T.C.
YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BAZI TÜRDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN GLOBAL VARLIĞI VE SINIRLILIĞI ÜZERİNE

DOKTORA TEZİ

HAZIRLAYAN: Timur AYHAN
DANIŞMAN: Prof. Dr. Cemil TUNÇ

VAN – 2015

T.C.
YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BAZI TÜRDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN GLOBAL VARLIĞI VE SINIRLILIĞI ÜZERİNE

DOKTORA TEZİ

HAZIRLAYAN: Timur AYHAN

VAN – 2015

KABUL VE ONAY SAYFASI

Prof. Dr. Cemil TUNÇ danışmanlığında, Timur AYHAN tarafından hazırlanan "***Bazı Türden Diferansiyel Denklemlerin Çözümlerinin Global Varlığı ve Sınırlılığı Üzerine***" isimli bu çalışma Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği'nin ilgili hükümleri gereğince 11/03/2015 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Cemil TUNÇ İmza:

Üye: Prof. Dr. Oktay VELİEV İmza:

Üye: Prof. Dr. Heybetkulu MUSTAFAYEV İmza:

Üye: Doç. Dr. Şenay BAYDAŞ İmza:

Üye: Yrd. Doç. Dr. Erkan ÇİMEN İmza:

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun ………/………../……… gün ve …………/…………… sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Turgut AYGÜN
Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Timur AYHAN

ÖZET

BAZI TÜRDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN GLOBAL VARLIĞI VE SINIRLILIĞI ÜZERİNE

AYHAN, Timur
Doktora Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Tez Danışmanı: Prof. Dr. Cemil TUNÇ
Mart 2015, 117 Sayfa

Bu çalışma yedi bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde tez konusu ile ilgili literatürde yapılan bazı çalışmalar verildi. İkinci bölümde tezde kullanılacak materyal ve yöntem belirtildi. Üçüncü bölümde tez konusu ile ilgili olan bazı temel tanım ve teoremler verildi. Dördüncü bölümde ilk olarak ikinci mertebeden lineer olmayan sabit gecikmeli bir integro diferansiyel denklemin, daha sonra ikinci mertebeden lineer olmayan bir integro vektör diferansiyel denklemin ve son olarak da ikinci mertebeden değişken gecikmeli bir integro vektör diferansiyel denklemin çözümlerinin global varlığı ve sınırlılığı için yeter şartlar elde edildi. Tezin beşinci bölümde üçüncü mertebeden lineer olmayan gecikmesiz bir integro diferansiyel denklemin ve aynı mertebeden lineer olmayan sabit gecikmeli iki diferansiyel denklemin çözümlerinin global varlığı ve sınırlılığı için yeter şartlar elde edildi. Altıncı bölümde ise dördüncü mertebeden lineer olmayan sabit gecikmeli bir diferansiyel denklemin çözümlerinin global varlığı ve sınırlılığı için yeter şartlar elde edildi.

Anahtar kelimeler: Lyapunov fonksiyon, Global varlık, Sınırlılık, Integro diferansiyel denklemler.

ABSTRACT

ON THE GLOBAL EXISTENCE AND BOUNDEDNESS OF SOLUTIONS OF SOME KIND OF DIFFERENTIAL EQUATIONS

AYHAN, Timur
PhD Thesis, Mathematics Department
Supervisor: Prof. Dr. Cemil TUNÇ
March 2015, 117 Pages

This thesis consists of seven chapters. In the first chapter, we summarized works in the literature related to the subject of the thesis. In the second chapter, we introduced the materials and methods for the thesis. In the third chapter, we gave some basic definitions and theorems which are related to the thesis. In the fourth chapter, we first investigated the global existence and boundedness of the solutions of a nonlinear integro differential equation of the second order with constant delay, after that a nonlinear integro vector differential equation of the second order, later a nonlinear integro vector differential equation of the second order with variable delay. In the fifth chapter, we obtained the sufficient conditions for the global existence and boundedness of the solutions of a nonlinear differential equation of the third order and two nonlinear differential equations of the third order with constant delay. In the six chapter, we obtained certain sufficient conditions which guarantee the global existence and boundedness of the solutions of a nonlinear differential equation of the fourth order with constant delay.

Key words: Lyapunov function, Global existence, Boundedness, Integro differential equations.

ÖN SÖZ

Doktora çalışmam boyunca her adımda bilgi ve hoşgörüsünden yararlandığım, tez çalışmamın her safhasında emeği olan, değerli bilgi ve yardımlarını benden esirgemeyen, tecrübesi ile beni yönlendiren ve kendisinden pek çok şey öğrendiğim danışmanım Sayın Prof. Dr. Cemil TUNÇ' a, yardımlarını benden esirgemeyen Prof. Dr. Heybetkulu MUSTAFAYEV' e, Yrd. Doç. Dr. Hilmi ERGÖREN' e, Yrd. Doç. Dr. Cemil BÜYÜKADALI' ya ve Yrd. Doç. Dr. Mahmut KARAKUŞ' a teşekkürü bir borç bilirim. Ayrıca çok önemli tavsiye ve önerileriyle bu tezin olgunlaşmasında katkısı olan tez izleme komitesine şükranlarımı arz ederim.

Doktora eğitimim boyunca verdiği burs ile çalışmalarımı kolaylaştıran TÜBİTAK'a teşekkür eder saygılarımı sunarım.

Son olarak, bu tez hazırlama sürecinde benden yardımlarını esirgemeyen oda arkadaşım Dr. Murat DİRLİKLİ' ye, kendilerini ihmal ettiğimi düşündüğüm aileme ve özellikle bana desteğini esirgemeyen çok değerli eşim Vildan AYHAN' a teşekkürlerimi sunarım.

Timur AYHAN

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler

$\mathbb{R}$**:** Reel sayılar kümesi

$\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$

$\boldsymbol{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$**:** $\mathbb{R}$' den $\mathbb{R}$' ye tanımlı sürekli fonksiyonlar uzayı

$\boldsymbol{V}$**:** Lyapunov fonksiyonu

$\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\phi}$: Phi

$\boldsymbol{\theta}$: Teta

$\boldsymbol{\psi}$: Psi

$\boldsymbol{\varepsilon}$: Epsilon

$\boldsymbol{\beta}$: Beta

$\boldsymbol{\delta}$: Delta

$\boldsymbol{\lambda}$: Lamda

$\boldsymbol{\gamma}$: Gama

$\boldsymbol{\alpha}$: Alfa

$\boldsymbol{\mu}$: Mu

$\boldsymbol{\tau}$: Tau

$\boldsymbol{\rho}$: Ro

$\boldsymbol{\sigma}$: Sigma

$\boldsymbol{\Omega}$: Omega

1. GİRİŞ VE LİTERATÜR BİLDİRİŞLERİ

Bilindiği gibi diferansiyel denklemler ve integro-diferansiyel denklemler; kontrol sistemleri, elektrodinamik, sıvıların karışımı, tıp, ekonomi, atom enerjisi, bilgi teknolojileri, sinir ağları, nüfus modelleri vb. bir çok bilimsel alanda yapılan çalışmaların matematiksel modellemeleri oluşturulduğunda sıklıkla karşımıza çıkar. Bu matematiksel modellerin niteliksel davranışlarının belirlenmesi sırasında çözümlerin kararlılığı, global varlığı, sınırlılığı, asimptotik davranışları vb. bir çok niteliksel davranışın incelenmesi bilimsel literatürde önemli bir yere sahiptir. Matematik literatürü incelendiğinde, son yıllarda diferansiyel ve integro-diferansiyel denklemlerin çözümlerinin global varlığı ve sınırlılığının, $[t_0, \infty)$ aralığı üzerinde çözümlerin davranışları hakkında bilgi sahibi olmaya olanak sağlamasından dolayı bir çok araştırmacı tarafından incelendiği görülebilir. Çok az sayıdaki denklem tiplerinin çözümlerini elde edebilme gerçeği araştırmacıları, denklemin çözümünü elde etmeksizin verilen denklemden hareketle çözümlerin davranışlarını araştırmaya yöneltmiş ve bazı yöntemler geliştirmelerini sağlamıştır. Bu anlamda Sabit nokta teorisi, Derece teorisi, İntegral eşitsizlikleri ve Lyapunov'un ikinci metodu büyük bir öneme sahiptir. Biz bu tez çalışmasında Lyapunov'un ikinci metodundan ve İntegral eşitsizliğinden yararlanacağız. 1892 yılında A.M. Lyapunov tarfından geliştirilen Lyapunov'un ikinci metodu diferansiyel denklemleri çözmeksizin çözümlerin sürdürülebilirliği, sınırlılığı, kararlılığı, yakınsaklığı vb. birçok davranışı hakkında bilgi edinmemizi sağlar. Ancak değişken katsayılı diferansiyel denklemlerin mertebelerinin yüksek olması durumunda uygun ve anlamlı sonuç(lar) verecek Lyapunov fonksiyonu ya da fonksiyonelini oluşturmak zordur. Ayrıca, yüksek mertebeden lineer olmayan diferansiyel denklemler için Lyapunov fonksiyonlarının veya fonksiyonellerinin inşası için bilinen genel bir yöntem yoktur. Günümüze kadar ikinci ve üçüncü mertebeden lineer olmayan gecikmeli ve gecikmesiz diferansiyel denklemlerin çözümlerinin bazı niteliksel davranışları ile ilgili çok sayıda sonuçlar elde edilmiştir. Konuyla ilgili literatürün bir kısmı için Ezeilo (1961; 1963), Swich (1969), Schmit (1969), Hara (1981), Baker (1974), Sedziwy (1975), Baxley (1977), Graef ve Spikes (1978), Jin (1983), Burton ve Mahfoud (1983), Burton (1985), Wada ve Yamamoto (1987; 1989), Meng (1992), Zhu (1992), Constantin (1995), Mehri ve Shadman (1999), Qian (2000), Napoles Valdes (2001), Mustafa ve Rogovchenko (2002; 2003), Sadek (2003; 2005), Yin (2004), Tunç (2005a; 2005b; 2006a; 2006b; 2007a; 2009a; 2009b; 2010a; 2011a; 2011b; 2012a; 2012b; 2014), Tunç ve Ateş (2006), Tunç ve Şevli (2007), Omeike (2008; 2009; 2010a; 2010b; 2014), Ademola ve Arawomo (2008; 2010; 2011a; 2011b; 2013), Tiryaki ve Zafer (2013), Tidke ve Dhakne (2010), Tidke (2010), Ogundare ve ark. (2010), Afuwape ve Omeike (2008; 2010), Wu ve ark. (2012), Olutimo (2012), Afuwape ve Carvajal (2012), Changiian ve ark. (2012), Ademola (2013), Zhang ve Yu (2013), Graef ve Tunç (2014), Oudjedi ve ark. (2014), Fujimoto ve Yamaoka (2014), Remili ve Oudjedi (2014) çalışmalarına bakılabilir. İkinci ve üçüncü mertebeden lineer olmayan gecikmeli ve gecikmesiz diferansiyel denklemlerin çözümlerinin bazı niteliksel davranışları ile ilgili çok sayıda çalışma olmasına rağmen dördüncü mertebeden gecikmeli ve gecikmesiz lineer olmayan diferansiyel denklemlerin çözümlerinin niteliksel davranışları üzerine yapılan çalışma sayısı daha azdır. Konuyla ilgili literatürün bir kısmı için, Cartwright (1956), Ogurcov (1958; 1959), Ezeilo (1962a; 1962b; 1964), Harrow (1967; 1970a; 1970b), Skidmore (1966), Burganskaja (1970), Sinha ve Haft (1971), Lalli ve Skrapek (1971a; 1971b; 1973), Kaufman ve Harrow (1971), Chukwu (1972), Tejumola (1972), Ezeilo ve Tejumolo (1973), Hara (1973), Skrapek ve Lalli (1980), Duan (1987), Chin (1989), Okoronkwo (1989), Abou-El-Ela ve Sadek (1990), Hu (1992), Tunç (1995a; 1995b; 2004; 2005c; 2006c; 2006d; 2006e; 2007b; 2007c; 2008a; 2008b; 2010b; 2010c), Tiryaki ve Tunç (1996), Lin ve ark. (1998), Bereketoğlu (1998), Wu ve Xiong (1998), Tejumolo ve Tchegnami (2000), Sadek (2004), Ogundare ve Okecha (2008), Abou-El-Ela ve ark. (2009), Kang ve Si (2010), Adesina ve Ogundare (2012) çalışmalarına bakılabilir.

Bu tez çalışmasının; ikinci bölümünde materyal ve yöntem, üçüncü bölümünde bu tez çalışmasında yararlanılan temel tanım ve teoremler verildikten sonra, dördüncü bölümün de sırasıyla ikinci mertebeden lineer olmayan

$$\big(p(x)x'(t)\big)' + a(t)f(t,x,x')x' + b(t)g(t,x') + \sum_{i=1}^{n} c_i(t)h_i\big(x(t-\tau_i)\big) = \int_0^t C(t,s)x'(s)ds \tag{1.1}$$

formundaki sabit gecikmeli integro diferansiyel denklemi, yine ikinci mertebeden lineer olmayan

$$(r(t)X')' + A(t)F(t,X,X')X' + E(t,X') + H(X) = \int_0^t C(t,s)X'(s)ds \qquad (1.2)$$

integro vektör diferansiyel denklemi ve

$$X'' + A(t)F(t,X,X')X' + G(t,X,X') + \sum_{i=1}^{n} H_i\left(X\big(t-\tau_i(t)\big)\right)$$

$$= \int_0^t C(t,s)X'(s)ds \qquad (1.3)$$

biçimindeki ikinci mertebeden değişken gecikmeli integro vektör diferansiyel denkleminin çözümlerin global varlığı ve sınırlılığı için yeter şartlar içeren yeni sonuçlar verildi. Bu kapsamda matematik literatürüne bakıldığında, ikinci mertebeden lineer olmayan diferansiyel denklemlerin çözümlerinin niteliksel davranışları üzerine yapılmış ve bu tezin dördüncü bölümünde (1.1)-(1.3) diferansiyel denklemlerinin çözümlerinin global varlığı ve sınırlılığı ile ilgili yapılacak çalışmalarla ilgili olan bazı çalışmalar aşağıdaki gibi özetlenebilir:

Baker (1974), ikinci mertebeden

$$\big(r(t)u'(t)\big)' + \phi(t,u,u')u' + p(t)f(u) = h(t,u,u') \qquad (1.4)$$

biçimindeki lineer olmayan diferansiyel denklemini ele aldı. Burada $I = [0,\infty)$ olmak üzere $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\phi\colon I \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $p\colon I \to \mathbb{R}$, $h\colon I \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonlar ve $r\colon I \to \mathbb{R}$ türevlenebilir bir fonksiyondur. Baker (1974), (1.4) diferansiyel denklemi için Lyapunov'un ikinci metodunu kullanarak çözümlerin kararlılığını inceledi.

Graef ve Spikes (1978), ikinci mertebeden

$$\big(a(t)x'(t)\big)' + h(t,x,x')x' + q(t)f(x)g(x') = e(t,x,x') \qquad (1.5)$$

tipindeki lineer olmayan diferansiyel denklemini ele aldı. Burada $a, q: [t_0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h, e: [t_0, \infty) \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonlar ve $a(t) > 0, q(t) > 0, g(x') > 0$ dır. Graef ve Spikes (1978), (1.5) differansiyel denklemi için Lyapunov'un ikinci metodunu kullanarak çözümlerin global varlığını, sınırlılığını ve sıfıra yakınsaklığını inceledi.

Wada ve Yamamoto (1987), ikinci mertebeden

$$(r(t)x')' + f(t, x, x')x' + p(t)g(x) = 0 \tag{1.6}$$

formundaki lineer olmayan diferansiyel denklemini ele aldı. Burada r, p, $\mathbb{R}_+ = [t_0, \infty)$ üzerinde sürekli türevlenebilen fonksiyonlar, $f: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ ve $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dir. Wada ve Yamamoto (1987), (1.6) differansiyel denklemi için Lyapunov fonksiyonu yardımıyla çözümlerin asimptotik kararlılığını inceledi.

Meng (1992), ikinci mertebeden

$$x''(t) + \varphi(x, x') + g(x')f(x) = 0 \tag{1.7}$$

biçimindeki lineer olmayan diferansiyel denklemini ele aldı. Burada $x \neq 0$ için $xf(x) > 0$, her x' için $g(x') > 0$, ve her x, x' için $x'\varphi(x, x') > 0$ dir. Ayrıca $|x| \to \infty$ için $\int_0^x f(t)dt \to \infty$ dur. Meng (1992), (1.7) differansiyel denklemi için Lyapunov'un ikinci metodunu kullanarak sıfır çözümünün global kararlılığını inceledi.

Napoles Valdes (2001), ikinci mertebeden

$$x'' + a(t)f(t, x, x')x' + g(t, x') + h(x) = \int_0^t C(t, s)x'(s)ds \tag{1.8}$$

tipindeki lineer olmayan integro diferansiyel denklemini ele aldı. Burada $I = [0, \infty)$ olmak üzere $a(t)$, I üzerinde tanımlı pozitif sürekli bir fonksiyon, f fonksiyonu $(t, x, x') \in I \times \mathbb{R}^2$ için $f(t, x, x') \geq 0$ şartını sağlayan sürekli bir fonksiyon, g ve h sürekli fonksiyonlar olup $y \neq 0$ için $g(t, y)y > 0$ ve $x \neq 0$ için $xh(x) > 0$ dır. $C(t, s)$ ise $0 \leq s \leq t < \infty$ için sürekli bir fonksiyondur. Napoles Valdes (2001), (1.8) diferansiyel denklemi için Lyapunov metodunu kullanarak çözümlerin sınırlılığını ve global varlığını inceledi. $x' = y$ olmak üzere (1.8) denklemi,

$$x' = y,$$

$$y' = \int_0^t C(t,s)y(s)ds - a(t)f(t,x,y\,)y - g(t,y\,) - h(x)$$

sistemine denktir.

Teorem 1.1. Aşağıdaki şartların sağladığını varsayalım:

i) $\int_0^t |C(t,s)|ds + \int_t^\infty |C(u,t)|du \leq R, \qquad R \geq 0,$

ii) $R - a(t)f(t,x,y\,) \leq 0,$ her $x, y \in \mathbb{R}$,

iii) $x \to \infty$ için $\int_0^x h(s)ds \to \infty$.

Bu taktirde (1.8) denkleminin tüm çözümleri sürdürülebilirdir.

Mustafa ve Rogovchenko (2003), ikinci mertebeden

$$(a(t)u')' + q(t)f(u,u'\,)u' + g(u) = e(t) \tag{1.9}$$

formundaki lineer olmayan diferansiyel denklemini ele aldı. Burada q, f, g, e sürekli fonksiyonlar ve $a, \mathbb{R}$ üzerinde sürekli türevlenebilen pozitif bir fonksiyondur. Mustafa ve Rogovchenko (2003), (1.9) diferansiyel denklemi için Lyapunov'un ikinci metodunu kullanarak çözümlerin global varlığını inceledi.

Yin (2004), ikinci mertebeden

$$x'' + f(x)x' + h(x) = e(t) \tag{1.10}$$

tipindeki Lienard denklemi olarak bilinen ikinci mertebeden lineer olmayan diferansiyel denklemine denk olan,

$$x' = \frac{1}{a(x)}\big(c(y) - b(x)\big)$$

$$y' = -a(x)\big(h(x) - e(t)\big)$$

sistemini ele aldı. Burada $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $a(x) = 1,\ b(x) = \int_0^x f(s)ds,\ c(x) = x$ dir. Yın (2004), (1.10) diferansiyel denklemi için Lyapunov'un ikinci metodu yardımıyla çözümlerin global varlığını inceleyerek çeşitli örnekler verdi.

Benzer biçimde Wu ve ark. (2012),

(1.10) denklemini ele alıp, Lyapunov fonksiyonu yardımıyla Yin (2004)' nin verdiği şartlardan farklı şartlar altında bu denklemin çözümlerinin global varlığını inceleyerek elde edilen sonuçlar ile ilgili çeşitli örnekler verdi.

Tunç ve Şevli (2007), ikinci mertebeden

$$X'' + A(t)F(X) = P(t, X, X') \tag{1.11}$$

formundaki vektör diferansiyel denklemini ele aldı. Burada $t \in \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ ve $X \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere $A(t) = \left(a_{ij}(t)\right)$, $n \times n$ mertebeden simetrik bir matris, $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ve $P: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dir. Tunç ve Şevli (2007), (1.11) diferansiyel denklemi için Lyapunov fonksiyonu yardımıyla çözümlerin sınırlılığını ve kararlılığını inceledi.

Ogundare ve ark. (2010), ikinci mertebeden

$$x''(t) + a(t)g(x, x')x' + b(t)h(x) = p(t, x, x') \tag{1.12}$$

formundaki lineer olmayan diferansiyel denklemini ele aldı. Burada a, b, g, h ve p sürekli fonksiyonlardır. Ogundare ve ark. (2010), (1.12) diferansiyel denklemi için Lyapunov'un ikinci metodunu kullanarak çözümlerin kararlılığını ve sınırlılığını inceledi.

Tunç (2011a), ikinci mertebeden

$$\frac{d}{dt}\left(r(t)x'(t) + \varphi\left(t, x(t), x(t-r), x'(t), x'(t-r)\right)x'(t) + p(t)f\left(x(t-r)\right)\right)$$
$$= q\left(t, x(t), x(t-r), x'(t), x'(t-r)\right) \tag{1.13}$$

tipindeki lineer olmayan sabit gecikmeli diferansiyel denklemini ele aldı. Burada $r_i > 0, b(t), f, g, h$ ve e sürekli fonksiyonlardır. Tunç (2011a), (1.13) diferansiyel denklemi için Lyapunov fonksiyoneli yardımıyla çözümlerin kararlılığını ve sınırlılığını inceledi.

Tunç (2012b), ikinci mertebeden

$$x''(t) + f\left(t, x(t), \dots, x(t-r_n), x'(t), \dots, x'(t-r_n)\right)x'(t)$$

$$+\left(g\left(t, x(t), \dots, x(t-r_n), x'(t), \dots, x'(t-r_n)\right)x'(t)\right)x'(t) + b(t)\sum_{i=1}^{n} h_i\big(x(t-r_i)\big)$$

$$= e\left(t, x(t), \dots, x(t-r_n), x'(t), \dots, x'(t-r_n)\right) \qquad (1.14)$$

biçimindeki lineer olmayan sabit gecikmeli diferansiyel denklemini ele aldı. Burada $r_i > 0, b(t), f, g, h$ ve e sürekli fonksiyonlardır. Tunç (2012b), (1.14) diferansiyel denklemi için Lyapunov fonkiyoneli yardımıyla çözümlerin kararlılığını ve sınırlılığını inceledi.

Tiryaki ve Zafer (2013), ikinci mertebeden

$$\begin{cases} \left(r(t)|u'|^{p-2}u'\right)' + g(t,u,u')u' + a(t)f(u) = e(t) \\ u(t_0) = u_0 \qquad\qquad u'(t_0) = u_1 \end{cases} \qquad (1.15)$$

formundaki başlangıç değer problemini ele aldı. Burada $p > 1$ olacak şekilde sabit bir sayı, $r, a \in C^1\big(\mathbb{R}_+, (0,\infty)\big)$, $g \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$, $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ve $e \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ dir. Tiryaki ve Zafer (2013), (1.15) başlangıç değer problemi için İntegral eşitsizliği yardımı ile çözümlerin sınırlılığını ve global varlığını inceledi.

Teorem 1.2. $F(x) = \int_0^x f(u)du$ olmak üzere $|x| \to \infty$ için $F(x) \to \infty$ ve $x \neq 0$ için $F(x) > 0$ olsun. Eğer her $t \geq t_0$ için $a'(t) \leq 0$ ise o zaman (1.15) başlangıç değer probleminin çözümleri $[0, \infty)$ aralığı üzerinde tanımlıdır.

Tunç (2014), ikinci mertebeden

$$x''(t) + f\left(t, x(t), x'(t)\right)x'(t) + b(t)g\left(x\big(t-\tau(t)\big)\right) = 0 \qquad (1.16)$$

tipindeki lineer olmayan değişken gecikmeli diferansiyel denklemini ele aldı. Burada $b:[0,\infty)\to[0,\infty)$ sürekli ve sınırlı bir fonksiyon, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f:[0,\infty)\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to[0,\infty)$ ve $\tau(t):[0,\infty)\to[0,\infty)$ sürekli fonksiyonlardır. Tunç (2014), (1.16) diferansiyel denklemi için Lyapunov fonksiyoneli yardımıyla çözümlerin kararlılığını ve sınırlılığını inceledi.

Graef ve Tunç (2014), ikinci mertebeden

$$x'' + a(t)f(t,x,x')x' + g(t,x,x') + \sum_{i=1}^{n} h_i\big(x(t-\tau_i)\big) = \int_0^t C(t,\tau)x'(\tau)d\tau \qquad (1.17)$$

biçimindeki lineer olmayan sabit gecikmeli diferansiyel denklemini ele aldı. Burada $I=[0,\infty)$ olmak üzere $a(t)$ fonksiyonu I üzerinde tanımlı pozitif sürekli bir fonksiyon, f fonksiyonu $(t,x,x')\in I\times\mathbb{R}^2$ için $f(t,x,x')\geq 0$ şartını sağlayan sürekli bir fonksiyon, g ve h fonksiyonları sürekli fonksiyonlar olup $y\neq 0$ için $g(t,x,y)y>0$ ve $x\neq 0$ için $xh_i(x)>0$ dır. $C(t,s)$ fonksiyonu ise $0\leq s\leq t<\infty$ için sürekli bir fonksiyondur. Graef ve Tunç (2014), (1.17) diferansiyel denklemi için Lyapunov'un ikinci metodunu kullanarak çözümlerin global varlığını ve sınırlılığını inceledi.

Çalışmanın beşinci bölümünde üçüncü mertebeden lineer olmayan,

$$\Big(q(t)\big(p(t)x'(t)\big)'\Big)' + a(t)f(t,x,x')x'' + b(t)g(t,x)x' + c(t)h(x)$$

$$= \int_0^t C(t,s)x'(s)ds \qquad (1.18)$$

formundaki integro diferansiyel denklemi, yine üçüncü mertebeden

$$\Big(q(t)\big(p(t)x'(t)\big)'\Big)' + a(t)\psi\big(t,x(t),x'(t)\big)x''(t) + b(t)f\big(t,x(t)\big)x'(t)$$

$$+c(t)g\big(x'(t-r)\big) + d(t)h\big(x(t-r)\big) = e(t) \qquad (1.19)$$

tipindeki sabit gecikmeli diferansiyel denklemi ve üçüncü mertebeden

$$(\varphi(x)x')'' + a(t)f(t,x,x')x'' + b(t)g(x,x') + \sum_{i=1}^{n} c_i(t)h_i\big(x(t-\tau_i)\big)$$
$$= p(t) \qquad (1.20)$$

biçimindeki sabit gecikmeli diferansiyel denklemi için çözümlerin global varlığı ve sınırlılığı araştırıldı.

İlgili matematik literatürüne bakıldığında 1974 e kadar üçüncü mertebeden lineer ve lineer olmayan diferansiyel denklemlerin çözümlerinin kararlılık, sınırlılık, periyodik çözümlerin varlığı vb.ile ilgili yapılan çalışmaların çoğunu içeren temel bir kaynak olarak Reissig ve ark. (1974) tarafından yayınlanan kitaba başvurulabilir. Ayrıca üçüncü mertebeden lineer olmayan diferansiyel denklemlerin çözümlerinin niteliksel davranışları üzerine yapılmış ve bu tezin beşinci bölümünde (1.18)-(1.20) diferansiyel denklemlerinin çözümlerinin global varlığı ve sınırlılığı ile ilgili yapılacak çalışmalarla ilgili olan bazı çalışmalar aşağıdaki gibi özetlenebilir:

Ezeilo (1961), üçüncü mertebeden

$$x''' + g(x')x'' + bx' + f(x) = p(t) \qquad (1.21)$$

tipindeki lineer olmayan diferansiyel denklemini ele aldı. Burada b pozitif bir sabit ve f, g, p sürekli fonksiyonlardır. Ezeilo (1961), (1.21) diferansiyel denklemi için Lyapunov fonksiyonu yardımıyla çözümlerin sınırlılığını inceledi.

Ezeilo (1963), üçüncü mertebeden

$$x''' + f(x,x')x'' + g(x') + h(x) = p(t) \qquad (1.22)$$

tipindeki lineer olmayan diferansiyel denklemini ele aldı. Burada f, g, h, p ve her x, x' için $f_x, h'(x)$ sürekli fonksiyonlardır. Ezeilo (1962), (1.22) diferansiyel denklemi için Lyapunov'un ikinci metodunu kullanarak çözümlerin sınırlılığını inceledi.

Swich (1969), üçüncü mertebeden

$$x''' + p(t)x'' + q(t)g(x') + r(t)h(x) = 0 \qquad (1.23)$$

$$x''' + f(t,x,x')x'' + q(t)g(x') + r(t)h(x) = 0 \qquad (1.24)$$

ve

$$x''' + p(t)x'' + q(t)g(x') + r(t)h(x) = e(t) \tag{1.25}$$

formundaki lineer olmayan diferansiyel denklemlerini ele aldı. Burada p, q, r, f, g, h ve e sürekli fonksiyonlardır. Swick (1969), (1.23)-(1.25) diferansiyel denklemleri için Lyapunov fonksiyonu yardımıyla çözümlerin kararlılığını ve sınırlılığını inceledi.

Hara (1981), üçüncü mertebeden

$$x''' + a(t)f(x, x')x'' + b(t)g(x, x') + c(t)h(x) = p(t, x, x', x'') \tag{1.26}$$

formundaki lineer olmayan diferansiyel denklemini ele aldı. Burada a, b, c, p, f, g, h ve her x, x' için $f_x, g_x, h'(x)$ sürekli fonksiyonlardır. Hara (1981), (1.26) diferansiyel denklemi için Lyapunov'un ikinci metodunu kullanarak çözümlerin düzgün sınırlılığını inceledi.

Mehri ve Shadman (1999), üçüncü mertebeden

$$x''' + a(t)f(x'') + b(t)g(x') + c(t)h(x) = e(t) \tag{1.27}$$

biçimindeki lineer olmayan diferansiyel denklemini ele aldı. Burada a, b, c ve e, $(0, \infty)$ üzerinde, f, g ve h, $\mathbb{R}$ üzerinde sürekli fonksiyonlardır. Mehri ve Shadman (1999), (1.27) diferansiyel denklemi için Lyapunov'un ikinci metodunu kullanarak çözümlerinin sınırlılığını inceledi.

Qian (2000), üçüncü mertebeden

$$x''' + \psi(x, x')x'' + f(x, x') = 0 \tag{1.28}$$

tipindeki lineer olmayan diferansiyel denklemini ele aldı. Burada ψ, f, ψ_x ve $f_x \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ dir. Qian (2000), (1.28) diferansiyel denklemi için Lyapunov'un ikinci metodunu kullanarak çözümlerin global kararlılığını inceledi.

Sadek (2003), üçüncü mertebeden

$$x''' + ax'' + g\left(x'\big(t - r(t)\big)\right) + f\left(x\big(t - r(t)\big)\right) = p(t) \tag{1.29}$$

tipindeki lineer olmayan değişken gecikmeli diferansiyel denklemini ele aldı. Burada $g(x'), f(x), p(t)$ sürekli fonksiyonlar ve a, λ pozitif sabitler olmak üzere $0 \leq r(t) < \lambda$ dir. Sadek (2003), (1.29) diferansiyel denklemi için Lyapunov fonksiyonu yardımıyla çözümlerin kararlılığını ve sınırlılığını inceledi.

Ademola ve Arawomo (2008), üçüncü mertebeden

$$x''' + f(t, x, x')x'' + q(t)g(x') + r(t)h(x) = p(t, x, x', x'') \quad (1.30)$$

formundaki lineer olmayan diferansiyel denklemini ele aldı. Burada $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ olmak üzere $p: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g, h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ve $q, r: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ dir. Ademola ve Arawomo (2008), (1.30) diferansiyel denklemi için Lyapunov'un ikinci metodunu kullanarak çözümlerin kararlılığını ve sınırlılığını inceledi.

Omeike (2009), üçüncü mertebeden

$$x'''(t) + a(t)x''(t) + b(t)g(x') + c(t)h\big(x(t - r)\big) = p(t) \quad (1.31)$$

tipindeki sabit gecikmeli diferansiyel denklemini ele aldı. Burada r pozitif bir sabit ve $a(t), b(t), c(t), g(x'), h(x)$ reel değerli sürekli fonksiyonlardır. Omeike (2009), (1.31) diferansiyel denklemi için Lyapunov'un ikinci metodunu kullanarak çözümlerin kararlılığını ve sınırlılığını inceledi.

Omeike (2010a), üçüncü mertebeden

$$x''' + \psi(x', x'')x'' + f(x, x') = p(t) \quad (1.32)$$

tipindeki lineer olmayan diferansiyel denklemini ele aldı. Burada $\psi, f, \psi_x, f_x \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ ve $p \in C([0, \infty), \mathbb{R})$ dir. Omeike (2010a), (1.32) diferansiyel denklemi içn Lyapunov'un ikinci metodunu kullanarak çözümlerin global kararlılığını inceledi.

Omeike (2010b), üçüncü mertebeden

$$x''' + \varphi(x, x')x'' + g\left(x'\big(t - r(t)\big)\right) + f\left(x\big(t - r(t)\big)\right) = p(t, x, x', x'') \quad (1.33)$$

tipindeki lineer olmayan değişken gecikmeli diferansiyel denklemini ele aldı. Burada $\varphi(x, x')$, $g(x')$, $f(x)$, $p(t, x, x', x'')$ sürekli fonksiyonlar ve λ pozitif bir sabit olmak üzere $0 \leq r(t) < \lambda$ dir. Omeike (2010b), (1.33) diferansiyel denklemi için Lyapunov'un ikinci metodunu kullanarak çözümlerin düzgün sınırlılığını inceledi.

