T.C.
MUĞLA SITKI KOÇMAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

BAŞLANGIÇ VE SINIR DEĞER PROBLEMLERİNİN HOMOTOPİ PERTÜRBASYON SUMUDU DÖNÜŞÜM YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DİLARA ALTAN

MAYIS 2015
MUĞLA

MUGLA SITKI KOÇMAN ÜNİVERSİTESİ

Fen Bilimleri Enstitüsü

TEZ ONAYI

DİLARA ALTAN tarafından hazırlanan **BAŞLANGIÇ VE SINIR DEĞER PROBLEMLERİNİN HOMOTOPİ PERTÜRBASYON SUMUDU DÖNÜŞÜM YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMLERİ** başlıklı tezinin, 08/05/2015 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans derecesi için gerekli şartları sağladığı oybirliği/~~oy çokluğu~~ ile kabul edilmiştir.

TEZ SINAV JURİSİ

Doç. Dr. Hasan BULUT **(Jüri Başkanı)** İmza:

Matematik Anabilim Dalı,
Fırat Üniversitesi, Elazığ

Prof. Dr. Zeynep Fidan KOÇAK **(Danışman)** İmza:

Matematik Anabilim Dalı,
Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi, Muğla

Yrd. Doç. Dr. Sibel PAŞALI ATMACA **(Üye)** İmza:

Matematik Ana Bilim Dalı,

Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi, Muğla

ANA BİLİM DALI BAŞKANLIĞI ONAYI

Prof. Dr. . Zeynep Fidan KOÇAK İmza:

Matematik Ana Bilim Dalı Başkanı,
Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi, Muğla

Prof. Dr. . Zeynep Fidan KOÇAK İmza:

Danışman, Matematik Anabilim Dalı,
Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi, Muğla

Savunma Tarihi: 08/05/2015

Tez çalışmalarım sırasında elde ettiğim ve sunduğum tüm sonuç, döküman, bilgi ve belgelerin tarafımdan bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde edildiğini; akademik ve bilimsel etik kurallarına uygun olduğunu beyan ederim. Ayrıca, akademik ve bilimsel etik kuralları gereği bu tez çalışması sırasında elde edilmemiş başkalarına ait tüm orijinal bilgi ve sonuçlara atıf yapıldığını da beyan ederim.

Dilara ALTAN

08/05/2015

ÖZET

BAŞLANGIÇ VE SINIR DEĞER PROBLEMLERİNİN HOMOTOPİ PERTÜRBASYON SUMUDU DÖNÜŞÜM YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMLERİ

Dilara ALTAN

Yüksek Lisans Tezi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Zeynep Fidan KOÇAK
Mayıs 2015, 70 sayfa

Yapılan tez çalışması beş ana bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, çalışılan konunun tarihi gelişimi ve kullandığımız problemlerin genel denklemleri verildi. İkinci bölümde, tezde geçen temel tanım ve teoremlerden bahsedildi. Üçüncü bölümde, yöntemden bahsedildi. Homotopi Pertürbasyon Sumudu Dönüşüm Metodu, bu metodu oluşturan homotopi pertürbasyon metodu, Sumudu yöntemi ve bunlara ek olarak He polinomları anlatıldı. Dördüncü bölümde Homotopi Pertürbasyon Sumudu Dönüşüm metodu farklı özellikteki kısmi diferansiyel denklemlere uygulandı. Elde edilen çözümlerin bazılarının grafikleri çizilerek, tam çözüm ile kıyaslandı. Son bölümde ise başlangıç ve sınır değer problemlerinin Homotopi Pertürbasyon Sumudu Dönüşüm metodu ile elde edilen çözümleri incelenerek genel bir sonuca varıldı.

Anahtar Kelimeler: Sumudu Dönüşüm Metodu, Homotopi Pertürbasyon Metodu, He Polinomları, Homotopi Pertürbasyon Sumudu Dönüşüm Metodu, Başlangıç ve Sınır Değer Problemleri

ABSTRACT

THE SOLUTIONS OF INITIAL AND BOUNDARY VALUE PROBLEMS VIA HOMOTOPY PERTURBATION SUMUDU TRANSFORM METHOD

Dilara ALTAN

Master of Science (M.Sc.)
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Supervisor: Prof. Dr. Zeynep Fidan KOÇAK
May 2015, 70 pages

This thesis consists of five chapters. The first chapter includes the historical developments of our topic and general forms of differential equations which are used in this thesis. Some theorems and definitions are given in chapter 2. In chapter 3, we give some information about Homotopy Perturbation Method, Sumudu Transform Method, Homotopy Perturbation Sumudu Transform Method and He's Polynomials. In the next chapter, our method is applied to various partial differential equations. In chapter 5, obtained solutions are investigated.

Key words: Sumudu Transform Method, Homotopy Perturbation Method, Sumudu Transform Homotopy Perturbation Method, He's Polynomials, Initial and Boundary Value Problems

ÖNSÖZ

Bu tez çalışmasında bana yol gösteren, katkılarını benden esirgemeyen saygıdeğer danışman hocam Prof. Dr. Zeynep Fidan KOÇAK’ a, tez çalışmam boyunca yardımcı olan Fırat Üniversitesi öğretim üyesi Doç. Dr. Hasan BULUT’ a, bu çalışmamda, bilgi ve yardımları ile bana destek olan Arş. Gör. Ömer AKGÜLLER’ e teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Lisansüstü eğitimin temellerini emek ve sabır oluşturur. Emeğime her zaman saygı duyan, çıktığım bu yolda daima yanımda yürüyen Özkan KOÇ’ a, beni bugünlere getiren, desteklerini hiçbir zaman eksik etmeyen aileme, her zaman yanımda oldukları için teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ .... **vi**
İÇİNDEKİLER .... **vii**
ÇİZELGELER DİZİNİ .... **ix**
ŞEKİLLER DİZİNİ .... **x**
SEMBOLLER DİZİNİ .... **xi**
1. GİRİŞ **1**
1.1. Tarihi Gelişim 1
1.2. Problemin Tanıtılması 2
1.2.1. Homojen olmayan lineer ve non-lineer kısmi diferansiyel denklem 2
1.2.2. 2 Bboyutlu Poisson denklemi 3
1.2.3. Lineer ve non-lineer Schrödinger denklemi 3
2. KAYNAK ÖZETLERİ **5**
2.1. Temel Tanım ve Teoremler 5
2.1.1. Adi diferansiyel denklemler 5
2.1.2. Kısmi diferansiyel denklemler 6
2.1.3. Homotopi kavramı 8
2.1.4. Laplace dönüşümü 9
3. MALZEME ve YÖNTEM **12**
3.1. Sumudu Dönüşüm Metodu 12
3.1.1. Sumudu dönüşümünün Laplace dönüşümü ile analoğu 17
3.1.2. Sumudu dönüşüm metodunun uygulanması 19
3.2. Homotopi Pertürbasyon Metodu 20
3.2.1. He polinomları 24
3.3.Homotopi Pertürbasyon Sumudu Dönüşüm Metodu 25
4. BULGULAR VE İRDELEME **28**
4.1. Homotopi Pertürbasyon Sumudu Dönüşüm Metodu'nun Uygulamaları 28
4.1.1. Homojen olmayan non-lineer kısmi diferansiyel denklem 28
4.1.2. 2 boyutlu Poisson sınır değer problemi 36

4.1.3. Homojen olmayan lineer kısmi diferansiyel denklem 43
4.1.3. Lineer ve non-lineer Schrödinger denklemleri 48
5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER…………………………………………………66
KAYNAKLAR 67
ÖZGEÇMİŞ... 69

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 4.1. Örnek 4.1'in çözümlerinin karşılaştırılması..………………..………...36
Çizelge 4.2. Örnek 4.2'nin çözümlerinin karşılaştırılması.………….………..….....42
Çizelge 4.3. Örnek 4.3'ün çözümlerinin karşılaştırılması…....…….…………...…..35

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 4.1. Örnek 4.1’in tam çözümünün grafiği……….………………………....... 35
Şekil 4.2. Örnek 4.1’nin yaklaşık çözümünün grafiği……………………….……..... 35
Şekil 4.3. Örnek 4.2’nin tam çözümünün grafiği……………………………….....… 41
Şekil 4.4. Örnek 4.2’nin yaklaşık çözümünün grafiği……………….……….…...... 42
Şekil 4.5. Örnek 4.3’nin tam çözümünün grafiği……………………………….....… 47
Şekil 4.6. Örnek 4.3’nin yaklaşık çözümünün grafiği…….…………….……...…...... 47
Şekil 4.7. Örnek 4.4’ün tam çözümünün sanal kısmının grafiği…………....…...... 52
Şekil 4.8. Örnek 4.4’ün tam çözümünün reel kısmının grafiği……………….......... 53
Şekil 4.9. Örnek 4.4’ün $N=4$ için yaklaşık çözümünün sanal kısmının grafiği……. 53
Şekil 4.10. Örnek 4.4’ün $N=4$ için yaklaşık çözümünün reel kısmının grafiği….... 54
Şekil 4.11. Örnek 4.5’in tam çözümünün sanal kısmının grafiği …………..………..59
Şekil 4.12. Örnek 4.5’in tam çözümünün reel kısmının grafiği ……….…...……...... 59
Şekil 4.13. Örnek 4.5’in $N=4$ için yaklaşık çözümünün sanal kısmının grafiği......... 60
Şekil 4.14. Örnek 4.5’in $N=4$ için yaklaşık çözümünün reel kısmının grafiği...............60

SEMBOLLER DİZİNİ

$S[f(t)]$	$f(t)$' nin Sumudu dönüşümü
$S^{-1}[f(t)]$	$f(t)$' nin ters Sumudu dönüşümü
$\cong_p$	Yol homotopiklik
$L[f(t)]$	$f(t)$nin Laplace dönüşümü
$H_n(U)$	He polinomları
D	İkinci mertebeden lineer diferansiyel operatör
N	Genel non-lineer operator

1. GİRİŞ

1.1. Tarihi Gelişim

Fiziksel problemlerin çoğu matematiksel modellerle ifade edilir. Elde edilen bu modelin çözümü, fiziksel olayın anlaşılmasında büyük önem taşır. Bu sebeple, başlangıç ve sınır değer problemlerinin analitik veya yaklaşık çözümlerini bulmak için son yıllarda pek çok metot geliştirilmiştir. Yaklaşık çözüm elde ettiğimiz metotlardan bazıları; homotopi pertürbasyon metodu, homotopi analiz metodu, Adomian ayrışım metodu, sonlu farklar yöntemi, tam çözüm elde ettiğimiz metotların bir kısmı ise tanh metodu, sumudu dönüşüm metodu, F-açılım metodudur.

Bu tezde başlangıç ve sınır değer problemlerini çözebilmek için Homotopi Pertürbasyon Sumudu Dönüşüm Metodu'nu kullandık. Adından anlaşılacağı gibi iki metodun birleşmesiyle oluşan lineer ve nonlineer denklemlere uygulanabilen bir metottur. Şimdi bu metotların tarihsel gelişimini inceleyelim.

Sumudu dönüşümü ilk olarak Gamage K. Watugala tarafından 1993 yılında mühendislik kontrol problemlerini çözebilmek için ortaya atılmıştır. Daha sonra çözüm metodu, Watugala tarafından kısmi diferansiyel denklemlere genişletilmiştir. Uygulaması ve ters dönüşümü Weerakon tarafından yapılmıştır. Sumudu dönüşümüne benzer bir dönüşüm olan Laplace dönüşümü ile bağlantılarını kullanarak Belgacem, teori ve uygulamalarını geliştirmiştir.

Homotopi pertürbasyon metodu çeşitli fiziksel problemlerin çözülmesi için He tarafından geliştirilmiştir. Bu metot, tek başına kullanılmasının dışında, Laplace dönüşüm metodu, Adomian ayrışım metodu ile birlikte de kullanılmıştır. Özellikle nonlineer denklemlerin çözümünde etkili sonuçlar elde edilmiştir.

Sumudu dönüşüm metodu ile homotopi pertürbasyon metodunun birleşmesiyle oluşan metot lineer kısmi diferansiyel denklemleri çözmek için Kumar D., Singh J., Sushila tarafından tanımlanmıştır. Bu iki metoda ek olarak non-lineer denklemleri çözmek için He polinomlarından da faydalanılmıştır. Kumar, D., Singh, J. ve Sushila, 2011, çalışmalarında bir boyutlu, homojen olmayan değişken katsayılı bir diferansiyel denkleme bu metodu uygulamışlardır. Çözümleri, diğer metotlarla elde edilen çözümlerle karşılaştırmışlardır ve tam çözüme daha yakın sonuçlar bulduklarını gözlemlemişlerdir. Lineer olmayan problemlerin çözümünde Adomian polinomlarından faydalanılıyordu. Fakat bu polinomların hesabı, oldukça karmaşık yapıdadır. Bu karmaşıklığın üstesinden gelmek için, Kumar, D., Singh, J. ve Sushila, diğer bir çalışmalarında, lineer olmayan problemleri çözmek için, farklı bir yaklaşım olan He polinomları sundular ve lineer olmayan problemleri Adomian polinomlarını kullanmadan çözerek, daha doğru yaklaşık sonuçlar elde ettiler. Kumar, D., Singh, J. ve Sushila, 2013, homotopi pertürbasyon sumudu dönüşüm yöntemini, ısı ve dalga denklemlerine uygulamışlardır.

1.2.Problemin Tanıtılması

Bu çalışmada çözeceğimiz problemlerin genel denklemlerini verelim.

1.2.1. Homojen olmayan lineer ve non-lineer kısmi diferansiyel denklem

İlk olarak ikinci mertebeden homojen olmayan lineer denklemi (Kumar, Singh ve Sushila, 2011) tanımlayalım. İkinci mertebeden bir kısmi diferansiyel denklem, bağımlı değişken ve onun türevlerine göre birinci dereceden ise lineer denklem adını alır.

$$\begin{aligned} &A(x,y)z_{xx}+B(x,y)z_{xy}+C(x,y)z_{yy}+D(x,y)z_x+E(x,y)z_y \\ &+F(x,y)z=0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Eğer lineer değil ise lineer olmayan (non-lineer) adını alır. (Mishra, 2012)

1.2.2. 2 boyutlu Poisson denklemi

İnceleyeceğimiz diğer bir örnek ise, iki boyutlu Poisson denklemi Atangana ve Kılıçman, 2013) dir.

n boyutlu Poisson denkleminin genel formu,

$$\nabla^2 \Phi\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) = \sigma\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) \tag{1.2}$$

şeklindedir. Bu ifadeye göre iki boyutlu Poisson denklemi,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\varphi\left(x, y\right) = \sigma\left(x, y\right) \tag{1.3}$$

şeklinde olur.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\varphi\left(x, y, z\right) = \sigma\left(x, y, z\right) \tag{1.4}$$

şeklinde olur.

Ayrıca, $\sigma\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) = 0$ olması durumunda denklem Laplace denklemi adını alır.

1.2.3. Lineer ve non-lineer Schrödinger denklemi

$L_0 < x < L_1$, $t > 0$, $i = \sqrt{-1}$, $q \geq 0$ reel parametre ve $u = u\left(x,t\right) = v\left(x,t\right) + iw\left(x,t\right)$

,

Başlangıç koşulları, $u\left(x,0\right) = g\left(x\right) = g_R\left(x\right) + ig_I\left(x\right)$;

Sınır değerleri, $\frac{\partial u\left(L_0,t\right)}{\partial x} = \frac{\partial u\left(L_1,t\right)}{\partial x} = 0; \quad t \geq t_0$,

g_R ve g_I x'in reel değerli sürekli fonksiyonları olmak üzere Lineer Schrödinger denklemi (Kumar, Singh ve Sushila 2013),

$$u_t + iu_{xx} = 0 \,, \tag{1.5}$$

Kübik non-lineer Schrödinger denklemi, (Khuri, 1998)

$$iu_t + u_{xx} + q|u|^2 u = 0 \,, \tag{1.6}$$

şeklinde tanımlanır.

2.KAYNAK ÖZETLERİ

2.1.Temel Tanım ve Teoremler

2.1.1.Adi diferansiyel denklemler

Bir veya daha çok bağımlı değişken, bir tek bağımsız değişken ve bağımlı değişkenin (veya değişkenlerin) bir tek bağımsız değişkene göre adi türevlerini veya diferansiyellerini içeren bir diferansiyel denkleme adi (türevli) diferansiyel denklem denir. Diğer bir deyişle, bir diferansiyel denklemde bir tek bağımsız değişken varsa denkleme adi diferansiyel denklem denir.

Genel olarak, y bağımlı, x bağımsız değişkenli, n. mertebeden bir adi diferansiyel denklem,

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0 \tag{2.1}$$

şeklinde yazılır (Sezer, Daşçıoğlu, 2010).

Tanım 2.1. Bir diferansiyel denklemin mertebesi, en yüksek türevin mertebesidir.

Tanım 2.2. Bir diferansiyel denklemin derecesi, en yüksek mertebeli türevinin kuvvetidir.

Örnekler:

1. $x(y')^4 + 5y^3 = 8x$ 1. mertebeden, 4. dereceden diferansiyel denklem
2. $x^2(y'')^3 - 5x(y')^4 y - 8y^2 = e^x$ 2. mertebeden 3. dereceden diferansiyel denklem

Tanım 2.3.(Lineer Adi Diferansiyel Denklem) y bağımlı değişken ve x bağımsız değişken olmak üzere $n.$ mertebeden bir lineer adi diferansiyel denklem:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+...+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=b(x) \qquad (2.2)$$

şeklinde ifade edilir (Sezer, Daşçıoğlu, 2010).

Örnekler:

1. $x\frac{d^3x}{dt^3}-x^2\frac{dx}{dt}+x=\sin t$ 3.mertebe, 1.derece non-lineer diferansiyel denklem

2. $\frac{d^2y}{dx^2}+k^2y=\ln x$, k sabit 2. mertebe, 1. Derece lineer diferansiyel denklem

diferansiyel denklemleri adi diferansiyel denklemlerdir

2.1.2.Kısmi diferansiyel denklem

Bir veya daha çok bağımlı değişkenin, birden çok bağımsız değişkene göre kısmi türevlerini, bağımlı ve bağımsız değişkenleri içeren diferansiyel denkleme kısmi diferansiyel denklem denir.

