



**NAVIER-STOKES-VOIGHT DENKLEMLERİNİN BELİRLEYİCİ  
MODLARI VE YEREL OLMAYAN ÇEKİCİLERİ**

**Samet GÜÇKIRAN**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**OCAK 2015**

Samet GÜÇKIRAN tarafından hazırlanan “NAVIER-STOKES-VOIGHT DENKLEMLERİNİN BELİRLEYİCİ MODLARI VE YEREL OLMAYAN ÇEKİCİLERİ” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Gazi Üniversitesi Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

**Danışman:** Doç. Dr. Meryem KAYA

Matematik, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

.....

**Başkan :** Prof. Dr. Fatma TAŞDELEN YEŞİLDAL

Matematik, Ankara Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

.....

**Üye :** Doç. Dr. Adil MISIR

Matematik, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

.....

Tez Savunma Tarihi: 09/01/2015

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Prof. Dr. Şeref SAĞIROĞLU  
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

## ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu, bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

.....

Samet GÜÇKIRAN

09/01/2015

NAVIER-STOKES-VOIGHT DENKLEMLERİNİN BELİRLEYİCİ MODLARI VE  
YEREL OLMAYAN ÇEKİCİLERİ

(Yüksek Lisans Tezi)

Samet GÜÇKIRAN

GAZİ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Ocak 2015

ÖZET

Bu tezde; viskoelastik sıkıştırılmaz akışların üç boyutlu Navier-StokesVoight modelinin uzun zaman aralıklarındaki davranışları incelenmiştir. Üç boyutlu Navier-Stokes-Voight denklemleri için yerel olmayan çekicilerinin varlığı gösterilmiştir. Bu denklemin çözümlerinin asimptotik belirleyici modları için bir üst sınır elde edilmiştir. Çalışmanın sonunda üç boyutlu Navier-Stokes-Voight denklemleri tarafından oluşturulmuş yarı grupların yerel olmayan çekicileri üzerinde belirleyici modlar için bir değerlendirme verilmiştir. Çalışma kaynaklarda bilinen elde edilmiş sonuçların incelenmesiyle oluşturulmuştur.

Bilim Kodu : 204.1.138  
Anahtar Kelimeler : Navier-Stokes-Voight denklemleri, yerel olmayan çekici  
belirleyici modlar, yutan küme  
Sayfa Adedi : 55  
Danışman : Doç. Dr. Meryem KAYA

GLOBAL ATTRACTORS AND DETERMINING MODES FOR THE NAVIER-  
STOKES-VOIGHT EQUATIONS

(M. Sc. Thesis)

Samet GÜÇKIRAN

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

January 2015

ABSTRACT

In this thesis: the long-term behaviour of the three dimensional Navier-Stokes-Voight model of viscoelastic incompressible fluids were investigated. It's shown that there exist a global attractor for the three dimensional Navier-Stokes-Voight equations. An upper bound for asymptotic determining modes for the solution of three dimensional Navier-Stokes-Voight equations is obtained. At the end of the study, an estimate for global attractor of semigroup, which is generated by these equations, is given. This study is formed by the examination of the results which are obtained.

Science Code : 204.1.138  
Key Words : Navier-Stokes-Voight equations, global attractor,  
determining modes, absorbing ball  
Page Number : 55  
Supervisor : Assoc. Prof. Meryem KAYA

## TEŞEKKÜR

Bu tez konusunu bana veren, çalışmalarım boyunca destekleyen, yönlendiren ve yazımı sırasında bana zaman ayırarak yardımını esirgemeyen tez danışmanım, değerli hocam Doç. Dr. Meryem KAYA'ya teşekkürü bir borç bilirim. Ayrıca tez dönemi boyunca benden desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen çok sevdiğim annem, babam ve kardeşlerime teşekkür ederim.

## İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET .....	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER .....	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	viii
1.GİRİŞ .....	1
2. ÖN BİLGİLER VE TEMEL KAVRAMLAR .....	5
2.1. Tanımlar .....	5
2.2. Kullanılan Eşitsizlikler.....	15
2.3. Ön Hazırlıklar.....	20
3. YEREL OLMAYAN ÇEKİCİLERİN VARLIĞI.....	23
3.1. $V$ de Yutan Küme .....	23
3.2. $V_2$ de Yutan Küme.....	32
4. BELİRLEYİCİ MODLARIN SAYISI İÇİN DEĞERLENDİRMELER	37
4.1. Asimptotik Belirleyici Modlar .....	37
4.2. Çekici Üzerindeki Belirleyici Modlar .....	45
5. SONUÇ VE ÖNERİLER .....	49
KAYNAKLAR .....	51
ÖZGEÇMİŞ .....	55

## SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

<b>Simgeler</b>	<b>Açıklama</b>
$\mathcal{A}_1$	Çekici
$\mathcal{B}_1$	$V$ de yutan küme
$\mathcal{B}_2$	$V_2$ de yutan küme
$p$	Basınç
$\alpha$	Akışkanın elastikliği
$\nu$	Viskozite katsayısı
$\nabla$	Diverjans operatörü
$\Delta$	Laplace operatörü
$\ \cdot\ _X$	$X$ uzayı üzerindeki norm
$\in$	Elemanıdır
$\forall$	Her
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$(x_n)$	Dizi
<b>limsup</b>	Üst limit
<b>liminf</b>	Alt limit

## 1. GİRİŞ

Akışkanlar üzerinde geçmişte birçok çalışma yapılmıştır. Isaac Newton'un bu konuda çok önemli çalışmaları vardır. Newton katmanlar arasındaki kayma gerilmesinin hız gradyanı ile orantılı olduğunu, bu gradientin de akışın belli şartları taşıması koşuluyla bu katmanlara dik olduğunu belirtmiştir. Daha sonra Bernoulli ivmenin basıncın gradiyenti ile orantılı olduğunu ispat etmiştir. Euler tarafından da sıkıştırılmaz ve sürtünmesiz sıvıların akışı için denklemler türetilmiştir. 1821'de Navier viskoz akışlardaki viskozite parametresini tanıtmıştır. Bu konuda Stokes viskozite parametresinin fiziksel anlamıyla ilgilenmiş ve bu parametrenin akışkanların viskozitesine karşılık geldiğini ortaya koymuştur. Viskozite; akışkanların iç sürtünmelerini ifade eder. Bu çalışmalar neticesinde Stokes'un da katkılarıyla Navier-Stokes denklemleri ortaya çıkmıştır. Navier-Stokes denklemleri

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = f$$

biçimindedir. Esas olarak bu denklem Newton'un II. yasası,  $F = ma$  yani momentumun korunumundan çıkarılmıştır.

$$\nabla \cdot u = 0$$

sağlandığında akışlar sıkıştırılmaz olarak ifade edilir. Sıkıştırılmazlık koşulu kütle korunumu prensibinden ortaya çıkarılmıştır. Navier-Stokes denklemlerinde  $\nu$  viskozite katsayısıdır;  $u, p$  akışın sırasıyla hız ve basıncını gösterir. Bu değişkenler denklemin bilinmeyenleridir.  $f$  dış kuvveti gösterir. Daha fazla bilgi için [11] kaynağına bakılabilir.

Navier-Stokes denklemleri araştırmacılar tarafından yoğun bir şekilde çalışılmıştır. J. Leray tarafından, Navier-Stokes denklemlerinin çözümlerinin özellikleri incelenmiştir [25-27]. Bunun yanı sıra 1951'de Hopf tarafından çözümlerin varlığı ile ilgili bazı sonuçlar elde etmiştir [14]. Daha sonra Ladyzhenskaya [22], Lions [28], Temam [39], Constantin ve Foias [3] tarafından çözümler ve özellikleri detaylı olarak incelenmiştir. Bu denklemlerin iki boyutlu uzayda çözümlerin varlık teklifi ispatlanmıştır [21]. Ancak üç boyutlu uzayda teklif günümüzde hâlâ açık problemdir [11,39]. Bu nedenle pek çok araştırmacı tarafından bu denklemler için düzgünleştirmeler yapılmaktadır.

Eş. 1.1- Eş. 1.2 sistemi Kelvin-Voight sıkıştırılmaz akışkanının dinamik modeli ve lineer viskoelastik akışlarının hareketinin bir modeli olarak A.P. Oskolkov tarafından araştırılmıştır [31-35]. Onun bu çalışmalarıyla birlikte de üç boyutta Navier-Stokes-Voight modeli için çözümlerinin uzun zamanlı davranışları incelenmiştir. Navier-Stokes-Voight denklemleri

$$v_t - \nu \Delta v - \alpha^2 \Delta v_t + (v \cdot \nabla)v + \nabla p = f(x), \quad x \in \Omega, t \in \mathbb{R}^+ \quad (1.1)$$

biçimindedir. Ayrıca bu denklem

$$\nabla \cdot v = 0, \quad x \in \Omega, \quad t \in \mathbb{R}^+; \quad v(x, t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t \in \mathbb{R}^+ \quad (1.2)$$

sıkıştırılmazlık koşulu ve sınır şartı ile birlikte düşünülmüştür. Bu denklemlere

$$v(x, 0) = v_0(x), \quad x \in \Omega \quad (1.3)$$

Başlangıç koşulu eklenerek Eş.1.1-Eş.1.3 problemi ele alınacaktır. Problemin çözümlerinin varlık ve tekliğiyle ilgili sonuçlar için [31-35] bakılabilir. Burada  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  sınırlı,  $\partial\Omega$  yeterince düzgün sınırlı bir bölgedir.  $v = v(x, t)$  hız vektörü,  $p$  basınç,  $\nu > 0$  kinematik viskozite sabit sayısıdır.  $\alpha$  akışkanın elastikliğini karakterize eden bir parametredir. Ayrıca

$$(u \cdot \nabla)u = \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \quad \text{Laplace operatörü}$$