Afuwape ve Omeike (2010), üçüncü mertebeden

$$x'''(t) + h(x'(t))x''(t) + g\left(x'(t - r(t))\right) + f\left(x(t - r(t))\right)$$

$$= p\left(t, x(t), x(t - r(t)), x'(t), x'(t - r(t)), x''(t)\right) \qquad (1.34)$$

tipindeki lineer olmayan değişken gecikmeli diferansiyel denklemini ele aldı. Burada $f(x),\ g(x'),\ h(x'),\ p(t, x, , x(t - r(t)), x', x'(t - r(t)), x'')$ sürekli fonksiyonlardır. Ayrıca λ pozitif bir sabit ve $0 < \beta < 1$ olmak üzere $0 \leq r(t) < \lambda,\ r'(t) \leq \beta$ dır. Afuwape ve Omeike (2010), (1.34) diferansiyel denklemi için Lyapunov fonksiyonu yardımıyla çözümlerin sınırlılığını ve kararlılığını inceledi.

Tunç (2010a), üçüncü mertebeden

$$x'''(t) + g(x(t), x'(t))x''(t) + f(x(t - r), x'(t - r)) + h(x(t - r))$$

$$= p(t, x(t), x(t - r), x'(t), x'(t - r), x''(t)) \qquad (1.35)$$

tipindeki lineer olmayan sabit gecikmeli diferansiyel denklemini ele aldı. Burada r pozitif bir sabit, $t \in \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ olmak üzere g, f, h ve p sırasıyla $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}$ ve $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^5$ üzerinde sürekli fonksiyonlardır. Tunç (2010a), (1.35) diferansiyel denklemi için Lyapunov'un ikinci metodunu kullanarak çözümlerin sınırlılığını ve kararlılığını inceledi.

Ademola ve Arawomo (2011a), üçüncü mertebeden

$$x''' + \psi(t)f(x, x', x'')x'' + \phi(t)g(x, x') + \varphi(t)h(x, x', x'')$$

$$= p(t, x, x', x'') \qquad (1.36)$$

formundaki diferansiyel denklemini ele aldı. Burada $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ olmak üzere $p \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3, \mathbb{R})$; $f, h \in C(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$; $g \in C(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ ve $\psi, \phi, \varphi \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ dir. Ademola ve Arawomo (2011a), (1.36) diferansiyel denklemi için Lyapunov'un ikinci metodunu kullanarak çözümlerin asimtotik davranışlarını inceledi.

Ademola ve Arawomo (2011b), üçüncü mertebeden

$$x''' + f(t, x, x', x'')x'' + q(t)g(x') + r(t)h(x) = p(t, x, x', x'') \tag{1.37}$$

biçimindeki lineer olmayan diferansiyel denklemini ele aldı. Burada $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ olmak üzere $f, p \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, $g, h \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ve $q, r \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ dir. Ademola ve Arawomo (2011b), (1.37) diferansiyel denklemi için Lyapunov'un ikinci metodunu kullanarak çözümlerin kararlılığını ve düzgün sınırlılığını inceledi.

Tunç (2012a), üçüncü mertebeden

$$x'''(t) + a(t)x''(t) + \sum_{i=1}^{n} b_i(t)g_i\big(x'(t-\tau_i)\big) + g\big(x'(t)\big) + h\big(x(t-\tau)\big)$$

$$= p\big(t, x(t), \dots, x(t-\tau_n), x'(t), \dots, x'(t-\tau_n), x''(t), \dots, x''(t-\tau_n)\big) \tag{1.38}$$

tipindeki lineer olmayan sabit gecikmeli diferansiyel denklemini ele aldı. Burada τ ve $\tau_i, (i = 1,2, \dots, n)$ pozitif sabitler ve $t \in \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ olmak üzere b_i, g, g_i, h, p sürekli fonksiyonlardır. Tunç (2012a), (1.38) diferansiyel denklemi için Lyapunov'un ikinci metodunu kullanarak çözümlerin bazı niteliksel davranışlarını inceledi.

Afuvape ve Carvajal (2012), üçüncü mertebeden

$$x''' + a(t)f(x, x', x'') + b(t)g(x, x') + c(t)h(x) = p(t, x, x', x'') \tag{1.39}$$

biçimindeki lineer olmayan diferansiyel denklemini ele aldı. Burada a, b, c, p, f ve g sürekli fonksiyonlar olmak üzere $g_x(x, x')$ ve $h'(x)$ tüm x ve x' için süreklidir. Afuvape ve Carvajal (2012), (1.39) diferansiyel denklemi için Lyapunov fonksiyonu yardımıyla çözümlerinin sınırlılığını inceledi.

Zhang ve Yu (2013), üçüncü mertebeden

$$x''' + g(x, x', x'') + f(x, x')x' + h(x) = 0 \tag{1.40}$$

formundaki lineer olmayan diferansiyel denklemini ele aldı. Burada $h \in C^1(R), f, f_x$ ve g sürekli fonksiyonlardır. Zhang ve Yu (2013), (1.40) diferansiyel denklemi için Lyapunov'un ikinci metodunu kullanarak çözümlerin global asimtotik kararlılığını inceledi.

Ademola ve Arawomo (2013), üçüncü mertebeden

$$x''' + f(x, x', x'')x'' + g\Big(x\big(t - r(t)\big), x'\big(t - r(t)\big)\Big) + h\Big(x\big(t - r(t)\big)\Big)$$
$$= p(t, x, x', x'') \qquad (1.41)$$

tipindeki lineer olmayan değişken gecikmeli diferansiyel denklemini ele aldı. Burada f, g, h, p sürekli fonksiyonlar ve λ pozitif bir sabit olmak üzere $0 \leq r(t) \leq \lambda$ dır. Ademola ve Arawomo (2013), (1.41) diferansiyel denklemi için Lyapunov'un ikinci metodunu kullanarak çözümlerin düzgün kararlılığını ve sınırlılığını inceledi.

Oudjedi ve ark. (2014), üçüncü mertebeden

$$\Big(q(t)\big(p(t)x'(t)\big)'\Big)' + a(t)x''(t) + b(t)x'(t) + c(t)f\big(x(t-r)\big) = 0 \qquad (1.42)$$

biçimindeki lineer olmayan sabit gecikmeli diferansiyel denklemini ele aldı. Burada p ve q, $[0, \infty)$ üzerinde f ise her $x \in \mathbb{R}$ için sürekli türevlenebilen fonksiyonlardır. Oudjedi ve ark. (2014), (1.42) diferansiyel denklemi için Lyapunov'un ikinci metodu yardımıyla çözümlerinin düzgün asimptotik kararlılığını inceledi. (1.42) denklemi,

$$x' = \frac{1}{p(t)}y,$$

$$y' = \frac{1}{q(t)}z,$$

$$z' = -A(t)z - B(t)y - c(t)f(x) + c(t)\int_{t-r}^{t}\frac{y(s)}{p(s)}f'\big(x(s)\big)ds$$

sistemine denktir. Burada

$$A(t) = \frac{a(t)}{p(t)q(t)}, \qquad B(t) = \frac{b(t)p(t) - a(t)p'(t)}{p^2(t)}$$

dir.

Teorem 1.3.

$$\frac{M}{a_0} < \alpha < \frac{1}{M\delta_1}, \qquad a_2 = \frac{1}{\alpha M} a_1 + 2n(1 - \alpha M\delta_1) + N \text{ ve } a_3 = \frac{N}{nm} + \frac{a_1 L}{nm^2}$$

olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlansın:

i) $0 < m \leq p(t) \leq M,\ 0 < m \leq q(t) \leq M,$

ii) $-L \leq p'(t) \leq 0,\ -L \leq q'(t) \leq 0$ ve $p''(t) \geq 0,$

iii) $f(0) = 0, x \neq 0$ için $\frac{f(x)}{x} \geq \delta_0 > 0$ ve $|f'(x)| \leq \delta_1,$

iv) $0 < a_0 \leq a(t) \leq a_1,$

v) $0 < n \leq c(t) \leq b(t) \leq N$ ve $-N \leq b'(t) \leq c'(t) \leq 0,$

vi) $\big(p(t)c(t)\big)' \leq \big(q(t)c(t)\big)' \leq 0.$

Bu taktirde (1.42) denkleminin tüm çözümleri düzgün asimptotik kararlıdır.

Remili ve Oudjedi (2014), üçüncü mertebeden

$$\Big(g\big(x(t)\big)x'(t)\Big)'' + a(t)x''(t) + b(t)x'(t) + c(t)f\big(x(t-r)\big) = p(t) \qquad (1.43)$$

tipindeki lineer olmayan sabit gecikmeli diferansiyel denklemini ele aldı. Burada r pozitif bir sabit, $a(t), b(t), c(t), g(x), p(t)$ ve $g(x)$ sürekli fonksiyonlardır. Remili ve Oudjedi (2014), (1.43) diferansiyel denklemi için Lyapunov fonksiyonu yardımıyla çözümlerin kararlılığını ve sınırlılığını inceledi. (1.43) denklemi,

$$x' = \frac{1}{g(x)} y,$$

$$y' = z$$

$$z' = \frac{a(t)}{g(x)} z + \frac{a(t)g'(x)}{g^3(x)} y^2 - \frac{b(t)}{g(x)} y + c(t)f(x) + c(t) \int_{t-r}^{t} y(s) \frac{f'\big(x(s)\big)}{g\big(x(s)\big)} ds + p(t)$$

sistemine denktir.

Teorem 1. 4. $a_0, b_0, c_0, d, A, B, C$ ve ε pozitif sabitler olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlansın:

i) $0 < a_0 \leq a(t) < A;\ 0 < b_0 \leq b(t) \leq B;\ 0 < c_0 \leq c(t) \leq C,$

ii) $c(t) \leq b(t) \leq,\ -L \leq b'(t) \leq c'(t) \leq 0,$ her $t \in [0, \infty)$ için,

iii) $0 < m \leq g(x) \leq M,$

iv) $f(0) = 0, x \neq 0$ için $\frac{f(x)}{x} \geq \delta_0 > 0$ ve $|f'(x)| \leq \delta_1,$

v) $M\delta_1 < d < a_0,$

vi) $\frac{1}{2} da'(t) - b_0(d - M\delta_1) \leq -\varepsilon < 0,$

vii) $\int_{-\infty}^{\infty} |g'(u)|\, du < \infty.$

Bu takdirde,

$$r < min\left\{\frac{2(a_0 - d)}{MC\delta_1}, \frac{2m^3\varepsilon}{M^2C\delta_1(d + dm^2 + m)}\right\}$$

ise (1.43) denkleminin tüm çözümleri asimtotik kararlıdır.

Üçüncü mertebeden lineer olmayan diferansiyel denklemlerin çözümlerinin niteliksel davranışları ile ilgili daha fazla bilgi için literatürdeki başka çalışmalara da bakılabilir.

Son olarak çalışmanın altıncı bölümünde ise dördüncü mertebeden

$$(\phi(x)x''')' + a(t)\varphi(x'', x''')x''' + b(t)f(x, x')x'' + c(t)g\big(x'(t - r)\big)$$
$$+d(t)h\big(x(t - r)\big) = p(t, x, x', x'', x''') \qquad (1.44)$$

biçimindeki lineer olmayan sabit gecikmeli diferansiyel denklemi için çözümlerin global varlığı ve sınırlılığı araştırıldı. İlgili matematik literatürüne bakıldığında, dördüncü mertebeden lineer olmayan diferansiyel denklemlerin çözümlerinin niteliksel davranışları üzerine yapılmış ve bu tezin altıncı bölümünde (1.44) diferansiyel denkleminin çözümlerinin global varlığı ve sınırlılığı ile ilgili yapılacak çalışmayla ilgili olan bazı çalışmalar aşağıdaki gibi özetlenebilir:

Cartwright (1956), dördüncü mertebeden

$$x^{(4)} + a_1 x''' + a_2 x'' + a_3 x' + f(x) = 0 \tag{1.45}$$

tipindeki lineer olmayan diferansiyel denklemini ele aldı. Burada a_1, a_2, a_4 pozitif sabitler, $f(0) = 0, f'(0) = 0$ ve f'' sürekli fonksiyonlardır. Cartwright (1956), (1.45) diferansiyel denklemi için Lyapunov'un ikinci metodunu kullanarak çözümlerin kararlılığını inceledi.

Ogurcov (1958), dördüncü mertebeden

$$x^{(4)} + \psi(x, x')x'' + \varphi(x') + f(x) = 0 \tag{1.46}$$

formundaki lineer olmayan diferansiyel denklemini ele aldı. Burada ψ, φ, ψ_x ve f' sürekli fonksiyonlar olup $\varphi(0) = f(0) = 0$ dır. Ogurcov (1958), (1.46) diferansiyel denklemi için Lyapunov'un ikinci metodunu kullanarak çözümlerin kararlılığını inceledi.

Ogurcov (1959), dördüncü mertebeden

$$x^{(4)} + f(x''') + cx'' + bx' + ax = 0 \tag{1.47}$$

biçimindeki lineer olmayan diferansiyel denklemini ele aldı. Burada a, b, c pozitif sabitler ve f sürekli türevlenebilen bir fonksiyondur. Ogurcov (1959), (1.47) diferansiyel denklemi için Lyapunov'un ikinci metodunu kullanarak çözümlerin kararlılığını inceledi.

Ezeilo (1962a), dördüncü mertebeden

$$x^{(4)} + a_1 x''' + a_2 x'' + g(x') + a_4 x = 0 \tag{1.48}$$

tipindeki lineer olmayan diferansiyel denklemini ele aldı. Burada a_1, a_2, a_4 pozitif sabitler ve $g(x')$ sürekli bir fonksiyondur. Ezeilo (1962a), (1.48) diferansiyel denklemi için Lyapunov fonksiyonu yardımıyla çözümlerin kararlılığını inceledi.

Ezeilo (1962b), dördüncü mertebeden

$$x^{(4)} + f(x'')x''' + \alpha_2 x'' + g(x') + \alpha_4 x = p(t) \tag{1.49}$$

formundaki lineer olmayan diferansiyel denklemini ele aldı. Burada α_2, α_4 pozitif sabitler ve $f(x''), g(x'), g'(x'), p(t)$ sürekli fonksiyonlardır. Ezeilo (1962b), (1.49) diferansiyel denklemi için Lyapunov'un ikinci metodunu kullanarak çözümlerin kararlılığını ve sınırlılığını inceledi.

Skidmore (1966), dördüncü mertebeden

$$x^{(4)} + \psi(x, x', x'')x''' + \theta(x, x', x'') = 0 \tag{1.50}$$

tipindeki lineer olmayan diferansiyel denklemini ele aldı. Burada $\theta(0,0,0) = 0$ ve $\psi, \theta \in C^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ dir. Skidmore (1966), (1.50) diferansiyel denklemi için Lyapunov'un ikinci metodunu kullanarak çözümlerin kararlılığını inceledi.

Harrow (1970a), dördüncü mertebeden

$$x^{(4)} + ax + bx + cx + h(x) = p(t) \tag{1.51}$$

formundaki lineer olmayan diferansiyel denklemini ele aldı. Burada a, b, c pozitif sabitler, h sürekli türevlenebilir ve p sürekli bir fonksiyondur. Harrow (1970a), (1.51) diferansiyel denklemi için Lyapunov fonksiyonu yardımıyla çözümlerin kararlılığını ve sınırlılığını inceledi.

Harrow (1970b), dördüncü mertebeden

$$x^{(4)} + ax''' + f(x'') + g(x') + h(x) = p(t) \tag{1.52}$$

biçimindeki lineer olmayan diferansiyel denklemini ele aldı. Burada a pozitif bir sabit ve f, g, h, p, g' ve h' sürekli fonksiyonlardır. Harrow (1970b), (1.52) diferansiyel denklemi için Lyapunov'un ikinci metodunu kullanarak çözümlerin kararlılığını ve sınırlılığını inceledi.

Sinha ve Haft (1971), dördüncü mertebeden

$$x^{(4)} + f(x'')x''' + \varphi(x', x'')x'' + \psi(x') + \theta(x) = p(t) \tag{1.53}$$

tipindeki lineer olmayan diferansiyel denklemini ele aldı. Burada f, φ, ψ, θ ve p sürekli fonksiyonlardır. Sinha (1971), (1.53) diferansiyel denklemi için Lyapunov fonksiyonu yardımıyla çözümlerin kararlılığını inceledi.

Lalli ve Skrapek (1971a), dördüncü mertebeden

$$x^{(4)} + f_1(x'')x''' + f_2(x', x'') + g(x') + h(x, x') = p(t) \qquad (1.54)$$

formundaki lineer olmayan diferansiyel denklemini ele aldı. Burada $f_1, f_2, h, p,$ $g'(x'), \frac{\partial f_2(x',x'')}{\partial y}, \frac{\partial h(x,x')}{\partial y}$ sürekli fonksiyonlar ve $f_2(x', 0) = g(0) = h(0, x') = 0$ dır. Lalli ve Skrapek (1971a), (1.54) diferansiyel denklemi için Lyapunov'un ikinci metodu yardımıyla çözümlerin kararlılığını ve sınırlılığını inceledi.

Duan (1987), dördüncü mertebeden

$$x^{(4)} + \psi(x, x', x'')x''' + bx'' + \varphi(x, x') + dx = 0 \qquad (1.55)$$

biçimindeki lineer olmayan diferansiyel denklemini ele aldı. Burada b, d pozitif sabitler ve $\psi, \varphi \in C^1$ dir. Duan (1987), (1.55) diferansiyel denklemi için Lyapunov'un ikinci metodunu kullanarak çözümlerin kararlılığını inceledi.

Tunç (1995b), dördüncü mertebeden

$$x^{(4)} + \varphi(x, x', x'', x''')x''' + f(x', x'') + g(x, x') + h(x)$$
$$= p(t, x, x', x'', x''') \qquad (1.56)$$

tipindeki lineer olmayan diferansiyel denklemini ele aldı. Burada $\varphi, f, g, h,$ ve p sürekli fonksiyonlar olmak üzere $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_u, f_y, g_x, g_y$ ve h' her x, y, z, u için sürekli fonksiyonlardır. Tunç (1995b), (1.56) diferansiyel denklemi için Lyapunov'un ikinci metodunu kullanarak çözümlerin kararlılığını ve sınırlılığını inceledi.

Tunç (2004), dördüncü mertebeden

$$x^{(4)} + \varphi(x'')x''' + f(x, x')x'' + g(x') + h(x) = p(t, x, x', x'', x''') \qquad (1.57)$$

formundaki lineer olmayan diferansiyel denklemini ele aldı. Burada φ, f, g, h, g', h' ve p sürekli fonksiyonlardır. Tunç (2004), (1.57) diferansiyel denklemi için Lyapunov'un ikinci metodunu kullanarak çözümlerin kararlılığını ve sınırlılığını inceledi.

Tunç (2005c), dördüncü mertebeden

$$x^{(4)} + a(x'', x''')x''' + b(x, x')x'' + c(x') + d(x) = p(t, x, x', x'', x''') \qquad (1.58)$$

biçimindeki lineer olmayan diferansiyel denklemini ele aldı. Burada a, b, c, d ve p sürekli fonksiyonlardır. Tunç (2005c), (1.58) diferansiyel denklemi için Lyapunov'un ikinci metodunu kullanarak çözümlerin kararlılığını ve sınırlılığını inceledi. (1.58) denklemi,

$x' = y,$

$y' = z,$

$z' = u,$

$u' = -a(z, u)u - b(x, y)z - c(y) - d(x) + p(t, x, y, z, u),$

sistemine denktir.

Teorem 1.5. $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \mu, \eta$ ve ε_1 pozitif sabitler olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlansın:

i) $0 \leq a(z, u) - \alpha \leq \varepsilon_1,$

ii) her $y \neq 0$ için $c_1(y) \geq \beta$ ve $c(0) = 0,$

iii) $0 \leq b(x, y) - \mu \leq \sqrt{\frac{\delta\varepsilon_1}{4\beta}}$ ve $y \int_0^y b_x(x, y) y dy \leq -\left(\frac{\beta^2}{\alpha\gamma}\right) y^2,$

iv) her $x \neq 0$ için $d(x)x > 0$, her x için $0 \leq \gamma - d'(x) \leq \frac{\sqrt{\delta}}{2}$ ve $d(0) = 0,$

v) her y, z ve u için, $\alpha\beta\mu - \beta c'(y) - \alpha\gamma a(z, u) \geq \delta,$

vi) her $y \neq 0$ için, $c'(y) - c_1(y) \leq \eta < \frac{2\delta\gamma}{\alpha\beta^2}$ ve her $z \neq 0, u$ için $a_1(z, u) - a(z, u) \leq \varepsilon \leq \frac{2\delta}{\alpha^2\beta},$

vii) her y, z ve u için, $\gamma y a_u(z,u) + \beta z a_u(z,u) \geq 0$.

O zaman (1.58) denkleminin çözümleri asimptotik kararlıdır.

Tunç (2007b), dördüncü mertebeden

$$x^{(4)} + \varphi(x'')x''' + f(x,x',x'')x'' + g(x,x') + h(x)$$
$$= p(t,x,x',x'',x''') \qquad (1.59)$$

tipindeki lineer olmayan diferansiyel denklemini ele aldı. Burada φ, f, g, h ve p sürekli fonksiyonlardır. Tunç (2007b), (1.59) diferansiyel denklemi için Lyapunov'un ikinci metodunu kullanarak çözümlerin kararlılığını ve sınırlılığını inceledi.

Ogundare ve Okecha (2008), dördüncü mertebeden

$$x^{(4)} + ax''' + bx'' + g(x') + h(x) = p(t) \qquad (1.60)$$

formundaki lineer olmayan diferansiyel denklemini ele aldı. Burada a ve b pozitif sabitler, g, h ve p sürekli fonksiyonlardır. Ogundare ve Okecha (2008), (1.60) diferansiyel denklemi için Lyapunov'un ikinci metodunu kullanarak çözümlerin kararlılığını ve sınırlılığını inceledi.

Adesina ve Ogundare (2012), dördüncü mertebeden

$$x^{(4)} + \phi(x''')x''' + f(x'')x'' + g(x') + h(x) = p(t,x,x',x'',x''') \qquad (1.61)$$

biçimindeki lineer olmayan diferansiyel denklemini ele aldı. Burada ϕ, f, g, h ve p sürekli fonksiyonlardır. Adesina ve Ogundare (2012), (1.61) diferansiyel denklemi için Lyapunov'un ikinci metodunu kullanarak çözümlerin kararlılığını ve sınırlılığını inceledi.

Yukarıda verilen çalışmaların yanı sıra dördüncü mertebeden diferansiyel denklemlerin çözümlerinin niteliksel davranışları üzerine yapılan çalışmalar için ilgili matematik literatürüne başvurulabilir.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

Giriş ve Literatür Bildirişleri bölümüne bakıldığında ilgili literatürde ikinci mertebeden, üçüncü mertebeden ve dördüncü mertebeden lineer olmayan diferansiyel denklemler ile ilgili birçok çalışmanın olduğu görülmektedir. Bunun yanısıra son yıllarda ikinci mertebeden lineer olmayan diferansiyel denklemlerin çözümlerinin global varlığı üzerine bazı çalışmalar yapılmış olmasına rağmen üçüncü ve dördüncü mertebeden diferansiyel denklemlerin çözümlerinin global varlığı üzerine çok az sayıda çalışmaya yer verilmiştir.

Bu çalışmada materyal olarak ikinci, üçüncü ve dördüncü mertebeden diferansiyel denklemlerin çözümlerinin niteliksel davranışları ile ilgili kaynaklar bölümünde belirtilen çalışmalar kullanılarak bu çalışmanın birinci bölümünde ifade edilen diferansiyel denklemlerin çözümlerinin global varlığı ve sınırlılığı ile ilgili literatüre katkı sağlayacağını düşündüğümüz bazı çalışmalara yer vereceğiz.

Tezimiz "1. GİRİŞ VE LİTERATÜR BİLDİRİŞLERİ" ve "2. MATERYAL VE YÖNTEM" bölümleriyle beraber yedi bölümden oluşmaktadır.

İlk olarak, bundan sonraki bölümde, bu tez çalışmasında ele alınan diferansiyel denklemlerin çözümlerinin global varlığı ve sınırlılığını incelemek için kullanılacak yöntemler ile ilgili bazı temel tanım, lemma ve teoremler verilecektir.

Çalışmanın dördüncü bölümünde Lyapunov'un ikinci metodunu kullanarak ikinci mertebeden lineer olmayan sabit gecikmeli bir integro diferansiyel denklemin, ikinci mertebeden lineer olmayan bir integro vektör diferansiyel denklemin ve ikinci mertebeden lineer olmayan değişken gecikmeli bir integro vektör diferansiyel denklemin çözümlerinin global varlığı ve sınırlılığı için yeter şartlar elde edilecek. Ayrıca Lyapunov'un ikinci metodu yerine bir integral eşitsizliği kullanarak bu çalışmada ele aldığımız ikinci mertebeden lineer olmayan integro vektör diferansiyel denklemin çözümlerinin global varlığı ve sınırlılığı için yeter şartlar elde edilecek.

Çalışmanın beşinci bölümünde Lyapunov'un ikinci metodunu kullanarak üçüncü mertebeden lineer olmayan bir integro diferansiyel denklemi ve üçüncü mertebeden lineer olmayan sabit gecikmeli iki diferansiyel denklemin çözümlerinin global varlığı ve sınırlılığı için yeter şartlar elde edilecek.

Çalışmanın altıncı bölümünde Lyapunov'un ikinci metodunu kullanarak dördüncü mertebeden lineer olmayan sabit gecikmeli bir diferansiyel denklemin çözümlerinin global varlığı ve sınırlılığı için yeter şartlar elde edilecek.

Son bölümde ise tezimizde yaptığımız çalışmalar ile literatürde yer alan bazı çalışmaların karşılaştırılması yapılacaktır.

3. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde, daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı temel tanımlar ve teoremler örnekleri ile birlikte verilecektir.

Tanım 3.1.

I, I_1 iki aralık ve f, $I \times \mathbb{R}$ üzerinde tanımlı reel değerli sürekli bir fonksiyon olmak üzere $u(t)$ ve $v(t)$,

$$\begin{cases} u' = f(t,u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases} \tag{3.1}$$

ile verilen başlangıç değer probleminin sırasıyla bu aralıklarda tanımlı çözümleri olsun. Eğer $I_1 \supset I$ ve her $t \in I$ için $u(t) = v(t)$ ise bu takdirde $v(t)$ çözümü $u(t)$ çözümünün bir sürdürülmesi olarak adlandırılır. Eğer böyle bir $v(t)$ çözümü yoksa $u(t)$ sürdürülemez olarak adlandırılır ve I aralığına da maksimum varlık aralığı denir (Ahmad ve Rao, 1999).

Tanım 3.2.

$D, \mathbb{R}^n$ nin açık bir alt kümesi ve (a,b), R de açık bir aralık olmak üzere $f:(a,b) \times D \to \mathbb{R}^n$ bir fonksiyon olsun. Buna göre $(t_0, x_0) \in (a,b) \times D$ noktasının bir N komşuluğu var ve $(t, x_1), (t, x_2) \in N$ için,

$$|f(t,x_1) - f(t,x_2)| \leq K|x_1 - x_2|$$

olacak şekilde bir K pozitif sabiti varsa $f:(a,b) \times D \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonu (t_0, x_0) noktasında x' e göre Local Lipschitz şartını sağlıyor denir (Burton, 1985).

Teorem 3.1. (Picard-Lindelöf Teoremi)

a, b pozitif sabitler olmak üzere $f(t,u)$, $B_0 : t_0 \leq t \leq t_0 + a, \|u - u_0\| \leq b$ üzerinde sürekli ve $\|f(t,u) - f(t,v)\| \leq L\|u - v\|$ Lipschitz şartını sağlıyor ise bu takdirde, $M = max_{(t,x) \in B_0} \|f(t,x)\|$ ve $c = min\left(a, \frac{b}{M}\right)$ olmak üzere (3.1) başlangıç değer problemi $t_0 \leq t \leq t_0 + a$ aralığı üzerinde bir tek $u(t)$ çözümüne sahiptir (Ahmad ve Rao, 1999).

Uyarı. Bu tez çalışması boyunca kullanılan norm, Öklid normudur.

Örnek 3.1.

$$\begin{cases} u' = u^2 \\ u(0) = 2 \end{cases}$$

başlangıç değer problemini göz önüne alalım $S = \{(t,u): |t| \leq a\,, |u-2| \leq b\}$ dikdörtgeni içinde $M = max_S\{|f(t,u)|\} = (b+2)^2$ ve $c = min\left\{a, \frac{b}{(b+2)^2} \leq \frac{1}{8}\right\}$, dir. Buna göre verilen başlangıç değer probleminin $I = [-c,c] = \left[-\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right]$ aralığında bir çözümü vardır ve bu çözüm, $u(t) = \frac{2}{1-2t}$ olur. Ayrıca,

$$\begin{cases} u' = u^2 \\ u\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{8}{3} \end{cases}$$

başlangıç değer problemini ele aldığımızda $S = \left\{(t,u): \left|t - \frac{1}{8}\right| \leq \bar{a}\,, \left|u - \frac{8}{3}\right| \leq \bar{b}\right\}$ için $\bar{M}$ ve $\bar{c}$ sayıları bulunabilir ki, $I = \left[\frac{1}{8} - c_0, \frac{1}{8} + c_0\right]$ aralığı üzerinde son başlangıç değer probleminin bir $u_0(t)$ çözümü bulunabilir. Buna göre,

$$v(t) = \begin{cases} u(t), & t \in \left[-\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right] \\ u_0(t), & t \in \left[\frac{1}{8}, \frac{1}{8} + c_0\right] \end{cases}$$

fonksiyonuna $u(t)$ çözümünün bir sürdürülmesidir denir (Ahmad ve Rao, 1999).

Tanım 3.3.

Ω, $\mathbb{R}^n$ de sıfırı da içeren açık bir küme olmak üzere $V: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ olsun. Eğer $V(0) = 0$ ve $\forall x \in \Omega$ $(x \neq 0)$ için,

i) $V(x) > 0$ ise V fonksiyonuna pozitif tanımlıdır denir,

ii) $V(x) \geq 0$ ise V fonksiyonuna pozitif yarı tanımlıdır denir,

iii) $V(x) < 0$ ise V fonksiyonuna negatif tanımlıdır denir,

iv) $V(x) \leq 0$ ise V fonksiyonuna negatif yarı tanımlıdır denir (Hsu, 2006).

Tanım 3.4.

Ω, $\mathbb{R}^n$ de sıfır vektörünü içeren bir bölge ve $V: [0,\infty) \times \Omega \to [0,\infty)$ fonksiyonu verilsin. Eğer $t \geq 0$ için $V(t,0) = 0$ olmak üzere $V(t,x)$ fonksiyonu pozitif tanımlı ve birinci mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip ise bu takdirde V ye bir Lyapunov fonksiyonu adı verilir (Burton, 1985).

Örnek 3.2.

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}({x_1}^2 + {x_2}^2)$$

fonksiyonu $\mathbb{R}^2$ de pozitif tanımlıdır. Çünkü $V(0,0) = 0$ ve $x_1 \neq 0, x_2 \neq 0$ için $V(x_1, x_2) > 0$ olur.

Tanım 3.5.

i) Bir diferansiyel denklemde bilinmeyen fonksiyonun en yüksek mertebeden türevi sadece t bağımsız değişkenine bağlı, bilinmeyen fonksiyon ve daha düşük mertebeden türevleri t değişkenine ve t’nin t’den önceki değer(ler)ine bağlı ise bu tür bir fonksiyonel diferansiyel denkleme **gecikmeli** veya **gecikme argümanlı** diferansiyel denklem (delay differantial equation or differantial equation with retarded argument) denir,

ii) Bir diferansiyel denklemde bilinmeyen fonksiyonun en yüksek mertebeden türevi sadece t bağımsız değişkenine bağlı, bilinmeyen fonksiyon ve daha düşük mertebeden türevleri t değişkenine ve t’nin t’den sonraki değer(ler)ine bağlı ise bu tür bir fonksiyonel diferansiyel denkleme **ileri argümanlı** (advanced argument) diferansiyel denklem denir,

iii) Tanım 3.5.i ve 3.5.ii deki denklem türleri dışında kalan fonksiyonel diferansiyel denklemlere **nötral(neutral)** diferansiyel denklemler denir (Driver, 1977).

Örnek 3.3.

$$x''(t) + x'(t-r) - x(t-r) = p(t, x(t), x'(t))$$

denklemi $r > 0$ için bir gecikmeli diferansiyel denklem, $r < 0$ için ileri argümanlı bir diferansiyel denklemdir.

Örnek 3.4.

$$x'(t) - 2x(t-r)x'(t-r) = p(t, x(t-r))$$

denklemi ise nötral bir fonksiyonel diferansiyel denklemdir.

Teorem 3.2.

D, (t,u) düzleminde bir bölge olsun. $f \in C(D)$ ve bu bölge üzerinde sınırlı bir fonksiyon olmak üzere $\varphi(t)$ fonksiyonu, (3.1) de verilen başlangıç değer probleminin $I = (\alpha, \beta)$ aralığı üzerindeki bir çözümü olsun. Bu takdirde;

i) $lim_{t \to \beta^-} \varphi(t) = \varphi(\beta^-)$ ve $lim_{t \to \alpha^+} \varphi(t) = \varphi(\alpha^+)$ vardır.

ii) Eğer $(\alpha, \varphi(\alpha^+)) \in D$ veya $(\beta, \varphi(\beta^-)) \in D$ ise o zaman $\varphi(t)$ çözümü sırasıyla $t = \alpha$ nın soluna doğru veya $t = \beta$ nın sağına doğru sürdürülebilir (Miller ve Michel, 1982).

