İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

WEYL HİPERYÜZEYLERİNDE CHEBYSHEV ŞEBEKELERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

A. Füsun NURCAN

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih	:	24 Ocak 1994
Tezin Savunulduğu Tarih	:	10 Şubat 1994
Tez Danışmanı	:	Prof.Dr. Abdülkadir ÖZDEĞER
Diğer Jüri Üyeleri	:	Prof.Dr. Afet ÖZOK
	:	Doç.Dr. Aynur UYSAL

ŞUBAT 1994

ÖNSÖZ

Riemann ve Weyl uzaylarında eğri şebekeleri, bilhassa bazı Sovyet ve Bulgar matematikçileri tarafından yoğun bir şekilde incelenmiştir. Weyl uzaylarında şebekelerin incelenmesinde Norden ve Shulikovskii tarafından geliştirilen tensörel yöntemler, genelleştirilmiş kovaryant türev kavramı yardımıyla genişletilmiştir. Bir Weyl uzayının metrik tensörü bir çarpan farkıyla belli olduğundan, böyle bir uzayda bazı özel eğri şebekelerinin incelenmesi ağırlıklı tensörlere uygulanan genelleştirilmiş kovaryant türev yardımıyla mümkün olabilmektedir.

Bu çalışmada, Weyl hiperyüzeylerine ait n-boyutlu bazı özel eğri şebekeleri genelleştirilmiş kovaryant türev yöntemleri yardımıyla incelenmiştir.

Yüksek Lisans tezimin hazırlanmasında bana büyük destek veren ve değerli yardımlarını esirgemeyen Sayın Hocam Prof. Dr. Abdülkadir ÖZDEĞER'e; ayrıca tezimin yazım aşamasında başta, Doç. Dr. Selmin NURCAN, Araş. Gör. Cem ALTUNSOY ve İzzet SUCU olmak üzere, bana yardımcı olan tüm çalışma arkadaşlarıma teşekkürlerimi sunarım.

FÜSUN NURCAN

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Bilindiği gibi, konform bir g_{ij} metrik tensörüne ve bu tensörle $\nabla_k g_{ij} = 2T_k g_{ij}$ şeklinde bir uygunluk koşulunu gerçekleyen simetrik bir konneksiyona sahip n-boyutlu bir W_n manifolduna Weyl uzayı denir. Burada T_k kovaryant bir vektörü, $\nabla_k g_{ij}$ ise alışılmış kovaryant türevi göstermektedir. W_n Weyl uzayında bağımsız $\underset{r}{v}^i \ (r = 1,2,\ldots,n)$ vektör alanları n-boyutlu bir $(\underset{1}{v},\underset{2}{v},\ldots,\underset{n}{v})$ şebekesi belirler.

Bu çalışmanın birinci bölümünde, bir Weyl uzayının metrik tensörüne ait uyduların genelleştirilmiş türevleri ve genelleştirilmiş kovaryant türevleri tanımlanarak, n-li bir şebekeye ait vektör alanlarına ve bunların karşıtlarına ait türev formülleri verilmiştir.

Çalışmanın ikinci bölümünde, Weyl uzaylarında birinci ve ikinci cins Chebyshev şebekesi tanımları verilerek bu tür şebekelerin, kendilerine karşı gelen eğrilikler yardımıyla karakterizasyonları üzerinde durulmuştur. Bu bölümde, ayrıca, bu cins şebekelere sahip Weyl hiperyüzeyleri ile ilgili olarak, bilinen üç teoremin ispatlarına yer verilmiştir.

W_{n+1} Weyl uzayının W_n hiperyüzeyine ait genelleştirilmiş metriksel Chebyshev, kuvvetli-metriksel Chebyshev ve genelleştirilmiş eşit-uzaklıklı şebekelerin ele alındığı üçüncü bölümde, bu çeşit şebekelerle ilgili üç yeni teorem ispatlanmıştır.

CHEBYSHEV NETS IN WEYL HYPERSURFACES

SUMMARY

An n-dimensional manifold W_n is said to be a Weyl space, if it has a conformal metric tensor g_{ij} and a symmetric connection satisfying the compatibility condition given by the equation $\nabla_k g_{ij} = 2T_k g_{ij}$,
where T_k denotes a covariant vector and $\nabla_k g_{ij}$ denotes usual covariant derivative. In n-dimensional Weyl space W_n, the independent vector fields $\underset{r}{v}^i$ (r=1,2,...,n) determine an n-dimensional net $(\underset{1}{v},\underset{2}{v},...,\underset{n}{v})$.

Let A be a satellite of g_{ij} with weight {k}. $\overset{\circ}{\partial}_i A$, given by the equation

$$\overset{\circ}{\partial}_i A = \partial_i A - kT_i A,$$

is said to be the prolonged derivative of A and $\overset{\circ}{\nabla}_s A$, given by the equation

$$\overset{\circ}{\nabla}_s A = \nabla_s A - kT_s A,$$

is called the prolonged covariant derivative of A.

The prolonged covariant derivatives of the vector fields $\underset{\alpha}{v}^i$ and their reciprocals $\overset{\alpha}{v}_i$ are, respectively, given by

$$\overset{\circ}{\nabla}_k \underset{\alpha}{v}^i = \underset{\alpha}{\overset{\sigma}{T}}_k \underset{\sigma}{v}^i \;, \; \overset{\circ}{\nabla}_k \overset{\alpha}{v}_i = - \underset{\sigma}{\overset{\alpha}{T}}_k \overset{\sigma}{v}_i \quad (i,k,\alpha,\sigma = 1,2,...,n).$$

From these formulas, it follows that

$$\underset{\alpha}{\overset{\sigma}{T}}_k \cos \underset{\sigma\alpha}{\varphi} = 0,$$

$$\frac{1}{2} R^{\;\;i}_{ski} + n\nabla_{[s}T_{k]} = 0,$$

$$\nabla_{[s} \overset{\alpha}{\underset{\alpha}{T}}_{k]} + \overset{\sigma}{\underset{\alpha}{T}}_{[k} \quad \overset{\alpha}{\underset{\sigma}{T}}_{s]} \quad = 0$$

where $R^{\ j}_{ski}$ and $\underset{\sigma\alpha}{\varphi}$ are, respectively, the curvature tensor of W_n and the angle between the directions determined by $\underset{\sigma}{v}$ and $\underset{\alpha}{v}$.

If any one of the vector fields of the net $(\underset{1}{v},\underset{2}{v},\ldots,\underset{n}{v})$ is parallelly translated along the lines determined by the remaining fields of the net, such a net is called a Chebyshev net of the first kind.

A net is said to be a Chebyshev net of the second kind, if any of its (n-1)-dimensional area elements determined by the fields of the net is parallelly translated along the lines determined by the remaining field of the net.

Corresponding to these two kinds of Chebyshev nets, the Chebyshev curvatures of the first and second kind are, respectively, defined by

$$\overset{c}{\underset{ab}{\tau}} = \overset{c}{\underset{a}{T}}_k \underset{b}{v}^k \quad (a,b,c,k = 1,2,\ldots,n;\ a \neq b\ )$$

and

$$\overset{a}{\underset{b}{\rho}} = \overset{@}{\underset{b}{T}}_k \underset{@}{v}^k \ (a,b,k = 1,2,\ldots,n;\ a \neq b\ )$$

The Chebyshev nets of the first and second kind, are also characterized by the corresponding Chebyshev vectors as follows: The vectors defined by

$$\underset{sk}{a}^i = \overset{r}{\underset{sk}{\tau}} \underset{r}{v}^i \ , \overset{s}{b}_i = \overset{s\,r}{\rho} \underset{r}{v}_i$$

are, respectively, called the first and second Chebyshev vectors of the net $(\underset{1}{v},\underset{2}{v},\ldots,\underset{n}{v})$.

On the other hand, the net $(\underset{1}{v},\underset{2}{v},\ldots,\underset{n}{v})$ whose Chebyshev vectors of the second kind satisfy the condition

$$\sum_{s=1}^{n} \overset{s}{b}_i = 0$$

is said to be a b-net.

The net $(\underset{1}{v},\underset{2}{v},\ldots,\underset{n}{v})$ will be called a c-net if its geodesic vectors satisfy the condition

$$\sum_{s=1}^{n} \underset{s}{c}^{i} = 0$$

In [6], Tsareva and Zlatanov studied the Chebyshev nets of the first and second kind. They also gave some characterizations of b-nets and c-nets. In the same paper, they studied the subnet $(\underset{r}{v},\underset{s}{v})$ of the net $(\underset{1}{v},\underset{2}{v},\ldots,\underset{n}{v})$ by using the tensors and the affinor defined, respectively, by

$$\overset{rs}{a}_{ik} = \overset{r}{v}_i \overset{s}{v}_k + \overset{r}{v}_k \overset{s}{v}_i \quad , \quad \underset{rs}{a}^{ik} = \underset{r}{v}^i \underset{s}{v}^k + \underset{r}{v}^k \underset{s}{v}^i$$

and

$$\underset{rs}{a}{}^{k}_{i} = \overset{r}{v}_i \underset{s}{v}^k + \underset{r}{v}^k \overset{s}{v}_i .$$

The following results concernings such subnets are obtained in [6]:

(a) $\overset{r}{b}_j + \overset{s}{b}_j = -\overset{\circ}{\nabla}_k (\overset{rs}{a}_{ij} \underset{rs}{a}^{ik})$

(b) If the area element $(\underset{1}{v},\underset{2}{v},\ldots,\underset{r-1}{v},\underset{r+1}{v},\ldots,\underset{n}{v})$ is parallelly translated along the lines $(\underset{r}{v})$, then

$$\overset{s}{b}_j = -\overset{\circ}{\nabla}_k (\overset{rs}{a}_{ij} \underset{rs}{a}^{ik}).$$

(c) If the subnet $(\underset{r}{v},\underset{s}{v})$ is geodesic, then

$$\overset{r}{b}_i + \overset{s}{b}_i = -\nabla_k (\underset{rs}{a}{}^{j}_{i} \underset{rs}{a}{}^{k}_{j}).$$

(d) If the subnet $(\underset{r}{v},\underset{s}{v})$ is geodesic and area element $(\underset{1}{v},\underset{2}{v},\ldots,\underset{r-1}{v},\underset{r+1}{v},\ldots,\underset{n}{v})$ is parallelly translated along the lines $(\underset{r}{v})$, then

$$\overset{s}{b}_i = -\nabla_k (\underset{rs}{a}{}^{j}_{i} \underset{rs}{a}{}^{k}_{j}).$$

By means of these results, the following two corollaries are easily obtained:

If the net $(\underset{1}{v},\underset{2}{v},\ldots,\underset{n}{v})$ contains a Chebyshev subnet $(\underset{r}{v},\underset{s}{v})$ and area elements $(\underset{1}{v},\underset{2}{v},\ldots,\underset{r-1}{v},\underset{r+1}{v},\ldots,\underset{n}{v})$ and $(\underset{1}{v},\underset{2}{v},\ldots,\underset{s-1}{v},\underset{s+1}{v},\ldots,\underset{n}{v})$ are parallelly translated along the lines $(\underset{r}{v})$ and $(\underset{s}{v})$, respectively, then the tensors of the subnet $(\underset{r}{v},\underset{s}{v})$ satisfy the condition

$$\overset{\circ}{\nabla}_k (\overset{(rs)}{a}_{ij} \underset{(rs)}{a}{}^{ik}) = 0.$$

If the net $(\underset{1}{v},\underset{2}{v},\ldots,\underset{n}{v})$ contains a Chebyshev and geodesic subnet $(\underset{r}{v},\underset{s}{v})$ and area elements $(\underset{1}{v},\underset{2}{v},\ldots,\underset{r-1}{v},\underset{r+1}{v},\ldots,\underset{n}{v})$ and $(\underset{1}{v},\underset{2}{v},\ldots,\underset{s-1}{v},\underset{s+1}{v},\ldots,\underset{n}{v})$ are parallelly translated along the lines $(\underset{r}{v})$ and $(\underset{s}{v})$, respectively, then the affinor of the subnet $(\underset{r}{v},\underset{s}{v})$ satisfies the condition

$$\nabla_k (\underset{rs}{a}{}^j_i \, \underset{rs}{a}{}^k_j) = 0.$$

In [9], n-dimensional nets in the hypersurface W_n of the Weyl space W_{n+1} are considered and the following results and corollaries are obtained:

1)-If $\underset{rp}{\bar{a}}{}^a$ and $\underset{rp}{a}{}^i$ are, respectively, the components of the Chebyshev vector fields of the first kind of the net $(\underset{1}{v},\underset{2}{v},\ldots,\underset{n}{v})$ with respect to W_{n+1} and W_n, then the relation

$$x^j_a \, \underset{rp}{\bar{a}}{}^a = \underset{rp}{a}{}^i$$

holds.

From this it follows that, if the net $(\underset{1}{v},\underset{2}{v},\ldots,\underset{n}{v})$ in W_n is a Chebyshev net of the first kind with respect to W_{n+1}, it is also a Chebyshev net of the first kind with respect to W_n. Furthermore, if the net is a Chebyshev net of the first kind relative to W_n, then the Chebyshev vector fields of the first kind relative to W_{n+1} are normal to W_n.

2)- If $\overset{r}{\bar{b}}_a$ and $\overset{r}{b}_i$ are, respectively, the components of the Chebyshev vector fields of the second kind of the net $(\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \ldots, \underset{n}{v})$ with respect to W_{n+1} and W_n, then the relations

$$x^a_j \overset{r}{\bar{b}}_a = \overset{r}{b}_j \ , \sum_r \overset{r}{\bar{b}}_a = -\sum_i \Omega^i_i \, \eta_a + \sum_r \overset{r}{b}_i \; x^i_a$$

hold.

As a consequence of this theorem we conclude that, if the net $(\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \ldots, \underset{n}{v})$ in W_n is a Chebyshev net of the second kind with respect to W_{n+1}, it is also a Chebyshev net of the second kind with respect to W_n. Furthermore, if the net is a Chebyshev net of the second kind relative to W_n, then the Chebyshev vector fields of the second kind relative to W_{n+1} are normal to W_n.

If the net $(\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \ldots, \underset{n}{v})$ in W_n is a b-net with respect to W_{n+1}, it is also a b-net with respect to W_n with $\sum_i \Omega^i_i = 0$. Furthermore, if the net $(\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \ldots, \underset{n}{v})$ is a b-net with respect to W_n, then the vector field $\sum_r \overset{r}{\bar{b}}_a$ is normal to W_n.

3)- If $\underset{r}{\bar{c}}^a$ and $\underset{r}{c}^i$ are, respectively, the components of the geodezic vector fields of the net $(\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \ldots, \underset{n}{v})$ with respect to W_{n+1} and W_n, then they are related by the equations

$$x^j_a \underset{r}{\bar{c}}^a = \underset{r}{c}^j \quad \text{and} \quad \sum_r \underset{r}{\bar{c}}^a = \sum_r \kappa \underset{rr}{\eta}^a + \sum_r \underset{r}{c}^i \; x^a_i \, .$$

According to this theorem, if the net $(\underset{1}{v},\underset{2}{v},\ldots,\underset{n}{v})$ in W_n is a c-net with respect to W_{n+1}, it is also a c-net with respect to W_n with $\sum_r \underset{rr}{\kappa}=0$. Moreover, if the net $(\underset{1}{v},\underset{2}{v},\ldots,\underset{n}{v})$ is a c-net with respect to W_n, then the vector field $\sum_r \underset{r}{\bar{c}}^a$ is normal to W_n.