Genel olarak u bağımlı, x ve y bağımsız değişkenli bir kısmi diferansiyel denklem:

$$F(x,y,u,u_x,u_y,u_{xx},u_{xy},u_{yy},...)=0 \qquad (2.3)$$

şeklinde yazılır (Sezer, Daşçıoğlu, 2010).

Örnekler:

1. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$

2. $\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)^2+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=u$

diferansiyel denklemleri kısmi diferansiyel denklemlerdir.

Tanım 2.4. Eğer bir diferansiyel denklem, sabit katsayılı, bağımlı değişkene ve onun kısmi türevlerine göre birinci dereceden ise ya da bağımsız değişkenlerin bir fonksiyonu ise, bu denkleme lineer denklem denir. İki bağımsız ve bir bağımlı değişkene sahip birinci ve ikinci basamaktan lineer kısmi türevli denklemlerin genel formları sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$$P(x,y)z_x + Q(x,y)z_y + R(x,y)z = S(x,y) \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned} &A(x,y)z_{xx} + B(x,y)z_{xy} + C(x,y)z_{yy} + D(x,y)z_x + E(x,y)z_y \\ &+F(x,y)z = G(x,y) \end{aligned} \tag{2.5}$$

Bir diferansiyel denklem lineer değilse lineer olmayan (non-lineer) denklem adını alır (Sezer, Daşçıoğlu, 2010).

Kısmi diferansiyel denklemlerin, adi diferansiyel denklemlerde olmayan, daha ileri bir sınıflandırması da vardır. Bu tanımları aşağıdaki şekilde verelim.

Tanım 2.5. Bir kısmi diferansiyel denklem, denklemde görülen en yüksek mertebeden türevlere göre lineer ise, denkleme *yarı lineer denklem* denir. Bu durumda denklemdeki daha düşük mertebeden türevlerin ve bağımlı değişkenin bulunuş şeklinin önemi yoktur. Sırasıyla, birinci ve ikinci mertebeden yarı lineer diferansiyel denklemlerin genel formu,

$$P(x,y,z)z_x + Q(x,y,z)z_y = R(x,y,z), \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned} &A(x,y,z,z_x,z_y)z_{xx} + B(x,y,z,z_x,z_y)z_{xy} + C(x,y,z,z_x,z_y)z_{yy} \\ &+D(x,y,z,z_x,z_y) = 0 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Şeklindedir (Sezer, Daşçıoğlu, 2010).

Örnekler:

1. $x^2 z_x - y^2 z_y = (x-y)z$ 1. mertebeden, yarı lineer diferansiyel denklem

2. $z_x z_{xx} + z_y z_{yy} + z^2 = 0$ 2. mertebeden yarı lineer dieransiyel denklem

şeklindeki kısmi diferansiyel denklemler yarı lineer denklemlere örnektir.

Tanım 2.6. Yarı lineer bir denklemde, en yüksek mertebeden türevlerin katsayıları, sadece bağımsız değişkenlerin bir fonksiyonu ise, böyle yarı lineer denkleme *hemen hemen lineer denklem* denir (Sezer, Daşçıoğlu, 2010).

Bu tanımlar ışığında, hemen hemen lineer denklem sınıfının lineer denklem sınıfını, yarı lineer denklem sınıfının ise hemen hemen lineer denklem sınıfını içerdiğini görmüş oluruz. Bir denklem sınıfı için verilen çözüm yöntemleri, alt denklem sınıfı için de geçerlidir.

2.1.3. Homotopi kavramı

Homotopi kavramı, 1895 yılında Henri Poincaré tarafından tanıtılmıştır. Homotopi, diferansiyel topolojinin önemli konularından biridir. Bu kavram daha sonra homolojinin temellerini oluşturmuştur. İki dönüşüm arasındaki homotopinin genel tanımı ise ilk olarak 1911 yılında L.E.J. Brouwer tarafından verilmiştir. İki matematiksel objeden biri diğerine sürekli olarak deforme oluyorsa homotopiktirler denir.

Tanım 2.7. (Munkres, 2000) A ve B topolojik uzaylar olmak üzere, A'dan B'ye sürekli, birebir, örten ve tersi de sürekli olan bir fonksiyona sürekli dönüşüm (homeomorfizma) denir.

Tanım 2.8. (Munkres, 2000) $f: X \to Y$, $g: X \to Y$ sürekli dönüşümler, $I = [0,1]$ olsun. Her $x \in X$ için $H(x,0) = f(x)$ ve $H(x,1) = g(x)$ eşitliklerini sağlayan bir $H: X \times I \to Y$ sürekli dönüşümü varsa f ve g homotopiktir denir. $f \simeq g$ şeklinde gösterilir. H dönüşümüne f ve g arasında bir homotopidir denir.

Tanım 2.9. (Munkres, 2000) $f : X \to Y$, $g : X \to Y$ sürekli dönüşümler, $f \simeq g$ ve $g : X \to Y$ sürekli dönüşümü sabit bir dönüşüm ise f'ye null (boş) homotopik denir.

Tanım 2.10. (Munkres, 2000) $f : X \to Y$, $g : X \to Y$ sürekli dönüşümler, $A \subseteq X$ olsun. Eğer her $t \in I$ ve her $x \in A$ için $H(a,t) = f(a) = g(a)$ olacak biçimde bir $H : X \times I \to Y$ homotopisi varsa f ve g dönüşümleri A alt kümesine göre homotopiktir denir.

Tanım 2.9. (Munkres, 2000) f ve g, $I = [0,1]$ aralığından X'e tanımlanan sürekli dönüşümler olmak üzere; f ve g aynı x_0 başlangıç, x_1 bitiş noktalarına sahiplerse ve her $s,t \in I$ için

$$H(s,0) = f(s) \text{ ve } H(s,1) = g(s), \tag{2.8}$$

$$H(0,t) = x_0 \text{ ve } H(1,t) = x_1 \tag{2.9}$$

olacak biçimde sürekli bir $H : I \times I \to X$ dönüşümü varsa H'ye f ve g arasında yol homotopisi denir. f ve g yol homotopiktir olarak adlandırılır ve $f \simeq_p g$ şeklinde gösterilir.

İlk koşul, H'nin f'den g'ye deformasyonunun sürekli bir yolunu temsil ederken ikinci koşul, yolun uç noktalarının deformasyon boyunca sabit kaldığını belirtir.

2.1.4. Laplace dönüşümü

F, reel değişken olan $t > 0$'ın reel değerli bir fonksiyonu olsun. Reel değerli s için, f aşağıdaki şekilde tanımlanır (Aydın, Kuryel, Gündüz ve Oturanç, 2007)

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t) dt \tag{2.10}$$

f, F'in Laplace dönüşümü olarak adlandırılır. $L[F]$, $L\left[F(t)\right]$ olarak da gösterilir. Bu tanıma göre birkaç temel fonksiyonun Laplace dönüşümünü bulalım.

1. $F(t)=1$, $t>0$ olsun. (2.10) integrali hesaplanırsa,

$$L[1]=\int_0^\infty e^{-st}.1dt=\lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-st}.1dt=\lim_{R\to\infty}\left[\frac{-e^{-st}}{s}\right]_0^R=\lim_{R\to\infty}\left[\frac{1}{s}-\frac{e^{-sR}}{s}\right]=\frac{1}{s},$$
$$s>0$$

elde edilir.

2. $F(t)=t$, $t>0$ olsun. (2.10) integrali hesaplanırsa,

$$L[t]=\int_0^\infty e^{-st}.tdt=\lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-st}.tdt=\lim_{R\to\infty}\left[\frac{-e^{-st}}{s^2}(st+1)\right]_0^R$$
$$=\lim_{R\to\infty}\left[\frac{1}{s^2}-\frac{e^{-sR}}{s^2}(sR+1)\right]=\frac{1}{s^2}\ , s>0$$

elde edilir.

3. $F(t)=e^{at}$, $t>0$ olsun. (2.10) integrali hesaplanırsa,

$$L\left[e^{at}\right]=\int_0^\infty e^{-st}.e^{at}dt=\lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{(a-s)t}dt=\lim_{R\to\infty}\left[\frac{e^{(a-s)t}}{a-s}\right]_0^R$$
$$=\lim_{R\to\infty}\left[\frac{e^{(a-s)R}}{a-s}-\frac{1}{a-s}\right]=-\frac{1}{a-s}=\frac{1}{s-a}\ , s>0$$

elde edilir.

4. $F(t)=\sin bt$, $t>0$ olsun. (2.10) integrali hesaplanırsa,

$$L[\sin bt]=\int_0^{\infty} e^{-st}.\sin bt dt=\lim_{R\to\infty}\int_0^{R} e^{-st}.\sin bt dt=\lim_{R\to\infty}\left[\frac{e^{-st}}{s^2+b^2}\left(s\sin bt+b\cos bt\right)\right]_0^R$$

$$=\lim_{R\to\infty}\left[\frac{b}{s^2+b^2}-\frac{e^{-sR}}{s^2+b^2}\left(s\sin bR+b\cos bR\right)\right]=-\frac{b}{s^2+b^2}\ \text{, } s>0$$

elde edilir.

Bu şekilde tanımlı her fonksiyonun Laplace dönüşümü bulunabilir. Ancak, her fonksiyon için bu hesaplama kolay olmayacağından Laplace dönüşüm ve ters dönüşüm tablosundan faydalanılabilinir.

3. MALZEME VE YÖNTEM

3.1. Sumudu Dönüşüm Metodu

Literatürde fizik, astronomi ve mühendislik gibi alanlarda yaygın olarak kullanılan birçok integral dönüşümü vardır. Bunlardan bazıları Fourier Dönüşümü, Laplace Dönüşümü, Hankel Dönüşümü ve Mellin Dönüşümü'dür.

Watugala, Sumudu Dönüşüm Metodu'nu literatüre kazandırmıştır. Bu metot adi ve kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünde ve kontrol mühendisliği problemlerinde oldukça yaygın olarak kullanılmaktadır.

Bir *f(t)* fonksiyonun Sumudu Dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlanmıştır (Belgacem ve Karaballi, 2005).

A bir fonksiyonlar kümesi olmak üzere,

$$A = \left\{ f(t) \mid \exists M, \tau_1, \tau_2 > 0, |\, f(t) | < Me^{|t|/\tau_j}, t \in (-1)^j \times [0,\infty) \right\}, \tag{3.1}$$

Sumudu Dönüşümü aşağıdaki şekilde tanımlanır,

$$G(u) = S[f(t)] = \int_0^\infty f(ut)e^{-t}dt, \quad u \in (-\tau_1, \tau_2). \tag{3.2}$$

Bu dönüşümün ters Sumudu Dönüşümü ;

$$S^{-1}[S[f(t)]] = f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} F\left(\frac{1}{u}\right)\frac{du}{u} \ , \tag{3.3}$$

şeklinde tanımlanır. Bu integralin alınması oldukça zor olduğu için, uygulamalarda daha önceden hazırlanmış dönüşüm tablolarından faydalanılabilir (Belgacem ve Karaballi, 2005).

Sumudu dönüşümünün diğer dönüşümlerden ayrılan bazı özellikleri vardır. Bunları şöyle sıralayabiliriz; Sumudu Transformu, kendisinin lineer olmasının yanında, dönüşüm altında lineer fonksiyonları korur ve birimler değişmez.

Kısmi diferansiyel denklemlerde Sumudu dönüşümü uygulanarak $F(x,u)$'yu içeren diferansiyel denklemler elde edilir. Elde edilen bu denklemlerde $F(x,u)$ bağımlı değişkeninin bulunması HPM, ADM, VIM gibi bilinen yarı analitik metotlarla elde edilir.

Şimdi Sumudu Dönüşümü'nün bazı özelliklerini inceleyelim.

Teorem 3.1.

$f(t)$, $g(t)$ fonksiyonlarının Sumudu Dönüşümü,

$$S[af(t)+bg(t)] = aS[f(t)]+bS[g(t)],\ a,b\in R, \tag{3.4}$$

şeklinde lineerlik özelliğine sahiptir (Belgacem ve Karaballi, 2005).

İspat:

$$\begin{aligned}
S\left[a.f(t)+b.g(t\right] &= \int_0^\infty e^{-t}\left[a.f(ut)+b.g(ut)\right]dt = \int_0^\infty \left[a.e^{-t}f(ut)+b.e^{-t}g(ut)\right]dt,\\
&= \int_0^\infty \left[a.e^{-t}f(ut)\right]dt + \int_0^\infty \left[b.e^{-t}g(ut)\right]dt,\\
&= a.\int_0^\infty \left[e^{-t}f(ut)\right]dt + b.\int_0^\infty \left[e^{-t}g(ut)\right]dt,\\
&= a.S\left[f(t)\right]+b.S\left[g(t)\right].
\end{aligned}$$

Teorem 3.2.

$U(x.,t)$ fonksiyonunun birinci mertebeden türevinin Sumudu dönüşümü;

$$S\left[\frac{\partial U(x,t)}{\partial t}\right]=\frac{1}{u}\left[S[U(x,t)]-U(x,0)\right] \tag{3.5}$$

özelliğine sahiptir (Belgacem ve Karaballi, 2005).

İspat:

$$S\left[\frac{\partial U(x,t)}{\partial t}\right]=\int_0^\infty \frac{1}{u}e^{\frac{-t}{u}}\frac{\partial U(x,t)}{\partial t}dt=\lim_{p\to\infty}\left[\int_0^p \frac{1}{u}e^{\frac{-t}{u}}\frac{\partial U(x,t)}{\partial t}dt\right]$$

$$=\lim_{p\to\infty}\left[\left(\frac{1}{u}e^{\frac{-t}{u}}U(x,t)\right)_*^p+\int_0^p \frac{1}{u^2}e^{\frac{-t}{u}}U(x,t)dt\right]$$

$$=\lim_{p\to\infty}\left[-\frac{1}{u}U(x,0)+\frac{1}{u}\left(\int_0^p \frac{1}{u}e^{\frac{-t}{u}}U(x,t)dt\right)\right]$$

$$=-\frac{1}{u}U(x,0)+\frac{1}{u}\left(\int_0^\infty \frac{1}{u}e^{-\frac{t}{u}}U(x,t)dt\right)$$

$$=-\frac{1}{u}\left[S[U(x,t)]-U[x,0]\right]$$

Teorem 3.3.

$U(x,t)$ fonksiyonunun ikinci mertebeden türevinin Sumudu dönüşümü,

$$S\left[\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2}\right]=\frac{1}{u^2}\left[S[U(x,t)]-U(x,0)-u\frac{\partial U(x,0)}{\partial t}\right] \tag{3.6}$$

özelliğine sahiptir (Belgacem ve Karaballi, 2005).

İspat:

$$S\left[\frac{\partial U(x,t)}{\partial t}\right]=\frac{1}{u}\left[S[U(x,t)]-U(x,0)\right]$$

olduğunu biliyoruz.

$$S\left[\frac{\partial U^2(x,t)}{\partial t^2}\right]=S\left[\frac{\partial g(x,t)}{\partial t}\right]$$

$$=\frac{1}{u}\left[S[g(x,t)]-g(x,0)\right]$$

$$=\frac{1}{u}\left[\int_0^\infty \frac{1}{u}e^{-\frac{t}{u}}g(x,t)dt-g(x,0)\right]$$

$$=\frac{1}{u}\left[\frac{1}{u}\left[S[U(x,t)]-U(x,0)\right]-\frac{\partial U(x,0)}{\partial t}\right]$$

$$=\frac{1}{u^2}\left[S[U(x,t)]-U(x,0)-u\frac{\partial U(x,0)}{\partial t}\right]$$

Teorem 3.4.

$U(x,t)$ fonksiyonunun türevlerinin Sumudu dönüşümü

$$S\left[\frac{\partial^3 U(x,t)}{\partial t^3}\right]=\frac{1}{u^3}\left[S[U(x,t)]-U(x,0)-uU'(x,0)-u^2U''(x,0)\right] \tag{3.7}$$

$$S\left[\frac{\partial^4 U(x,t)}{\partial t^4}\right]=\frac{1}{u^4}\left[S[U(x,t)]-U(x,0)-uU'(x,0)-u^2U''(x,0)-u^3U'''(x,0)\right] \tag{3.8}$$

$$\vdots$$

$$S\left[\frac{\partial^n U(x,t)}{\partial t^n}\right]=\frac{1}{u^n}\left[S[U(x,t)]-\sum_{k=0}^{n-1}u^k U(x,0)^{(k)}\right] \tag{3.9}$$

Şeklindedir (Belgacem ve Karaballi, 2005).

Şimdi de bazı özel fonksiyonların Sumudu Dönüşümlerini hesaplayalım.

Örnek 3.1. $f(t)=e^{at}$ üstel fonksiyonunun Sumudu Dönüşümünü (3.2) formülünü kullanarak hesaplayalım.

Çözüm:

$$S\left[e^{at}\right]=\int_0^\infty e^{-t}\cdot e^{a(ut)}dt=\lim_{p\to\infty}\left[\int_0^p e^{t(au-1)}dt\right]=\lim_{p\to\infty}\left[\frac{e^{t(au-1)}}{au-1}\right]_0^p,$$

$$=\lim_{p\to\infty}\left[\frac{1}{(au-1)\cdot e^{(1-au)t}}\right]_0^p,$$

$$=\frac{1}{1-au}.$$

Örnek 3.2. $f(t)=t$ fonksiyonunun Sumudu Dönüşümünü (3.2) formülünü kullanarak hesaplayalım.