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right) \quad \text{gradient}$$

$$\text{div} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \text{diverjans operatörü}$$

ve  $f$  de dış kuvveti göstermektedir. [18-20]'de Eş. 1.1- Eş. 1.3 problemi tarafından oluşturulan yarı grubunun sonlu boyutlu yerel olmayan çekiciye sahip olduğu gösterilmiştir.

Bu çalışma, çeşitli kaynaklar araştırılarak bilinen sonuçların incelenmesiyle oluşturulmuştur. Esas olarak [20] kaynağı üzerinde yoğunlaşmıştır. Eş. 1.1- Eş. 1.3 problemi ile oluşturulan dinamik sistemin yerel olmayan çekicisinin varlığı ve bu problemin çözümlerinin asimptotik belirleyici modları hakkında bir üst sınır elde edilmiştir.

Bu tezin planlaması ise şu şekildedir. İlk bölümde konu ile ilgili çalışmalardan bahsedilmiş ve konuya giriş yapılmıştır. İkinci bölümde Navier-Stokes-Voight denklemleri için ön bilgiler ve temel kavramlar tanıtılmıştır. Üçüncü bölümde ise üç boyutta Navier-Stokes-Voight denklemleri için yerel olmayan çekicilerin varlığı gösterilmiştir. Son bölümde ise bu denklemlerin asimptotik belirleyici modları çalışılmış ve daha sonra üç boyutlu Navier-Stokes-Voight denklemleri tarafından oluşturulmuş yarı grupların yerel olmayan çekicileri üzerinde belirleyici modlar için bir değerlendirme verilmiştir.



## 2. ÖN BİLGİLER VE TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde çalışmada yer alan temel tanım ve kavramlar verilecektir.

### 2.1. Tanımlar

#### 2.1.1. Tanım

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$  de bir bölge olsun.  $\Omega$  üzerindeki sürekli fonksiyonların kümesi  $C(\Omega)$  ile gösterilir.

Bu uzay

$$C(\Omega) = \{u: u(x), \Omega \text{ üzerinde sürekli}\}$$

biçiminde gösterilir [37].

#### 2.1.2. Tanım

$C^m(\Omega)$ ,  $\mathbb{R}^n$  in bir  $\Omega$  bölgesi için  $m$ 'ye kadar ve  $m$ . mertebeden olan türevleri sürekli olan fonksiyonlar uzayıdır.

$$C^m(\Omega) = \{u: u, u', u'', \dots, u^{(m)} \Omega \text{ üzerinde sürekli} \}$$

şeklinde yazılabilir ve bu uzay üzerindeki norm

$$\|u\|_{C^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \sup |D^\alpha u(x)|$$

biçiminde tanımlıdır [37,38].

#### 2.1.3. Tanım

$\Omega$  üzerinde her mertebeden türevleri olan ve kompakt desteğe sahip fonksiyonların uzayı  $C_0^\infty$  ile gösterilir [1].

## 2.1.4. Tanım

$\Omega, \mathbb{R}^n$  de bir bölge  $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$ ,  $(L^1_{loc}(\Omega))$   $\Omega$ 'nın her kompakt alt kümesinde integre-  
rallenebilen fonksiyonların uzayıdır)  $\alpha$  bir çoklu indis olsun. Eğer  $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$  için

$$\int_{\Omega} u D^\alpha \varphi \, dx = (-1)^\alpha \int_{\Omega} v \varphi \, dx$$

eşitliği sağlanıyorsa  $v$  fonksiyonuna  $u$  fonksiyonunun  $\Omega$  bölgesinde  $k > 0$  olmak üzere  $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = k$ . mertebeden zayıf türevi denir [7].

## 2.1.5. Tanım

$X$  normlu uzayında bir dizi  $\{x_n\}$  olsun. Eğer her  $\varepsilon > 0$  sayısına karşılık bir  $N$  pozitif tamsayısı  $m, n > N$  iken  $\|x_m - x_n\|_X < \varepsilon$  olacak şekilde bulunabilirse bu diziye Cauchy dizisi denir. Eğer  $X$  deki her Cauchy dizisi  $X$ 'de yakınsak ise  $X$  tamdır ve bu uzaya Banach uzayı denir [1].