İspat:

i) $\varphi(t)$, (3.1) de verilen başlangıç değer probleminin bir çözümü olduğundan

$\forall\, t_0, t \in (\alpha, \beta)$ için

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, \varphi(s)\big)\, ds$$

olur. f fonksiyonu D üzerinde sınırlı olduğundan $(t,u) \in D$ olmak üzere bir $M > 0$ sayısı için $|f(t,u)| \leq M$ yazılabilir. Buradan $\alpha < t_1 < t_2 < \beta$ için

$$|\varphi(t_2) - \varphi(t_1)| = \left| \int_{t_1}^{t_2} f\big(s, \varphi(s)\big)\, ds \right| \leq M|t_2 - t_1|,$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan $t_1, t_2 \to \beta^-$ için $\varphi(t_2) - \varphi(t_1) \to 0$ olur. Bu ise Cauchy yakınsaklık kriterinden dolayı $lim_{t\to\beta^-} \varphi(t) = \varphi(\beta^-)$ olmasını gerektirir. Benzer şekilde $lim_{t\to\alpha^+} \varphi(t) = \varphi(\alpha^+)$ olduğu da gösterilebilir.

ii) $\left(\beta, \varphi(\beta^-)\right) \in D$ olduğunu kabul edelim. Birinci kısımdan dolayı $\varphi(\beta^-)$' nin varlığını bildiğimizden

$$\begin{cases} u' = f(t,u) \\ u(\beta) = \varphi(\beta^-) \end{cases}$$

başlangıç değer probleminin $[\beta - c, \beta + c]$ aralığında bir $\varphi_0(t)$ çözümü vardır. Şimdi bu çözümün $t \in [t_0, \beta + c]$ için

$$\varphi_0(t) = \varphi_0 + \int_{t_0}^{t} f\left(s, \varphi_0(s)\right) ds$$

bağıntısını sağladığını gösterelim. $t \in [\beta - c, \beta + c]$ için,

$$\varphi_0(t) = \varphi(\beta^-) + \int_{\beta}^{t} f\left(s, \varphi_0(s)\right) ds$$

olduğunu biliyoruz. Ayrıca $t \in (\alpha, \beta)$ için,

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \int_{t_0}^{t} f\left(s, \varphi(s)\right) ds$$

olduğundan

$$\varphi(\beta^-) = \varphi_0 + \int_{t_0}^{\beta} f\left(s, \varphi(s)\right) ds$$

olur. Böylece

$$\varphi_0(t) = \varphi_0 + \int_{t_0}^{\beta} f\left(s, \varphi_0(s)\right) ds + \int_{\beta}^{t} f\left(s, \varphi_0(s)\right) ds = \varphi_0 + \int_{t_0}^{t} f\left(s, \varphi_0(s)\right) ds$$

elde edilir. Bu ise (α, β) aralığında tanımlı $\varphi(t)$ çözümünün $(\alpha, \beta + c]$ aralığına sürdürülebilir olduğunu gösterir (Miller ve Michel, 1982).

Örnek 3.5.

$D = (t_0, \infty) \times (0, \infty)$ ve h, g pozitif değerli iki sürekli fonksiyon olsun. Buna göre,

$$u' = h(t)g(u)$$

denklemi için eğer $\int_{u_0}^{\infty} \frac{dx}{g(x)} = \infty$ ise bu denklemin bir $\varphi(t)$ çözümü (t_0, ∞) aralığına sürdürülebilirdir (Miller ve Michel, 1982).

Teorem 3.3. (Routh-Hurwitz kriteri)

$$L(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

reel katsayılı polinomunun tüm köklerinin negatif reel kısımlı olması için gerek ve yeter şart;

$H_n = [b_{ik}]$, (burada $b_{ik} = a_{2i-k}$ olup eğer $2i - k = 0$ ise $b_{ik} = 1$ ve $2i - k < 0$ veya $2i - k > 0$ ise $b_{ik} = 0$ dır.) matrisinin tüm köşegen minörlerinin pozitif olmasıdır (Sanchez, 1968).

Örnek 3.6.

$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3$ polinomuna karşılık gelen Hurwitz matrisi,

$H_3 = \begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_3 \end{bmatrix}$ dir. Buna göre verilen polinomun tüm köklerinin negatif reel kısımlı olması için $a_1 > 0, a_2 > 0$ ve $a_1a_2 - a_3 > 0$ olmalıdır.

Teorem 3.4. (Gronwal-Reid-Bellman eşitsizliği)

c negatif olmayan bir sabit, $u(t)$ ve $v(t)$, $[t_0, t_0 + a]$ aralığında negatif olmayan sürekli fonksiyonlar olsun. Eğer

$$u(t) \leq c + \int_{t_0}^{t} v(s)u(s)ds\,, \quad t \in [t_0, t_0 + a]$$

ise

$$u(t) \leq c exp\left(\int_{t_0}^{t} v(s)ds\right), \quad t \in [t_0, t_0 + a]$$

eşitliği sağlanır (Ahmad ve Rao, 1999).

İspat:

$w(t) = c + \int_{t_0}^{t} u(s)v(s)ds$ olsun. Buradan, $w(t_0) = c$ ve $u(t) \leq w(t)$ olduğu açıktır. $u(t)$ ve $v(t)$, $[t_0, t_0 + a]$ aralığında negatif olmayan sürekli fonksiyonlar olduğundan dolayı

$$w'(t) = u(t)v(t) \leq w(t)v(t), \qquad t \in [t_0, t_0 + a]$$

olur. Bu eşitsizliğin her tarafı $exp\left(-\int_{t_0}^{t} v(s)ds\right)$ ile çarpılırsa,

$$w'(t)exp\left(-\int_{t_0}^{t} v(s)ds\right) \leq w(t)v(t)exp\left(-\int_{t_0}^{t} v(s)ds\right),$$

olur. Buradan

$$\frac{d}{dt}\left(w(t)exp\left(-\int_{t_0}^{t} v(s)ds\right)\right) \leq 0,$$

elde edilir. Eğer bu eşitsizliğin t_0 dan t ye integrali alınırsa

$$w(t)exp\left(-\int_{t_0}^{t} v(s)ds\right) - w(t_0) \leq 0,$$

olur. Böylece $w(t_0) = c$ ve $u(t) \leq w(t)$ olduğundan

$$u(t) \leq cexp\left(\int_{t_0}^{t} v(s)ds\right), \quad t \in [t_0, t_0 + a]$$

elde edilir (Ahmad ve Rao, 1999).

Teorem 3.5. (Gronwal-Reid-Bellman eşitsizliği)

$f(t)$ pozitif, sürekli ve monoton azalmayan bir fonksiyon, $u(t)$ ve $v(t)$, $[t_0, t_0 + a]$ aralığında negatif olmayan sürekli fonksiyonlar olsun. Eğer

$$u(t) \leq f(t) + \int_{t_0}^{t} v(s)u(s)ds, \quad t \in [t_0, t_0 + a]$$

ise

$$u(t) \leq f(t)exp\left(\int_{t_0}^{t} v(s)ds\right), \quad t \in [t_0, t_0 + a]$$

eşitliği sağlanır (Ahmad ve Rao, 1999).

Lemma 3.1.

u, f ve g fonksiyonları $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ üzerinde negatif olmayan sürekli fonksiyonlar olmak üzere $c \geq 0$ sayısı verilsin. Eğer $\forall t \in \mathbb{R}_+$ için

$$u^2(t) \leq c^2 + 2\int_{0}^{t} [f(s)u^2(s) + g(s)u(s)]\, ds$$

ise $\forall t \in \mathbb{R}_+$ için

$$u(t) \leq p(t)exp\left(\int_{0}^{t} f(s)ds\right)$$

dir. Burada $p(t) = c + \int_0^t g(s)ds$ dir (Pachpatte, 1998).

İspat:

$z(t) = c^2 + 2\int_0^t [f(s)u^2(s) + g(s)u(s)]\,ds$ olsun. Buna göre $z(0) = c^2$ ve $u(t) \leq \sqrt{z(t)}$ olduğu açıktır. u, f ve g fonksiyonları $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ üzerinde negatif olmayan sürekli fonksiyonlar olduğundan,

$$z'(t) = 2\big(f(t)u^2(t) + g(t)u(t)\big)$$

$$\leq 2\left(f(t)z(t) + g(t)\sqrt{z(t)}\right) = 2\sqrt{z(t)}\left(f(t)\sqrt{z(t)} + g(t)\right), \quad \forall t \in R_+$$

olur. Buradan

$$\frac{z'(t)}{\sqrt{z(t)}} \leq 2\left(f(t)\sqrt{z(t)} + g(t)\right),$$

olup her tarafın 0 dan t ye integrali alınırsa,

$$\sqrt{z(t)} \leq p(t) + \int_0^t f(s)\sqrt{z(s)}ds$$

elde edilir. Burada $p(t) = c + \int_0^t g(s)ds$ dir. Böylece Gronwal Bellman eşitsizliğinden,

$$\sqrt{z(t)} \leq p(t)exp\left(\int_0^t f(s)ds\right),$$

olur. Buna göre $u(t) \leq \sqrt{z(t)}$ ve $p(t) = c + \int_0^t g(s)ds$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$u(t) \leq exp\left(\int_0^t f(s)ds\right)\left(c + \int_0^t g(s)ds\right), \qquad \forall t \in \mathbb{R}_+$$

elde edilir (Pachpatte, 1998).

Lemma 3.2. A, $n \times n$ tipnden simetrik bir matris olsun. A nın en küçük öz değeri δ_a ve en büyük öz değeri Δ_a olmak üzere her $X \in \mathbb{R}^n$ için

$$\delta_a\|X\|^2 \leq \langle AX, X\rangle \leq \Delta_a\|X\|^2$$

olur (Mirsky, 1990).

Teorem 3.6. (Peano varlık Teoremi)

$t \in I \subset \mathbb{R}$ ve $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ açık bir küme olmak üzere

$$x' = f\big(t, x(t)\big) \tag{3.2}$$

sistemi verilsin. Eğer $f(t,x): D \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonu sürekli ise $(t_0, x_0) \in D$ için (3.2) denklem sisteminin (t_0, x_0) noktasından geçen en az bir çözümü vardır (Hale, 1969).

Örnek 3.5. $D = \mathbb{R}^2$ için,

$$x' = x^2$$

denklemini ele alalım. x^2, D üzerinde sürekli bir fonksiyon olduğundan bu denklemin en az bir çözümü vardır. c bir sabit olmak üzere $t \in I \backslash \{-c\}$ için $x(t) = -\frac{1}{t+c}$ fonksiyonu söz konusu denklemin bir çözümüdür (Hale, 1969).

4. İKİNCİ MERTEBEDEN BAZI DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN GLOBAL VARLIĞI VE SINIRLILIĞI

4. 1. Giriş ve Amaç

Giriş ve Literatür Bildirişleri bölümünde ifade edildiği gibi *ikinci mertebeden* lineer olmayan diferansiyel denklemlerin niteliksel davranışları üzerine birçok çalışma yapılmıştır.

Biz bu bölümde Giriş ve Literatür Bildirişleri bölümünde belirttiğimiz, Napoles Valdes (2001), Tiryaki ve Zafer (2013), Graef ve Tunç (2014) tarafından yapılan çalışmalardaki sonuçları *ikinci mertebeden* lineer olmayan integro skaler ve integro vektör diferansiyel denklemler için ilgili literatürde belirtilen çalışmalarda kullanılmış Lyapunov'un ikinci metodu ve İntegral eşitsizliği yardımıyla elde etmeye çalışacağız.

Şimdi aşağıdaki ikinci mertebeden lineer olmayan sabit gecikmeli integro skaler diferansiyel denklemini, gecikmesiz integro vektör diferansiyel denklemini ve değişken gecikmeli integro vektör diferansiyel denklemini ele alalım:

$$\big(p(x)x'(t)\big)' + a(t)f(t,x,x')x' + b(t)g(t,x') + \sum_{i=1}^{n} c_i(t)h_i\big(x(t-\tau_i)\big) = \int_0^t C(t,s)x'(s)ds \qquad (4.1),$$

$$(r(t)X')' + A(t)F(t,X,X')X' + E(t,X') + H(X) = \int_0^t C(t,s)X'(s)ds \qquad (4.2),$$

$$X'' + A(t)F(t,X,X')X' + G(t,X,X') + \sum_{i=1}^{n} H_i\Big(X\big(t-\tau_i(t)\big)\Big) = \int_0^t C(t,s)X'(s)ds \qquad (4.3).$$

Bu denklemler için çözümlerin global varlığı ve sınırlılığı incelenecektir.

4.2. (4.1) Denklemi İçin Çözümlerin Global Varlığı ve Sınırlılığı

Bu kesimde ikinci mertebeden lineer olmayan (4.1) sabit gecikmeli integro diferansiyel denklemini ele aldık. Bu denklemde p, a ve b, $\mathbb{R}_+ = [0,\infty)$ üzerinde sürekli türevlenebilen pozitif fonksiyonlar, $f \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R}_+)$; $g \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, $h_i \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ve $C(t,s)$, $0 \le s \le t < \infty$ için sürekli bir fonksiyondur. Burada (4.1) diferansiyel denklemi için Lyapunov fonksiyonu yardımıyla çözümlerin global varlığı ve sınırlılığı incelenecektir. (4.1) denklemi,

$$x' = \frac{y}{p(x)},$$

$$y' = \int_0^t C(t,s)\frac{y(s)}{p\big(x(s)\big)}ds - a(t)f\left(t,x,\frac{y}{p(x)}\right)\frac{y}{p(x)} - b(t)g\left(t,\frac{y}{p(x)}\right)$$

$$-\sum_{i=1}^{n} c_i(t)h_i\big(x(t)\big) + \sum_{i=1}^{n} c_i(t)\int_{t-\tau_i}^{t} h_i'\big(x(s)\big)\frac{y(s)}{p\big(x(s)\big)}ds \tag{4.4}$$

sistemine denktir.

Teorem 4.2.1. $\delta_i, \beta_i, \lambda_i, \lambda, R$ ve τ^* pozitif sabitler olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlansın:

i) $1 \le p(x) \le p_1$ ve $\int_{-\infty}^{\infty} |p'(u)|\,du < \infty$,

ii) $0 < m \le b(t) \le a(t) \le M$, $0 < c_i \le c_i(t) \le C_i$ ve $c_i'(t) \le 0$,

iii) $g(t,0) = 0, y \ne 0$ için $0 < g_0 \le \frac{g(t,y)}{y} \le g_1$,

iv) $h_i(0) = 0, x \ne 0$ için $0 < \delta_i \le \frac{h_i(x)}{x} \le \beta_i$ ve $\left|h_i'(x)\right| \le \gamma_i$,

v) $max\left(\int_0^t |C(t,s)|ds + \int_t^{\infty} |C(u,t)|du\right) \le R, \qquad R \ge 0,$

vi) $R + 2\lambda\tau^* \le \frac{m}{p_1}\big(f(t,x,y) + g_0\big), \quad \tau^* = max\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n\}, \quad \lambda = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i = \sum_{i=1}^{n} C_i\gamma_i.$

Bu taktirde (4.1) denkleminin tüm çözümleri sürdürülebilir ve sınırlıdır.

İspat:

$$V(t) = V\big(t, x(t), y(t)\big) = e^{-\frac{\gamma(t)}{\mu}} U\big(t, x(t), y(t)\big) \tag{4.5}$$

Lyapunov fonksiyonunu tanımlayalım. Burada μ pozitif bir sabit,

$$U = U\big(t, x(t), y(t)\big) = \frac{1}{2}y^2 + p(x)\sum_{i=1}^{n} c_i(t)\int_0^x h_i(s)\, ds$$

$$+\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \int_{-\tau_i}^{0}\int_{t+s}^{t} y^2(u)\, duds + \int_0^t\int_t^\infty |C(u,s)|y^2(s)duds \tag{4.6}$$

ve

$$\theta(t) = \frac{x'(t)p'\big(x(t)\big)}{p\big(x(t)\big)}, \quad \alpha_1(t) = min\{x(0), x(t)\}, \quad \alpha_2(t) = max\{x(0), x(t)\}$$

olmak üzere

$$\gamma(t) = \int_0^t |\theta(s)|ds = \int_0^t \left|\frac{x'(s)p'\big(x(s)\big)}{p\big(x(s)\big)}\right| ds = \int_{\alpha_1(t)}^{\alpha_2(t)} \left|\frac{p'(u)}{p(u)}\right| du \le \int_{-\infty}^{+\infty} |p'(u)|du < \infty,$$

dir. Böylece teoremin (i), (ii) ve (iv) şartları dikkate alınırsa (4.6) dan,

$$U \ge \frac{1}{2}y^2 + p(x)\sum_{i=1}^{n} c_i(t)\int_0^x h_i(s)\, ds$$

$$\ge \frac{1}{2}y^2 + \sum_{i=1}^{n} c_i \int_0^x \delta_i s\, ds = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(c_i\delta_i)x^2$$

$$\ge k(x^2 + y^2),$$

olur. Burada $k = \frac{1}{2} min\{1, \sum_{i=1}^{n}(c_i\delta_i)\}$ dir. $(x, y) = \big(x(t), y(t)\big)$, (4.4) sisteminin bir çözümü olsun. (4.6) de verilen $U\big(t, x(t), y(t)\big)$ fonksiyonunun bu çözüm boyunca t ye göre türevi alınırsa,

$$U' = yy' + x'p'(x)\sum_{i=1}^{n} c_i(t)\int_0^x h_i(s)\,ds + p(x)\sum_{i=1}^{n} c_i{}'(t)\int_0^x h_i(s)\,ds$$

$$+y\sum_{i=1}^{n} c_i(t)h_i\big(x(t)\big) + \sum_{i=1}^{n}(\lambda_i\tau_i)\,y^2 - \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\int_{t-\tau_i}^{t} y^2(s)\,ds + y^2(t)\int_t^{\infty}|C(u,t)|du$$

$$-\int_0^t |C(t,s)|y^2(s)ds$$

$$= y\int_0^t C(t,s)\frac{y(s)}{p\big(x(s)\big)}ds - \frac{a(t)}{p(x)}f\left(t, x, \frac{y}{p(x)}\right)y^2 - b(t)g\left(t, \frac{y}{p(x)}\right)y$$

$$-y\sum_{i=1}^{n} c_i(t)h_i\big(x(t)\big) + y\sum_{i=1}^{n} c_i(t)\int_{t-\tau_i}^{t} h_i{}'\big(x(s)\big)\frac{y(s)}{p\big(x(s)\big)}ds$$

$$+\theta(t)p(x)\sum_{i=1}^{n} c_i(t)\int_0^x h_i(s)\,ds + p(x)\sum_{i=1}^{n} c_i{}'(t)\int_0^x h_i(s)\,ds$$

$$+y\sum_{i=1}^{n} c_i(t)h_i\big(x(t)\big) + \sum_{i=1}^{n}(\lambda_i\tau_i)\,y^2 - \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\int_{t-\tau_i}^{t} y^2(s)\,ds + y^2(t)\int_t^{\infty}|C(u,t)|du$$

$$-\int_0^t |C(t,s)|y^2(s)ds$$

$$= y\int_0^t C(t,s)\frac{y(s)}{p\big(x(s)\big)}ds - \frac{b(t)}{p(x)}\left(\frac{a(t)}{b(t)}f\left(t, x, \frac{y}{p(x)}\right) + \left(\frac{g\left(t, \frac{y}{p(x)}\right)}{\frac{y}{p(x)}}\right)\right)y^2$$

$$+y\sum_{i=1}^{n} c_i(t)\int_{t-\tau_i}^{t} h_i'\big(x(s)\big)\frac{y(s)}{p\big(x(s)\big)}ds+\theta(t)p(x)\sum_{i=1}^{n} c_i(t)\int_{0}^{x} h_i(s)\,ds$$

$$+p(x)\sum_{i=1}^{n} c_i'(t)\int_{0}^{x} h_i(s)\,ds+\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i\tau_i)\,y^2-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\int_{t-\tau_i}^{t} y^2(s)\,ds$$

$$+y^2(t)\int_{t}^{\infty}|C(u,t)|du\;-\int_{0}^{t}|C(t,s)|y^2(s)ds$$

elde edilir. Buradan teoremin şartları ve $|uv|\leq\frac{1}{2}(u^2+v^2)$ eşitsizliği dikkate alınırsa,

$$U'\leq\int_{0}^{t}|C(t,s)||y(t)y(s)|ds-\frac{m}{p_1}\left(f\left(t,x,\frac{y}{p(x)}\right)+g_0\right)y^2$$

$$+\sum_{i=1}^{n}(C_i\gamma_i)\int_{t-\tau_i}^{t}|y(t)y(s)|ds+|\theta(t)|\frac{p_1}{2}\sum_{i=1}^{n}(C_i\beta_i)\,x^2+\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i\tau_i)\,y^2$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\int_{t-\tau_i}^{t} y^2(s)\,ds+y^2(t)\int_{t}^{\infty}|C(u,t)|du\;-\int_{0}^{t}|C(t,s)|y^2(s)ds$$

$$\leq y^2\int_{0}^{t}|C(t,s)|ds+\int_{0}^{t}|C(t,s)|y^2(s)ds-\frac{m}{p_1}\left(f\left(t,x,\frac{y}{p(x)}\right)+g_0\right)y^2$$

$$+\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i\tau_i)\,y^2+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\int_{t-\tau_i}^{t} y^2(s)ds+|\theta(t)|\frac{p_1}{2}\sum_{i=1}^{n}(C_i\beta_i)\,x^2+\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i\tau_i)\,y^2$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\lambda_{\,i}\int_{t-\tau_i}^{t} y^2(s)\,ds+y^2\int_{t}^{\infty}|C(u,t)|du-\int_{0}^{t}|C(t,s)|y^2(s)ds$$

$$=\left(\int_{0}^{t}|C(t,s)|ds+\int_{t}^{\infty}|C(u,t)|du+2\sum_{i=1}^{n}(\lambda_{\,i}\tau_i)\right)y^2-\frac{m}{p_1}\left(f\left(t,x,\frac{y}{p(x)}\right)+g_0\right)y^2$$

$$+|\theta(t)|\frac{p_1}{2}\sum_{i=1}^{n}(C_i\beta_i)\,x^2$$

$$\leq\left(R+2\lambda\tau^*-\frac{m}{p_1}\left(f\left(t,x,\frac{y}{p(x)}\right)+g_0\right)\right)y^2+|\theta(t)|\frac{p_1}{2}\sum_{i=1}^{n}(C\,_i\beta_i)\,x^2$$

$$\leq|\theta(t)|\frac{p_1}{2}\sum_{i=1}^{n}(C_i\beta_i)\,x^2,$$

olur. Böylece (4.5) de verilen Lyapunov fonksiyonunda $\mu=\frac{2k}{p_1\sum_{i=1}^{n}(C\,_i\beta_i)}$ seçilir ve bu fonksiyonun (4.4) sisteminin herhangi bir çözümü boyunca türevi alınırsa,

$$V'(t)=e^{-\frac{\gamma(t)}{\mu}}\left(-\frac{|\theta(t)|}{\mu}U\big(t,x(t),y(t)\big)+U'\big(t,x(t),y(t)\big)\right)$$

$$\leq e^{-\frac{\gamma(t)}{\mu}}\left(-|\theta(t)|\frac{k}{\mu}x^2+|\theta(t)|\frac{k}{\mu}x^2\right)=0$$

elde edilir. Peano varlık teoreminden dolayı, $\delta>0$ olmak üzere (4.4) sisteminin $[t_0,t_0+\delta)$ aralığında en az bir $\big(x(t),y(t)\big)$ çözümü vardır. Bu aralığın $[t_0,\infty)$ aralığına genişletilebileceğini göstermek istiyoruz. O halde bunun tersini kabul edelim. Yani (4.4) sisteminin $T<\infty$ için $[t_0,T)$ üzerinde bir çözümü var ve

$$\lim_{t\to T^-}(|x(t)|+|y(t)|)=\infty \tag{4.7}$$

olsun.

(4.4) sisteminin $x(t_0)=x_0$ ve $y(t_0)=y_0$ başlangıç şartlarını sağlayan bir $\big(x(t),y(t)\big)$ çözümünü ele alalım. $V\big(t,x(t),y(t)\big)$ fonksiyonu (4.4) sisteminin yörüngeleri boyunca pozitif tanımlı ve azalan bir fonksiyon olduğundan,

$$V\big(T,x(T),y(T)\big)\leq V(t_0,x_0,y_0)=V_0$$

yazılabilir. Ayrıca,

$$V\big(T,x(T),y(T)\big)=e^{-\frac{\gamma(T)}{\mu}}U\big(T,x(T),y(T)\big)\geq ke^{-\frac{\gamma(T)}{\mu}}\big(x^2(T)+y^2(T)\big)$$

olduğundan

$$\left(x^2(T)+y^2(T)\right)\leq\frac{V_0}{D},$$

elde edilir. Burada $D=ke^{-\frac{\gamma(T)}{\mu}}$ dir. Böylece $t\to T^-$ için $|x(t)|$ ve $|y(t)|$ nin sınırlı olduğu kolayca görülebilir. Bu ise varsayımımızla çelişir ve $T<\infty$ olmasının mümkün olmadığını $T=\infty$ olması gerektiğini gösterir.

Örnek 4.2.1. İki gecikme argümentli ikinci mertebeden lineer olmayan

$$\left(\left(2+\frac{sinx}{1+x^2}\right)x'\right)'+\left(1+\frac{2}{1+t^2}\right)(sinx+arctanx'+6)x'$$

$$+\left(1+\frac{1}{1+t^2}\right)\left(3x'+\frac{x'}{1+x'^2}\right)+2(e+e^{-t})x(t-\tau_1)+2(e^2+e^{-t})x(t-\tau_2)$$

$$=\int_0^t\frac{s}{(t+1)^2}x'(s)ds$$

integro diferansiyel denklemini ele alalım. Burada

$$a(t)=1+\frac{2}{1+t^2},\qquad b(t)=1+\frac{1}{1+t^2},\quad c_1(t)=(e+e^{-t}),\quad c_2(t)=(e^2+e^{-t})$$

ve

$$p(x)=\left(2+\frac{sinx}{1+x^2}\right),\ f(t,x,y)=(sinx+arctany+6),\ g(t,y)=3y+\frac{y}{1+y^2},$$

$$h_1(x)=2x,\qquad h_2(x)=2x,\qquad C(t,s)=\frac{s}{(t+1)^2}$$

dir. Buna göre

$$m=1\leq b(t)\leq a(t)\leq 3=M,\qquad c_1=e\leq c_1(t)\leq e+1=C_1,\quad c_1'(t)\leq 0,$$

$$c_2=e^2\leq c_2(t)\leq e^2+1=C_2,\quad c_2'(t)\leq 0,$$

$$1 \le p(x) \le 3 = p_1, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} |p'(u)|du \le \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\left|\frac{cosu}{1+u^2}\right| + \left|\frac{2usinu}{(1+u^2)^2}\right|\right) du \le \pi,$$

$$3 < f(t,x,y) < 9, \qquad g(t,0) = 0, y \neq 0 \text{ için } g_0 = 3 \le \frac{g(t,y)}{y} \le 4 = g_1,$$

$$h_1(0) = h_2(0) = 0, x \neq 0 \text{ için } \frac{h_1(x)}{x} = \frac{h_2(x)}{x} = 2\,, \ |h'_1(x)| = |h'_2(x)| = 2$$

ve

$$\int_0^t |C(t,s)|ds + \int_t^\infty |C(u,t)|du = \int_0^t \frac{s}{(t+1)^2} ds + \int_t^\infty \frac{t}{(u+1)^2} du \le \frac{3}{2} = R,$$

olur. Bu ise Teorem 4.2.1 den dolayı ele alınan denklemin tüm çözümlerinin sürdürülebilir ve sınırlı olduğunu gösterir.

4.3. (4.2) Denklemi İçin Çözümlerin Global Varlığı ve Sınırlılığı

Bu kesimde ikinci mertebeden lineer olmayan (4.2) integro vektör diferansiyel denklemini ele aldık. Bu denklemde r fonksiyonu pozitif sürekli artan bir fonksiyon, $t \in \mathbb{R}_+ = [0,\infty)$, $X \in \mathbb{R}^n$, A ve F matrisleri $n \times n$ mertebeden değişmeli simetrik matrisler, $E: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $H: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ve $C(t,s)$, $n \times n$ mertebeden sürekli bir matristir. Burada (4.2) diferansiyel denklemi için farklı koşullar altında sırasıyla Lyapunov'un ikinci metodu ve İntegral eşitsizliği yardımıyla çözümlerin global varlığı ve sınırlılığı incelenecektir. $X' = Y$ olmak üzere (4.2) denklemi,

$$X' = Y,$$

$$Y' = \frac{1}{r(t)} \int_0^t C(t,s)Y(s)ds - \frac{r'(t)}{r(t)}Y - \frac{1}{r(t)}A(t)F(t,X,Y)Y - \frac{1}{r(t)}E(t,Y)$$

$$- \frac{1}{r(t)}H(X) \tag{4.8}$$

sistemine denktir.

Teorem 4.3.1. k_1, k_2, k_3 pozitif sabitler ve λ_i $(i = 1,2,\dots,n)$ özdeğer olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlansın:

i) $\sum_{i=1}^{n} y_i\, e_i(t, y_i) \geq 0, \qquad E(t,Y) = \big(e_1(t,y_1), e_2(t,y_2), \dots, e_n(t,y_n)\big),$

ii) $\lambda_i\big(F(t,X,Y)\big) \geq k_1,\ \lambda_i\big(A(t)\big) \geq k_2$ ve $\lambda_i\big(J_H(X)\big) \geq k_3,$

iii) $\left(\frac{1}{r(t)} \leq 1\right),$

iv) $\int_0^t \|C(t,s)\|ds + \int_t^\infty \|C(u,t)\|du \leq R,$

v) $\left(R - \frac{r'(t)}{r(t)}\right) \leq 0.$

Bu taktirde (4.8) sisteminin tüm çözümleri sürdürülebilir ve sınırlıdır.

İspat:

$$V = V(t,X,Y) = \frac{1}{2}\langle Y,Y\rangle + \frac{1}{r(t)}\int_0^1 \langle H(\sigma X), X\rangle d\sigma + \int_0^t \int_t^\infty \|C(u,s)\|\|Y(s)\|^2 duds \quad (4.9)$$

Lyapunov fonksiyonunu tanımlayalım. Burada $H(X) = \int_0^1 J_H(\sigma X) X d\sigma$ olmak üzere $H(0) = 0$ ve $\frac{\partial}{\partial\sigma} H(\sigma X) = J_H(\sigma X) X$ dir. Böylece

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 \langle H(\sigma X), X\rangle d\sigma = \int_0^1 \sigma\langle J_H(\sigma X)Y, X\rangle d\sigma + \int_0^1 \langle H(\sigma X), Y\rangle d\sigma$$

$$= \int_0^1 \sigma \frac{\partial}{\partial\sigma}\langle H(\sigma X), Y\rangle d\sigma + \int_0^1 \langle H(\sigma X), Y\rangle d\sigma$$

$$= \sigma\langle H(\sigma X), Y\rangle\Big|_0^1 = \langle H(X), Y\rangle$$

yazılabilir. Buradan

$$\int_0^1 \langle H(\sigma X), X\rangle d\sigma = \int_0^1\int_0^1 \langle \sigma_1 J_H(\sigma_1\sigma_2 X)X, X\rangle\, d\sigma_2 d\sigma_1$$

$$\geq \int_0^1\int_0^1 \langle \sigma_1 k_3 X, X\rangle\, d\sigma_2 d\sigma_1 = \frac{k_3}{2}\|X\|^2 \tag{4.10}$$

eşitsizliği dikkate alınırsa,

$$V = \frac{1}{2}\|Y(t)\|^2 + \frac{1}{r(t)}\int_0^1 \langle H(\sigma X), X\rangle d\sigma + \int_0^t\int_t^\infty \|C(u,s)\|\|Y(s)\|^2 du ds$$

$$\geq \frac{1}{2}\|Y(t)\|^2 + \frac{1}{r(t)}\int_0^1\int_0^1 \langle \sigma_1 J_H(\sigma_1\sigma_2 X)X, X\rangle\, d\sigma_2 d\sigma_1$$

$$\geq \frac{1}{2}\|Y(t)\|^2 + \frac{1}{r(t)}\int_0^1\int_0^1 \langle \sigma_1 k_3 X, X\rangle\, d\sigma_2 d\sigma_1$$

$$\geq \frac{1}{2}\|Y(t)\|^2 + \frac{k_3}{2r(t)}\|X(t)\|^2 \geq 0,$$

olur. $(X,Y) = \big(X(t), Y(t)\big)$, (4.8) sisteminin bir çözümü olsun. (4.9) da verilen Lyapunov fonksiyonunun bu çözüm boyunca t ye göre türevi alınırsa,

$$V' = \langle Y, Y'\rangle + \left(\frac{1}{r(t)}\right)'\int_0^1 \langle H(\sigma X), X\rangle d\sigma + \frac{1}{r(t)}\left(\frac{d}{dt}\int_0^1 \langle H(\sigma X), X\rangle d\sigma\right)$$

$$+\|Y(t)\|^2\int_t^\infty \|C(u,t)\|du - \int_0^t \|C(t,s)\|\|Y(s)\|^2 ds$$

$$= \frac{1}{r(t)}\int_0^t \langle Y(t), C(t,s)Y(s)\rangle ds - \frac{r'(t)}{r(t)}\langle Y(t), Y(t)\rangle - \frac{1}{r(t)}\langle Y(t), A(t)F(t,X,Y)Y(t)\rangle$$

$$-\frac{1}{r(t)}\langle Y(t), E(t,Y)\rangle - \frac{1}{r(t)}\langle Y, H(X)\rangle - \frac{r'(t)}{r^2(t)}\int_0^1 \langle H(\sigma X), X\rangle d\sigma + \frac{1}{r(t)}\langle H(X), Y\rangle$$

$$+\|Y(t)\|^2\int_t^{\infty}\|C(u,t)\|du-\int_0^t\|C(t,s)\|\|Y(s)\|^2ds$$

elde edilir. Buradan teoremin şartları ve $\langle U,V\rangle\le\|U\|\|V\|$, $\|UV\|\le\|U\|\|V\|$, $2\|U\|\|V\|\le(\|U\|^2+\|V\|^2)$ eşitsizlikleri dikkate alınırsa,

$$V'\le\int_0^t\|Y(t)\|\|C(t,s)Y(s)\|ds-\frac{r'(t)}{r(t)}\|Y(t)\|^2+\|Y(t)\|^2\int_t^{\infty}\|C(u,t)\|du$$

$$-\int_0^t\|C(t,s)\|\|Y(s)\|^2ds$$

$$\le\int_0^t\|C(t,s)\|\|Y(s)\|\|Y(t)\|ds-\frac{r'(t)}{r(t)}\|Y(t)\|^2+\|Y(t)\|^2\int_t^{\infty}\|C(u,t)\|du$$

$$-\int_0^t\|C(t,s)\|\|Y(s)\|^2ds$$

$$\le\int_0^t\|C(t,s)\|(\|Y(t)\|^2+\|Y(s)\|^2)ds-\frac{r'(t)}{r(t)}\|Y(t)\|^2+\|Y(t)\|^2\int_t^{\infty}\|C(u,t)\|du$$

$$-\int_0^t\|C(t,s)\|\|Y(s)\|^2ds$$

$$\le\left(\int_0^t\|C(t,s)\|ds+\int_t^{\infty}\|C(u,t)\|du\right)\|Y(t)\|^2-\frac{r'(t)}{r(t)}\|Y(t)\|^2$$

$$\le\|Y(t)\|^2\left(R-\frac{r'(t)}{r(t)}\right)\le 0,$$

olur. Peano varlık teoreminden dolayı, $\delta>0$ olmak üzere (4.8) sisteminin $[t_0,t_0+\delta)$ aralığında en az bir $\big(X(t),Y(t)\big)$ çözümü vardır. Bu aralığın $[t_0,\infty)$ aralığına genişletilebileceğini göstermek istiyoruz. O halde bunun tersini kabul edelim. Yani (4.8) sisteminin $T<\infty$ için $[t_0,T)$ üzerinde bir çözümü var ve

$$\lim_{t \to T^-} (\|X(t)\| + \|Y(t)\|) = \infty \tag{4.11}$$

olsun.