Çözüm:

$$S[t]=\int_0^\infty ut.e^{-t}dt=\lim_{p\to\infty}\left[\int_0^p ut.e^{-t}dt\right]=u\lim_{p\to\infty}(-te^{-t}-e^{-t})|_0^p=u$$

Teorem 3.5. (Belgacem ve Karaballi, 2005) $G(u)$, $f(t)$ fonksiyonunun Sumudu Dönüşümü olsun. $tf(t)$ fonksiyonunun Sumudu dönüşümü,

$$S[tf(t)] = u\frac{d(uG(u))}{du}, \tag{3.10}$$

olur.

Teorem 3.6. (Belgacem ve Karaballi, 2005) $G(u)$, $f(t)$ fonksiyonunun Sumudu Dönüşümü, $G_k(u)$ da $G(u)$ fonksiyonunun u 'ya göre k. mertebeden türevi olsun. $t^n f(t)$ fonksiyonunun Sumudu dönüşümü,

$$S[t^n f(t)] = u^n \sum_{k=0}^{n} a_k^n u^k G_k(u), \tag{3.11}$$

olur. Burada,

$a_0^n = n!$, $a_n^n = 1$, $a_1^n = n!.n$, $a_{n-1}^n = n^2$ ve $k = 2,3,...,n-2$ için $a_k^n = a_{k-1}^{n-1} + (n+k)a_k^{n-1}$.

3.1.1. Sumudu dönüşümünün Laplace dönüşümü ile analoğu

Sumudu Dönüşümü,

$$L[f(t)] = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \tag{3.12}$$

olarak tanımlanan Laplace Dönüşümü'nün farklı bir versiyonudur. Bu iki dönüşüm ortak bir fonksiyon üzerinde karşılaştırılabilir. Örneğin t^n fonksiyonu üzerinde karşılaştırılırsa;

$$L[t^n](s) = n!s^{-(n+1)}, \tag{3.13}$$

$$S[t^n](u) = n!u^n \quad , \tag{3.14}$$

olur. Başlangıçta verilen $f(t)$ fonksiyonunun Laplace Dönüşümü $F(s)=L[f(t)]$, aşağıdaki şekilde Sumudu Dönüşümü $G(u)$'ya dönüştürülebilir (Belgacem ve Karaballi, 2005).

$$G(u)=\frac{1}{u}F\left(\frac{1}{u}\right), \tag{3.15}$$

ve onun tersi aşağıdaki şekildedir (Belgacem ve Karaballi, 2005):

$$F(s)=\frac{1}{s}G\left(\frac{1}{s}\right). \tag{3.16}$$

(3.15) ve (3.16) denklemleri LSD (Laplace – Sumudu Duality) olarak adlandırılır. LSD'yi en açık anlatan örneklerden biri, $H(t)$ (Heaviside Fonksiyonu) ve $\delta(t)$ (Dirac Fonksiyonu) fonksiyonlarının Sumudu ve Laplace Dönüşümleri arasındaki ilişkidir (Belgacem ve Karaballi, 2005).

$$S[H(t)]=L[\delta(t)]=1 \tag{3.17}$$

$$S[\delta(t)]=L[H(t)]=\frac{1}{u} \tag{3.18}$$

Başka bir örnek olarak, $\cos(t)$ ve $\sin(t)$ fonksiyonlarının Sumudu ve Laplace Dönüşümlerini verebiliriz.

$$S[\cos(t)]=L[\sin(t)]=\frac{1}{1+u^2}, \tag{3.19}$$

$$S[\sin(t)]=L[\cos(t)]=\frac{u}{1+u^2}. \tag{3.20}$$

Bu bölümü, Sumudu dönüşümünün bir uygulamasını vererek sonlandıralım.

3.1.2. Sumudu dönüşüm metodunun uygulaması

(Aydın, Kuryel, Gündüz ve Oturanç 2007) m kütleli bir cisim, yatay ve sürtünmesiz bir düzlem üzerinde ve x-ekseni doğrultusunda, O denge konumu etrafında bir salınım hareketi yapmakta olsun. Cisim denge konumundan x uzaklığında bulunduğu sırada cisme etki eden tek kuvvet Hook kanunu ile ifade edilen ve cismi her zaman O denge konumuna çağırmaya yönelik olan, $F=-kx$ kuvvetidir. Burada görülen $(-)$ işaretinin anlamı, cisim denge konumunun sağında olduğu zaman geri çağırma kuvveti sola doğru yönelmiş, denge konumunun solunda olduğu zaman da geri çağırma kuvveti sağa doğru yönelmiş demektir. Bu durumda cismin hareketi bir basit harmonik hareket olur. Bu hareketin denklemi:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx, \tag{3.21}$$

şeklinde ifade edilir. Başlangıç koşulları $x(0)=x_0$, $x^{'}(0)=0$ olan denklemi çözelim.

Denklemi düzenleyelim ve bildiğimiz sabit katsayılı ikinci mertebeden adi diferansiyel denklem formuna getirelim.

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}x=0 \text{ ve } \frac{k}{m}=\omega_0^2, \tag{3.22}$$

eşitliğini kullanarak denklemi yeniden yazalım.

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega_0^2x=0 \tag{3.23}$$

Şimdi (3.23) denklemine Sumudu dönüşüm metodunu uygulayalım.

$$S\left[\frac{d^2x}{dt^2}\right]+S\left[\omega_0^2 x\right]=0 \tag{3.24}$$

Sumudu Dönüşümü'nün özelliklerinden faydalanarak,

$$\frac{1}{u^2}\left[S\left[x(t)\right]-x(0)-ux^{'}(0)\right]+\omega_0^2 S\left[x(t)\right]=0 \tag{3.25}$$

eşitliğini elde ederiz. Verilen başlangıç koşullarını (3.25) denkleminde yerine koyup uygun işlemlerle $S[x(t)]$'yi çekersek,

$$S[x(t)]=\frac{x_0}{1+\omega_0^2 u^2}, \tag{3.26}$$

denklemini elde ederiz. Amacımız çözüm fonksiyonu olan $x(t)$'yi bulmak olduğundan (3.26) denklemine ters Sumudu Dönüşümü'nü uygulayarak ve dönüşüm tablosundan faydalanarak (Belgacem, F. B. M. ve Karaballi, A. A., 2006)

$$x(t)=x_0\cos(\omega_0 t),$$

elde edilir.

3.2. Homotopi pertürbasyon metodu

Bu bölümde, non-lineer diferansiyel denklemlere kolaylıkla uygulanabilen ve tam ya da çok yakın sonuçlar veren Homotopi Pertürbasyon Metodu tanıtılacaktır.

Metodu incelemek için aşağıdaki lineer olmayan diferansiyel denklemi göz önüne alalım (Mishra,2012)

$$A(u)-f(r)=0,\; r\in\Omega \tag{3.27}$$

(3.27) denklemi için sınır koşulu,

$$B\left(u,\frac{\partial u}{\partial n}\right)=0,\; r\in\Gamma \tag{3.28}$$

şeklinde verilsin.

Burada A genel diferansiyel operatörü, B sınır operatörü, $f(r)$ bilinen analitik fonksiyon ve Γ, Ω'ya bağlı bir sınırdır. A diferansiyel operatörü, L (lineer operatör) ve N (lineer olmayan operatör) gibi iki parçaya ayrılabilir. (3.27) denklemini düzenleyip aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$L(u)+N(u)-f(r)=0 \tag{3.29}$$

Homotopi tekniği ile bir homotopi oluşturulur.

$$v(r,p):\Omega\times[0,1]\to R \tag{3.30}$$

olmak üzere

$$H(v,p)=(1-p)[L(v)-L(u_0)]+p[A(v)-f(r)]=0,\; r\in\Omega\,. \tag{3.31}$$

Burada $p\in[0,1]$ bir parametre ve u_0 (3.27) denkleminin başlangıç koşuludur.
Bu durumda,

$$H(v,p)=L(v)-L(u_0)-pL(v)+pL(u_0)+pA(v)-pf(r)=0 \tag{3.32}$$

$$H(v,p)=L(v)-L(u_0)-p[L(v)-L(u_0)-A(v)+f(r)]=0 \tag{3.33}$$

$$H(v,p)=L(v)-L(u_0)-pL(u_0)-p[L(v)-A(v)+f(r)]=0 \tag{3.34}$$

(3.27) den $A(u)-f(r)=0$ olduğunu biliyoruz.

$$H(v,p)=L(v)-L(u_0)+pL(u_0)-p[L(v)]=0 \tag{3.35}$$

(3.27) den $L(u)+N(u)-f(r)=0$ ise

$$L(u) = -N(u) + f(r) \tag{3.36}$$

denklemi bulunur.

Bulunan (3.36) denkleminin (3.35) denkleminde yerine yazılmasıyla,

$$L(v) - L(u_0) + pL(u_0) - p[-N(v) + f(r)] = 0 \tag{3.37}$$

elde edilir.

Böylece (3.31) denklemi, $p \in [0,1]$ ve u_0, (3.27) denkleminin başlangıç koşulu olmak üzere,

$$H(v, p) = L(v) - L(u_0) + pL(u_0) + p[N(v) - f(r)] = 0 \tag{3.38}$$

şeklinde yeniden yazılır. (3.35) ve (3.38) denklemlerinden,

$$H(v,0) = L(v) - L(u_0) = 0 \tag{3.39}$$

$$H(v,1) = A(v) - f(r) = 0 \tag{3.40}$$

elde edilir. Burada $p = 0$ olduğunda (3.18) denklemi lineer hale gelir, $p = 1$ olduğunda lineer olmayan bir denklem olur. Bu sebeple p 'nin 0 'dan 1'e değişim işlemi $L(v) - L(u_0) = 0$ denklemini $A(v) - f(r) = 0$ denklemine dönüştürür. $L(v) - L(u_0) = 0$ problemi 0 'dan 1'e monoton olarak artan p parametresi sürekli olarak $A(v) - f(r) = 0$ problemine deforme oluyorsa bu topolojide *deforme* olarak adlandırılır. $L(v) - L(u_0) = 0$ ve $A(v) - f(r) = 0$ ifadelerine ise *homotopiktirler* denir.

Homotopi Pertürbasyon Metodu gereğince, p oldukça küçük bir parametre olarak seçilir ve (3.22) denkleminin çözümü aşağıdaki gibi p 'de kuvvet serisi şeklide yazılabilir:

$$v = v_0 + pv_1 + p^2 v_2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} p^n v_n \tag{3.41}$$

Karşılıklı olarak p ’nin kuvvetlerinin katsayılarını eşitlersek:

$$p^0 : f(v_0) - f(x_0) = 0 \tag{3.42}$$

$$p^1 : f^{'}(v_0)v_1 - f(x_0) = 0, \tag{3.43}$$

$$p^2 : f^{'}(v_0)v_2 + \frac{1}{2!} f^{''}(v_0)v_1^2 = 0, \tag{3.44}$$

$$p^3 : f^{'}(v_0)v_3 + \frac{1}{2!} f^{''}(v_0)2v_1 v_2 + \frac{1}{3!} f^{'''}(v_0)v_1^3 = 0, \tag{3.45}$$

$$\vdots$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemlerin $v_1, v_2, v_3, \ldots$ için çözülmesiyle:

$$v_1 = -\frac{f(x_0)}{f^{'}(v_0)}, \tag{3.46}$$

$$v_2 = -\frac{f^{''}(v_0)v_1^2}{2!\, f^{'}(v_0)} = -\frac{f^{''}(v_0)}{2!\, f^{'}(v_0)} \left(\frac{f(v_0)}{f^{'}(v_0)} \right)^2, \tag{3.47}$$

$$\begin{aligned} v_3 &= -\frac{f^{''}(v_0)v_1 v_2}{f^{'}(v_0)} - \frac{f^{'''}(v_0)v_1^3}{3!\, f^{'}(v_0)} \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{f^{''}(v_0)}{f^{'}(v_0)} \right)^2 \left(\frac{f(v_0)}{f^{'}(v_0)} \right)^3 + \frac{f^{'''}(v_0)}{6 f^{'}(v_0)} \left(\frac{f(v_0)}{f^{'}(v_0)} \right)^3, \end{aligned} \tag{3.48}$$

$$\vdots$$

(3.41) serisinin bileşenleri elde edilir. Bu bileşenlerde $p=1$ alınarak tekrar yazılırsa (3.27) denkleminin çözümü,

$$u=\lim_{p\to 1}\left(v_0+pv_1+p^2v_2+p^3v_3+\cdots\right),$$

$$=v_0+v_1+v_2+v_3+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}v_n\ , \tag{3.49}$$

şeklinde elde edilir.

3.2.1. He polinomları

Homotopi Pertürbasyon Teorisi gereğince, (3.29) nolu denklemdeki nonlineer terimler aşağıdaki formda yazılır.

$$N(U)=\sum_{i=0}^{\infty}p^iH_i=H_o+pH_1+p^2H_2+\cdots \tag{3.50}$$

Yukarıdaki denklemdeki H_n'ler *He polinomları* olarak adlandırılır ve aşağıdaki formül ile hesaplanır (Singh, Kumar ve Sushila, 2011).

$$H_n(U_0,U_1,\ldots,U_n)=\frac{1}{n!}\frac{\partial^n}{\partial p^n}\left[N\left(\sum_{i=0}^{n}p^iU_i\right)\right]_{p=0}, \qquad n=0,1,2,\ldots \tag{3.51}$$

Nonlineer terimlerin Sumudu Dönüşümü hesaplanırken He polinomlarından faydalanılır. Örneğin, $S[UU_x]=S\left[\sum_{n=0}^{\infty}p^nH_n(U)\right]$ olarak hesaplanır. $H_n(U)$ nun birkaç bileşenini yazalım:

$$H_0(U)=U_0U_{0x}, \tag{3.52}$$

$$H_1(U)=U_0U_{1x}+U_1U_{0x}, \tag{3.53}$$

$$H_2(U) = U_0 U_{2x} + U_1 U_{1x} + U_2 U_{ox} \ , \tag{3.54}$$

$$H_3(U) = U_0 U_{3x} + U_1 U_{2x} + U_2 U_{1x} + U_3 U_{0x} , \tag{3.55}$$

$$\vdots$$

Uygulama bölümünde He polinomları kullanılacaktır.

3.3. Homotopi Pertürbasyon Sumudu Dönüşüm Metodu

Bu metot ile lineer veya non-lineer, homojen veya non-homojen kısmi diferansiyel denklemlerin analitik, yaklaşık çözümleri elde edilebilir.

Metodun mantığını daha iyi anlayabilmek için en genel non-lineer non-homojen kısmi diferansiyel denklemi başlangıç koşulları ile ele alalım (Singh, Kumar ve Sushila, 2011).

$$DU(x,t) + RU(x,t) + NU(x,t) = g(x,t) \tag{3.56}$$

$$U(x,0) = h(x), \quad U_t(x,0) = f(x) \tag{3.57}$$

D ikinci mertebeden lineer diferansiyel operatör $\left(D = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right)$, R mertebesi D'den küçük lineer diferansiyel operatör, N, genel non-lineer operatör, $g(x,t)$ ise kaynak terimdir.

(3.56) denkleminin iki taraflı Sumudu dönüşümünü alalım.

$$S[DU(x,t)] + S[RU(x,t)] + S[NU(x,t)] = S[g(x,t)] \tag{3.58}$$

Sumudu dönüşümünün özelliklerinden faydalanarak,

$$\frac{S[U(x,t)]-U(x,0)}{u^2}-\frac{U_t(x,0)}{u}+S[RU(x,t)+NU(x,t)]=S[g(x,t)] \tag{3.59}$$

$$\frac{S[U(x,t)]-h(x)}{u^2}-\frac{f(x)}{u}+S[RU(x,t)+NU(x,t)]=S[g(x,t)] \tag{3.60}$$

$$S[U(x,t)]-h(x)-uf(x)+u^2S[RU(x,t)+NU(x,t)]=u^2S[g(x,t)] \tag{3.61}$$

$$S[U(x,t)]=h(x)+uf(x)-u^2S[RU(x,t)+NU(x,t)]+u^2S[g(x,t)] \tag{3.62}$$

$U(x,t)$ yi elde etmek için her iki tarafa da ters Sumudu dönüşümünü uygulayalım.

İşlem kolaylığı için $S^{-1}[h(x)+uf(x)+u^2S[g(x,t)]]$ terimine $G(x,t)$ diyelim.

$$U(x,t)=G(x,t)-S^{-1}[u^2S[RU(x,t)+NU(x,t)]] \tag{3.63}$$

Şimdi (3.63) denkleminin her iki tarafına Homotopi Pertürbasyon Metodu'nu uygulayalım. Her terimi,

$$U(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}p^nU_n(x,t)\ , \tag{3.64}$$

$$NU(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}p^nH_n(U) \tag{3.65}$$

olacak şekilde bileşenlerine ayıralım.

(3.64) ve (3.65) eşitliklerini (3.63) denkleminde yerine yazarsak,

$$\sum_{n=0}^{\infty}p^nU_n(x,t)=G(x,t)-p\left(S^{-1}\left[u^2S\left[R\sum_{n=0}^{\infty}p^nU_n(x,t)+\sum_{n=0}^{\infty}p^nH_n(U)\right]\right]\right) \tag{3.66}$$

eşitliğini elde ederiz.

Bu denklemin oluşumunda, Sumudu dönüşümü, Homotopi pertürbasyon metodu ve He polinomları kullanıldı. Aynı dereceli p nin katsayıları birbirine eşitlenecek olursa;

$$p^0 : U_0(x,t) = G(x,t) \tag{3.67}$$

$$p^1 : U_1(x,t) = -S^{-1}\left[u^2 S\left[RU_0(x,t) + H_0(U)\right]\right], \tag{3.68}$$

$$p^2 : U_2(x,t) = -S^{-1}\left[u^2 S\left[RU_1(x,t) + H_1(U)\right]\right], \tag{3.69}$$

$$p^3 : U_3(x,t) = -S^{-1}\left[u^2 S\left[RU_2(x,t) + H_2(U)\right]\right], \tag{3.70}$$

$$\vdots$$

elde edilir.