## 2.1.6. Tanım

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$  deki bir  $K$  alt kümesine ait noktalar için yine  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  de sıfırdan farklı bir  $u$  fonksiyonu ele alalım.  $\bar{K} = \overline{\{x: u(x) \neq 0\}}$ ,  $K$ 'nin kapanışı olmak üzere bu kümeye  $u$ 'nun desteği denir. Eğer  $\bar{K} \subset \Omega$ 'da kapalı ve sınırlı ise  $u$   $\Omega$ 'da kompakt desteğe sahiptir denir [37].

## 2.1.7. Tanım

$U$  bir lineer uzay olsun.  $U \times U$  üzerinde tanımlı  $(.,.)$  fonksiyonu  $\forall u, v, w \in U, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$  olmak üzere

- i)  $(u, v) = (v, u)$  (simetri)
- ii)  $(\alpha u + \beta v, w) = \alpha(u, w) + \beta(v, w)$  (lineerlik)
- iii)  $(u, u) \geq 0$  ve  $(u, u) = 0$  ise  $u = 0$  (pozitif tanımlılık)

koşullarını sağlarsa  $U$  uzayında iç çarpım olarak adlandırılır. Eğer  $u$  iç çarpımdan doğan

$$\|u\|_U = \sqrt{(u, u)}$$

normuna göre tamsa Hilbert uzayı adını alır [1,37].

### 2.1.8. Tanım

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$  de bir bölge ve  $p$  pozitif bir reel sayı olsun.  $\Omega$  da tanımlı

$$\int_{\Omega} |u(x)|^p dx < \infty$$

şartını sağlayan  $u$  ölçülebilir fonksiyonlarının sınıfına  $L^p(\Omega)$  uzayı denir.  $1 \leq p < \infty$  için  $L^p(\Omega)$  uzayı üzerindeki norm

$$\|u\|_p = \left\{ \int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right\}^{1/p}$$

biçiminde tanımlıdır.  $p = 2$  için  $L^2(\Omega)$  uzayı

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx$$

iç çarpımı ile birlikte bir Hilbert uzayıdır [1,39].

### 2.1.9. Tanım

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$  de bir bölge ve  $\Omega$  da hemen hemen her yerde sınırlı ölçülebilir fonksiyonların uzayına  $L^\infty(\Omega)$  uzayı denir. Bu uzay

$$L^\infty(\Omega) = \{u: u(x) \leq k, \text{ hemen hemen her yerde } \Omega \text{ da}\}$$

biçiminde gösterilir.  $1 \leq p < \infty$  için  $L^\infty(\Omega) \subset \dots \subset L^p(\Omega) \subset \dots \subset L^1(\Omega)$  bağıntısı sağlanır.  $L^\infty(\Omega)$  üzerindeki norm

$$\|u\|_\infty = \|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \operatorname{esssup}_{x \in \Omega} |u(x)|$$

biçiminde tanımlıdır [37,39].

#### 2.1.10. Tanım

$I$ ,  $(0, T)$  ya da  $[0, T]$  gibi bir aralık,  $X$  bir Banach uzayı olsun.  $u: I \rightarrow X$  sürekli  $L^p$  sınıfından fonksiyonlarının uzayı  $L^p(I, X)$  biçiminde gösterilir.  $L^p(I, X)$  uzayı üzerindeki norm

$$\|u\|_{L^p(I, X)} = \left\{ \int_I |u(x)|_X^p dx \right\}^{1/p}$$

biçiminde tanımlıdır. Burada  $|u(x)|_X$ ,  $X$  uzayındaki normu göstermektedir [38].

#### 2.1.11. Tanım

$I$ 'dan  $X$ 'e tanımlanmış düzgün sınırlı ve ölçülebilir fonksiyonların uzayı  $L^\infty(I, X)$  biçiminde gösterilir. Bu uzay üzerindeki norm

$$\|u\|_{L^\infty(I, X)} = \operatorname{esssup}_{x \in I} |u(x)|_X$$

biçiminde tanımlıdır [38].

#### 2.1.12. Tanım

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ve  $1 \leq p < \infty$  ve  $k$  negatif olmayan bir tamsayı olsun.  $\alpha$  çoklu indis olmak üzere  $|\alpha| \leq k$  için  $D^\alpha u$  zayıf manadaki türevi  $L^p(\Omega)$ 'ya ait olan  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonlarından oluşan  $W^{k,p}(\Omega)$  uzayına Sobolev uzayı denir. Bu uzay

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u: D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall |\alpha| \leq k\}$$

biçiminde yazılır. Eğer  $p = 2$  ise genellikle  $W^{k,2}(\Omega) = H^k(\Omega)$  ( $k = 0,1, \dots$ ) dir. Burada  $H^k(\Omega)$  Hilbert uzayıdır.  $p = 0$  ise  $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$  dir.