Let $W_n(g_{ij},T_k)$ be a hypersurface of (n+1)-dimensional Weyl space $W_{n+1}(g_{ab},T_c)$ and let $(\underset{1}{v},\underset{2}{v},\ldots,\underset{n}{v})$ be a net belonging to $W_n(g_{ij},T_k)$. If for a fixed α (α =1,2,...,n), the condition

$$\overset{\circ}{\nabla}_{[s}\overset{\alpha}{v}_{i]}=0$$

holds, the net $(\underset{1}{v},\underset{2}{v},\ldots,\underset{n}{v})$ is said to be a generalized metrically α-Chebyshev net. If the above condition holds for each α (α =1,2,...,n), the net $(\underset{1}{v},\underset{2}{v},\ldots,\underset{n}{v})$ is said to be strongly-metrically Chebyshev.

If a net $(\underset{1}{v},\underset{2}{v},\ldots,\underset{n}{v})$ belonging to the hypersurface W_n satisfies the condition

$$\overset{\circ}{\nabla}_k(\overset{1}{v}_i+\overset{2}{v}_i+\ldots+\overset{n}{v}_i)=0 \quad [ik],$$

it is said to be a generalized equidistant Chebyshev net.

In this work, the following three theorems concerning these special nets are obtained:

If the net $(\underset{1}{v},\underset{2}{v},\ldots,\underset{n}{v})$ belonging to the hypersurface W_n of W_{n+1} is generalized metrically α-Chebyshev with respect to W_{n+1}, it is also generalized metrically α-Chebyshev with respect to the hypersurface W_n.

A strongly-metrically net $(\underset{1}{v},\underset{2}{v},\ldots,\underset{n}{v})$ belonging to the Weyl space W_n is a generalized equidistant net.

If the net $(\underset{1}{v},\underset{2}{v},\ldots,\underset{n}{v})$ belonging to the hypersurface W_n of W_{n+1} is generalized equidistant with respect to W_{n+1}, it is also generalized equidistant with respect to the hypersurface W_n .

BÖLÜM I

WEYL UZAYLARI

1.1. Weyl Uzayları ile İlgili Bazı Temel Tanım ve Teoremler

TANIM 1.1.1 Simetrik (burulmasız) bir konneksiyona, konform bir g_{ij} metrik tensörüne sahip n- boyutlu bir W_n manifoldunda g_{ij} metrik tensörü ile konneksiyon arasındaki uygunluk koşulu

$$\nabla_k g_{ij} - 2 g_{ij} T_k = 0 \tag{1.1.1}$$

şeklinde ise, W_n manifolduna bir Weyl uzayı denir ve $W_n(g_{ij}, T_k)$ şeklinde gösterilir. Burada T_k kovaryant bir vektör olup, Weyl uzayının komplemanter vektörü adını alır [1].

Γ^i_{jk} ile gösterilen konneksiyonun katsayıları ve metrik tensör yardımıyla

$$\Gamma_{jki} = g_{ih} \Gamma^h_{jk} \tag{1.1.2}$$

fonksiyonları tanımlanmış olsun [2].

Riemann Geometrisindekine benzer şekilde, Weyl uzayının g_{ij} metrik tensörünün kovaryant türevi

$$\nabla_k g_{ij} = \partial_k g_{ij} - g_{hj} \Gamma^h_{ik} - g_{ih} \Gamma^h_{jk} \tag{1.1.3}$$

şeklinde tanımlanır. (1.1.1) den, (1.1.2) ve (1.1.3) yardımıyla

$$\Gamma_{ikj} + \Gamma_{jki} = \partial_k g_{ij} - 2 g_{ij} T_k \tag{1.1.4}$$

bulunur. i, j, k nın devri olarak değiştirilmesiyle, (1.1.4) bağıntısına ilave olarak,

$$\Gamma_{jik} + \Gamma_{kij} = \partial_i g_{jk} - 2 g_{jk} T_i \tag{1.1.4)'}$$

$$\Gamma_{kji} + \Gamma_{ijk} = \partial_j g_{ki} - 2 g_{ki} T_j \tag{1.1.4)''}$$

bağıntıları elde edilir. (1.1.4)' ve (1.1.4)" nün taraf tarafa toplamından (1.1.4) çıkarılırsa

$$\Gamma_{ijk} = [ij,k] - (g_{ik} T_j + g_{jk} T_i - g_{ij} T_k) \tag{1.1.5}$$

bulunur. Burada $[ij,k]$, g_{ij} tensörüne bağlı ikinci cins Christoffel sembolleri olup,

$$[ij,k]=\frac{1}{2}(\partial_j g_{ik}+\partial_i g_{jk}-\partial_k g_{ij})$$

şeklinde tanımlanmıştır.

(1.1.5) in her iki tarafi g^{kh} karşıt tensörü ile çarpılır ve k indisi üzerinden toplam alınırsa

$$\Gamma_{ij}^{h}=g^{kh}\Gamma_{ijk}=g^{kh}[ij,k]-g^{kh}(g_{ik}T_j+g_{jk}T_i-g_{ij}T_k),$$

veya

$$\Gamma_{ij}^{h}=\left\{{h \atop ij}\right\}-(\delta_i^h T_j+\delta_j^h T_i-g_{ij}T^h), \quad g^{kh}T_k=T^h \tag{1.1.6}$$

bulunur. Burada $g^{kh}[ij,h]=\left\{{k \atop ij}\right\}$ konmuştur.

Buna göre, (1.1.1) bağıntısını sağlayan T_k kovaryant vektörü ve g_{ij} metrik tensörü varsa, (1.1.6) bağıntısı simetrik bir konneksiyon tanımlar. Buna karşılık, verilen herhangi bir simetrik konneksiyon için (1.1.1) bağıntısını sağlayan g_{ij} tensörü ve T_k kovaryant vektörü, genel olarak, mevcut değildir.

λ bir nokta fonksiyonu olmak üzere $W_n(g_{ij},T_k)$ uzayında, metrik tensörün

$$\check{g}_{ij}=\lambda^2 g_{ij} \tag{1.1.7}$$

şeklindeki bir dönüşümü altında, T_k kovaryant vektörü

$$\check{T}_k=T_k+\partial_k \ln\lambda \tag{1.1.8}$$

bağıntısına göre değişmektedir [1].

TEOREM 1.1.1 (1.1.1) bağıntısını sağlayan bir simetrik konneksiyon için g_{ij} metrik tensörü ve T_k kovaryant vektörü tek türlü olarak belirli değildir.

İSPAT: $\check{g}_{ij}=\lambda^2 g_{ij}$ ve $\check{T}_k=T_k+\partial_k\ln\lambda$ şeklinde tanımlanan $\check{g}_{ij}$ tensörü ve $\check{T}_k$ kovaryant vektörü için

$$\begin{aligned}\nabla_k\check{g}_{ij}-2\check{g}_{ij}\check{T}_k&=\nabla_k(\lambda^2 g_{ij})-2\lambda^2 g_{ij}(T_k+\partial_k\ln\lambda)\\&=\lambda^2\nabla_k g_{ij}+2\lambda(\partial_k\lambda)g_{ij}-2\lambda^2 g_{ij}T_k-2\lambda^2 g_{ij}\frac{\partial_k\lambda}{\lambda}\\&=\lambda^2(\nabla_k g_{ij}-2g_{ij}T_k)\end{aligned}$$

bulunur. Buna göre, g_{ij} tensörü ve T_k kovaryant vektörü (1.1.1) koşulunu sağlarsa, $(\overset{\vee}{g}_{ij}, \overset{\vee}{T}_k)$ ikilisi de bu bağıntıyı sağlar.

SONUÇ Her Weyl uzayına, birbirlerine (1.1.7) ve (1.1.8) ile bağlı olan sonsuz sayıda (g_{ij}, T_k) , $(\overset{\vee}{g}_{ij}, \overset{\vee}{T}_k)$, ... tensör çifti karşı gelir.

TANIM 1.1.2 g_{ij} tensörünün $\overset{\vee}{g}_{ij} = \lambda^2 g_{ij}$ şeklindeki bir normlanmasına karşılık bir A büyüklüğü

$$\overset{\vee}{A} = \lambda^k A \tag{1.1.9}$$

şeklinde değişiyorsa, A ya g_{ij} tensörünün $\{k\}$ ağırlıklı bir uydusu denir [3].

1.2 . Genelleştirilmiş Türev ve Genelleştirilmiş Kovaryant Türev

TANIM 1.2.1 A, g_{ij} nin $\{k\}$ ağırlıklı bir uydusu olmak üzere

$$\overset{\circ}{\partial_i} A = \partial_i A - kT_i A \tag{1.2.1}$$

şeklinde tanımlanan $\overset{\circ}{\partial_i} A$ ifadesine A nın genelleştirilmiş türevi denir [4].

TANIM 1.2.2 A, g_{ij} nin $\{k\}$ ağırlıklı bir uydusu olmak üzere,

$$\overset{\circ}{\nabla}_s A = \nabla_s A - kT_s A \tag{1.2.2}$$

şeklinde tanımlanan $\overset{\circ}{\nabla}_s A$ büyüklüğüne, A nın genelleştirilmiş kovaryant türevi denir. Burada $\nabla_s A$ alışılmış kovaryant türevdir [3].

TEOREM 1.2.1 Genelleştirilmiş türev ve genelleştirilmiş kovaryant türev aşağıdaki özelliklere sahiptir:

(a) Genelleştirilmiş türev ve genelleştirilmiş kovaryant türev uyduların ağırlıklarını korur.

(b) $\overset{\circ}{\partial_i}(AB) = (\overset{\circ}{\partial_i} A)B + A(\overset{\circ}{\partial_i} B)$

ve

$\overset{\circ}{\nabla}_s(AB) = (\overset{\circ}{\nabla}_s A)B + A(\overset{\circ}{\nabla}_s B)$

dir.

İSPAT: (a) $\{k\}$ ağırlıklı bir A uydusunu gözönüne alalım. (1.1.9) a göre $\overset{\vee}{A} = \lambda^k A$ olduğundan, genelleştirilmiş türev alır ve (1.2.1), (1.1.8) kullanılırsa

$$\overset{\circ}{\partial_i} \overset{\vee}{A} = \partial_i \overset{\vee}{A} - k \overset{\vee}{T_i} \overset{\vee}{A} = \partial_i(\lambda^k A) - k(T_i + \partial_i \ln\lambda)(\lambda^k A)$$
$$=(\partial_i \lambda^k)A + \lambda^k(\partial_i A) - kT_i\lambda^k A - k\lambda^k A(\partial_i \ln\lambda)$$
$$= k\lambda^{k-1}(\partial_i\lambda)A + \lambda^k(\partial_i A) - kT_i\lambda^k A - k\lambda^k A\frac{\partial_i\lambda}{\lambda}$$
$$= \lambda^k(\partial_i A - kT_i A)$$
$$= \lambda^k \overset{\circ}{\partial_i} A$$

elde edilir.

Benzer işlemleri genelleştirilmiş kovaryant türev için uygulanırsa:

$$\overset{\circ}{\nabla_s} \overset{\vee}{A} = \nabla_s \overset{\vee}{A} - k \overset{\vee}{T_s} \overset{\vee}{A} = \nabla_s(\lambda^k A) - k(T_s + \partial_s \ln\lambda)(\lambda^k A)$$
$$= (\nabla_s\lambda^k)A + \lambda^k(\nabla_s A) - kT_s\lambda^k A - k\lambda^k A(\partial_s \ln\lambda)$$
$$= k\lambda^{k-1}(\partial_s\lambda)A + \lambda^k(\nabla_s A) - kT_s\lambda^k A - k\lambda^k A\frac{\partial_s\lambda}{\lambda}$$
$$= \lambda^k(\nabla_s A - kT_s A)$$
$$= \lambda^k \overset{\circ}{\nabla_s} A$$

elde edilir.

(b) A ve B, sırasıyla, {k} ve {l} ağırlıklı uydular olsunlar. (1.1.9) a göre $\overset{\vee}{A} = \lambda^k A$ ve $\overset{\vee}{B} = \lambda^l B$ olduğundan $\overset{\vee}{A}\overset{\vee}{B} = \lambda^{k+l} AB$ bulunur ki, buradan AB nin, ağırlığı $\{k+l\}$ olan bir uydu olduğu anlaşılır. AB nin genelleştirilmiş türevi alınırsa

$$\overset{\circ}{\partial_i}(AB) = \partial_i(AB) - (k+l)T_i(AB) = (\partial_i A)B + A(\partial_i B) - kT_i AB - lT_i AB$$
$$= (\partial_i A - kT_i A)B + A(\partial_i B - lT_i B)$$
$$= (\overset{\circ}{\partial_i} A)B + A(\overset{\circ}{\partial_i} B)$$

bulunur.

Benzer işlemler genelleştirilmiş kovaryant türev için uygulanırsa:

$$\overset{\circ}{\nabla}_s(AB) = \nabla_s(AB) - (k+l)T_s AB = (\nabla_s A)B + A(\nabla_s B) - kT_s AB - lT_s AB$$
$$= (\nabla_s A - kT_s A)B + A(\nabla_s B - lT_s B)$$
$$= (\overset{\circ}{\nabla}_s A)B + A(\overset{\circ}{\nabla}_s B)$$

elde edilir.

TEOREM 1.2.2 g_{is} metrik tensörü ile bunun g^{is} karşıt tensörünün genelleştirilmiş kovaryant türevleri sıfırdır.

İSPAT : (1.1.7) gereğince g_{is} tensörünün ağırlığı $\{2\}$ dir. g_{is} nin genelleştirilmiş kovaryant türevi alınırsa, (1.1.1) gereğince

$$\overset{\circ}{\nabla}_k g_{is} = \nabla_k g_{is} - 2T_k g_{is} = 0$$

elde edilir. g_{is} tensörünün g^{is} ile gösterilen karşıt tensörü

$$g_{is} g^{js} = \delta_i^j$$

şeklinde tanımlandığından, son bağıntıdan genelleştirilmiş kovaryant türev alınır ve $\overset{\circ}{\nabla}_k g_{is} = 0$ olduğu hatırlanırsa

$$\overset{\circ}{\nabla}_k (g_{is} g^{js}) = \overset{\circ}{\nabla}_k (\delta_i^j) = 0,$$
$$= (\overset{\circ}{\nabla}_k g_{is}) g^{js} + g_{is}(\overset{\circ}{\nabla}_k g^{js}) = g_{is}(\overset{\circ}{\nabla}_k g^{js})$$
$$= 0$$

bulunur. Eşitliğin her iki yanı g^{il} ile çarpılır ve i indisi üzerinden toplam alınırsa

$$g^{il} g_{is}(\overset{\circ}{\nabla}_k g^{js}) = \delta_s^l \overset{\circ}{\nabla}_k g^{js} = \overset{\circ}{\nabla}_k g^{jl} = 0$$

elde edilir.

