şekilde  $ds$ 'in terimleri şeklinde yazılabilir.  $q_x$ ,  $q_\theta$ ,  $m_x$  ve  $m_\theta$  büyüklükleri, kompozit silindirik kabuk cidarının iç ve dış yüzeylerindeki kayma gerilmelerinin fonksiyonlarıdır.  $p(x, \theta)$  ise pozitif  $\xi$  doğrultusundaki alan boyunca yatay yüküdür.

Enine kayma deformasyonlarının ihmal edildiği durumlarda  $\beta_x$  ve  $\beta_\theta$  dönme ve yer değiştirmeler arasındaki ilişkiler

$$\beta_x + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (4.8)$$

$$\beta_\theta + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{v_0}{R} = 0 \quad (4.9)$$

şeklinde yazılabilir.

Malzeme özelliklerini temel denklemler için kullandığımızda, basitlik için lamina dizilimi orta düzlemde simetrik olan yapılarda eğilme-uzama bağlantı matrisi  $[B]=0$  alınır ve diğer bağlantı matrislerinin  $( )_{16}$  ve  $( )_{26}$  terimleri 0 alınır.

Ayrıca en basit yapı olan tek laminadan oluşmuş kabuk yapılar için gerilme – şekil değiştirme, şekil değiştirme – yer değiştirme ilişkileri,

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E_x} [\sigma_x - \nu_{x\theta} \sigma_\theta] = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \xi \left( \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \right) \quad (4.10)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E_x} [\sigma_\theta - \nu_{\theta x} \sigma_x] = \frac{1}{R} \left[ \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + w \right] + \frac{\xi}{R} \left( \frac{\partial \beta_\theta}{\partial \theta} \right) \quad (4.11)$$

$$\varepsilon_{x\theta} = \frac{1}{2G_{x\theta}} \sigma_{x\theta} \quad (4.12)$$

Düzlem içi rijitlik ve eğilme rijitlikleri,

$$K_x = \frac{E_x h}{(1 - \nu_{x\theta} \nu_{\theta x})}, K_\theta = \frac{E_\theta h}{(1 - \nu_{x\theta} \nu_{\theta x})}$$

$$D_x = \frac{E_x h^3}{12(1 - \nu_{x\theta} \nu_{\theta x})}, D_\theta = \frac{E_\theta h^3}{12(1 - \nu_{x\theta} \nu_{\theta x})} \quad (4.13)$$

şeklinde yazılabilmektedir.

Fiberler aksenal doğrultuda dizilmiş ise  $K_x = A_{11}$ ,  $K_\theta = A_{22}$ ,  $D_x = D_{11}$  ve  $D_\theta = D_{22}$  olmaktadır. Eğer fiberler çevresel doğrultuda dizilmiş ise indisler tersi şeklinde olmaktadır. Ayrıca ortotropik malzemelerde geçerli olan

$$\frac{\nu_{x\theta}}{E_x} = \frac{\nu_{\theta x}}{E_\theta} \quad (4.14)$$

eşitliği burada da geçerliliğini sürdürmektedir.

#### 4.2.2. Aksenal simetri

Yapı üzerine etkiyen bütün yükler simetrik ise tüm eşitliklerde  $\frac{\partial(\ )}{\partial x} = 0$  alınmaktadır. 4.10 ve 4.11 denklemlerinin  $d\xi$  ile çarpılarak  $-h/2$ 'den  $h/2$ 'e kadar integrasyonu sonucu gerilme bileşenleri,

$$N_x - \nu_{x\theta} N_\theta = E_x h \frac{\partial u_0}{\partial x}$$

$$N_\theta - \nu_{\theta x} N_x = E_\theta h \frac{w}{R}$$

şeklinde bulunur. Denklemler düzenlenirse,

$$N_x = K_x \left[ \frac{\partial u_0}{\partial x} + \nu_{\theta x} \frac{w}{R} \right] \quad (4.15)$$

$$N_\theta = K_\theta \left[ \nu_{x\theta} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{w}{R} \right] \quad (4.16)$$

şeklinde yazılabilir. Benzer şekilde 4.10 ve 4.11 denklemlerinin  $\xi d\xi$  ile çarpılarak  $-h/2$ 'den  $h/2$ 'e kadar integrasyonu sonucu,

$$M_x - \nu_{x\theta} M_\theta = -\frac{E_x h^3}{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$M_\theta - v_{\theta x} M_x = 0$$

bulunur. Denklemler düzenlenirse,

$$M_x = -D_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (4.17)$$

$$M_\theta = v_{\theta x} M_x \quad (4.18)$$

yazılabilir. Denklemler basitleştirmek için yüzey kayma gerilmeleri  $q_x = q_\theta = m_x = m_\theta = 0$  alınırsa kabuk denklemleri,

$$\frac{dN_x}{dx} = 0 \quad (4.19)$$

$$\frac{dQ_x}{dx} - \frac{N_\theta}{R} + p(x) = 0 \quad (4.20)$$

$$\frac{dM_x}{dx} - Q_x = 0 \quad (4.21)$$

$$\beta_x + \frac{dw}{dx} = 0 \quad (4.22)$$

$$\beta_\theta = 0 \quad (4.23)$$

$$N_x = K_x [\varepsilon_{x_0} + v_{\theta x} \varepsilon_\theta] = K_x \left[ \frac{du_0}{dx} + \frac{v_{\theta x}}{R} w \right] \quad (4.24)$$

$$N_\theta = K_\theta [\varepsilon_{\theta_0} + v_{x\theta} \varepsilon_{x_0}] = K_\theta \left[ v_{x\theta} \frac{du_0}{dx} + \frac{w}{R} \right] \quad (4.25)$$

$$M_x = -D_x \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (4.26)$$

$$M_\theta = v_{\theta x} M_x \quad (4.27)$$

$$Q_x = -D_x \frac{d^3 w}{dx^3} \quad (4.28)$$

şeklinde elde edilir. Denklem 4.19 ve 4.24'ten

$$\frac{d^2 u_0}{dx^2} + \frac{v_{\theta x}}{R} \frac{dw}{dx} = 0 \quad (4.29)$$

yazılabilir. Denklem 4.20, 4.25 ve 4.28'den

$$-D_x \frac{d^4 w}{dx^4} - \frac{K_\theta}{R} \left[ v_{x\theta} \frac{du_0}{dx} + \frac{w}{R} \right] + p(x) = 0 \quad (4.30)$$

elde edilir. 4.29 ve 4.30 denklemlerinden, ana denklem

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{K_\theta}{D_x R^2} (1 - \nu_{x\theta} \nu_{\theta x}) w = \frac{1}{D_x} \left[ p(x) - \nu_{\theta x} \frac{N_x}{R} \right] \quad (4.31)$$

şeklinde yazılabilir.

$$\varepsilon^4 = \frac{3(1 - \nu_{x\theta} \nu_{\theta x}) D_\theta}{h^2 R^2} \frac{D_\theta}{D_x} \quad (4.32)$$

tanımlanarak, yanal çökme  $w$  ve düzlem içi şekil değiştirmeler  $u_0$

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + 4\varepsilon^4 w = \frac{1}{D_x} \left[ p(x) - \frac{\nu_{\theta x}}{R} N_x \right] \quad (4.33)$$

$$\frac{d^2 u_0}{dx^2} + \frac{\nu_{\theta x}}{R} \frac{dw}{dx} = 0 \quad (4.34)$$

4.19 denkleminde görüldüğü üzere  $N_x$ , eksenel yönde uygulanan yük  $P$ 'e bağlı  $N_x = P/2\pi R$  olan bir sabittir. 4.33'te de görüldüğü gibi düzlem içi eksenel kuvvet, yanal yer değiştirme  $w$ 'ya bağlı olarak gösterilmiştir.

4.33 ve 4.34 denklemlerinden  $w$  ve  $u_0$  belirlendikten sonra, gerilme bileşenleri ve gerilme çiftleri 4.24'ten 4.28'e kadar olan denklemler kullanılarak elde edilebilir. Bundan sonra, kompozit kabukta tek lamina için gerilmeler bulunabilir.

$$\sigma_x = \frac{N_x}{h} + \frac{M_x \xi}{h^3/12} \quad (4.35)$$

$$\sigma_\theta = \frac{N_\theta}{h} + \frac{M_\theta \xi}{h^3/12} \quad (4.36)$$

$$\sigma_{xz} = \frac{3Q_x}{2h} \left[ 1 - \left( \frac{\xi}{h/2} \right)^2 \right] \quad (4.37)$$

4.33 denklemi elastik temel üzerindeki bir kirişin diferansiyel denklemi ile aynı yapıdadır.  $D_x$ , kirişin eğilme rijitliği  $EI$  ve  $4\varepsilon^4 w$  terimi kiriş katsayısı  $k$  ile değiştirilirse kiriş denklemi elde edilmiş olur. Bu şekilde elastik zemindeki kiriş için geçerli her denklem bulunabilir.

4.33'deki 4. dereceden denklemin kökleri standart yöntemlerle  $\mp \varepsilon(1 \mp i)$  şeklinde bulunabilir. Burada  $i = \sqrt{-1}$ 'dir. Böylece genel çözüm

$$w(x) = Ae^{-\varepsilon x} \cos \varepsilon x + Be^{-\varepsilon x} \sin \varepsilon x + Ce^{\varepsilon x} \cos \varepsilon x + Ee^{\varepsilon x} \sin \varepsilon x + w_p(x) \quad (4.38)$$

şeklinde elde edilir. Burada  $A$ ,  $B$ ,  $C$  ve  $E$  sınır şartları tarafından belirlenen integrasyon sabitleri  $w_p(x)$  ise kısmi integraldir.

Düzlem içi yer değiştirme  $u_0(x)$  denklem 4.24'ün integrali sonucu

$$u_0(x) = \frac{N_x x}{K_x} - \frac{v_{\theta x}}{R} \int w dx + F \quad (4.39)$$

elde edilir. Burada  $N_x$  sabittir ve  $F$  integrasyon sabitidir.

Eksenel simetrik yüklere maruz silindirik kabuk yapılarda her iki tarafta 3 tane olmak üzere 6 sınır şartı bulunmaktadır. Bu sınır şartları,

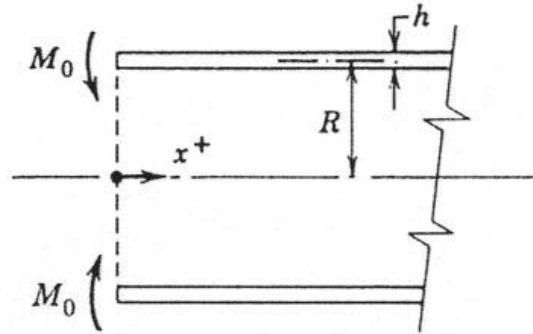
- 1-  $u_x$  belirlenmeli veya  $N_x = 0$  olmalıdır.
- 2-  $\frac{dw}{dx}$  belirlenmeli veya  $M_x = 0$  olmalıdır.
- 3-  $w$  belirlenmeli veya  $Q_x = 0$  olmalıdır.

basit ve ankastre mesnet ile serbest kenardaki sınır şartlarını içermektedir.

### 4.3. Sınır Yükleri ve Kısmi Çözümleri

#### 4.3.1. $x=0$ 'da $M_0$ gerilme çiftine maruz yarı sonlu boyuttaki silindirik kabuk

Şekil 4.3'de  $0 \leq x \leq \infty$  boyutlarında  $p(x) = 0$  olan silindirik kabuk yapı gösterilmiştir. 4.38 denkleminin çözümünde  $C = E = 0$  olduğu görülmektedir.



Şekil 4.3 : Bir sınırına kenar momenti uygulanmış silindirik kabuk

$A$  ve  $B$  sabitleri ise denklem 4.26 ve 4.28'den sınırdaki yüklemeye bağlı olarak aşağıdaki şekilde bulunmuştur.

$$M_x(0) = M_0 = -D_x \frac{d^2 w(0)}{dx^2} \quad (4.40)$$

$$Q_x(0) = 0 = -D_x \frac{d^3 w(0)}{dx^3} \quad (4.41)$$

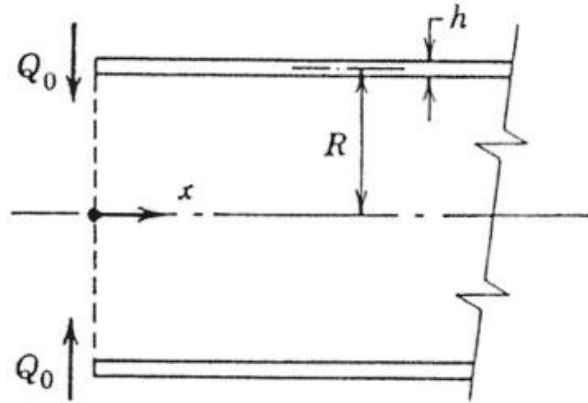
Bu sonuçlarla denklem 4.38'den çözüm

$$w(x) = \frac{M_0}{2\varepsilon^2 D_x} e^{-\varepsilon x} (\sin \varepsilon x - \cos \varepsilon x) \quad (4.42)$$

şeklinde bulunur. Momentin etkisinin kenardan uzaklaştıkça üssel olarak düştüğü görülmektedir.

#### 4.3.2. $x=0$ 'da $Q_0$ enine kayma kuvvetine maruz yarı sonlu boyuttaki silindirik kabuk

Şekil 4.4'te  $0 \leq x \leq \infty$  boyutlarında  $p(x) = 0$  olan silindirik kabuk yapı gösterilmiştir. 4.38 denkleminin çözümünde  $C = E = 0$  olduğu görülmektedir.



Şekil 4.4 : Bir sınırına kayma kuvveti uygulanmış silindirik kabuk

$A$  ve  $B$  sabitleri ise denklem 4.26 ve 4.28'den sınırdaki yükleme koşuluna bağlı olarak aşağıdaki şekilde bulunmuştur.

$$M_x(0) = 0 = -D_x \frac{d^2 w(0)}{dx^2} \quad (4.43)$$

$$Q_x(0) = Q_0 = -D_x \frac{d^3 w(0)}{dx^3} \quad (4.44)$$

Bu sonuçlarla denklem 3.38'den çözüm

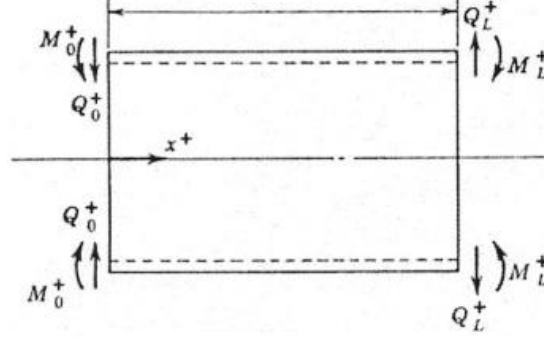
$$w(x) = \frac{Q_0}{2\varepsilon^3 D_x} e^{-\varepsilon x} (\cos \varepsilon x) \quad (4.45)$$

şeklinde bulunur.

Kayma kuvvetinin etkisinin kenardan uzaklaştıkça üssel olarak düştüğü görülmektedir.

### 4.3.3. $x=L$ 'de enine kayma kuvveti ve kenar momentine maruz yarı sonlu boyuttaki silindirik kabuk

Şekil 4.5'te  $-\infty \leq x \leq L$  boyutlarında  $p(x) = 0$  olan silindirik kabuk yapı üzerindeki pozitif doğrultudaki yüklemeler gösterilmiştir. 4.38 denkleminin çözümünde  $C = E = 0$  olduğu görülmektedir.



**Şekil 4.5 :** Silindirik kabukta kenar üzerinde pozitif doğrultudaki yüklemeler

$A$  ve  $B$  sabitleri denklem 4.26 ve 4.28'den sınırdaki moment koşuluna bağlı olarak aşağıdaki şekilde bulunmuştur.

$$M_x(L) = -D_x \frac{d^2 w(L)}{dx^2} = M_L \quad (4.46)$$

$$Q_x(L) = -D_x \frac{d^3 w(L)}{dx^3} = 0 \quad (4.47)$$

Bu sonuçlarla denklem 4.38'den çözüm

$$w(x) = \frac{M_L}{2\varepsilon^2 D_x} e^{-\varepsilon(L-x)} (\sin \varepsilon(L-x) - \cos \varepsilon(L-x)) \quad (4.48)$$

şeklinde bulunur. Momentin etkisinin denklem 4.42'deki gibi kenardan uzaklaştıkça üssel olarak düştüğü görülmektedir.

Sınırdaki ( $x = L$ ) kayma kuvveti koşulunu göz önüne alırsak,

$$M_x(L) = -D_x \frac{d^2 w(L)}{dx^2} = 0 \quad (4.49)$$

$$Q_x(L) = -D_x \frac{d^3 w(L)}{dx^3} = Q_L \quad (4.50)$$

şeklinde bulunur. Buradan çözüm,

$$w(x) = \frac{Q_L}{2\varepsilon^3 D_x} e^{-\varepsilon(L-x)} (\cos \varepsilon(L-x)) \quad (4.51)$$

bulunmaktadır. Kayma kuvvetinin etkisinin denklem 4.45'deki gibi kenardan uzaklaştıkça üssel olarak düştüğü görülmektedir.

#### 4.3.4. Genelleştirme

Düzlem içi aksenal simetrik ve yatay yüklere maruz silindirik kabuklarda  $A$  ve  $B$  terimlerinin  $x$  arttıkça azalarak 0 'a yaklaştığı,  $C$  ve  $E$  terimlerinin ise  $x$  uzaklığı arttıkça 0'dan başlayarak arttığı denklem 4.38'de görülmektedir.

Hesaplamalarda bu durum büyük sıkıntıya sebep olabilmektedir ve en iyi durum olan sınırlarda bile  $A$ ,  $B$ ,  $C$  ve  $E$  terimlerinin içerdiği  $e^{-\varepsilon x}$  ve  $e^{-\varepsilon(L-x)}$  ile  $e^{+\varepsilon x}$  ve  $e^{+\varepsilon(L-x)}$ 'nin üsleri çok büyük çıkmaktadır.

Bu durumu çözebilmek için Denklem 4.42, 4.45, 4.48 ve 4.51'teki çözümleri 4.38'deki genel denklem içinde kullanmamız gerekmektedir. Böylece denklem 4.54'te gösterildiği gibi yatay çökmenin kenarlardan uzaklaştıkça artması önlenmiş olur.

#### 4.3.5. Kısmi Çözümler

Denklem 4.33'te görüldüğü üzere uygulanan yükün 4. türevi 0 olursa kısmi çözüm

$$w_p(x) = \frac{1}{4\varepsilon^4 D_x} \left[ p(x) - \frac{v_{\theta x} N_x}{R} \right] \quad (4.52)$$

şeklinde bulunur.