$W^{k,p}(\Omega)$  uzayı üzerindeki norm  $u \in W^{k,p}(\Omega)$  olmak üzere

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left( \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} |D^\alpha u|^p dx \right)^{1/p} & 1 \leq p < \infty \\ \sum_{|\alpha| \leq k} \operatorname{esssup}_{x \in \Omega} |D^\alpha u| & p = \infty \end{cases}$$

biçiminde tanımlıdır [7].

#### 2.1.13. Tanım

$t \in \mathbb{R}^+$  için  $H$  bir Hilbert uzayı olsun.  $S(t): H \rightarrow H$  bir yarı grup ve  $B_1 \subseteq H$  sınırlı küme olsun. Her keyfi sınırlı  $B \subset H$  kümesi için ve  $\forall t \geq t_0(B)$  için  $S(t)B \subseteq B_1$  olacak şekilde bir  $t_0(B) > 0$  varsa  $B_1$ 'e yutan küme denir [38].

#### 2.1.14. Tanım

$H^{-1}(\Omega)$  uzayı  $H_0^1$  uzayının dual uzayıdır. Yani  $f, H_0^1$  de sınırlı lineer bir fonksiyon ise  $f, H^{-1}(\Omega)$  dadır. Bu uzay üzerindeki norm

$$\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup \{ \langle f, u \rangle \mid u \in H_0^1, \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq 1 \}$$

biçiminde tanımlıdır [7, 37].

#### 2.1.15. Tanım

$X$  bir Banach uzayı olsun.  $X'$ 'den  $X$ 'e tanımlı sınırlı lineer operatörlerin ailesini  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  olarak tanımlayalım.  $u \in X$  için

- i)  $S(0)u = u$
- ii)  $S(t + s)u = S(t)S(s)u = S(s)S(t)u$  ( $t, s \geq 0$ )
- iii)  $t \rightarrow S(t)u$  dönüşümü  $[0, \infty) \rightarrow X$  'e süreklidir.

koşullarını sağlayan  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  ailesine yarı grup denir [7].

Bir kısmi türevli denklem için verilen problemin iyi tanımlı olduğunu yani çözümlerinin var, tek ve verilere sürekli olarak bağımlı olduğunu varsayalım. Bu durumda bu sistem için

$$S(t): u_0 \in H \rightarrow u(t) \in H$$

olacak şekilde  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  operatör ailesini tanımlamamıza izin verir.

#### 2.1.16. Tanım

$K: X \rightarrow Y$  bir operatör olsun. Eğer  $X$ 'de sınırlı herhangi bir  $W$  kümesinin görüntüsü  $Y$ 'de kompakt kapanışa sahipse  $K$ 'ya kompakt operatör denir [38].

#### 2.1.17. Tanım

$X$  normlu uzayındaki bir  $A$  alt kümesi verilsin.  $A$  kümesindeki her dizinin,  $A$ 'da yakınsak bir alt dizisi varsa  $A$  kümesi kompakttır. Kompakt kümeler kapalı ve sınırlıdır. Eğer  $\bar{A}$  kompakt ise  $A$  pre kompakttır [1].

#### 2.1.18. Tanım

$X$  ve  $Y$  birer Banach uzayı olsun. Eğer

- i)  $\|x\|_Y \leq C\|x\|_X \quad x \in X$
- ii)  $X$ 'deki her dizi  $Y$ 'de pre kompakt

koşulları sağlanırsa  $X$ ,  $Y$ 'ye kompakt olarak gömülmüştür denir ve  $X \subset\subset Y$  biçiminde gösterilir [7].

Şimdi Navier-Stokes denklemlerinin incelenmesinde temel olan, bu çalışmada da kullanılan uzayları ve bazı kavramları tanıyalım.

$$\mathcal{V} := \{v \in (C_0^\infty(\Omega))^3 : \nabla \cdot v = 0\}.$$

$H$  uzayı  $\mathcal{V}$  nin  $(L^2(\Omega))^3$  topolojisindeki kapanışıdır.  $H$  uzayındaki norm

$$\|v\|^2 = \sum_{j=1}^3 \|v_j\|_{L^2(\Omega)}^2$$

biçimindedir.

$A = -P\Delta$ ,  $(H^2(\Omega))^3 \cap V$  bölgesinde tanımlı homogen sınır koşullarına sahip Stokes operatörüdür.

$A: H \rightarrow H$  sınırlı, lineer bir operatör olmak üzere  $\forall u, v \in H$  için  $(Au, v) = (u, A^*v)$  eşitliğini sağlayacak şekilde  $A^*: H \rightarrow H$  operatörüne  $A$ 'nın adjointi denir. Eğer  $A = A^*$  ise  $A$ 'ya self-adjoint operatör denir [7].