Çözüm fonksiyonunun $U(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n U_n(x,t)$ olduğunu biliyoruz. En doğru sonuç için $U(x,t) = \lim_{p \to 1} U(x,t)$ alarak, homotopi pertürbasyon teorisine göre $U(x,t)$ yi

$$U(x,t) = U_0(x,t) + U_1(x,t) + U_2(x,t) + U_3(x,t) + \cdots \tag{3.71}$$

şeklinde elde etmiş oluruz.

4. BULGULAR VE İRDELEME

Bu bölümde, çalışılan homotopi pertürbasyon sumudu dönüşüm metodunun verdiği sonuçları görmek açısından uygulaması yapıldı. Sırasıyla homojen olmayan non-lineer kısmi diferansiyel denklemi, 2 boyutlu Poisson sınır değer problemi, homojen olmayan lineer kısmi diferansiyel denklem ve lineer, nonlineer Schrödinger denklemleri bu metodla çözüldü. Tam çözümleriyle kıyaslandı. Elde edilen sonuçlar grafik ya da veri tablosu ile gösterildi.

4.1. Homotopi Pertürbasyon Sumudu Dönüşüm Metodunun Uygulamaları

4.1.1. Homojen olmayan non-lineer kısmi diferansiyel denklem

Örnek 4.1. Homojen olmayan, nonlineer kısmi diferansiyel denklem aşağıdaki şekilde,

$$\frac{\partial U}{\partial t} = x^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2, \tag{4.1}$$

$$U(x,0) = 0 \tag{4.2}$$

başlangıç koşulu ile verilmiş olsun (Mishra, 2012).

Çözüm: Sumudu dönüşümü gereğince,

$$S\left[U_t\left(x,t\right)\right]=S\left[x^2\right]-\frac{1}{4}S\left[\left(U_x\left(x,t\right)\right)^2\right], \tag{4.3}$$

$$\frac{S\left[U\left(x,t\right)-U\left(x,0\right)\right]}{u}=x^2-\frac{1}{4}S\left[\left(U_x\left(x,t\right)\right)^2\right],$$

$$S\left[U\left(x,t\right)\right]=ux^2-\frac{1}{4}uS\left[\left(U_x\left(x,t\right)\right)^2\right]$$

denklemi elde edilir. Her iki tarafa ters Sumudu dönüşümü uygulayalım.

$$U\left(x,t\right)=tx^2-\frac{1}{4}S^{-1}\left[uS\left[\left(U_x\left(x,t\right)\right)^2\right]\right] \tag{4.5}$$

Denkleme Homotopi Petürbasyon Metodunu uygularsak,

$$\sum_{n=0}^{\infty}p^nU_n\left(x,t\right)=tx^2-\frac{1}{4}pS^{-1}\left[uS\left[\sum_{n=0}^{\infty}p^nH_n\left(U\left(x,t\right)\right)\right]\right]$$

He polinomlarının ilk dört terimini belirtelim:

$$H_0\left(U\left(x,t\right)\right)=\left(U_{0x}\left(x,t\right)\right)^2$$

$$H_1\left(U\left(x,t\right)\right)=2U_{0x}\left(x,t\right)U_{1x}\left(x,t\right)$$

$$H_2\left(U\left(x,t\right)\right)=2U_{0x}\left(x,t\right)U_{2x}\left(x,t\right)+\left(U_{1x}\left(x,t\right)\right)^2$$

$$H_3\left(U\left(x,t\right)\right)=2\left(U_{0x}\left(x,t\right)U_{3x}\left(x,t\right)+U_{1x}\left(x,t\right)U_{2x}\left(x,t\right)\right)$$

p nin aynı dereceden kuvvetlerinin katsayılarını eşitleyelim:

$$p^0 : U_0\left(x,t\right) = x^2 t$$

$$p^1 : U_1\left(x,t\right) = -\frac{1}{4} S^{-1}\left[uS\left[\left(U_{0x}\left(x,t\right)\right)^2\right]\right]$$

$$p^2 : U_2\left(x,t\right) = -\frac{1}{4} S^{-1}\left[uS\left[2U_{0x}\left(x,t\right)U_{1x}\left(x,t\right)\right]\right]$$

$$p^3 : U_3\left(x,t\right) = -\frac{1}{4} S^{-1}\left[uS\left[2U_{0x}\left(x,t\right)U_{2x}\left(x,t\right) + \left(U_{1x}\left(x,t\right)\right)^2\right]\right]$$

$U_1(x,t)$ yi hesaplayalım.

$$U_1(x,t) = -\frac{1}{4} S^{-1}\left[uS\left[\left(U_{0x}\left(x,t\right)\right)^2\right]\right]$$

olduğunu biliyoruz.

$$U_0(x,t) = x^2 t$$

$$U_{0x}(x,t) = 2xt$$

$$(U_{0x}(x,t))^2 = 4x^2t^2$$

$$S\left(4x^2t^2\right) = S\left(8x^2 \frac{t^2}{2!}\right) = 8x^2u^2$$

$$uS\left(4x^2t^2\right) = 8x^2u^3$$

$$S^{-1}uS\left(4x^2t^2\right) = 8x^2 \frac{t^3}{3!}$$

$$U_1(x,t) = -\frac{1}{4} S^{-1}\left[uS\left[\left(U_{0x}\left(x,t\right)\right)^2\right]\right] = -\frac{x^2t^3}{3} \tag{4.5}$$

$U_2(x,t)$ yi hesaplayalım.

$$U_2(x,t) = -\frac{1}{4} S^{-1}\left[uS\left[2U_{ox}\left(x,t\right)U_{1x}\left(x,t\right)\right]\right]$$

olduğunu biliyoruz.

$$U_{0x}(x,t) = 2xt$$

$$U_{1x}(x,t) = -\frac{2}{3} xt^3$$

$$2U_{0x}(x,t)U_{1x}(x,t) = -\frac{8}{3} x^2t^4$$

$$S\left(-\frac{8}{3}x^2t^4\right) = S\left(-\frac{8^2\,x^2t^4}{4!}\right) = -64x^2u^4$$

$$uS\left(-\frac{8^2\,x^2t^4}{4!}\right) = -64x^2u^5$$

$$S^{-1}uS\left(-\frac{8^2\,x^2t^4}{4!}\right) = -64x^2\,\frac{t^5}{5!}$$

$$U_2(x,t) = -\frac{1}{4}64x^2\,\frac{t^5}{5!} = \frac{2x^2t^5}{15} \tag{4.6}$$

$U_3(x,t)$ yi hesaplayalım.

$$U_3(x,t) = -\frac{1}{4} S^{-1}\left[uS\left[2U_{ox}\left(x,t\right)U_{2x}\left(x,t\right) + \left(U_{1x}\left(x,t\right)\right)^2 \right]\right]$$

olduğunu biliyoruz.

$$U_{0x}\left(x,t\right) = 2xt$$

$$U_{2x}\left(x,t\right) = \frac{4}{15}xt^5$$

$$(U_{1x}\left(x,t\right))^2 = \frac{4}{9}x^2t^6$$

$$2U_{ox}\left(x,t\right)U_{2x}\left(x,t\right) + \left(U_{1x}\left(x,t\right)\right)^2 = \frac{68}{45}x^2t^6$$

$$S\left[\frac{68}{45}x^2t^6\right] = 68.16.x^2u^6$$

$$uS\left[\frac{68}{45}x^2t^6\right] = 68.16.x^2u^7$$

$$S^{-1}uS\left[\frac{68}{45}x^2t^6\right] = \frac{17.4.x^2t^7}{7.9.5}$$

$$U_3(x,t) = -\frac{1}{4}\left[\frac{17.4.x^2t^7}{7.9.5}\right] = -\frac{17}{315}x^2t^7 \qquad (4.7)$$

$U_4(x,t)$ yi hesaplayalım.

$$U_4(x,t) = -\frac{1}{4} S^{-1}\left[uS\left[2U_{ox}\left(x,t\right)U_{3x}\left(x,t\right) + 2U_{1x}\left(x,t\right)U_{2x}\left(x,t\right) \right]\right]$$

olduğunu biliyoruz.

$$U_{ox}\left(x,t\right)=2xt$$

$$U_{3x}\left(x,t\right)=-\frac{34xt^{7}}{315}$$

$$U_{1x}\left(x,t\right)=-\frac{2xt^{3}}{3}$$

$$U_{2x}\left(x,t\right)=\frac{4xt^{5}}{15}$$

$$2U_{ox}\left(x,t\right)U_{3x}\left(x,t\right)+2U_{1x}\left(x,t\right)U_{2x}\left(x,t\right)=-\frac{192x^{2}t^{8}}{315}$$

$$2U_{ox}\left(x,t\right)U_{3x}\left(x,t\right)+2U_{1x}\left(x,t\right)U_{2x}\left(x,t\right)=-\frac{192x^{2}t^{8}}{315}$$

$$S\left[-\frac{192x^{2}t^{8}}{315}\right]=-65536x^{2}u^{8}$$

$$uS\left[-\frac{192x^{2}t^{8}}{315}\right]=-65536x^{2}u^{9}$$

$$S^{-1}uS\left[-\frac{192x^{2}t^{8}}{315}\right]=-\frac{64x^{2}t^{9}}{945}$$

$$U_{4}\left(x,t\right)=-\frac{1}{4}S^{-1}uS\left[-\frac{192x^{2}t^{8}}{315}\right]=\frac{16x^{2}t^{9}}{945} \qquad (4.8)$$

elde edilir.

Çözüm fonksiyonu olan $U(x,t)$ nin aşağıdaki şekilde olduğunu biliyoruz.

$$U(x,t) = \lim_{p\to 1} U_0(x,t) + pU_1(x,t) + p^2U_2(x,t) + p^3U_3(x,t) + \cdots \qquad (4.9)$$

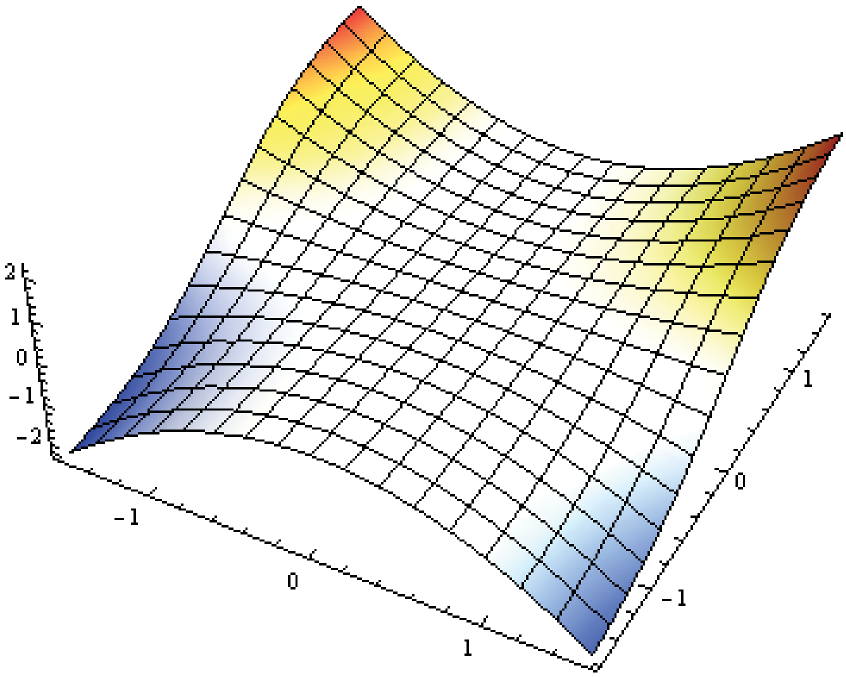
Buna göre, $N = 4$ için

$$U(x,t) = x^2t - \frac{x^2t^3}{3} + \frac{2x^2t^5}{15} - \frac{17x^2t^7}{315} + \frac{16x^2t^9}{945} \qquad (4.10)$$

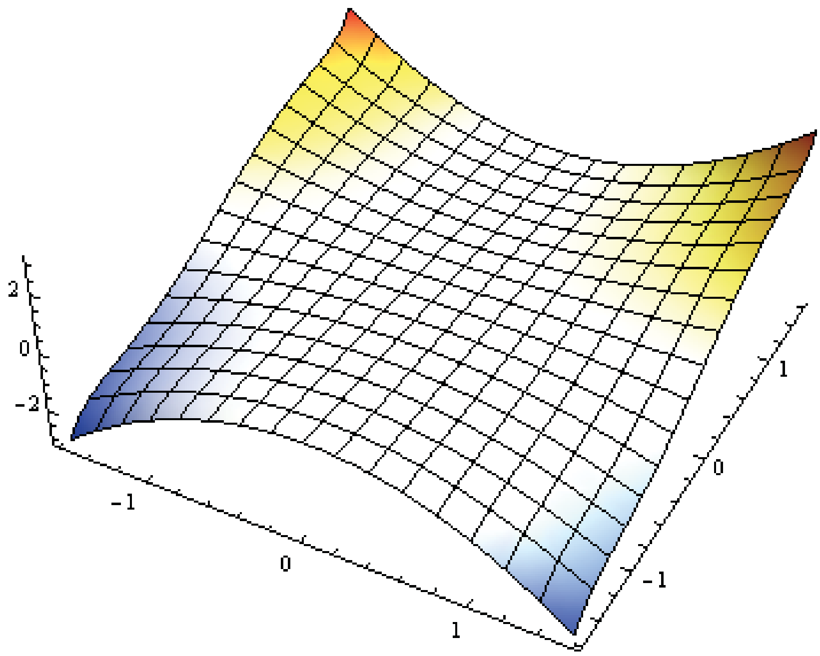
olarak bulunur.

Bu örnekte, homojen olmayan, non-lineer kısmi diferansiyel denklemi homotopi pertürbasyon sumudu dönüşüm metodu ile çözdük.

(4.1) denkleminin tam çözümü $U(x,t) = x^2 \tanh t$ dir. $-\frac{\pi}{2} < x,t < \frac{\pi}{2}$ için tam çözümün ve (4.17) de elde ettiğimiz yaklaşık çözümün grafiğini Mathematica'da çizdirerek aşağıdaki üç boyutlu grafiği elde ettik. Ağ yapılı grafik yaklaşık çözümü, düz yapılı grafik ise tam çözümü belirtir.



Şekil 4.1. (4.1) denkleminin tam çözümünün grafiği



Şekil 4.2. (4.1) denkleminin N=4 için yaklaşık çözümünün grafiği

Çizelge 4.1. (4.1) denkleminin çözümlerinin karşılaştırılması

x	t	Tam Çözüm	$N=2$	$N=3$	$N=4$
0.25	0.25	0.0153074164	0.0153076171	0.0153074113	0.0153074153
	0.5	0.0288823223	0.0289062500	0.0288798983	0.0288819651
	1	0.4759963475	0.0500000000	0.4662698413	0.0476851851
0.5	0.25	0.0612296656	0.0612304687	0.0612296452	0.0612296614
	0.5	0.1155292893	0.1156250000	0.1155195933	0.1155278605
	1	0.1903985390	0.1864956374	0.1865079365	0.1907407407

4.1.2. 2 boyutlu poisson sınır değer problemi

Örnek 4.2. İki boyutlu Poisson sınır değer problemi aşağıdaki şekilde,

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}=\sin(\pi t)\sin(\pi x); \tag{4.11}$$

$$U(x,0)=0\,,\quad 0\le t,x\le 1; \tag{4.12}$$

$$U_t(x,0)=-\frac{\sin(\pi x)}{2\pi}, \tag{4.13}$$

başlangıç koşulları ile verilmiş olsun(Atangana ve Kılıçman, 2013).

Çözüm:

(4.18) denklemine Sumudu dönüşümü uygularsak,

$$S\left[U(x,t)\right]+u\frac{\sin(\pi x)}{2\pi}+u^2S\left[U_{xx}(x,t)\right]=\frac{\sin(\pi x)}{\pi}\left(u-\frac{u}{1+\pi^2u^2}\right) \tag{4.14}$$

denklemini elde ederiz. $U(x,t)$ i elde etmek için, (4.53) denkleminin her iki tarafına ters Sumudu dönüşümünü uygulayalım.

$$U(x,t) = -t\frac{\sin(\pi x)}{2\pi} - S^{-1}\left[u^2 S\left[U_{xx}(x,t)\right]\right] + \frac{\sin(\pi x)}{\pi}\left(t - \frac{\sin(\pi t)}{\pi}\right) \tag{4.15}$$

Elde edilen denkleme homotopi pertürbasyon metodunu uygulayalım.