Bu denklem aksenal simetrik olarak yüklenmiş silindirik kabuklarda kullanılabilir bir kısmi çözümdür.

Lamina edilmiş yapılarda ise  $v_{\theta x} = A_{12}/A_{11}$  yazılarak

$$w_p(x) = \frac{1}{4\varepsilon^4 D_x} \left[ p(x) - \frac{A_{12} N_x}{A_{11} R} \right] \quad (4.53)$$

kullanılabilir.

#### 4.3.6. Sınır tabaka eğilmesini içeren en iyi çözüm formu

Denklem 4.38'teki integrasyon sabiti olarak kullanılan  $A$ ,  $B$ ,  $C$  ve  $E$  terimleri yerine denklem 4.54'te  $M_0$ ,  $M_L$ ,  $Q_0$  ve  $Q_L$  terimleri kullanılmıştır.

$$\begin{aligned}
w(x) &= \frac{M_0}{2\varepsilon^2 D_x} e^{-\varepsilon x} (\sin \varepsilon x - \cos \varepsilon x) - \frac{Q_0}{2\varepsilon^3 D_x} e^{-\varepsilon x} \cos \varepsilon x \\
&+ \frac{M_L}{2\varepsilon^2 D_x} e^{-\varepsilon(L-x)} (\sin \varepsilon(L-x) - \cos \varepsilon(L-x)) \\
&+ \frac{Q_L}{2\varepsilon^3 D_x} e^{-\varepsilon(L-x)} (\cos \varepsilon(L-x)) + w_p(x)
\end{aligned} \tag{4.54}$$

Bu denklemin içerdiği trigonometrik terimlerin  $\mp 1$  arasında değerler alacağı ve negatif üsse sahip eksponansiyel terimlerin üssel olarak azalacağı görülmektedir. Bu yüzden bu denklemi kullanmak daha avantajlıdır.

$\varepsilon x$  veya  $\varepsilon(L-x)$  terimleri 5.15'ten büyük olursa  $e^{-\varepsilon x} \leq 0.006$  veya  $e^{-\varepsilon(L-x)} \leq 0.006$  olacağı için bunlarla çarpılan terimler ihmal edilebilmektedir.  $v_{\theta x} v_{x\theta} 0.09$  alınırsa,

$$\begin{aligned}
x &> 4\sqrt{Rh(D_x/D_\theta)^{1/2}} \\
L-x &> 4\sqrt{Rh(D_x/D_\theta)^{1/2}}
\end{aligned} \tag{4.55}$$

olduğu durumlarda terimlerin ihmal edilebilmesi geçerli olacaktır.

Sınırlardan uzaklığın  $4\sqrt{Rh(D_x/D_\theta)^{1/2}}$ 'den büyük olduğu durumlarda tüm homojen çözüm 0'a yaklaşacak ve ihmal edilebilecektir. Sürekli  $p(x)$  yükleme durumlarında kısmi çözüm, membran gerilmeleri ve şekil değiştirmelerine yol açacaktır. Bu yüzden  $0 \leq x \leq 4\sqrt{Rh(D_x/D_\theta)^{1/2}}$  ve  $0 \leq L-x \leq 4\sqrt{Rh(D_x/D_\theta)^{1/2}}$  sınır tabaka eğilme bölgesi olarak adlandırılır. Sınır tabaka eğilme bölgesinin uzunluğunun  $D_x$  ve  $D_\theta$  eğilme rijitliklerinin fonksiyonu olduğu görülebilir.

Hesaplamalarda denklem 4.54 oldukça kullanışlıdır. Sınır tabaka eğilme bölgesinden uzun silindirlerde  $0 \leq x \leq 4\sqrt{Rh(D_x/D_\theta)^{1/2}}$  bölgesinde  $M_L$  ve  $Q_L$  terimleri,  $0 \leq L-x \leq 4\sqrt{Rh(D_x/D_\theta)^{1/2}}$  bölgesinde  $M_0$  ve  $Q_0$  terimleri,  $4\sqrt{Rh(D_x/D_\theta)^{1/2}} \leq x \leq L-4\sqrt{Rh(D_x/D_\theta)^{1/2}}$  arasında ise  $M_L$ ,  $Q_L$ ,  $M_0$  ve  $Q_0$  terimleri ihmal edilebilmektedir. Ayrıca  $d^2 p(x)/dx^2 = d^3 p(x)/dx^3 = 0$  olduğu zaman

$$M_0 = M_x(0) \quad M_L = M_x(L)$$

$$Q_0 = Q_x(0) \quad Q_L = Q_x(L)$$

olmaktadır. Bu durum tek lamina için geçerli olmasına rağmen, çok laminalı yapılarda da bağlantılar 0 olduğu zaman kullanılabilir.

#### 4.4. Eksenel Simetrik Yük Altındaki Kompozit Silindirik Kabuklar İçin Genel Çözüm

Eksenel simetrik yük altındaki, ortotropik, orta düzlemde simetrik kompozit silindirik kabukların çökme denklemi 4.56'da gösterilmiştir.

$$\begin{aligned}
 w(x) = & \frac{M_0}{2\varepsilon^2 D_{11}} e^{-\varepsilon x} (\sin \varepsilon x - \cos \varepsilon x) - \frac{Q_0}{2\varepsilon^3 D_{11}} e^{-\varepsilon x} \cos \varepsilon x \\
 & + \frac{M_L}{2\varepsilon^2 D_{11}} e^{-\varepsilon(L-x)} (\sin \varepsilon(L-x) - \cos \varepsilon(L-x)) \\
 & + \frac{Q_L}{2\varepsilon^3 D_{11}} e^{-\varepsilon(L-x)} (\cos \varepsilon(L-x)) \\
 & + \frac{1}{4\varepsilon^4 D_{11}} \left[ p(x) - \frac{A_{12}}{A_{11}} \frac{N_x}{R} \right]
 \end{aligned} \tag{4.56}$$

Burada,

$$\varepsilon^4 = \frac{3(1 - \nu_{x\theta} \nu_{\theta x}) D_{22}}{h^2 R^2 D_{11}} \tag{4.57}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{dw}{dx} = & \frac{M_0}{\varepsilon D_{11}} e^{-\varepsilon x} \cos \varepsilon x + \frac{Q_0}{2\varepsilon^2 D_{11}} e^{-\varepsilon x} (\sin \varepsilon x + \cos \varepsilon x) \\
 & - \frac{M_L}{\varepsilon D_{11}} e^{-\varepsilon(L-x)} \cos \varepsilon(L-x) \\
 & + \frac{Q_L}{2\varepsilon^2 D_{11}} e^{-\varepsilon(L-x)} (\sin \varepsilon(L-x) \cos \varepsilon(L-x)) \\
 & + \frac{1}{4\varepsilon^4 D_{11}} \frac{dp(x)}{dx}
 \end{aligned} \tag{4.58}$$

$$\begin{aligned}
 M_x = & -D_{11} \frac{d^2 w}{dx^2} \\
 = & M_0 e^{-\varepsilon x} (\sin \varepsilon x + \cos \varepsilon x) - \frac{Q_0}{\varepsilon} e^{-\varepsilon x} \sin \varepsilon x \\
 & + M_L e^{-\varepsilon(L-x)} (\sin \varepsilon(L-x) + \cos \varepsilon(L-x)) \\
 & + \frac{Q_L}{\varepsilon} e^{-\varepsilon(L-x)} \sin \varepsilon(L-x) - \frac{1}{4\varepsilon^4} \frac{d^2 p(x)}{dx^2}
 \end{aligned} \tag{4.59}$$

$$\begin{aligned}
Q_x &= -D_{11} \frac{d^3 w}{dx^3} \\
&= -2M_0 \varepsilon e^{-\varepsilon x} \sin \varepsilon x + Q_0 e^{-\varepsilon x} (\cos \varepsilon x - \sin \varepsilon x) \\
&\quad + 2M_L \varepsilon e^{-\varepsilon(L-x)} \sin \varepsilon(L-x) \\
&\quad + Q_L e^{-\varepsilon(L-x)} [-\cos \varepsilon(L-x) + \sin \varepsilon(L-x)] \\
&\quad - \frac{1}{4\varepsilon^4} \frac{d^3 p(x)}{dx^3}
\end{aligned} \tag{4.60}$$

$$N_x = \text{sabit} \tag{4.61}$$

Eksenel simetrik yük için, her laminede gerilmeler

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12} & Q_{22} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_\theta^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12} & Q_{22} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ 0 \end{Bmatrix} \xi \tag{4.62}$$

şeklinde yazılabilir. Burada  $\varepsilon_x^0 = \frac{\partial u_0}{\partial x}$ ,  $\varepsilon_\theta^0 = \frac{w}{R}$  ve  $\kappa_x = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$  dir.

Lamine edilmiş bir kompozit silindirik kabukta  $\frac{d^2 p(x)}{dx^2} = 0$  olduğu durumda, sınır tabaka eğilme bölgesi dışındaki her yerde kayma gerilmeleri 0 olacaktır.

#### 4.5. Orta Düzlemde Asimetrik Silindirik Kabuk Yapılar

Orta düzlemde simetrik olmayan kompozit kabuklar çoğu uygulamada tercih edilmektedir. Silindir kabuğun iç ve dış yüzeyleri farklı ortam şartlarına maruz kalabilir. Dış yüzey nem, ani hasar, sıcaklık gibi şartlara karşı koyarken, iç yüzey kimyasallar, çözüldürücüler gibi maddelere direnmektedir. Bu yüzden iç ve dış yüzeyi farklı şartlarda imal edilen kompozitler yaygın olarak kullanılmaktadır.

##### 4.5.1. Diferansiyel denklemlerin elde edilmesi

Eksenel simetrik yük altındaki orta düzlemde asimetrik olan kabukların denge denklemleri ve şekil değiştirme – yer değiştirme bağıntıları 4.19 ile 4.28 arasındaki denklemlerle aynıdır. Fakat malzeme eksenleri 1-2-3,  $x - \theta - \varepsilon$  eksenleri ile çıkan özel ortotropik malzeme sınıfına giren orta düzlemde asimetrik kompozitler için temel denklemler

$$N_x = A_{11} \varepsilon_{x_0} + A_{12} \varepsilon_{\theta_0} + B_{11} \kappa_x + B_{12} \kappa_\theta \tag{4.63}$$

$$N_\theta = A_{12} \varepsilon_{x_0} + A_{22} \varepsilon_{\theta_0} + B_{12} \kappa_x + B_{22} \kappa_\theta \tag{4.64}$$

$$M_x = B_{11}\varepsilon_{x_0} + B_{12}\varepsilon_{\theta_0} + D_{11}\kappa_x + D_{12}\kappa_{\theta} \quad (4.65)$$

$$M_{\theta} = B_{12}\varepsilon_{x_0} + B_{22}\varepsilon_{\theta_0} + D_{12}\kappa_x + D_{22}\kappa_{\theta} \quad (4.66)$$

Bu sonuçları denge denklemleri ve şekil değiştirme –yer değiştirme bağıntılarını kullanarak 4.34 denklemine benzer şekilde

$$A_{11} \frac{d^2 u_0}{dx^2} + \frac{A_{12}}{R} \frac{dw}{dx} - B_{11} \frac{d^3 w}{dx^3} = 0 \quad (4.67)$$

elde edilir. Aynı şekilde 4.33 denklemine benzer

$$\begin{aligned} & \left( \frac{A_{11}D_{11} - B_{11}^2}{A_{11}} \right) \frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{2}{R} \left( \frac{A_{12}B_{11}}{A_{11}} - B_{12} \right) \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{1}{R^2} \left( \frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{A_{11}} \right) w \\ & = p(x) - \frac{A_{12}}{A_{11}} \frac{N_x}{R} \end{aligned} \quad (4.68)$$

denklemini elde edilir. İndirgenmiş eğilme rijitliği

$$D_e = \frac{A_{11}D_{11} - B_{11}^2}{A_{11}} \quad (4.69)$$

şeklinde tanımlanabilir. Ayrıca

$$4\varepsilon^4 \equiv \frac{1}{D_e R^2} \left( \frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{A_{11}} \right) \quad (4.70)$$

yazılabilir. Denklem 4.68

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{2}{D_e R} \left( \frac{A_{12}B_{11}}{A_{11}} - B_{12} \right) \frac{d^2 w}{dx^2} + 4\varepsilon^4 w = \frac{1}{D_e} \left[ p(x) - \frac{A_{12}}{A_{11}} \frac{N_x}{R} \right] \quad (4.71)$$

şekline dönüştürülebilir. Burada belirtilen  $D_e$  eğilme rijitliği terimi hariç, aksenal simetrik yüke maruz orta düzlemde simetrik silindirik kabuklara ait 4.33 denklemine benzerlik göstermektedir. Bu denklemin 2. terimi  $B_{11}$  ve  $B_{12}$  asimetri büyüklükleri ile değişiklik göstermektedir.

Orta düzlem asimetri parametresi olan

$$\emptyset \equiv \frac{B_{11}}{\sqrt{A_{11}D_{11}}} \quad (4.72)$$

kullanılarak denklem 4.71 yeniden düzenlenirse,

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + C\emptyset \frac{d^2 w}{dx^2} + 4\varepsilon^4 w = \frac{1}{D_e} \left[ p(x) - \frac{A_{12}}{A_{11}} \frac{N_x}{R} \right] \quad (4.73)$$

elde edilir. Burada

$$C \equiv \frac{2}{D_e R} \sqrt{\frac{D_{11}}{A_{11}} \frac{(A_{12} B_{11} - A_{11} B_{12})}{B_{11}}} \quad (4.74)$$

dir. Denklem 4.67 ve 4.73 orta düzlemde asimetric olan aksenal simetric yatay ve normal yüklere maruz kompozit silindirik kabuklar için ana diferansiyel denklemlerdir.

#### 4.5.2. Pertürbasyon çözümü

$|\emptyset| < \bar{\Gamma}1$  olduğu durumlarda denklem 4.73'de belirtilen yatay çökme pertürbasyon serisi olarak

$$w(x) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n(x) \emptyset^n \quad (4.75)$$

şeklinde yazılabilir. Bu seri 4.73 denkleminde yazılırsa,

$$\begin{aligned} & \frac{d^4 w_0(x)}{dx^4} + \emptyset \frac{d^4 w_1(x)}{dx^4} + \dots + \emptyset^n \frac{d^4 w_n(x)}{dx^4} \\ & + C \emptyset \left[ \frac{d^2 w_0(x)}{dx^2} + \emptyset \frac{d^2 w_1(x)}{dx^2} + \dots + \emptyset^n \frac{d^2 w_n(x)}{dx^2} \right] \\ & + 4\varepsilon^4 w_0(x) + 4\varepsilon^4 \emptyset w_1(x) + \dots + 4\varepsilon^4 \emptyset^n w_n(x) \\ & = \frac{1}{D_e} \left[ p(x) - \frac{A_{12}}{A_{11}} \frac{N_x}{R} \right] \end{aligned} \quad (4.76)$$

haline dönüştürülebilir.

Bu diferansiyel denklem  $\emptyset$ 'nin katları kullanılarak parçalara ayrılabilir. ( $\emptyset^0 = 1$ )

$$\begin{aligned} n = 0 & \Rightarrow \frac{d^4 w_0(x)}{dx^4} + 4\varepsilon^4 w_0(x) = \frac{1}{D_e} \left[ p(x) - \frac{A_{12}}{A_{11}} \frac{N_x}{R} \right] \\ n = 1 & \Rightarrow \frac{d^4 w_1(x)}{dx^4} \emptyset^1 + C \frac{d^2 w_0(x)}{dx^2} \emptyset^1 + 4\varepsilon^4 w_1(x) \emptyset^1 = 0 \\ n = n & \Rightarrow \frac{d^4 w_n(x)}{dx^4} \emptyset^n + C \frac{d^2 w_{n-1}(x)}{dx^2} \emptyset^n + 4\varepsilon^4 w_n(x) \emptyset^n = 0 \end{aligned} \quad (4.77)$$

$n = 0$  olduğu durumda diferansiyel denklem klasik aksenal ve orta düzlem simetrisine sahip silindirik kabuk denkleminde benzerdir.  $n \geq 1$  olduğu durumlarda 2. terim  $n - 1$ 'deki halinin  $w$  çözümünü içermektedir. Bu durumda

denklemdaki bu terim diğer tarafta yazılırsa ve  $n = 0$ 'da 1 bulunan  $\emptyset$  terimleri yok edilirse,

$$\begin{aligned}
 n = 0 &\Rightarrow \frac{d^4 w_0(x)}{dx^4} + 4\varepsilon^4 w_0(x) = \frac{1}{D_e} \left[ p(x) - \frac{A_{12}}{A_{11}} \frac{N_x}{R} \right] \\
 n = 1 &\Rightarrow \frac{d^4 w_1(x)}{dx^4} \emptyset^1 + 4\varepsilon^4 w_1(x) \emptyset^1 = -C \frac{d^2 w_0(x)}{dx^2} \emptyset^1 \\
 n > 1 &\Rightarrow \frac{d^4 w_n(x)}{dx^4} \emptyset^n + 4\varepsilon^4 w_n(x) \emptyset^n = -C \frac{d^2 w_{n-1}(x)}{dx^2} \emptyset^n \quad (4.78)
 \end{aligned}$$

$n = 0$ 'daki denklemin yük fonksiyonu, silindir kabuk üzerine uygulanan yükü belirtir.  $n \geq 1$  için yük fonksiyonu  $n - 1$  içeren terimin içerisinde bilinen bir değer olarak yer almaktadır.

Bu çözüm tekniği ile 4.71 diferansiyel denklemi aksel simetrik, orta düzlem simetrik ve silindirik kabuk yapılar için düzenlenebilmektedir.

#### 4.5.3. Orta düzlemde asimetrik kabuklar için sınır tabaka eğilmesi ve kenar yükleri çözümü

Denklem 4.55'te gösterildiği üzere orta düzlemde asimetrik silindir kabukların sınır tabaka bölgesinin uzunluğu simetrik kabuklarla aynıdır.

Kiriş ve plaklardakine benzer şekilde silindirik kabuk yapılarda da aksel yük altında burkulma olabileceği gibi dış basınç ve aksel burulma altında da burkulma gerçekleşebilir. Eğer burkulma gerilmesi, yapının taşıyabileceği maksimum gerilmeden büyük olursa kabuk yapının burkularak hasar almasına yol açacaktır. Bu durum yapının yük taşıma kapasitesini belirleyen önemli bir etkidir.