$A$  operatörü self-adjoint,  $H$ 'da pozitif tanımlı ve  $A^{-1}: H \rightarrow H$  kompakt operatör olsun. Bu durumda  $A$ ,

$$Aw_j = \lambda_j w_j$$

sağlanacak şekilde  $\{\lambda_j\}_{j=1}^\infty$  reel özdeğerlerine sahiptir.  $\{w_j\}_{j=1}^\infty$  ler bu öz değerlere karşılık gelen öz vektörlerdir. Burada  $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$  dir ve

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \lambda_j = \infty$$

sağlanır. Bunun yanında  $w_j$  ler  $H$  için ortonormal bir baz oluşturacak şekilde seçilebilir. Böylece  $A$  operatörü bu bazın terimleri yardımıyla

$$Au = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j(u, w_j) w_j$$

biçiminde yazılabilir.  $A$ 'nın tanım bölgesi

$$D(A) = \left\{ u: u = \sum_{j=1}^{\infty} c_j w_j, \sum_{j=1}^{\infty} |c_j|^2 \lambda_j^2 < \infty \right\}$$

dir.  $D(A)$ ,

$$(u, v)_{D(A)} = (Au, Av)$$

iç çarpımıyla birlikte bir Hilbert uzayıdır. Bu uzay üzerindeki norm

$$\|u\|_{D(A)} = \|Au\|$$

dır.  $A$  operatörünün kesirli kuvvetleri

$$A^\alpha u = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^\alpha(u, w_j) w_j$$

biçiminde tanımlanır.  $A^\alpha$ 'nın tanım kümesi  $H$ 'de dir ve tanım kümesi

$$D(A^\alpha) = \{u: \|A^\alpha u\| < \infty\}$$

$$= \left\{ u: u = \sum_{j=1}^{\infty} c_j w_j, \sum_{j=1}^{\infty} |c_j|^{2\alpha} \lambda_j^2 < \infty \right\}$$

biçiminde tanımlanır. Ayrıca iç çarpım ve norm sırasıyla

$$(u, v)_{D(A^\alpha)} = (A^\alpha u, A^\alpha v)$$

$$\|u\|_{D(A^\alpha)} = \|A^\alpha u\|$$

ile tanımlanır.

$V_s = D(A^{s/2})$  dir. Bu uzay üzerindeki norm  $s \in \mathbb{R}$  için  $\|v\|_s = \|A^{s/2}v\|$  dir.

$V := V_1 = (H_0^1(\Omega))^3 \cap H$  Hilbert uzayıdır. Bu uzaydaki norm  $\|u\|_1 = \|u\|_v = \|\nabla u\|$  biçiminde tanımlıdır.

$P: (L^2(\Omega))^3 \rightarrow H$  ya Helmholtz-Leray dik izdüşüm operatörü olmak üzere  $B(u, v) = P((u \cdot \nabla)v)$  dir.

### 2.1.19. Tanım

$U$  ve  $V$  lineer uzaylar olmak üzere,  $B: U \times V \rightarrow \mathbb{R}$  dönüşümü için

- i)  $B(\alpha u + \beta w, v) = \alpha B(u, v) + \beta B(w, v) \quad u, w \in U, v \in V$
- ii)  $B(u, \alpha v + \beta w) = \alpha B(u, v) + \beta B(u, w) \quad u \in U, v, w \in V$

eşitlikleri sağlanıyorsa  $B'$ 'ye bilinear form denir [37].

### 2.1.20. Tanım

$V$  lineer uzay olmak üzere,  $B: V \times V \rightarrow V^*$  dönüşümü bilinear form olsun.  $B: V \times V \rightarrow V^*$  olmak üzere  $\forall w \in V$  için  $\langle B(u, v), w \rangle = b(u, v, w)$  ifadesine üç yere göre lineer form denir. Ayrıca

$$b(u, v, w) = \int_{\Omega} [(u \cdot \nabla)v]w \, dx$$

şeklinde de ifade edilebilir [10,38].

### 2.1.21. Üç Lineer Formun Özellikleri

Eğer  $n = 2$  ya da  $n = 3$  ise  $u \in H, v, w \in V$  olmak üzere

$$b(u, v, w) = -b(u, w, v) \tag{2.1}$$

ortogonallik ilişkisinden

$$b(u, v, v) = 0 \quad (2.2)$$

dır.  $n = 2$  olması durumunda (ve sadece periyodik sınır koşulları altında)

$$\forall u \in D(A) \quad b(u, u, Au) = 0 \quad (2.3)$$

$$\forall u, v \in D(A) \quad b(v, u, Au) + b(u, v, Au) + b(u, u, Av) = 0 \quad (2.4)$$

yazılabilir.