(4.8) sisteminin $X(t_0) = X_0$ ve $Y(t_0) = Y_0$ başlangıç şartlarını sağlayan bir $\big(X(t), Y(t)\big)$ çözümünü ele alalım. $V\big(t, X(t), Y(t)\big)$ fonksiyonu (4.8) sisteminin yörüngeleri boyunca pozitif tanımlı ve azalan bir fonksiyon olduğundan,

$$V\big(T, X(T), Y(T)\big) = \frac{1}{2}\langle Y, Y\rangle + \frac{1}{r(T)}\int_0^1 \langle H(\sigma X), X\rangle d\sigma \leq V(t_0, X_0, Y_0) - k = V_0 - k$$

olur. Burada $k = \int_0^T \int_T^\infty \|C(u,s)\| du \|Y(s)\|^2 ds$ dir. Böylece $t \to T^-$ için $\|X(t)\|$ ve $\|Y(t)\|$ nin sınırlı olduğu kolayca görülebilir. Bu ise varsayımımızla çelişir ve $T < \infty$ olmasının mümkün olmadığını $T = \infty$ olması gerektiğini gösterir.

Örnek 4.3.1.

(4.2) denkleminde geçen skaler fonksiyon, katsayı matris ve matris fonksiyonlarını sırasıyla özel bir durum olan $n = 2$ için aşağıdaki gibi seçelim:

$r(t) = e^{2t}$,

$$A(t) = \begin{bmatrix} 2 + t^2 & 1 \\ 1 & 2 + t^2 \end{bmatrix}, \qquad F(t, X, Y) = \begin{bmatrix} {x_1}^2 + {y_1}^2 + 3 & 2 \\ 2 & {x_1}^2 + {y_1}^2 + 3 \end{bmatrix},$$

$$E(t, Y) = [y_1 \quad y_2], \qquad H(X) = \begin{bmatrix} {x_1}^3 + x_1 \\ {x_2}^3 + x_2 \end{bmatrix},$$

ve

$$C(t, s) = \begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{2}s}{(t+1)^3} & 0 \\ 0 & \dfrac{\sqrt{2}s}{(t+1)^3} \end{bmatrix}.$$

Böylece her $t \geq 0$ için

$$\frac{1}{r(t)} = \frac{1}{e^{2t}} \leq 1, \qquad \frac{r'(t)}{r(t)} = \frac{2e^{2t}}{e^{2t}} = 2, \quad \lambda_1\big(A(t)\big) = 1 + t^2, \qquad \lambda_2\big(A(t)\big) = 3 + t^2$$

$$\lambda_1(F(t,X,Y)) = x_1{}^2 + y_1{}^2 + 1, \qquad \lambda_2(F(t,X,Y)) = x_1{}^2 + y_1{}^2 + 5,$$

$$\sum_{i=1}^{n=2} y_i\, e_i(t,y) = y_1{}^2 + y_2{}^2, \qquad \lambda_1(J_H(X)) = 3x_1{}^2 + 1, \qquad \lambda_2(J_H(X)) = 3x_2{}^2 + 1,$$

$$\int_0^t \|C(t,s)\|ds + \int_t^\infty \|C(u,t)\|du = \int_0^t \frac{2s}{(t+1)^3}ds + \int_t^\infty \frac{2t}{(u+1)^3}du = \frac{2t^2+t}{(t+1)^3} \le \frac{3}{7}$$

olur. Bu ise Teorem 4.3.1 den dolayı ele alınan denklemin tüm çözümlerinin sürdürülebilir ve sınırlı olduğunu gösterir.

Yukarıda ele aldığımız (4.2) denkleminin çözümlerinin global varlığı ve sınırlılığını farklı koşullar altında bir İntegral eşitsizliği yardımıyla inceleyeceğiz. Buna göre (4.2) denklemini,

$$X(t_0) = X_0 \qquad\qquad X'(t_0) = X_1 \tag{4.12}$$

başlangıç değer şartları altında göz önüne alalım.

Teorem 4.3.2. k_1, k_2, k_3 pozitif sabitler ve $\lambda_i(i = 1,2,\ldots,n)$ özdeğer olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlansın:

i) $\sum_{i=1}^{n} e_i(t,x'_i)x'_i \ge 0, \qquad E(t,X') = \left(e_1(t,x'_1), e_2(t,x'_2),\ldots,e_n(t,x'_n)\right)$

ii) $\lambda_i\left(F(t,X,X')\right) \ge k_1,\ \lambda_i(A(t)) \ge k_2$ ve $\lambda_i(J_H(X)) \ge k_3$.

Bu takdirde (4.2),(4.12) ile verilen başlangıç değer probleminin $[t_0,\infty)$ üzerinde tanımlı bir çözümü vardır.

İspat:

Peano varlık teoreminden dolayı (4.2),(4.12) başlangıç değer problemi $\delta > 0$ için $[t_0, t_0+\delta)$ üzerinde tanımlı bir çözüme sahiptir. Bu aralığın $[t_0,\infty)$ aralığına genişletilebileceğini göstermemiz gerekiyor. Bunun tersini kabul edelim. Yani $T < \infty$ için $[t_0, T)$ aralığında bir çözüm var ve (4.11) eşitliği sağlansın.

(4.2) denklemi, $X'(t)$ ile çarpılıp $\mathrm{t} < T$ için $[t_0, \mathrm{t}]$ aralığı üzerinde integrali alınırsa,

$$\int_{t_0}^{t} r'(s)\langle X', X'\rangle\, ds + \int_{t_0}^{t} r(s)\langle X'', X'\rangle ds + \int_{t_0}^{t} \langle A(s)F(s, X, X')X', X'\rangle ds$$

$$+ \int_{t_0}^{t} \langle E(s, X'), X'\rangle ds + \int_{t_0}^{t} \langle H(X), X'\rangle ds = \int_{t_0}^{t} \langle \int_{0}^{s} C(t, u)X'(u)du, X'(s)\rangle\, ds$$

olur. Buradan,

$$\int_{t_0}^{t} r(s)\langle X'', X'\rangle ds = \frac{1}{2} r(t)\left\|X'(t)\right\|^2 - \frac{1}{2} r(t_0)\left\|X'(t_0)\right\|^2 - \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} r'(s)\left\|X'(s)\right\|^2 ds,$$

$$\int_{t_0}^{t} \langle H(X), X'\rangle ds = \int_{0}^{1} \langle H\big(\sigma X(t)\big), X(t)\rangle d\sigma - \int_{0}^{1} \langle H\big(\sigma X(t_0)\big), X(t_0)\rangle d\sigma$$

eşitlikleri ve teoremin şartları dikkate alınırsa,

$$\frac{1}{2} r(t)\left\|X'(t)\right\|^2 + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} r'(s)\left\|X'(s)\right\|^2 ds + \int_{0}^{1} \langle H\big(\sigma X(t)\big), X(t)\rangle d\sigma$$

$$\leq K + \int_{t_0}^{t} \langle P(s), X'(s)\rangle\, ds \qquad (4.13)$$

yazılabilir. Burada,

$K = \frac{1}{2} r(t_0)\left\|X'(t_0)\right\|^2 + \int_0^1 \langle H\big(\sigma X(t_0)\big), X(t_0)\rangle d\sigma$ ve $P(s) = \int_0^s C(t, u)X'(u)du$ dir. Böylece, (4.10) ve $\langle U, V\rangle \leq \|U\|\|V\|$ eşitsizliği dikkate alınırsa (4.13) den,

$$r(t)\left\|X'\right\|^2 \leq {K_1}^2 + 2\int_{t_0}^{t} \left(\frac{1}{2} r'(s)\left\|X'(s)\right\|^2 + \|P(s)\|\left\|X'(s)\right\|\right) ds \qquad (4.14)$$

elde edilir. Burada ${K_1}^2 = 2K$ dır. $v(t) = r^{\frac{1}{2}}(t)\|X'\|$ olmak üzere (4.14) e Lemma 3.1 uygulanırsa,

$$r^{\frac{1}{2}}(t)\|X'\| \leq \psi(t)\left[K_1 + \int_{t_0}^{t} r^{-\frac{1}{2}}(s)\|P(s)\|ds\right] \tag{4.15}$$

olur. Burada $\psi(t) = exp\left(\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\frac{r'(s)}{r(s)}ds\right)$ dir. Böylece $t \to T^-$ için $\|X'\|$ nin sınırlı olduğu kolayca görülür. Ayrıca (4.13) den,

$$\int_0^1 \langle H(\sigma X(t)), X(t)\rangle d\sigma \leq K + \int_{t_0}^{t} \langle P(s), X'(s)\rangle\, ds \tag{4.16}$$

yazılabilir. (4.10), (4.15) ve (4.16) eşitsizlikleri dikkate alınırsa,

$$\frac{k_3}{2}\|X\|^2 \leq K + \int_{t_0}^{t} \|P(s)\|\|B(s)\|\, ds \tag{4.17}$$

elde edilir. Burada $\|B(s)\| = r^{-\frac{1}{2}}(t)\psi(t)\left[K_1 + \int_{t_0}^{t} r^{-\frac{1}{2}}(s)\|P(s)\|ds\right]$ olup $t \to T^-$ için $\|X\|$ nin sınırlı olduğu kolayca görülebilir. Sonuç olarak $\|X(t)\|$ ve $\|X'(t)\|$ nin sınırlı olmaları kabulümüzle çelişir ve $T < \infty$ olmasının mümkün olmadığını $T = \infty$ olması gerektiğini gösterir.

Örnek 4.3.2.

(4.2) denkleminde geçen skaler fonksiyon, katsayı matris ve matris fonksiyonlarını sırasıyla özel bir durum olan $n = 2$ için aşağıdaki gibi seçelim:

$r(t) = e^t$,

$A(t) = \begin{bmatrix} 4+t^2 & 1 \\ 1 & 4+t^2 \end{bmatrix}$, $\quad F(t,X,Y) = \begin{bmatrix} {x_1}^2 + {y_1}^2 + 2 & 1 \\ 1 & {x_1}^2 + {y_1}^2 + 2 \end{bmatrix}$,

$E(t,X') = [x_1' \quad x_2']$, $\quad H(X) = \begin{bmatrix} {x_1}^3 + 2x_1 \\ {x_2}^5 + 2x_2 \end{bmatrix}$,

ve

$$C(t,s)=\begin{bmatrix}\frac{x_1'(s)}{1+x_1'^2(s)} & 0\\ 0 & \frac{x_2'(s)}{1+x_2'^2(s)}\end{bmatrix}.$$

Böylece her $t \geq 0$ için

$$r'(t)=e^t>0,\quad \lambda_1\big(A(t)\big)=3+t^2,\qquad \lambda_2\big(A(t)\big)=5+t^2$$

$$\lambda_1\big(F(t,X,Y)\big)=x_1^{\,2}+y_1^{\,2}+1,\qquad \lambda_2\big(F(t,X,Y)\big)=x_1^{\,2}+y_1^{\,2}+3,$$

$$\sum_{i=1}^{n=2} x_i'\,e_i(t,x_i')=x_1'^2+x_2'^2,\qquad \lambda_1\big(J_H(X)\big)=3x_1^{\,2}+2,\qquad \lambda_2\big(J_H(X)\big)=5x_2^{\,4}+2,$$

olur. Bu ise Teorem 4.3.2 den dolayı ele alınan denklemin tüm çözümlerinin sürdürülebilir ve sınırlı olduğunu gösterir.

Teorem 4.3.3.

$X(t)$ (4.2),(4.12) ile verilen başlangıç değer probleminin bir çözümü olsun. Teorem 4.3.2 de verilen şartlara ilave olarak aşağıda verilen şartın sağlandığını varsayalım:

$$\int_{t_0}^{\infty} r^{-\frac{1}{2}}(s)\|P(s)\|ds<\infty \tag{4.18}$$

bu taktirde $\left(\|X(t)\|+\|X'(t)\|\right)$, $[t_0,\infty)$ üzerinde sınırlıdır.

İspat: (4.13) eşitsizliğinden

$$\int_0^1 \langle H\big(\sigma X(t)\big),X(t)\rangle d\sigma \leq K+\int_{t_0}^{t}\langle P(s),X'(s)\rangle\,ds \tag{4.19}$$

ve

$$r(t)\|X'(t)\|^2 \leq K_1^{\,2}+2\int_{t_0}^{t}\|P(s)\|\|X'(s)\|\,ds \tag{4.20}$$

yazılabilir. $v(t)=r^{\frac{1}{2}}(t)\|X'\|$ olmak üzere (4.20) ye Lemma 3.1 uygulanırsa,

$$r^{\frac{1}{2}}(t)\|X'\| \leq \left[K_1+\int_{t_0}^{t} r^{-\frac{1}{2}}(s)\|P(s)\|ds\right] \tag{4.21}$$

elde edilir. Burada r pozitif, sürekli artan bir fonksiyon olduğundan her $t\geq t_0$ için $r(t)\geq r(t_0)$ olup (4.21) den,

$$\|X'\| \leq r^{-\frac{1}{2}}(t_0)\left[K_1+\int_{t_0}^{\infty} r^{-\frac{1}{2}}(s)\|P(s)\|ds\right]=K_2 \tag{4.22}$$

olur. Ayrıca (4.21), (4.19) eşitsizliğinde yerine yazılırsa,

$$\int_0^1 \langle H(\sigma X(t)), X(t)\rangle d\sigma \leq K+\int_{t_0}^{t} r^{-\frac{1}{2}}(s)\|P(s)\|\left[K_1+\int_{t_0}^{s} r^{-\frac{1}{2}}(u)\|P(u)\|du\right]ds$$

olur. Böylece (4.10) ve (4.21) eşitsizlikleri dikkate alınırsa,

$$\frac{k_3}{2}\|X\|^2 \leq K+K_2 r^{\frac{1}{2}}(t_0)\int_{t_0}^{\infty} r^{-\frac{1}{2}}(s)\|P(s)\|\,ds=K_3 \tag{4.23}$$

elde edilir. Sonuç olarak (4.22) ve (4.23) den $\|X(t)\|+\|X'(t)\|$ toplamının $[t_0,\infty)$ üzerinde sınırlı olduğu kolayca görülür.

Teorem 4.3.4. Teorem 4.3.2 de verilen şartlara ilave olarak aşağıda verilen şartın sağlandığını varsayalım:

$$C(t,s)=0 \tag{4.24}$$

bu taktirde (4.2),(4.12) ile verilen başlangıç değer problemi $[t_0,\infty)$ üzerinde tanımlı bir çözüme sahiptir.

İspat:

Teorem 4.3.2 nin ispatına benzer şekilde (4.2), (4.12) ile verilen başlangıç değer probleminin $T<\infty$ için $[t_0,T)$ aralığında bir çözümü var ve (4.11) eşitliğinin doğruluğunu kabul edelim.(4.13) eşitsizliğinden,

$$\frac{1}{2}r(t)\left\|X'(t)\right\|^2+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}r'(s)\left\|X'(s)\right\|^2ds+\int_0^1\langle H\big(\sigma X(t)\big),X(t)\rangle d\sigma\leq K$$

oluduğundan,

$$\int_0^1\langle H\big(\sigma X(t)\big),X(t)\rangle d\sigma\leq K \tag{4.25}$$

ve

$$\frac{1}{2}r(t)\left\|X'(t)\right\|^2\leq K \tag{4.26}$$

yazılabilir. Böylece (4.10) ve (4.25) den

$$\|X(t)\|^2\leq\frac{2K}{k_3} \tag{4.27}$$

olur. Buradan $t\to T^-$ için $\|X(t)\|$ nin sınırlı olduğu kolayca görülür. Ayrıca r fonksiyonu pozitif sürekli artan bir fonksiyon olduğundan her $t\geq t_0$ için $r(t)\geq r(t_0)$ olur. Böylece (4.26) dan

$$\left\|X'(t)\right\|^2\leq\frac{2K}{r(t_0)} \tag{4.28}$$

elde edilir. Bu ise $t\to T^-$ için $\left\|X'(t)\right\|$ nin sınırlı olduğunu gösterir. Sonuç olarak $\|X(t)\|$ ve $\left\|X'(t)\right\|$ nin sınırlı olmaları kabulümüzle çelişir ve $T<\infty$ olmasının mümkün olmadığını $T=\infty$ olması gerektiğini gösterir.

4.4. (4.3) Denklemi İçin Çözümlerin Global Varlığı ve Sınırlılığı

Bu kesimde (4.3) de verilen ikinci mertebeden lineer olmayan değişken gecikmeli integro vektör diferansiyel denklemi için çözümlerin global varlığı ve sınırlılığı incelenecektir. Bu denklemde $t\in\mathbb{R}^+=[0,\infty)$ olmak üzere $X\in\mathbb{R}^n$, A ve F matrisleri $n\times n$ mertebeden değişmeli simetrik matrisler, $G:\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, $H:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ ve $C(t,s)$, $n\times n$ mertebeden sürekli bir matristir. Burada (4.3) diferansiyel denklemi için ifade edilen bir teoremin ispatı yapılarak konu ile ilgili bir örnek verilecektir. $X' = Y$ olmak üzere (4.3) denklemi

$$X' = Y,$$

$$Y' = \int_0^t C(t,s)Y(s)ds - A(t)F(t,X,Y)Y - G(t,X,Y) - \sum_{i=1}^{n} H_i\big(X(t)\big)$$

$$+\sum_{i=1}^{n} \int_{t-\tau_i(t)}^{t} J_{H_i}\big(X(s)\big)Y(s)ds \qquad (4.29)$$

sistemine denktir.

Teorem 4.4.1. $\mu_i, \beta_i, \sigma_i, \delta_i, k_1, k_2$ pozitif sabitler ve $\lambda_i, \lambda_j (i,j = 1,2,\dots,n)$ özdeğerler olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlansın:

i) $\sum_{i=1}^{n} y_i\, g_i(t,x_i,y_i) \geq 0, \qquad G(t,X,Y) = \big(g_1(t,x_1,y_1), g_2(t,x_2,y_2), \dots, g_n(t,x_n,y_n)\big),$

ii) $\lambda_i\big(F(t,X,Y)\big) \geq k_1,\ \lambda_i\big(A(t)\big) \geq k_2,$ ve $\delta_i \leq \lambda_j\left(J_{H_i}(X)\right) \leq \beta_i,$

iii) $\int_0^t \|C(t,s)\|ds + \int_t^{\infty} \|C(u,t)\|du \leq R - \sum_{i=1}^{n} (\beta_i + \sigma_i)\mu_i.$

Bu takdirde $0 < \gamma < 1$ olmak üzere eğer, $0 \leq \tau_i(t) \leq \mu_i,\ \tau_i'(t) \leq \gamma,$ ve $\sum_{i=1}^{n} \beta_i = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i (1-\gamma),\ (i = 1,\dots,n)$ ise o zaman (4.29) denklem sisteminin tüm çözümleri sürdürülebilir ve sınırlıdır.

İspat:

$$V = V(t,X,Y) = \frac{1}{2}\langle Y,Y\rangle + \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 \langle H_i(\sigma X), X\rangle d\sigma + \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \sigma_i \int_{-\tau_i(t)}^{0} \int_{t+s}^{t} \|Y(u)\|^2\, duds$$

$$+ \int_0^t \int_t^{\infty} \|C(u,s)\| \|Y(s)\|^2 duds \qquad (4.30)$$

Lyapunov fonksiyonunu tanımlayalım. Burada $H_i(X) = \int_0^1 J_{H_i}(\sigma X)Xd\sigma$ olmak üzere $H_i(0) = 0$ ve $\frac{\partial}{\partial\sigma}H_i(\sigma X) = J_{H_i}(\sigma X)X$ dir. Buna göre

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n}\int_{0}^{1}\langle H_i(\sigma X), X\rangle d\sigma\right) = \sum_{i=1}^{n}\int_{0}^{1}\sigma\langle J_{H_i}(\sigma X)Y, X\rangle d\sigma + \sum_{i=1}^{n}\int_{0}^{1}\langle H_i(\sigma X), Y\rangle d\sigma$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\int_{0}^{1}\sigma\frac{\partial}{\partial\sigma}\langle H_i(\sigma X), Y\rangle d\sigma + \sum_{i=1}^{n}\int_{0}^{1}\langle H_i(\sigma X), Y\rangle d\sigma$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\int_{0}^{1}\frac{\partial}{\partial\sigma}(\sigma\langle H_i(\sigma X), Y\rangle)d\sigma = \sum_{i=1}^{n}\sigma\langle H_i(\sigma X), Y\rangle\Big|_0^1$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\langle H_i(X), Y\rangle,$$

yazılabilir. Böylece

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{0}^{1}\langle H_i(\sigma X), X\rangle d\sigma = \sum_{i=1}^{n}\int_{0}^{1}\int_{0}^{1}\langle\sigma_1 J_{H_i}(\sigma_1\sigma_2 X)X, X\rangle\, d\sigma_2 d\sigma_1$$

$$\geq \sum_{i=1}^{n}\int_{0}^{1}\int_{0}^{1}\langle\sigma_1\delta_i X, X\rangle\, d\sigma_2 d\sigma_1 \geq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\delta_i\|X\|^2 \tag{4.31}$$

eşitsizliği dikkate alınırsa,

$$V = \frac{1}{2}\|Y(t)\|^2 + \sum_{i=1}^{n}\int_{0}^{1}\langle H_i(\sigma X), X\rangle d\sigma + \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}}\sigma_i\int_{-\tau_i(t)}^{0}\int_{t+s}^{t}\|Y(u)\|^2\, duds$$

$$+\int_{0}^{t}\int_{t}^{\infty}\|C(u,s)\|\|Y(s)\|^2 duds$$

$$\geq \frac{1}{2}\|Y(t)\|^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\delta_i\|X\|^2$$

$$\geq k(\|Y(t)\|^2 + \|X(t)\|^2)$$

olur. Burada $k = \frac{1}{2} min\{1, \sum_{i=1}^{n} \delta_i\}$ dir. $(X, Y) = (X(t), Y(t))$, (4.29) sisteminin bir çözümü olsun. (4.30) da verilen Lyapunov fonksiyonunun bu çözüm boyunca t ye göre türevi alınırsa,

$$V' = \langle Y, Y' \rangle + \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} \int_0^1 \langle H_i(\sigma X), X \rangle d\sigma\right) + \sum_{i=1}^{n} \sigma_i \tau_i(t) \|Y(t)\|^2$$

$$- \sum_{i=1}^{n} \sigma_i \left(1 - \tau_i{}'(t)\right) \int_{t-\tau_i(t)}^{t} \|Y(s)\|^2 \, ds + \|Y(t)\|^2 \int_t^{\infty} |C(u,t)| du$$

$$- \int_0^t \|C(t,s)\| \|Y(s)\|^2 ds$$

$$= \int_0^t \langle Y(t), C(t,s) Y(s) \rangle ds - \langle Y(t), A(t) F(t, X, Y) Y(t) \rangle - \langle Y(t), G(t, X, Y) \rangle$$

$$- \sum_{i=1}^{n} \langle Y, H_i(X) \rangle + \sum_{i=1}^{n} \int_{t-\tau_i(t)}^{t} \langle Y(t), J_{H_i}(X(s)) Y(s) \rangle ds + \sum_{i=1}^{n} \langle H_i(X), Y \rangle$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \sigma_i \tau_i(t) \|Y(t)\|^2 - \sum_{i=1}^{n} \sigma_i \left(1 - \tau_i{}'(t)\right) \int_{t-\tau_i(t)}^{t} \|Y(s)\|^2 \, ds$$

$$+ \|Y(t)\|^2 \int_t^{\infty} \|C(u,t)\| du - \int_0^t \|C(t,s)\| \|Y(s)\|^2 ds$$

elde edilir. Buradan teoremin şartları ve $\langle U, V \rangle \leq \|U\| \|V\|$, $\|UV\| \leq \|U\| \|V\|$, $2\|U\| \|V\| \leq (\|U\|^2 + \|V\|^2)$ eşitsizlikleri dikkate alınırsa,

$$V' \leq \int_0^t \|Y(t)\| \|C(t,s) Y(s)\| ds + \sum_{i=1}^{n} \beta_i \int_{t-\tau_i(t)}^{t} \|Y(t)\| \|Y(s)\| ds$$

$$+\sum_{\text{i}=1}^{\text{n}}(\sigma_i\mu_i)\|Y(t)\|^2-\sum_{\text{i}=1}^{\text{n}}\sigma_i\,(1-\gamma)\int_{t-\tau_i}^{t}\|Y(s)\|^2\,ds+\|Y(t)\|^2\int_{t}^{\infty}\|C(u,t)\|du$$

$$-\int_{0}^{t}\|C(t,s)\|\|Y(s)\|^2ds$$

$$\leq\int_{0}^{t}\|C(t,s)\|\|Y(t)\|\|Y(s)\|ds+\sum_{i=1}^{n}\beta_i\tau_i(t)\,\|Y(t)\|^2+\sum_{i=1}^{n}\beta_i\int_{t-\tau_i(t)}^{t}\|Y(s)\|^2ds$$

$$+\sum_{\text{i}=1}^{\text{n}}(\sigma_i\mu_i)\|Y(t)\|^2-\sum_{\text{i}=1}^{\text{n}}\sigma_i\,(1-\gamma)\int_{t-\tau_i}^{t}\|Y(s)\|^2\,ds+\|Y(t)\|^2\int_{t}^{\infty}\|C(u,t)\|du$$

$$-\int_{0}^{t}\|C(t,s)\|\|Y(s)\|^2ds$$

$$\leq\|Y(t)\|^2\int_{0}^{t}\|C(t,s)\|ds+\int_{0}^{t}\|C(t,s)\|\|Y(s)\|^2ds+\sum_{i=1}^{n}(\beta_i+\sigma_i)\mu_i\,\|Y(t)\|^2$$

$$+\|Y(t)\|^2\int_{t}^{\infty}\|C(u,t)\|du-\int_{0}^{t}\|C(t,s)\|\|Y(s)\|^2ds$$

$$\leq\left(\int_{0}^{t}\|C(t,s)\|ds+\int_{t}^{\infty}\|C(u,t)\|du+\sum_{i=1}^{n}(\beta_i+\sigma_i)\mu_i\right)\|Y(t)\|^2$$

$$\leq R\|Y(t)\|^2\leq k_3V,$$

elde edilir. Burada $k_3=\frac{R}{k}$ dır. Yukarıdaki eşitsizliğin iki tarafının 0 dan t ye integrali alınırsa,

$$V(t)\leq V(0)+k_3\int_{0}^{t}|V(s)|ds$$

olur. Böylece Gronwal-Bellman eşitsizliğinden,

$$V(t) \leq V(0)e^{k_3 t} \tag{4.32}$$

elde edilir.

Peano varlık teoreminden dolayı $\delta > 0$ olmak üzere (4.29) sisteminin $[t_0, t_0 + \delta)$ aralığında en az bir $\big(X(t), Y(t)\big)$ çözümü vardır. Bu aralığın $[t_0, \infty)$ aralığına genişletilebileceğini göstermek istiyoruz. O halde bunun tersini kabul edelim. Yani bu sistemin $T < \infty$ için $[t_0, T)$ üzerinde bir çözümü var ve

$$\lim_{t \to T^-} (\|X(t)\| + \|Y(t)\|) = \infty$$

olsun.

(4.29) sisteminin $X(t_0) = X_0$ ve $Y(t_0) = Y_0$ başlangıç şartlarını sağlayan bir $\big(X(t), Y(t)\big)$ çözümünü ele alalım. Buna göre (4.32) den,

$$V(T) \leq V(0)e^{k_3 T} = k_4$$

olur. Ayrıca $V(T) \geq k\big(\|X(T)\|^2 + \|Y(T)\|^2\big)$ olduğundan,

$$\|X(T)\|^2 + \|Y(T)\|^2 \leq \frac{k_4}{k}$$

elde edilir. Böylece $t \to T^-$ için $\|X(t)\|$ ve $\|Y(t)\|$ nin sınırlı olduğu kolayca görülebilir. Bu ise varsayımımızla çelişir ve $T < \infty$ olmasının mümkün olmadığını $T = \infty$ olması gerektiğini gösterir.

Örnek 4.4.1. (4.3) denkleminde geçen katsayı matris ve matris fonksiyonlarını sırasıyla özel bir durum olan $n = 2$ için aşağıdaki gibi seçelim:

$$A(t) = \begin{bmatrix} 3 + t^2 & 2 \\ 2 & 3 + t^2 \end{bmatrix}, \qquad F(t, X, Y) = \begin{bmatrix} {x_1}^2 + {y_1}^2 + 4 & 1 \\ 1 & {x_1}^2 + {y_1}^2 + 4 \end{bmatrix},$$

$$G(t, X, Y) = [y_1 \quad y_2], \qquad H_1(X) = \begin{bmatrix} arctanx_1 + x_1 \\ arctanx_2 + x_2 \end{bmatrix}, \qquad H_2(X) = \begin{bmatrix} sinx_1 + 2x_1 \\ sinx_2 + 2x_2 \end{bmatrix}$$

ve

$$C(t,s)=\begin{bmatrix}\frac{s}{(t+1)^3} & 0\\ 0 & \frac{s}{(t+1)^3}\end{bmatrix}.$$

Böylece her $t \geq 0$ için,

$$\lambda_1\big(A(t)\big)=1+t^2, \qquad \lambda_2\big(A(t)\big)=5+t^2$$

$$\lambda_1\big(F(t,X,Y)\big)={x_1}^2+{y_1}^2+3, \qquad \lambda_2\big(F(t,X,Y)\big)={x_1}^2+{y_1}^2+5$$

$$\sum_{i=1}^{2} y_i\, g_i(t,x_i,y_i)={y_1}^2+{y_2}^2$$

$$\lambda_1\left(J_{H_1}(X)\right)=1+\frac{1}{1+{x_1}^2}, \qquad \lambda_2\left(J_{H_1}(X)\right)=1+\frac{1}{1+{x_2}^2},$$

$$\lambda_1\left(J_{H_2}(X)\right)=2+cosx_1, \qquad \lambda_2\left(J_{H_2}(X)\right)=2+cosx_2$$

ve

$$\int_0^t \|C(t,s)\|ds+\int_t^\infty \|C(u,t)\|du=\int_0^t \frac{\sqrt{2}s}{(t+1)^3}ds+\int_t^\infty \frac{\sqrt{2}t}{(u+1)^3}du=\frac{2t^2+t}{\sqrt{2}(t+1)^3}$$

$$\leq \frac{3\sqrt{2}}{7},$$

olur. Bu ise Teorem 4.1.1 den dolayı, ele alınan denklemin tüm çözümlerinin sürdürülebilir ve sınırlı olduğunu gösterir.

5. ÜÇÜNCÜ MERTEBEDEN BAZI DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN GLOBAL VARLIĞI VE SINIRLILIĞI

5. 1. Giriş ve Amaç

Bir önceki bölümde *ikinci mertebeden* lineer olmayan bazı diferansiyel denklemlerin global varlığı ve sınırlılığı için yeter şartlar oluşturuldu. Bu bölümde ise Giriş ve Literatür Bildirişleri bölümünde belirttiğimiz Oudjedi ve ark. (2014) ve Remili ve Oudjedi (2014) tarafından yapılan çalışmalar temel alınarak *üçüncü mertebeden* lineer olmayan bir integro diferansiyel denklem ve sabit gecikmeli iki diferansiyel denklem için ilgili literatürde belirtilen çalışmalarda kullanılmış Lyapunov'un ikinci metodu yardımıyla çözümlerin global varlığı ve sınırlılığı incelenecektir.

Aşağıda belirtilen üçüncü mertebeden lineer olmayan integro diferansiyel denklemini ve üçüncü mertebeden lineer olmayan sabit gecikmeli diferansiyel denklemlerini ele alalım:

$$\left(q(t)\left(p(t)x'(t)\right)'\right)' + a(t)f(t,x,x')x'' + b(t)g(t,x)x' + c(t)h(x)$$

$$= \int_0^t C(t,s)x'(s)ds \qquad (5.1),$$

$$\left(q(t)\left(p(t)x'(t)\right)'\right)' + a(t)\psi\left(t,x(t),x'(t)\right)x''(t) + b(t)f\left(t,x(t)\right)x'(t)$$

$$+c(t)g\left(x'(t-r)\right) + d(t)h\left(x(t-r)\right) = e(t) \qquad (5.2),$$

$$(\varphi(x)x')'' + a(t)f(t,x,x')x'' + b(t)g(x,x') + \sum_{i=1}^{n} c_i(t)h_i\left(x(t-\tau_i)\right) = p(t) \quad (5.3).$$

Bu denklemler için çözümlerin global varlığı ve sınırlılığı incelenecektir.