#### 4.6. Kabuk Yapıların Burkulması

Kiriş ve plakaların burkulmaları için yapılan analitik çözümler, deney sonuçlarına oldukça yakın çıkmaktadır. Fakat kabuk yapılarda bu durum geçerli değildir. Kabuk yapılar için analitik çözüm bulmak oldukça zahmetlidir.

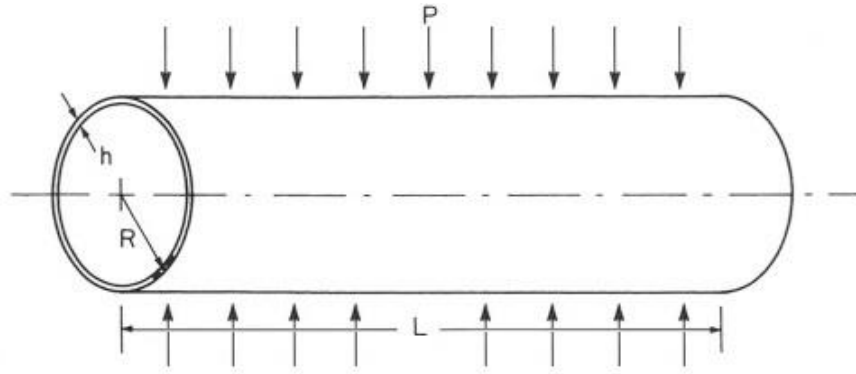
Kabuk yapılar başlangıç yapı kusurlarına karşı oldukça hassastırlar. Yapı üzerinde oluşabilecek boyut ve cidar kalınlığı farkları, fiber doğrultusunun değişkenliği gibi üretimden kaynaklanabilecek hatalar ile deney sırasında yükün yapı üzerine eşit bir şekilde dağıtılamaması gibi durumlar stabiliteyi oldukça etkilemektedirler. Bu

yüzden deneysel olarak bulunan sonuçlar genellikle analitik çözümlerden oldukça küçük çıkmaktadırlar.

Bu durumlar göz önüne alındığında, analitik çözümleri deneysel sonuçlar ile kıyaslamak için bir deneysel hasar faktörü ile çarpmamız gerekmektedir. Bu faktör olmadan analitik çözümlerin gerçekçi sonuçlar vermesi olanaksız hale gelmektedir.

#### 4.7. Silindirik Kompozit Kabuk Yapıların Yanal Basınç Altında Burkulması

Şekil 4.6'da görüldüğü gibi yarıçapı R, boyu L, cidar kalınlığı h ve üzerindeki yanal basınç P olan bir silindir gösterilmiştir.



Şekil 4.6 : Yanal basınç altındaki silindirik kompozit kabuk yapı

Yaklaşımlar:

- Özel anizotropi [ $( )_{16} = ( )_{26} = 0$ ]
- Burkulma öncesi deformasyonlar dahil edilmemiştir.
- Silindirin uçları düzlemde rijit davranan, düzlem dışında ise eğilme ve dönmelere izin veren çemberlerle desteklenmiştir.

Silindirin kritik burkulma basıncı,

$$P_{cr} = \frac{R}{n^2} \frac{\begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{vmatrix}} \quad (4.79)$$

Burada;

$P_{cr}$  kritik yanal basınç

$L$  silindirin boyu

$R$	silindirin yarıçapı
$m$	eksenel doğrultudaki burkulma yarım dalga sayısı
$n$	çevresel doğrultuda burkulma dalga sayısı

$$C_{11} = A_{11} \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 + A_{66} \left( \frac{n}{R} \right)^2 \quad (4.80)$$

$$C_{22} = A_{22} \left( \frac{n}{R} \right)^2 + A_{66} \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 \quad (4.81)$$

$$C_{33} = D_{11} \left( \frac{m\pi}{L} \right)^4 + (4D_{66} + 2D_{12}) \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 \left( \frac{n}{R} \right)^2 + D_{22} \left( \frac{n}{R} \right)^4 + \frac{A_{22}}{R^2} + \frac{2B_{22}}{R} \left( \frac{n}{R} \right)^2 + \frac{2B_{12}}{R} \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 \quad (4.82)$$

$$C_{11} = C_{21} = (A_{12} + A_{66}) \left( \frac{m\pi}{L} \right) \left( \frac{n}{R} \right) \quad (4.83)$$

$$C_{23} = C_{32} = (B_{12} + 2B_{66}) \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 \left( \frac{n}{R} \right) + \frac{A_{22}}{R} \left( \frac{n}{R} \right) + B_{22} \left( \frac{n}{R} \right)^3 \quad (4.84)$$

$$C_{13} = C_{31} = \frac{A_{12}}{R} \left( \frac{m\pi}{L} \right) + B_{11} \left( \frac{m\pi}{L} \right)^3 + (B_{12} + 2B_{66}) \left( \frac{m\pi}{L} \right) \left( \frac{n}{R} \right)^2 \quad (4.85)$$

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^N [\bar{Q}_{ij}]_k (h_k - h_{k-1}) \quad (4.86)$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N [\bar{Q}_{ij}]_k (h_k^2 - h_{k-1}^2) \quad (4.87)$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N [\bar{Q}_{ij}]_k (h_k^3 - h_{k-1}^3) \quad (4.88)$$

Burada  $A_{ij}$  uzama rijitlik matrisi,  $B_{ij}$  eğilme-uzama bağlantı matrisi,  $D_{ij}$  ise eğilme ya da esneklik matrisini ifade etmektedirler. Bu denklemlerin hesabında, fiberler çevresel doğrultudaysa  $\theta = 90^\circ$  alınır.

Boyutları belli olan bir silindirde, kritik basınç olan  $P_{cr}$ 'i bulmak için  $m$  ve  $n$  değişkenlerini bilmemiz gerekmektedir. Ayrıca tabaka sayıları ve açıları düzenlenerek oluşturulacak optimizasyon analizi sonucu en az ağırlık için en fazla kritik basıncı sağlayan yapı oluşturulabilir.

Kritik burkulma basıncı belirlendikten sonra, yapının bundan daha az bir yük altında gerilme hasarına uğramadığının kontrolü yapılması gerekmektedir. Yanal basınç altında burkulma için  $N_x = N_{x\theta} = M_x = M_\theta = M_{x\theta} = 0$  ve  $N_\theta = P_{cr}R$  denklemde kullanılarak  $[\varepsilon^0]$  ve  $[\kappa]$  matrisleri bulunmaktadır. Kritik burkulma basıncı tasarımda kullanılmadan önce (NASA)'da belirtildiği üzere 0.75 ile çarpılmalıdır.

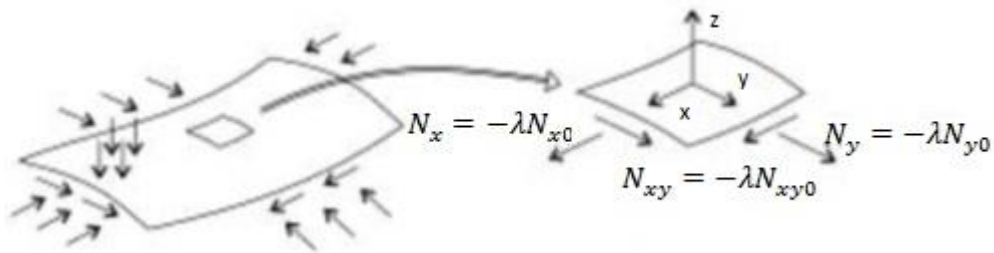
$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_\theta \\ N_{x\theta} \\ \dots \\ M_x \\ M_\theta \\ M_{x\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & \vdots & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \dots \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & \vdots & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_\theta^0 \\ 2\varepsilon_{x\theta}^0 \\ \dots \\ \kappa_x \\ \kappa_\theta \\ 2\kappa_{x\theta} \end{bmatrix} \quad (4.89)$$

Bu matrisler aşağıdaki denklemde yazılarak her lamina için gerilme bileşenleri olan  $\sigma_x, \sigma_\theta, \sigma_{x\theta}$  bulunabilmektedir. Böylece gerilme altındaki hasar kontrolü gerçekleştirilebilmektedir.

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \sigma_{x\theta} \end{bmatrix}_k = [\bar{Q}]_k \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_\theta^0 \\ \varepsilon_{x\theta}^0 \end{bmatrix} + z[\bar{Q}]_k \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_\theta \\ 2\kappa_{x\theta} \end{bmatrix} \quad (4.90)$$

#### 4.8. Kabuk Yapıların Burkulması (2. Teori)

Kenarlarında aksenal basınç ve kayma kuvvetleri, yan yüzeyinde ise basınç bulunan bir kompozit silindirik kabuk yapı Şekil 4.7'de gösterilmiştir.



Şekil 4.7 : Kabuk yapı üzerindeki yüzey ve kenar yüklemeleri ile membran kuvvetleri

Bu yükleme durumu kritik sınırı aştığında, kenarlardan uzakta yapı global veya lokal olarak burkulmaya başlamaktadır. Genel olarak lokal burkulma global burkulmadan daha fazla görülmektedir. Bu yüzden laminaların lokal burkulmasını incelenecektir.

Kenarlardan uzakta küçük bir yapı elemanı düşünürsek, bu eleman üzerindeki membran kuvvetleri,

$$N_x = -\lambda N_{x0}$$

$$N_y = -\lambda N_{y0}$$

$$N_{xy} = -\lambda N_{xy0}$$

şeklinde gösterilmektedir. Burada  $\lambda$  kuvvet parametresidir.

Kabuk yapının lokal olarak burkulması durumunda  $\lambda$  değeri ( $\lambda_{cr}$  ile ifade edilen) önem kazanmaktadır. Lokal burkulmanın gerçekleştiği bölgede kabuk yapıda sabit eğrisellikler oluşmaktadır. Bunlar  $R_x = \text{sabit}$ ,  $R_y = \text{sabit}$ ,  $R_{xy} = \text{sabit}$  şeklindedir. Referans yüzey Şekil 4.8'de gösterilen  $f(x,y)$  fonksiyonu ile belirlenmiş ve eğriselliklerin yarıçapları

$$\frac{1}{R_x} = \frac{-\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$\frac{1}{R_y} = \frac{-\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$\frac{1}{R_{xy}} = \frac{-2\partial^2 f}{\partial xy^2}$$

şeklindedir.

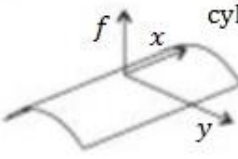
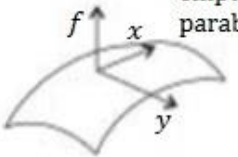
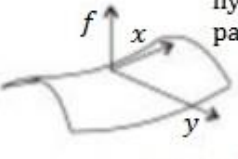
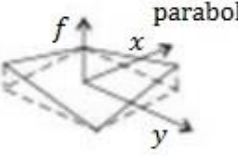
Bu kabuk yapıda

$$\left( \begin{bmatrix} O & L \\ L & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_o & M_n \\ M_n & M_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O & L \\ L & O \end{bmatrix}^T - \lambda \begin{bmatrix} \Phi_1[J] & \Phi_2[J] \\ \Phi_2[J] & \Phi_1[J] \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \end{Bmatrix} = 0 \quad (4.91)$$

denklemini yazılabilir.

Burada  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $v_1$ ,  $v_2$  düzlem içi ve  $w_1$ ,  $w_2$  düzlem dışı burkulma dalgası genlikleridir.

Denklem 4.92'de gösterilen  $1/R_x = 1/R_{xy} = 0$  ve  $R_y = R$  değerlerine sahip bir silindirdaki  $[O]$ ,  $[L]$ ,  $[J]$  matrisleri ve  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  parametreleri, Şekil 4.9'da gösterilmiş olan burkulma yüzeyindeki dalga desenlerini karakterize eden  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $c_1$  ve  $c_2$  sabitlerine bağlıdır.

	$f(x,y)$	$R_x$	$R_y$	$R_{xy}$
 cylinder	$f = -C_1 y^2$	0	$\frac{1}{2C_1}$	0
 elliptical paraboloid	$f = -C_1 y^2 - C_2 x^2$	$\frac{1}{2C_2}$	$\frac{1}{2C_1}$	0
 hyperbolic paraboloid	$f = -C_1 y^2 + C_2 x^2$	$-\frac{1}{2C_2}$	$\frac{1}{2C_1}$	0
 hyperbolic paraboloid	$f = -C_1 xy$	0	0	$\frac{1}{2C_1}$

Şekil 4.8 : Farklı kabuk yapıların eğrisellikleri

$$[O] = \begin{bmatrix} -\alpha & 0 & \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 1/R_x & 1/R_y & 0 & \alpha^2 + \beta^2 c_2^2 & \beta^2 + \alpha^2 c_1^2 & -2\alpha\beta(1 + c_1 c_2) \end{bmatrix}$$

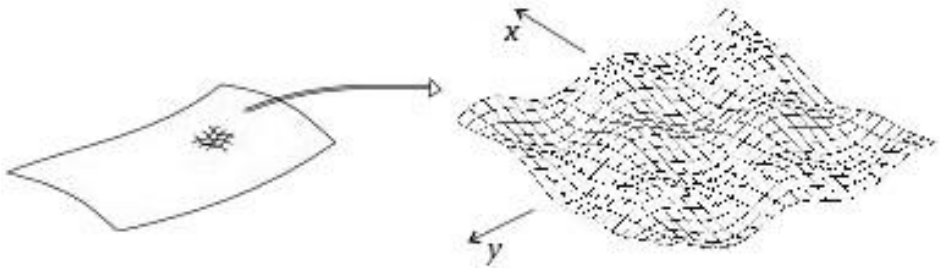
$$[L] = \begin{bmatrix} \beta c_2 & 0 & -\alpha c_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha c_1 & -\beta c_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/R_{xy} & -2\alpha\beta c_2 & -2\alpha\beta c_1 & 2(c_1 \alpha^2 + c_2 \beta^2) \end{bmatrix}$$

$$[M_0] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix}$$

$$[M_n] = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} - [M_0] \quad [J] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Phi_1 = N_{x\theta}(\alpha^2 + \beta^2 c_2^2) + N_{xy\theta} 2(\alpha^2 c_1 + \beta^2 c_2^2) + N_{y\theta}(\alpha^2 c_1 + \beta^2)$$

$$\Phi_2 = -2\alpha\beta(N_{x\theta} c_2 + N_{xy\theta}(1 + c_1 c_2) + N_{y\theta} c_1) \quad (4.92)$$



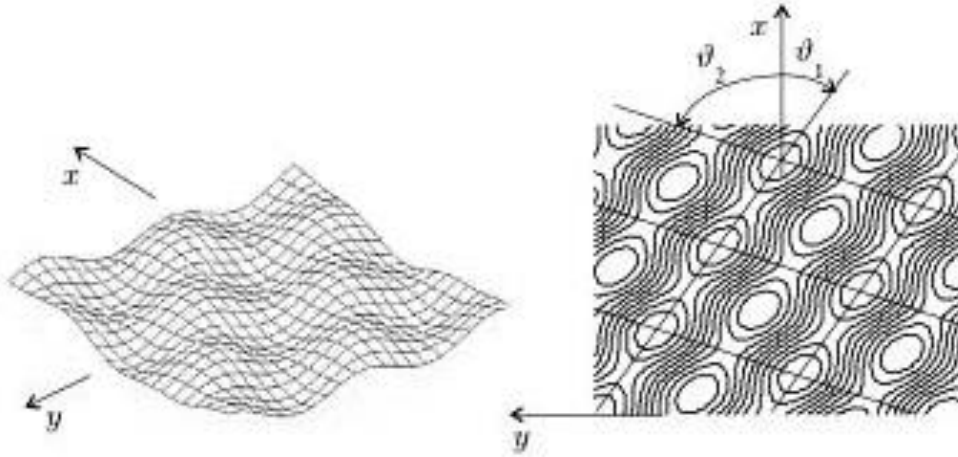
**Şekil 4.9 :** Kabuk yapının lokal burkulma durumundaki burkulma desenleri

Sağ ve sol yayılma dalgalarının maksimum noktalarından geçen çizgilerin doğrultuları

$$\tan v_1 = \frac{\alpha + \beta c_2}{\beta + \alpha c_1}$$

$$\tan v_2 = \frac{\alpha - \beta c_2}{\beta - \alpha c_1} \quad (4.93)$$

şeklinde yazılabilir ve Şekil 4.10'da gösterilmiştir.



**Şekil 4.10 :** Lokal burkulma deseni ve kontur grafiği gösterimi

Denklem 4.91'nin öz değerleri olan  $\lambda_{cr}$  kritik yük parametreleridir  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $c_1$  ve  $c_2$  sabitlerinin farklı değerleri için hesaplanması gerekmektedir. Bu hesapların sonucunda  $\lambda_{cr}$ 'in en düşük değeri önemlidir.

$\alpha$ ,  $\beta$ ,  $c_1$  ve  $c_2$  bilindikten sonra, referans yüzeyden çökme miktarı aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

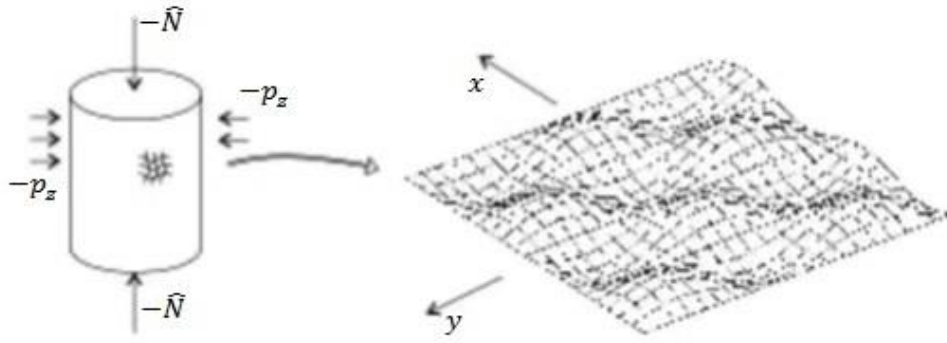
$$w_B^0 = w_1 \sin(\alpha(x + c_1 y)) \sin(\beta(y + c_2 x))$$

$$+ w_2 \sin(\alpha(x + c_1 y)) \cos(\beta(y + c_2 x)) \quad (4.94)$$

#### 4.8.1. Silindirlerin burkulması

Genel kabuk yapı analizi içerisinde  $R = R_y$  ve  $1/R_x = 1/R_{xy} = 0$  yazılarak silindirler için burkulma formülleri elde edilebilir.