*İspat*

$\mathbb{V} = \{u \in [C_0^\infty(\Omega)]^m : \nabla \cdot u = 0\}$  olmak üzere Eş. 2.1 için  $u, v, w \in \mathbb{V}$  olsun.

$$\begin{aligned} b(u, v, w) &= \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^m u_i (D_i v_j) w_j dx \\ &= - \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^m (D_i u_i w_j) v_j dx \\ &= - \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^m (D_i u_i) w_j v_j dx + \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^m u_i (D_i w_j) v_j dx \\ &= -b(u, w, v). \end{aligned}$$

Son eşitsizlikte  $\sum_i D_i u_i = \nabla \cdot u = 0$  olduğu dikkate alınmıştır. Ortogonallik ilişkisinden Eş. 2.2 açıktır. Şimdi de Eş. 2.3 ün doğruluğunu gösterelim  $Au = -\Delta u$  olmak üzere

$$\begin{aligned} b(u, u, Au) &= - \sum_{i,j=1}^m \int_{\Omega} u_i (D_i u_j) \Delta u_j dx \\ &= - \sum_{i,j,k=1}^m \int_{\Omega} u_i (D_i u_j) D_k^2 u_j dx \\ b(u, u, Au) &= - \sum_{i,j,k=1}^m \int_{\Omega} u_i D_{ik} u_j D_k u_j dx + \sum_{i,j,k=1}^m \int_{\Omega} D_k u_i D_i u_j D_k u_j dx \end{aligned}$$

buradaki her iki integral sifira eşittir. Çünkü

$$\sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} u_i D_{ik} u_j D_k u_j dx = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} u_i D_i (D_k u_j)^2 dx$$

$$\sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} u_i D_{ik} u_j D_k u_j dx = - \int_{\Omega} (\nabla \cdot u) (D_k u_j)^2 dx = 0 \quad (\nabla \cdot u = 0)$$

ve

$$\sum_{i,j,k=1}^m \int_{\Omega} D_k u_i D_i u_j D_k u_j dx = u_{1,1}^3 + u_{1,1} u_{1,2}^2 + u_{1,1} u_{2,1}^2 + u_{1,2} u_{2,1} u_{2,2} + u_{2,1} u_{1,2} u_{1,1} +$$

$$+ u_{2,2} u_{1,2}^2 + u_{2,1}^2 u_{2,2} + u_{2,2}^3$$

$\nabla \cdot u = u_{1,1} + u_{2,2} = 0$  olduğundan son eşitlik

$$= u_{1,1}^3 + u_{2,2}^3 = (u_{1,1} + u_{2,2})(u_{1,1}^2 - u_{1,1} u_{2,2} + u_{2,2}^2) = 0$$

dır. Eş. 2.4'ü elde etmek için ise Eş. 2.3'te  $w = u + \epsilon v$  alalım.

$$\epsilon [b(v, u, Au) + b(u, v, Au) + b(u, u, Av)] +$$

$$+ \epsilon^2 [b(u, v, Av) + b(v, u, Av) + b(v, v, Au)] = 0$$

$\epsilon \neq 0$  olduğundan ispat açıktır [38].

## 2.2. Kullanılan Eşitsizlikler

### 2.2.1. Young Eşitsizliği

$$a \cdot b \geq 0, \quad p, q > 1 \quad \text{ve} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \text{ ise}$$

$$a \cdot b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

eşitsizliği sağlanır [38].

### 2.2.2. Young Eşitsizliği ( $\varepsilon$ ile)

$a, b \geq 0, \varepsilon > 0$  ve  $1 < p < \infty$  olsun. Bu durumda

$$a \cdot b \leq \varepsilon a^p + C(\varepsilon) b^q \quad (2.5)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada  $C(\varepsilon) = (\varepsilon p)^{-q/p} q^{-1}$  dir [7].

### 2.2.3. Poincaré Eşitsizliği

$\Omega$  sınırlı bir bölge,  $u \in H_0^1(\Omega)$  olmak üzere

$$\begin{aligned} \|u\| &\leq C \|\nabla u\| \text{ ve} \\ \|u\| &\leq \lambda_1^{-1/2} \|u\|_1 \quad \forall u \in \Omega \end{aligned} \quad (2.6)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada  $\lambda_1$  Stokes operatörünün homogen Dirichlet sınır koşulları altındaki öz değeridir [20,39].

### 2.2.4. Ladyzhenskaya Eşitsizliği

Eğer  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  sınırlı ve  $C^1$  sınıfından bir bölge olsun.  $u \in H^1(\Omega)$  için

$$\|u\|_{L^4} \leq c \cdot \|u\|^{1/2} \|u\|_1^{1/2}$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde bir  $c > 0$  sayısı vardır.

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$  sınırlı ve  $C^1$  sınıfından bir bölge olsun.

$$\|u\|_{L^4} \leq c \cdot \|u\|^{1/4} \|u\|_1^{3/4} \quad (2.7)$$

$$\|u\|_{L^3} \leq c \cdot \|u\|^{1/2} \|\nabla u\|^{1/2} \quad (2.8)$$

eşitsizlikleri sağlanacak şekilde  $c > 0$  sabiti vardır [22,39].