1.3. Weyl Uzayında Türev Formülleri

$W_n(g_{is}, T_k)$ Weyl uzayında lineer bağımsız $\underset{\alpha}{v}(\alpha = 1, 2, \ldots, n)$ vektör alanlarının kontravaryant bileşenleri

$$g_{is} \underset{\alpha}{v}^i \underset{\alpha}{v}^s = 1 \qquad (1.3.1)$$

koşulunu sağlasınlar. g_{is} tensörünün ağırlığı $\{2\}$ olduğu için, $\underset{\alpha}{v}^i$ kontravaryant vektör alanlarının ağırlığı $\{-1\}$ dir.

$\underset{\alpha}{v}(\alpha=1,2,\dots,n)$ vektör alanları n- boyutlu $(\underset{1}{v},\underset{2}{v},\dots,\underset{n}{v})$ şebekesini belirler.

$$\overset{\alpha}{v}_s \underset{\beta}{v}^s = \delta^{\alpha}_{\beta} \; , \quad \overset{\alpha}{v}_s \underset{\alpha}{v}^k = \delta^{k}_{s} \tag{1.3.2}$$

bağıntıları yardımı ile $\underset{\alpha}{v}^i$ vektör alanlarının karşıtları olan, $\{1\}$ ağırlıklı $\overset{\alpha}{v}_i$ kovaryant vektör alanları tanımlanmış olur [5].

$\underset{\alpha}{v}^i$ ve $\underset{\beta}{v}^i$ doğrultuları arasındaki açı $\underset{\alpha\beta}{\varphi}$ ile gösterildiğine göre

$$g_{is}\underset{\alpha}{v}^i \underset{\beta}{v}^s = \cos \underset{\alpha\beta}{\varphi}$$

dır.

$\underset{\alpha}{v}^i$ kontravaryant vektör alanlarının genelleştirilmiş kovaryant türevi

$$\overset{\circ}{\nabla}_k \underset{\alpha}{v}^i = \overset{\sigma}{\underset{\alpha}{T}}_k \underset{\sigma}{v}^i \qquad (i,k,\alpha,\sigma=1,2,\dots,n) \tag{1.3.3}$$

şeklinde yazılabilir. $\overset{\alpha}{v}_i$ karşıt vektör alanlarının genelleştirilmiş kovaryant türevi ise

$$\overset{\circ}{\nabla}_k \overset{\alpha}{v}_i = -\overset{\alpha}{\underset{\sigma}{T}}_k \overset{\sigma}{v}_i \tag{1.3.3)'$$

şeklindedir. Gerçekten, $\overset{\alpha}{v}_i \underset{\sigma}{v}^i = \delta^{\alpha}_{\sigma}$ eşitliğinin her iki yanının genelleştirilmiş kovaryant türevi alınırsa

$$\overset{\circ}{\nabla}_k(\overset{\alpha}{v}_i \underset{\sigma}{v}^i) = (\overset{\circ}{\nabla}_k \overset{\alpha}{v}_i)\underset{\sigma}{v}^i + \overset{\alpha}{v}_i(\overset{\circ}{\nabla}_k \underset{\sigma}{v}^i) = \overset{\circ}{\nabla}_k \delta^{\alpha}_{\sigma} = 0$$

veya

$$(\overset{\circ}{\nabla}_k \overset{\alpha}{v}_i)\underset{\sigma}{v}^i + \overset{\alpha}{\underset{\sigma}{T}}_k = 0$$

bulunur. Son eşitliğin her iki yanı $\overset{\sigma}{v}_j$ ile çarpılıp, σ indisi üzerinden toplam alınırsa

$$(\overset{\circ}{\nabla}_k \overset{\alpha}{v}_i)\underset{\sigma}{v}^i \overset{\sigma}{v}_j = -\overset{\alpha}{\underset{\sigma}{T}}_k \overset{\sigma}{v}_j ,$$

$$(\overset{\circ}{\nabla}_k \overset{\alpha}{v}_i)\,\delta^{\,i}_{j} = -\underset{\sigma}{\overset{\alpha}{T_k}}\ \overset{\sigma}{v}_j\ ,$$

$$\overset{\circ}{\nabla}_k \overset{\alpha}{v}_j = -\underset{\sigma}{\overset{\alpha}{T_k}}\ \overset{\sigma}{v}_j$$

elde edilir.

TEOREM 1.3.1 Bir Weyl uzayında $\underset{\alpha}{\overset{\sigma}{T_k}} \cos \underset{\sigma\alpha}{\varphi} = 0$ bağıntısı mevcuttur.

İSPAT : (1.3.1) bağıntısının her iki yanının genelleştirilmiş kovaryant türevi alınırsa, (1.3.3) yardımıyla

$$g_{is}(\overset{\circ}{\nabla}_k \underset{\alpha}{v^i})\underset{\alpha}{v^s} + g_{is}\underset{\alpha}{v^i}(\overset{\circ}{\nabla}_k \underset{\alpha}{v^s}) = 0\ ,$$

$$g_{is}\underset{\alpha}{\overset{\sigma}{T_k}}\ \underset{\sigma}{v^i}\ \underset{\alpha}{v^s} + g_{is}\underset{\alpha}{v^i}\ \underset{\alpha}{\overset{\sigma}{T_k}}\ \underset{\sigma}{v^s} = 0\ ,$$

$$\underset{\alpha}{\overset{\sigma}{T_k}}\ g_{is}\underset{\sigma}{v^i}\ \underset{\alpha}{v^s} + \underset{\alpha}{\overset{\sigma}{T_k}}\ g_{is}\underset{\alpha}{v^i}\ \underset{\sigma}{v^s} = 0\ ,$$

$$\underset{\alpha}{\overset{\sigma}{T_k}}\ \cos \underset{\sigma\alpha}{\varphi} = 0$$

bulunur [3].

TEOREM 1.3.2 R^{j}_{ski} , $\underset{n}{W}$ uzayının eğrilik tensörü olmak üzere:

(a) $\dfrac{1}{2}R^{i}_{ski} + n\nabla_{[s}T_{k]} = 0$

(b) $\nabla_{[s}\underset{\alpha}{\overset{\alpha}{T}}_{k]} + \underset{\alpha}{\overset{\sigma}{T}}_{[k}\ \underset{\sigma}{\overset{\alpha}{T}}_{s]} = 0$

dır.

İSPAT: Norden'e göre [1]

$$2\nabla_{[r}\nabla_{s]}v^i = v^k R^{i}_{rsk}\ ,\ R^{i}_{rsk} = \partial_r\Gamma^{i}_{sk} - \partial_s\Gamma^{i}_{rk} + \Gamma^{i}_{mr}\Gamma^{m}_{sk} - \Gamma^{i}_{ms}\Gamma^{m}_{rk} \qquad (1.3.4)$$

olup, ikinci bağıntıda $k = i$ konulursa

$$R^{\,i}_{rsi} = \partial_r\Gamma^{i}_{si} - \partial_s\Gamma^{i}_{ri} + \Gamma^{i}_{mr}\Gamma^{m}_{si} - \Gamma^{i}_{ms}\Gamma^{m}_{ri} \qquad (1.3.5)$$

bulunur. (1.1.6) kullanılırsa

$$\partial_r \Gamma^i_{si} = \partial_r\Big(\left\{{}^{\,i}_{si}\right\} - (\delta^i_s T_i + \delta^i_i T_s - g_{is} T^i)\Big) = \partial_r\Big(\left\{{}^{\,i}_{si}\right\} - (T_s + nT_s - T_s)\Big),$$

$$\partial_r \Gamma^{\,i}_{si} = \partial_r\left\{{}^{\,i}_{si}\right\} - n\partial_r T_s ,$$

elde edilir. Buradan

$$\partial_s \Gamma^i_{ri} = \partial_s\left\{{}^{\,i}_{ri}\right\} - n\partial_s T_r$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\Gamma^i_{mr}\Gamma^m_{si} = \left[\left\{{}^{\,i}_{mr}\right\} - (\delta^i_m T_r + \delta^i_r T_m - g_{mr}T^i)\right]\left[\left\{{}^{\,m}_{si}\right\} - (\delta^m_s T_i + \delta^m_i T_s - g_{is}T^m)\right]$$

$$= \left\{{}^{\,i}_{mr}\right\}\left\{{}^{\,m}_{si}\right\} - \left\{{}^{\,i}_{mr}\right\}(\delta^m_s T_i + \delta^m_i T_s - g_{is}T^m) - \left\{{}^{\,m}_{si}\right\}(\delta^i_m T_r + \delta^i_r T_m - g_{mr}T^i)$$

$$+(\delta^i_m T_r + \delta^i_r T_m - g_{mr}T^i)(\delta^m_s T_i + \delta^m_i T_s - g_{is}T^m)$$

$$= \left\{{}^{\,i}_{mr}\right\}\left\{{}^{\,m}_{si}\right\} - \left\{{}^{\,i}_{sr}\right\}T_i - \left\{{}^{\,i}_{ir}\right\}T_s + \left\{{}^{\,i}_{mr}\right\}g_{is}T^m - T_r\left\{{}^{\,m}_{sm}\right\} - T_m\left\{{}^{\,m}_{sr}\right\} + g_{mr}T^i\left\{{}^{\,m}_{si}\right\}$$

$$+\delta^i_m T_r\,\delta^m_s T_i + \delta^i_m T_r\,\delta^m_i T_s - T_r g_{sm}T^m + T_s T_r + T_r T_s - g_{sr}T_m T^m - g_{sr}T_i T^i - T_r T_s + T_s T_r$$

$$= \left\{{}^{\,i}_{mr}\right\}\left\{{}^{\,m}_{si}\right\} - \left\{{}^{\,i}_{sr}\right\}T_i - \left\{{}^{\,m}_{sr}\right\}T_m + T_r T_s$$

dir.

r ve s indislerini kendi aralarında değiştirerek

$$\Gamma^i_{ms}\Gamma^m_{ri} = \left\{{}^{\,i}_{ms}\right\}\left\{{}^{\,m}_{ri}\right\} - \left\{{}^{\,i}_{rs}\right\}T_i - \left\{{}^{\,m}_{rs}\right\}T_m + T_r T_s$$

bulunur. Bu ifadeler (1.3.5) de yerine konulursa

$$R^i_{rsi} = \partial_r\left\{{}^{\,i}_{si}\right\} - n\partial_r T_s - \partial_s\left\{{}^{\,i}_{ri}\right\} + n\partial_s T_r + \left\{{}^{\,i}_{mr}\right\}\left\{{}^{\,m}_{si}\right\} - \left\{{}^{\,i}_{sr}\right\}T_i - \left\{{}^{\,m}_{sr}\right\}T_m + T_r T_s$$

$$-\left\{{}^{\,i}_{ms}\right\}\left\{{}^{\,m}_{ri}\right\} + \left\{{}^{\,i}_{rs}\right\}T_i + \left\{{}^{\,m}_{rs}\right\}T_m - T_r T_s$$

elde edilir.

$$\left\{{}^{\,i}_{si}\right\} = \partial_s \log\sqrt{g}$$

olduğu hatırlanırsa

$$\partial_r\left\{{}^{\,i}_{si}\right\} = \partial_r\partial_s \log\sqrt{g} = \partial_s\partial_r \log\sqrt{g} = \partial_s\left\{{}^{\,i}_{ri}\right\}$$

elde edilir. Öte yandan

$$\left\{{}^{\,i}_{mr}\right\}\left\{{}^{\,m}_{si}\right\} = \left\{{}^{\,i}_{ms}\right\}\left\{{}^{\,m}_{ri}\right\}$$

dir. Bu değerler R^i_{rsi} nin ifadesinde yerine konulursa

$$R^i_{rsi} = -n(\partial_r T_s - \partial_s T_r) \tag{1.3.6}$$

bulunur.

$$\nabla_r T_s - \nabla_s T_r = (\partial_r T_s - T_k\Gamma^k_{rs}) - (\partial_s T_r - T_k\Gamma^k_{sr}) = (\partial_r T_s - \partial_s T_r) - T_k(\Gamma^k_{rs} - \Gamma^k_{sr})$$

$$\nabla_r T_s - \nabla_s T_r = \partial_r T_s - \partial_s T_r$$

olduğundan (1.3.6) yı kullanarak

$$R^i_{rsi} = -2n\nabla_{[r}\, T_{s]}$$

veya

$$\frac{1}{2}R^i_{rsi} + n\nabla_{[r}T_{s]} = 0$$

bulunur [3].

(b) $\underset{\alpha}{v}^i$ nin ağırlığı $\{-1\}$ olduğundan, (1.2.2) bağıntısına göre

$$\overset{\circ}{\nabla}_k \underset{\alpha}{v}^i = \nabla_k \underset{\alpha}{v}^i + T_k \underset{\alpha}{v}^i$$

dir. $\overset{\circ}{\nabla}_k \underset{\alpha}{v}^i$ yerine (1.3.3) deki değeri konulursa

$$\nabla_k \underset{\alpha}{v}^i = \overset{\sigma}{\underset{\alpha}{T}}_k \underset{\sigma}{v}^i - T_k \underset{\alpha}{v}^i \tag{1.3.7}$$

elde edilir. $\nabla_k \underset{\alpha}{v}^i$ nin kovaryant türevini alalım:

$$\nabla_s(\nabla_k \underset{\alpha}{v}^i) = \overset{\circ}{\nabla}_s(\nabla_k \underset{\alpha}{v}^i) - T_s(\nabla_k \underset{\alpha}{v}^i)$$

$$= \overset{\circ}{\nabla}_s(\overset{\sigma}{\underset{\alpha}{T}}_k \underset{\sigma}{v}^i - T_k \underset{\alpha}{v}^i) - T_s(\overset{\sigma}{\underset{\alpha}{T}}_k \underset{\sigma}{v}^i - T_k \underset{\alpha}{v}^i)$$

$$= \overset{\circ}{\nabla}_s(\overset{\sigma}{\underset{\alpha}{T}}_k \underset{\sigma}{v}^i) - \overset{\circ}{\nabla}_s(T_k \underset{\alpha}{v}^i) - T_s \overset{\sigma}{\underset{\alpha}{T}}_k \underset{\sigma}{v}^i + T_sT_k \underset{\alpha}{v}^i$$

$$= \underset{\sigma}{v}^i\, \overset{\circ}{\nabla}_s \overset{\sigma}{\underset{\alpha}{T}}_k + \overset{\sigma}{\underset{\alpha}{T}}_k \overset{\circ}{\nabla}_s \underset{\sigma}{v}^i - \underset{\alpha}{v}^i\, \overset{\circ}{\nabla}_s T_k - T_k \overset{\circ}{\nabla}_s \underset{\alpha}{v}^i - T_s \overset{\sigma}{\underset{\alpha}{T}}_k \underset{\sigma}{v}^i + T_sT_k \underset{\alpha}{v}^i$$

$$= \underset{\sigma}{v}^i\, \nabla_s \overset{\sigma}{\underset{\alpha}{T}}_k + \overset{\sigma}{\underset{\alpha}{T}}_k \overset{\beta}{\underset{\sigma}{T}}_s \underset{\beta}{v}^i - \underset{\alpha}{v}^i\, \nabla_sT_k - T_k \overset{\beta}{\underset{\alpha}{T}}_s \underset{\beta}{v}^i - T_s \overset{\sigma}{\underset{\alpha}{T}}_k \underset{\sigma}{v}^i + T_sT_k \underset{\alpha}{v}^i \tag{1.3.8}$$