Ortotropik kompozit silindirlerde, ortotropi yönlerinden biri x eksenine ile çakışık olduğunda, Şekil 4.11 ve 4.12’de görüldüğü gibi silindir dama tahtası deseni şeklinde burkulmaktadır. Silindir  $-\hat{N}$  aksenal kuvveti ve  $-p_z$  radyal basıncına maruz durumdadır. Silindir üzerinde oluşan membran kuvvetleri ise  $N_{x0} = -\hat{N}/2\pi R$  ve  $N_{y0} = -p_z R$  olmaktadır.



**Şekil 4.11** : Ortotropik bir silindirin aksenal yük ve üniform basınç altında lokal burkulması durumunda oluşan dama tahtası deseninin gösterimi

Bu durumda  $v = v_1 = v_2 = \tan^{-1} \frac{l_x}{l_y}$  olmaktadır ve 4.92 denkleminde  $c_1 = c_2 = 0$  elde edilir. Denklem 4.91 bu durumda düzenlenirse

$$([O] \quad [M_0] \quad [O]^T - \lambda \Phi_1 [J]) \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \end{Bmatrix} = 0 \quad l_y = \frac{\pi}{\beta} \quad (4.95)$$

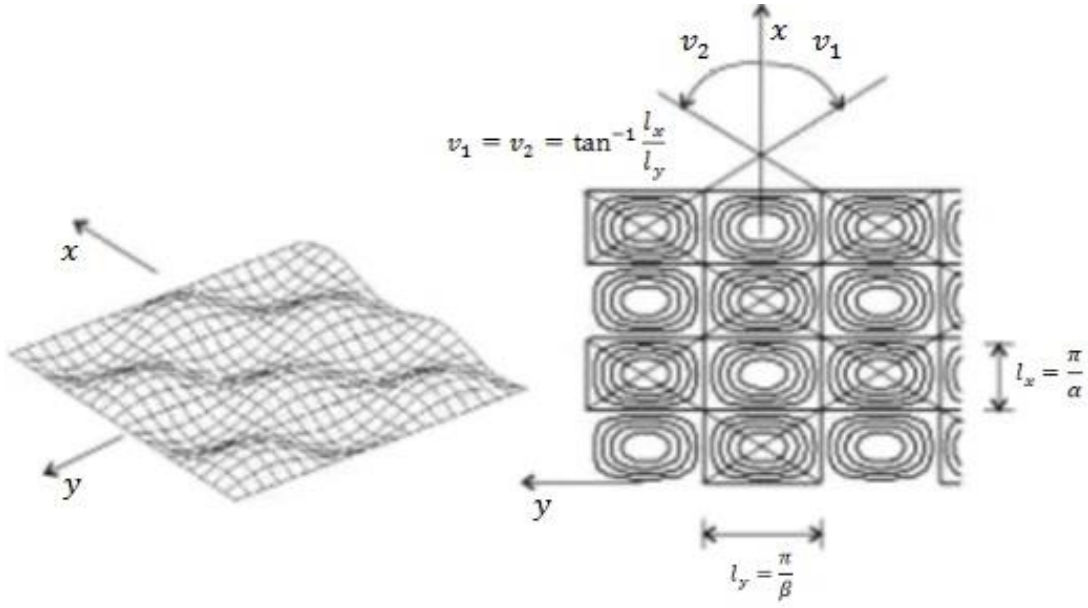
elde edilir.

Burada  $[O]$  matrisi ve  $\Phi_1$  parametresi Şekil 4.12’te gösterilmiştir ve  $c_1 = c_2 = 0$  düzenlenmiştir.

Bu denklemin öz değerleri

$$\lambda_{cr} = \frac{1}{N_{x0}\alpha^2 + N_{y0}\beta^2} \frac{\begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{12} & F_{22} & F_{23} \\ F_{13} & F_{23} & F_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{12} & F_{22} \end{vmatrix}} \quad (4.96)$$

şeklinde yazılabilir.



**Şekil 4.12 :** Eksenel yük ve üniform basınç altındaki ortotropik silindirin lokal dama tahtası burkulma deseni ve kontur grafiği gösterimi

Burada  $F_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) elemanları Denklem 4.97’de verilmiştir.

Kritik yük parametresi  $\lambda_{cr}$  farklı  $\alpha$  ve  $\beta$  değerleri için hesaplanmalıdır. En düşük  $\lambda_{cr}$  değeri önemlidir.

$$\begin{aligned}
 F_{11} &= A_{11}\alpha^2 + A_{66}\beta^2 \\
 F_{12} &= (A_{12} + A_{66})\alpha\beta \\
 F_{13} &= -A_{12}\frac{\alpha}{R} - B_{11}\alpha^3 - B_{12}\alpha\beta^2 - 2B_{66}\alpha\beta^2 \\
 F_{22} &= A_{22}\beta^2 + A_{66}\alpha^2 \\
 F_{23} &= -B_{22}\beta^3 - B_{12}\alpha^2\beta - 2B_{66}\alpha^2\beta - A_{22}\frac{\beta}{R} \\
 F_{33} &= D_{11}\alpha^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\alpha^2\beta^2 + D_{22}\beta^4 \\
 &+ \frac{1}{R}\left(A_{22}\frac{1}{R} + 2B_{22}\beta^2 + 2B_{12}\alpha^2\right)
 \end{aligned} \tag{4.97}$$

## **5. ANALİTİK ÇÖZÜM VE OPTİMİZASYON ÇALIŞMASI**

Optimizasyon yöntemi bir problemin olası çözümlerinin arasında en uygun olanının belirlenmesiyle ilgilendir. Bu amaçla fiziksel problemin matematiksel modellenmesi oluşturularak çözümlenmesi yapılır ve en uygun değer bulunur.

Kompozit malzemelerde yapının mukavemetini etkileyen birçok etken vardır. Bunlara örnek olarak, tabaka kalınlığı, fiber ve matris malzemesi, fiber açıları verilebilir. Bu etkenlerden, fiber açılarının değişimi kompozit malzemelerin mukavemeti üzerinde büyük oranda etkilemektedir.

Bu çalışmada fiber açılarının değişiminin, ince cidarlı silindirik kompozit malzemelerin burkulması üzerinde oluşturduğu etkiler incelenmiştir. Açı değişimlerine bağlı olarak farklı durumlardaki malzeme özellikleri MATLAB programında oluşturulan kod sayesinde hesaplanmıştır. Bu malzeme özellikleri oluşturulan kod içerisinde, literatürdeki ince cidarlı silindirik yapıların burkulma formülleri kullanılarak yapıların burkulma dayanımları hesaplanmıştır. Kırılma teorisi yardımı ile hasar görmeden burkulma yapıları belirlenmiştir. Son aşamada ise en yüksek dayanım gösteren kompozit yapı elde edilmiştir.

### **5.1. MATLAB**

MATLAB sayısal hesaplama ve programlama dilidir. Mathworks tarafından geliştirilen bu program kontrol mühendisliği, doğrusal cebir, sayısal analiz ve görüntü işleme alanlarında yaygın olarak kullanılmaktadır.

MATLAB programlama dili değişkenler, matrisler ve fonksiyonlar ile hesap yapabilmektedir. Ayrıca grafik çizimi ve simülasyon çalışmaları da bu programda yapılabilmektedir.

### **5.2. İnce Cidarlı Silindirik Yapılarda Burkulma Optimizasyonu**

Oluşturulan MATLAB kodu Ek 1’de gösterilmiştir. Kod içerisinde yapılan işlemler sırasıyla anlatılacaktır.

- Kompozit yapının tabaka sayısı 3 olarak belirlenmiştir.
- Kaynaklardan alınan karbon epoksi malzeme özellikleri (Tanov, R. ve Tabiei A.) ve maksimum dayanımları (Kaw A. A.) kod içerisine aktarılmıştır.
- Bu değerlere bağlı olarak rijitlik [C] ve esneklik [S] matrisleri oluşturulmuştur.
- Her tabaka için fiberlerin açı değerleri değiştirilerek, farklı fiber açı düzenlerine sahip kompozit yapılar elde edilmiştir.
- Rijitlik ve esneklik matrisleri bu açı değerleri için tekrar düzenlenmiştir.
- Düzlem gerilme yaklaşımı kullanılarak rijitlik ve esneklik matrislerinin boyutları indirgenmiştir.
- Kalınlık değerlerine bağlı olarak h değerleri (orta düzlemden olan uzaklık) hesaplanmıştır.
- A, B ve D matrisleri hesaplanmıştır.
- Silindirik kompozit yapının boy ve çap değerleri belirlenmiştir.
- Karbon fiber ve epoksi yoğunluk değerlerine bağlı olarak kompozit yapının toplam ağırlığı hesaplanmıştır.
- A, B ve D matrislerine bağlı olarak F matrisleri bulunmuştur.
- Bulunan F değerleri kullanılarak  $\lambda$  ve  $N_{y_{cr}}$  değerleri bulunmuştur.
- $N_{y_{cr}}$  kritik burkulma yükleri için her tabakadaki gerilmeler hesaplanmıştır.
- Tabakalardaki gerilme değerleri için Tsai-Hill kırılma teorisi yardımıyla hasar durumları bulunmuş ve kırılma hasarı oluşmayan durumlar belirlenmiştir.
- Burkulma dayanımı en yüksek olan ve kırılma hasarına uğramayan kompozit yapının fiber açıları belirlenmiştir.

### 5.2.1. Matlab çözümü

Aşağıdaki örnekte MATLAB programının çözüm aşamaları gösterilmiştir.

İlk olarak program kullanıcıdan tabaka sayısı, tabaka kalınlıkları, silindir boyu, silindir çapı değerlerini girdi olarak istemektedir.

Verilen değerlere göre burkulma yükü, optime tabaka açıları, tabakalarda oluşan gerilmeler ve yapının hasar katsayısı program tarafından bulunmaktadır.

Kullanıcı girdileri aşağıda gösterilmiştir.

Enter the number of layers (Tabaka sayısı)

3

Write the thickness of layer number 1 in millimeters [mm] (1. Tabakanın kalınlığı)

0.6667

Write the thickness of layer number 2 in millimeters [mm] (2. Tabakanın kalınlığı)

0.6667

Write the thickness of layer number 3 in millimeters [mm] (3. Tabakanın kalınlığı)

0.6667

Enter the Length of the cylinder in millimeters [mm] (Silindirin boyu)

500

Enter the Diameter of the cylinder in millimeters [mm] (Silindirin çapı)

500

Bu değerlere göre çıkan sonuçlar aşağıda gösterilmiştir.

RESULTS (Sonuçlar)

Maximum buckling pressure (Pcr) is (Maksimum burkulma basıncı)

6.089443e+05

Maximum buckling load per unit circumference (Nycr) is (Birim çevre için burkulma yükü)

1.522361e+05

Optimum angles are; (Optime açı değerleri)

48.000000

57.000000

40.000000

Maksimum burkulma yükü altında oluşan tabaka gerilmeleri, silindir ve tabaka eksenlerine göre aşağıdaki şekilde bulunmuştur.

Stress values with respect to the part axes at the layer number 1 are (Silindir eksenine göre 1. tabakadaki gerilmeler)

$$\sigma_x = 83.671619$$

$$\sigma_{\theta} = 148.566648$$

$$\sigma_{x_{\theta}} = 80.825444$$

Stress values with respect to the part axes at the layer number 2 are (Silindir eksenine göre 2. tabakadaki gerilmeler)

$$\sigma_x = 84.676303$$

$$\sigma_{\theta} = 247.667939$$

$$\sigma_{x_{\theta}} = 115.422489$$

Stress values with respect to the part axes at the layer number 3 are (Silindir eksenine göre 3. tabakadaki gerilmeler)

$$\sigma_x = 64.413676$$

$$\sigma_{\theta} = 95.553468$$

$$\sigma_{x_{\theta}} = 46.541289$$

Stress values with respect to the ply axes at the layer number 1 are (Tabaka eksenine göre 1. tabakada oluşan gerilmeler)

$$\sigma_{1_1} = 199.465000$$

$$\sigma_{2_1} = 32.773267$$

$$\sigma_{3_1} = 25.279640$$

Stress values with respect to the ply axes at the layer number 2 are (Tabaka eksenine göre 2. tabakada oluşan gerilmeler)

$$\sigma_{1_2} = 305.222043$$

$$\sigma_{2_2} = 27.122199$$

$$\sigma_{3_2} = 25.080643$$

Stress values with respect to the ply axes at the layer number 3 are (Tabaka eksenine göre 3. tabakada oluşan gerilmeler)

$$\sigma_{1_3} = 123.114111$$

$$\sigma_{2_3} = 36.853034$$

$$\sigma_{3_3} = 23.415165$$

Failure coefficient in each layer as follows  
(her tabaka için hasar katsayıları)

$$f_1 = 0.824287$$

$$f_2 = 0.633522$$

$$f_3 = 0.972132$$

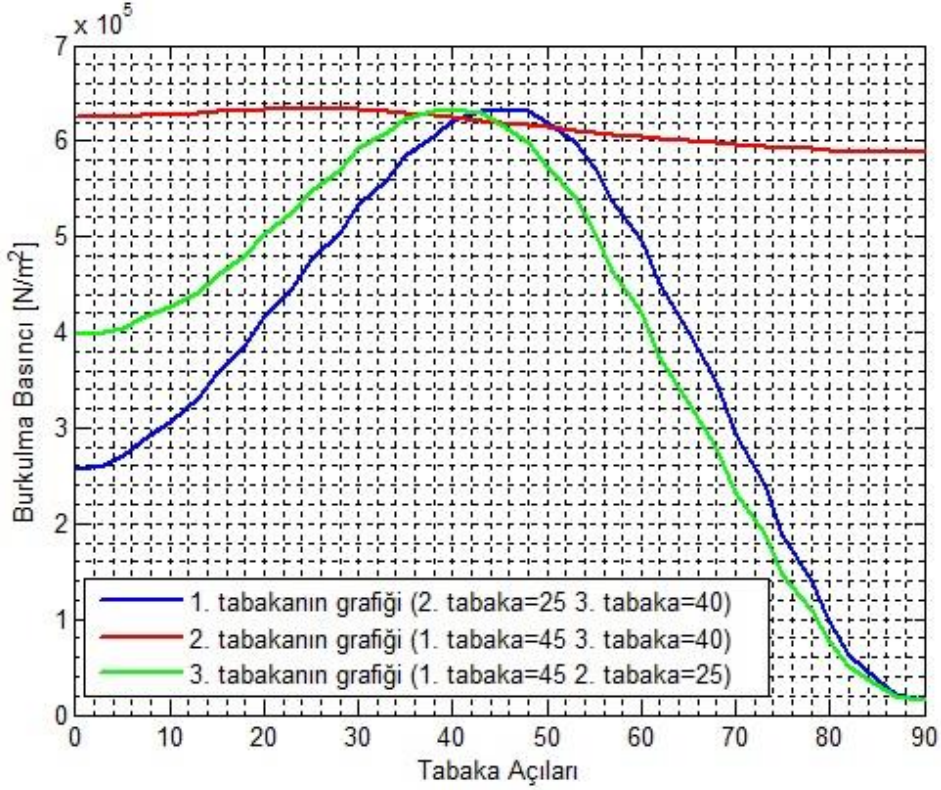
Burada görüldüğü üzere hasar katsayıları 1'den küçük olduğu için mukavemet hesabında burkulma yükü dikkate alınmalıdır.

$$h/R \text{ ratio} = 0.008000 \text{ (kalınlık, yarıçap oranı)}$$

$$R/L \text{ ratio} = 0.500000 \text{ (yarıçap, boy oranı)}$$

Örnek yapı için hesaplanan değerler, kabuk teorisindeki göre  $h/R \ll 1$  şartını sağlamaktadır. Yapı üzerinde oluşacak hasar burkulma nedeniyle gerçekleşecektir.

Şekil 5.1.'de gösterildiği tabaka açılara bağlı olarak burkulma basıncının değişimi programdan elde edilmiştir. Bu grafik üzerinde her hangi iki tabakanın açıları sabit iken diğer tabakanın açı değişiminin burkulma basıncı üzerindeki etkisi gösterilmiştir.



Şekil 5.1 : Tabaka açılara bağlı olarak burkulma basıncının değişimi

Burada dikey eksen burkulma basıncını, yatay eksen ise tabakanın açı değişimini ifade etmektedir. Grafikteki mavi eğri, diğer tabakaların açıları sabitken 1. tabakanın açı değişiminin burkulma basıncına etkisini göstermektedir. Aynı şekilde kırmızı eğri 2. tabakayı, yeşil eğri de 3. tabakayı ifade etmektedir.

## **6. SONLU ELEMANLAR METODU**

Sonlu elemanlar metodu, mühendislik problemlerini yaklaşık olarak çözebilen sayısal bir yöntemdir. Program içerisinde oluşturulan fiziksel modeller, düğüm noktaları ile belirlenen sonlu elemanlar aracılığıyla çözülmektedir.

Sonlu elemanlar yöntemi, katı ve sıvı mekaniği, akustik, ısı transferi, elektromanyetizma gibi birçok alanda kullanılmaktadır. Teorik çözümü zor olan sistemlerin yaklaşık çözümü ve oluşturulan deney sonuçlarını karşılaştırma amacı ile bu yöntem sıkça tercih edilmektedir.

Bu çalışmada optimizasyon çözümünden elde edilen kompozit silindirik yapı ABAQUS programı ile modellenmiş ve sonlu eleman çözümü elde edilmiştir.

### **6.1. ABAQUS Analiz Programı**

ABAQUS sonlu eleman analiz programı olarak otomotiv, uçak, uzay endüstrilerinde kullanılmaktadır. Ayrıca geniş malzeme modelleme kapasitesi sayesinde akademik çalışmalarda da yaygın olarak kullanılmaktadır. Lineer ve lineer olmayan problemleri çözebilen programda üretim simülasyonları için yapısal akustik ve piezoelektrik gibi multifizik çözümleri yapılabilmektedir.

### **6.2. Problemin Tanımı**

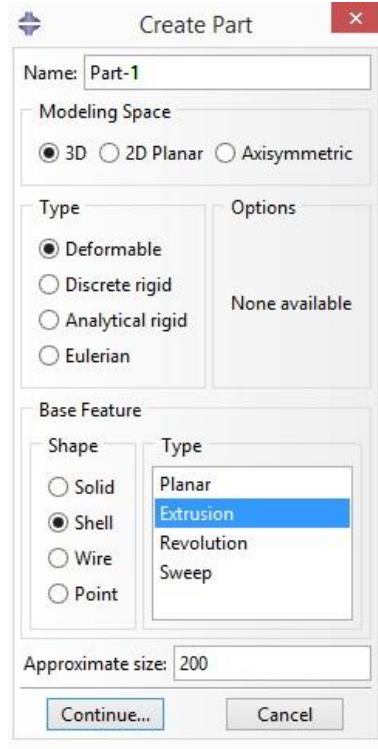
Bu çalışmada, yanal basınca maruz ince cidarlı silindirik kompozit bir yapının sonlu eleman yöntemi ile modeli oluşturulup, çıkan sonuçlar optimizasyon çalışmasındaki sonuçlarla kıyaslanacaktır.