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} p^n U_n(x,t) \\
&= -\frac{t\sin(\pi x)}{2\pi} - pS^{-1}\left[u^2 S\left[\left(\sum_{n=0}^{\infty} p^n U_n(x,t)\right)_{xx}\right]\right] \\
&+ \frac{\sin(\pi x)}{\pi}\left(t - \frac{\sin(\pi t)}{\pi}\right)
\end{aligned}$$

Homotopi pertürbaston teorisi gereğince ilk dört terimini açalım.

$$\begin{aligned}
&U_0(x,t) + pU_1(x,t) + p^2U_2(x,t) + p^3U_3(x,t) + p^4U_4(x,t) = \\
&-t\frac{\sin(\pi x)}{2\pi} - pS^{-1}\left[u^2 S\left[\left(U_0(x,t)\right)_{xx} + \left(U_1(x,t)\right)_{xx} + \left(U_2(x,t)\right)_{xx}\right]\right] \\
&+ \frac{\sin(\pi x)}{\pi}\left(t - \frac{\sin(\pi t)}{\pi}\right)
\end{aligned}$$

p ’nin kuvvetlerine göre karşılık gelen terimleri birbirine eşitleyelim ve $U_i(x,t)$ $i = 0,1,2,3,4,...$ fonksiyonlarını bulalım.

$$U_0(x,t) = -t\frac{\sin(\pi x)}{2\pi} + \frac{\sin(\pi x)}{\pi}\left(t - \frac{\sin(\pi t)}{\pi}\right)$$

$U_1(x,t)$ fonksiyonunu bulalım.

$$(U_0(x,t))_x = \pi\frac{\cos(\pi x)}{\pi}\left(\frac{t}{2} - \frac{\sin(\pi t)}{\pi}\right)$$

$$(U_0(x,t))_{xx} = -\pi \sin(\pi x)\left(\frac{t}{2} - \frac{\sin(\pi t)}{\pi}\right)$$

$$S\left[(U_0(x,t))_{xx}\right] = -\pi \sin(\pi x)\left(\frac{u}{2} - \frac{u}{1+\pi^2 u^2}\right)$$

$$u^2 S\left[(U_0(x,t))_{xx}\right] = -\pi \sin(\pi x)\left(\frac{u^3}{2} - \frac{u^3}{1+\pi^2 u^2}\right)$$

$$S^{-1}\left[u^2 S\left[(U_0(x,t))_{xx}\right]\right] = -\pi \sin(\pi x)\left(\frac{t^3}{2.3!} - \frac{1}{\pi^2}\left(t - \frac{\sin(\pi t)}{\pi}\right)\right)$$

$$U_1(x,t) = \pi \sin(\pi x)\left(\frac{t^3}{2.3!} - \frac{1}{\pi^2}\left(t - \frac{\sin(\pi t)}{\pi}\right)\right) \tag{4.16}$$

$U_2(x,t)$ fonksiyonunu bulalım.

$$(U_1(x,t))_x = \pi^2 \cos(\pi x)\left(\frac{t^3}{2.3!} - \frac{1}{\pi^2}\left(t - \frac{\sin(\pi t)}{\pi}\right)\right)$$

$$(U_1(x,t))_{xx} = -\pi^3 \sin(\pi x)\left(\frac{t^3}{2.3!} - \frac{1}{\pi^2}\left(t - \frac{\sin(\pi t)}{\pi}\right)\right)$$

$$S\left[(U_1(x,t))_{xx}\right] = -\pi^3 \sin(\pi x)\left(\frac{u^3}{2} - \frac{1}{\pi^2}\left(u - \frac{u}{1+\pi^2 u^2}\right)\right)$$

$$u^2 S\left[(U_1(x,t))_{xx}\right] = -\pi^3 \sin(\pi x)\left(\frac{u^5}{2} - \frac{1}{\pi^2}\left(u^3 - \frac{u^3}{1+\pi^2 u^2}\right)\right)$$

$$S^{-1}\left[u^2 S\left[(U_1(x,t))_{xx}\right]\right] = -\pi^3 \sin(\pi x)\left(\frac{t^5}{2.5!} - \frac{1}{\pi^2}\left(\frac{t^3}{3!} - \frac{1}{\pi^2}\left(t - \frac{\sin(\pi t)}{\pi}\right)\right)\right)$$

$$U_2(x,t)=\pi^3\sin(\pi x)\left(\frac{t^5}{2.5!}-\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{t^3}{3!}-\frac{1}{\pi^2}\left(t-\frac{\sin(\pi t)}{\pi}\right)\right)\right) \tag{4.17}$$

$U_3(x,t)$ fonksiyonunu bulalım.

$$(U_2(x,t))_x=\pi^4\cos(\pi x)\left(\frac{t^5}{2.5!}-\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{t^3}{3!}-\frac{1}{\pi^2}\left(t-\frac{\sin(\pi t)}{\pi}\right)\right)\right)$$

$$(U_2(x,t))_{xx}=-\pi^5\sin(\pi x)\left(\frac{t^5}{2.5!}-\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{t^3}{3!}-\frac{1}{\pi^2}\left(t-\frac{\sin(\pi t)}{\pi}\right)\right)\right)$$

$$S\left[(U_2(x,t))_{xx}\right]=-\pi^5\sin(\pi x)\left(\frac{u^5}{2}-\frac{u^3}{\pi^2}+\frac{1}{\pi^4}\left(u-\frac{u}{1+\pi^2u^2}\right)\right)$$

$$u^2S\left[(U_2(x,t))_{xx}\right]=-\pi^5\sin(\pi x)\left(\frac{u^7}{2}-\frac{u^5}{\pi^2}+\frac{1}{\pi^4}\left(u^3-\frac{u^3}{1+\pi^2u^2}\right)\right)$$

$$S^{-1}\left[S\left[(U_2(x,t))_{xx}\right]\right]$$
$$=-\pi^5\sin(\pi x)\left(\frac{t^7}{2.7!}-\frac{t^5}{5!.\pi^2}+\frac{1}{\pi^4}\left(\frac{t^3}{3!}-\frac{1}{\pi^2}\left(t-\frac{\sin(\pi t)}{\pi}\right)\right)\right)$$

$$U_3(x,t)=\pi^5\sin(\pi x)\left(\frac{t^7}{2.7!}-\frac{t^5}{5!.\pi^2}+\frac{1}{\pi^4}\left(\frac{t^3}{3!}-\frac{1}{\pi^2}\left(t-\frac{\sin(\pi t)}{\pi}\right)\right)\right) \tag{4.18}$$

Son olarak $U_4(x,t)$ fonksiyonunu bulalım.

$$(U_3(x,t))_x=\pi^6\cos(\pi x)\left(\frac{t^7}{2.7!}-\frac{t^5}{5!.\pi^2}+\frac{1}{\pi^4}\left(\frac{t^3}{3!}-\frac{1}{\pi^2}\left(t-\frac{\sin(\pi t)}{\pi}\right)\right)\right)$$

$$\left(U_3(x,t)\right)_{xx} = -\pi^7 \cos(\pi x)\left(\frac{t^7}{2.7!} - \frac{t^5}{5!.\pi^2} + \frac{1}{\pi^4}\left(\frac{t^3}{3!} - \frac{1}{\pi^2}\left(t - \frac{\sin(\pi t)}{\pi}\right)\right)\right)$$

$$S\left[\left(U_3(x,t)\right)_{xx}\right] = -\pi^7 \cos(\pi x)\left(\frac{u^7}{2} - \frac{u^5}{\pi^2} + \frac{1}{\pi^4}\left(u^3 - \frac{1}{\pi^2}\left(u - \frac{u}{1+\pi^2 u^2}\right)\right)\right)$$

$$u^2 S\left[\left(U_3(x,t)\right)_{xx}\right] = -\pi^7 \cos(\pi x)\left(\frac{u^9}{2} - \frac{u^7}{\pi^2} + \frac{1}{\pi^4}\left(u^5 - \frac{1}{\pi^2}\left(u^3 - \frac{u^3}{1+\pi^2 u^2}\right)\right)\right)$$

$$S^{-1}\left[u^2 S\left[\left(U_3(x,t)\right)_{xx}\right]\right]$$
$$= -\pi^7 \cos(\pi x)\left(\frac{t^9}{2.9!} - \frac{t^7}{7!\pi^2} + \frac{1}{\pi^4}\left(\frac{t^5}{5!} - \frac{1}{\pi^2}\left(\frac{t^3}{3!} - \frac{t}{\pi^2} + \frac{\sin(\pi t)}{\pi}\right)\right)\right)$$

$$U_4(x,t) = \pi^7 \cos(\pi x)\left(\frac{t^9}{2.9!} - \frac{t^7}{7!\pi^2} + \frac{1}{\pi^4}\left(\frac{t^5}{5!} - \frac{1}{\pi^2}\left(\frac{t^3}{3!} - \frac{t}{\pi^2} + \frac{\sin(\pi t)}{\pi}\right)\right)\right) \quad (4.19)$$

denklemlerini elde ederiz.

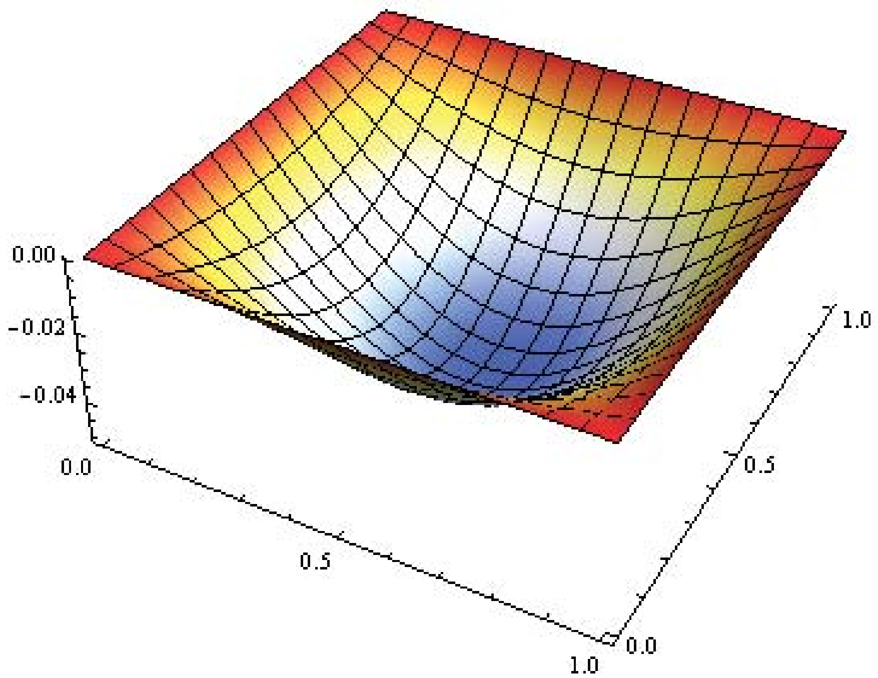
Çözüm fonksiyonu olan $U(x,t)$ nin $N = 4$ için aşağıdaki şekilde olduğunu biliyoruz.

$$U(x,t) = \lim_{p \to 1} U_0(x,t) + pU_1(x,t) + p^2 U_2(x,t) + p^3 U_3(x,t) + p^4 U_4(x,t) \quad (4.20)$$

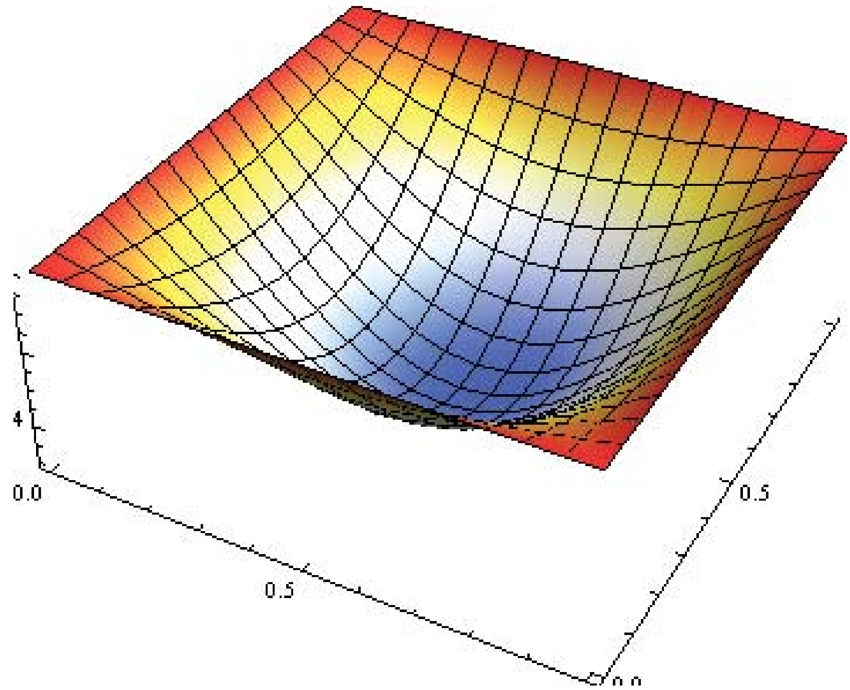
Buna göre, $N = 4$ için $U(x,t)$,

$$
\begin{aligned}
U(x,t) &= -t\frac{\sin(\pi x)}{2\pi} + \frac{\sin(\pi x)}{\pi}\left(t - \frac{\sin(\pi t)}{\pi}\right) \\
&+ \pi \sin(\pi x)\left(\frac{t^3}{2.3!} - \frac{1}{\pi^2}\left(t - \frac{\sin(\pi t)}{\pi}\right)\right) \\
&+ \pi^3 \sin(\pi x)\left(\frac{t^5}{2.5!} - \frac{1}{\pi^2}\left(\frac{t^3}{3!} - \frac{1}{\pi^2}\left(t - \frac{\sin(\pi t)}{\pi}\right)\right)\right) \\
&+ \pi^5 \sin(\pi x)\left(\frac{t^7}{2.7!} - \frac{t^5}{5!.\pi^2} + \frac{1}{\pi^4}\left(\frac{t^3}{3!} - \frac{1}{\pi^2}\left(t - \frac{\sin(\pi t)}{\pi}\right)\right)\right) \\
&+ \pi^7 \cos(\pi x)\left(\frac{t^9}{2.9!} - \frac{t^7}{7!\pi^2} + \frac{1}{\pi^4}\left(\frac{t^5}{5!} - \frac{1}{\pi^2}\left(\frac{t^3}{3!} - \frac{t}{\pi^2} + \frac{\sin(\pi t)}{\pi}\right)\right)\right)
\end{aligned}
\tag{4.21}
$$

şeklindedir.



Şekil 4.3. (4.11) denkleminin tam çözümünün grafiği



Şekil 4.4. (4.11) denkleminin N=4 için yaklaşık çözümünün grafiği

Bu uygulamada, iki boyutlu Poisson sınır değer problemini homotopi pertürbasyon sumudu transform metodu ile çözdük. $0 < x, t < 1$ için Mathematica aracılığıyla grafiğini çizdirdik. Ağ yapılı grafik yaklaşık çözümü, düz yapılı grafik ise tam çözümü belirtir.

Çizelge 4.2. (4.11) denkleminin çözümlerinin karşılaştırılması

x	t	Tam Çözüm	$N=2$	$N=3$	$N=4$
	0.25	-0.0253302959	-0.0253289968	-0.0253301847	-0.0253302958
0.25	0.5	-0.0358224480	-0.0356603565	-0.0358168274	-0.0358223209
	0.75	-0.0253302959	-0.0226749547	-0.0251201111	-0.0253195311
	0.25	-0.0358224480	-0.0358224321	-0.0358252018	-0.0358224479
0.5	0.5	-0.0506605918	-0.0506526430	-0.0506526430	-0.0506604121
	0.75	-0.0358224480	-0.0356603565	-0.0358168274	-0.0358224479

4.1.3. Homojen olmayan kısmi diferansiyel denklem

Örnek 4.3. Homojen olmayan, lineer kısmi diferansiyel denklem,

$$U_{\mathrm{t}} = U_{xx} + e^{-x}(\cos t - \sin t) \tag{4.22}$$

aşağıdaki başlangıç ve sınır koşulları altında verilsin (Kumar, Singh ve Sushila, 2012).

$$U(\mathrm{x},0) = x\,,\;\; U(0,\mathrm{t}) = \sin t\;\;,\; U(1,\mathrm{t}) = \frac{1+\sin t}{e}\quad . \tag{4.23}$$

Çözüm: Denkleme, Sumudu dönüşümünü uygulayalım.

$$\mathrm{S}[U_{\mathrm{t}}] = S[U_{xx}] + e^{-x} S[\cos t - \sin t]$$

(4.24)

$$\frac{\mathrm{S}[U(\mathrm{x},\mathrm{t})] - U(x,0)}{u} = S[U_{xx}(x,t)] + e^{-x}\left(\frac{1}{1+u^2} - \frac{u}{1+u^2}\right)$$

$$S[U(x,t)] = x + uS[U_{xx}(x,t)] + e^{-x}\left(\frac{u}{1+u^2} - \frac{u^2}{1+u^2}\right)$$

Çözüm fonksiyonu olan $U(x,t)$ yi elde etmek için, eşitliğin her iki tarafına ters Sumudu dönüşümü uygulayalım.

$$U(x,t) = x + S^{-1}[uS[U_{xx}(x,t)]] + e^{-x} S^{-1}\left[\frac{u}{1+u^2} - 1 + \frac{1}{1+u^2}\right]$$

$$U(x,t) = x + S^{-1}[uS[U_{xx}(x,t)]] + e^{-x}(\sin t - 1 + \cos t)$$

Homotopi pertürbasyon teorisi gereğince,

$$\sum_{n=0}^{\infty} p^n U_n(x,t) = x + pS^{-1}\left[uS\left[\sum_{n=0}^{\infty} U_{xx}(x,t)\right]\right] + e^{-x}(\sin t - 1 + \cos t)$$

elde edilir. Yaklaşık çözüm,

$$\sum_{n=0}^{N} p^n U_n(x,t) = x + pS^{-1}\left[uS\left[\sum_{n=0}^{N} U_{xx}(x,t)\right]\right] + e^{-x}(\sin t - 1 + \cos t)$$

şeklinde elde edilip, $N = 4$ alınırsa,

$$\sum_{n=0}^{4} p^n U_n(x,t) = x + pS^{-1}\left[uS\left[\sum_{n=0}^{4} U_{xx}(x,t)\right]\right] + e^{-x}(\sin t - 1 + \cos t)$$

elde edilir.

Aynı dereceli p nin katsayıları eşitlenerek,

$$p^0 : U_0(x,t) = x + e^{-x}(\sin t - 1 + \cos t)$$

$$p^1 : U_1(x,t) = S^{-1}\left[uS\left[(U_0(x,t))_{xx}\right]\right]$$

$$p^2 : U_2(x,t) = S^{-1}\left[uS\left[(U_1(x,t))_{xx}\right]\right]$$

$$p^3 : U_3(x,t) = S^{-1}\left[uS\left[(U_2(x,t))_{xx}\right]\right]$$

$$p^4 : U_4(x,t) = S^{-1}\left[uS\left[(U_3(x,t))_{xx}\right]\right]$$

bulunur.