Buradan, k ve s indislerinin yerleri değiştirilerek

$$\nabla_k(\nabla_s \underset{\alpha}{v}^i) = \underset{\sigma}{v}^i\, \nabla_k \overset{\sigma}{\underset{\alpha}{T}}_s + \overset{\sigma}{\underset{\alpha}{T}}_s \overset{\beta}{\underset{\sigma}{T}}_k \underset{\beta}{v}^i - \underset{\alpha}{v}^i\, \nabla_kT_s - T_s \overset{\beta}{\underset{\alpha}{T}}_k \underset{\beta}{v}^i - T_k \overset{\sigma}{\underset{\alpha}{T}}_s \underset{\sigma}{v}^i + T_kT_s \underset{\alpha}{v}^i \tag{1.3.9}$$

bulunur. (1.3.8) ve (1.3.9) bağıntıları taraf tarafa çıkarılırsa

$$\underset{\sigma}{v}^i \, \nabla_{[s} \overset{\sigma}{\underset{\alpha}{T}}_{k]} + \underset{\beta}{v}^i \, \overset{\sigma}{\underset{\alpha}{T}}_{[k} \overset{\beta}{\underset{\sigma}{T}}_{s]} + \underset{\alpha}{v}^i \, \nabla_{[k} T_{s]} - \nabla_{[s} \nabla_{k]} \underset{\alpha}{v}^i = 0$$

elde edilir. Eşitliğin her iki yanı $\overset{\alpha}{v}_i$ ile çarpılıp, i indisi üzerinden toplam alınırsa

$$\nabla_{[s} \overset{\alpha}{\underset{\alpha}{T}}_{k]} + \overset{\sigma}{\underset{\alpha}{T}}_{[k} \overset{\alpha}{\underset{\sigma}{T}}_{s]} + n \nabla_{[k} T_{s]} - \overset{\alpha}{v}_i \, \nabla_{[s} \nabla_{k]} \underset{\alpha}{v}^i = 0 \qquad (1.3.10)$$

bulunur. (1.3.4) de verilen $2\nabla_{[s}\nabla_{k]} v^i = v^l R^i_{skl}$ bağıntısı $\underset{\alpha}{v}^i$ için yazılırsa $2\nabla_{[s}\nabla_{k]} \underset{\alpha}{v}^i = \underset{\alpha}{v}^l R^i_{skl}$ elde edilir. Bu bağıntının her iki tarafı $\overset{\alpha}{v}_i$ ile çarpılır ve α indisi üzerinden toplam alınırsa

$$\overset{\alpha}{v}_i \, \nabla_{[s} \nabla_{k]} \underset{\alpha}{v}^i = \frac{1}{2} \overset{\alpha}{v}_i \, \underset{\alpha}{v}^l R^i_{skl} = \frac{1}{2} R^i_{ski}$$

bulunur. Son bağıntı kullanılırsa (1.3.10) bağıntısı

$$\nabla_{[s} \overset{\alpha}{\underset{\alpha}{T}}_{k]} + \overset{\sigma}{\underset{\alpha}{T}}_{[k} \overset{\alpha}{\underset{\sigma}{T}}_{s]} + n \nabla_{[k} T_{s]} - \frac{1}{2} R^i_{ski} = 0 \qquad (1.3.11)$$

şekline girer. Teoremin (a) şıkkı gereğince (1.3.11) den

$$\nabla_{[s} \overset{\alpha}{\underset{\alpha}{T}}_{k]} + \overset{\sigma}{\underset{\alpha}{T}}_{[k} \overset{\alpha}{\underset{\sigma}{T}}_{s]} = 0$$

elde edilir [3].

BÖLÜM II

CHEBYSHEV ŞEBEKELERİ

2.1.Weyl Uzaylarında Chebyshev Şebekeleri

TANIM 2.1.1 W_n Weyl uzayında n- boyutlu bir şebekenin herhangi bir vektör alanı, şebekenin diğer vektör alanlarının integral eğrilerinden herhangi biri boyunca paralel kayarsa, böyle bir şebekeye birinci cins Chebyshev şebekesi denir [6].

TANIM 2.1.2 W_n de n-boyutlu bir şebekeye ait $(n-1)$-boyutlu bir alan elemanı, şebekenin geriye kalan vektör alanının integral eğrilerinden herhangi biri boyunca paralel kayarsa, böyle bir şebekeye ikinci cins Chebyshev şebekesi denir.

TEOREM 2.1.1 Birinci cins bir Chebyshev şebekesinin vektör alanlarının türev formüllerindeki $\overset{s}{\underset{r}{T}}_k$ katsayıları birer gradiyenttir.

İSPAT:

Birinci cins Chebyshev şebekesi tanımına göre

$$\underset{r}{v}^k \overset{\circ}{\nabla}_k \underset{i}{v}^l = 0 \quad (\mathrm{r}, \mathrm{l}, \mathrm{i} = 1,2,\ldots,\mathrm{n})$$

veya (1.3.3) gereğince

$$(\overset{s}{\underset{i}{T}}_k \underset{r}{v}^k) \underset{s}{v}^l = 0$$

elde edilir. $\underset{s}{v}^l$ $(l = 1,2,\ldots,n)$ vektörleri lineer bağımsız olduklarından

$$\overset{s}{\underset{i}{T}}_k \underset{r}{v}^k = 0 \qquad (2.1.1)$$

bulunur.

(2.1.1) bağıntısının genelleştirilmiş kovaryant türevi alınırsa

$$\overset{\circ}{\nabla}_s(\overset{d}{\underset{a}{T}}_k\,\underset{b}{v}^k)=(\overset{\circ}{\nabla}_s\,\overset{d}{\underset{a}{T}}_k)\,\underset{b}{v}^k+\overset{d}{\underset{a}{T}}_k\,(\overset{\circ}{\nabla}_s\,\underset{b}{v}^k)=0$$

veya (1.3.3) gereğince

$$(\nabla_s\,\overset{d}{\underset{a}{T}}_k)\,\underset{b}{v}^k+\overset{d}{\underset{a}{T}}_k\,(\overset{c}{\underset{b}{T}}_s\,\underset{c}{v}^k)=0 \qquad (a\neq b) \qquad (2.1.2)$$

elde edilir.

(2.1.2) bağıntısının sol yanındaki ikinci terim, c nin $c=a$ ve $c\neq a$ olması halleri dikkate alınarak

$$\overset{d}{\underset{a}{T}}_k\,(\overset{c}{\underset{b}{T}}_s\,\underset{c}{v}^k)=\overset{d}{\underset{a}{T}}_k\,(\overset{a}{\underset{b}{T}}_s\,\underset{a}{v}^k)+\overset{d}{\underset{a}{T}}_k\,(\overset{c}{\underset{b}{T}}_s\,\underset{c}{v}^k)=\overset{d}{\underset{a}{T}}_k\,(\overset{a}{\underset{b}{T}}_s\,\underset{a}{v}^k)+\overset{c}{\underset{b}{T}}_s\,(\overset{d}{\underset{a}{T}}_k\,\underset{c}{v}^k)$$

veya (2.1.1) gereğince

$$\overset{d}{\underset{a}{T}}_k\,(\overset{c}{\underset{b}{T}}_s\,\underset{c}{v}^k)=\overset{d}{\underset{a}{T}}_k\,(\overset{a}{\underset{b}{T}}_s\,\underset{a}{v}^k) \qquad (2.1.3)$$

şeklinde yazılabilir. Böylece, (2.1.3) bağıntısı (2.1.2) de kullanılırsa

$$(\nabla_s\,\overset{c}{\underset{a}{T}}_k)\,\underset{b}{v}^k+\overset{c}{\underset{\textcircled{a}}{T}}_k\,(\overset{\textcircled{a}}{\underset{b}{T}}_s\,\underset{\textcircled{a}}{v}^k)=0 \qquad (2.1.4)$$

bulunur. (2.1.4) eşitliğinin her iki tarafı $\overset{b}{v}_i$ ile çarpılıp, b indisi üzerinden toplam alınırsa

$$\nabla_s\,\overset{c}{\underset{a}{T}}_i+\overset{c}{\underset{\textcircled{a}}{T}}_k\,\underset{\textcircled{a}}{v}^k\,\overset{\textcircled{a}}{\underset{b}{T}}_s\,\overset{b}{v}_i=0 \qquad (2.1.5)$$

elde edilir. (2.1.5) eşitliğinde i ve s indislerinin yerleri değiştirilerek elde edilen

$$\nabla_i\,\overset{c}{\underset{a}{T}}_s+\overset{c}{\underset{\textcircled{a}}{T}}_k\,\underset{\textcircled{a}}{v}^k\,\overset{\textcircled{a}}{\underset{b}{T}}_i\,\overset{b}{v}_s=0 \qquad (2.1.6)$$

eşitliği ile

$$\nabla_{[s}\overset{c}{\underset{a}{T}}_{i]}+\overset{c}{\underset{\textcircled{a}}{T}}_k\,\underset{\textcircled{a}}{v}^k\,\overset{\textcircled{a}}{\underset{b}{T}}_{[s}\overset{b}{v}_{i]}=0 \qquad (2.1.7)$$

bulunur. Bu eşitlik daha açık bir ifade ile

$$\nabla_{[s}\overset{c}{\underset{a}{T}}_{i]}+\overset{c}{\underset{\textcircled{a}}{T}}_k\,\underset{\textcircled{a}}{v}^k\Big(\overset{\textcircled{a}}{\underset{1}{T}}_{[s}\overset{1}{v}_{i]}+\ldots+\overset{\textcircled{a}}{\underset{n}{T}}_{[s}\overset{n}{v}_{i]}\Big)=0 \qquad (2.1.8)$$

şeklinde yazılabilir. $\underset{i}{\overset{s}{T}}_k = \underset{i}{\overset{s}{P}} \overset{i}{v}_k$ $\quad (i \neq s)$ olduğu ([5] ,[7]) gözönüne alınırsa (2.1.8) eşitliği

$$\nabla_{[s} \underset{a}{\overset{c}{T}}_{i]} + \underset{a}{\overset{c}{T}}_k \underset{a}{v}^k \left(\underset{1}{\overset{a}{P}} \overset{1}{v}_{[s} \overset{1}{v}_{i]} + \dots + \underset{n}{\overset{a}{P}} \overset{n}{v}_{[s} \overset{n}{v}_{i]} \right) = 0 \qquad (2.1.9)$$

şekline girer. Bu eşitlikte $\overset{\alpha}{v}_{[s} \overset{\alpha}{v}_{i]} = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, n)$ olduğu için (2.1.9) eşitliği

$$\nabla_{[s} \underset{a}{\overset{c}{T}}_{i]} = 0 \qquad (2.1.10)$$

şekline dönüşür. Buradan $\underset{a}{\overset{c}{T}}_i$ nin gradiyent olduğu anlaşılır [6].

TANIM 2.1.3 $\quad \underset{ab}{\overset{c}{\tau}} = \underset{a}{\overset{c}{T}}_k \underset{b}{v}^k \qquad (a,b,c,k = 1,2,\dots,n \; ; \; a \neq b) \qquad (2.1.11)$

şeklinde tanımlanan $\underset{ab}{\overset{c}{\tau}}$ büyüklüklerine şebeke eğrilerinin birinci cins Chebyshev eğrilikleri denir[6].

TANIM 2.1.4 $\quad \underset{b}{\overset{a}{\rho}} = \underset{b}{\overset{a}{T}}_k \underset{a}{v}^k \qquad (a,b,k = 1,2,\dots,n \; ; \; a \neq b) \qquad (2.1.12)$

şeklinde tanımlanan $\underset{b}{\overset{a}{\rho}}$ büyüklüklerine şebeke eğrilerinin ikinci cins Chebyshev eğrilikleri denir.

TANIM 2.1.5 $\quad \underset{a}{\overset{b}{\varsigma}} = \underset{a}{\overset{b}{T}}_k \underset{a}{v}^k \qquad (a,b,k = 1,2..,n) \qquad (2.1.13)$

şeklinde tanımlanan $\underset{a}{\overset{b}{\varsigma}}$ büyüklüklerine şebeke eğrilerinin geodezik eğrilikleri adı verilir.

Chebyshev eğrilikleri ile geodezik eğriliklerin ağırlığı {-1} dir.

Bu eğrilikler yardımı ile bir şebekenin birinci Chebyshev, ikinci Chebyshev ve geodezik vektörleri, sırasıyla :

$$\underset{sk}{a}^i = \overset{r}{\underset{sk}{\tau}}\, \underset{r}{v}^i \quad , \quad \overset{s}{b}_i = \overset{s}{\underset{r}{\rho}}\, \overset{r}{v}_i \quad , \quad \underset{s}{c}^i = \overset{r}{\underset{s}{\varsigma}}\, \underset{r}{v}^i \tag{2.1.14}$$

şeklinde tanımlanmıştır.

TANIM 2.1.6 İkinci Chebyshev vektörleri

$$\sum_{s=1}^{n} \overset{s}{b}_i = 0 \tag{2.1.15}$$

koşulunu sağlayan bir $(\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \ldots, \underset{n}{v})$ şebekesine b-şebekesi denir.

TANIM 2.1.7 Geodezik vektörleri

$$\sum_{s=1}^{n} \underset{s}{c}^i = 0 \tag{2.1.16}$$

koşulunu sağlayan $(\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \ldots, \underset{n}{v})$ şebekesine c-şebekesi adı verilir.

b-şebekesi ve c-şebekesinin tanımını kullanarak aşağıdaki sonucu söyleyebiliriz:

SONUÇ 2.1.1

(a) Bir şebekenin b-şebekesi olması için gerek ve yeter koşul

$$\sum_{s=1}^{n} \overset{s}{\underset{k}{\rho}} = 0 \quad (k = 1,2,\ldots,n) \tag{2.1.17}$$

olmasıdır.

(b) Bir şebekenin c-şebekesi olması için gerek ve yeter koşul

$$\sum_{s=1}^{n} \overset{k}{\underset{s}{\varsigma}} = 0 \quad (k = 1,2,\ldots,n) \tag{2.1.18}$$

olmasıdır.

İSPAT: (a) Şebeke b-şebekesi olsun. Bu durumda (2.1.14) ve (2.1.15) e göre

$$\sum_{s=1}^{n} \overset{s}{b}_i = \sum_{s=1}^{n} \overset{s}{\underset{r}{\rho}}\, \overset{r}{v}_i = 0$$

veya, her iki taraf $\underset{k}{v}^i$ ile çarpılır ve i üzerinden toplam alınırsa

$$\sum_{s=1}^{n} \overset{s}{\underset{r}{\rho}}\, \overset{r}{v}_i\, \underset{k}{v}^i = \sum_{s=1}^{n} \overset{s}{\underset{r}{\rho}}\, \delta^r_k = \sum_{s=1}^{n} \overset{s}{\underset{k}{\rho}} = 0$$

bulunur.