### **6.3. Sonlu Eleman Yöntemi Aşamaları**

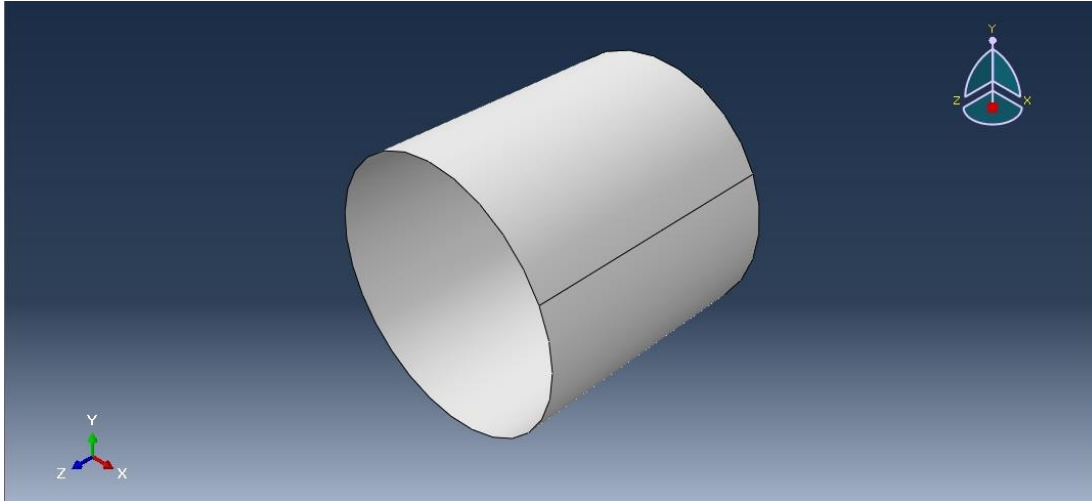
#### **6.3.1. İnce cidarlı silindirik yapının modellenmesi**

Modelleme aşamalarına 1000mm çap ve 1000 mm boya sahip ince cidarlı yapı örnek olarak gösterilmiştir.

Abaqus model oluşturma bölümünde 3 boyutlu ve ince cidarlı yapı Şekil 6.1 ve 6.2'deki gibi oluşturulmuştur.



Şekil 6.1 : Abaqus model oluşturma aşaması



Şekil 6.2 : Oluşturulmuş ince cidarlı silindirik yapı

### 6.3.2. Kompozit malzeme modellenmesi

Bu aşamada ince cidarlı silindirik yapıya kompozit malzeme özellikleri verilmiştir. Çizelge 6.1'de malzeme özellikleri gösterilmiştir.

**Çizelge 6.1 :** Karbon Epoksi kompozit malzeme özellikleri

$E_1$ (GPa)	$E_2$ (GPa)	$E_3$ (Gpa)	$\nu_{12}$	$\nu_{13}$	$\nu_{23}$	$G_{12}$ (Gpa)	$G_{13}$ (Gpa)	$G_{23}$ (Gpa)
136.9	9.86	9.86	0.293	0.293	0.45	5.654	5.654	2.689

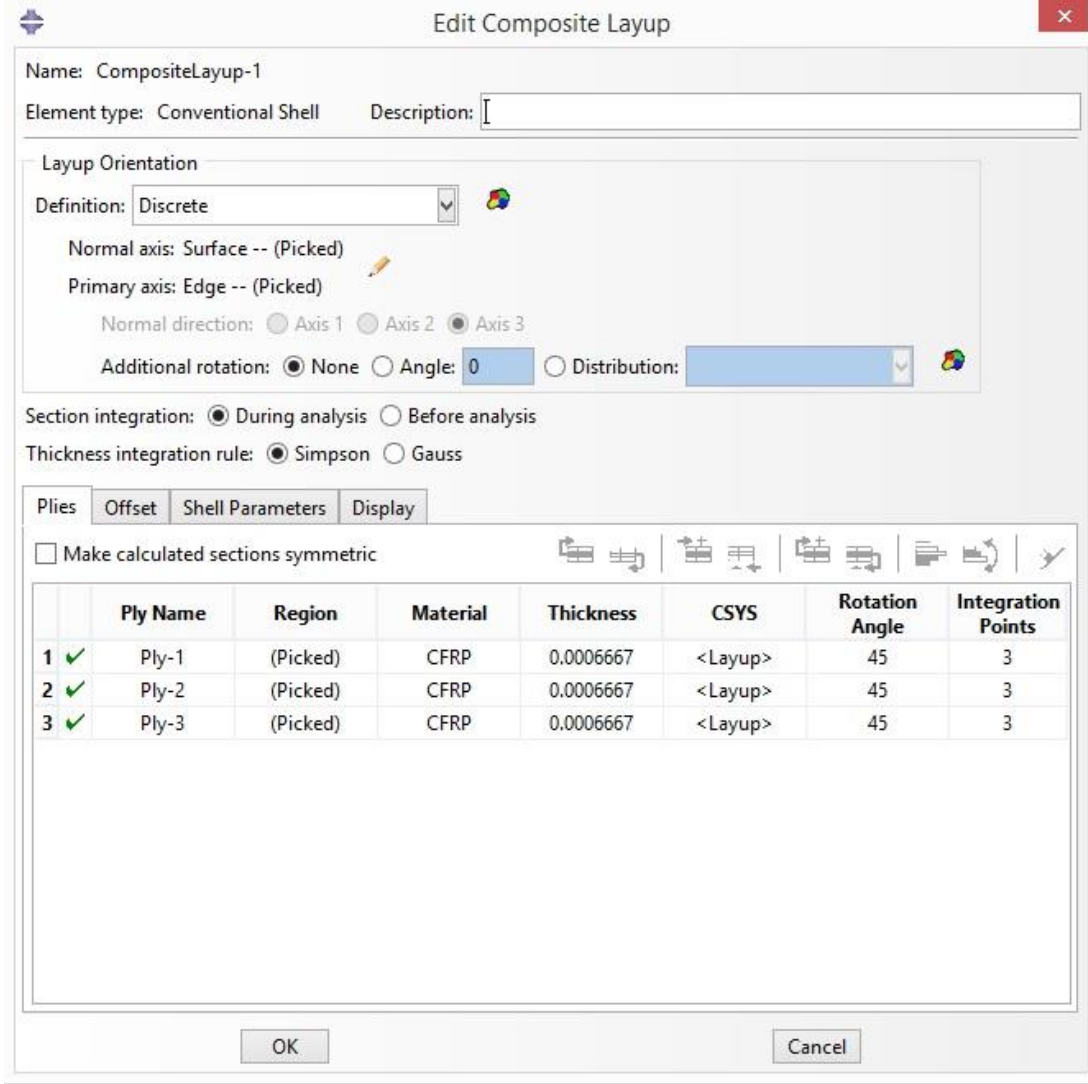
Abaqus programının kompozit malzeme oluşturma bölümünde bu malzeme özellikleri Şekil 6.3'teki gösterildiği üzere girilmiştir.

The screenshot shows the 'Edit Material' dialog box for a material named 'CFRP'. The 'Material Behaviors' section has 'Elastic' selected. The 'Elastic' section is expanded, showing 'Type: Engineering Constants', 'Use temperature-dependent data' (unchecked), 'Number of field variables: 0', 'Moduli time scale (for viscoelasticity): Long-term', 'No compression' (unchecked), and 'No tension' (unchecked). The 'Data' table is as follows:

	E1	E2	E3	Nu12	Nu13	Nu23
1	136900000000	9860000000	9860000000	0.293	0.293	0.45

**Şekil 6.3 :** Kompozit malzeme özelliklerinin verilmesi

Kompozit yapının tabaka sayısı 3 adet olarak belirlenmiştir. Tabaka kalınlıkları her tabaka için 0.6667 mm olarak yazılmıştır. Tabaka açıları 45-45-45 şeklinde optimizasyon çalışmasında elde edilmiştir. Bu değerler Şekil 6.4'te gösterildiği üzere programda yazılmıştır.



**Şekil 6.4 :** Kompozit malzemenin tabaka sayısı ve kalınlıkları ile fiber açılarının girilmesi

### 6.3.3. Sınır şartları ve yüklerin verilmesi

Bu aşamada ince cidarlı silindirik kompozit yapının yükleme ve sınır şartları durumları Şekil 6.5 ve Şekil 6.6’da belirtilmiştir.

Eksenel yük altında burkulma durumu için Şekil 6.7’de görüldüğü üzere silindirin yan yüzeyine üniform basınç verilmiştir. Silindirin iki ucu ankastre olarak belirlenmiştir.

Name: Load-1  
 Type: Pressure  
 Step: Step-1 (Buckle)  
 Region: (Picked)

Distribution: Uniform  $f(x)$   
 Magnitude: 1

OK Cancel

Şekil 6.5 : Basınç değerinin girilmesi

Name: BC-1  
 Type: Displacement/Rotation  
 Step: Step-1 (Buckle)  
 Region: (Picked)

Use BC for  
 Stress perturbation and buckling mode calculation  
 Stress perturbation only  
 Buckling mode calculation only

CSYS: (Global)

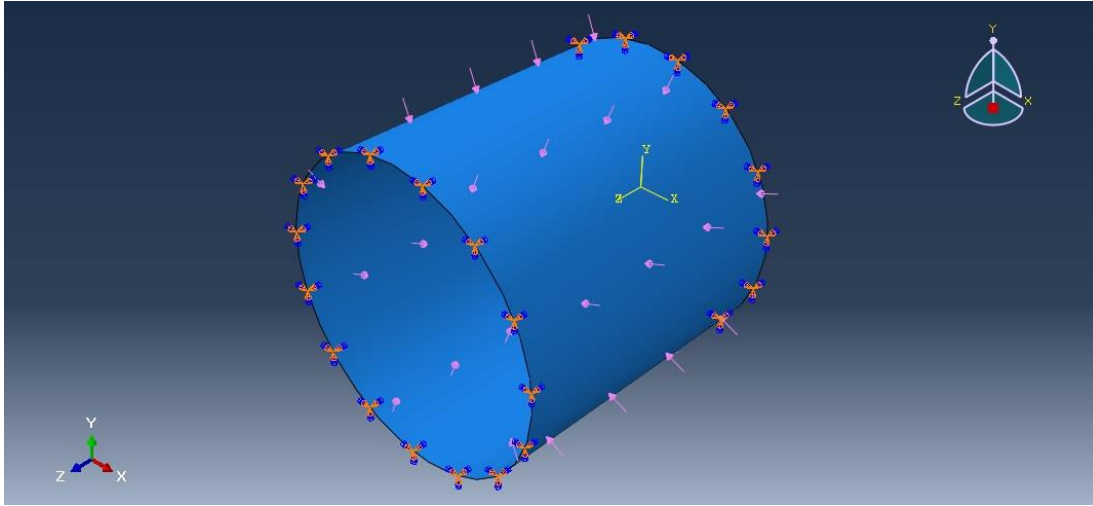
Distribution: Uniform  $f(x)$

<input checked="" type="checkbox"/> U1:	0
<input checked="" type="checkbox"/> U2:	0
<input checked="" type="checkbox"/> U3:	0
<input checked="" type="checkbox"/> UR1:	0 radians
<input checked="" type="checkbox"/> UR2:	0 radians
<input checked="" type="checkbox"/> UR3:	0 radians

Note: The displacement value will be maintained in subsequent steps.

OK Cancel

Şekil 6.6 : Sınır şartlarının girilmesi



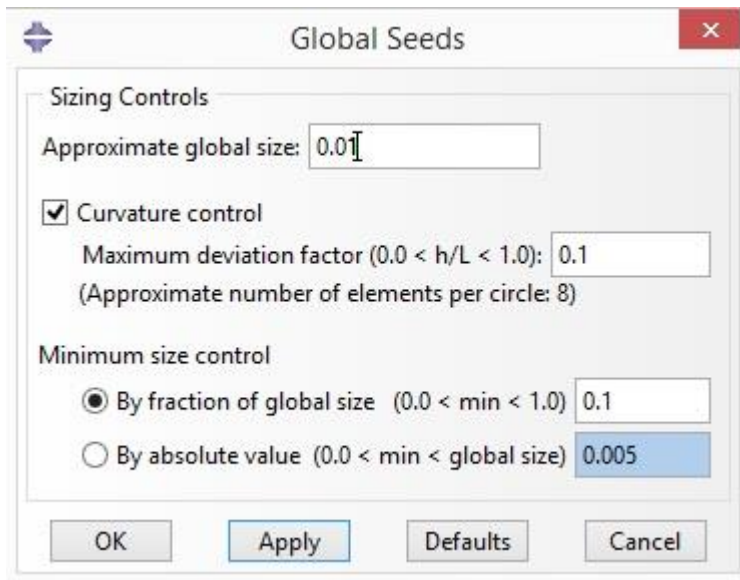
Şekil 6.7 : Silindir yapının üzerinde kuvvet ve sınır şartları

#### 6.3.4. Sonlu eleman yapısının oluşturulması

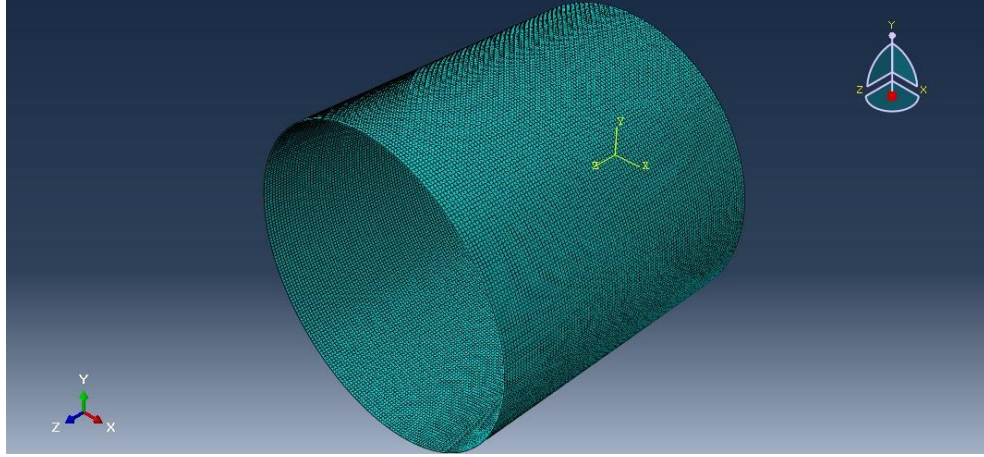
Bu aşamada ince cidarlı silindirik kompozit yapının sonlu eleman ağı (mesh) oluşturulmuştur.

Dikdörtgen (quad) sonlu elemanı kullanılmıştır ve eleman büyüklükleri 0.01 olarak Şekil 6.8’de gösterildiği üzere belirlenmiştir.

Oluşturulan sonlu eleman ağı yapı üzerinde Şekil 6.9’da gösterilmiştir.



Şekil 6.8 : Sonlu elemanların büyüklüklerinin belirlenmesi



**Şekil 6.9 :** İnce cidarlı silindirik kompozit malzemenin sonlu eleman ağı gösterimi

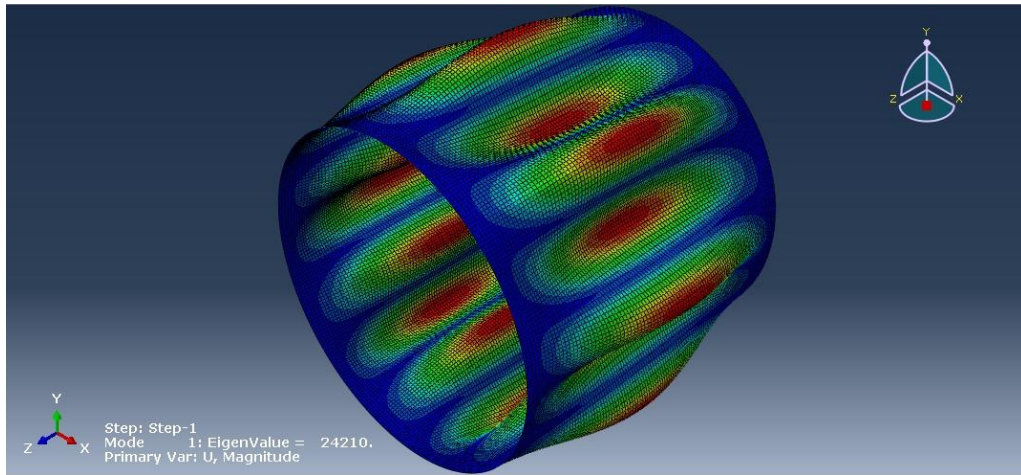
### 6.3.5. Sonucun elde edilmesi

Sonlu eleman analizi sonrasında 1. özdeğer (eigenvalue) kuvvet parametresi  $\lambda = 24210$  şeklinde bulunmuştur. Buradan  $N_{y_{cr}} = \lambda * N_{y_0} = 24210 * 1 = 24210 N$  şeklinde elde edilmiştir. Başlangıç yükünün 1 alınması sayesinde kritik yük,  $\lambda$ 'a eşit olarak elde edilmiştir. Programda ilk 5 özdeğer hesaplanıp. Çıkan sonuçlar Çizelge 6.2'de gösterilmiştir.

**Çizelge 6.2 :** Özdeğerlerin gösterilmesi

$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$
24210	24210	25088	25088	26240

Şekil 6.10'da 1 özdeğerden elde edilen sonuç gösterilmiştir.



**Şekil 6.10 :** Sonlu eleman analiz sonucu

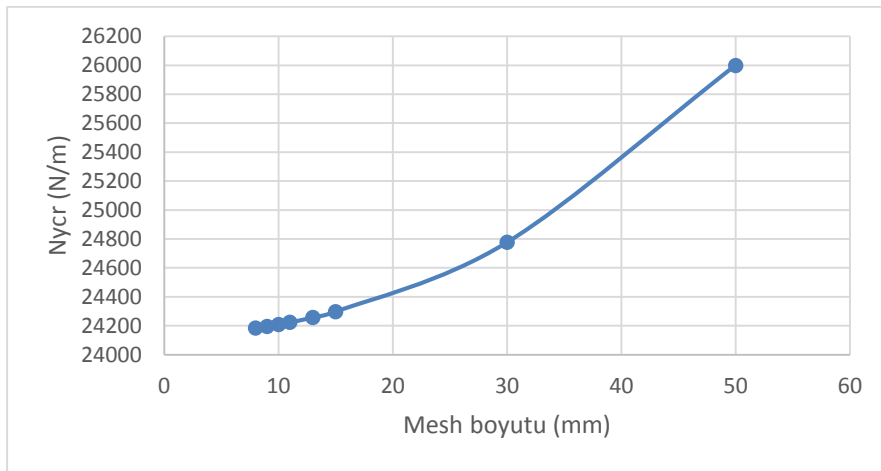
### 6.3.6. Sonlu elemanların büyüklüklerinin sonuca etkisi

Sonlu elemanlarının büyüklüklerinin çıkan sonucun gerçeğe yaklaşması üzerinde önemli etkisi vardır. Fakat elemanların çok sık biçimde alınmasının çözüm süresinde artışa neden olduğu gözlemlenmiştir. Bu amaçla hem sonucun mümkün olduğu kadar teorik çözüme yaklaştırılması hem de çözüm süresinin en az olması için sonlu eleman ağ sıklığının etkileri incelenmiştir.