$U_1(x,t)$yi hesaplayalım.

$$(U_0(x,t))_{xx} = e^{-x}(\sin t - 1 + \cos t)$$

$$S\left[\left(U_0(x,t)\right)_{xx}\right]=e^{-x}\left(\frac{u}{1+u^2}-1+\frac{1}{1+u^2}\right)$$

$$uS\left[\left(U_0(x,t)\right)_{xx}\right]=e^{-x}\left(\frac{u^2}{1+u^2}-u+\frac{u}{1+u^2}\right)$$

$$U_1(x,t)=S^{-1}\left[uS\left[\left(U_0(x,t)\right)_{xx}\right]\right]=e^{-x}(1-\cos t-t+\sin t)\ (4.92) \tag{4.26}$$

$U_2(x,t)$ yi hesaplayalım.

$$\left(U_1(x,t)\right)_{xx}=e^{-x}(1-\cos t-t+\sin t)$$

$$S\left[\left(U_1(x,t)\right)_{xx}\right]=e^{-x}\left(1-\frac{1}{1+u^2}-u+\frac{u}{1+u^2}\right)$$

$$uS\left[\left(U_1(x,t)\right)_{xx}\right]=e^{-x}\left(u-\frac{u}{1+u^2}-u^2+\frac{u^2}{1+u^2}\right)$$

$$U_2(x,t)=S^{-1}\left[uS\left[\left(U_1(x,t)\right)_{xx}\right]\right]=e^{-x}\left(t-\sin t-\frac{t^2}{2!}+1-\cos t\right) \tag{4.27}$$

$U_3(x,t)$ yi hesaplayalım.

$$\left(U_2(x,t)\right)_{xx}=e^{-x}\left(t-\sin t-\frac{t^2}{2!}+1-\cos t\right)$$

$$S\left[\left(U_2(x,t)\right)_{xx}\right]=e^{-x}\left(u-\frac{u}{1+u^2}-u^2+1-\frac{1}{1+u^2}\right)$$

$$uS\left[\left(U_2(x,t)\right)_{xx}\right]=e^{-x}\left(u^2-\frac{u^2}{1+u^2}-u^3+u-\frac{u}{1+u^2}\right)$$

$$U_3(x,t) = S^{-1}[uS[(U_2(x,t))_{xx}]] = e^{-x}\left(\frac{t^2}{2!} - 1 + \cos t - \frac{t^3}{3!} + t - \sin t\right) \tag{4.28}$$

$U_4(x,t)$ yi hesaplayalım.

$$(U_3(x,t))_{xx} = e^{-x}\left(\frac{t^2}{2!} - 1 + \cos t - \frac{t^3}{3!} + t - \sin t\right)$$

$$S[(U_3(x,t))_{xx}] = e^{-x}\left(u^2 - 1 + \frac{1}{1+u^2} - u^3 + u - \frac{u}{1+u^2}\right)$$

$$uS[(U_3(x,t))_{xx}] = e^{-x}\left(u^3 - u + \frac{u}{1+u^2} - u^4 + u^2 - \frac{u^2}{1+u^2}\right)$$

$$U_4(x,t) = S^{-1}[uS[(U_3(x,t))_{xx}]] = e^{-x}\left(\frac{t^3}{3!} - t + \sin t - \frac{t^4}{4!} + \frac{t^2}{2!} - 1 + \cos t\right) \tag{4.29}$$

Çözüm fonksiyonu olan $U(t,x)$nin aşağıdaki şekilde olduğunu biliyoruz.

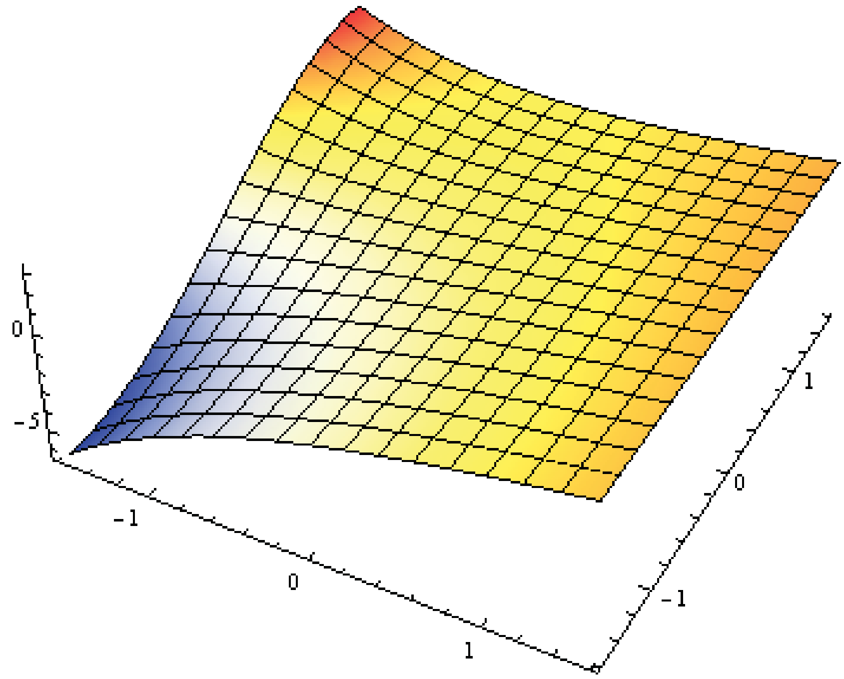
$$U(x,t) = \lim_{p\to 1} U_0(x,t) + pU_1(x,t) + p^2U_2(x,t) + p^3U_3(x,t) + p^4U_4(x,t) \tag{4.30}$$

Buna göre,

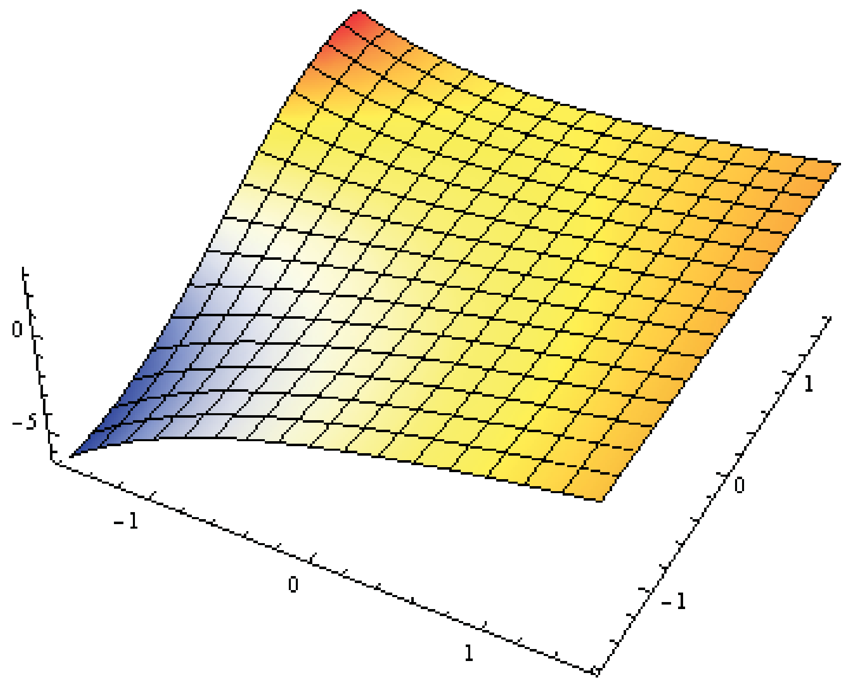
Çözüm fonksiyonu olan $U(x,t)$nin $N = 4$ için aşağıdaki şekilde olduğunu biliyoruz.

$$\begin{aligned} U(x,t) &= x + e^{-x}(\sin t - 1 + \cos t) + e^{-x}(1 - \cos t - t + \sin t) \\ &+ e^{-x}\left(t - \sin t - \frac{t^2}{2!} + 1 - \cos t\right) + e^{-x}\left(\frac{t^2}{2!} - 1 + \cos t - \frac{t^3}{3!} + t - \sin t\right) \\ &+ e^{-x}\left(\frac{t^3}{3!} - t + \sin t - \frac{t^4}{4!} + \frac{t^2}{2!} - 1 + \cos t\right) \end{aligned} \tag{4.31}$$

elde edilir.



Şekil 4.5. (4.22) denkleminin tam çözümünün grafiği



Şekil 4.6. (4.22) denkleminin N=4 için yaklaşık çözümünün grafiği

Çizelge 4.3. (4.22) denkleminin çözümlerinin karşılaştırılması

x	t	Tam Çözüm	$N=2$	$N=3$	$N=4$
	0.1	0.1903330110	0.1903292423	0.1903329359	0.1903330100
0.1	0.3	0.3673977408	0.3670932731	0.3673794573	0.3673968264
	0.5	0.5338021665	0.5314653682	0.5335679298	0.5337826180
	0.1	0.9405892382	0.9405875449	0.9405892045	0.9405892378
0.9	0.3	1.0201495500	1.0200127441	1.0201413351	1.0120149139
	0.5	1.0949198781	1.0938698872	1.0948146292	1.0949110950

4.1.4. Lineer ve Non-lineer schrödinger denklemi

Örnek 4.4. Aşağıda verilen lineer Schrödinger denklemini,

$$U_t + iU_{xx} = 0, \tag{4.32}$$

$$U(x,0) = 1 + \cosh(2x) \tag{4.33}$$

başlangıç koşulu ile birlikte ele alalım (Kumar, Singh ve Sushila, 2013).

Çözüm: Verilen (4.52) nolu lineer Schrödinger denkleminin tam çözümü $U(x,t) = 1 + \cosh(2x)e^{-4it}$ dir. Homotopi Pertürbasyon Sumudu Dönüşüm Metodu ile çözmek için öncelikle her iki tarafa Sumudu dönüşümünü uygulayalım:

$$S[U_t] + iS[U_{xx}] = 0 \tag{4.34}$$

$$\frac{S[U(x,t)] - U(x,0)}{u} + iS[U_{xx}(x,t)] = 0$$

$$S[U(x,t)] = 1 + \cosh(2x) - iuS[U_{xx}(x,t)]$$

(4.36) denklemine ters Sumudu dönüşümünü uygulayarak;

$$U(x,t) = 1 + \cosh(2x) - iS^{-1}\left[uS\left[U_{xx}(x,t)\right]\right] \tag{4.35}$$

çözüm fonksiyonunu elde ederiz. Bu denklemi çözmek için homotopi pertürbasyon teorisinden faydalanalım.

$$\sum_{n=0}^{\infty} p^n U_n(x,t) = 1 + \cosh(2x) - ipS^{-1}\left[uS\left[\left(\sum_{n=0}^{\infty} U_n(x,t)\right)_{xx}\right]\right]$$

p nin kuvvetlerine göre denklemi düzenlersek

$$p^0 : U_0(x,t) = 1 + \cosh(2x)$$

$$p^1 : U_1(x,t) = -iS^{-1}\left[uS\left[\left(U_0(x,t)\right)_{xx}\right]\right]$$

$$p^2 : U_2(x,t) = -iS^{-1}\left[uS\left[\left(U_1(x,t)\right)_{xx}\right]\right]$$

$$p^3 : U_3(x,t) = -iS^{-1}\left[uS\left[\left(U_2(x,t)\right)_{xx}\right]\right]$$

$$p^4 : U_4(x,t) = -iS^{-1}\left[uS\left[\left(U_3(x,t)\right)_{xx}\right]\right]$$

$$\vdots$$

elde edilir. Sırayla denklemleri çözelim.

$U_1(x,t)$ çözüm fonksiyonunu bulalım.

$$\left(U_0(x,t)\right)_x = 2\sinh 2x$$

$$\left(U_0(x,t)\right)_{xx} = 4\cosh 2x$$

$$S\left[\left(U_0\left(x,t\right)\right)_{xx}\right]=4\cosh 2x$$

$$uS\left[\left(U_0\left(x,t\right)\right)_{xx}\right]=4u\cosh 2x$$

$$S^{-1}\left[uS\left[\left(U_0\left(x,t\right)\right)_{xx}\right]\right]=4t\cosh 2x$$

$$U_1(x,t)=(-4it)\cosh 2x \tag{4.36}$$

$U_2(x,t)$ çözüm fonksiyonunu bulalım.

$$\left(U_1\left(x,t\right)\right)_x=\left(-4it\right)2\sinh 2x$$

$$\left(U_1\left(x,t\right)\right)_{xx}=\left(-4it\right)2^2\cosh 2x$$

$$S\left[\left(U_1\left(x,t\right)\right)_{xx}\right]=\left(-4iu\right)2^2\cosh 2x$$

$$uS\left[\left(U_1\left(x,t\right)\right)_{xx}\right]=\left(-4iu^2\right)2^2\cosh 2x$$

$$S^{-1}\left[uS\left[\left(U_1\left(x,t\right)\right)_{xx}\right]\right]=\left(-4i\frac{t^2}{2!}\right)2^2\cosh 2x$$

$$U_2(x,t)=\frac{(-4it)^2}{2!}\cosh 2x \tag{4.37}$$

$U_3(x,t)$ çözüm fonksiyonunu bulalım.

$$\left(U_2\left(x,t\right)\right)_x=\frac{\left(-4it\right)^2}{2!}2\sinh 2x$$

$$\left(U_2\left(x,t\right)\right)_{xx}=\frac{\left(-4it\right)^2}{2!}2^2\cosh 2x$$

$$S\left[\left(U_2\left(x,t\right)\right)_{xx}\right]=16i^2u^2\,2^2\cosh 2x$$

$$uS\left[\left(U_2\left(x,t\right)\right)_{xx}\right]=16i^2u^3\,2^2\cosh 2x$$

$$S^{-1}\left[uS\left[\left(U_2\left(x,t\right)\right)_{xx}\right]\right]=16i^2\frac{t^3}{3!}2^2\cosh 2x$$

$$U_3\left(x,t\right)=\frac{\left(-4it\right)^3}{3!}\cosh 2x \tag{4.38}$$

$U_4\left(x,t\right)$ çözüm fonksiyonunu bulalım.

$$\left(U_3\left(x,t\right)\right)_{x}=\frac{\left(-4it\right)^3}{3!}2\sinh 2x$$

$$\left(U_3\left(x,t\right)\right)_{xx}=\frac{\left(-4it\right)^3}{3!}2^2\cosh 2x$$

$$S\left[\left(U_3\left(x,t\right)\right)_{xx}\right]=-4^3i^3\,2^2u^3\cosh 2x$$

$$uS\left[\left(U_3\left(x,t\right)\right)_{xx}\right]=-4^3i^3\,2^2u^4\cosh 2x$$

$$S^{-1}\left[uS\left[\left(U_3\left(x,t\right)\right)_{xx}\right]\right]=-4^3i^3\,2^2\frac{t^4}{4!}\cosh 2x$$

$$U_4\left(x,t\right)=\frac{\left(-4it\right)^4}{4!}\cosh 2x \tag{4.39}$$

Sonuç olarak çözüm fonksiyonunun seri formu:

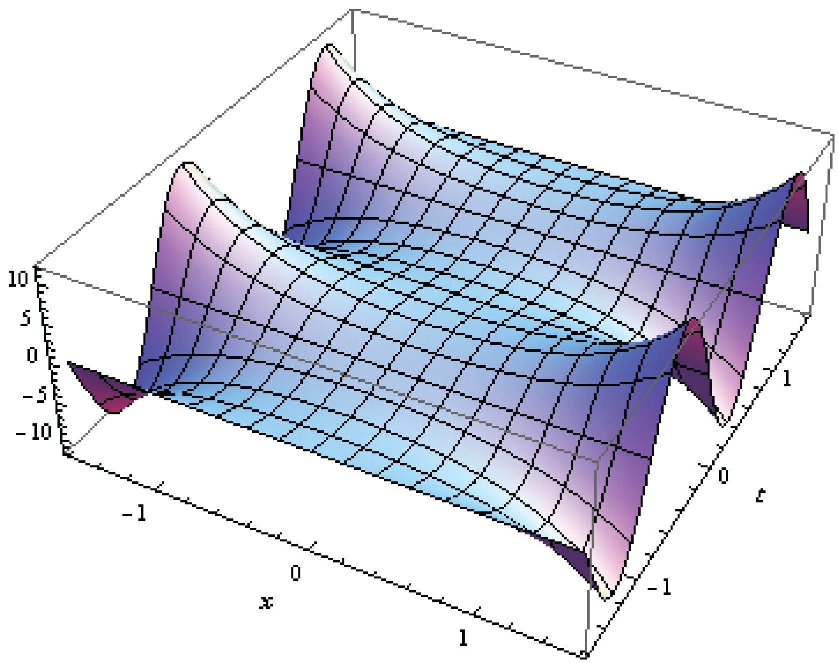
$$U(x,t)=(1+\cosh(2x))+(-4it\cosh(2x))+\left(\frac{(-4it)^2}{2!}\cosh(2x)\right)+\left(\frac{(-4it)^3}{3!}\cosh 2x\right)+\left(\frac{(-4it)^4}{4!}\cosh 2x\right)\cdots \tag{4.40}$$

$$U(x,t)=1+(\cosh(2x))\left(1+(-4it)+\frac{(-4it)^2}{2!}+\frac{(-4it)^3}{3!}+\frac{(-4it)^4}{4!}\cdots\right) \tag{4.41}$$