5.2. (5.1) Denklemi İçin Çözümlerin Global Varlığı ve Sınırlılığı

Bu kesimde üçüncü mertebeden lineer olmayan (5.1) integro diferansiyel denklemi için çözümlerin global varlığı ve sınırlılığı incelenecektir. Bu denklemde p ve

q, $\mathbb{R}_+$ üzerinde sürekli türevlenebilen pozitif fonksiyonlar, $a, b, c \in C^1\left(\mathbb{R}_+, (0, \infty)\right)$ $f \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R}_+)$, $g \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$, $h \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ve $C(t, s)$, $0 \leq s \leq t < \infty$ için sürekli bir fonksiyondur. Burada (5.1) denklemi için ifade edilecek bir teoremin ispatı yapılarak konu ile ilgili bir örnek verilecek. (5.1) denklemi,

$$x' = \frac{1}{p(t)} y,$$

$$y' = \frac{1}{q(t)} z,$$

$$z' = \int_0^t C(t,s) \frac{y(s)}{p(s)} ds - A(t)z - B(t)y - c(t)h(x) \tag{5.4}$$

sistemine denktir. Burada

$$A(t) = \frac{a(t)}{p(t)q(t)} f\left(t, x, \frac{y}{p(t)}\right)$$

ve

$$B(t) = \left(\frac{p(t)b(t)g(t,x) - a(t)p'(t)f\left(t, x, \frac{y}{p(t)}\right)}{p^2(t)} \right)$$

dir.

Teorem 5.2.1. $a_0, a_1, c_0, \delta_0, \delta_1, m, n, L, M$ ve N pozitif sayılar olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlansın:

i) $m \leq q(t) \leq p(t) \leq M$, $-L \leq p'(t) \leq q'(t) \leq 0$ ve $p''(t) \geq 0$,

ii) $h(0) = 0$, $x \neq 0$ için $\frac{h(x)}{x} \geq \delta_0$ ve $|h'(x)| \leq \delta_1$,

iii) $a_0 \leq a(t) \leq a_1$ ve $a'(t) \leq 0$,

iv) $n \leq c(t) \leq b(t) \leq N$ ve $-N \leq b'(t) \leq c'(t) \leq 0$,

v) $0 < f_0 \leq f(t,x,y) \leq f_1$, $0 < g_0 \leq g(t,x) \leq g_1$ ve $f_t(t,x,y) \leq 0$, $g_t(t,x) \leq 0$,

vi) $\int_t^{\infty} |C(u,t)|du + \frac{m^2}{2}\int_0^t |C(t,s)|ds \le m^2 c_0.$

Bu taktirde

$$d = \frac{LM^2 a_1 f_1}{m^3}, \qquad a_2 = \frac{Ng_1}{nm} + \frac{La_1 f_1}{nm^2}, \qquad \delta_2 = mn\left(1 - \frac{\alpha M \delta_1}{g_0}\right)$$

$$c_0 = \frac{1}{M}\left(n(g_0 - \alpha M \delta_1) - d\right) \text{ ve } \ c_1 = \frac{1}{M}\left(\frac{\alpha f_0 a_0}{M} - 1\right)$$

olmak üzere eğer

$$\frac{M}{f_0 a_0} < \alpha < \frac{g_0}{M\delta_1} \le 1 \text{ ve } \ c_0 \le c_1$$

ise o zaman (5.4) denklem sisteminin tüm çözümleri sürdürülebilir ve sınırlıdır.

İspat:

$$V = V\big(t, x(t), y(t), z(t)\big) = e^{-\frac{\theta(t)}{k}} U\big(t, x(t), y(t), z(t)\big) \tag{5.5}$$

Lyapunov fonksiyonunu tanımlayalım. Burada k pozitif bir sabit,

$$U = U\big(t, x(t), y(t), z(t)\big) = p(t)c(t)H(x) + \alpha q(t)B(t)\frac{y^2}{2} + \alpha q(t)c(t)h(x)y$$

$$+\frac{1}{2}\left(A(t)q(t)y^2 + \alpha z^2 + 2yz\right) + \int_0^t \int_t^{\infty} |C(u,s)| \frac{y^2(s)}{p^2(s)} du ds \tag{5.6}$$

ve

$$D(t) = \frac{\alpha M}{2}\left(\frac{2a_1 f_1 {p'}^2(t) - p(t)Ng_1 p'(t)}{p^3(t)} - a_2 c'(t)\right)$$

olmak üzere,

$$\theta(t) = \int_0^t D(s)ds = \frac{\alpha M}{2}\int_0^t \left(\frac{2a_1 f_1 {p'}^2(t) - p(t)Ng_1 p'(t)}{p^3(t)} - a_2 c'(t)\right)ds$$

$$\leq \alpha M a_1 f_1 \int_0^t \left(-\frac{p'(s)}{p^2(s)}\right)\left(-\frac{p'(s)}{p(s)}\right) dsds + \frac{\alpha M N g_1}{2m} + \frac{\alpha a_2 M N}{2}$$

$$\leq \frac{\alpha a_1 M L f_1}{m^2} + \frac{\alpha M N g_1}{2m} + \frac{\alpha a_2 M N}{2} < \infty,$$

dur. Ayrıca $H(x) = \int_0^x h(u)du$ olmak üzere $|x| \to \infty$ için $H(x) \to \infty$ ve $x \neq 0$ için $H(x) > 0$ dir. (5.6) dan,

$$U_1 = \frac{\alpha}{2} q(t) B(t) \left(y + \frac{c(t)h(x)}{B(t)}\right)^2,$$

$$U_2 = p(t)c(t)H(x) - \frac{\alpha q(t) c^2(t) h^2(x)}{2B(t)},$$

$$U_3 = \frac{\alpha}{2}\left(z + \frac{y}{\alpha}\right)^2 + \frac{1}{2} y^2 \left(A(t)q(t) - \frac{1}{\alpha}\right),$$

$$U_4 = \int_0^t \int_t^\infty |C(u,s)| \frac{y^2(s)}{p^2(s)} duds,$$

olmak üzere $U(t) = U_1 + U_2 + U_3 + U_4$ olarak yazılabilir. Buradan Teorem 5.2.1 in (i), (iii), (iv) ve (v) şartları dikkate alınırsa,

$$U_1 = \frac{\alpha}{2} q(t) B(t) \left(y + \frac{c(t)h(x)}{B(t)}\right)^2 \geq 0$$

olur.

$c(t)g(t,x) \leq p(t)B(t)$ olduğundan Teorem 5.2.1 in (i), (ii), (iv) ve (v) şartları dikkate alınırsa,

$$U_2 = p(t)c(t)H(x) - \frac{\alpha q(t) c^2(t) h^2(x)}{2B(t)} = p(t)c(t) \int_0^x \left(1 - \frac{\alpha q(t) c(t)}{p(t)B(t)} h'(u)\right) h(u)du$$

$$\geq mn \int_0^x \left(1 - \frac{\alpha M \delta_1}{g_0}\right) h(u)du \geq \delta_2 \int_0^x \delta_0 u\, du \geq \frac{\delta_2 \delta_0}{2} x^2,$$

elde edilir.

δ_3 ve δ_4 yeterince küçük pozitif sabitler olmak üzere Teorem 5.2.1 in (i), (iii) ve (v) şartları dikkate alınırsa,

$$U_3 = \frac{\alpha}{2}\left(z + \frac{y}{\alpha}\right)^2 + \frac{1}{2}y^2\left(A(t)q(t) - \frac{1}{\alpha}\right) \geq \frac{\alpha}{2}\left(z + \frac{y}{\alpha}\right)^2 + \frac{1}{2}y^2\left(\frac{a_0 f_0}{M} - \frac{1}{\alpha}\right)$$

$$\geq \delta_3 y^2 + \delta_4 z^2$$

yazılabilir. Böylece $U(t) = U_1 + U_2 + U_3 + U_4$ olduğundan

$$U(t) \geq \frac{\delta_2\delta_0}{2}x^2 + \delta_3 y^2 + \delta_4 z^2 \geq \delta_5(x^2 + y^2 + z^2) \geq 0,$$

elde edilir. Burada $\delta_5 = min\left\{\frac{\delta_2\delta_0}{2}, \delta_3, \delta_4\right\}$ dir. Bu ise $V\big(t, x(t), y(t), z(t)\big) \geq 0$ olduğunu gösterir.

$(x, y, z) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$, (5.4) sisteminin bir çözümü olsun. (5.6) de verilen $U\big(t, x(t), y(t), z(t)\big)$ fonksiyonunun bu çözüm boyunca t ye göre türevi alınırsa,

$$U' = \big(p(t)c(t)\big)'H(x) + c(t)h(x)y + \alpha q'(t)B(t)\frac{y^2}{2} + \alpha q(t)B'(t)\frac{y^2}{2} + \alpha B(t)yz$$

$$+\alpha\big(q(t)c(t)\big)'h(x)y + \frac{\alpha q(t)c(t)}{p(t)}h'(x)y^2 + \alpha c(t)h(x)z + \frac{\big(A(t)q(t)\big)'}{2}\,y^2$$

$$+A(t)yz + \alpha z\int_0^t \frac{C(t,s)y(s)}{p(s)}ds - \alpha A(t)z^2 - \alpha B(t)yz - \alpha c(t)h(x)z + \frac{z^2}{q(t)}$$

$$+y\int_0^t \frac{C(t,s)y(s)}{p(s)}ds - A(t)zy - B(t)y^2 - c(t)h(x)y + \frac{y^2}{p^2(t)}\int_t^\infty |C(u,t)|du$$

$$-\int_0^t |C(t,s)|\frac{y^2(s)}{p^2(s)}ds$$

$$= \big(p(t)c(t)\big)'H(x) + \alpha q'(t)B(t)\frac{y^2}{2} + \alpha q(t)B'(t)\frac{y^2}{2} + \alpha\big(q(t)c(t)\big)'h(x)y$$

$$+\frac{\alpha q(t)c(t)}{p(t)}h'(x)y^2+\frac{\big(A(t)q(t)\big)'}{2}\,y^2-\alpha A(t)z^2+\frac{z^2}{q(t)}-B(t)y^2$$

$$+(y+\alpha z)\int_0^t\frac{C(t,s)y(s)}{p(s)}ds+\frac{y^2}{p^2(t)}\int_t^\infty|C(u,t)|du-\int_0^t|C(t,s)|\frac{y^2(s)}{p^2(s)}ds$$

olur. Burada $\big(q(t)c(t)\big)'=q(t)c'(t)+q'(t)c(t)$ olduğundan,

$$\frac{\alpha q'(t)B(t)}{2}y^2=\frac{\alpha\big(q(t)c(t)\big)'B(t)}{2c(t)}y^2-\frac{\alpha q(t)c'(t)B(t)}{2c(t)}y^2$$

yazılabilir. Böylece

$$U'=F(t,x,y)+\left(\frac{\alpha q(t)B'(t)}{2}-\frac{\alpha q(t)c'(t)B(t)}{2c(t)}+\frac{A(t)q'(t)}{2}+G(t)\right)y^2$$

$$+\left(\frac{1}{q(t)}-\alpha A(t)\right)z^2+(y+\alpha z)\int_0^t\frac{C(t,s)y(s)}{p(s)}ds+\frac{y^2}{p^2(t)}\int_t^\infty|C(u,t)|du$$

$$-\int_0^t|C(t,s)|\frac{y^2(s)}{p^2(s)}ds$$

elde edilir. Burada

$$F(t,x,y)=\big(p(t)c(t)\big)'H(x)+\frac{\alpha\big(q(t)c(t)\big)'}{2c(t)}B(t)y^2+\alpha\big(q(t)c(t)\big)'h(x)y$$

ve

$$G(t)=\frac{A'(t)q(t)}{2}+\frac{\alpha q(t)c(t)}{p(t)}h'(x)-B(t),$$

dir.

$$F(t,x,y)=\big(q(t)c(t)\big)'\left(\frac{\big(p(t)c(t)\big)'}{\big(q(t)c(t)\big)'}H(x)+\frac{\alpha}{2c(t)}B(t)y^2+\alpha h(x)y\right)$$

$$= \big(q(t)c(t)\big)' \left(\frac{\big(p(t)c(t)\big)'}{\big(q(t)c(t)\big)'} H(x) + \frac{\alpha}{2c(t)} B(t) \left(y + \frac{c(t)h(x)}{B(t)} \right)^2 - \frac{\alpha c(t)h^2(x)}{2B(t)} \right)$$

yazılabilir. Teorem 5.2.1 in (i), (iv) ve (v) şartlarından $\frac{\big(p(t)c(t)\big)'}{\big(q(t)c(t)\big)'} \geq 1$ ve $\frac{c(t)}{B(t)} \leq \frac{M}{g_0}$ olduğundan,

$$F(t,x,y) \leq \big(q(t)c(t)\big)' \left(H(x) - \frac{\alpha c(t)h^2(x)}{2B(t)} \right)$$

$$\leq \big(q(t)c(t)\big)' \int_0^x \left(1 - \frac{\alpha c(t)}{B(t)} h'(u) \right) h(u)du$$

$$\leq \big(q(t)c(t)\big)' \int_0^x \left(1 - \frac{\alpha M \delta_1}{g_0} \right) h(u)du \leq \big(q(t)c(t)\big)' \frac{\delta_2 \delta_0}{2mn} x^2 \leq 0$$

olur. Ayrıca Teorem 5.2.1 in (i)-(v) şartları dikkate alınırsa,

$$G(t) = \frac{A'(t)q(t)}{2} + \frac{\alpha c(t)q(t)}{p(t)} h'(x) - B(t)$$

$$= \frac{a'(t)f\left(t,x,\frac{y}{p(t)}\right) + a(t)f_t\left(t,x,\frac{y}{p(t)}\right)}{2p(t)} - \frac{\big(p(t)q(t)\big)' a(t)q(t)f\left(t,x(t),\frac{y}{p(t)}\right)}{2\big(p(t)q(t)\big)^2}$$

$$+ \frac{\alpha c(t)q(t)}{p(t)} h'(x) - \frac{b(t)g(t,x)}{p(t)} + \frac{a(t)p'(t)f\left(t,x,\frac{y}{p(t)}\right)}{p^2(t)}$$

$$\leq - \frac{\big(p(t)q(t)\big)' a(t)f\left(t,x(t),\frac{y(t)}{p(t)}\right)}{2p^2(t)q(t)} + \frac{b(t)}{p(t)} \left(\alpha \frac{c(t)}{b(t)} q(t)h'(x) - g(t,x) \right)$$

$$\leq \frac{LMa_1 f_1}{m^3} + \frac{n}{M}(\alpha M \delta_1 - g_0) = \frac{1}{M}\big(d + n(\alpha M \delta_1 - g_0)\big) = -c_0 \leq 0$$

ve

$$B'(t)=\frac{b'(t)g(t,x)+b(t)g_t(t,x)}{p(t)}-\frac{p'(t)b(t)g(t,x)}{p^2(t)}-\frac{a'(t)p'(t)f\left(t,x,\frac{y}{p(t)}\right)}{p^2(t)}$$

$$-\frac{a(t)p''(t)f\left(t,x,\frac{y}{p(t)}\right)}{p^2(t)}-\frac{a(t)p'(t)f_t\left(t,x,\frac{y}{p(t)}\right)}{p^2(t)}+\frac{2a(t)p'^2(t)f\left(t,x,\frac{y}{p(t)}\right)}{p^3(t)}$$

$$\leq\frac{2a(t)p'^2(t)f\left(t,x,\frac{y}{p(t)}\right)-p(t)p'(t)b(t)g(t,x)}{p^3(t)}$$

$$\leq\frac{2a_1f_1p'^2(t)-Ng_1p(t)p'(t)}{p^3(t)}$$

olmak üzere,

$$\frac{\alpha q(t)B'(t)}{2}-\frac{\alpha q(t)c'(t)B(t)}{2c(t)}+\frac{A(t)q'(t)}{2}+G(t)$$

$$\leq\frac{\alpha q(t)B'(t)}{2}-\frac{\alpha q(t)c'(t)B(t)}{2c(t)}-c_0$$

$$\leq\frac{\alpha M}{2}\left(\frac{2a_1f_1p'^2(t)-Ng_1p(t)p'(t)}{p^3(t)}-a_2c'(t)\right)-c_0=D(t)-c_0$$

elde edilir. Böylece teoremin şartları, yukarıdaki eşitsizlikler ve $|uv|\leq\frac{1}{2}(u^2+v^2)$ eşitsizliği dikkate alınırsa,

$$U'\leq(D(t)-c_0)y^2+\left(\frac{1}{q(t)}-\alpha A(t)\right)z^2+(|y|+\alpha|z|)\int_0^t|C(t,s)|\left|\frac{y(s)}{p(s)}\right|ds$$

$$+\frac{y^2}{p^2(t)}\int_t^\infty|C(u,t)|du-\int_0^t|C(t,s)|\frac{y^2(s)}{p^2(s)}ds$$

$$\leq(D(t)-c_0)y^2-c_1z^2+\frac{y^2}{2}\int_0^t|C(t,s)|ds+\frac{1}{2}\int_0^t|C(t,s)|\frac{y^2(s)}{p^2(s)}ds$$

$$+\frac{\alpha}{2}z^2\int_0^t C(t,s)ds+\frac{\alpha}{2}\int_0^t C(t,s)\frac{y^2(s)}{p^2(s)}ds+\frac{y^2}{m^2}\int_t^\infty |C(u,t)|du$$

$$-\int_0^t |C(t,s)|\frac{y^2(s)}{p^2(s)}ds$$

$$\leq\left(D(t)-c_0+\frac{1}{m^2}\left(\int_t^\infty |C(u,t)|du+\frac{m^2}{2}\int_0^t |C(t,s)|ds\right)\right)y^2$$

$$+z^2\left(\frac{\alpha}{2}\int_0^t |C(t,s)|ds-c_1\right)+\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)\int_0^t |C(t,s)|\frac{y^2(s)}{p^2(s)}ds$$

$$\leq D(t)y^2,$$

olur. Böylece (5.5) de verilen Lyapunov fonksiyonunda $k=\delta_5$ seçilir ve bu fonksiyonun (5.4) sisteminin herhangi bir çözümü boyunca t ye göre türevi alınırsa,

$$V'=e^{-\frac{\theta(t)}{\delta_5}}\left(-\frac{D(t)}{\delta_5}U\big(t,x(t),y(t),z(t)\big)+U'\big(t,x(t),y(t),z(t)\big)\right)$$

$$\leq e^{-\frac{\theta(t)}{\delta_5}}\left(-\frac{D(t)}{\delta_5}\delta_5 y^2+D(t)y^2\right)=0$$

elde edilir.

Peano varlık teoreminden dolayı $\delta>0$ için (5.4) sisteminin $[t_0,t_0+\delta)$ aralığındaki bir çözümü $\big(x(t),y(t),z(t)\big)$ olsun. Bu aralığın $[t_0,\infty)$ aralığına genişletilebileceğini göstermek istiyoruz. O halde bunun tersini kabul edelim. Yani (5.4) sisteminin $T<\infty$ için $[t_0,T)$ üzerinde bir çözümü var ve

$$\lim_{t\to T^-}(|x(t)|+|y(t)|+|z(t)|)=\infty \tag{5.7}$$

olsun.

(5.4) sisteminin $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$ ve $z(t_0) = z_0$ başlangıç şartlarını sağlayan bir $\big(x(t), y(t), z(t)\big)$ çözümünü ele alalım. $V\big(t, x(t), y(t), z(t)\big)$ fonksiyonu (5.4) sisteminin yörüngeleri boyunca pozitif tanımlı ve azalan bir fonksiyon olduğundan

$$V\big(T, x(T), y(T), z(T)\big) = e^{-\frac{\theta(T)}{k}} U\big(T, x(T), y(T), z(T)\big) \leq V_0 = V(t_0, x_0, y_0, z_0)$$

yazılabilir. Burada $U\big(T, x(T), y(T), z(T)\big) \geq \delta_5\big(x^2(T) + y^2(T) + z^2(T)\big)$ oduğundan,

$$x^2(T) + y^2(T) + z^2(T) \leq \frac{V_0}{\delta_5} e^{\frac{\theta(T)}{k}} = \delta_6,$$

elde edilir. Böylece $t \to T^-$ için $|x(t)|, |y(t)|$ ve $|z(t)|$ nin sınırlı olduğu kolayca görülebilir. Bu ise varsayımımızla çelişir ve $T < \infty$ olmasının mümkün olmadığını $T = \infty$ olması gerektiğini gösterir.

Örnek 5.2.1. Üçüncü mertebeden

$$\left(\left(1 + \frac{1}{25e^t + 1}\right)\left(\left(1 + \frac{e^{-t}}{25}\right)x'(t)\right)'\right)' + \left(4 + \frac{1}{2+t}\right)\left(1 + \frac{e^{-t}}{1 + y^2}\right)x''(t)$$

$$+\left(8 + \frac{1}{1+t}\right)\left(1 + \frac{1}{1 + t + x^2}\right)x'(t) + \left(8 + \frac{1}{2+t}\right)\left(2x + \frac{x}{1 + x^2}\right)$$

$$= \int_0^t \frac{s}{(20t + 1)^2} x'(s)ds$$

lineer olmayan integro diferansiyel denklemini ele alalım. Burada her $t \geq 0$ için,

$$p(t) = 1 + \frac{e^{-t}}{25}, \quad q(t) = 1 + \frac{1}{25e^t + 1},$$

$$a(t) = 4 + \frac{1}{2+t}, \qquad b(t) = 8 + \frac{1}{1+t}, \qquad c(t) = 8 + \frac{1}{2+t},$$

$$f(t, x, x') = 1 + \frac{e^{-t}}{1 + y^2}, \qquad g(t, x) = 1 + \frac{1}{1 + t + x^2}, \qquad h(x) = 2x + \frac{x}{1 + x^2}$$

ve

$$C(t,s)=\frac{s}{(20t+1)^2},$$

dir. Buradan

$$m=1\le q(t)\le p(t)\le \frac{26}{25}=M, \quad -L=-\frac{1}{25}\le p'(t)\le q'(t)\le 0, \qquad p''(t)\ge 0,$$

$$a_0=4\le a(t)\le \frac{9}{2}=a_1, \qquad a'(t)\le 0,$$

$$n=8\le c(t)\le b(t)\le 9=N, \qquad -N=-9\le b'(t)\le c'(t)\le 0,$$

$$f_0=1\le f(t,x,x')\le 2=f_1, \qquad f_t(t,x,x')\le 0,$$

$$g_0=1\le g(t,x)\le 2=g_1, \quad g_t(t,x)\le 0,$$

$$h(0)=0, x\neq 0 \text{ için } \frac{h(x)}{x}=2+\frac{1}{1+x^2}\ge 2=\delta_0, \qquad |h'(x)|\le 3=\delta_1,$$

ve

$$\int_t^\infty |C(u,t)|du+\frac{m^2}{2}\int_0^t |C(t,s)|ds=\int_t^\infty \frac{t}{(20u+1)^2}du+\frac{1}{2}\int_0^t \frac{s}{(20t+1)^2}ds\le \frac{1}{320}$$

olur. Bu ise Teorem 5.2.1 den dolayı ele alınan denklemin tüm çözümlerinin sürdürülebilir ve sınırlı olduğunu gösterir.

5.3. (5.2) Denklemi İçin Çözümlerin Global Varlığı ve Sınırlılığı

Bu kesimde üçüncü mertebeden lineer olmayan (5.2) denklemi için çözümlerin global varlığı ve sınırlılığı incelenecektir. Bu denklemde p ve q, $\mathbb{R}_+=[0,\infty)$ üzerinde sürekli türevlenebilen pozitif fonksiyonlar, $a,b,c,d,e\in C^1(\mathbb{R},(0,\infty)), \psi\in C(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^2,\mathbb{R}_+)$, $g\in C(\mathbb{R},\mathbb{R}), f\in C(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R},\mathbb{R}_+)$ ve $h\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ dir. Burada (5.2) denklemi için ifade edilecek bir teoremin ispatı yapılarak konu ile ilgili bir örnek verilecek. (5.2) denklemi,

$$x'=\frac{1}{p(t)}y,$$

$$y' = \frac{1}{q(t)} z,$$

$$z' = e(t) - A(t)z - B(t)y - c(t)g\left(\frac{y}{p(t)}\right) - d(t)h(x)$$

$$+c(t) \int_{t-r}^{t} \left(\frac{y}{p(s)}\right)' g'\left(\frac{y}{p(s)}\right) ds + \int_{t-r}^{t} \frac{y}{p(s)} h'\big(x(s)\big)\, ds \qquad (5.8)$$

sistemine denktir. Burada

$$A(t) = \frac{a(t)\psi\left(t, x, \dfrac{y}{p(t)}\right)}{p(t)q(t)}$$

ve

$$B(t) = \frac{b(t)f(t,x)}{p(t)} - \frac{a(t)p'(t)\psi\left(t, x(t), \dfrac{y}{p(t)}\right)}{p^2(t)}$$

dir.

Teorem 5.3.1. $a_0, a_1, d_0, d_1, \delta_0, \delta_1, \delta_2, m, n, L, M$ ve N pozitif sabitler olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlansın:

i) $m \leq q(t) \leq p(t) \leq M,\ -L \leq p'(t) \leq q'(t) \leq 0$ ve $p''(t) \geq 0,$

ii) $h(0) = 0, x \neq 0$ için $\frac{h(x)}{x} \geq \delta_0$ ve $|h'(x)| \leq \delta_1,$

iii) $a_0 \leq a(t) \leq a_1$ ve $a'(t) \leq 0,$

iv) $n \leq d(t) \leq c(t) \leq b(t) \leq N$ ve $-N \leq b'(t) \leq c'(t) \leq d'(t) \leq 0,$

v) $g(0) = 0, y \neq 0$ için $d_0 \leq \frac{g(y)}{y} \leq d_1$ ve $|g'(y)| \leq \delta_2,$

vi) $0 < \psi_0 \leq \psi(t,x,y) \leq \psi_1,$ ve $\frac{\partial\psi(t,x,y)}{\partial t} = \psi_t(t,x,y) \leq 0,$

vii) $0 < f_0 \leq f(t,x) \leq f_1,$ ve $\frac{\partial f(t,x)}{\partial t} = f_t(t,x) \leq 0,$

viii) $\int_0^\infty |e(t)|\, dt < \infty.$

Bu takdirde

$$\lambda_1 = \frac{\alpha NL\delta_2 + NL\delta_2 + \alpha mN\delta_1 + mN\delta_1}{2m^2}, \quad \lambda_2 = \frac{\alpha N\delta_2 + N\delta_2}{2m^2},$$

$$\delta_3 = mn\left(1 - \frac{\alpha M\delta_1}{f_0}\right) \text{ ve } c_0 = \frac{LMa_1\psi_1}{m^3} + \alpha N\delta_1 - \frac{nf_0}{M}$$

olmak üzere eğer

$$\frac{M}{a_0\psi_0} < \alpha < \frac{f_0}{M\delta_1} \le 1,$$

$$\frac{\alpha M}{2}\left(\frac{2a_1\psi_1L^2 + LMNf_1}{m^3} + \frac{N^2f_1}{nm} + \frac{a_1LN\psi_1}{nm^2}\right) + \frac{\alpha LNd_1}{m} + c_0 \le \frac{nd_0}{2M} \text{ ve}$$

$$r < min\left(\frac{nd_0}{2M\left(\frac{NL\delta_2}{2m^2} + \frac{N\delta_2}{2m^2} + \frac{N\delta_1}{2m} + \lambda_1\right)}, \frac{\left(\frac{\alpha a_0\psi_0}{M} - 1\right)}{M\left(\frac{\alpha N\delta_2}{2m^2} + \frac{\alpha NL\delta_2}{2m^2} + \frac{\alpha N\delta_1}{2m} + \lambda_2\right)}\right)$$

ise o zaman (5.8) denklem sisteminin tüm çözümleri sürdürülebilir ve sınırlıdır.

İspat:

$$V = V\big(t, x(t), y(t), z(t)\big) = p(t)d(t)H(x) + \alpha q(t)B(t)\frac{y^2}{2} + \alpha q(t)d(t)h(x)y$$

$$+\frac{1}{2}(A(t)q(t)y^2 + \alpha z^2 + 2yz) + p(t)q(t)c(t)\int_0^{\frac{y}{p(t)}} g(s)ds + \lambda_1 \int_{-r}^{0}\int_{t+s}^{t} y^2(u)\, duds$$

$$+\lambda_2 \int_{-r}^{0}\int_{t+s}^{t} z^2(u)\, duds \tag{5.9}$$

Lyapunov fonksiyonunu tanımlayalım. Burada $H(x)=\int_0^x h(s)ds$ olmak üzere $|x|\to\infty$ için $H(x)\to\infty$ ve $x\neq 0$ için $H(x)>0$ dir. δ_4, δ_5 ve δ_6 yeterince küçük pozitif sabitler olmak üzere teoremin (i)-(vii) şartları dikkate alınırsa,

$$V=p(t)d(t)H(x)+\frac{\alpha}{2}q(t)B(t)\left(y+\frac{d(t)h(x)}{B(t)}\right)^2-\frac{\alpha q(t)d^2(t)h^2(x)}{2B(t)}$$

$$+\frac{\alpha}{2}\left(z+\frac{y}{\alpha}\right)^2+\frac{1}{2}\left(A(t)q(t)-\frac{1}{\alpha}\right)y^2+p(t)q(t)c(t)\int_0^{\frac{y}{p(t)}} g(s)ds$$

$$+\lambda_1\int_{-r}^{0}\int_{t+s}^{t} y^2(u)\,duds+\lambda_2\int_{-r}^{0}\int_{t+s}^{t} z^2(u)\,duds$$

$$\geq p(t)d(t)\int_0^x\left(1-\frac{\alpha d(t)q(t)}{p(t)B(t)}h'(u)\right)h(u)du+\frac{\alpha}{2}\left(z+\frac{y}{\alpha}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{a_0\psi_0}{M}-\frac{1}{\alpha}\right)y^2$$

$$\geq mn\int_0^x\left(1-\frac{\alpha M\delta_1}{f_0}\right)h(u)du+\delta_4y^2+\delta_5z^2$$

$$\geq\frac{\delta_3\delta_0}{2}x^2+\delta_4y^2+\delta_5z^2\geq\delta_6(x^2+y^2+z^2)$$

olur. $(x,y,z)=\big(x(t),y(t),z(t)\big)$, (5.8) sisteminin herhangi bir çözümü olsun. (5.9) da verilen Lyapunov fonksiyonunun bu çözüm boyunca t ye göre türevi alınırsa,

$$V'=\big(p(t)d(t)\big)'H(x)+d(t)h(x)y+\alpha q'(t)B(t)\frac{y^2}{2}+\alpha q(t)B'(t)\frac{y^2}{2}+\alpha B(t)yz$$

$$+\alpha\big(q(t)d(t)\big)'h(x)y+\frac{\alpha q(t)d(t)}{p(t)}h'(x)y^2+\alpha d(t)h(x)z+\frac{\big(A(t)q(t)\big)'}{2}y^2+A(t)yz$$

$$+\alpha e(t)z-\alpha A(t)z^2-\alpha B(t)yz-\alpha c(t)g\left(\frac{y}{p(t)}\right)z-\alpha d(t)h(x)z$$

$$+\alpha c(t)z\int_{t-r}^{t}\left(\frac{y(s)}{p(s)}\right)'g'\left(\frac{y(s)}{p(s)}\right)ds+\alpha d(t)z\int_{t-r}^{t}\frac{y(s)}{p(s)}h'\big(x(s)\big)\,ds+\frac{z^2}{q(t)}+e(t)y$$

$$-A(t)zy-B(t)y^2-c(t)g\left(\frac{y}{p(t)}\right)y-d(t)h(x)y+c(t)y\int_{t-r}^{t}\left(\frac{y(s)}{p(s)}\right)'g'\left(\frac{y(s)}{p(s)}\right)ds$$

$$+d(t)y\int_{t-r}^{t}\frac{y(s)}{p(s)}h'\big(x(s)\big)\,ds+a\big(p(t)q(t)c(t)\big)'\int_{0}^{\frac{y}{p(t)}}g(s)ds+ac(t)g\left(\frac{y}{p(t)}\right)z$$

$$-\frac{aq(t)p'(t)c(t)}{p(t)}g\left(\frac{y}{p(t)}\right)y+\lambda_1ry^2+\lambda_2rz^2-\lambda_1\int_{t-r}^{t}y^2(s)\,ds-\lambda_2\int_{t-r}^{t}z^2(s)\,ds$$

$$=\big(p(t)d(t)\big)'H(x)+\alpha q'(t)B(t)\frac{y^2}{2}+\alpha q(t)B'(t)\frac{y^2}{2}+\alpha\big(q(t)d(t)\big)'h(x)y$$

$$+\frac{\alpha q(t)d(t)}{p(t)}h'(x)y^2+\frac{\big(A(t)q(t)\big)'}{2}y^2-\alpha A(t)z^2+\alpha c(t)z\int_{t-r}^{t}\left(\frac{y(s)}{p(s)}\right)'g'\left(\frac{y(s)}{p(s)}\right)ds$$

$$+\alpha d(t)z\int_{t-r}^{t}\frac{y(s)}{p(s)}h'\big(x(s)\big)\,ds+\frac{z^2}{q(t)}-B(t)y^2-c(t)g\left(\frac{y}{p(t)}\right)y$$

$$+c(t)y\int_{t-r}^{t}\left(\frac{y(s)}{p(s)}\right)'g'\left(\frac{y(s)}{p(s)}\right)ds+d(t)y\int_{t-r}^{t}\frac{y(s)}{p(s)}h'\big(x(s)\big)\,ds$$

$$+a\big(p(t)q(t)c(t)\big)'\int_{0}^{\frac{y}{p(t)}}g(s)ds-\frac{aq(t)p'(t)c(t)}{p(t)}g\left(\frac{y}{p(t)}\right)y+\lambda_1ry^2+\lambda_2rz^2$$

$$-\lambda_1\int_{t-r}^{t}y^2(s)\ ds-\lambda_2\int_{t-r}^{t}z^2(s)\ ds+(y+\alpha z)e(t)$$

olur. Burada $\big(q(t)d(t)\big)'=q(t)d(t)'+q'(t)d(t)$ olduğundan

$$\frac{\alpha q'(t)B(t)}{2}y^2=\frac{\alpha\big(q(t)d(t)\big)'B(t)}{2d(t)}y^2-\frac{\alpha q(t)d(t)'B(t)}{2d(t)}y^2$$

yazılabilir. Böylece

$$V' = F(t,x,y) + \left(\frac{\alpha q(t)B'(t)}{2} - \frac{\alpha q(t)d(t)'B(t)}{2d(t)} + \frac{A(t)q'(t)}{2} + G(t)\right)y^2$$

$$+\left(\frac{1}{q(t)} - \alpha A(t)\right)z^2 + \alpha c(t)z \int_{t-r}^{t} \frac{z(s)}{p(s)q(s)} g'\left(\frac{y(s)}{p(s)}\right) ds$$

$$-\alpha c(t)z \int_{t-r}^{t} \frac{y(s)p'(s)}{p^2(s)} g'\left(\frac{y(s)}{p(s)}\right) ds + \alpha d(t)z \int_{t-r}^{t} \frac{y(s)}{p(s)} h'\big(x(s)\big)\, ds - c(t)g\left(\frac{y}{p(t)}\right)y$$

$$+c(t)y \int_{t-r}^{t} \frac{z(s)}{p(s)q(s)} g'\left(\frac{y(s)}{p(s)}\right) ds - c(t)y \int_{t-r}^{t} \frac{y(s)p'(s)}{p^2(s)} g'\left(\frac{y(s)}{p(s)}\right) ds$$

$$+d(t)y \int_{t-r}^{t} \frac{y(s)}{p(s)} h'\big(x(s)\big)\ ds + a\big(p(t)q(t)c(t)\big)' \int_{0}^{\frac{y}{p(t)}} g(s)ds$$

$$-\frac{aq(t)p'(t)c(t)}{p(t)} g\left(\frac{y}{p(t)}\right)y + \lambda_1 r y^2 + \lambda_2 r z^2 - \lambda_1 \int_{t-r}^{t} y^2(s)\ ds - \lambda_2 \int_{t-r}^{t} z^2(s)\ ds$$

$$+(y + \alpha z)e(t)$$

elde edilir. Burada

$$F(t,x,y) = \big(p(t)d(t)\big)' H(x) + \frac{\alpha\big(q(t)d(t)\big)' B(t)}{2d(t)} y^2 + \alpha\big(q(t)d(t)\big)' h(x)y,$$

ve

$$G(t) = \frac{A'(t)q(t)}{2} + \frac{\alpha d(t)q(t)}{p(t)} h'(x) - B(t)$$

dir.