Çizelge 6.3'de 1. özdeğer için eleman büyüklüğünün, analitik çözüme yaklaşma oranı ve çözüm süresine etkisi gösterilmiştir. MATLAB optimizasyonundan alınan  $N_{ycr}$  değeri 24168 şeklindedir. Şekil 6.11'de bu değişim grafik üzerinde gösterilmiştir. Ortaya çıkan sonuçlara göre mesh büyüklüğünün 0.03'den sonra burkulma yükü değişimine etkisinin azaldığı görülmüştür.

**Çizelge 6.3 :** Sonlu eleman büyüklüğünün, yaklaşma oranı ve çözüm süresine etkisi

Sonlu Eleman Büyüklüğünün Etkisi								
Çap (mm)	Boy (mm)	Tabaka Kalınlığı (mm)	Tabaka sayısı	Tabaka açıları	Sonlu eleman boyutu (mm)	Nycr (N/m)	% hata miktarı	Süre
1000	1000	0.6667	3	45-45-45	50	26000	7.05	7 s
1000	1000	0.6667	3	45-45-45	30	24777	2.52	9 s
1000	1000	0.6667	3	45-45-45	15	24298	0.53	21 s
1000	1000	0.6667	3	45-45-45	13	24258	0.37	32 s
1000	1000	0.6667	3	45-45-45	11	24224	0.23	45 s
1000	1000	0.6667	3	45-45-45	10	24210	0.17	53 s
1000	1000	0.6667	3	45-45-45	9	24197	0.12	73 s
1000	1000	0.6667	3	45-45-45	8	24185	0.07	90 s



**Şekil 6.11 :** Sonlu eleman boyutunun burkulma yüküne etkisi

## 7. ANALİTİK VE SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ SONUÇLARI

### 7.1. D/L ve kalınlık sabit iken hacimsel değişimin kritik burkulma basıncı ve optimum tabaka açlarına etkisi

D/L=1 ve tabaka kalınlıkları 0.6667 mm iken 200-1000 mm aralıkta, 3 tabakalı kompozit yapının burkulma yükü ve basıncı ile optimum açların değişimi, analitik ve sonlu eleman çözümleri için Çizelge 7.1'de gösterilmiştir.  $P_{cr} = N_{ycr}/R$  şeklinde hesaplanmıştır.

**Çizelge 7.1 :** Hacimsel değişimin tabaka açısı, burkulma yükü ve basıncına etkisi

Hacim değişiminin etkisi									
Çap (mm)	Boy (mm)	Tabaka Kalınlığı (mm)	Tabaka sayısı	Tabaka açları (d)	Mesh boyutu (mm)	Matlab Nycr (N/m)	Matlab Pcr (N/m <sup>2</sup> )	Abaqus Nycr (N/m)	Abaqus Pcr (N/m <sup>2</sup> )
200	200	0.6667	3	38-90-62	0.005	1726364	17263640	1623670	16236700
300	300	0.6667	3	40-90-38	0.005	493059	3287058	510954	3406360
400	400	0.6667	3	43-73-28	0.005	217413	1087069	232272	1161360
500	500	0.6667	3	48-57-40	0.005	152236	608944	146343	585372
600	600	0.6667	3	48-35-43	0.006	96240	320801	94947	316490
700	700	0.6667	3	45-40-43	0.007	58581	167374	60527	172934
800	800	0.6667	3	45-15-38	0.008	47817	119544	45150	112875
900	900	0.6667	3	45-30-43	0.009	33876	75280	32853	73007
1000	1000	0.6667	3	45-45-45	0.010	24168	48336	24210	48420

Burkulma yükünün çap ve boy artışına göre değişimi, analitik ve sonlu eleman çözümleri için grafik olarak Şekil 7.1'de gösterilmiştir.

Ortaya çıkan sonuçlara göre hacimsel değişiminin 200-1000 mm aralıkta burkulma yüküne etkisinin ters orantılı olduğu görülmüştür.



Şekil 7.1 : Hacimsel değişimin burkulma yüküne etkisi

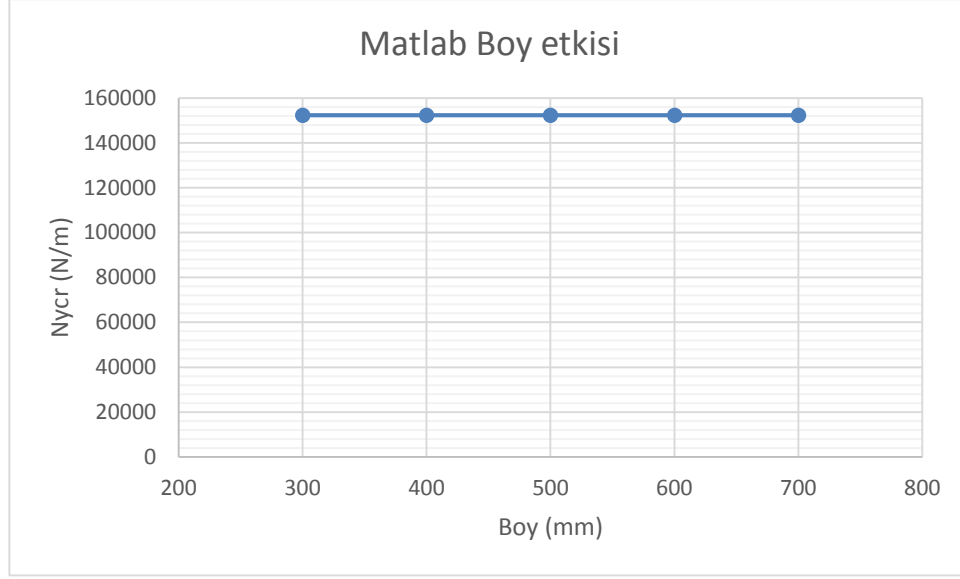
## 7.2. Boy değişiminin kritik burkulma basıncına etkisi

### 7.2.1. Analitik çözümden elde edilen sonuçlar

Çap, tabaka kalınlığı, tabaka sayısı ve açıları sabit olan bir silindir için boy değişiminin burkulma yükü ve basıncı üzerinde etkisi 300-700 mm aralıkta incelenmiştir. Analitik çözümden elde edilen sonuçlar Çizelge 7.2’de ve Şekil 7.2’de gösterilmiştir.

Çizelge 7.2 : Analitik çözümde boy değişiminin burkulma yükü ve basıncına etkisi

Matlab Boy Etkisi						
Çap (mm)	Boy (mm)	Tabaka kalınlığı (mm)	Tabaka sayısı	Tabaka açıları	Nycr (N/m)	Pcr (N/m <sup>2</sup> )
500	300	0.6667	3	48-57-40	152290	609160
500	400	0.6667	3	48-57-40	152290	609160
500	500	0.6667	3	48-57-40	152290	609160
500	600	0.6667	3	48-57-40	152290	609160
500	700	0.6667	3	48-57-40	152290	609160



**Şekil 7.2 :** Analitik çözümde boy değişiminin burkulma yüküne etkisi

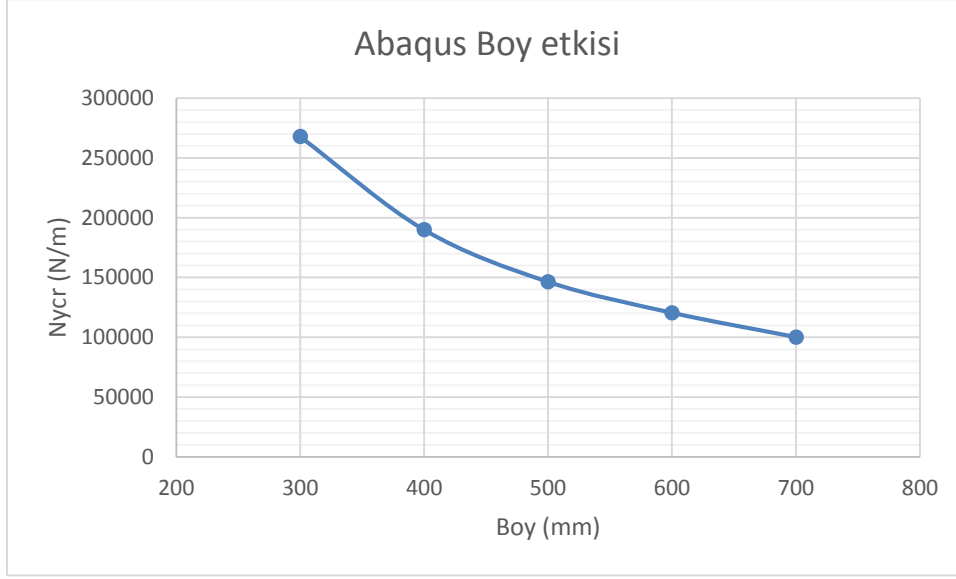
Ortaya çıkan sonuçlara göre boy değişiminin 300-700 mm aralıkta burkulma yükü değişimine etkisinin olmadığı görülmüştür.

### 7.2.2. Sonlu eleman çözümünden elde edilen sonuçlar

Çap, tabaka kalınlığı, tabaka sayısı ve açıları sabit olan bir silindir için boy değişiminin burkulma yükü ve basıncı üzerinde etkisi 300-700 mm aralıkta incelenmiştir. Sonlu eleman çözümünden elde edilen sonuçlar Çizelge 7.3’de ve Şekil 7.3’te gösterilmiştir.

**Çizelge 7.3 :** Sonlu eleman çözümünde boy değişiminin burkulma yükü ve basıncına etkisi

Abaqus Boy Etkisi						
Çap (mm)	Boy (mm)	Tabaka kalınlığı (mm)	Tabaka sayısı	Tabaka açıları	Nycr (N/m)	Pcr (N/m <sup>2</sup> )
500	300	0.6667	3	48-57-40	267784	1071136
500	400	0.6667	3	48-57-40	189886	759554
500	500	0.6667	3	48-57-40	146343	585372
500	600	0.6667	3	48-57-40	120446	481784
500	700	0.6667	3	48-57-40	100092	400368



**Şekil 7.3 :** Sonlu eleman çözümünde boy değişiminin burkulma yüküne etkisi

Ortaya çıkan sonuçlara göre 300-700 mm aralıkta boy arttıkça burkulma yükünün azaldığı görülmüştür.

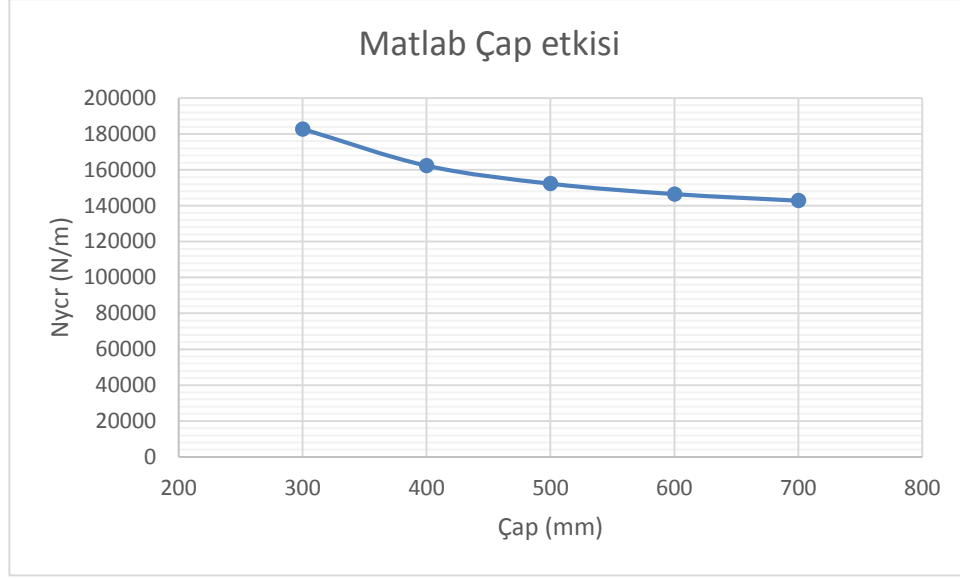
### 7.3. Çap değişiminin kritik burkulma basıncına etkisi

#### 7.3.1. Analitik çözümden elde edilen sonuçlar

Boy, tabaka kalınlığı, tabaka sayısı ve açıları sabit olan bir silindir için boy değişiminin burkulma yükü ve basıncı üzerinde etkisi 300-700 mm aralıkta incelenmiştir. Analitik çözümden elde edilen sonuçlar Çizelge 7.4'te ve Şekil 7.4'de gösterilmiştir.

**Çizelge 7.4 :** Analitik çözümde çap değişiminin burkulma yükü ve basıncına etkisi

Çap (mm)	Boy (mm)	Tabaka kalınlığı (mm)	Tabaka sayısı	Tabaka açıları	Nycr (N/m)	Pcr (N/m <sup>2</sup> )
300	500	0.6667	3	48-57-40	182720	1218132
400	500	0.6667	3	48-57-40	162325	811625
500	500	0.6667	3	48-57-40	152290	609160
600	500	0.6667	3	48-57-40	146518	488393
700	500	0.6667	3	48-57-40	142844	408127



**Şekil 7.4 :** Analitik çözümde çap değişiminin burkulma yüküne etkisi

Ortaya çıkan sonuçlara göre 300-700 mm aralıkta çap arttıkça burkulma yükünün azaldığı görülmüştür.

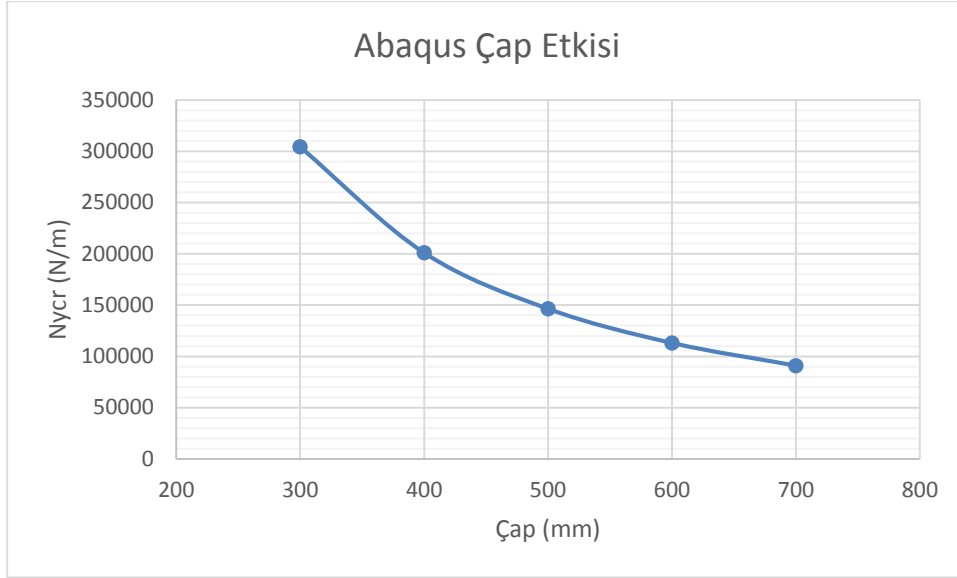
### 7.3.2. Sonlu eleman çözümünden elde edilen sonuçlar

Boy, tabaka kalınlığı, tabaka sayısı ve açıları sabit olan bir silindir için boy değişiminin burkulma yükü ve basıncı üzerinde etkisi 300-700 mm aralıkta incelenmiştir.

Sonlu eleman çözümünden elde edilen sonuçlar Çizelge 7.5'te ve Şekil 7.5'de gösterilmiştir.

**Çizelge 7.5 :** Sonlu eleman çözümünde çap değişiminin burkulma yükü ve basıncına etkisi

Çap (mm)	Boy (mm)	Tabaka kalınlığı (mm)	Tabaka sayısı	Tabaka açıları	Nycr (N/m)	Pcr (N/m <sup>2</sup> )
300	500	0.6667	3	48-57-40	304330	2028867
400	500	0.6667	3	48-57-40	201045	1005225
500	500	0.6667	3	48-57-40	146343	585372
600	500	0.6667	3	48-57-40	113005	376683
700	500	0.6667	3	48-57-40	90866	259617



**Şekil 7.5 :** Sonlu eleman çözümünde çap değişiminin burkulma yüküne etkisi

Ortaya çıkan sonuçlara göre 300-700 mm aralıkta çap arttıkça burkulma yükünün azaldığı görülmüştür.

#### 7.4. Tabaka kalınlık değişiminin kritik burkulma basıncına etkisi

##### 7.4.1. Analitik çözümden elde edilen sonuçlar

Boy, çap, tabaka sayısı ve açıları sabit olan bir silindir için tabaka kalınlığı değişiminin burkulma yükü ve basıncı üzerindeki etkisi, 1-3 mm aralıkta incelenmiştir. Analitik çözümden elde edilen sonuçlar Çizelge 7.6'da ve Şekil 7.6'da gösterilmiştir.

**Çizelge 7.6 :** Analitik çözümden kalınlık değişiminin burkulma yükü ve basıncına etkisi

Çap (mm)	Boy (mm)	Kalınlık (mm)	Toplam kalınlık (mm)	Tabaka sayısı	Tabaka açıları	Nycr (N/m)	Pcr (N/m <sup>2</sup> )
500	500	0.3333	1	3	48-57-40	25283	101133
500	500	0.5	1,5	3	48-57-40	70038	280150
500	500	0.6667	2	3	48-57-40	152290	609160
500	500	0.8333	2,5	3	48-57-40	284013	1136052
500	500	1	3	3	48-57-40	477425	1909703



**Şekil 7.6 :** Analitik çözümde kalınlık değişiminin burkulma yüküne etkisi

Ortaya çıkan sonuçlara göre 1-3 mm aralıkta kalınlık arttıkça burkulma yükünün arttığı görülmüştür.