Tersine olarak, şebekenin $\sum_{s=1}^{n} \overset{s}{\underset{k}{\rho}} = 0$ koşulunu gerçeklediğini kabul edelim.

Bu eşitliğin her iki tarafı $\overset{k}{v}_i$ ile çarpılır ve k indisi üzerinden toplam alınırsa, (2.1.14) gereğince

$$\sum_{s=1}^{n} \overset{s}{\underset{k}{\rho}}\, \overset{k}{v}_i = \sum_{s=1}^{n} \overset{s}{b}_i = 0$$

bulunur ki, bu da şebekenin b-şebekesi olması demektir.
(b) Şebeke c-şebekesi olsun. (2.1.14) ve Tanım 2.1.7 ye göre

$$\sum_{s=1}^{n} \underset{s}{c}^i = \sum_{s=1}^{n} \overset{r}{\underset{s}{\varsigma}}\, \underset{r}{v}^i = 0$$

bulunur. Bu eşitliğin her iki yanı $\overset{k}{v}_i$ ile çarpılıp, i indisi üzerinden toplam alınırsa

$$\sum_{s=1}^{n}\left(\overset{r}{\underset{s}{\varsigma}}\, \underset{r}{v}^i\right)\overset{k}{v}_i = \sum_{s=1}^{n} \overset{r}{\underset{s}{\varsigma}}\, \delta_r^k = \sum_{s=1}^{n} \overset{k}{\underset{s}{\varsigma}} = 0$$

elde edilir.

Tersine olarak, şebekenin $\sum_{s=1}^{n} \overset{k}{\underset{s}{\varsigma}} = 0$ koşulunu sağladığını kabul edelim. Bu eşitliğin her iki tarafı $\underset{k}{v}^i$ ile çarpılır ve k indisi üzerinden toplam alınırsa, (2.1.14) gereğince

$$\sum_{s=1}^{n} \overset{k}{\underset{s}{\varsigma}}\, \underset{k}{v}^i = \sum_{s=1}^{n} \underset{s}{c}^i = 0$$

elde edilir. Bu ise, Tanım 2.1.7 ye göre, şebekenin c-şebekesi olması demektir.

YARDIMCI TEOREM 2.1.1 $(n-1)$-boyutlu $(\underset{1}{v},\underset{2}{v},\ldots,\underset{a-1}{v},\underset{a+1}{v},\ldots,\underset{n}{v})$ alan elemanının, $(\underset{1}{v},\underset{2}{v},\ldots,\underset{n}{v})$ şebekesinin $(\underset{a}{v})$ eğrileri boyunca paralel kayması için gerek ve yeter koşul, $\overset{a}{\underset{c}{\rho}} = \overset{a}{\underset{c}{T}}_k\, \underset{a}{v}^k = 0 \quad (k,c = 1,2,\ldots,n; \quad c \neq a)$ olmasıdır[6].

İSPAT: (1.2.2) bağıntısı kullanılarak,

$$\overset{\circ}{\nabla}_i \overset{\textcircled{a}}{v}_k = \nabla_i \overset{\textcircled{a}}{v}_k - T_i \overset{\textcircled{a}}{v}_k$$

bulunur. Eşitliğin her iki tarafi $\underset{\textcircled{a}}{v}^i$ ile çarpılıp, i indisi üzerinden toplam alınırsa,

$$\underset{\textcircled{a}}{v}^i \, \overset{\circ}{\nabla}_i \overset{\textcircled{a}}{v}_k = \underset{\textcircled{a}}{v}^i \, \nabla_i \overset{\textcircled{a}}{v}_k - T_i \, \underset{\textcircled{a}}{v}^i \, \overset{\textcircled{a}}{v}_k \tag{2.1.19}$$

elde edilir. Buradan, (1.3.3)′ kullanılarak

$$\underset{\textcircled{a}}{v}^i \, \nabla_i \, \overset{\textcircled{a}}{v}_k \; - T_i \, \underset{\textcircled{a}}{v}^i \, \overset{\textcircled{a}}{v}_k = - \underset{c}{\overset{\textcircled{a}}{T}}_i \, \overset{c}{v}_k \, \underset{\textcircled{a}}{v}^i \qquad (c \neq a)$$

veya

$$\underset{\textcircled{a}}{v}^i \, \nabla_i \, \overset{\textcircled{a}}{v}_k = \underset{\textcircled{a}}{v}^i \, (T_i \overset{\textcircled{a}}{v}_k - \underset{c}{\overset{\textcircled{a}}{T}}_i \, \overset{c}{v}_k) \tag{2.1.20}$$

bulunur.

$(n-1)$- boyutlu $(\underset{1}{v},\underset{2}{v},\dots,\underset{a-1}{v},\underset{a+1}{v},\dots,\underset{n}{v})$ alan elemanının $(\underset{a}{v})$ eğrileri boyunca paralel kayması için gerek ve yeter koşul

$$\underset{\textcircled{a}}{v}^i \, \nabla_i \, \overset{\textcircled{a}}{v}_k = \mu \, \overset{a}{v}_k \tag{2.1.21}$$

dir [7].

$(\underset{1}{v},\underset{2}{v},\dots,\underset{a-1}{v},\underset{a+1}{v},\dots,\underset{n}{v})$ alan elemanının $(\underset{a}{v})$ eğrileri boyunca paralel kayabilmesi için gerek ve yeter koşulun, (2.1.20) ve (2.1.21) yardımıyla,

$$(\mu - T_i \, \underset{\textcircled{a}}{v}^i) \, \overset{\textcircled{a}}{v}_k = - \underset{\textcircled{a}}{v}^i \, \underset{c}{\overset{\textcircled{a}}{T}}_i \, \overset{c}{v}_k$$

olduğu görülür. $\overset{c}{v}_k$ vektörlerinin lineer bağımsız olmaları nedeniyle son eşitlikten

$$\underset{c}{\overset{\textcircled{a}}{T}}_i \, \underset{\textcircled{a}}{v}^i = 0 \quad , \quad c \neq a$$

bulunur.

TANIM 2.1.8 $\overset{rs}{a}_{ik} = \overset{r}{v}_i \overset{s}{v}_k + \overset{r}{v}_k \overset{s}{v}_i$, $\underset{rs}{a}^{ik} = \underset{r}{v}^i \, \underset{s}{v}^k + \underset{r}{v}^k \, \underset{s}{v}^i$

şeklinde tanımlanan tensörlere $(\underset{1}{\nu},\underset{2}{\nu},\dots,\underset{n}{\nu})$ şebekesinin $(\underset{r}{\nu},\underset{s}{\nu})$ alt şebekesinin tensörleri denir [8].

$\overset{rs}{a}_{ik}$, $\underset{rs}{a}^{ik}$ tensörleri, metrik tensörün $\{2\}$ ve $\{-2\}$ ağırlıklı uydularıdır.

TANIM 2.1.9 $\quad \underset{rs}{a}{}_i^k = \overset{r}{\nu}_i\,\underset{s}{\nu}^k + \underset{r}{\nu}^k\,\overset{s}{\nu}_i$ tensörüne afinör adı verilir.

Afinör, metrik tensörün $\{0\}$ ağırlıklı bir uydusudur.

TEOREM 2.1.2 $(\underset{r}{\nu},\underset{s}{\nu})$ alt şebekesi bir Chebyshev şebekesi olmak üzere ikinci cins Chebyshev vektörleri aşağıdaki özelliklere sahiptir:

(a) $\overset{r}{b}_j+\overset{s}{b}_j=-\overset{\circ}{\nabla}_k(\overset{rs}{a}_{ij}\;\underset{rs}{a}^{ik})$

(b) Eğer $(n-1)$-boyutlu $(\underset{1}{\nu},\underset{2}{\nu},\dots,\underset{r-1}{\nu},\underset{r+1}{\nu},\dots,\underset{n}{\nu})$ alan elemanı $(\underset{r}{\nu})$ eğrileri boyunca paralel kayarsa

$$\overset{s}{b}_j=-\overset{\circ}{\nabla}_k(\overset{rs}{a}_{ij}\;\underset{rs}{a}^{ik})$$

dir.

(c) $(\underset{r}{\nu},\underset{s}{\nu})$ alt şebekesi geodezik ise

$$\overset{r}{b}_i+\overset{s}{b}_i=-\nabla_k(\underset{rs}{a}{}_i^j\;\underset{rs}{a}{}_j^k)$$

dir.

(d) $(\underset{r}{\nu},\underset{s}{\nu})$ alt şebekesi geodezik ve $(n-1)$-boyutlu $(\underset{1}{\nu},\underset{2}{\nu},\dots,\underset{r-1}{\nu},\underset{r+1}{\nu},\dots,\underset{n}{\nu})$ alan elemanı $(\underset{r}{\nu})$ eğrileri boyunca paralel kayıyorsa

$$\overset{s}{b}_i=-\nabla_k(\underset{rs}{a}{}_i^j\;\underset{rs}{a}{}_j^k)$$

şeklindedir.

İSPAT:

(a) $\overset{(rs)}{a}_{ij}\underset{(rs)}{a}^{ik}$ çarpımının genelleştirilmiş kovaryant türevi alınırsa,

$$\overset{\circ}{\nabla}_k\left(\overset{(rs)}{a}_{ij}\underset{(rs)}{a}^{ik}\right) = \left(\overset{\circ}{\nabla}_k\overset{(rs)}{a}_{ij}\right)\underset{(rs)}{a}^{ik} + \overset{(rs)}{a}_{ij}\left(\overset{\circ}{\nabla}_k\underset{(rs)}{a}^{ik}\right)$$

$$=\left\{\overset{\circ}{\nabla}_k\left(\overset{(r)}{v}_i\overset{(s)}{v}_j+\overset{(r)}{v}_j\overset{(s)}{v}_i\right)\right\}\left(\underset{(r)}{v}^i\underset{(s)}{v}^k+\underset{(r)}{v}^k\underset{(s)}{v}^i\right)+\left(\overset{(r)}{v}_i\overset{(s)}{v}_j+\overset{(r)}{v}_j\overset{(s)}{v}_i\right)\left\{\overset{\circ}{\nabla}_k\left(\underset{(r)}{v}^i\underset{(s)}{v}^k+\underset{(r)}{v}^k\underset{(s)}{v}^i\right)\right\}$$

$$=\left\{\left(\overset{\circ}{\nabla}_k\overset{(r)}{v}_i\right)\overset{(s)}{v}_j+\overset{(r)}{v}_i\left(\overset{\circ}{\nabla}_k\overset{(s)}{v}_j\right)+\left(\overset{\circ}{\nabla}_k\overset{(r)}{v}_j\right)\overset{(s)}{v}_i+\overset{(r)}{v}_j\left(\overset{\circ}{\nabla}_k\overset{(s)}{v}_i\right)\right\}\left(\underset{(r)}{v}^i\underset{(s)}{v}^k+\underset{(r)}{v}^k\underset{(s)}{v}^i\right)$$

$$+\left(\overset{(r)}{v}_i\overset{(s)}{v}_j+\overset{(r)}{v}_j\overset{(s)}{v}_i\right)\left\{\left(\overset{\circ}{\nabla}_k\underset{(r)}{v}^i\right)\underset{(s)}{v}^k+\underset{(r)}{v}^i\left(\overset{\circ}{\nabla}_k\underset{(s)}{v}^k\right)+\left(\overset{\circ}{\nabla}_k\underset{(r)}{v}^k\right)\underset{(s)}{v}^i+\underset{(r)}{v}^k\left(\overset{\circ}{\nabla}_k\underset{(s)}{v}^i\right)\right\}$$

bulunur. Buradan, (1.3.3) ve (2.1.14) yardımıyla

$$\overset{\circ}{\nabla}_k\left(\overset{(rs)}{a}_{ij}\underset{(rs)}{a}^{ik}\right)=-\underset{(r)}{\overset{(r)(s)}{T}}_k\,v_j\underset{(s)}{v}^k-\underset{(s)}{\overset{(r)(s)}{T}}_k\,v_j\underset{(r)}{v}^k-\overset{s}{b}_j-\overset{r}{b}_j-\underset{(r)}{\overset{(s)(r)}{T}}_k\,v_j\underset{(s)}{v}^k-\underset{(s)}{\overset{(s)(r)}{T}}_k\,v_j\underset{(r)}{v}^k \tag{2.1.22}$$

elde edilir.

$(\underset{r}{v}, \underset{s}{v})$ bir Chebyshev altşebekesi olduğu için $\underset{r}{v}$ vektör alanı $(\underset{s}{v})$ eğrileri boyunca ve $\underset{s}{v}$ vektör alanı da $(\underset{r}{v})$ eğrileri boyunca paralel kaymaktadır. Bu nedenle

$$\underset{s}{v}^k\,\overset{\circ}{\nabla}_k\underset{r}{v}^i=0 \quad , \quad \underset{r}{v}^k\,\overset{\circ}{\nabla}_k\underset{s}{v}^i=0$$

olacağından (1.3.3) bağıntısı yardımıyla

$$\underset{s}{v}^k\,\underset{r}{\overset{p}{T}}_k\,\underset{p}{v}^i=(\underset{r}{\overset{p}{T}}_k\,\underset{s}{v}^k)\,\underset{p}{v}^i=0 \quad \text{ve} \quad \underset{r}{v}^k\,\underset{s}{\overset{p}{T}}_k\,\underset{p}{v}^i=(\underset{s}{\overset{p}{T}}_k\,\underset{r}{v}^k)\,\underset{p}{v}^i=0$$

bulunur. Buradan elde edilen

$$\underset{r}{\overset{p}{T}}_k\,\underset{s}{v}^k=0 \quad , \underset{s}{\overset{p}{T}}_k\,\underset{r}{v}^k=0 \tag{2.1.23}$$

bağıntıları (2.1.22) de kullanılırsa

$$\overset{r}{b}_j+\overset{s}{b}_j=-\overset{\circ}{\nabla}_k\left(\overset{(rs)}{a}_{ij}\underset{(rs)}{a}^{ik}\right)$$

bulunur.

(b) (a) şıkkına göre

$$\overset{r}{b}_j+\overset{s}{b}_j=-\overset{\circ}{\nabla}_k(a_{ij}^{(rs)}\;\underset{(rs)}{a}^{ik}\;) \tag{2.1.24}$$

ve $(\underset{1}{v},\underset{2}{v},\dots,\underset{r-1}{v},\underset{r+1}{v},\dots,\underset{n}{v})$ alan elemanının $(\underset{r}{v})$ eğrileri boyunca paralel kaymasından dolayı

$$\overset{r}{\underset{p}{\rho}}=\overset{(r)}{T}_k\,\underset{p\,(r)}{v}^k=0\quad,\quad(r\neq p)$$

olup, (2.1.14) bağıntısına göre

$$\overset{r}{b}_j=0$$

elde edilir. Buna göre (2.1.24) den

$$\overset{s}{b}_j=-\;\overset{\circ}{\nabla}_k(a_{ij}^{(rs)}\;\underset{(rs)}{a}^{ik}\;)$$

bulunur.