$$F(t,x,y) = \big(q(t)d(t)\big)' \left(\frac{\big(p(t)d(t)\big)'}{\big(q(t)d(t)\big)'} H(x) + \frac{\alpha}{2d(t)} B(t)y^2 + \alpha h(x)y\right)$$

$$= \big(q(t)d(t)\big)' \left(\frac{\big(p(t)d(t)\big)'}{\big(q(t)d(t)\big)'} H(x) + \frac{\alpha}{2d(t)} B(t)\left(y + \frac{d(t)h(x)}{B(t)}\right)^2 - \frac{\alpha d(t)h^2(x)}{2B(t)}\right)$$

yazılabilir. Teoremin (i), (ii), (iv) ve (vii) şartlarından, $\frac{\left(p(t)d(t)\right)'}{\left(q(t)d(t)\right)'} \geq 1$ ve $\frac{d(t)}{B(t)} \leq \frac{M}{f_0}$ olduğundan,

$$F(t,x,y) \leq \left(q(t)d(t)\right)' \left(H(x) - \frac{\alpha d(t)h^2(x)}{2B(t)}\right)$$

$$= \left(q(t)d(t)\right)' \int_0^x \left(1 - \frac{\alpha d(t)}{B(t)} h'(u)\right) h(u)du$$

$$\leq \left(q(t)d(t)\right)' \int_0^x \left(1 - \frac{\alpha M \delta_1}{f_0}\right) h(u)du \leq \left(q(t)d(t)\right)' \frac{\delta_3 \delta_0}{2mn} x^2 \leq 0$$

olur. Ayrıca teoremin (i)-(vii) şartları dikkate alınırsa,

$$G(t) = \frac{A'(t)q(t)}{2} + \frac{\alpha d(t)q(t)}{p(t)} h'(x) - B(t)$$

$$= \frac{a'(t)\psi\left(t, x(t), \frac{y}{p(t)}\right) + a(t)\psi_t\left(t, x(t), \frac{y}{p(t)}\right)}{2p(t)}$$

$$- \frac{\left(p(t)q(t)\right)' a(t)q(t)\psi\left(t, x(t), \frac{y}{p(t)}\right)}{2\left(p(t)q(t)\right)^2} + \frac{\alpha c(t)q(t)}{p(t)} h'(x) - B(t)$$

$$\leq - \frac{\left(p(t)q(t)\right)' a(t)\psi\left(t, x(t), \frac{y}{p(t)}\right)}{2p^2(t)q(t)} + \frac{\alpha c(t)q(t)}{p(t)} h'(x) - B(t)$$

$$\leq \frac{LMa_1\psi_1}{m^3} + \alpha N \delta_1 - \frac{nf_0}{M} = c_0$$

ve

$$B'(t) = \frac{b'(t)f(t,x) + b(t)f_t(t,x)}{p(t)} - \frac{p'(t)b(t)f(t,x)}{p^2(t)} - \frac{a'(t)p'(t)\psi\left(t, x(t), \frac{y}{p(t)}\right)}{p^2(t)}$$

$$- \frac{a(t)p''(t)\psi\left(t, x(t), \frac{y}{p(t)}\right)}{p^2(t)} - \frac{a(t)p'(t)\psi_t\left(t, x(t), \frac{y}{p(t)}\right)}{p^2(t)}$$

$$+\frac{2a(t)p'^2(t)\psi\left(t,x(t),\frac{y}{p(t)}\right)}{p^3(t)}$$

$$\leq \frac{2a(t)p'^2(t)\psi\left(t,x(t),\frac{y}{p(t)}\right)}{p^3(t)}-\frac{p'(t)b(t)f(t,x)}{p^2(t)} \leq \frac{2a_1\psi_1L^2+LMNf_1}{m^3}$$

olmak üzere,

$$\frac{\alpha q(t)B'(t)}{2}-\frac{\alpha q(t)d'(t)B(t)}{2d(t)}+\frac{A(t)q'(t)}{2}+G(t)$$

$$\leq \frac{\alpha q(t)B'(t)}{2}-\frac{\alpha q(t)d'(t)B(t)}{2d(t)}+c_0$$

$$\leq \frac{\alpha M}{2}\left(\frac{2a_1\psi_1L^2+LMNf_1}{m^3}+\frac{N^2f_1}{nm}+\frac{a_1LN\psi_1}{nm^2}\right)+c_0$$

olur. Böylece teoremin şartları, yukarıdaki eşitsizlikler ve $|uv| \leq \frac{1}{2}(u^2+v^2)$ eşitsizliği dikkate alınırsa,

$$V' \leq \left(\frac{\alpha M}{2}\left(\frac{2a_1\psi_1L^2+LMNf_1}{m^3}+\frac{N^2f_1}{nm}+\frac{a_1LN\psi_1}{nm^2}\right)+c_0\right)y^2+\left(\frac{1}{q(t)}-\alpha A(t)\right)z^2$$

$$+\frac{\alpha N\delta_2}{m^2}\int_{t-r}^{t}|z(t)z(s)|\,ds+\frac{\alpha NL\delta_2}{m^2}\int_{t-r}^{t}|z(t)y(s)|\,ds+\frac{\alpha N\delta_1}{m}\int_{t-r}^{t}|z(t)y(s)|\,ds$$

$$-\frac{nd_0}{M}y^2+\frac{N\delta_2}{m^2}\int_{t-r}^{t}|y(t)z(s)|\,ds+\frac{NL\delta_2}{m^2}\int_{t-r}^{t}|y(t)y(s)|\,ds+\frac{N\delta_1}{m}\int_{t-r}^{t}|y(t)y(s)|\,ds$$

$$+\frac{\alpha LNd_1}{m}y^2+\lambda_1ry^2+\lambda_2rz^2-\lambda_1\int_{t-r}^{t}y^2(s)\,ds-\lambda_2\int_{t-r}^{t}z^2(s)\,ds$$

$$+(|y|+\alpha|z|)|e(t)|$$

$$\leq \left(\frac{\alpha M}{2}\left(\frac{2a_1\psi_1L^2+LMNf_1}{m^3}+\frac{N^2f_1}{nm}+\frac{a_1LN\psi_1}{nm^2}\right)+\frac{\alpha LNd_1}{m}+c_0-\frac{nd_0}{M}\right)y^2$$

$$+\frac{1}{M}\left(1-\frac{\alpha a_0\psi_0}{M}\right)z^2+\frac{\alpha N\delta_2 r}{2m^2}z^2+\frac{\alpha N\delta_2}{2m^2}\int_{t-r}^{t}z^2(s)\ ds+\frac{\alpha NL\delta_2 r}{2m^2}z^2$$

$$+\frac{\alpha NL\delta_2}{2m^2}\int_{t-r}^{t}y^2(s)\,ds+\frac{\alpha N\delta_1 r}{2m}z^2+\frac{\alpha N\delta_1}{2m}\int_{t-r}^{t}y^2(s)\ ds+\frac{N\delta_2 r}{2m^2}y^2+\frac{N\delta_2}{2m^2}\int_{t-r}^{t}z^2(s)\ ds$$

$$+\frac{NL\delta_2 r}{2m^2}y^2+\frac{NL\delta_2}{2m^2}\int_{t-r}^{t}y^2(s)\ ds+\frac{N\delta_1 r}{2m}y^2+\frac{N\delta_1}{2m}\int_{t-r}^{t}y^2(s)\ ds$$

$$+\lambda_1 ry^2+\lambda_2 rz^2-\lambda_1\int_{t-r}^{t}y^2(s)\ ds-\lambda_2\int_{t-r}^{t}z^2(s)\ ds+\delta_7(|y|+|z|)|e(t)|$$

$$\leq\left(\frac{\alpha M}{2}\left(\frac{2a_1\psi_1L^2+LMNf_1}{m^3}+\frac{N^2f_1}{nm}+\frac{a_1LN\psi_1}{nm^2}\right)+\frac{\alpha LNd_1}{m}+c_0-\frac{nd_0}{2M}\right)y^2$$

$$+\left(r\left(\frac{NL\delta_2}{2m^2}+\frac{N\delta_2}{2m^2}+\frac{N\delta_1}{2m}+\lambda_1\right)-\frac{nd_0}{2M}\right)y^2$$

$$+\left(\frac{1}{M}\left(1-\frac{\alpha a_0\psi_0}{M}\right)+r\left(\frac{\alpha N\delta_2}{2m^2}+\frac{\alpha NL\delta_2}{2m^2}+\frac{\alpha N\delta_1}{2m}+\lambda_2\right)\right)z^2$$

$$+\left(\frac{\alpha NL\delta_2}{2m^2}+\frac{NL\delta_2}{2m^2}+\frac{\alpha N\delta_1}{2m}+\frac{N\delta_1}{2m}-\lambda_1\right)\int_{t-r}^{t}y^2(s)\,ds$$

$$+\left(\frac{\alpha N\delta_2}{2m^2}+\frac{N\delta_2}{2m^2}-\lambda_2\right)\int_{t-r}^{t}z^2(s)\ ds+\delta_7(2+y^2+z^2)|e(t)|$$

$$\leq 2\delta_7|e(t)|+\delta_7(y^2+z^2)|e(t)|\leq 2\delta_7|e(t)|+\delta_8|e(t)|V,$$

elde edilir. Burada $\delta_7=max\{1,\alpha\}$ ve $\delta_8=\frac{\delta_7}{\delta_6}$ dır. Yukarıdaki eşitsizliğin iki tarafının 0 dan t ye integrali alınırsa,

$$V(t)\leq V(0)+2\delta_7\int_0^t|e(s)|ds+\delta_8\int_0^t|e(s)|V(s)ds$$

olur. Böylece Gronwal-Bellman eşitsizliğinden,

$$V(t) \leq \delta_9 exp\left(\delta_8 \int_0^\infty |e(s)|ds\right) = \delta_{10} \tag{5.10}$$

elde edilir. Burada $\delta_9 = V(0) + 2\delta_7 \int_0^\infty |e(s)|ds$ dir.

Peano varlık teoreminden dolayı $\delta > 0$ için (5.8) sisteminin $[t_0, t_0 + \delta)$ aralığındaki herhangi bir çözümü $\big(x(t), y(t), z(t)\big)$ olsun. Bu aralığın $[t_0, \infty)$ aralığına genişletilebileceğini göstermek istiyoruz. O halde bunun tersini kabul edelim. Yani (5.8) sisteminin $T < \infty$ için $[t_0, T)$ üzerinde bir çözümü var ve

$$\lim_{t \to T^-} (|x(t)| + |y(t)| + |z(t)|) = \infty \tag{5.11}$$

olsun. (5.8) sisteminin $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$ ve $z(t_0) = z_0$ başlangıç şartlarını sağlayan bir $\big(x(t), y(t), z(t)\big)$ çözümünü ele alalım. (5.10) eşitsizliğinden

$$V(T) \leq \delta_{10},$$

yazılabilir. Burada $V(T) \geq \delta_6 \big(x^2(T) + y^2(T) + z^2(T)\big)$ olduğundan,

$$x^2(T) + y^2(T) + z^2(T) \leq \frac{\delta_{10}}{\delta_6},$$

olur. Böylece $t \to T^-$ için $|x(t)|, |y(t)|$ ve $|z(t)|$ nin sınırlı olduğu kolayca görülebilir. Bu ise varsayımımızla çelişir ve $T < \infty$ olmasının mümkün olmadığını $T = \infty$ olması gerektiğini gösterir.

Örnek 5.3.1. Üçüncü mertebeden

$$\left(\left(1 + \frac{e^{-t}}{30}\right)\left(\left(1 + \frac{e^{-t}}{20}\right)x'(t)\right)'\right)' + \left(1 + \frac{1}{1+t}\right)\left(4 + \frac{e^{-t}}{1+y^2}\right)x''(t)$$

$$+\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2+t}\right)\left(1 + \frac{e^{-t}}{1+x^2}\right)x'(t) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3+t}\right)\left(10x'(t-r) + \frac{x'(t-r)}{1+x'^2(t-r)}\right)$$

$$+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4+t}\right)\left(2x(t-r)+\frac{x(t-r)}{1+x^2(t-r)}\right)=e^{-t}$$

lineer olmayan diferansiyel denklemini ele alalım. Burada her $t \geq 0$ için,

$$p(t)=1+\frac{e^{-t}}{20}, \quad q(t)=1+\frac{e^{-t}}{30},$$

$$a(t)=1+\frac{1}{1+t}, \qquad b(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2+t}, \qquad c(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3+t}, \qquad d(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4+t}$$

$$\psi(t,x,y)=4+\frac{e^{-t}}{1+y^2}, \qquad f(t,x)=1+\frac{e^{-t}}{1+x^2}, \qquad g(y)=10y+\frac{y}{1+y^2},$$

$h(x)=2x+\dfrac{x}{1+x^2}$ ve $e(t)=e^{-t}$,

dir. Buna göre

$$m=1\leq q(t)\leq p(t)\leq \frac{21}{10}=M, \qquad -L=-\frac{1}{20}\leq p'(t)\leq q'(t)\leq 0, \quad p''(t)\geq 0,$$

$$a_0=1\leq a(t)\leq 2=a_1, \qquad a'(t)\leq 0,$$

$$n=\frac{1}{2}\leq d(t)\leq c(t)\leq b(t)\leq 1=N, \qquad -1\leq b'(t)\leq c'(t)\leq d'(t)\leq 0,$$

$$\psi_0=4\leq \psi(t,x,y)\leq 5=\psi_1, \qquad \psi_t(t,x,y)\leq 0,$$

$$f_0=1\leq f(t,x)\leq 2=f_1, \qquad f_t(t,x)\leq 0$$

$g(0)=0, y\neq 0$ için $\quad d_0=10\leq \dfrac{g(y)}{y}\leq 11=d_1, \qquad |g'(y)|\leq 11=\delta_2,$

$h(0)=0, x\neq 0$ için $\dfrac{h(x)}{x}\geq 2=\delta_0, \qquad |h'(x)|\leq 3=\delta_1$ ve $\displaystyle\int_0^t |e(s)|ds=1$

olur. Bu ise Teorem 5.3.1 den dolayı ele alınan denklemin tüm çözümlerinin sürdürülebilir ve sınırlı olduğunu gösterir.

5.4. (5.3) Denklemi İçin Çözümlerin Global Varlığı ve Sınırlılığı

Bu kesimde üçüncü mertebeden lineer olmayan (5.3) denklemi için çözümlerin global varlığı ve sınırlılığı incelenecektir. Bu denklemde φ, a, b, c_i ve p, $\mathbb{R}_+ = [0,\infty)$ üzerinde sürekli türevlenebilen pozitif fonksiyonlar, $f \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R}_+), g \in C(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, ve $h \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dir. Burada (5.3) denklemi için ifade edilecek bir teoremin ispatı yapılarak konu ile ilgili bir örnek verilecek. (5.3) denklemi,

$$x' = \frac{y}{\varphi(x)},$$

$$y' = z,$$

$$z' = p(t) - \frac{a(t)f\left(t, x, \frac{y}{\varphi(x)}\right)}{\varphi(x)} z + \frac{a(t)\varphi'(x)f\left(t, x, \frac{y}{\varphi(x)}\right)}{\varphi^3(x)} y^2 - b(t)g\left(x, \frac{y}{\varphi(x)}\right)$$

$$- \sum_{i=1}^{n} c_i(t)h_i(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i(t) \int_{t-\tau_i}^{t} \frac{y(s)}{\varphi(x(s))} h_i'(x(s))ds \tag{5.12}$$

sistemine denktir.

Teorem 5.4.1. $a_0, a_1, d_0, d_1, n, N, \delta_i, L_i$ ve τ_i pozitif sabitler olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlansın:

i) $a_0 \le a(t) \le a_1$, ve $a'(t) \le 0$,

ii) $0 < n \le b(t) \le c_i(t) \le N$, $-N \le c_i'(t) \le b'(t) \le 0$, $c_i(t) \le C_i$, $\max_{1\le i\le n} C_i = N$

iii) $0 < \varphi_0 \le \varphi(x) \le \varphi_1$, $\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi'(u)|\, du < \infty$,

iv) $h_i(0) = 0$, $x \ne 0$ için $\frac{h_i(x)}{x} \ge \delta_i > 0$ ve $|h_i'(x)| \le L_i$,

v) $g(x, 0) = 0$, $y \ne 0$ için $0 < d_0 \le \frac{g(x,y)}{y} \le d_1$, $g_x(x, y) \le 0$,

vi) $0 < f_0 \le f(t, x, y) \le f_1$, $f_t(t, x, y) \le 0$ ve $yf_x(t, x, y) \le 0$,

vii) $\int_0^{\infty} |p(t)|\, dt < \infty$.

Bu taktirde,

$$\frac{\varphi_1}{d_0}\sum_{i=1}^{n}\delta_i < \alpha < a_0 f_0 \text{ ve } \frac{N}{\varphi_0}\sum_{i=1}^{n}L_i = \frac{2\varphi_0}{(\alpha+\varphi_0)}\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}}\lambda_{\mathrm{i}} \le \frac{\alpha n d_0}{{\varphi_1}^2}$$

olmak üzere eğer

$$\tau_0 = max\{\tau_1, \tau_2, \dots \tau_n\} < min\left(\frac{2\varphi_0(a_0 f_0 - \alpha)}{N\varphi_1\sum_{i=1}^{n}L_i}, \frac{\frac{\alpha n d_0}{{\varphi_1}^2} - \frac{N}{\varphi_0}\sum_{i=1}^{n}L_i}{\frac{\alpha N}{2{\varphi_0}^2}\sum_{i=1}^{n}L_i + \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}}\lambda_{\mathrm{i}}}\right)$$

ise o zaman (5.12) sisteminin tüm çözümleri sürdürülebilir ve sınırlıdır.

İspat:

$$V = V\big(t, x(t), y(t), z(t)\big) = e^{-\frac{\gamma(t)}{\mu}}U\big(t, x(t), y(t), z(t)\big) \tag{5.13}$$

Lyapunov fonksiyonunu tanımlayalım. Burada μ pozitif bir sabit,

$$U = U\big(t, x(t), y(t), z(t)\big) = \alpha\sum_{i=1}^{n}c_i(t)\int_0^x h_i(t)dt + y\sum_{i=1}^{n}c_i(t)h_i\big(x(t)\big)$$

$$+b(t)\varphi(x)\int_0^{\frac{y}{\varphi(x)}} g(x,\tau)d\tau + \frac{1}{2}z^2 + \frac{\alpha}{\varphi(x)}yz + \alpha a(t)\int_0^{\frac{y}{\varphi(x)}} f(t,x,\tau)\tau d\tau$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\int_{-\tau_i}^{0}\int_{t+s}^{t} y^2(u)\,duds \tag{5.14}$$

ve

$$\theta(t) = \frac{x'(t)\varphi'\big(x(t)\big)}{\varphi^2\big(x(t)\big)}, \qquad \alpha_1(t) = min\{x(0), x(t)\}, \qquad \alpha_2(t) = max\{x(0), x(t)\},$$

olmak üzere

$$\gamma(t)=\int_0^t|\theta(s)|ds=\int_0^t\left|\frac{x'(t)\varphi'\big(x(t)\big)}{\varphi^2\big(x(t)\big)}\right|ds=\int_{\alpha_1(t)}^{\alpha_2(t)}\left|\frac{\varphi'(u)}{\varphi^2(u)}\right|du$$

$$\leq\frac{1}{{\varphi_0}^2}\int_{-\infty}^{+\infty}|\varphi'(u)|du<\infty,$$

dir. γ_1,γ_2 ve γ_3 yeterince küçük pozitif sabitler olmak üzere teoremin (i)-(vi) şartları dikkate alınırsa (5.14) den,

$$U=\alpha\sum_{i=1}^{n}c_i(t)\int_0^x h_i(t)dt+y\sum_{i=1}^{n}c_i(t)h_i\big(x(t)\big)+b(t)\varphi(x)\int_0^{\frac{y}{\varphi(x)}}g(x,\tau)d\tau$$

$$+\frac{1}{2}\left(z+\frac{\alpha}{\varphi(x)}y\right)^2+\alpha a(t)\int_0^{\frac{y}{\varphi(x)}}\left(f(t,x,\tau)-\frac{\alpha}{a(t)}\right)\tau d\tau+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\int_{-\tau_i}^{0}\int_{t+s}^{t}y^2(u)\,duds$$

$$\geq b(t)\left(\alpha\sum_{i=1}^{n}\frac{c_i(t)}{b(t)}\int_0^x h_i(t)dt+y\sum_{i=1}^{n}\frac{c_i(t)}{b(t)}h_i\big(x(t)\big)+\varphi(x)\int_0^{\frac{y}{\varphi(x)}}g(x,\tau)d\tau\right)$$

$$+\frac{1}{2}\left(z+\frac{\alpha}{\varphi(x)}y\right)^2+\frac{\alpha(a_0f_0-\alpha)}{2{\varphi_1}^2}y^2$$

$$\geq n\left(\frac{\alpha}{2}\sum_{i=1}^{n}(\delta_i)\,x^2+\sum_{i=1}^{n}(\delta_i)\,xy+\frac{d_0y^2}{2\varphi_1}\right)+\gamma_1y^2+\gamma_2z^2$$

$$\geq n\left(\frac{\alpha}{2}\sum_{i=1}^{n}(\delta_i)\left(x+\frac{1}{\alpha}y\right)^2+\left(\frac{d_0}{2\varphi_1}-\frac{1}{2\alpha}\sum_{i=1}^{n}\delta_i\right)y^2\right)+\gamma_1y^2+\gamma_2z^2$$

$$\geq\gamma_3(x^2+y^2+z^2)$$

olur. Bu ise $V\big(t,x(t),y(t),z(t)\big)\geq 0$ olduğunu gösterir.

$(x, y, z) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$, (5.12) sisteminin bir çözümü olsun. (5.14) de verilen $U\big(t, x(t), y(t), z(t)\big)$ fonksiyonunun bu çözüm boyunca t ye göre türevi alınırsa,

$$U' = \alpha \sum_{i=1}^{n} c_i{}'(t) \int_0^x h_i(t)dt + \frac{\alpha y}{\varphi(x)} \sum_{i=1}^{n} c_i(t) h_i\big(x(t)\big) + z \sum_{i=1}^{n} c_i(t) h_i\big(x(t)\big)$$

$$+y \sum_{i=1}^{n} c_i{}'(t) h_i\big(x(t)\big) + \frac{y^2}{\varphi(x)} \sum_{i=1}^{n} c_i(t) h_i{}'\big(x(t)\big) + b'(t)\varphi(x) \int_0^{\frac{y}{\varphi(x)}} g(x,\tau)d\tau$$

$$+\frac{b(t)\varphi'(x)y}{\varphi(x)} \int_0^{\frac{y}{\varphi(x)}} g(x,\tau)d\tau + b(t)y \int_0^{\frac{y}{\varphi(x)}} g_x(x,\tau)d\tau + b(t) g\left(x, \frac{y}{\varphi(x)}\right) z$$

$$-\theta(t)b(t)\varphi(x) g\left(x, \frac{y}{\varphi(x)}\right) y + p(t)z - \frac{a(t) f\left(t, x, \frac{y}{\varphi(x)}\right)}{\varphi(x)} z^2$$

$$+\frac{a(t)\varphi'(x) f\left(t, x, \frac{y}{\varphi(x)}\right)}{\varphi^3(x)} z y^2 - b(t) g\left(x, \frac{y}{\varphi(x)}\right) z - z \sum_{i=1}^{n} c_i(t) h_i\big(x(t)\big)$$

$$+z \sum_{i=1}^{n} c_i(t) \int_{t-\tau_i}^{t} \frac{y(s)}{\varphi\big(x(s)\big)} h_i{}'\big(x(s)\big) ds - \alpha\theta(t) y z + \frac{\alpha}{\varphi(x)} z^2 + \frac{\alpha}{\varphi(x)} p(t) y$$

$$-\frac{\alpha a(t) f\left(t, x, \frac{y}{\varphi(x)}\right)}{\varphi^2(x)} y z + \frac{\alpha a(t)\theta(t) f\left(t, x, \frac{y}{\varphi(x)}\right)}{\varphi(x)} y^2 - \frac{\alpha b(t) g\left(x, \frac{y}{\varphi(x)}\right)}{\varphi(x)} y$$

$$-\frac{\alpha y}{\varphi(x)} \sum_{i=1}^{n} c_i(t) h_i\big(x(t)\big) + \frac{\alpha y}{\varphi(x)} \sum_{i=1}^{n} c_i(t) \int_{t-\tau_i}^{t} \frac{y(s)}{\varphi\big(x(s)\big)} h_i{}'\big(x(s)\big) ds$$

$$+\alpha a'(t) \int_0^{\frac{y}{\varphi(x)}} f(t,x,\tau)\tau d\tau + \alpha a(t) \int_0^{\frac{y}{\varphi(x)}} f_t(t,x,\tau)\tau d\tau + \alpha a(t) \frac{y}{\varphi(x)} \int_0^{\frac{y}{\varphi(x)}} f_x(t,x,\tau)\tau d\tau$$

$$+\frac{\alpha a(t)f\left(t,x,\frac{y}{\varphi(x)}\right)}{\varphi^2(x)}zy-\frac{\alpha a(t)\theta(t)f\left(t,x,\frac{y}{\varphi(x)}\right)}{\varphi(x)}y^2+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\tau_i y^2$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\int_{t-\tau_i}^{t}y^2(s)\,ds$$

$$=\alpha\sum_{i=1}^{n}c_i{}'(t)\int_0^x h_i(t)dt+y\sum_{i=1}^{n}c_i{}'(t)h_i\big(x(t)\big)+b'(t)\varphi(x)\int_0^{\frac{y}{\varphi(x)}}g(x,\tau)d\tau$$

$$+\frac{1}{\varphi(x)}\left(\alpha-a(t)f\left(t,x,\frac{y}{\varphi(x)}\right)\right)z^2-\frac{\alpha b(t)g\left(x,\frac{y}{\varphi(x)}\right)}{\varphi(x)}y+b(t)y\int_0^{\frac{y}{\varphi(x)}}g_x(x,\tau)d\tau$$

$$+\alpha a'(t)\int_0^{\frac{y}{\varphi(x)}}f(t,x,\tau)\tau d\tau+\frac{y^2}{\varphi(x)}\sum_{i=1}^{n}c_i(t)h_i{}'\big(x(t)\big)+\alpha a(t)\int_0^{\frac{y}{\varphi(x)}}f_t(t,x,\tau)\tau d\tau$$

$$+\alpha a(t)\frac{y}{\varphi(x)}\int_0^{\frac{y}{\varphi(x)}}f_x(t,x,\tau)\tau d\tau+z\sum_{i=1}^{n}c_i(t)\int_{t-\tau_i}^{t}\frac{y(s)}{\varphi\big(x(s)\big)}h_i{}'\big(x(s)\big)ds$$

$$+\frac{\alpha y}{\varphi(x)}\sum_{i=1}^{n}c_i(t)\int_{t-\tau_i}^{t}\frac{y(s)}{\varphi\big(x(s)\big)}h_i{}'\big(x(s)\big)ds+\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}}\lambda_{\mathrm{i}}\tau_i y^2-\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}}\lambda_{\mathrm{i}}\int_{t-\tau_i}^{t}y^2(s)\,ds$$

$$+\theta(t)\left(b(t)\varphi^2(x)\int_0^{\frac{y}{\varphi(x)}}g(x,\tau)d\tau-b(t)\varphi(x)g\left(x,\frac{y}{\varphi(x)}\right)y\right)$$

$$+\theta(t)\left(a(t)f\left(t,x,\frac{y}{\varphi(x)}\right)-\alpha\right)zy+p(t)\left(z+\frac{\alpha}{\varphi(x)}y\right)$$

elde edilir. Buradan teoremin şartları ve $|uv|\le\frac{1}{2}(u^2+v^2)$ eşitsizliği dikkate alınırsa,

$$U' \leq b'(t)\left(\alpha\sum_{i=1}^{n}\frac{c_i{}'(t)}{b'(t)}\int_0^x h_i(t)dt + y\sum_{i=1}^{n}\frac{c_i{}'(t)}{b'(t)}h_i\big(x(t)\big) + \varphi(x)\int_0^{\frac{y}{\varphi(x)}} g(x,\tau)d\tau\right)$$

$$+\frac{1}{\varphi_1}(\alpha - a_0 f_0)z^2 - \frac{\alpha n d_0}{{\varphi_1}^2}y^2 + \frac{y^2 N}{\varphi_0}\sum_{i=1}^{n}L_i + \frac{N}{\varphi_0}\sum_{i=1}^{n}L_i\int_{t-\tau_i}^{t}|z(t)y(s)|ds$$

$$+\frac{\alpha N}{{\varphi_0}^2}\sum_{i=1}^{n}L_i\int_{t-\tau_i}^{t}|y(t)y(s)|ds + \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}}\lambda_{\mathrm{i}}\tau_i y^2 - \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}}\lambda_{\mathrm{i}}\int_{t-\tau_i}^{t}y^2(s)\,ds$$

$$+|\theta(t)|(Nd_1y^2 + (a_1f_1 - \alpha)|zy|) + |p(t)|\left(|z| + \frac{\alpha}{\varphi_0}|y|\right)$$

$$\leq b'(t)\left(\frac{\alpha}{2}\sum_{i=1}^{n}(\delta_i)\,x^2 + \sum_{i=1}^{n}(\delta_i)\,xy + \frac{d_0}{2\varphi_1}y^2\right) + \frac{1}{\varphi_1}(\alpha - a_0 f_0)z^2 - \frac{\alpha n d_0}{{\varphi_1}^2}y^2$$

$$+\frac{y^2 N}{\varphi_0}\sum_{i=1}^{n}L_i + \frac{N}{2\varphi_0}\sum_{i=1}^{n}L_i\tau_i z^2 + \frac{N}{2\varphi_0}\sum_{i=1}^{n}L_i\int_{t-\tau_i}^{t}y^2(s)ds$$

$$+\frac{\alpha N}{2{\varphi_0}^2}\sum_{i=1}^{n}L_i\tau_i\,y^2 + \frac{\alpha N}{2{\varphi_0}^2}\sum_{i=1}^{n}L_i\int_{t-\tau_i}^{t}y^2(s)ds + \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}}\lambda_{\mathrm{i}}\tau_i y^2 - \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}}\lambda_{\mathrm{i}}\int_{t-\tau_i}^{t}y^2(s)\,ds$$

$$+|\theta(t)|(Nd_1y^2 + (a_1f_1 - \alpha)|zy|) + \gamma_4|p(t)|(|z| + |y|)$$

$$\leq \left(\frac{1}{\varphi_1}(\alpha - a_0 f_0) + \frac{N\tau_0}{2\varphi_0}\sum_{i=1}^{n}L_i\right)z^2$$

$$+\left(\frac{N}{\varphi_0}\sum_{i=1}^{n}L_i - \frac{\alpha n d_0}{{\varphi_1}^2} + \tau_0\left(\frac{\alpha N}{2{\varphi_0}^2}\sum_{i=1}^{n}L_i + \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)\right)y^2$$

$$+\left(\frac{N}{2\varphi_0}\sum_{i=1}^{n}L_i + \frac{\alpha N}{2{\varphi_0}^2}\sum_{i=1}^{n}L_i - \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}}\lambda_{\mathrm{i}}\right)\int_{t-\tau_i}^{t}y^2(s)ds$$

$$+|\theta(t)|\left(\left(Nd_1+\frac{a_1f_1-\alpha}{2}\right)y^2+\left(\frac{a_1f_1-\alpha}{2}\right)z^2\right)+\gamma_4|p(t)|(|z|+|y|)$$

$$\leq \gamma_5|\theta(t)|(y^2+z^2)+\gamma_4|p(t)|(2+y^2+z^2)$$

olur. Burada $\gamma_5 = Nd_1 + \frac{a_1f_1-\alpha}{2}$ ve $\gamma_4 = max\left\{1, \frac{\alpha}{\varphi_0}\right\}$ dir. Böylece (5.14) de tanımlanan Lyapunov fonksiyonunda $\mu = \frac{\gamma_3}{\gamma_5}$ olarak seçilir ve bu fonksiyonun (5.12) sisteminin herhangi bir çözümü boyunca türevi alınırsa,

$$V' = e^{-\left(\frac{\gamma_5}{\gamma_3}\right)\gamma(t)}\left(-\frac{|\theta(t)|}{\gamma_3}\gamma_5U\big(t,x(t),y(t),z(t)\big)+U'\big(t,x(t),y(t),z(t)\big)\right)$$

$$\leq e^{-\left(\frac{\gamma_5}{\gamma_3}\right)\gamma(t)}\big(-|\theta(t)|\gamma_5(y^2+z^2)+|\theta(t)|\gamma_5(y^2+z^2)+\gamma_4|p(t)|(2+y^2+z^2)\big)$$

$$\leq e^{-\left(\frac{\gamma_5}{\gamma_3}\right)\gamma(t)}\big(\gamma_4|p(t)|(2+y^2+z^2)\big) \leq \gamma_6|p(t)|+\gamma_7|p(t)|V$$

elde edilir. Burada $\gamma_6 = 2\gamma_4 e^{-\left(\frac{\gamma_5}{\gamma_3}\right)\gamma(t)}$ ve $\gamma_7 = \frac{\gamma_4}{\gamma_3}$ dir. Yukarıdaki eşitsizlikte her iki tarafın 0 dan t ye integrali alınırsa,

$$V(t) \leq V(0)+\gamma_6\int_0^t |p(s)|ds+\gamma_7\int_0^t |p(s)||V(s)|\,ds$$

olur. Böylece Gronwal-Bellman eşitsizliğinden,

$$V(t) \leq \gamma_8 exp\left(\gamma_7\int_0^\infty |p(s)|\,ds\right) = \gamma_9 \tag{5.15}$$

elde edilir. Burada $\gamma_8 = V(0)+\gamma_6\int_0^\infty |p(s)|ds$ dir.