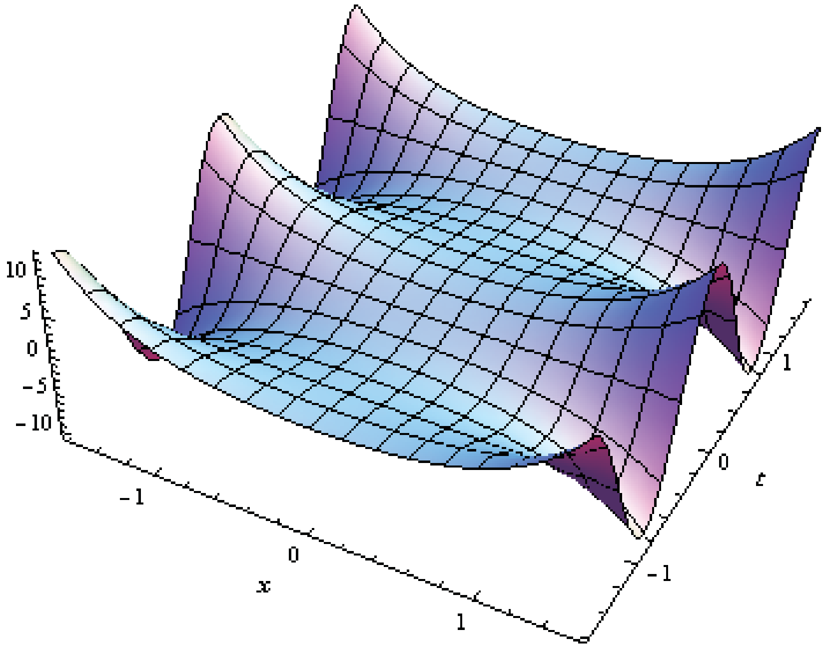
elde edilir. Çözüm fonksiyonun kapalı hali aşağıdaki formdadır.

$$U(x,t)=1+\cosh(2x)e^{-4it} \tag{4.42}$$

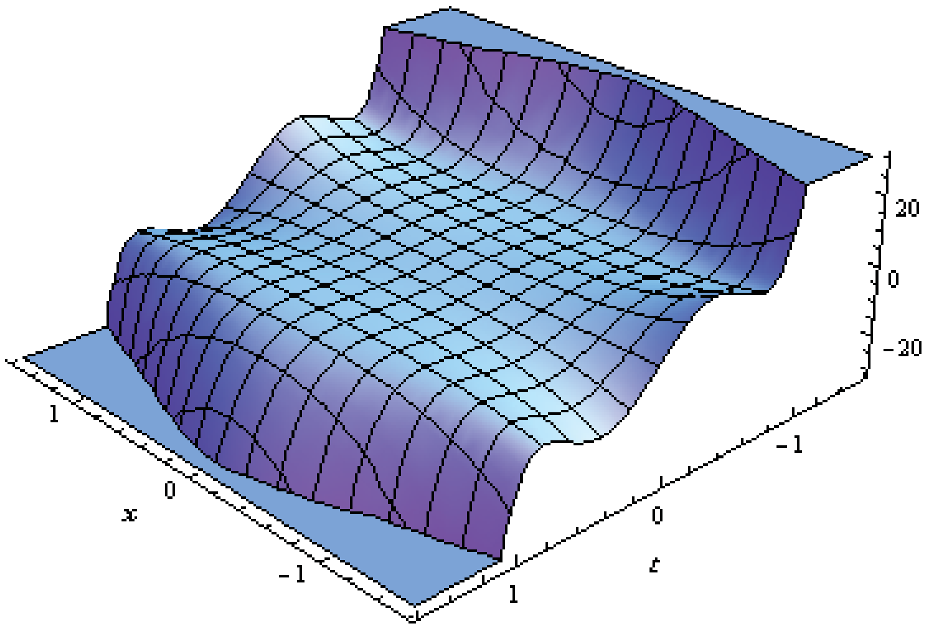
Tam çözümü elde etmiş olduk.



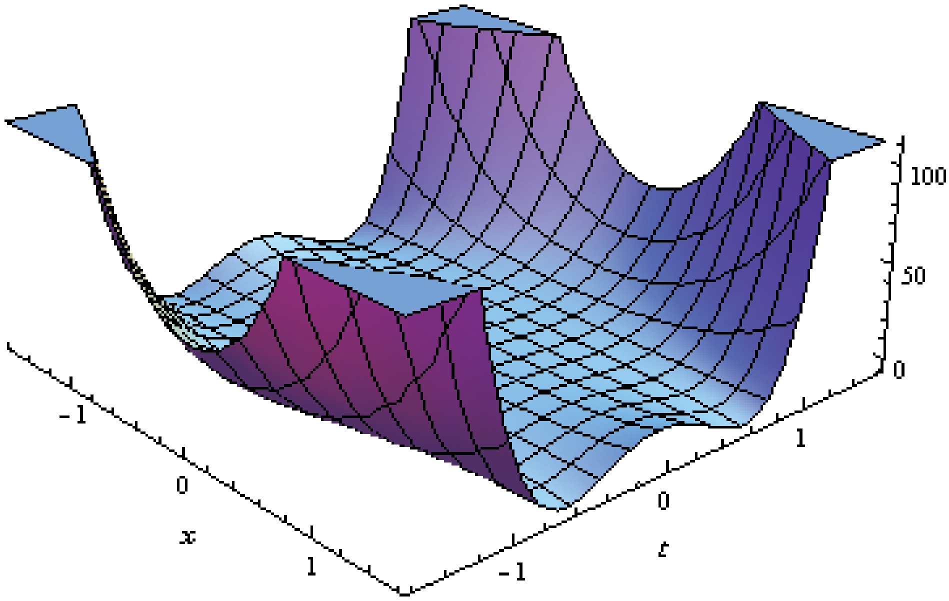
Şekil 4.7. (4.32) denkleminin tam çözümünün sanal kısmının grafiği



Şekil 4.8. (4.33) denkleminin tam çözümünün reel kısmının grafiği



Şekil 4.9. (4.32) denkleminin N=4 için yaklaşık çözümünün sanal kısmının grafiği



Şekil 4.10. (4.32) denkleminin N=4 için yaklaşık çözümünün reel kısmının grafiği

Örnek 4.5. Aşağıda verilen lineer Schrödinger denklemini,

$$U_t + iU_{xx} = 0, \tag{4.42}$$

$$U(x,0) = e^{3ix} \tag{4.43}$$

başlangıç koşulu altında ele alalım (Kumar, Singh ve Sushila, 2013).

Çözüm: Verilen (4.71) nolu lineer Schrödinger denklemini, Homotopi Pertürbasyon Sumudu Dönüşüm Metodu ile çözmek için öncelikle her iki tarafa Sumudu dönüşümünü uygulayalım.

$$S[U_t] + iS[U_{xx}] = 0 \tag{4.44}$$

$$\frac{S\left[U(x,t)\right]-U(x,0)}{u}+iS\left[U_{xx}(x,t)\right]=0$$

$$S\left[U(x,t)\right]=e^{3ix}-iuS\left[U_{xx}(x,t)\right]$$

(4.75) denklemine ters Sumudu dönüşümünü uygulayarak;

$$U(x,t)=e^{3ix}-iS^{-1}\left[uS\left[U_{xx}(x,t)\right]\right] \tag{4.45}$$

çözüm fonksiyonunu elde ederiz. Bu denklemi çözmek için homotopi pertürbasyon teorisinden faydalanalım.

$$\sum_{n=0}^{\infty}p^nU_n(x,t)=e^{3ix}-ipS^{-1}\left[uS\left[\left(\sum_{n=0}^{\infty}U_n(x,t)\right)_{xx}\right]\right]$$

p nin kuvvetlerine göre denklemi düzenlersek

$$p^0:U_0(x,t)=e^{3ix}$$

$$p^1:U_1(x,t)=-iS^{-1}\left[uS\left[\left(U_0(x,t)\right)_{xx}\right]\right]$$

$$p^2:U_2(x,t)=-iS^{-1}\left[uS\left[\left(U_1(x,t)\right)_{xx}\right]\right]$$

$$p^3:U_3(x,t)=-iS^{-1}\left[uS\left[\left(U_2(x,t)\right)_{xx}\right]\right]$$

$$p^4:U_4(x,t)=-iS^{-1}\left[uS\left[\left(U_3(x,t)\right)_{xx}\right]\right]$$

$$\vdots$$

$U_1(x,t)$ çözüm fonksiyonunu bulalım.

$$\left(U_o\left(x,t\right)\right)_x = 3ie^{3ix}$$

$$\left(U_o\left(x,t\right)\right)_{xx} = \left(3i\right)^2 e^{3ix}$$

$$S\left[\left(U_o\left(x,t\right)\right)_{xx}\right] = \left(3i\right)^2 e^{3ix}$$

$$uS\left[\left(U_o\left(x,t\right)\right)_{xx}\right] = \left(3i\right)^2 ue^{3ix}$$

$$S^{-1}\left[uS\left[\left(U_o\left(x,t\right)\right)_{xx}\right]\right] = \left(3i\right)^2 te^{3ix}$$

$$U_1(x,t) = (9it)e^{3ix} \tag{4.46}$$

$U_2(x,t)$ çözüm fonksiyonunu bulalım.

$$\left(U_1\left(x,t\right)\right)_x = \left(9it\right)\left(3i\right)e^{3ix}$$

$$\left(U_1\left(x,t\right)\right)_{xx} = \left(9it\right)\left(3i\right)^2 e^{3ix}$$

$$S\left[\left(U_1\left(x,t\right)\right)_{xx}\right] = \left(9iu\right)\left(3i\right)^2 e^{3ix}$$

$$uS\left[\left(U_1\left(x,t\right)\right)_{xx}\right] = \left(9iu^2\right)\left(3i\right)^2 e^{3ix}$$

$$S^{-1}\left[uS\left[\left(U_1\left(x,t\right)\right)_{xx}\right]\right] = \left(9i\frac{t^2}{2!}\right)\left(3i\right)^2 e^{3ix}$$

$$U_2(x,t)=\frac{(9it)^2}{2!}e^{3ix} \tag{4.47}$$

$U_3(x,t)$ çözüm fonksiyonunu bulalım.

$$\left(U_2\left(x,t\right)\right)_x=\frac{\left(9it\right)^2}{2!}\left(3i\right)e^{3ix}$$

$$\left(U_2\left(x,t\right)\right)_{xx}=\frac{\left(9it\right)^2}{2!}\left(3i\right)^2 e^{3ix}$$

$$S\left[\left(U_2\left(x,t\right)\right)_{xx}\right]=\left(9i\right)^2 u^2\left(3i\right)^2 e^{3ix}$$

$$uS\left[\left(U_2\left(x,t\right)\right)_{xx}\right]=\left(9i\right)^2 u^3\left(3i\right)^2 e^{3ix}$$

$$S^{-1}\left[uS\left[\left(U_2\left(x,t\right)\right)_{xx}\right]\right]=\left(9i\right)^2\frac{t^3}{3!}\left(3i\right)^2 e^{3ix}$$

$$U_3(x,t)=\frac{(9it)^3}{3!}e^{3ix} \tag{4.48}$$

$U_4(x,t)$ çözüm fonksiyonunu bulalım.

$$\left(U_3\left(x,t\right)\right)_x=\frac{\left(9it\right)^3}{3!}\left(3i\right)e^{3ix}$$

$$\left(U_3\left(x,t\right)\right)_{xx}=\frac{\left(9it\right)^3}{3!}\left(3i\right)^2 e^{3ix}$$

$$S\left[\left(U_3\left(x,t\right)\right)_{xx}\right]=\left(9i\right)^3 u^3\left(3i\right)^2 e^{3ix}$$

$$uS\left[\left(U_3\left(x,t\right)\right)_{xx}\right]=\left(9i\right)^3 u^4\left(3i\right)^2 e^{3ix}$$

$$S^{-1}\left[uS\left[\left(U_3\left(x,t\right)\right)_{xx}\right]\right]=\left(9i\right)^3\frac{t^4}{4!}\left(3i\right)^2 e^{3ix}$$

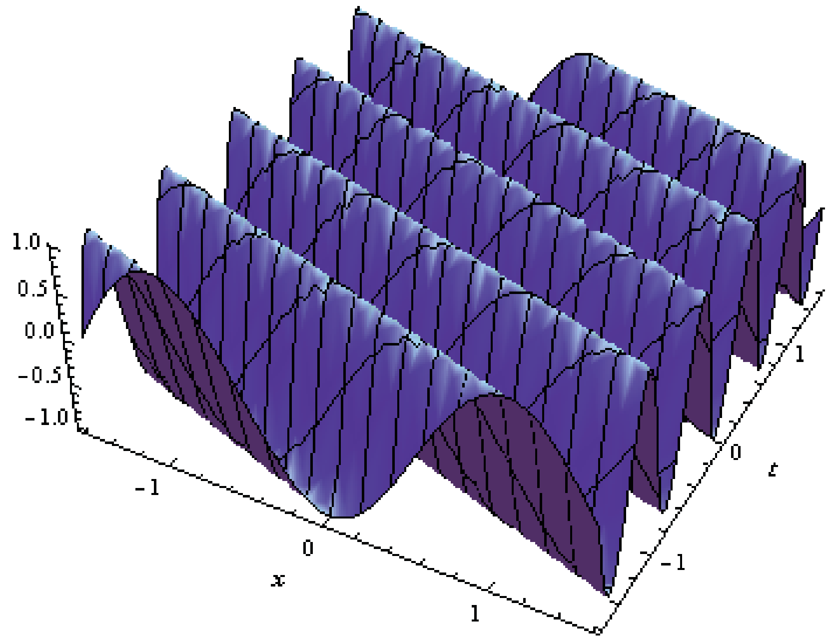
$$U_4\left(x,t\right)=\frac{\left(9it\right)^4}{4!}e^{3ix} \tag{4.49}$$

Sonuç olarak çözüm fonksiyonunun seri formu:

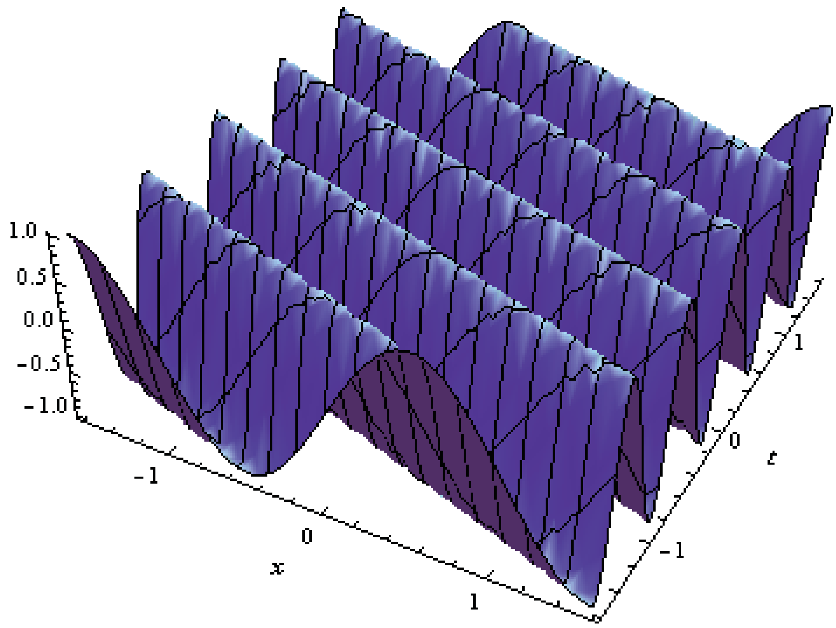
$$\begin{aligned} &U\left(x,t\right) \\ &=e^{3ix}+\left(9it\right)e^{3ix}+\left(\frac{\left(9it\right)^2}{2!}e^{3ix}\right)+\left(\frac{\left(9it\right)^3}{3!}e^{3ix}\right)+\left(\frac{\left(9it\right)^4}{4!}e^{3ix}\right)+\cdots \end{aligned} \tag{4.50}$$

şeklindedir. Çözüm fonksiyonun kapalı hali aşağıdaki gibidir:

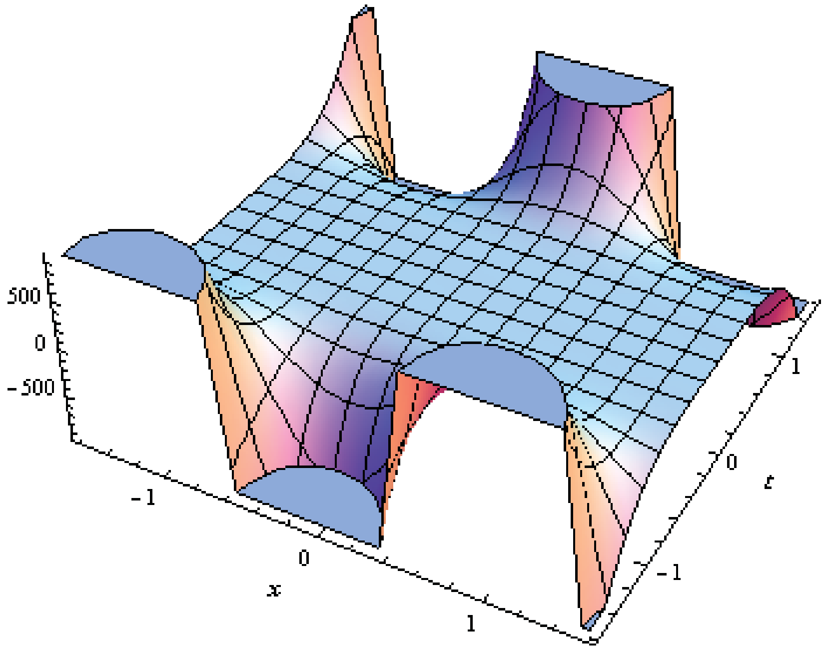
$$U\left(x,t\right)=e^{3i\left(x+3t\right)}. \tag{4.51}$$



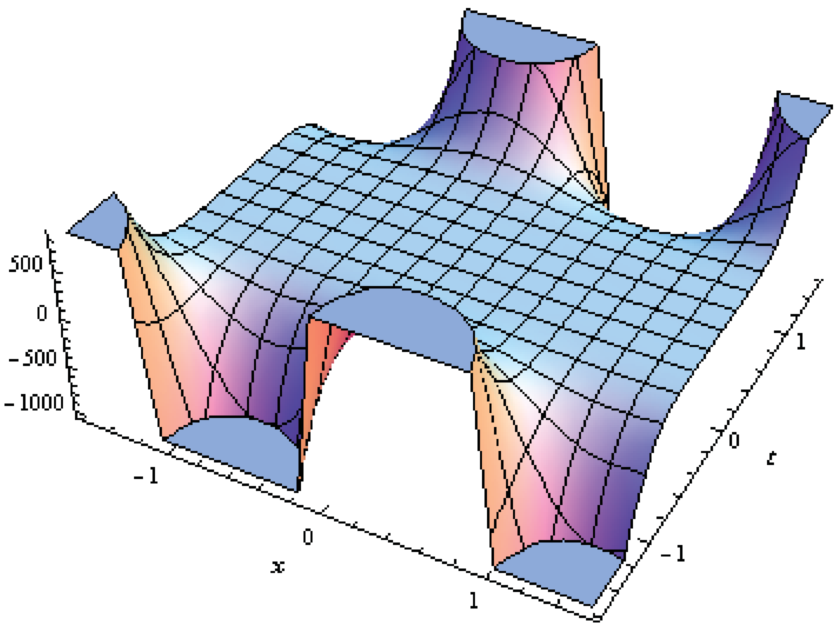
Şekil 4.11. (4.42) denkleminin tam çözümünün sanal kısmının grafiği



Şekil 4.12. (4.42) denkleminin tam çözümünün reel kısmının grafiği



Şekil 4.13. (4.42) denkleminin N=4 için yaklaşık çözümünün sanal kısmının grafiği



Şekil 4.14. (4.42) denkleminin N=4 için yaklaşık çözümünün reel kısmının grafiği

Örnek 4.6. Aşağıda verilen nonlineer Schrödinger denklemini,

$$iU_t = -\frac{1}{2}U_{xx} - |U|^2 U \,, \tag{4.52}$$

$$U(x,0) = e^{ix} \tag{4.53}$$

başlangıç koşulu altında ele alalım (Khuri, 1998).