(c) $(\underset{r}{v},\underset{s}{v})$ şebekesi hem Chebyshev, hem de geodezik olsun. $\underset{rs}{a}{}^{j}_{i}\;\underset{rs}{a}{}^{k}_{j}$ çarpımının kovaryant türevi alınırsa

$$\nabla_k(\underset{rs}{a}{}^{j}_{i}\;\underset{rs}{a}{}^{k}_{j})=\overset{\circ}{\nabla}_k(\underset{rs}{a}{}^{j}_{i}\;\underset{rs}{a}{}^{k}_{j})=(\overset{\circ}{\nabla}_k\underset{rs}{a}{}^{j}_{i})\underset{rs}{a}{}^{k}_{j}+\underset{rs}{a}{}^{j}_{i}(\overset{\circ}{\nabla}_k\underset{rs}{a}{}^{k}_{j})$$

veya Tanım 2.1.9 kullanılarak

$$\nabla_k(\underset{rs}{a}{}^{j}_{i}\;\underset{rs}{a}{}^{k}_{j})=\left\{\overset{\circ}{\nabla}_k(\overset{r}{v}_i\underset{s}{v}^j+\underset{r}{v}^j\overset{s}{v}_i)\right\}(\overset{r}{v}_j\underset{s}{v}^k+\underset{r}{v}^k\overset{s}{v}_j)+(\overset{r}{v}_i\underset{s}{v}^j+\underset{r}{v}^j\overset{s}{v}_i)\left\{\overset{\circ}{\nabla}_k(\overset{r}{v}_j\underset{s}{v}^k+\underset{r}{v}^k\overset{s}{v}_j)\right\}$$

$$=\left\{(\overset{\circ}{\nabla}_k\overset{r}{v}_i)\underset{s}{v}^j+\overset{r}{v}_i(\overset{\circ}{\nabla}_k\underset{s}{v}^j)+(\overset{\circ}{\nabla}_k\underset{r}{v}^j)\overset{s}{v}_i+\underset{r}{v}^j(\overset{\circ}{\nabla}_k\overset{s}{v}_i)\right\}(\overset{r}{v}_j\underset{s}{v}^k+\underset{r}{v}^k\overset{s}{v}_j)$$

$$+(\overset{r}{v}_i\underset{s}{v}^j+\underset{r}{v}^j\overset{s}{v}_i)\left\{(\overset{\circ}{\nabla}_k\overset{r}{v}_j)\underset{s}{v}^k+\overset{r}{v}_j(\overset{\circ}{\nabla}_k\underset{s}{v}^k)+(\overset{\circ}{\nabla}_k\underset{r}{v}^k)\overset{s}{v}_j+\underset{r}{v}^k(\overset{\circ}{\nabla}_k\overset{s}{v}_j)\right\}$$

bulunur. (1.3.3) ve (2.1.14) yardımıyla

$$\nabla_k(\underset{rs}{a}{}^{j}_{i}\;\underset{rs}{a}{}^{k}_{j})=-\overset{r}{b}_i-\overset{s}{b}_i+\overset{s\,s}{\underset{r}{\varsigma}}\overset{s}{v}_i+\overset{r\,r}{\underset{s}{\varsigma}}\overset{r}{v}_i+\overset{(r)}{T}_{k}\underset{(r)(s)}{v}^k\overset{(s)}{v}_i+\overset{(s)}{T}_{k}\underset{(s)(r)}{v}^k\overset{(r)}{v}_i \tag{2.1.25}$$

elde edilir.

$(\underset{r}{v}, \underset{s}{v})$ şebekesi Chebyshev olduğu için (2.1.23) e göre

$\overset{(r)}{\underset{(r)}{T}}{}_k \underset{(s)}{v}^k = \overset{(s)}{\underset{(s)}{T}}{}_k \underset{(r)}{v}^k = 0$ ve bu şebeke aynı zamanda geodezik olduğu için $\overset{s}{\underset{r}{\varsigma}} = \overset{r}{\underset{s}{\varsigma}} = 0$ dır. Bu bağıntılar (2.1.25) de kullanılırsa

$$\overset{r}{b}_i + \overset{s}{b}_i = -\nabla_k(\underset{rs}{a}{}_i^j \; \underset{rs}{a}{}_j^k) \tag{2.1.26}$$

bulunur.

(d) $(\underset{r}{v}, \underset{s}{v})$ alt şebekesi geodezik ise (2.1.26) eşitliği geçerlidir. Öte yandan, $(\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \ldots, \underset{r-1}{v}, \underset{r+1}{v}, \ldots, \underset{n}{v})$ alan elemanı $(\underset{r}{v})$ eğrileri boyunca paralel kayarsa Yardımcı Teorem 2.1.1 e göre

$$\overset{r}{\underset{p}{\rho}} = \overset{(r)}{\underset{(r)}{T}}{}_k \underset{p}{v}^k = 0 \quad , \quad (r \neq p)$$

dır. (2.1.14) e göre $\overset{r}{b}_i = 0$ olup, (2.1.26) dan

$$\overset{s}{b}_i = -\nabla_k(\underset{rs}{a}{}_i^j \; \underset{rs}{a}{}_j^k)$$

bulunur.

SONUÇ 2.1.2 Bir $(\underset{r}{v}, \underset{s}{v})$ Chebyshev altşebekesi ihtiva eden bir şebekede $(\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \ldots, \underset{r-1}{v}, \underset{r+1}{v}, \ldots, \underset{n}{v})$ ve $(\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \ldots, \underset{s-1}{v}, \underset{s+1}{v}, \ldots, \underset{n}{v})$ alan elemanları, sırasıyla, $(\underset{r}{v})$ ve $(\underset{s}{v})$ eğrileri boyunca paralel kayıyorsa,

$$\overset{\circ}{\nabla}_k \left(\overset{(rs)}{a_{ij}} \; \underset{(rs)}{a}^{ik} \right) = 0$$

dır.

İSPAT: Teorem 2.1.2 nin (b) şıkkından dolayı

$$\overset{s}{b}_j = -\overset{\circ}{\nabla}_k(\overset{(rs)}{a_{ij}} \; \underset{(rs)}{a}^{ik}) \text{ ve } \overset{r}{b}_j = -\overset{\circ}{\nabla}_k(\overset{(sr)}{a_{ij}} \; \underset{(sr)}{a}^{ik})$$

dır. Aynı teoremin (a) şıkkı kullanılarak

$$\overset{r}{b}_j + \overset{s}{b}_j = -\overset{\circ}{\nabla}_k(\overset{(rs)}{a_{ij}} \; \underset{(rs)}{a}^{ik}) = -2\overset{\circ}{\nabla}_k(\overset{(rs)}{a_{ij}} \; \underset{(rs)}{a}^{ik})$$

veya

$$\overset{\circ}{\nabla}_k \left(\overset{(rs)}{a}_{ij} \;\; \underset{(rs)}{a}^{ik} \right) = 0$$

bulunur.

SONUÇ 2.1.3 Hem Chebyshev, hem de geodezik olan bir $(\underset{r}{v}, \underset{s}{v})$ altşebekesini ihtiva eden bir şebekede $(\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \ldots, \underset{r-1}{v}, \underset{r+1}{v}, \ldots, \underset{n}{v})$ ve $(\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \ldots, \underset{s-1}{v}, \underset{s+1}{v}, \ldots, \underset{n}{v})$ alan elemanları, sırasıyla, $(\underset{r}{v})$ ve $(\underset{s}{v})$ eğrileri boyunca paralel kayıyorsa

$$\nabla_k (\underset{rs}{a}{}_i^j \;\; \underset{rs}{a}{}_j^k) = 0$$

dır.

İSPAT: Teorem 2.1.2 nin (d) şıkkından dolayı

$$\overset{s}{b}_i = -\nabla_k (\underset{rs}{a}{}_i^j \;\; \underset{rs}{a}{}_j^k) \;, \quad \overset{r}{b}_i = -\nabla_k (\underset{sr}{a}{}_i^j \;\; \underset{sr}{a}{}_j^k)$$

dir. Bu eşitlikler (2.1.26) da kullanılırsa

$$\overset{r}{b}_i + \overset{s}{b}_i = -\nabla_k (\underset{rs}{a}{}_i^j \;\; \underset{rs}{a}{}_j^k) = -2\nabla_k (\underset{rs}{a}{}_i^j \;\; \underset{rs}{a}{}_j^k)$$

veya

$$\nabla_k (\underset{rs}{a}{}_i^j \;\; \underset{rs}{a}{}_j^k) = 0$$

elde edilir.

2.2.Weyl Hiperyüzeylerinde Chebyshev Şebekeleri

Koordinatları $x^a \, (a = 1,2,\ldots,n+1)$ olan $W_{n+1}(g_{ab}, T_c)$ Weyl uzayının, koordinatları $u^i \, (i = 1,2,\ldots,n)$ olan $W_n \, (g_{ij}, T_k)$ hiperyüzeyini gözönüne alalım. Ayrıca, W_n ve W_{n+1} in metriklerinin, sırasıyla, $g_{ij} \, du^i du^j$ ve $g_{ab} \, dx^a dx^b$ $(a,b = 1,2,\ldots,n+1; \; i,j = 1,2,\ldots,n)$ ve bunların eliptik olduklarını kabul edelim. g_{ij} ile g_{ab} arasında

$$g_{ij} = g_{ab} \, dx^a dx^b \qquad (2.2.1)$$

bağıntısı mevcuttur.

Bir A uydusunun W_n ve W_{n+1} e göre genelleştirilmiş kovaryant türevleri arasında

$$\overset{\circ}{\nabla}_k A = x_k^c \overset{\circ}{\nabla}_c A \quad (k = 1,2,\dots,n \; ; \; c = 1,2,\dots,n+1) \tag{2.2.2}$$

bağıntısı mevcuttur.

W_n in T_k komplemanter vektörü ile W_{n+1}'in T_c komplemanter vektörü birbirlerine

$$T_k = x_k^c \, T_c \tag{2.2.3}$$

bağıntısı ile bağlıdırlar.

η^a, W_{n+1} e ait ve W_n e dik olan bir vektörün kontravaryant bileşenleri olsun ve $g^{ab}\eta^a\eta^b = 1$ olacak şekilde normlanmış olsun. W_n de tanımlı $\{x_i^a, \eta^a\}$ hareketli çatısının $\{x_a^i, \eta_a\}$ karşıt hareketli çatısı

$$\eta_a \eta^a = 1 \;,\; \eta_a x_i^a = 0 \;,\; \eta^a x_a^i = 0 \;,\; x_i^a x_a^j = \delta_i^j \tag{2.2.4}$$

bağıntıları ile tanımlanmıştır [1].

$(2.2.4)_4$ ün her iki yanının u^i değişkenine göre genelleştirilmiş kovaryant türevi alınır ve x_i^a nin ağırlığının $\{0\}$ olduğu gözönüne alınırsa

$$\overset{\circ}{\nabla}_k (x_i^a x_a^j) = \nabla_k (x_i^a x_a^j) = \nabla_k (\delta_i^j) = 0$$

$$\overset{\circ}{\nabla}_k (x_i^a x_a^j) = (\overset{\circ}{\nabla}_k x_i^a) x_a^j + x_i^a (\overset{\circ}{\nabla}_k x_a^j) = (\nabla_k x_i^a) x_a^j + x_i^a (\nabla_k x_a^j) = 0 \tag{2.2.5}$$

bulunur.

$$\nabla_k x_i^a = \omega_{ik} \eta^a$$

olduğu hatırlanırsa [1], (2.2.5) ve $(2.2.4)_3$ bağıntılarından

$$\omega_{ik} \eta^a x_a^j + x_i^a \nabla_k x_a^j = x_i^a \nabla_k x_a^j = 0 \tag{2.2.6}$$

elde edilir. Buradan, x^a koordinatlarının bir fonksiyonu olarak düşünülen ve W_{n+1} e ait olan $\nabla_k x_a^j$ nın W_n e dik bir vektör olduğu anlaşılır. Bu durumda $\nabla_k x_a^j$

$$\nabla_k x_a^j = \Omega_k^j \eta_a \tag{2.2.7}$$

şeklinde ifade edilebilir [9].

W_n uzayına ait lineer bağımsız $\underset{r}{v}$ $(r=1,2,\ldots,n)$ vektör alanlarının, sırasıyla, W_{n+1} ve W_n e göre kontravaryant bileşenleri $\underset{r}{v}^a$ ve $\underset{r}{v}^i$ olsun. $\overset{r}{v}_a$ ve $\overset{r}{v}_i$ ise, $\underset{r}{v}$ vektör alanlarının karşıtlarının W_{n+1} ve W_n e göre kovaryant bileşenlerini göstersinler. Bu takdirde

$$\underset{r}{v}^a = x_i^a \underset{r}{v}^i \quad , \quad \overset{r}{v}_a = x_a^i \overset{r}{v}_i \tag{2.2.8}$$

dir.

TEOREM 2.2.1 $\underset{rp}{\bar{a}}^a$ ve $\underset{rp}{a}^i$ $(\underset{1}{v},\underset{2}{v},\ldots,\underset{n}{v})$ şebekesinin birinci cins Chebyshev vektörlerinin, sırasıyla, W_{n+1} ve W_n e göre bileşenleri olmak üzere

$$x_a^j \underset{rp}{\bar{a}}^a = \underset{rp}{a}^j$$

dir [9].

İSPAT: (2.2.8) bağıntılarının birincisinden u^i koordinatına göre genelleştirilmiş kovaryant türev alınır, (1.3.3) bağıntısı ve $\overset{\circ}{\nabla}_k x_i^a = \nabla_k x_i^a$ olduğu hatırlanırsa

$$\overset{\circ}{\nabla}_k \underset{r}{v}^a = \overset{\circ}{\nabla}_k (x_i^a \underset{r}{v}^i) = (\overset{\circ}{\nabla}_k x_i^a)\underset{r}{v}^i + x_i^a (\overset{\circ}{\nabla}_k \underset{r}{v}^i)$$

$$= (\nabla_k x_i^a)\underset{r}{v}^i + x_i^a (\overset{\circ}{\nabla}_k \underset{r}{v}^i) = \omega_{ik}\eta^a \underset{r}{v}^i + x_i^a (\overset{\circ}{\nabla}_k \underset{r}{v}^i)$$

$$\overset{\circ}{\nabla}_k \underset{r}{v}^a = \omega_{ik}\eta^a \underset{r}{v}^i + x_i^a \overset{s}{\underset{r}{T}}_k \underset{s}{v}^i \tag{2.2.9}$$

elde edilir. Bu bağıntının her iki tarafı $\underset{p}{v}^k$ ile çarpılır ve k indisi üzerinden toplam alınırsa

$$\underset{p}{v}^k \overset{\circ}{\nabla}_k \underset{r}{v}^a = (\omega_{ik} \underset{r}{v}^i \underset{p}{v}^k)\eta^a + x_i^a \overset{s}{\underset{r}{T}}_k \underset{p}{v}^k \underset{s}{v}^i \tag{2.2.10}$$

bulunur.