Peano varlık teoreminden dolayı $\delta > 0$ için (5.12) sisteminin $[t_0, t_0+\delta)$ aralığındaki bir çözümü $\big(x(t), y(t), z(t)\big)$ olsun. Bu aralığın $[t_0, \infty)$ aralığına genişletilebileceğini göstermek istiyoruz. O halde bunun tersini kabul edelim. Yani (5.12) sisteminin $T < \infty$ için $[t_0, T)$ üzerinde bir çözümü var ve

$$\lim_{t \to T^-} (|x(t)| + |y(t)| + |z(t)|) = \infty \tag{5.16}$$

olsun. (5.12) sisteminin $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$ ve $z(t_0) = z_0$ başlangıç şartlarını sağlayan bir $(x(t), y(t), z(t))$ çözümünü ele alalım. (5.15) den,

$$V(T) \leq \gamma_9,$$

yazılabilir. Burada $V(T) \geq \gamma_3 e^{-\frac{\gamma(T)}{\mu}} \left(x^2(T) + y^2(T) + z^2(T)\right)$ olduğundan,

$$x^2(T) + y^2(T) + z^2(T) \leq \frac{\gamma_9}{\gamma_3} e^{\frac{\gamma(T)}{\mu}},$$

olur. Böylece $t \to T^-$ için $|x(t)|, |y(t)|$ ve $|z(t)|$ nin sınırlı olduğu kolayca görülebilir. Bu ise varsayımımızla çelişir ve $T < \infty$ olmasının mümkün olmadığını $T = \infty$ olması gerektiğini gösterir.

Örnek 5.4.1. İki gecikme argümentli üçüncü mertebeden lineer olmayan

$$\left(\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4 + x^2}\right) x'\right)'' + \left(2 + \frac{1}{1 + t^2}\right)\left(2 + \frac{e^{-t}}{1 + y^2}\right) x'$$

$$+ \left(1 + \frac{1}{e^t + 1}\right)\left(x' + \frac{x'}{1 + x'^2}\right) + \frac{1}{8}(1 + e^{-t}) x(t - \tau_1) + \frac{1}{8}(1 + e^{-t}) x(t - \tau_2) = e^{-t}$$

diferansiyel denklemini ele alalım. Burada

$$a(t) = 2 + \frac{1}{1 + t^2}, \qquad b(t) = 1 + \frac{1}{e^t + 1}, \quad c_1(t) = (1 + e^{-t}), \quad c_2(t) = (1 + e^{-t})$$

ve

$$\varphi(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4 + x^2}, \; f(t, x, y) = 2 + \frac{e^{-t}}{1 + y^2}, \; g(x, y) = y + \frac{y}{1 + y^2},$$

$$h_1(x) = \frac{x}{8}, \qquad h_2(x) = \frac{x}{8}, \qquad p(t) = e^{-t}$$

dir. Buna göre

$$a_0 = 2 \leq a(t) \leq 3 = a_1, \qquad a'(t) \leq 0, \qquad n = 1 \leq b(t) \leq c_1(t) = c_2(t) \leq 2 = N$$

$$-1 \leq c_1{}'(t) = c_2{}'(t) \leq b'(t) \leq 0,$$

$$\varphi_0 = \frac{1}{4} \leq \varphi(x) \leq \frac{1}{2} = \varphi_1, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi'(u)|\, du = 0,$$

$$f_0 = 2 \leq f(t,x,y) \leq 3 = f_1, \qquad f_t(t,x,y) \leq 0, \qquad y f_x(t,x,y) = 0$$

$g(t,0) = 0, y \neq 0$ için $d_0 = 1 \leq \dfrac{g(x,y)}{y} \leq 2 = d_1, \qquad g_x(x,y) = 0$

$h_1(0) = h_2(0) = 0, x \neq 0$ için $\frac{h_1(x)}{x} = \frac{h_2(x)}{x} = \frac{1}{8}$, $|h'_1(x)| = |h'_2(x)| = \frac{1}{8}$

ve

$$\int_0^{\infty} |p(t)| ds = \int_0^{\infty} |e^{-t}| ds = 1$$

olur. Bu ise Teorem 5.4.1 den dolayı ele alınan denklemin tüm çözümlerinin sürdürülebilir ve sınırlı olduğunu gösterir.

6. DÖRDÜNCÜ MERTEBEDEN BİR DİFERANSİYEL DENKLEMİN ÇÖZÜMLERİNİN GLOBAL VARLIĞI VE SINIRLILIĞI

6.1 Giriş ve Amaç

Bir önceki bölümünde *üçüncü mertebeden* lineer olmayan bazı diferansiyel denklemlerin çözümlerinin global varlığı ve sınırlılığı için yeter şartlar oluşturuldu. Bu bölümde ise Giriş ve Literatür Bildirişleri bölümünde belirttiğimiz Remili ve Oudjedi (2014) ve Tunç (2005) tarafından yapılan çalışmalar temel alınarak *dördüncü mertebeden* lineer olmayan sabit gecikmeli bir diferansiyel denklem için daha önceki bölümler ve ilgili literatürde belirtilen çalışmalarda kullanılmış Lyapunov'un ikinci metodu yardımıyla çözümlerin global varlığı ve sınırlılığı incelenecektir.

Aşağıda belirtilen dördüncü mertebeden lineer olmayan sabit gecikmeli diferansiyel denklemini ele alalım:

$$(\phi(x)x''')' + a(t)\varphi(x'', x''')x''' + b(t)f(x, x')x'' + c(t)g\big(x'(t-r)\big)$$

$$+d(t)h\big(x(t-r)\big) = p(t, x, x', x'', x''') \qquad (6.1)$$

Şimdi bu denklem için çözümlerin global varlığı ve sınırlılığı incelenecektir.

6.2. (6.1) Denklemi İçin Çözümlerin Global Varlığı ve Sınırlılığı

Bu kesimde dördüncü mertebeden lineer olmayan (6.1) diferansiyel denkleminin çözümlerinin global varlığı ve sınırlılığı incelenecektir. Bu denklemde $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ olmak üzere ϕ, a, b, c ve d, $\mathbb{R}_+$ üzerinde sürekli türevlenebilen pozitif fonksiyonlar, $\varphi \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R}_+), f \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R}_+), g \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ve $h \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dir. Bu bölümde (6.1) denklemi için ifade edilecek bir teoremin ispatı verilerek konu ile ilgili bir örnek verilecek. (6.1) denklemi,

$x' = y,$

$y' = z,$

$$z' = \frac{u}{\phi(x)},$$

$$u' = -\frac{a(t)}{\phi(x)}\varphi\left(z, \frac{u}{\phi(x)}\right)u - b(t)f(x,y)z - c(t)g(y) - d(t)h(x)$$

$$+c(t)\int_{t-r}^{t} z(s)g'\big(y(s)\big)\,ds + d(t)\int_{t-r}^{t} y(s)h'\big(x(s)\big)\,ds + p\left(t,x,y,z,\frac{u}{\phi(x)}\right) \qquad (6.2)$$

sistemine denktir. φ_1 ve g_1 fonksiyonları aşağıdaki gibi tanımlanmış olsun:

$$\varphi_1(z,0) = \begin{cases} \dfrac{1}{z}\displaystyle\int_0^z \varphi(s,0)ds & z \neq 0 \\ \varphi(0,0) & z = 0 \end{cases} \quad \text{ve} \quad g_1(y) = \begin{cases} \dfrac{g(y)}{y} & y \neq 0 \\ g'(0) & y = 0 \end{cases}$$

Teorem 6.2.1. $\alpha, \beta, \varepsilon, \delta_0, \delta, \phi_0, a, b, c, d$ ve A pozitif sabitler olmak üzere, aşağıdaki şartlar sağlansın:

i) $h(0) = g(0) = 0,$

ii) $0 < m \leq d(t) \leq c(t) \leq b(t) \leq a(t) \leq 1$ ve

$-L \leq a'(t) \leq b'(t) \leq c'(t) \leq d'(t) \leq 0,$

iii) $\phi_0 \leq \phi(x) \leq 1, \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |\phi'(u)|du < \infty,$

iv) $\delta_0 \leq h'(x) \leq \dfrac{d}{2m}$ ve $d \leq \dfrac{m^2}{2}\sqrt{\dfrac{a\varepsilon\delta}{2}}, \qquad \varepsilon \leq \dfrac{\delta}{2acmK}, \qquad K = abm^2 + \dfrac{bcm^2}{d},$

v) $\dfrac{c}{m} \leq g_1(y) \leq c + \dfrac{\delta}{8c}\sqrt{\dfrac{\phi_0 d}{2mac}}\ , \qquad c < \dfrac{a^3m^4}{4},$

vi) $abcm^2 - cg'(y) - ad\varphi(z,0) \geq \delta > 0,$

vii) $\dfrac{b}{m} \leq f(x,y) \leq b + m^5a^3\varepsilon, \qquad yf_x(x,y) \leq 0,$

viii) $\varphi(z,0) \geq a, \qquad \varphi_1(z,0) - \varphi(\tau,0) \leq \dfrac{\phi_0 \delta}{2a^2 cm^3},$

ix) $\alpha g_1(y) + \beta \varphi_1(z,0) \leq \dfrac{1}{2Lm}\sqrt{\dfrac{\varepsilon\delta}{2a}}, \qquad \alpha = \varepsilon + \dfrac{1}{am^2}, \qquad \beta = \varepsilon + \dfrac{d}{cm} < \alpha b,$

x) $y\beta\varphi_u\left(z, \rho(x)\dfrac{u}{\phi(x)}\right) + z\varphi_u\left(z, \rho(x)\dfrac{u}{\phi(x)}\right) \geq 0, \qquad 0 < \rho(x) < 1,$

xi) $\left|p\left(t,x,y,z,\dfrac{u}{\phi(x)}\right)\right| \leq \left(A + |y| + |z| + \left|\dfrac{u}{\phi(x)}\right|\right)q(t), \qquad \int_0^\infty q(s)ds < \infty.$

Bu takdirde $\lambda_1 = \frac{d}{4m}(\alpha+\beta+1)$ ve $\lambda_2 = \frac{abm^2}{2}(\alpha+\beta+1)$ olmak üzere eğer,

$$r < min\left\{\frac{ma\varepsilon}{\alpha abm^2 + \frac{\alpha d}{2m}}, \frac{\varepsilon c}{\beta abm^2 + \frac{\beta d}{2m} + 2\lambda_1}, \frac{\delta}{2acm^2\left(abm^2 + \frac{d}{2m} + 2\lambda_2\right)}\right\}$$

ise o zaman (6.2) sisteminin tüm çözümleri sürdürülebilir ve sınırlıdır.

Uyarı. Teoremin altıncı şartından,

$$\varphi(z,0) < \frac{bcm^2}{d} \quad \text{ve} \quad g'(y) < abm^2 \qquad (6.3)$$

yazılabilir.

İspat:

$$2V = 2\beta d(t)\int_0^x h(s)ds - \frac{\alpha d}{2m}y^2 + 2c(t)\int_0^y g(v)dv + 2\beta b(t)\int_0^y f(x,\tau)\tau d\tau$$

$$+\alpha b\phi(x)z^2 + 2a(t)\int_0^z \varphi(\tau,0)\tau d\tau - \beta\phi(x)z^2 + 2d(t)h(x)y + 2\alpha\phi(x)d(t)h(x)z$$

$$+\alpha u^2 + 2\beta yu + 2\alpha c(t)\phi(x)g(y)z + 2\beta a(t)y\int_0^z \varphi(\tau,0)d\tau + 2zu$$

$$+2\lambda_1 \int_{-r}^{0} \int_{t+s}^{t} y^2(u)\, duds + 2\lambda_2 \int_{-r}^{0} \int_{t+s}^{t} z^2(u)\, duds \tag{6.4}$$

Lyapunov fonksiyonunu tanımlayalım. Buradan,

$$V_1 = 2\beta d(t) \int_0^x h(s)ds - \frac{d^2(t)}{c} h^2(x),$$

$$V_2 = 2\beta b(t) \int_0^y f(x,\tau)\tau d\tau - \frac{\alpha d}{2m} y^2 - \beta^2 a(t)\varphi_1(z,0)y^2 + 2c(t) \int_0^y g(v)dv - cy^2,$$

$$V_3 = \alpha b\phi(x)z^2 - \beta\phi(x)z^2 - \alpha^2\phi^2(x)cz^2 + a(t)\left(2\int_0^z \varphi(\tau,0)\tau d\tau - \varphi_1(z,0)z^2\right),$$

$$V_4 = \left(\alpha - \frac{1}{a(t)\varphi_1(z,0)}\right)u^2 + 2\alpha\phi(x)(c(t)g_1(y) - c)yz$$

ve

$$V_5 = \frac{1}{c}(d\,(t)h(x) + cy + \alpha\phi(x)cz)^2 + \frac{a(t)}{\varphi_1(z,0)}\left(\frac{u}{a(t)} + \varphi_1(z,0)z + \beta\varphi_1(z,0)y\right)^2$$

$$+2\lambda_1 \int_{-r}^{0} \int_{t+s}^{t} y^2(u)\, duds + 2\lambda_2 \int_{-r}^{0} \int_{t+s}^{t} z^2(u)\, duds$$

olmak üzere $2V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5$ olarak yazılabilir. Böylece teoremin (ii), (iv) ve (ix) şartları dikkate alınırsa,

$$V_1 = 2\beta d(t) \int_0^x h(s)ds - \frac{d^2(t)}{c} h^2(x) = 2d(t) \int_0^x \left(\left(\varepsilon + \frac{d}{cm}\right) - \frac{d(t)}{c} h'(s)\right) h(s)ds$$

$$\geq 2m \int_0^x \left(\left(\varepsilon + \frac{d}{cm}\right) - \frac{d}{2cm}\right) h(s)ds$$

$$\geq m\left(\varepsilon + \frac{d}{2cm}\right)\delta_0 x^2,$$

olur. Diferansiyel hesabın ve integralin ortalama değer teoreminden sırasıyla

$$g_1(y) = \frac{g(y)}{y} = g'(\sigma y), \qquad 0 < \sigma < 1$$

ve

$$\varphi_1(z,0) = \frac{1}{z}\int_0^z \varphi(s,0)ds \ = \varphi(\theta z,0), \qquad 0 < \theta < 1,$$

yazılabilir. Böylece teoremin (ii), (iv), (v), (vi), (vii) ve (ix) şartları, yukarıdaki eşitlikler ve (6.3) dikkate alınırsa,

$$V_2 = 2\int_0^y \left(\beta b(t)f(x,\tau) - \frac{\alpha d}{2m}\right)\tau d\tau - \beta^2 a(t)\varphi_1(z,0)y^2 + 2c(t)\int_0^y g(v)dv - cy^2$$

$$\geq 2\int_0^y \left(\beta b - \frac{\alpha d}{2m}\right)\tau d\tau - \beta^2\varphi_1(z,0)y^2 + 2\int_0^y \left(m\frac{g(v)}{v} - c\right)vdv$$

$$\geq \left(\beta b - \frac{\alpha d}{2m} - \beta^2\varphi_1(z,0)\right)y^2$$

$$= \beta\big(b - \alpha m g_1(y) - \beta\varphi(\theta z,0)\big)y^2 + \alpha\left(m\beta g_1(y) - \frac{d}{2m}\right)y^2$$

$$\geq \beta\left(b - \frac{1}{ma}g'(\sigma y) - \frac{d}{cm}\varphi(\theta z,0)\right)y^2 - \varepsilon\beta\big(mg'(\sigma y) + \varphi(\theta z,0)\big)y^2$$

$$\geq \frac{\beta}{acm}\big(abcm - cg'(\sigma y) - ad\varphi(\theta z,0)\big)y^2 - \varepsilon\beta\left(abm^3 + \frac{bcm^2}{d}\right)y^2$$

$$\geq \frac{\delta\beta}{acm}y^2 - \varepsilon\beta K y^2$$

$$\geq \frac{\delta\beta}{acm}y^2 - \frac{\delta\beta}{2acmK}Ky^2$$

$$\geq \frac{\delta\beta}{2acm}y^2 \geq \frac{\delta d}{2ac^2m^2}y^2$$

elde edilir.

$$\frac{\partial}{\partial z}\varphi_1(z,0) = -\frac{1}{z^2}\int_0^z \varphi(\tau,0)d\tau + \frac{\varphi(z,0)}{z},$$

olduğundan, kısmi integrasyondan

$$\int_0^z \varphi_1(\tau,0)\tau d\tau = \varphi_1(z,0)\frac{z^2}{2} + \frac{1}{2}\int_0^z\int_0^\tau \varphi(v,0)dv d\tau - \frac{1}{2}\int_0^z \varphi(\tau,0)\tau d\tau$$

$$= \varphi_1(z,0)\frac{z^2}{2} + \frac{1}{2}\int_0^z \varphi_1(\tau,0)\tau d\tau - \frac{1}{2}\int_0^z \varphi(\tau,0)\tau d\tau$$

olur. Buradan

$$\varphi_1(z,0)z^2 = \int_0^z \varphi_1(\tau,0)\tau d\tau + \int_0^z \varphi(\tau,0)\tau d\tau$$

yazılabilir. Buna göre teoremin (iii), (v), (vi), (viii) ve (ix) şartları, yukarıdaki eşitlik ve (6.3) dikkate alınırsa,

$$V_3 = \alpha b\phi(x)z^2 - \beta\phi(x)z^2 - \alpha^2\phi^2(x)cz^2 + a(t)\left(2\int_0^z \varphi(\tau,0)\tau d\tau - \varphi_1(z,0)z^2\right)$$

$$= \phi(x)\,(\alpha b z^2 - \beta z^2 - \alpha^2\phi(x)cz^2) + a(t)\left(2\int_0^z \varphi(\tau,0)\tau d\tau - \varphi_1(z,0)z^2\right)$$

$$\geq \phi_0\,(\alpha b - \beta - \alpha^2 c)z^2 + \int_0^z \big(\varphi(\tau,0) - \varphi_1(\tau,0)\big)\tau d\tau$$

$$\geq \phi_0\,\big(\alpha b - \beta - \alpha^2 m g'(y)\big)z^2 + \int_0^z \big(\varphi(\tau,0) - \varphi_1(\tau,0)\big)\tau d\tau$$

$$\geq \alpha\phi_0\left(b - \varepsilon m g'(y) - \frac{1}{ma}g'(y) - \varepsilon\varphi(z,0) - \frac{d}{cm}\varphi(z,0)\right)z^2$$

$$+\beta\phi_0\varphi(z,0)\left(\alpha-\frac{1}{\varphi(z,0)}\right)z^2-\frac{\phi_0\delta}{4a^2cm^3}z^2$$

$$\geq \alpha\phi_0\left(b-\frac{1}{ma}g'(y)-\frac{d}{cm}\varphi(z,0)\right)z^2-\alpha\phi_0\varepsilon\big(mg'(y)+\varphi(z,0)\big)-\frac{\phi_0\delta}{4a^2cm^3}z^2$$

$$\geq \frac{\alpha\phi_0}{acm}\big(abcm-cg'(y)-ad\varphi(z,0)\big)z^2-\alpha\phi_0\varepsilon\left(abm^3+\frac{bcm^2}{d}\right)z^2-\frac{\phi_0\delta}{4a^2cm^3}z^2$$

$$\geq \frac{\alpha\phi_0}{acm}\delta z^2-\alpha\phi_0\varepsilon K z^2-\frac{\phi_0\delta}{4a^2cm^3}z^2$$

$$\geq \frac{\alpha\phi_0\delta}{acm}z^2-\frac{\alpha\phi_0\delta}{2acmK}Kz^2-\frac{\phi_0\delta}{4a^2cm^3}z^2$$

$$\geq \frac{\delta\phi_0}{4a^2cm^3}z^2$$

elde edilir.

$$V_4=\left(\alpha-\frac{1}{a(t)\varphi_1(z,0)}\right)u^2+2\alpha\phi(x)(c(t)g_1(y)-c)yz$$

olduğundan teoremin (ii), (iii), (v), (viii) ve (ix) şartları ve $\varepsilon \leq \frac{1}{am^2}$, $|yz| \leq \frac{1}{2}(y^2+z^2)$ eşitsizlikleri dikkate alınırsa,

$$\left(\alpha-\frac{1}{a(t)\varphi_1(z,0)}\right)u^2 \geq \left(\varepsilon+\frac{1}{m^2a}-\frac{1}{ma}\right)u^2 \geq \varepsilon u^2$$

ve

$$|2\alpha\phi(x)(c(t)g_1(y)-c)yz| \leq \frac{4}{m^2a}|(g_1(y)-c)||yz|$$

$$\leq \frac{\delta}{2acm^2}\sqrt{\frac{\phi_0 d}{2mac}}|yz| \leq \frac{\delta\phi_0}{8a^2cm^3}z^2+\frac{\delta d}{4ac^2m^2}y^2,$$

yazılabilir. Buradan

$$V_4 \geq \varepsilon u^2-\frac{\delta\phi_0}{8a^2cm^3}z^2-\frac{\delta d}{4ac^2m^2}y^2$$

olur. Böylece $2V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5$ olduğundan

$$V \geq \frac{1}{2}\left(m\left(\varepsilon + \frac{d}{2cm}\right)\delta_0 x^2 + \frac{\delta d}{4ac^2m^2}y^2 + \frac{\delta\phi_0}{8a^2cm^3}z^2 + \varepsilon u^2 + V_5\right)$$

$$\geq \lambda(x^2 + y^2 + z^2 + u^2)$$

elde edilir. Burada $\lambda = \frac{1}{2}min\left\{m\left(\varepsilon + \frac{d}{2cm}\right)\delta_0, \frac{\delta d}{4ac^2m^2}, \frac{\delta\phi_0}{8a^2cm^3}, \varepsilon\right\}$ dir.

$(x, y, z, u) = \big(x(t), y(t), z(t), u(t)\big)$, (6.2) sisteminin bir çözümü olsun. (6.4) de verilen Lyapunov fonksiyonunun bu çözüm boyunca t ye göre türevi alınırsa,

$$V' = \beta d'(t)\int_0^x h(s)ds + \beta d(t)h(x)y - \frac{\alpha d}{2m}yz + c'(t)\int_0^y g(v)dv + c(t)g(y)z$$

$$+\beta b'(t)\int_0^y f(x,\tau)\tau d\tau + \beta b(t)y\int_0^y f_x(x,\tau)\tau d\tau + \beta b(t)f(x,y)yz + \frac{\alpha b x'\phi'(x)}{2}z^2$$

$$+\alpha bzu + a'(t)\int_0^z \varphi(\tau,0)\tau d\tau + \frac{a(t)}{\phi(x)}\varphi(z,0)zu - \frac{\beta x'\phi'(x)}{2}z^2 - \beta zu + d'(t)h(x)y$$

$$+d(t)h'(x)y^2 + d(t)h(x)z + \alpha x'\phi'(x)d(t)h(x)z + \alpha\phi(x)d'(t)h(x)z$$

$$+\alpha\phi(x)d(t)h'(x)yz + \alpha d(t)h(x)u - \alpha\frac{a(t)}{\phi(x)}\varphi\left(z, \frac{u}{r(t)}\right)u^2 - \alpha b(t)f(x,y)zu$$

$$-\alpha c(t)g(y)u - \alpha d(t)h(x)u + \alpha c(t)u\int_{t-r}^t z(s)g'\big(y(s)\big)\,d$$

$$+\alpha d(t)u\int_{t-r}^t y(s)h'\big(x(s)\big)\,ds + \alpha p\left(t, x, y, z, \frac{u}{\phi(x)}\right)u + \beta zu$$

$$-\beta\frac{a(t)}{\phi(x)}\varphi\left(z, \frac{u}{r(t)}\right)yu \; - \beta b(t)f(x,y)yz - \beta c(t)g(y)y - \beta d(t)h(x)y$$

$$+\beta c(t)y\int_{t-r}^t z(s)g'\big(y(s)\big)\,d + \beta d(t)y\int_{t-r}^t y(s)h'\big(x(s)\big)\,ds + \beta p\left(t, x, y, z, \frac{u}{\phi(x)}\right)y$$

$$+\alpha c'(t)\phi(x)g(y)z + \alpha c(t)x'\phi'(x)g(y)z \;\; + \alpha c(t)\phi(x)g'(y)z^2 + \alpha c(t)g(y)u$$

$$+\beta a'(t)y\int_0^z \varphi(\tau,0)d\tau \;\; + \beta a(t)z\int_0^z \varphi(\tau,0)d\tau + \beta\frac{a(t)}{\phi(x)}\varphi(z,0)yu + \frac{u^2}{\phi(x)}$$

$$-\frac{a(t)}{\phi(x)}\varphi\left(z,\frac{u}{\phi(x)}\right)zu \; - b(t)f(x,y)z^2 - c(t)g(y)z \; - d(t)h(x)z$$

$$+c(t)z\int_{t-r}^{t} z(s)g'\big(y(s)\big)\,ds \; + d(t)z\int_{t-r}^{t} y(s)h'\big(x(s)\big)\,ds + p\left(t,x,y,z,\frac{u}{\phi(x)}\right)z$$

$$+\lambda_1 r y^2 + \lambda_2 r z^2 - \lambda_1\int_{t-r}^{t} y^2(s)\;ds - \lambda_2\int_{t-r}^{t} z^2(s)\;ds$$

$$= \beta d'(t)\int_0^x h(s)ds - \frac{\alpha d}{2m}yz + c'(t)\int_0^y g(v)dv + \beta b'(t)\int_0^y f(x,\tau)\tau d\tau$$

$$+\beta b(t)y\int_0^y f_x(x,\tau)\tau d\tau + \frac{\alpha b x'\phi'(x)}{2}z^2 + \alpha bzu + a'(t)\int_0^z \varphi(\tau,0)\tau d\tau$$

$$+\frac{a(t)}{\phi(x)}\varphi(z,0)zu - \frac{\beta x'\phi'(x)}{2}z^2 + d'(t)h(x)y + d(t)h'(x)y^2 + \alpha x'\phi'(x)d(t)h(x)z$$

$$+\alpha\phi(x)d'(t)h(x)z + \alpha\phi(x)d(t)h'(x)yz - \alpha\frac{a(t)}{\phi(x)}\varphi\left(z,\frac{u}{r(t)}\right)u^2 - \alpha b(t)f(x,y)zu$$

$$-\beta\frac{a(t)}{\phi(x)}\varphi\left(z,\frac{u}{r(t)}\right)yu - \beta c(t)g(y)y + \alpha c'(t)\phi(x)g(y)z + \alpha x'\phi'(x)c(t)g(y)z$$

$$+\alpha c(t)\phi(x)g'(y)z^2 + \beta a'(t)y\int_0^z \varphi(\tau,0)d\tau \; + \beta a(t)z\int_0^z \varphi(\tau,0)d\tau$$

$$+\beta\frac{a(t)}{\phi(x)}\varphi(z,0)yu + \frac{u^2}{\phi(x)} - \frac{a(t)}{\phi(x)}\varphi\left(z,\frac{u}{\phi(x)}\right)zu - b(t)f(x,y)z^2$$

$$+c(t)(\alpha u+\beta y+z)\int_{t-r}^{t} z(s)g'\big(y(s)\big)\,ds+d(t)(\alpha u+\beta y+z)\int_{t-r}^{t} y(s)h'\big(x(s)\big)\,ds$$

$$+p\left(t,x,y,z,\frac{u}{\phi(x)}\right)(\beta y+z+\alpha u)+\lambda_1 r y^2+\lambda_2 r z^2-\lambda_1\int_{t-r}^{t} y^2(s)\ ds$$

$$-\lambda_2\int_{t-r}^{t} z^2(s)\ ds$$

$$=\beta d'(t)\int_0^x h(s)ds+c'(t)\int_0^y g(v)dv+d'(t)h(x)y+a'(t)\int_0^z \varphi(\tau,0)\tau d\tau$$

$$+\alpha\theta(t)d(t)h(x)z+\alpha\phi(x)d'(t)h(x)z-\big(\beta c(t)g_1(y)-d(t)h'(x)\big)y^2$$

$$+\theta(t)\left(\frac{\alpha b}{2}-\frac{\beta}{2}\right)z^2-\left(\alpha\frac{a(t)}{\phi(x)}\varphi\left(z,\frac{u}{\phi(x)}\right)-\frac{1}{\phi(x)}\right)u^2$$

$$-\big(b-\alpha c(t)\phi(x)g'(y)-\beta a(t)\varphi_1(z,0)\big)z^2-(b(t)f(x,y)-b)\left(z+\frac{\alpha}{2}u\right)^2$$

$$+\frac{\alpha^2}{4}(b(t)f(x,y)-b)u^2\ -\left(\frac{\alpha d}{2m}-\alpha\phi(x)d(t)h'(x)\right)yz+\alpha c(t)\theta(t)g(y)z$$

$$+\big(\alpha c'(t)\phi(x)g_1(y)\ +\beta a'(t)\varphi_1(z,0)\big)yz+\beta b'(t)\int_0^y f(x,\tau)\tau d\tau$$

$$+\beta b(t)y\int_0^y f_x(x,\tau)\tau d\tau-\frac{a(t)}{\phi(x)}\left(\varphi\left(z,\frac{u}{\phi(x)}\right)-\varphi(z,0)\right)zu$$

$$-\beta\frac{a(t)}{\phi(x)}\left(\varphi\left(z,\frac{u}{\phi(x)}\right)-\varphi(z,0)\right)yu+c(t)(\alpha u+\beta y+z)\int_{t-r}^{t} z(s)g'\big(y(s)\big)\,ds$$

$$+d(t)(\alpha u+\beta y+z)\int_{t-r}^{t} y(s)h'\big(x(s)\big)\,ds+p\left(t,x,y,z,\frac{u}{\phi(x)}\right)(\beta y+z+\alpha u)$$

$$+\lambda_1 r y^2 + \lambda_2 r z^2 \ -\lambda_1 \int_{t-r}^{t} y^2(s)\ ds - \lambda_2 \int_{t-r}^{t} z^2(s)\ ds$$

$$= d'(t)\left(\int_0^x \left(\frac{\beta}{2} - \frac{1}{c}h'(s)\right)h(s)ds + \int_0^y \left(\frac{c'(t)}{d'(t)}\frac{g(v)}{v} - c\right)vdv + \frac{c}{2}\left(y + \frac{1}{c}h(x)\right)^2\right)$$

$$+d'(t)\left(\begin{array}{c}\phi^2(x)\displaystyle\int_0^x \left(\frac{\beta}{2\phi^2(x)} - \frac{\alpha^2}{a}h'(s)\right)h(s)ds + \int_0^z \left(\frac{a'(t)}{d'(t)}\varphi(\tau,0) - a\right)\tau d\tau \\ +\dfrac{a}{2}\left(z + \dfrac{\alpha\phi(x)h(x)}{a}\right)^2\end{array}\right)$$

$$-\big(\beta c(t)g_1(y) - d(t)h'(x)\big)y^2 - \left(\alpha\frac{a(t)}{\phi(x)}\varphi\left(z,\frac{u}{\phi(x)}\right) - \frac{1}{\phi(x)}\right)u^2$$

$$-\big(b - \alpha c(t)\phi(x)g'(y) - \beta a(t)\varphi_1(z,0)\big)z^2 - (b(t)f(x,y) - b)\left(z + \frac{\alpha}{2}u\right)^2$$

$$+\frac{\alpha^2}{4}(b(t)f(x,y) - b)u^2 + \frac{\theta(t)}{2}(\alpha b - \beta)z^2 - \alpha\left(\frac{d}{2m} - \phi(x)d(t)h'(x)\right)yz$$

$$+a'(t)\left(\alpha\frac{c'(t)}{a'(t)}\phi(x)g_1(y) + \beta\varphi_1(z,0)\right)yz + \beta b'(t)\int_0^y f(x,\tau)\tau d\tau$$

$$+\beta b(t)y\int_0^y f_x(x,\tau)\tau d\tau - \frac{a(t)}{\phi^2(x)}\left(z\varphi_u\left(z,\rho(x)\frac{u}{\phi(x)}\right) + \beta y\varphi_u\left(z,\rho(x)\frac{u}{\phi(x)}\right)\right)u^2$$

$$+\alpha\theta(t)\big(d(t)h(x) + c(t)g(y)\big)z + c(t)(\alpha u + \beta y + z)\int_{t-r}^{t} z(s)g'\big(y(s)\big)ds$$