#### 7.4.2. Sonlu eleman çözümünden elde edilen sonuçlar

Boy, çap, tabaka sayısı ve açıları sabit olan bir silindir için tabaka kalınlığı değişiminin burkulma yükü ve basıncı üzerindeki etkisi, 1-3 mm aralıkta incelenmiştir.

Sonlu eleman çözümünden elde edilen sonuçlar Çizelge 7.7’de ve Şekil 7.7’de gösterilmiştir.

**Çizelge 7.7 :** Sonlu eleman çözümünde kalınlık değişiminin burkulma yükü ve basıncına etkisi

Çap (mm)	Boy (mm)	Kalınlık (mm)	Toplam kalınlık (mm)	Tabaka sayısı	Tabaka açıları	N <sub>ycr</sub> (N/m)	P <sub>cr</sub> (N/m <sup>2</sup> )
500	500	0.3333	1	3	48-57-40	25037	100148
500	500	0.5	1,5	3	48-57-40	70789	283156
500	500	0.6667	2	3	48-57-40	146343	585372
500	500	0.8333	2,5	3	48-57-40	261320	1045280
500	500	1	3	3	48-57-40	417618	1670472



**Şekil 7.7 :** Sonlu eleman çözümünde kalınlık değişiminin burkulma yüküne etkisi

Ortaya çıkan sonuçlara göre 1-3 mm aralıkta kalınlık arttıkça burkulma yükünün arttığı görülmüştür.

## 7.5. Malzeme değişiminin kritik burkulma basıncına etkisi

### 7.5.1. Analitik çözümden elde edilen sonuçlar

Boy, çap, tabaka sayısı ve kalınlıkları sabit olan bir silindir için malzeme değişiminin optimum burkulma yükü ve basıncı üzerinde etkisi incelenmiştir. Malzeme özellikleri Çizelge 7.8’de verilmiştir.

Analitik çözümden elde edilen sonuçlar her iki malzeme için Çizelge 7.9’da gösterilmiştir.

**Çizelge 7.8 :** Malzeme özellikleri

Malzeme	$E_1$ (GPa)	$E_2, E_3$ (GPa)	$\nu_{12}, \nu_{13}$	$\nu_{23}$	$G_{12}, G_{13}$ (Gpa)	$G_{23}$ (Gpa)	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )
CFRP	136.9	9.86	0.293	0.45	5.654	2.689	1600
GFRP	45	12	0.2	0.2	5.5	5.5	2000

Ortaya çıkan sonuçlara göre GFRP malzeme için burkulma yükünün azaldığı görülmüştür. Ayrıca kompozit yapının optimum tabaka açılarının da değiştiği gözlenmiştir.

**Çizelge 7.9:** Malzeme değişiminin optimum burkulma yüküne etkisi

Malzeme	Çap (m)	Boy (m)	Her tabakanın kalınlığı(mm)	Tabaka sayısı	Tabaka açıları(d)	Nycr (N/m)	Pcr (N/m <sup>2</sup> )
CFRP	0.5	0.5	0.6667	3	48-57-40	152290	609160
GFRP	0.5	0.5	0.6667	3	45-28-40	57546	230185

### 7.5.2. Sonlu eleman çözümünden elde edilen sonuçlar

Boy, çap ve kalınlıkları aynı olan bir silindirde CFRP, GFRP ve Çelik malzemeleri için burkulma yükünün değişimi Çizelge 7.10’da gösterilmiştir. CFRP ve GFRP malzeme için Çizelge 7.8 ve 7.9’daki optimum değerler kullanılmıştır. Çelik malzeme için  $E=210$  GPa ve Poison oranı 0.3 alınmıştır. Burkulma yükü çelik malzeme için daha yüksek çıkmıştır. Fakat CFRP ve GFRP malzeme ile karşılaştırıldığında çeliğin ağırlığı daha yüksek çıkmıştır.

**Çizelge 7.10 :** CFRP, GFRP ve Çelik malzemelerde optimum burkulma yükleri

Malzeme	Çap (m)	Boy (m)	Toplam kalınlık(m)	Mesh boyutu(m)	Yoğunluk (kg/m <sup>3</sup> )	Ağırlık (kg)	Nycr (N/m)
CFRP	0.5	0.5	0.002	0.005	1600	5.024	146343
GFRP	0.5	0.5	0.002	0.005	2000	6.280	75922
Çelik	0.5	0.5	0.002	0.005	7800	24.492	787031

Aynı ağırlık için CFRP, GFRP ve çelik malzemelerde burkulma yükünün karşılaştırılması, kalınlığın değişimi ile Çizelge 7.11’de gösterilmiştir. Ortaya çıkan sonuçlara göre Çelik ve GFRP malzeme için CFRP ile aynı ağırlıkta burkulma yükünün azaldığı görülmüştür.

**Çizelge 7.11 :** CFRP, GFRP ve Çelik için aynı ağırlıkta burkulma yükleri

CFRPve Çelik Burkulma Yükü							
Malzeme	Çap (m)	Boy (m)	Toplam kalınlık(m)	Ağ boyutu(m)	Yoğunluk (kg/m <sup>3</sup> )	Ağırlık (kg)	Nycr (N/m)
CFRP	0.5	0.5	0.002	0.005	1600	5.024	146343
GFRP	0.5	0.5	0.0016	0.005	2000	5.024	42782
Çelik	0.5	0.5	0.00041	0.005	7800	5.024	15189

## 7.6. Tabaka açđ değişiminin kritik burkulma basıncına etkisi

Boy, çap, tabaka sayısı ve kalınlıkları sabit olan bir silindir için tabaka açđlarının değişiminin burkulma yükü üzerinde etkisi Çizelge 7.12’de gösterilmiştir.

Ortaya çıkan sonuçlara göre optimum tabaka açđı olan 48-57-40’dan farklı açđlarda burkulma yükünün azaldığı görülmüştür.

**Çizelge 7.12 :** Tabaka açđ değişiminin burkulma yüküne etkisi

Çap (m)	Boy (m)	Her tabakanın kalınlığı(m)	Tabaka sayısı	Tabaka açđları(d)	Ağ boyutu(m)	N <sub>xcr</sub> (N/m)	P <sub>cr</sub> (N/m <sup>2</sup> )
0.5	0.5	0.00066667	3	48-57-40	0.005	152290	609160
0.5	0.5	0.00066667	3	0-0-0	0.005	51144	204579
0.5	0.5	0.00066667	3	45-45-45	0.005	147765	591063
0.5	0.5	0.00066667	3	90-90-90	0.005	26480	105921

## 8. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada ince cidarlı silindirik kompozit yapıların yanal basınç altında burkulma davranışları incelenmiştir.

Literatürde, bazı araştırmacılar bu konuyu deneysel ve sonlu eleman metodu ile incelemiştir. Örneğin; Moon, Kim, Choi, Kweon ve Choi (2009), ince cidarlı sargılı karbon fiber epoksi kompozit silindirleri, dış basınç altında incelemiştir. Sarım açısı 30-45-60 şeklinde olan 3 farklı model için sonlu eleman ve deneysel yöntem karşılaştırılmıştır. Silindirlerin burkulma davranışında bu açının önemli etken olduğu belirtilmiştir.

Ancak, literatürde ince cidarlı silindirik kompozit yapıların yanal basınç altındaki burkulma davranışını, hem analitik, hem de sonlu elemanlar analizi ile inceleyen ve buna ek olarak analitik çözümde aynı geometri için tabaka açısı optimizasyonu yapan araştırmacılar çok az görülmüştür.

Bu çalışmadaki tabaka açısı optimizasyonu, MATLAB programı tarafından rastgele oluşturulan ve hassasiyeti kullanıcı tarafından belli olan bir açı konfigürasyon matrisi ile hesaplanmaktadır. Burada oluşturulan matrisin kolon sayısı kadar burkulma yükü hesaplanmaktadır. Bu yüzden MATLAB programında kullanılan dizinlerin çoğu 4 boyutlu olmaktadır. MATLAB programı açı optimizasyonunun yanı sıra, verilen geometrik boyutlara göre, kritik burkulma yükünü, gerilmeleri hesaplamakta ve hasar analizini de yapmaktadır.

Çalışmanın devamında ise, MATLAB'den elde edilen optimum açı değerleri ile sonuçlar ABAQUS sonlu elemanlar programı ile tekrar çözülmüştür. Buradaki amaç analitik ve sonlu elemanlar sonucunun ne kadar örtüşüğünü görmektir. Sonlu elemanlar sonucuna, ağ boyutunun etkisi de araştırılmıştır ve ağ boyutunun 0.03m olduğu durumda analitik çözüm ile arasında hatanın %2.52 olduğu görülmüştür.

Çalışmanın sonunda, boy, çap ve kalınlık değişiminin hem analitik çözüme hem de sonlu elemanlar çözümüne etkisi gösterilmiştir.

Sonuç olarak yapılan çalışmanın ince cidarlı kompozit silindirik yapıların tabaka açıların optimizasyonu konusunda kullanılabileceği belirlenmiştir.

Ayrıca, bu tez ile alakalı bir makale yazılmış ve bu makale WASET (World Academy of Science Engineering and Technology)‘nin Vol:8 No:11 2014 dergisinde yayımlanmıştır. Aynı zamanda, yine bu makale için WASET‘e bir sunum hazırlanmış ve bu sunum 29.11.2014 tarihinde İstanbul‘da sunulmuştur.

Bu çalışmaya öneri olarak ise, örnek olarak alınan değerlerde, deneysel çalışma yapılabilir. Bu sayede, teorinin ve sonlu elemanlar sonucunun gerçek hayattaki durum ile olan farklılıkları da görülebilir. Aynı zamanda, imalattan kaynaklı kusurlar da bir parametre ile çalışmaya eklenebilir ve daha gerçekçi bir sonuç elde edilebilir.

## KAYNAKLAR

- Bisagni, C. ve Cordisco P.** (2003). An experimental investigation into the buckling and postbuckling of CFRP shells under combined axial and torsional loading, *Composite Structures*, 60, 391-402.
- Meyer-Piening, H.-R., Farshad, M., Geier B., Zimmermann, R.** (2001). Buckling loads of CFRP composite cylinders under combined axial and torsion loading – experiments and computations, *Composite Structures*, 53, 427-435.
- Bisagni, C.** (2000). Numerical analysis and experimental correlation of composite shell buckling and post-buckling, *Composites Part B: engineering*, 31, 655-667.
- Smerdov, A. A.** (2000). A computational study in optimum formulations of optimization problems on laminated cylindrical shells for buckling I. Shells under axial compression, *Composites Science and Technology*, 60, 2057-2066.
- Smerdov, A. A.** (2000). A computational study in optimum formulations of optimization problems on laminated cylindrical shells for buckling I. Shells under external pressure, *Composites Science and Technology*, 60, 2067-2076.
- Moon, C.-J., Kim I.-H., Choi B.-H., Kweon J.-H., Choi J.-H.** (2010). Buckling of filament-wound composite cylinders subjected to hydrostatic pressure for underwater vehicle applications, *Composites Structures*, 92, 2241-2251.
- Lopatin, A. V. ve Morozov E. V.** (2012). Buckling of a composite cantilever circular shell subjected to uniform external lateral pressure, *Composite Structures*, 94, 553-562.
- Kim, S.-E. ve Kim C.-S.** (2002). Buckling strength of the cylindrical shell and tank subjected to axially compressive loads, *Thin-Walled Structures*, 40, 329-353.
- Gal, A., Levy, R., Abramovich, H., Pavsner, P.** (2006). Buckling analysis of composite panels, *Composite Structures*, 73, 179-185.
- Chen, Z., Yang L., Cao, G., Guo, W.** (2012). Buckling of the axially compressed cylindrical shells with arbitrary axisymmetric thickness variation, *Thin-Walled Structures*, 60, 38-45.
- Kirkpatrick, S. W. ve Holmes B. S.** (1989). Axial buckling of a thin cylindrical shell: experiments and calculations, *Computational Experiments*, ASME Publications, 176, 329-353.

- Goldfeld, Y., Arbocz J., Rothwell, A.** (2005). Design and optimization of laminated conical shells for buckling, *Thin-Walled Structures*, 43, 107-133.
- Tafreshi, A.** (2004). Efficient modelling of delamination buckling in composite cylindrical shells under axial compression, *Composite Structures*, 64, 511-520.
- Bert, C. W., Kim, C.-D.** (1995). Analysis of buckling of hollow laminated composite drive shafts, *Composites Science and Technology*, 53, 343-351.
- Shokrieh, M. M., Hasani, A., Lessard, L. B.** (2004). Shear buckling of a composite drive shaft under torsion, *Composite Structures*, 64, 63-69.
- Lennon, R. F. ve Das, P. K** (2000). Torsional buckling behavior of stiffened cylinders under combined loading, *Thin-Walled Structures*, 38, 229-245.
- Al-Hassani, S. T. S., Darvizeh, M., Haftchenari H.** (1997). An analytical study of buckling of composite tubes with various boundary conditions, *Composite Structures*, 39, 157-164.
- Bisagni, C. ve Cordisco P.** (2006). Post-buckling and collapse experiments of stiffened composite cylindrical shells subjected to axial loading and torque, *Composite Structures*, 73, 138-149.
- Messenger, T., Pyrz M., Gineste, B., Chauchot, P.** (2002). Optimal laminations of thin underwater composite cylindrical vessels, *Composite Structures*, 58, 529-537.
- Tafreshi, A.** (2006). Delamination buckling and postbuckling in composite cylindrical shells under combined axial compression and external pressure, *Composite Structures*, 72, 401-418.
- Kaw, A. K.** (2006). *Mechanics of Composite Materials*, Second edition, Taylor & Francis Group.
- Berthelot, J.-M.** (1999). *Composite Materials Mechanical Behavior and Structural Analysis*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH.
- NASA** (1965). *Buckling of Thin-walled Circular Cylinders*, Nasa Space Vehicle Design Criteria, National Aeronautics and Space Administration.
- Ural, T.** (2009). *Silindirik kompozit kablarnın burkulma analizi (doktora tezi)*, Atatürk Üniversitesi, Erzurum.
- Vinson, J. R. ve Sierakowski R. L.** (2004). *The Behavior of Structures Composed of Composite Materials*, Second Edition, Kluwer Academic Publishers.
- Kollar, L. P. ve Springer G. S.** (2003). *Mechanics of Composite Structures*, Cambridge University Press.
- Tanov, R. ve Tabiei A.** *Static and Dynamic Buckling of Laminated Composite Shells*, University of Cincinnati.
- Pekbey, Y.** (2005) *Buckling of economical composite bars (doktora tezi)*, Dokuz Eylül University, İzmir.
- Url-1** <<http://tr.wikipedia.org/wiki/MATLAB>>, alındığı tarih: 04.12.2014.

- Url-2** <[http://en.wikibooks.org/wiki/MATLAB\\_Programming](http://en.wikibooks.org/wiki/MATLAB_Programming)>, alındığı tarih:  
04.12.2014.
- Url-3** <<http://en.wikipedia.org/wiki/Abaqus>>, alındığı tarih: 04.12.2014.
- Url-4** <[http://tr.wikipedia.org/wiki/Sonlu\\_elemanlar\\_yöntemi](http://tr.wikipedia.org/wiki/Sonlu_elemanlar_yöntemi)>, alındığı tarih:  
04.12.2014.



## **EKLER**

**EK A: MATLAB Kodu**

## EKA

```
%% Definitions
```

```
layer=input('Enter the number of layers\n');
```

```
angle_increment=2.5; % The value of angle increment; determines the  
resolution of the theta Matrix
```

```
angle=(90+angle_increment)/angle_increment;
```

```
row=layer; % Determines the number of rows of theta Matrix
```

```
col=angle^layer; % Determines the number of columns of the theta  
Matrix
```

```
%% Material properties
```

```
%Properties of CF from the journal
```

```
E1=136.9e9; %[Pa]
```

```
E2=9.86e9; %[Pa]
```

```
E3=9.86e9; %[Pa]
```

```
nu12=0.293;
```

```
nu13=0.293;
```

```
nu21=(E2*nu12)/E1;
```

```
nu23=0.45;
```

```
G12=5.654e9; %[Pa]
```

```
G13=5.654e9; %[Pa]
```

```
G23=2.689e9; %[Pa]
```

```
% Mechanical properties CFRP
```

```
sig_1_T_ult=1500e6; %[Pa]
```

```
sig_1_C_ult=1500e6; %[Pa]
```

```
sig_2_T_ult=40e6; %[Pa]
```

```
sig_2_C_ult=246e6; %[Pa]
```

```
tau_1_2_ult=68e6; %[Pa]
```

```
%% Compliance matrix (S) with the engineering constants
```

```
C=zeros(6,6,layer,col);
```

```
S=zeros(6,6,layer,col);
```

```
S(1,1, :, :)=1/E1;
```

```
S(1,2, :, :)= -nu12/E1;
```

```
S(1,3, :, :)= -nu13/E1;
```

```
S(2,2, :, :)=1/E2;
```

```
S(2,3, :, :)= -nu23/E2;
```

```
S(3,3, :, :)=1/E3;
```

```
S(4,4, :, :)=1/G23;
```

```
S(5,5, :, :)=1/G13;
```

```
S(6,6, :, :)=1/G12;
```

```
%Symmetry
```

```
S(2,1, :, :)=S(1,2, :, :);
```

```
S(3,1, :, :)=S(1,3, :, :);
```

```
S(4,1, :, :)=S(1,4, :, :);
```

```

S(5,1,::)=S(1,5,::);
S(6,1,::)=S(1,6,::);
S(3,2,::)=S(2,3,::);
S(4,2,::)=S(2,4,::);
S(5,2,::)=S(2,5,::);
S(6,2,::)=S(2,6,::);
S(4,3,::)=S(3,4,::);
S(5,3,::)=S(3,5,::);
S(6,3,::)=S(3,6,::);
S(5,4,::)=S(4,5,::);
S(6,4,::)=S(4,6,::);
S(6,5,::)=S(5,6,::);

%% Stiffness matrix (C) with engineering constants

for p=1:layer
    for j=1:col
        C(:, :, p, j)=inv(S(:, :, p, j));
    end
end

%Symmetry
C(2,1,::)=C(1,2,::);
C(3,1,::)=C(1,3,::);
C(4,1,::)=C(1,4,::);
C(5,1,::)=C(1,5,::);
C(6,1,::)=C(1,6,::);
C(3,2,::)=C(2,3,::);
C(4,2,::)=C(2,4,::);
C(5,2,::)=C(2,5,::);
C(6,2,::)=C(2,6,::);
C(4,3,::)=C(3,4,::);
C(5,3,::)=C(3,5,::);
C(6,3,::)=C(3,6,::);
C(5,4,::)=C(4,5,::);
C(6,4,::)=C(4,6,::);
C(6,5,::)=C(5,6,::);

%% Angle arrangement

theta=zeros(row,col);

% See angle_generation function
for i=1:row
    theta(i+1, :)=angle_generation(layer,angle,i);
end

c1=0;
dummy_angle=zeros(1,col);
for i=1:col
    dummy_angle(i)=c1;
    c1=c1+1;
    c1=mod(c1,angle);
end
theta(1, :)=dummy_angle;
theta(row+1, :)=[];

theta=theta.*angle_increment;