(2.2.2) nin her iki yanı $\underset{p}{v}^k$ ile çarpılır ve k indisi üzerinden toplam alınırsa

$$\underset{p}{v}^k \overset{\circ}{\nabla}_k \underset{r}{v}^a = x_k^c \underset{p}{v}^k \overset{\circ}{\nabla}_c \underset{r}{v}^a = \underset{p}{v}^c \overset{\circ}{\nabla}_c \underset{r}{v}^a ,$$

elde edilir. Bu sonuç (2.2.10) da yerine konur ve (2.1.11) e göre

$$\overset{s}{\underset{rp}{\tau}} = \overset{s}{\underset{r}{T_k}} \underset{p}{v}^k$$

olduğu hatırlanırsa

$$\underset{p}{v}^c \overset{\circ}{\nabla}_c \underset{r}{v}^a = (\omega_{ik} \underset{r}{v}^i \underset{p}{v}^k)\eta^a + x_i^a \overset{s}{\underset{rp}{\tau}} \underset{s}{v}^i \qquad (r \neq p) \tag{2.2.11}$$

elde edilir. Burada $\overset{s}{\underset{rp}{\tau}}$, $(\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \ldots, \underset{n}{v})$ şebekesinin eğrilerinin W_n e göre birinci cins Chebyshev eğrilikleridir.

$(\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \ldots, \underset{n}{v})$ şebekesinin birinci cins Chebyshev vektörlerinin W_{n+1} ve W_n e göre kontravaryant bileşenleri, sırasıyla, $\underset{rp}{\bar{a}}^a$ ve $\underset{rp}{a}^i$ ile gösterilir ve

$$\overset{s}{\underset{rp}{\tau}} \underset{s}{v}^a = \underset{rp}{\bar{a}}^a \quad , \quad \overset{s}{\underset{rp}{\tau}} \underset{s}{v}^i = \underset{rp}{a}^i$$

olduğu gözönüne alınırsa (2.2.11) den

$$\underset{rp}{\bar{a}}^a = (\omega_{ik} \underset{r}{v}^i \underset{p}{v}^k)\eta^a + x_i^a \underset{rp}{a}^i \tag{2.2.12}$$

bulunur.

(2.2.12) nin her iki tarafi x_a^j ile çarpılır ve a indisi üzerinden toplam alınırsa

$$x_a^j \underset{rp}{\bar{a}}^a = x_i^a x_a^j \underset{rp}{a}^i = \underset{rp}{a}^j \tag{2.2.13}$$

elde edilir.

SONUÇ 2.2.1 $(\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \ldots, \underset{n}{v})$ şebekesi W_{n+1} e göre birinci cins Chebyshev şebekesi ise, W_n e göre de birinci cins Chebyshev şebekesidir. Ayrıca, şebeke W_n e göre birinci cins Chebyshev şebekesi ise, W_{n+1} e göre birinci cins Chebyshev vektörleri W_n e diktir.

TEOREM 2.2.2 $\overset{r}{\bar{b}}_a$ ve $\overset{r}{b}_i$, $(\underset{1}{v},\underset{2}{v},\dots,\underset{n}{v})$ şebekesinin ikinci cins Chebyshev vektörlerinin, sırasıyla, W_{n+1} ve W_n e göre bileşenleri olsun. Bu durumda

$$x_j^a\ \overset{r}{\bar{b}}_a = \overset{r}{b}_j \quad \text{ve} \quad \sum_r \overset{r}{\bar{b}}_a = -\sum_i \Omega_i^i\,\eta^a + \sum_r \overset{r}{b}_i\ x^i_a$$

bağıntıları mevcuttur[9].

İSPAT: (2.2.8) bağıntılarından ikincisinin her iki tarafının u^k koordinatına göre, genelleştirilmiş türevi alınır ve (2.2.7), (1.3.3)′ bağıntılarından yararlanılırsa

$$\overset{\circ}{\nabla}_k\ \overset{r}{v}_a = (\overset{\circ}{\nabla}_k x^i_a)\ \overset{r}{v}_i + x^i_a\ (\overset{\circ}{\nabla}_k\ \overset{r}{v}_i) = (\nabla_k x^i_a)\ \overset{r}{v}_i + x^i_a\ (\overset{\circ}{\nabla}_k\ \overset{r}{v}_i)$$

$$= \Omega^i_k\,\eta_a\ \overset{r}{v}_i + x^i_a(\overset{\circ}{\nabla}_k\ \overset{r}{v}_i) = \Omega^i_k\,\eta_a\ \overset{r}{v}_i - x^i_a\ \underset{s}{\overset{r}{T}}_k\ \overset{s}{v}_i$$

veya

$$\overset{\circ}{\nabla}_k\,\overset{r}{v}_a = \Omega^i_k\,\eta_a\,\overset{r}{v}_i - x^i_a\ \underset{s}{\overset{r}{T}}_k\ \overset{s}{v}_i \tag{2.2.14}$$

bulunur. Bu bağıntının her iki tarafı $\underset{r}{v}^k$ ile çarpılır ve k indisi üzerinden toplam alınırsa

$$\underset{r}{v}^k\ \overset{\circ}{\nabla}_k\,\overset{r}{v}_a = \Omega^i_k\,\eta_a\,\overset{r}{v}_i\ \underset{r}{v}^k - x^i_a\ \underset{s}{\overset{r}{T}}_k\ \underset{r}{v}^k\ \overset{s}{v}_i$$

bağıntısı bulunur.

$$\underset{r}{v}^k\ \overset{\circ}{\nabla}_k\,\overset{r}{v}_a = \underset{r}{v}^c\ \overset{\circ}{\nabla}_c\,\overset{r}{v}_a \quad (r \text{ üzerinden toplam yok}) \quad \text{ve} \quad \underset{s}{\overset{r}{\rho}} = \underset{s}{\overset{r}{T}}_k\,\underset{r}{v}^k$$

olduğuna dikkat edilirse

$$\underset{r}{v}^c\ \overset{\circ}{\nabla}_c\,\overset{r}{v}_a = \Omega^i_k\,\eta_a\,\overset{r}{v}_i\,\underset{r}{v}^k - x^i_a\ \underset{s}{\overset{r}{\rho}}\ \overset{s}{v}_i \tag{2.2.15}$$

elde edilir. Burada $\underset{s}{\overset{r}{\rho}}$ $(r, s = 1, 2, \dots, n)$, $(\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \dots, \underset{n}{v})$ şebekesinin eğrilerinin W_n e göre ikinci cins Chebyshev eğrilikleridir. Diğer taraftan

$$\underset{r}{v^c} \overset{\circ}{\nabla}_c \overset{r}{v}_a = -\underset{r}{v^c} \underset{s}{\overset{r}{T_c}} \overset{s}{v}_a = -\underset{s}{\overset{r}{\rho}} \overset{s}{v}_a = -\overset{r}{\bar{b}}_a$$

büyüklükleri ise, aynı şebeke eğrilerinin W_{n+1} e göre ikinci cins Chebyshev vektörleridir. Buna göre, (2.2.15) bağıntısı

$$\overset{r}{\bar{b}}_a = -\Omega^i_k \eta_a \overset{r}{v}_i \underset{r}{v^k} + x^i_a \overset{r}{b}_i \qquad (2.2.16)$$

şeklini alır. Bu bağıntının her iki tarafı x^a_j ile çarpılır ve a indisi üzerinden toplam alınırsa

$$x^a_j \overset{r}{\bar{b}}_a = \overset{r}{b}_j \qquad (2.2.17)$$

elde edilir. (2.2.16) bağıntısı $r = 1, 2, \dots, n$ için yazılır ve elde edilen eşitlikler taraf tarafa toplanırsa

$$\sum_r \overset{r}{\bar{b}}_a = -\sum_i \Omega^i_i \eta^a + \sum_r \overset{r}{b}_i x^i_a \qquad (2.2.18)$$

bulunur.

SONUÇ 2.2.2 $(\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \dots, \underset{n}{v})$ şebekesi W_{n+1} e göre ikinci cins Chebyshev ise, W_n e göre de ikinci cins Chebyshevdir. Ayrıca, şebeke W_n e göre ikinci cins Chebyshev ise, W_{n+1} e göre ikinci cins Chebyshev vektörleri W_n e diktir.

SONUÇ 2.2.3 $(\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \dots, \underset{n}{v})$ şebekesi W_{n+1} e göre b-şebekesi ise, W_n e göre de bir b-şebekesi olup $\sum_{i=1}^{n+1} \Omega^i_i = 0$ dır. Ayrıca, şebeke W_n e göre b-şebekesi ise $\sum_r \overset{r}{\bar{b}}_a$ vektörü W_n e diktir.

TEOREM 2.2.3 $\underset{r}{\bar{c}^a}$ ve $\underset{r}{c^i}$, $(\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \dots, \underset{n}{v})$ şebekesinin geodezik vektörlerinin, sırasıyla, W_{n+1} ve W_n e göre bileşenleri olsun. Bu durumda

$$x^j_a \underset{r}{\bar{c}^a} = \underset{r}{c^j} \quad \text{ve} \quad \sum_r \underset{r}{\bar{c}^a} = \sum_r \underset{rr}{\kappa}\eta^a + \sum_r \underset{r}{c^i} \; x^a_i$$

bağıntıları mevcuttur[9].

İSPAT: (2.2.9) bağıntısının her iki yanı $\underset{r}{v^k}$ ile çarpılır ve k indisi üzerinden toplam alınırsa

$$\underset{r}{v^k} \; \overset{\circ}{\nabla}_k \; \underset{r}{v^a} = (\omega_{ik} \; \underset{r}{v^i} \; \underset{r}{v^k})\eta^a + x^a_i \; \underset{r}{\overset{s}{T_k}} \; \underset{r}{v^k} \; \underset{s}{v^i} \tag{2.2.19}$$

bağıntısı elde edilir.

$$\underset{p}{v^k} \; \overset{\circ}{\nabla}_k \; \underset{r}{v^a} = \underset{p}{v^c} \; \overset{\circ}{\nabla}_c \underset{r}{v^a} \qquad , \quad \underset{r}{\overset{s}{\varsigma}} = \underset{r}{\overset{s}{T_k}} \; \underset{r}{v^k}$$

olduğu gözönüne alınırsa (2.2.19) bağıntısı

$$\underset{r}{v^c} \; \overset{\circ}{\nabla}_c \; \underset{r}{v^a} = \underset{rr}{\kappa}\eta^a + x^a_i \; \underset{r}{\overset{s}{\varsigma}} \; \underset{s}{v^i} \tag{2.2.20}$$

şekline girer. Burada $\underset{rr}{\kappa}$, W_n in $\underset{r}{v^a}$ doğrultusundaki normal eğriliği, $\underset{r}{\overset{s}{\varsigma}}$ ise şebeke eğrilerinin geodezik eğrilikleridir.

$$\underset{r}{v^c} \; \overset{\circ}{\nabla}_c \; \underset{r}{v^a} = (\underset{r}{v^c} \; \underset{r}{\overset{s}{T_c}})\underset{s}{v^a} = \underset{r}{\overset{s}{\varsigma}} \; \underset{s}{v^a} = \underset{r}{\bar{c}^a}$$

olduğu gözönüne alınırsa (2.2.20) bağıntısı

$$\underset{r}{\bar{c}^a} = \underset{rr}{\kappa}\eta^a + x^a_i \; \underset{r}{c^i} \tag{2.2.21}$$

şekline girer. Bu bağıntının her iki tarafi x^j_a ile çarpılarak, a indisi üzerinden toplam alınırsa

$$x^j_a \underset{r}{\bar{c}^a} = \underset{r}{c^j} \tag{2.2.22}$$

bulunur.

(2.2.21) bağıntısı $r = 1,2,\ldots,n$ için yazılır ve elde edilen eşitlikler taraf tarafa toplanırsa

$$\sum_r \underset{r}{\bar{c}^a} = \sum_r \underset{rr}{\kappa}\eta^a + \sum_r \underset{r}{c^i} \; x^a_i \tag{2.2.23}$$

elde edilir.

SONUÇ 2.2.4 $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ şebekesi W_{n+1} e göre c-şebekesi ise, W_n e göre de c-şebekesi olup $\sum_r \kappa_{rr} = 0$ dır. Ayrıca, şebeke W_n e göre c-şebekesi ise $\sum_r \bar{c}^a_r$ vektörü W_n e diktir.

BÖLÜM III

WEYL HİPERYÜZEYLERİNDE GENELLEŞTİRİLMİŞ METRİKSEL VE GENELLEŞTİRİLMİŞ EŞİT-UZAKLIKLI CHEBYSHEV ŞEBEKELERİ

$W_{n+1}(g_{ab}, T_c)$ Weyl uzayının bir hiperyüzeyi $W_n(g_{ij}, T_k)$ ve $W_n(g_{ij}, T_k)$ hiperyüzeyine ait n-boyutlu bir eğri şebekesi $(\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \ldots, \underset{n}{v})$ olsun. Eğer belirli bir α (α=1,2,...,n) değeri için

$$\overset{\circ}{\nabla}_{[s} \overset{\alpha}{v}_{i]} = 0 \qquad (3.1.1)$$

ise, $(\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \ldots, \underset{n}{v})$ şebekesine genelleştirilmiş metriksel α-Chebyshev şebekesi denir. Burada köşeli parantez s ve i indislerine göre antisimetriyi göstermektedir [3].

Eğer (3.1.1) koşulu α=1,2,...,n için gerçekleniyorsa, $(\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \ldots, \underset{n}{v})$ şebekesine kuvvetli metriksel Chebyshev şebekesi denir.

İki boyutlu V_2 Riemann uzayında metriksel 1-Chebyshev ve metriksel 2-Chebyshev şebekeleri Shulikovskii tarafindan geniş ölçüde incelenmiştir[8]. İki boyutlu Weyl uzaylarında metriksel Chebyshev şebekeleri ise Tsareva tarafindan [10] da incelenmiştir.

İki ve üç boyutlu Riemann uzaylarında kuvvetli-metriksel Chebyshev şebekeleri bilhassa Shulikovskii[8] ile Dupnov ve Fuchs[11] tarafindan ele alınmıştır.

W_n hiperyüzeyine ait bir $(\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \ldots, \underset{n}{v})$ şebekesi

$$\overset{\circ}{\nabla}_k (\overset{1}{v}_i + \overset{2}{v}_i + \ldots + \overset{n}{v}_i) = 0 \quad [ik] \qquad (3.1.2)$$

koşulunu gerçeklerse, böyle bir şebekeye genelleştirilmiş eşit-uzaklıklı Chebyshev şebekesi denir. Burada [ik], i ve k indislerine göre antisimetri alınacağını göstermektedir.

İki ve üç boyutlu Riemann uzaylarında eşit-uzaklıklı şebekeler Shulikovskii[8] ile Khachatryan ve Shulikovskii[12] tarafindan incelenmiştir.