$$+d(t)(\alpha u + \beta y + z)\int_{t-r}^{t} y(s)h'\big(x(s)\big)ds + p\left(t,x,y,z,\frac{u}{\phi(x)}\right)(\beta y + z + \alpha u)$$

$$+\lambda_1 r y^2 + \lambda_2 r z^2 \ -\lambda_1 \int_{t-r}^{t} y^2(s)\ ds - \lambda_2 \int_{t-r}^{t} z^2(s)\ ds$$

elde edilir. Burada $\theta(t) = x'\phi'(x)$ dir. Buna göre $\alpha_1(t) = min\{x(0), x(t)\}$ ve $\alpha_2(t) = max\{x(0), x(t)\}$ olmak üzere

$$\int_0^t |\theta(s)|\,\mathrm{ds} = \int_0^t \left|x'(s)\phi'\big(x(s)\big)\right|\mathrm{ds} = \int_{\alpha_1(t)}^{\alpha_2(t)} |\phi'(u)|du \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi'(u)|du < \infty,$$

olur. Böylece teoremin şartları dikkate alınırsa,

$$V' \leq -\frac{\varepsilon ma}{2}u^2 - \frac{\delta}{2acm^2}z^2 - \varepsilon cy^2 - \alpha\left(\frac{d}{2m} - \phi(x)d(t)h'(x)\right)yz$$

$$+\frac{|\theta(t)|}{2}(\alpha b - \beta)z^2 + a'(t)\left(\alpha\frac{c'(t)}{a'(t)}\phi(x)g_1(y) + \beta\varphi_1(z,0)\right)yz$$

$$+\alpha|\theta(t)|\left(\frac{d}{2m}|x| + abm^2|y|\right)|z| + (\beta|y| + |z| + \alpha|u|)\left(A + |y| + |z| + \left|\frac{u}{\phi_0}\right|\right)q(t)$$

$$+abm^2(\alpha|u| + \beta|y| + |z|)\int_{t-r}^{t}|z(s)|\,ds + \frac{d}{2m}(\alpha|u| + \beta|y| + |z|)\int_{t-r}^{t}|y(s)|\,ds$$

$$+\lambda_1 ry^2 + \lambda_2 rz^2 - \lambda_1\int_{t-r}^{t} y^2(s)\;ds - \lambda_2\int_{t-r}^{t} z^2(s)\;ds$$

$$\leq -\frac{ma\varepsilon}{2}u^2 - \frac{\delta}{4acm^2}z^2 - \frac{\varepsilon c}{2}y^2 - V_6 - V_7 + D_1|\theta(t)|z^2 + D_2|\theta(t)|(|xz| + |yz|)$$

$$+D_3(|y| + |z| + |u|)(A + |y| + |z| + |u|)q(t)$$

$$+abm^2(\alpha|u| + \beta|y| + |z|)\int_{t-r}^{t}|z(s)|\,ds$$

$$+\frac{d}{2m}(\alpha|u| + \beta|y| + |z|)\int_{t-r}^{t}|y(s)|\,ds + \lambda_1 ry^2 + \lambda_2 rz^2 - \lambda_1\int_{t-r}^{t} y^2(s)\;ds$$

$$-\lambda_2\int_{t-r}^{t} z^2(s)\;ds$$

olur. Burada $D_1 = \frac{\alpha b-\beta}{2}$, $D_2 = max\left\{\frac{\alpha d}{2m}, \alpha abm^2\right\}, D_3 = \frac{1}{\phi_0} max\{1,\alpha,\beta\}$,

$$V_6 = \frac{\delta}{8acm^2}z^2 - a'(t)\left(\alpha\frac{c'(t)}{a'(t)}\phi(x)g_1(y) + \beta\varphi_1(z,0)\right)yz + \frac{\varepsilon c}{4}y^2$$

ve

$$V_7 = \frac{\delta}{8acm^2}z^2 + \alpha\left(\frac{d}{2m} - \phi(x)d(t)h'(x)\right)yz + \frac{\varepsilon c}{4}y^2$$

dir. Buradan

$$V_6 = \frac{\delta}{8acm^2}z^2 - a'(t)\left(\alpha\frac{c'(t)}{a'(t)}\phi(x)g_1(y) + \beta\varphi_1(z,0)\right)yz + \frac{\varepsilon c}{4}y^2$$

$$\geq \frac{\delta}{8acm^2}z^2 - L\big(\alpha g_1(y) + \beta\varphi_1(z,0)\big)|yz| + \frac{\varepsilon c}{4}y^2$$

$$\geq \left(\frac{1}{2m}\sqrt{\frac{\delta}{2ac}}z \pm \frac{\sqrt{\varepsilon c}}{2}y\right)^2 \geq 0$$

ve

$$V_7 = \frac{\delta}{8acm^2}z^2 + \alpha\left(\frac{d}{2m} - \phi(x)d(t)h'(x)\right)yz + \frac{\varepsilon c}{4}y^2$$

$$\geq \frac{\delta}{4acm^2}z^2 - \frac{2}{am^2}\left(\frac{d}{2m} - \phi_0 mh'(x)\right)|yz| + \frac{\varepsilon c}{2}y^2 \geq \left(\frac{1}{2m}\sqrt{\frac{\delta}{2ac}}z \pm \frac{\sqrt{\varepsilon c}}{2}y\right)^2 \geq 0,$$

yazılabilir. Böylece yukarıdaki eşitsizlikler ve $|uv| \leq \frac{1}{2}(u^2 + v^2)$ eşitsizliğinden,

$$V' \leq -\frac{1}{2}\left(ma\varepsilon - \left(\alpha abm^2 + \frac{\alpha d}{2m}\right)r\right)u^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\delta}{2acm^2} - \left(abm^2 + \frac{d}{2m} + 2\lambda_2\right)r\right)z^2$$

$$-\frac{1}{2}\left(\varepsilon c - \left(\left(\beta abm^2 + \frac{\beta d}{2m} + 2\lambda_1\right)r\right)\right)y^2 + D_1|\theta(t)|z^2$$

$$+\frac{D_2}{2}|\theta(t)|(x^2+z^2+y^2+z^2)\ +D_3\big(3A+(A+3)(y^2+z^2+u^2)\big)|q(t)|+$$

$$+\left(\frac{d}{4m}(\alpha+\beta+1)-\lambda_1\right)\int_{t-r}^{t} y^2(s)\ ds+\left(\frac{abm^2}{2}(\alpha+\beta+1)-\lambda_2\right)\int_{t-r}^{t} z^2(s)\ ds$$

$$\leq D_4|q(t)|+D_5(|\theta(t)|+|q(t)|)V$$

elde edilir. Burada $D_4=3AD_3$ve $D_5=max\left\{\frac{D_1+D_2}{\lambda},\frac{D_3(A+3)}{\lambda}\right\}$ dir. Yukarıdaki eşitsizliğin her iki tarafının 0 dan t ye integrali alınırsa,

$$V(t)\leq V(0)+D_4\int_0^t|q(s)|ds+D_5\int_0^t(|\theta(s)|+|q(s)|)V(s)ds$$

elde edilir. Böylece Gronwal-Bellman eşitsizliğinden,

$$V(t)\leq D_6exp\left(D_5\int_0^\infty(|\theta(s)|+|q(s)|)ds\right)=D_7 \tag{6.5}$$

olur. Burada $D_6=V(0)+D_4\int_0^\infty|q(s)|ds$ dir.

Peano varlık teoreminden dolayı $\delta>0$ için (6.2) sisteminin $[t_0,t_0+\delta)$ aralığındaki bir çözümü $\big(x(t),y(t),z(t),u(t)\big)$ olsun. Bu aralığın $[t_0,\infty)$ aralığına genişletilebileceğini göstermek istiyoruz. O halde bunun tersini kabul edelim. Yani (6.2) sisteminin $T<\infty$ için $[t_0,T)$ üzerinde bir çözümü var ve

$$\lim_{t\to T^-}(|x(t)|+|y(t)|+|z(t)|+|u(t)|)=\infty \tag{6.6}$$

olsun. (6.2) sisteminin $x(t_0)=x_0$, $y(t_0)=y_0$, $z(t_0)=z_0$ ve $u(t_0)=u_0$ başlangıç şartlarını sağlayan bir $\big(x(t),y(t),z(t),u(t)\big)$ çözümünü ele alalım. Böylece (6.5) den

$$V(T)\leq D_7,$$

yazılabilir. Burada $V(T)\geq\lambda\big(x^2(T)+y^2(T)+z^2(T)+u^2(T)\big)$ olduğundan

$$x^2(T)+y^2(T)+z^2(T)+u^2(T)\leq\frac{D_7}{\lambda}$$

olur. Böylece $t \to T^{-}$ için $|x(t)|, |y(t)|, |z(t)|$ ve $|u(t)|$ nin sınırlı olduğu kolayca görülebilir. Bu ise varsayımımızla çelişir ve $T < \infty$ olmasının mümkün olmadığını $T = \infty$ olması gerektiğini gösterir.

Örnek 6.2.1. Dördüncü mertebeden

$$\left(\left(\frac{1}{2}+\frac{cosx}{4+x^2}\right)x'''\right)' + \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{200+t^2}\right)\left(128+\frac{x''^2}{1+x''^2}\right)x'''$$

$$+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{201+t^2}\right)(40+8cosx')x''$$

$$+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{202+t^2}\right)\left(\frac{x'(t-r)}{64}+\frac{x'(t-r)}{(64)^2+x'^2(t-r)}\right)$$

$$+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{203+t^2}\right)\left(\frac{4x(t-r)}{(16)^4}+\frac{x(t-r)}{4(16)^3+x^2(t-r)}\right)$$

$$=\frac{1}{1+t^2+x^2+x'^2+x''^2+x'''^2}$$

lineer olmayan sabit gecikmeli diferansiyel denklemini ele alalım. Burada

$$a(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{200+t^2}, \qquad b(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{201+t^2}, \qquad c(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{202+t^2},$$

$$d(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{203+t^2}, \qquad q(t)=\frac{1}{1+t^2}$$

ve

$$\phi(x)=\frac{1}{2}+\frac{cosx}{4+x^2}, \qquad \varphi(x'',x''')=128+\frac{x''^2}{1+x''^2}, \qquad f(x,x')=40+8cosx',$$

$$g(x')=\frac{x'}{64}+\frac{x'}{(64)^2+x'^2}, \qquad h(x)=\frac{4x}{(16)^4}+\frac{x}{4(16)^3+x^2},$$

dir. Eğer $a=128, b=16, c=\frac{1}{128}, d=\frac{1}{2(16)^3}, m=\frac{1}{2}$ ve $L=0.0003$ olarak seçilirse Teorem 6.2.1 in tüm şartları sağlar. Böylece ele alınan denklemin tüm çözümleri sürdürülebilir ve sınırlı olur.

7. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tezimizde, Giriş ve Literatür Bildirişleri bölümünde, ilgili literatüre atıfta bulunarak sözünü ettiğimiz, ikinci, üçüncü ve dördüncü mertebeden bazı diferansiyel denklemler için çözümlerin global varlığı ve sınırlılığı üzerinde durulmuştur.

Bu doğrultuda, üçüncü bölümde tezimizde yaptığımız çalışmada kullandığımız bazı temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Çalışmanın dördüncü bölümünde Lyapunov'un ikinci metodu ve İntegral eşitsizliği kullanılarak ikinci mertebeden lineer olmayan sabit gecikmeli bir integro-diferansiyel denklemin, ikinci mertebeden lineer olmayan bir integro vektör diferansiyel denklemin ve ikinci mertebeden lineer olmayan değişken gecikmeli bir integro vektör diferansiyel denklemin çözümlerinin global varlığı ve sınırlılığı için yeter şartlar elde edilmiştir. Çalışmanın beşinci bölümünde Lyapunov'un ikinci metodu kullanılarak üçüncü mertebeden lineer olmayan bir integro diferansiyel denklemin ve üçüncü mertebeden lineer olmayan sabit gecikmeli iki diferansiyel denklemin çözümlerinin global varlığı ve sınırlılığı için yeter şartlar elde edilmiştir. Çalışmanın altıncı bölümünde ise dördüncü mertebeden lineer olmayan sabit gecikmeli bir diferansiyel denklemin çözümlerinin global varlığı ve sınırlılığı için yeter şartlar elde edilmiştir.

Sonuç olarak, bu tezimizde ele alınan problemlerin ilgili literatüre önemli katkılar sağlayacağı düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

Abou-El-Ela, A. M. A., Sadek, A. I., 1990. A stability result for certain fourth order differential equations. ***Ann. Differential Equations,*** **6** (1): 1-9.

Abou-El-Ela, A. M. A., Sadek, A. I., Mahmoud, A. M., 2009. On the stability of solutions of certain fourth-order nonlinear non-autonomous delay differential equation, ***Int. J. Appl. Math.*** **22** (2): 245-258.

Ademola, A. T., Arawomo, P. O., 2008. On the stability and ultimate boundedness of solutions for certain third order differential equations, ***J. Math. Stat.*** **4** (4): 201-207.

Ademola, A. T., Arawomo, P. O., 2010. Stability and ultimate boundedness of solutions to certain third-order differantial equations, ***Appl. Math.*** **10**: 61-69.

Ademola, A. T., Arawomo, P. O., 2011a. Asymptotic behavior of the solutions of third order nonlinear differantial equations, ***Acta Univ. Sapientiae Math.*** **3** (2): 197-211.

Ademola, A. T., Arawomo, P. O., 2011b. Stability and uniform ultimate boundedness of solutions of some third-order differantial equations, ***Acta Math. Paedagog. Nyhazi.*** **27** (1): 51-59.

Ademola, A. T., Arawomo, P. O., 2013. Uniform stability and boundedness of solutions of nonlinear delay differantial equations of the third order, ***Math. J. Okayama Univ.*** **55**: 157-166.

Ademola, A. T., 2013. Existence and uniqueness of a periodic solution to certain third order nonlinear delay differential equation with multiple deviating arguments, ***Acta Univ. Sapientiae Math.*** **5** (2): 113–131.

Adesina, O. A., Ogundare, B.S., 2012. Some new stability and boundedness results on a certain fourth order nonlinear differential equation, ***Nonlinear Stud.,*** **19** (3): 355-365.

Afuwape, A. U., Omeike, M. O., 2008. On the stability and boundedness of solutions of a kind of third-order delay differantial equations, ***Appl. Math. Comput.*** **200** (1): 444-451.

Afuwape, A. U., Omeike, M. O., 2010. Stability and boundedness of solutions of a kind of third-order delay differantial equations, ***Comput. Appl. Math.*** **29** (3): 329-342.

Afuwape, A. U., Carvajal, Y. E., 2012. Ultimate boundedness of the solutions of certain third order nonlinear non-autonomous differential equations, ***An. Stiint. Univ. Al. I. Cuza Iasi. Mat.*** **58** (2): 333-352.

Ahmad, S., Rama Mohana Rao, M., 1999. ***Theory of Ordinary Differential Equations With Applications in Biology and Engineering***, Affiliated East-West Press Pvt. Ltd., New Delhi.

Baker, J. W., 1974. Stability properties of a second order damped and forced nonlinear differantial equation, ***SIAM J. Appl. Math***. **27**(1): 159-166.

Baxley, J. V., 1977. Global existence and uniqueness for second order ordinary differantial equations, ***J. Differential Equations,*** **23** (3): 315-334.

Bereketoglu, H., 1998. Asymptotic stability in a fourth order delay differential equation, ***Dynam.Systems Appl.,*** **7**(1): 105-115.

Burganskaja, L. I., 1970. The stability in the large of the zero solution of certain nonlinear fourth order differential equations, ***Differencial'nye Uravnenija,*** **6:** 1314–1317.

Burton, T. A., Mahfoud, W. E., 1983. Stability criteria for volterra equations, ***Trans. Amer. Math. Soc.*** **279** (1): 143-174.

Burton, T. A., 1985. ***Stability and periodic solutions of ordinary and functional-differential equations,*** Academic Press, Inc. Orlando, FL. 337.

Cartwright, M. L., 1956., On the stability of solutions of certain differential equations of the fourth order, ***Quart. J. Mech. Appl. Math.*** **9**: 185-194.

Changjian, W., Shushuang, H., Changwei, X., 2012. Global existence and boundedness of soluions to second-order nonlinear differential system, ***J. Appl. Math.*** **2012:** 1-12.

Chin, P. S. M., 1989. Stability results for the solutions of certain fourth-order autonomous differential equations, ***Internat. J. Control,*** **49** (4): 1163-1173.

Chukwu, E. N., 1972., On the stability of nonhomogeneous differential equations of the fourth order***, Ann. Math. Pura Appl.*** **92**(4): 1-11.

Constantin, A., 1995. Global existence of solutions for perturbed differential equations, ***Ann. Mat. Pura App.* 4**: 237-299.

Driver, R. D., 1977. ***Ordinary and Delay Differential Equations***, Springer, Berlin.

Duan, K. C., 1987. Stability of a class of fourth-order nonlinear differential equations, ***J. Xinjiang Univ. Nat. Sci.* 4** (1): 14-17.

Ezeilo, J. O. C., 1961. A note on the boundedness theorem for some third order differential equations, ***J. London Math. Soc.* 36**: 439-444.

Ezeilo, J. O. C., 1962a. A stability result for solutions of a certain fourth order differential equation, ***J. London Math. Soc.* 37**: 28-32.

Ezeilo, J. O. C., 1962b. On the boundedness and the stability of solutions of some differential equations of the fourth order, ***J. Math. Anal. Appl.* 5** (1): 136–146.

Ezeilo, J. O. C., 1963. A boundedness theorem for a certain third order differential equations, ***Proc. London Math. Soc.* 13** (3): 99-124.

Ezeilo, J. O. C., 1964. Stability results for the solutions of some third and fourth order differential equations. ***Ann. Mat. Pura Appl.* 66** (4): 233-249.

Ezeilo, J. O. C., Tejumola, H. O., 1973. On the boundedness and the stability properties of solutions of certain fourth order differential equations, ***Ann. Math. Pura Appl.* 95** (4): 131-145.

Fujimoto, K., Yamaoka, N., 2014. Global existence and nonexistence of solutions for second-order nonlinear differential equations, ***J. Math. Anal. Appl.* 411** (2): 707–718.

Graef, J. R., Spikes, P. W., 1978. Boundedness and convergence to zero solutions of a forced second-order nonlinear differential equation, ***J. Math. Anal. Appl*. 62** (2): 295-309.

Graef, J., Tunç, C., 2014. Continuability and Boundedness of Multi-delay Functional Integro-differential Equations of the Second Order , ***Revista Real Ac. Ciencias Exactas, Fisicas y Naturales. Serie A. Matemati***, 1-5.

Hara, T., 1973. On the asymptotic behavior of the solutions of some third and fourth order non-autonomous differential equations, ***Publ. Res. Inst. Math.Sci.* 9** (3): 649-673.

Hara, T., 1981. On the uniform ultimate boundedness of solutions of certain third order differential equations, ***J. Math. Anal. Appl*. 80** (2): 533-544.

Hale, J. K., 1969. ***Ordinary differential equations,*** Pure and Applied Mathematics, Wiley-Interscience, New York, London, Sydney.

Harrow, M., 1967. A stability result for solutions of certain fourth order homogeneous differential equations, ***J. London Math. Soc.*** **42**: 51-56.

Harrow, M., 1970a. Further results on the boundedness and stability of solutions of some differential equations of the fourth order, ***SIAM J. Math. Anal***. **1**: 189-194.

Harrow, M., 1970b. On the boundedness and stability of solutions of some differential equations of the fourth order, ***SIAM J. Math. Anal***. **1**: 27-32.

Hsu, Sze-Bi., 2006. ***Ordinary differential equations with applications***. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 244.

Hu, C. Y., 1992. The stability in the large for certain fourth order differential equations, ***Ann. Differential Equations,*** **8** (4): 422–428.

Jin, W. Y., 1983. Stability and boundedness of solutions of a class of second-order ordinary differential equations, ***J. Huazhong Univ. Sci. Tech.*** **11** (2): 51-53.

Kang, H., Si, L., 2010. Stability of solutions to certain fourth order delay differential equations, ***Ann. Differential Equations.*** **26** (4): 407-413.

Kaufman, H., Harrow, M., 1971. A stability result for solutions of certain fourth order differential equations, ***Rend.Circ. Mat. Palermo***, **20** (2): 186-194.

Lalli, B. S., Skrapek, W. A., 1971a. On the boundedness and the stability of some differential equations fourth order, ***SIAM J. Math. Anal.*** **2**: 221-225.

Lalli, B. S., Skrapek, W. A., 1971b. Some further stability and boundedness results of some differential equations of the fourth order, ***Ann. Math. Pura Appl.*** **90** (4): 167–179.

Lalli, B. S., Skrapek, W. A., 1973. Further stability and boundedness results for the solutions of some differential equations of the fourth order, ***Ann. Mat. Pura Appl.*** **95** (4): 293-301.

Lin, S., Liu, Z., Yu, Y., 1998. Stability for certain fourth order nonlinear differential equations, ***Demonstratio Math.*** **31** (1): 87-96.

Mehri, B., Shadman, D., 1999. Boundedness of solutions of certain third order differential equation, ***Math. Inequal. Appl.*** **2** (4): 545-549.

Meng, F. W., 1992. Global stability of the zero solution to a class of second order nonlinear differential equation, ***Qufu Shifan Daxue Xuebao Ziran Kexue Ban*** **18** (1): 37-40.

Miller, R. K., Michel, A.N. 1982. ***Ordinary Differential Equations***, Academic Press, Inc. New York-London, 351 pp.

Mirsky, L., 1990. ***An Introduction to Linear Algebra***, Dover Publications, Inc., New York.

Mustafa, G. O., Rogovchenko, V. Y., 2002. Global existence of solutions with prescribed asymptotic behavior for second-order nonlinear differential equations, ***Nonlinear Anal.*** **51**: 339-368.

Mustafa, G. O., Rogovchenko, V. Y., 2003. Global existence of solutions for a class of nonlinear differential equations, ***Appl. Math. Lett.*** **16** (5): 753-758.

Napoles Valdes, J. E., 2001. A note on the boundedness of an integro-differential equation, ***Quaest. Math***. **24** (2): 213-216.

Ogundare, B. S., Okecha, G. E., 2008. Boundedness and stability properties of solution to certain fourth order non-linear differential equation, ***Nonlinear Stud.*** **15** (1): 61-70.

Ogundare, B. S., Ngcibi, S., Murali, V., 2010. Boundedness and stability properties of solutions to certain second order differential equation, ***Adv. Differ. Equ. Control Process.*** **5** (2): 79-92.

Ogurcov, A. I., 1958. On the stability in the large of the solutions of third and fourth order non-linear differential equations, ***Izv. Vyss. Ucebn. Zaved. Matematika,*** **1** (2): 124-129.

Ogurcov, A. I., 1959. On the stability of the solutions of certain non-linear differential equations of third and fourth order, ***Izv. Vyss. Ucebn. Zaved. Matematika,*** **3** (10): 200-209.

Okoronkwo, O. E., 1989. On stability and boundedness of solutions of a certain fourth-order delay differential equation, ***Internat. J. Math. Sci.*** **12** (3): 589-602.

Olutimo, A. O., 2012. Stability and ultimate boundedness of solutions of certain third order nonlinear vector differential equation, ***J. Nigerian Math. Soc.*** **31**: 69-80.

Omeike, M. O., 2008. New result in the ultimate boundedness of solutions of a third order nonlinear ordinary differential equation, ***J. Inequal. Pure Apll. Math.*** **9** (1): 8-15.

Omeike, M. O., 2009. Stability and boundedness of solutions of some non-autonomous delay differential equation of the third order, ***An. stiint. Univ. Al. I. Cuza Iasi. Mat.*** **55** (1): 49-58.

Omeike, M. O., 2010a. New result on the asymptotic behavior of a third order nonlinear differential equation, ***Differ. Equ. Appl.*** **2** (1): 39-51.

Omeike, M. O., 2010b. Uniform ultimate boundedness of solutions of third order nonlinear delay differential equations, ***An. stiint. Univ. Al. I. Cuza Iasi. Math.*** **56** (2): 363-372.

Omeike, M. O., 2014. Stability and boundedness of solutions of nonlinear vector differential equations of third order, ***Arch. Math.*** **50** (2): 101-106.

Oudjedi, L., Beldjerd, D., Remili, M., 2014. On the stability of solutions for non-autonomous delay differential equations of third-order, ***Diff. Eq. Control Process,*** **1:** 22-34.

Pachpatte, B. G., 1998. ***Inequalities for differantial and integral equations***, Academic Press, New York.

Qian, C., 2000. On global stability of third-order nonlinear differential equations, ***Nonlinear Anal.*** **284** (1): 191-205.

Reissig, R., Sansone, G., Conti, R., 1974. ***Non-linear differential equations of higher order***. Noordhoff International Publishing.

Remili, M., Oudjedi, L. D., 2014. Stability and boundedness of the solutions of non autonomous third order differential equations with delay, ***Acta Univ. Palack. Olomuc. Fac. Rerum. Natur. Math.*** **53** (2): 139-147.

Sadek, A. I., 2003. Stability and boundedness of a kind of third-order delay differential equations, ***Appl. Math. Lett.*** **16**(5): 657-662.

Sadek, A. I., 2004. On the stability of solutions of certain fourth order delay differential equations, ***Appl. Math. Comput.*** **148** (2) 587-597.

Sadek, A. I., 2005. On the stability of solutions of some non-autonomous delay differential equations of the third order, ***Asymptot. Anal.*** **43** (1-2): 1-7.

Sánchez, David A.,1968. ***Ordinary differential equations and stability theory: An introduction.*** Calif.-London,164 pp.

Schmit, K., 1969. On the global existence of solutions of second order ordinary differential equations, ***J. Differential Equations,*** **5**: 476-482.

Sedziwy, S., 1975. Stability of certain third order vector differential equations, ***Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys***. **23**: 15–21.

Sinha, A. S. C., Haft, R. G., 1971. Stability of a nonautonomous differential equations of fourth order, ***SIAM J. Control,*** **9**: 8-14.

Skidmore, A. S., 1966. On the stability of solutions of a diffreantial equation of fourth order, ***J. London Math. Soc.*** **41**: 649-661.

Skrapek, W. A., Lalli, B. S., 1980. On the boundedness and stability of a fourth order differential equation, ***Ann. Mat. Pura Appl.*** **123** (4): 1-9.

Swich, K. E., 1969. On the boundedness and the stability of solutions of some non-autonomous differential equation of the third order, ***J. London Math. Soc.*** **44:** 347-359.

Tejumola, H. O., 1972. Further results on the boundedness and the stability of certain fourth order differential equations, ***Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.*** **52** (8): 16-23.

Tejumola, H. O., Tchegnani, B., 2000. Stability boundedness and existence of periodic solutions of some third and fourth order nonlinear delay differential equations, ***J. Nigerian Math. Soc.*** **19**: 9-19.

Tidke, H.L., Dhakne, M. B., 2010. Global existence of mild solutions of second order nonlocal Volterra integro differential equations, ***Bull. Calcutta Math. Soc.*** **102** (1): 69-82.

Tidke, H.L., 2010. Global existence of solutions for nonlinear integral equations of second order, ***J. Appl. Funct. Anal.*** **5** (1): 113-120.

Tiryaki, A., Tunç¸ C., 1996. Boundedness and stability properties of solutions of certain fourth order differential equations via the intrinsic method, ***Analysis,*** **16** (4): 325-334.

Tiryaki, A., Zafer, A., 2013. Global existence end boundedness for a class of second-order nonlinear differential equations, ***Appl. Math. Lett.*** **26** (9): 939-944.

Tunç¸ C., 1995a. On the stability result for the solutions of certain fourth order differential equations, ***Pure Appl. Math. Sci.*** **42** (1-2): 75-84.

Tunç¸ C., 1995b. On the stability and the boundedness properties of solutions of certain fourth order differential equations, ***İstanbul Üniv. Fen Fak. Mat. Derg.*** **54**: 161-173.

Tunç, C., 2004. A note on the stability and boundedness results of solutions of certain fourth order differential equations, ***Appl. Math. Comput.*** **155** (3): 837-843.

Tunç, C., 2005a. Boundedness of solutions of a third order nonlinear differential equation, ***J. Inequal. Pure Apll. Math.*** **6** (1): 1-6.

Tunç, C., 2005b. Uniform ultimate boundedness of the solutions of third-order nonlinear differential equations, ***Kuwait J. Sci. Engrg.*** **32** (1): 39–48.

Tunç, C., 2005c. Some stability and boundedness results for the solutions of certain fourth order differential equations, ***Acta Univ. Palack. Olomuc. Fac. Rerum. Natur. Math.*** **44**: 161-171.

Tunç, C., Ateş, M., 2006. Stability and boundedness results for solutions of certain third order nonlinear vector differential equations, ***Nonlinear Dynam.*** **45**: 273–281.

Tunç, C., 2006a. On the boundedness of solutions of certain nonlinear vector differential equations of third order, ***Bull. Math. Soc. Sci. Math.*** **49** (97): 291-300.

Tunç, C., 2006b. Some new stability and boundedness results on the solutions of the nonlinear vector differential equations of second order, ***Iran. J. Sci. Technol. Trans. A Sci.*** **30** (2): 213-221.

Tunç, C., 2006c. About stability and boundedness of solutions of certain fourth order differential equations, ***Nonlinear Phenom. Complex Syst.*** **9** (4):380-387.

Tunç, C., 2006d. Stability and boundedness of solutions to certain fourth order differential equations, ***Electron. J. Differential Equations,*** **35**: 1-10.

Tunç, C., 2006e. On the stability of solutions of certain fourth-order delay differential equations, ***Appl. Math. Mech.*****27** (8): 1141-1148.

Tunç, C., 2007a. Stability and boundedness of solutions of nonlinear differential equations of third order with delay, ***Differ. Uravn. Protsessyurr.*** **3**: 1-13.

Tunç, C., 2007b. Some remarks on the stability and boundedness of solutions of certain differential equations of fourth-order, ***Comput. Appl. Math.*** **26** (1): 1-17.

Tunç, C., 2007c. An ultimate boundedness result for a certain system of fourth order nonlinear differential equations, ***Nova Sci. Publ,*** **5**: 163-174.

Tunç, C., Şevli, H., 2007. Stability and boundedness properties of certain second-order differential equations, ***J.Franklin Inst.*** **344** (5): 399-405.

Tunç¸ C., 2008a. On the stability of solutions to a certain fourth order delay differential equation, ***Nonlinear Dynam.*** **51** (172): 71-81.

Tunç¸ C., 2008b. A boundedness criterion for fourth order nonlinear ordinary differential equations with delay, ***Int. J. Nonlinear Sci.*** **6** (3): 195-201.

Tunç, C., 2009a. On the stability and boundedness of solutions to third order nonlinear differential equations with retarded argument, ***Nonlinear Dynam.*** **57** (1-2): 97-106.

Tunç, C., 2009b. On the stability and boundedness of solutions of nonlinear vector differential equations of third order, ***Nonlinear Anal.*** **70** (6): 2232-2236.

Tunç, C., 2010a. Some new stability and boundedness results of solutions of Lienard type equations with a deviating argument, ***Nonlinear Anal. Hybrid syst.*** **4** (1): 85-91.

Tunç¸ C., 2010b. On the stability and the boundedness of solutions in a class of nonlinear differential equations of fourth order with constant delay, ***Vietnam J. Math.*** **38** (4): 453-466.

Tunç¸ C., 2010c. On the stability of solutions of non-autonomous differential equations of fourth order with delay, ***Funct. Differ. Equ.*** **17** (1-2): 195-212.

Tunç, C., 2011a. Uniformly stability and boundedness of solutions of second order nonlinear delay differential equations, ***Appl. Comput. Math.*** **10** (3): 449-462.

Tunç, C., 2011b. Stability and boundedness of solutions of non- autonomous differential equations of second order, ***J. Comput.Anal. Math.*** **13** (6): 1067-1074.

Tunç, C., 2012a. Qualitative behaviors of functional differential equations of third order with multiple devating arguments, ***Abstr. Appl. Anal.*** Art. ID 392386, 12 pp.

Tunç, C.,2012b. On the stability and boundedness of solutions of a class of non-autonomous differential equations of second order with multiple deviating arguments, ***Afr. Math.*** **23** (2): 249-259.

Tunç, C., 2014. A note on the stability and boundedness of non-autonomous differential equations of second order with a variable deviating argument, ***Afr. Math.*** **25** (2): 417-425.

Wada, T., Yamamoto, M., 1987. On the Asymptotic stability of solutions of a second order nonlinear differential equation, ***Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*** **63** (5): 149-152.

Wada, T., Yamamoto, M., 1989. Asymptotic stability theorems for a nonlinear second order differential equation, ***Math. Japon,*** **34** (2): 319-331.

Wu, C., Hao, S., Xu, C., 2012. Global existence and boundedness of solutions to a second-order nonlinear differential system, ***J. Appl.Math.*** Art. ID603783, 12 pp.

Wu, X., Xiong, K., 1998. Remarks on stability results for the solutions of certain fourth order autonomous differential equations, ***Internat. J. Control,*** **69** (2): 353-360.

Yin, Z., 2004. Global existence and boundedness of solutions to a secon order nonlinear diffferential system, ***Studia Sci. Math. Hungar.*** **41** (4): 365-378.

Zhang, L., Yu, L., 2013. Global asymptotic stability of certain third-order nonlinear differential equations, ***Math. Methods Appl. Sci.*** **36** (14): 1845-1850.

Zhu, Y. F., 1992. On stability, boundedness and existence of periodic solution of a kind of third order nonlineer delay differential system, ***Ann. Differential Equations,*** **8** (2): 249-259.

ÖZ GEÇMİŞ

Haziran 1984 yılında Adıyaman'da doğdu. İlk-orta-lise eğitimlerini yine Adıyaman'da tamamladı. 2002 yılında üniversite giriş sınavında başarılı olarak Yüzüncü Yıl Üniversitesi Eğitim Fakültesi Orta Öğretim Matematik Öğretmenliği Bölümüne yerleşti. 2007 yılında bu bölümden birincilikle mezun olup aynı yıl Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans eğitimine başlayarak 2010 yılında mezun oldu ve doktora eğitimine başladı. 2011 yılında Siirt Üniversitesi Eğitim Fakültesine Öğretim Görevlisi olarak atandı ve halen bu görevine devam etmektedir.