```

```

% Degrees to radians conversion
for p=1:layer
    theta(p,:)=(pi*theta(p,))/180;
end

%% Calculation of transformation matrices and stiffness and
compliance matrices with respect to fiber angles

sz_theta=size(theta);

T_sig=zeros(6,6,sz_theta(1,1), sz_theta(1,2));
T_eps=zeros(6,6,sz_theta(1,1), sz_theta(1,2));
S_prime=zeros(6,6,sz_theta(1,1), sz_theta(1,2));
C_prime=zeros(6,6,sz_theta(1,1), sz_theta(1,2));

for p=1:layer
    for angle=1:sz_theta(1,2)
        %Transformation matrix for sigma
        T_sig(:,:,p,angle)=[ (cos(theta(p,angle)))^2
(sin(theta(p,angle)))^2 0 0 0
2*sin(theta(p,angle))*cos(theta(p,angle)); (sin(theta(p,angle)))^2
(cos(theta(p,angle)))^2 0 0 0 -
2*sin(theta(p,angle))*cos(theta(p,angle)); 0 0 1 0 0 0; 0 0 0
cos(theta(p,angle)) -sin(theta(p,angle)) 0; 0 0 0
sin(theta(p,angle)) cos(theta(p,angle)) 0; -
sin(theta(p,angle))*cos(theta(p,angle))
sin(theta(p,angle))*cos(theta(p,angle)) 0 0 0
((cos(theta(p,angle)))^2)-((sin(theta(p,angle)))^2)];

        %Transformation matrix for epsilon
        T_eps(:,:,p,angle)=[ (cos(theta(p,angle)))^2
(sin(theta(p,angle)))^2 0 0 0
sin(theta(p,angle))*cos(theta(p,angle)); (sin(theta(p,angle)))^2
(cos(theta(p,angle)))^2 0 0 0 -
sin(theta(p,angle))*cos(theta(p,angle)); 0 0 1 0 0 0; 0 0 0
cos(theta(p,angle)) -sin(theta(p,angle)) 0; 0 0 0
sin(theta(p,angle)) cos(theta(p,angle)) 0; -
2*sin(theta(p,angle))*cos(theta(p,angle))
2*sin(theta(p,angle))*cos(theta(p,angle)) 0 0 0
((cos(theta(p,angle)))^2)-((sin(theta(p,angle)))^2)];

        S_prime(:,:,p,angle)=(T_eps(:,:,p,angle)\S(:,:,p,angle))*T_sig(:,:,p,angle);

        C_prime(:,:,p,angle)=(T_sig(:,:,p,angle)\C(:,:,p,angle))*T_eps(:,:,p,angle);
    end
end

%% Deleting the first three rows and columns for plane stress
assumption

S_prime(3,:,:)=[];
S_prime(3,:,:)=[];
S_prime(3,:,:)=[];
S_prime(:,3,:,:)=[];

```

```

S_prime(:,3,,:)=[];
S_prime(:,3,,:)=[];
C_prime(3,,:)=[];
C_prime(3,,:)=[];
C_prime(3,,:)=[];
C_prime(:,3,,:)=[];
C_prime(:,3,,:)=[];
C_prime(:,3,,:)=[];
Q_prime=C_prime;
S_prime;

%% Calculation of h values (related with layer thicknesses)

t=zeros(1,layer);
for i=1:layer
    t(i)=input(['Write the thickness of layer number ' num2str(i) '
in millimeters [mm]\n']);
end

% mm to m conversion
for i=1:layer
    t(i)=t(i)/1000;
end

T=sum(t);

dummy_t=cumsum(t);
sz_t=size(t);
dummy_t(sz_t(1,2)+1)=0;
sz_dummy_t=size(dummy_t);

counter=sz_dummy_t(1,2);
for i=1:sz_t(1,2)
    dummy_t(counter)=dummy_t(counter-1);
    counter=counter-1;
end
dummy_t(1)=0;

h=zeros(1,sz_dummy_t(1,2));
for i=1:sz_dummy_t(1,2)
    h(i)=-((T/2)-(dummy_t(i)));
end

%% Calculating the A, B and D matrices

sz_Q_prime=size(Q_prime);

A=zeros(sz_Q_prime(1,1),sz_Q_prime(1,2),sz_Q_prime(1,4));
A_sum=zeros(sz_Q_prime(1,1),sz_Q_prime(1,2),sz_Q_prime(1,3),sz_Q_prime(1,4));
for p=1:layer
    A_sum(:,:,p,:)=Q_prime(:,:,p,:)*(h(p+1)-h(p));
    A=sum(A_sum,3);
end
A=reshape(A,3,3,col);
A;

```

```

B=zeros(sz_Q_prime(1,1),sz_Q_prime(1,2),sz_Q_prime(1,4));
B_sum=zeros(sz_Q_prime(1,1),sz_Q_prime(1,2),sz_Q_prime(1,3),sz_Q_prime(1,4));
for p=1:layer
    B_sum(:,:,p,:)=Q_prime(:,:,p,:)*((h(p+1))^2)-(h(p)^2));
    B=sum(B_sum,3);
end
B=reshape(B,3,3,col);
B=B/2;

D=zeros(sz_Q_prime(1,1),sz_Q_prime(1,2),sz_Q_prime(1,4));
D_sum=zeros(sz_Q_prime(1,1),sz_Q_prime(1,2),sz_Q_prime(1,3),sz_Q_prime(1,4));
for p=1:layer
    D_sum(:,:,p,:)=Q_prime(:,:,p,:)*((h(p+1))^3)-(h(p)^3));
    D=sum(D_sum,3);
end
D=reshape(D,3,3,col);
D=D/3;

%% Defining the dimensional and buckling mode parameters (L,
Diameter, m, n)

L=input('Enter the Length of the cylinder in millimeters [mm]\n');
L=L/1000;
Diameter=input('Enter the Diameter of the cylinder in millimeters
[mm]\n');
R=Diameter/2;
R=R/1000;

%% mass calculation

rho_carbon=1800; %[kg/m3]
rho_epoxy=1200; %[kg/m3]
carbon_percent=0.65;
epoxy_percent=1-carbon_percent;
rho=rho_carbon*carbon_percent+rho_epoxy*epoxy_percent; %[kg/m3]

volume=2*pi*R*T*L;
mass=volume*rho;

%% Calculation C matrix with respect to A, B and D matrices
% NOTE: Here the C matrix is written as Cb and Cb1 because the
letter "C" is used for stiffness matrix (C).

alpha=40;
beta=40;

Nx0=0;
Ny0=1;
constant=1/(Nx0*(alpha^2)+Ny0*(beta^2));

F=zeros(3,3,col);

F(1,1,:)=A(1,1,:)*(alpha^2)+A(3,3,:)*(beta^2);
F(2,2,:)=A(2,2,:)*(beta^2)+A(3,3,:)*(alpha^2);

```

```

F(3,3,:)=D(1,1,:)*(alpha^4)+2*(D(1,2,:)+2*D(3,3,:))*(beta^2)*(alpha^
2)+D(2,2,:)*(beta^2)+(1/R)*((A(2,2,:)/R)+2*B(2,2,:)*(beta^2)+2*B(1,2
,:)*(alpha^2));
F(1,2,:)=(A(1,2,:)+A(3,3,:))*alpha*beta;
F(2,3,:)=(-
1)*(B(2,2,:)*(beta^3)+B(1,2,:)*(alpha^2)*(beta)+2*B(3,3,:)*(alpha^2)
*(beta)+A(2,2,:)*(beta/R));
F(1,3,:)=(-
1)*(A(1,2,:)*(alpha/R)+B(1,1,:)*(alpha^3)+B(1,2,:)*alpha*(beta^2)+2*
B(3,3,:)*alpha*(beta^2));

F(2,1,:)=F(1,2,:);
F(3,2,:)=F(2,3,:);
F(3,1,:)=F(1,3,:);

F1=zeros(2,2,col);

F1(1,1,:)=F(1,1,:);
F1(1,2,:)=F(1,2,:);
F1(2,1,:)=F(2,1,:);
F1(2,2,:)=F(2,2,:);

%% Calculation of critical buckling load (N/m) per unit
circumference under lateral pressure

lambda=zeros(1,col);
Nycr=zeros(1,col);
for i=1:col
    lambda(i)=constant*(det(F(:,:,i))/det(F1(:,:,i)));
end

for i=1:col
    Nycr(i)=lambda(i)*Ny0;
end

%% Critical buckling pressure under lateral pressure (N/m^2)

P=zeros(1,col);
for i=1:col
    P(i)=Nycr(i)/R;
end

%% h/R ratio calculation (thickness/radius)
h_R_ratio=T/R;

%% R/L ratio calculation
R_L_ratio=R/L;

%% Stresses and Strains

stiff=[A,B;B,D];
Nx=zeros(1,col);
Ntheta=Nycr;
Nxtheta=zeros(1,col);

```

```

Mx=zeros(1,col);
Mtheta=zeros(1,col);
Mxtheta=zeros(1,col);

eps=zeros(6,col);
Force_vector=[Nx;Ntheta;Nxtheta;Mx;Mtheta;Mxtheta];
for i=1:col
    eps(:,i)=stiff(:, :, i)\Force_vector(:, i);
end

ex=eps(1, :);
etheta=eps(2, :);
extheta=eps(3, :)/2;
kx=eps(4, :);
ktheta=eps(5, :);
kxtheta=eps(6, :)/2;

eps_0=[ex;etheta;extheta];
eps_k=[kx;ktheta;kxtheta];

sig=zeros(3,layer,col);
for i=1:layer
    for j=1:col

sig(:, i, j)=Q_prime(:, :, i, j)*eps_0(:, j)+T*Q_prime(:, :, i, j)*eps_k(:, j)
;
        end
    end

Transform=zeros(3,3,layer,col);
for i=1:layer
    for j=1:col
        Transform(:, :, i, j)=[(cos(theta(i, j)))^2 (sin(theta(i, j)))^2
2*sin(theta(i, j))*cos(theta(i, j)); (sin(theta(i, j)))^2
(cos(theta(i, j)))^2 -2*sin(theta(i, j))*cos(theta(i, j)); -
sin(theta(i, j))*cos(theta(i, j)) sin(theta(i, j))*cos(theta(i, j))
(cos(theta(i, j)))^2-(sin(theta(i, j)))^2];
    end
end

sig_transform=zeros(3,layer,col);
for i=1:layer
    for j=1:col
        sig_transform(:, i, j)=Transform(:, :, i, j)*sig(:, i, j);
    end
end

sig_MPa=sig*10^-6; %in MPa
sig_transform_MPa=sig_transform*10^-6;

%% Failure theories

X1=zeros(layer,col);
X2=zeros(layer,col);
Y=zeros(layer,col);
S=zeros(layer,col);

for i=1:layer

```

```

for j=1:col
    if sig_transform(1,i,j) > 0
        X1(i,j)=sig_1_T_ult;
    elseif sig_transform(1,i,j) < 0
        X1(i,j)=sig_1_C_ult;
    end

    if sig_transform(2,i,j) > 0
        X2(i,j)=sig_1_T_ult;
    elseif sig_transform(2,i,j) < 0
        X2(i,j)=sig_1_C_ult;
    end

    if sig_transform(2,i,j) > 0
        Y(i,j)=sig_2_T_ult;
    elseif sig_transform(2,i,j) < 0
        Y(i,j)=sig_2_C_ult;
    end

    S(i,j)=tau_1_2_ult;
end
end

failure=zeros(layer,col);
for i=1:layer
    for j=1:col
        failure(i,j)=((sig_transform(1,i,j)/X1(i,j))^2) -
        ((sig_transform(1,i,j)*sig_transform(2,i,j))/(X2(i,j)*X2(i,j))) +
        ((sig_transform(2,i,j)/Y(i,j))^2) +
        ((sig_transform(3,i,j)/S(i,j))^2);
    end
end

%% Assigning the nonzero Nycr and P values
Nycr_non_zero=Nycr;
P_non_zero=P;

%% Finding failed components and making the loads 0
[f_row,f_column]=find(failure>=1);

for i=1:length(f_column)
    Nycr(f_column(i))=0;
end

for i=1:length(f_column)
    P(f_column(i))=0;
end

%% Calculating the maximum pressure

max_load=max(P);
indice=find(P==max_load);

%% Degrees to radians conversion

```

```

% Just for theta matrix control
for p=1:layer
    theta(p,:)=(180*theta(p,))/pi;
end

% rounding the theta matrix because of unit conversion errors
theta=round(theta);

%% Calculating the optimum angle configuration

optimum_angles=theta(:,indice);

%% Printing the values (Maximum buckling pressure, most suitable
angles, h/R ratio and R/L ratio)

fprintf('\n\n\t\t\tRESULTS')
fprintf('\n\nMaximum buckling pressure (Pcr) is \n%e\n',max_load)
fprintf('\nMaximum buckling load per unit circumference (Nycr) is
\n%e\n',Nycr(indice))
fprintf('\nOptimum angles are;\n')
fprintf('%f\n',optimum_angles)
fprintf('\nThe stress values with respect to the part and ply axes
that occur under the maximum buckling load as follows;\n')
for i=1:layer
    fprintf(['\nStress values with respect to the part axes at the
layer number ' num2str(i) ' are\n'])
    fprintf('sigma_x      = %f\n',sig_MPa(1,i,indice))
    fprintf('sigma_theta  = %f\n',sig_MPa(2,i,indice))
    fprintf('sigma_x_theta = %f\n',sig_MPa(3,i,indice))
end
fprintf('\n\n')
for i=1:layer
    fprintf(['\nStress values with respect to the ply axes at the
layer number ' num2str(i) ' are\n'])
    fprintf('sigma_1   = %f\n',sig_transform_MPa(1,i,indice))
    fprintf('sigma_2   = %f\n',sig_transform_MPa(2,i,indice))
    fprintf('sigma_3   = %f\n',sig_transform_MPa(3,i,indice))
end

fprintf('\nFailure coefficient in each layer as follows\n')
for i=1:layer
    fprintf(['f' num2str(i) ' = %f\n'],failure(i,indice))
end

fprintf('\n\nh/R ratio = %f\n',h_R_ratio)
fprintf('R/L ratio = %f\n',R_L_ratio)

%% Graphs

max_load_non_zero=max(P_non_zero);
indice_non_zero=find(P_non_zero==max_load_non_zero);
optimum_angles_non_zero=theta(:,indice_non_zero);

% plot of the only one angle (interploated)
plot_angle_indices1=find(theta(layer,:)==optimum_angles_non_zero(layer,1) & theta(layer-1,:)==optimum_angles_non_zero(layer-1,1));
plot_angles1=theta(1,plot_angle_indices1);

```

```

P_non_zero_graph1=zeros(1,length(plot_angle_indices1));
for i=1:length(plot_angle_indices1)
    P_non_zero_graph1(i)=P_non_zero(plot_angle_indices1(i));
end
% plot(plot_angles,P_non_zero_graph)

% plot of the only one angle (interploated)
plot_angle_indices2=find(theta(layer,')==optimum_angles_non_zero(layer,1) & theta(layer-2,')==optimum_angles_non_zero(layer-2,1));
plot_angles2=theta(2,plot_angle_indices2);
P_non_zero_graph2=zeros(1,length(plot_angle_indices2));
for i=1:length(plot_angle_indices2)
    P_non_zero_graph2(i)=P_non_zero(plot_angle_indices2(i));
end

% plot of the only one angle (interploated)
plot_angle_indices3=find(theta(layer-1,')==optimum_angles_non_zero(layer-1,1) & theta(layer-2,')==optimum_angles_non_zero(layer-2,1));
plot_angles3=theta(3,plot_angle_indices3);
P_non_zero_graph3=zeros(1,length(plot_angle_indices3));
for i=1:length(plot_angle_indices3)
    P_non_zero_graph3(i)=P_non_zero(plot_angle_indices3(i));
end

% plot(plot_angles,P_non_zero_graph)

figure
plot(plot_angles1,P_non_zero_graph1,'b:','LineWidth',2')
hold on
plot(plot_angles2,P_non_zero_graph2,'r--','LineWidth',2')
hold on
plot(plot_angles3,P_non_zero_graph3,'g-','LineWidth',2')
hold on
legend(['Graph of 1st layer when 2nd layer='
num2str(optimum_angles_non_zero(2)) ' 3rd layer='
num2str(optimum_angles_non_zero(3))] , ['Graph of 2nd layer when 1st
layer=' num2str(optimum_angles_non_zero(1)) ' 3rd layer='
num2str(optimum_angles_non_zero(3))] , ['Graph of 3rd layer when 1st
layer=' num2str(optimum_angles_non_zero(1)) ' 2nd layer='
num2str(optimum_angles_non_zero(2))])
hold on
xlabel('The layer angles')
ylabel('The buckling load [N]')
title('The graph of the buckling load vs. layer angle')
grid
hold on
grid minor

```



## ÖZGEÇMİŞ

**Ad Soyad** : Murat Emre ÖZTÜRK  
**Doğum Yeri ve Tarihi** : Bursa 1989  
**E-Mail** : ozturkmuratemre@gmail.com



### ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans** : 2011, Sakarya Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Makine Mühendisliği Bölümü
- **Lise** : 2007, Bursa Anadolu Lisesi

### MESLEKİ DENEYİM:

- Şok Marketler Ticaret A.Ş. : 11.2013 - 04.2014
- Bekil Mühendislik Ltd. Şti. : 05.2013 - 07.2013
- Durmazlar Makine San. ve Tic. A.Ş. : 06.2010 - 07.2010 (Staj)
- Coşkunöz Radyatör Isı San. ve Tic. A.Ş. : 08.2009 – 09.2009 (Staj)

### YAYINLAR:

- Güneş Aydın, Razi Kalantari Osgouei, Murat Emre Öztürk, Ahmad Partovi Meran, Ekrem Tüfekçi, Buckling Analysis of Composite Shells Under Compression and Torsional Loads: Numerical and Analytical Study, WASET ICMEME: XII International Conference on Mechanical, Electronics and Mechatronics Engineering, 28-29 November 2014, Istanbul, Turkey.