İki ve üç boyutlu Riemann uzayı ile iki boyutlu Weyl uzayları için elde edilen sonuçların bir kısmı bu çalışmada W_{n+1} Weyl uzayının W_n hiperyüzeyine genelleştirilmiş ve bununla ilgili olarak aşağıdaki teoremler ispatlanmıştır:

TEOREM 3.1.1 $W_{n+1}(g_{ab},T_c)$ Weyl uzayının $W_n(g_{ij},T_k)$ hiperyüzeyine ait bir $(\underset{1}{v},\underset{2}{v},\ldots,\underset{n}{v})$ şebekesi, W_{n+1} uzayına göre genelleştirilmiş metriksel α-Chebyshev ise, W_n hiperyüzeyine göre de genelleştirilmiş metriksel α-Chebyshevdir.

İSPAT: W_n hiperyüzeyinde bir $(\underset{1}{v},\underset{2}{v},\ldots,\underset{n}{v})$ şebekesini gözönüne alalım. $\underset{\alpha}{v}$ (α=1,2,...,n) vektör alanlarının karşıtları olan $\overset{\alpha}{v}$ vektör alanlarının çevreleyen uzaya ve hiperyüzeye göre bileşenleri, sırasıyla, $\overset{\alpha}{v}_a$ ve $\overset{\alpha}{v}_i$ olsun. $(2.2.8)_2$ ile verilen

$$\overset{\alpha}{v}_j = x^a_j\,\overset{\alpha}{v}_a$$

bağıntısının her iki tarafının genelleştirilmiş kovaryant türevi alınırsa

$$\overset{\circ}{\nabla}_k \overset{\alpha}{v}_j = x^a_j(\overset{\circ}{\nabla}_k \overset{\alpha}{v}_a) + \overset{\alpha}{v}_a(\overset{\circ}{\nabla}_k x^a_j) \tag{3.1.3}$$

elde edilir. (2.2.2) ye göre

$$\overset{\circ}{\nabla}_k \overset{\alpha}{v}_a = x^c_k\,\overset{\circ}{\nabla}_c \overset{\alpha}{v}_a$$

ve $\overset{\circ}{\nabla}_k x^a_j = \omega_{jk}\eta^a$ olduğundan dolayı, (3.1.3) gereğince

$$\overset{\circ}{\nabla}_k \overset{\alpha}{v}_j = x^a_j x^c_k(\overset{\circ}{\nabla}_c \overset{\alpha}{v}_a) + \omega_{jk}\,\overset{\alpha}{v}_a\,\eta^a$$

$$\overset{\circ}{\nabla}_k \overset{\alpha}{v}_j = x^a_j x^c_k(\overset{\circ}{\nabla}_c \overset{\alpha}{v}_a) \tag{3.1.4}$$

bulunur. (3.1.4) bağıntısında k ve j indislerinin yerleri değiştirilerek

$$\overset{\circ}{\nabla}_j \overset{\alpha}{v}_k = x^a_k x^c_j(\overset{\circ}{\nabla}_c \overset{\alpha}{v}_a) \tag{3.1.5}$$

elde edilir. (3.1.4) ve (3.1.5) bağıntıları taraf tarafa çıkarılarak

$$\overset{\circ}{\nabla}_k \overset{\alpha}{v}_j - \overset{\circ}{\nabla}_j \overset{\alpha}{v}_k = \left(x^a_j x^c_k - x^a_k x^c_j\right)(\overset{\circ}{\nabla}_c \overset{\alpha}{v}_a) \tag{3.1.6}$$

elde edilir.

(3.1.5) den, a ve c indislerinin yerdeğiştirmesiyle

$$\overset{\circ}{\nabla}_j \overset{\alpha}{v}_k = x^{c}_{k} x^{a}_{j} (\overset{\circ}{\nabla}_a \overset{\alpha}{v}_c) \tag{3.1.7}$$

bulunur. (3.1.5) ve (3.1.7) bağıntıları kullanılarak

$$x^{a}_{k} x^{c}_{j} (\overset{\circ}{\nabla}_c \overset{\alpha}{v}_a) - x^{c}_{k} x^{a}_{j} (\overset{\circ}{\nabla}_a \overset{\alpha}{v}_c) = 0 \tag{3.1.8}$$

elde edilir. (3.1.8) bağıntısı (3.1.6) da kullanılırsa

$$\overset{\circ}{\nabla}_k \overset{\alpha}{v}_j - \overset{\circ}{\nabla}_j \overset{\alpha}{v}_k = x^{a}_{j} x^{c}_{k} (\overset{\circ}{\nabla}_c \overset{\alpha}{v}_a) - x^{a}_{k} x^{c}_{j} (\overset{\circ}{\nabla}_c \overset{\alpha}{v}_a) + x^{a}_{k} x^{c}_{j} (\overset{\circ}{\nabla}_c \overset{\alpha}{v}_a) - x^{a}_{j} x^{c}_{k} (\overset{\circ}{\nabla}_a \overset{\alpha}{v}_c)$$

veya

$$\overset{\circ}{\nabla}_{[k} \overset{\alpha}{v}_{j]} = \overset{\circ}{\nabla}_{[c} \overset{\alpha}{v}_{a]} x^{a}_{j} x^{c}_{k} \tag{3.1.9}$$

bulunur.

W_n hiperyüzeyine ait bir $(\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \dots, \underset{n}{v})$ şebekesi W_{n+1} uzayına göre genelleştirilmiş metriksel α-Chebyshev ise, $\overset{\circ}{\nabla}_{[c} \overset{\alpha}{v}_{a]} = 0$ olacağından, (3.1.9) bağıntısına göre $\overset{\circ}{\nabla}_{[k} \overset{\alpha}{v}_{j]} = 0$ bulunur ki, bu da şebekenin hiperyüzeye göre genelleştirilmiş metriksel α-Chebyshev olduğunu gösterir.

TEOREM 3.1.2 W_n Weyl uzayının kuvvetli-metriksel bir $(\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \dots, \underset{n}{v})$ şebekesi genelleştirilmiş eşit-uzaklıklı bir şebekedir.

İSPAT: Eşit-uzaklıklı bir $(\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \dots, \underset{n}{v})$ şebekesi (3.1.2) bağıntısı ile karakterize edilmiş olup, bu bağıntı

$$\begin{aligned} &\overset{\circ}{\nabla}_k (\overset{1}{v}_i + \overset{2}{v}_i + \dots + \overset{n}{v}_i) - \overset{\circ}{\nabla}_i (\overset{1}{v}_k + \overset{2}{v}_k + \dots + \overset{n}{v}_k) \\ &= (\overset{\circ}{\nabla}_k \overset{1}{v}_i - \overset{\circ}{\nabla}_i \overset{1}{v}_k) + \dots + (\overset{\circ}{\nabla}_k \overset{n}{v}_i - \overset{\circ}{\nabla}_i \overset{n}{v}_k) \\ &= \sum_{\alpha=1}^{n} \overset{\circ}{\nabla}_{[k} \overset{\alpha}{v}_{i]} = 0 \end{aligned} \tag{3.1.10}$$

şeklinde ifade edilebilir.

Buna göre, eğer gözönüne alınan şebeke kuvvetli-metriksel Chebyshev ise, $\alpha = 1,2,\ldots,n$ için $\overset{\circ}{\nabla}_{[k} \overset{\alpha}{v}_{i]} = 0$ dır. Bu koşullar altında (3.1.10) bağıntısı gerçeklenmiş olur ki, bu da şebekenin eşit-uzaklıklı Chebyshev olduğunu gösterir.

TEOREM 3.1.3 W_{n+1} Weyl uzayının W_n hiperyüzeyine ait bir $(\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \ldots, \underset{n}{v})$ şebekesi W_{n+1} uzayına göre genelleştirilmiş eşit-uzaklıklı ise, W_n hiperyüzeyine göre de genelleştirilmiş eşit-uzaklıklıdır.

İSPAT: (3.1.9) bağıntısında α üzerinden toplam alınırsa

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \overset{\circ}{\nabla}_{[k} \overset{\alpha}{v}_{j]} = x^{a}_{j} x^{c}_{k} \sum_{\alpha=1}^{n} \overset{\circ}{\nabla}_{[c} \overset{\alpha}{v}_{a]} \tag{3.1.11}$$

elde edilir. Hiperyüzeye ait bir şebeke çevreleyen uzaya göre genelleştirilmiş eşit-uzaklıklı Chebyshev ise, (3.1.10) a göre $\sum_{\alpha=1}^{n} \overset{\circ}{\nabla}_{[c} \overset{\alpha}{v}_{a]} = 0$ olur. Bu takdirde (3.1.11) e göre $\sum_{\alpha=1}^{n} \overset{\circ}{\nabla}_{[k} \overset{\alpha}{v}_{j]} = 0$ dır ki, bu ise şebekenin hiperyüzeye göre de genelleştirilmiş eşit-uzaklıklı Chebyshev olması demektir.

SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Weyl uzaylarında ağırlıklı tensörlere uygulanan genelleştirilmiş kovaryant türev yöntemi yardımıyla bu uzaylara ait eğri şebekeleri birçok yazar tarafından başarı ile incelenmiştir. Bununla beraber, bir Weyl uzayının herhangi bir altuzayına ait n-boyutlu eğri şebekeleri hakkında henüz fazla birşey bilinmemektedir.

Bu çalışmada, W_{n+1} Weyl uzaylarının W_n hiperyüzeyine ait n-boyutlu bir şebekenin, genelleştirilmiş metriksel Chebyshev, kuvvetli-metriksel Chebyshev ve genelleştirilmiş eşit-uzaklıklı Chebyshev şebekesi olması halleri gözönüne alınmış ve bunlarla ilgili olarak şu sonuçlar elde edilmiştir: W_n hiperyüzeyine ait olan n-boyutlu bir şebeke W_{n+1} uzayına göre genelleştirilmiş metriksel Chebyshev şebekesi ise, W_n e göre de aynı özelliğe sahiptir. W_n e ait n-boyutlu bir şebeke W_{n+1} e göre genelleştirilmiş eşit-uzaklıklı Chebyshev ise, W_n e göre de genelleştirilmiş eşit-uzaklıklı Chebyshevdir. W_n Weyl uzayına ait kuvvetli-metriksel Chebyshev n-boyutlu bir şebeke genelleştirilmiş eşit-uzaklıklı bir Chebyshev şebekesidir.

Bu çalışmada Weyl hiperyüzeyleri için elde edilen sonuçların bir Weyl uzayının herhangi bir altuzayına genelleştirilmesi düşünülebilir.

KAYNAKLAR

[1] NORDEN, A. : Affinely Connected Spaces. GRFML. Moscow, (1976).

[2] SYNGE, J.L. - SCHILD, A. : Tensor Calculus. University of Toronto Press, (1956).

[3] ZLATANOV,G.Z. : Special networks in the n-dimensional space of Weyl. Tensor(N.S), V.48, (1989).

[4] HLAVATY, V. : Les courbes de la variete W_n. Memor.Sci.Math. Paris, (1934).

[5] ZLATANOV, G.Z.: Nets in the n-dimensional space of Weyl. C.R.Acad.Bulgare Sci. V.41, No:10, 29-32, (1988) (in Russian)

[6] TSAREVA, B. - ZLATANOV, G. : On the Geometry of the Nets in the n-dimensional space of Weyl. Journal of Geometry, V.38, 181-197, (1990).

[7] LİBER, A. : On Chebyshev nets and Chebyshev spaces. Proceedings of Sem.Vect. and Tens.Anal., No:17, 177-183, (1974) (in Russian).

[8] SHULIKOVSKII, V. : Classical Differential Geometry. GIMFL. Moscow, (1963) (in Russian).

[9] UYSAL, S.A.-ÖZDEĞER, A. : On the Chebyshev nets in a hypersurface of a Weyl space. Journal of Geometry, (1993) (baskıda).

[10] TSAREVA, B. : On some special iso-Chebyshev's networks in the two dimensional space of Weyl. Sci. Proc. of Plovdiv University, Matem. V.15, 79-91, (1977) (in Bulgarian).

[11] DUBNOV, Ya. S. -FUCHS, S.A. :On spatial analogues of Chebyshev's networks. Dokl. Acad. Sci. USSR, V.28, 102-104, (1940) (in Russian)

[12] KHACHATRYAN, A.E.-SHULİKOVSKII, V.I. :Three tissues in the Riemannian space V_3. Izv.Vuzov.Matem.No:7 , 84-98, (1977) (in Russian).

ÖZGEÇMİŞ

1969 yılında İstanbul'da doğdu. 1986 yılında Beşiktaş Atatürk Lisesi'ni bitirdikten sonra, aynı yıl girdiği İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nden 1990 yılında mezun oldu. 1991 yılında İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nde yüksek lisans öğrenimine başladı. 1992 yılından beri de Marmara Üniversitesi Atatürk Eğitim Fakültesi Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü Matematik Anabilim Dalı'nda Araştırma Görevlisi olarak çalışmaktadır.

ANABİLİM DALI :MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ
PROGRAMI :MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ
DANIŞMANI :PROF.DR.ABDÜLKADİR ÖZDEĞER
BİTİRİŞ TARİHİ:24.OCAK.1994

WEYL HİPERYÜZEYLERİNDE CHEBYSHEV ŞEBEKELERİ

A.FÜSUN NURCAN

Anahtar Kelimeler:Weyl uzayları, genelleştirilmiş metriksel Chebyshev, kuvvetli-metriksel Chebyshev, genelleştirilmiş eşit-uzaklıklı Chebyshev şebekeleri.

Özet: Bu çalışmada, (n+1)-boyutlu W_{n+1} Weyl uzayının W_n hiperyüzeyine ait n-boyutlu bir $(\underset{1}{v},\underset{2}{v},\ldots,\underset{n}{v})$ şebekesinin, W_{n+1} ve W_n e göre genelleştirilmiş metriksel Chebyshev, kuvvetli-metriksel Chebyshev ve genelleştirilmiş eşit-uzaklıklı Chebyshev şebekesi olma durumları incelenmiş ve şu sonuçlar elde edilmiştir: W_n hiperyüzeyine ait bir şebeke W_{n+1} Weyl uzayına göre genelleştirilmiş metriksel Chebyshev veya genelleştirilmiş eşit-uzaklıklı Chebyshev şebekesi ise, W_n e göre de aynı özelliklere sahiptir. W_n e ait kuvvetli-metriksel bir şebeke genelleştirilmiş eşit-uzaklıklı bir şebekedir.

CHEBYSHEV NETS IN WEYL HYPERSURFACES

A.FÜSUN NURCAN

Keywords:Weyl spaces, generalized metrically Chebyshev, strongly-metrically Chebyshev, generalized equidistant Chebyshev nets.

Abstract:In this work, an n-dimensional net $(\underset{1}{v},\underset{2}{v},\ldots,\underset{n}{v})$ in the hypersurface W_n of the (n+1)-dimensional Weyl space W_{n+1} is considered and the following results are obtained:If the net $(\underset{1}{v},\underset{2}{v},\ldots,\underset{n}{v})$ is a generalized metrically Chebyshev or a generalized equidistant Chebyshev net with respect to W_{n+1}, then it is,respectively, a generalized metrically Chebyshev or a generalized equidistant Chebyshev net relative to W_n . Furthermore, it is proved that an n-dimensional strongly - metrically Chebyshev net in a Weyl space, is also a generalized equidistant net.