Çözüm: $|U|^2 U = U^2 \bar{U}$ olduğunu biliyoruz. Bu eşitlikten ve karmaşık sayıların özelliklerinden faydalanarak (4.88) nonlineer denklemini düzenlersek,

$$U_t = \frac{1}{2}iU_{xx} + iU^2 \bar{U} \tag{4.54}$$

denklemini elde ederiz. Bu denkleme Sumudu dönüşüm metodunu uygularsak,

$$\frac{S\left[U(x,t)\right] - U(x,0)}{u} = \frac{1}{2}iS\left[U_{xx}(x,t)\right] + iS\left[U^2(x,t)\bar{U}(x,t)\right] \tag{4.55}$$

eşitliği elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapıldığında ve ters Sumudu dönüşümü uygulandığında çözüm fonksiyonu;

$$U(x,t) = e^{ix} + \frac{1}{2}iS^{-1}\left[uS\left[U_{xx}(x,t)\right]\right] + iS^{-1}\left[uS\left[U^2(x,t)\bar{U}(x,t)\right]\right] \tag{4.56}$$

şeklinde elde edilir. Şimdi de homotopi pertürbasyon metodunu uygulayıp He polinomlarından faydalanarak (4.65) denklemini yeniden yazalım:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p^n U_n(x,t)$$
$$= e^{ix} + \frac{1}{2}ipS^{-1}\left[uS\left[\left(\sum_{n=0}^{\infty} U_n(x,t)\right)_{xx}\right]\right] + ipS^{-1}\left[uS\left[\sum_{n=0}^{\infty} p^n H_n\big(U(x,t)\big)\right]\right]$$

p nin kuvvetlerine göre denklemi düzenleyelim.

$$p^0 : U_0(x,t) = e^{ix}$$

$$p^1 : U_1(x,t) = \frac{1}{2} i S^{-1}\left[uS\left[\left(U_0(x,t)\right)_{xx} \right]\right] + iS^{-1}\left[uS\left[U_0^2(x,t)\bar{U}_0(x,t) \right]\right]$$

$$p^2 : U_2(x,t)$$
$$= \frac{1}{2} i S^{-1}\left[uS\left[\left(U_1(x,t)\right)_{xx} \right]\right]$$
$$+ iS^{-1}\left[uS\left[U_0^2(x,t)\bar{U}_1(x,t) + 2U_1(x,t)U_0(x,t)\bar{U}_0(x,t) \right]\right]$$

$$\vdots$$

Denklemlerinin çözülmesiyle,

$$U_1(x,t) = \frac{1}{2}(it)e^{ix} \tag{4.57}$$

$$U_2(x,t) = \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2}it\right)^2 e^{ix} \tag{4.58}$$

elde edilir.

Sonuç olarak çözüm fonksiyonunun seri formu:

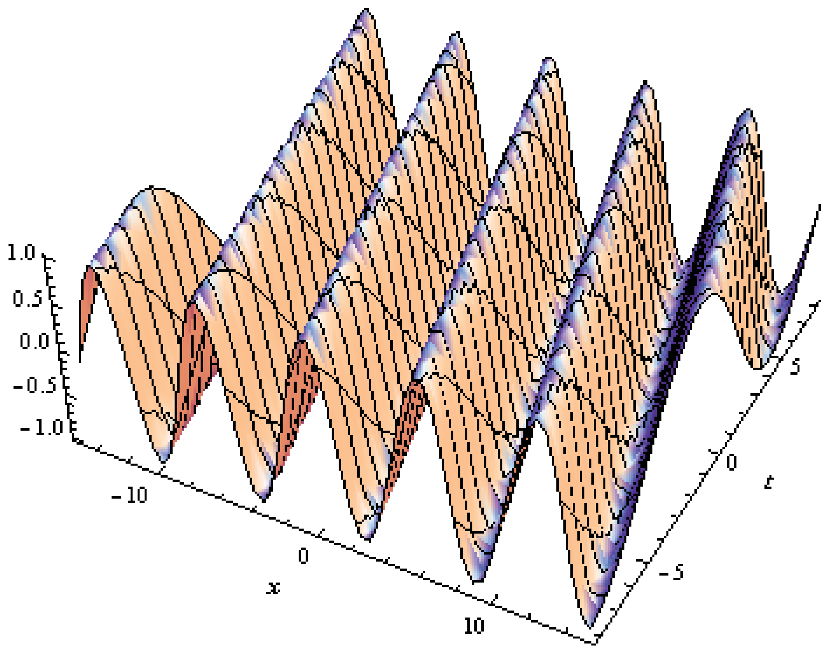
$$U(x,t) = e^{ix} + \frac{1}{1!}\left(\frac{1}{2}it\right)e^{ix} + \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2}it\right)^2 e^{ix} + \cdots \tag{4.59}$$

$$= e^{ix}\left(1+\left(\frac{1}{2}it\right)+\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2}it\right)^{2}+\cdots\right)$$

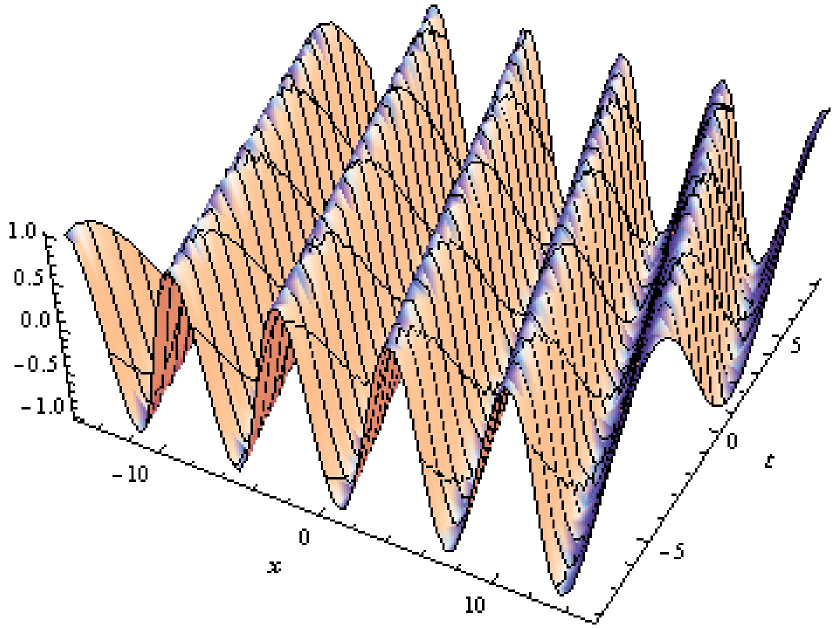
şeklindedir.

Çözüm fonksiyonun kapalı hali aşağıdaki gibidir:

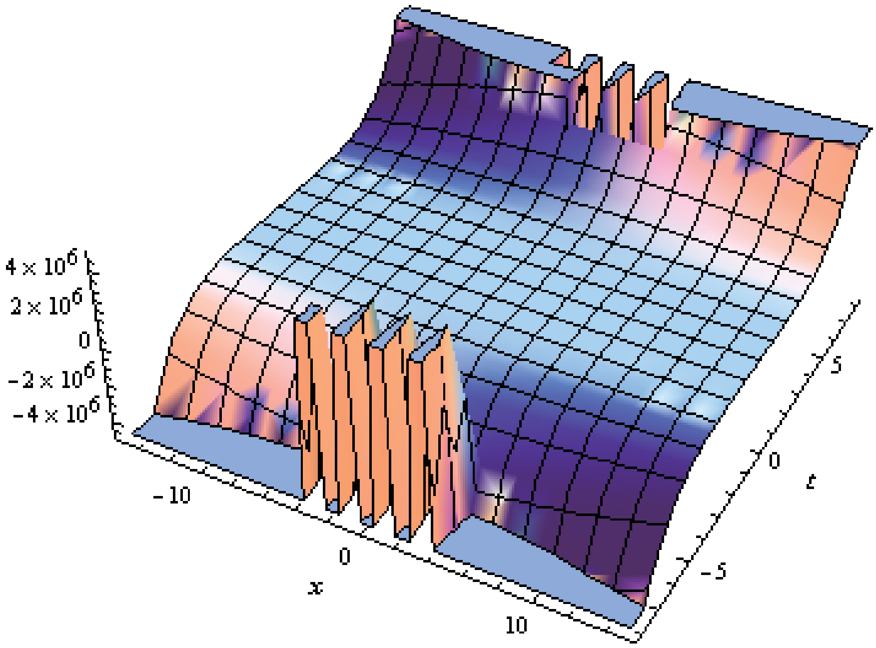
$$U\left(x,t\right)=e^{i\left(x+\frac{1}{2}t\right)}. \tag{4.60}$$



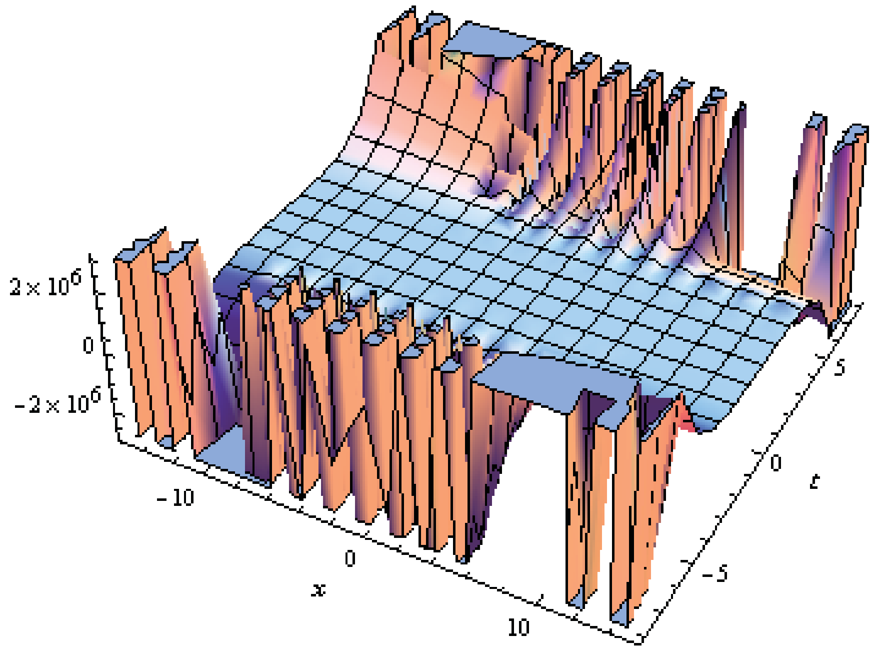
Şekil 4.15. (4.52) denkleminin tam çözümünün sanal kısmının grafiği



Şekil 4.16. (4.52) denkleminin tam çözümünün reel kısmının grafiği



Şekil 4.17. (4.52) denkleminin N=4 için yaklaşık çözümünün sanal kısmının grafiği



Şekil 4.18. (4.52) denkleminin N=4 için yaklaşık çözümünün reel kısmının grafiği

Daha önce, Adomian ayrışım ve homotopi pertürbasyon metodu (Sadighi ve Ganji, 2008), He'nin homotopi pertürbasyon metodu (Biazar ve Ghazvini, 2007) ve homotopi pertürbasyon dönüşüm metodu (Kumar, Singh ve Sushila, (2013) ile çözülen lineer ve non-lineer Schrödinger denklemlerine homotopi pertürbasyon sumudu transform metodunu uyguladık ve daha önceki metotlarla elde edilen çözümlerle aynı çözümü bulduk.

5.SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmamızda, başlangıç ve sınır değer problemlerinin çözüm metotlarına alternatif bir metot olan homotopi pertürbasyon sumudu dönüşüm metodu anlatıldı. Bu metot kullanılarak, homojen olmayan, non-lineer, lineer diferansiyel denklemlerinin, 2 boyutlu Poisson sınır değer problemlerinin analitik ya da yaklaşık çözümleri elde edildi. Elde edilen bu çözümlerin grafikleri veya veri tabloları verildi. Bu çözümler incelendiğinde, yaklaşık çözümlerin, tam çözümlere çok yakın olduğu saptandı. Lineer ve non-lineer Schrödinger denklemleri daha önce, Biazar ve Ghazvini (2007), Khuri (1998), Kumar, Singh ve Sushila (2013), Sadighi ve Ganji (2008) tarafından farklı metotlarla çözülmüştür. Biz de bu çalışmamızda lineer ve non-lineer Schrödinger denklemlerini homotopi pertürbasyon sumudu dönüşüm metodu ile çözüp aynı çözümü bulduk.

Başka, ek hesaplamalara gerek duymadan, başlangıç ve sınır değer problemleri, homotopi pertürbasyon sumudu dönüşüm metodu ile çözülebilir. Sonuçlardan ve grafiklerden görüldüğü gibi bu metot ile tam çözüme çok yakın sonuçlar elde edilir.

Özellikle fizik gibi diğer fen bilimlerinde, matematiğin uygulandığı diğer alanlarda, mühendislikte ortaya çıkan problemlerin çözümünde kullanılarak, bu problemlerin yapısının anlaşılması bakımından kolaylık sağlar.

KAYNAKLAR

Atangana, A. ve Kılıçman A. (2013) Analytical Solutions of Boundary Values Problem of 2D and 3D Poisson and Biharmonic Equations by Homotopy Decomposition Method, *Hindawi Publishing Corporation Abstract and Applied Analysis*, 9s.

Aydın, M., Kuryel B., Gündüz, G., Oturanç, G. (2007) *Diferansiyel Denklemler ve Uygulamaları*, Fakülteler Kitapevi, Barış Yayınları, İzmir, 554s.

Belgacem, F. B. M. ve Karaballi, A. A. (2006) Sumudu Transform Fundamental Properties Investigations and Applications, *JAMSA* , 1-23.

Biazar, J. ve Ghazvini, H. (2007) Exact solutions for non-linear Schrödinger equations by the He's homotopy perturbation method, *Science Direct* 79-84.

Munkres, J. R. (2010) *Topology*, Pearson Education International, USA, 537s.

Khuri, S.A. (1998) A new approach to the cubic Schrödinger equation: An application of the decomposition technique, *Applied Mathematics and Computation* 97 251-254.

Kumar, D., Singh, J ve Sushila (2013) Application of Homotopy Perturbation Transform Method to Linear and Nonlinear Schrödinger Equations, *IJNS*, 203-209.

Kumar, D., Singh, J ve Sushila (2011) Sumudu Homotopy Perturbation Technique, *Global Journal of Science Frontier Research*, 59-63.

Kumar, D., Singh, J ve Kılıçman, A. (2013) Application of Homotopy Perturbation Sumudu Transform Method for Solving Heat and Wave-Like Equations, *Malaysian Journal of Mathematical Science*, 7(1): 79-95.

Kumar, D., Singh, J ve Sushila (2011) Homotopy Perturbation Sumudu Transform Method for Nonlinear Equations, *Adv. Theor. Appl. Mech.*, Vol. 4, no:4, 165-175

Mishra, H. K. (2012) A Comparative Study of Variational Iteration Method and He-Laplace Method, *Scientific Research,* 1193-1201.

Pinchover, Y., Rubinstein, J.(2005) *An introduction to Partial Differential Equations,* Cambridge University Press, UK, 375s.

Sadighi, A., Ganji D.D. (2008) Analytic treatment of linear and nonlinear Schrödinger equations: A study with homotopy-perturbation and Adomian decomposition methods. *Science Direct*, 465-469

Sezer, M, Daşçıoğlu A. 2010 *Diferansiyel Denklemler I*, Dora Yayınları, Bursa, 278s.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Ad Soyadı : Dilara ALTAN

Uyruk : T.C.

Doğum Yeri ve Tarihi: İZMİR-1988

E-posta : dilaraaltan@mu.edu.tr

Eğitim

Alınan Derece	Aldığı Kurum/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Lise	İzmir Kız Anadolu Lisesi	2006
Lisans	Muğla Üniversitesi	2010
Yüksek Lisans	Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi	2015

İş Tecrübesi

Yıl	Yer	Pozisyon/görev
Ocak 2012 – Ocak 2014	İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü Fen Fakültesi Matematik Bölümü	Araştırma Görevlisi
Ocak 2014 –	Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü	Araştırma Görevlisi

Yabancı Diller

Dil (İngilizce)	Başlangıç	Orta	İleri
Yazma			X
Konuşma		X	
Anlama		X	
Okuma			X

Dil (Almanca)	Başlangıç	Orta	İleri
Yazma	X		
Konuşma	X		
Anlama	X		
Okuma	X		