### 2.2.5. Genel Sobolev Eşitsizliği

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$  de sınırlı ve  $C^1$  sınıfında açık bir küme ve  $u \in W^{k,p}(\Omega)$  olsun. Eğer  $k < \frac{n}{p}$  ise

$u \in L^q(\Omega)$  dir. Burada  $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n}$  dir. Buna ek olarak

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C. \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}$$

eşitsizliği sağlanır [7].

### 2.2.6. Gagliardo-Nirenberg-Sobolev Eşitsizliği

$1 \leq p < n$  olsun.  $c$  sadece  $p$  ve  $n$  ye bağlı bir sabit olmak üzere  $\forall u \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$  için

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq c. \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

dir. Ayrıca

$$\|u\|_{L^{6/(3-2\varepsilon)}} \leq c. \|u\|^{1-\varepsilon} \|u\|_1^\varepsilon \quad 0 \leq \varepsilon \leq 1$$

$$\|u\|_{L^p} \leq c. \|u\|^{2/p} \|u\|_{3/2}^{1-2/p} \quad p \in [2, \infty)$$

eşitsizlikleri de sağlanır. Özel olarak  $\varepsilon = 1$  için

$$\|u\|_{L^6} \leq c. \|u\|_1 \tag{2.9}$$

dir [7,20].

### 2.2.7. Agmon Eşitsizliği

$u \in D(A) = V_2$  olmak üzere

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c \|u\|_1^{1/2} \|Au\|^{1/2} \tag{2.10}$$

eşitsizliği sağlanır [10,20].

## 2.2.8. Hölder Eşitsizliği

$1 \leq p < \infty$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  olsun. Eğer  $u \in L^p(\Omega)$  ve  $v \in L^q(\Omega)$  ise

$$\int_{\Omega} |uv| dx \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)} \quad (2.11)$$

eşitsizliği sağlanır [7].

## 2.2.9. Üç Lineer Formla İlgili Kullanılan Eşitsizlikler

$$\forall w \in V \text{ için } \langle B(u, v), w \rangle = b(u, v, w) = \int_{\Omega} [(u \cdot \nabla)v]w \, dx$$

üç lineer formu için aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır [20].

$$|b(u, v, w)| \leq C \|u\|^{1/2} \|u\|_1^{1/2} \|v\|_1 \|w\|_1 \quad \forall u, v, w \in V \quad (2.12)$$

$$|b(u, v, u)| \leq C \|u\|^{1/2} \|u\|_1^{3/2} \|v\|_1 \quad \forall u, v \in V \quad (2.13)$$

$$|b(u, v, w)| \leq C \|u\|_1 \|v\|_1 \|w\|^{1/2} \|w\|_1^{1/2} \quad \forall u, v, w \in V \quad (2.14)$$

$$|b(u, v, w)| \leq C \lambda_1^{-1/8} \|u\|_1 \|v\|_1 \|w\|_1 \quad \forall u, v, w \in V \quad (2.15)$$

Şimdi buradaki her bir eşitsizliğin ispatını verelim.

*İspat*

Eş. 2.6, Eş. 2.7, Eş. 2.8, Eş. 2.9 ve Eş. 2.11'den faydalanarak ispatlarımızı yapalım.

$$\begin{aligned} |b(u, v, w)| &= \left| \int (u \nabla)v w \right| \leq \|u\|_{L^3} \|\nabla v\|_{L^2} \|w\|_{L^6} \\ &\leq C \|u\|^{1/2} \|\nabla u\|^{1/2} \|\nabla v\| \|w\|_{L^6} \\ &\leq C \|u\|^{1/2} \|u\|_1^{1/2} \|v\|_1 \|w\|_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|b(u, v, u)| &= \left| \int (u \nabla) v u \right| \leq \|u\|_{L^3} \|\nabla v\|_{L^2} \|u\|_{L^6} \\
&\leq C \|u\|^{1/2} \|\nabla u\|^{1/2} \|\nabla v\| \|u\|_{L^6} \\
&\leq C \|u\|^{1/2} \|u\|_1^{1/2} \|v\|_1 \|u\|_1 \\
&\leq C \|u\|^{1/2} \|u\|_1^{3/2} \|v\|_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|b(u, v, w)| &= \left| \int (u \nabla) v w \right| \leq \|u\|_{L^6} \|\nabla v\|_{L^2} \|w\|_{L^3} \\
&\leq C \|w\|^{1/2} \|\nabla w\|^{1/2} \|\nabla v\| \|u\|_{L^6} \\
&\leq C \|u\|_1 \|v\|_1 \|w\|^{1/2} \|w\|_1^{1/2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|b(u, v, w)| &= \left| \int (u \nabla) v w \right| \leq \|u\|_{L^4} \|\nabla v\|_{L^2} \|w\|_{L^2} \\
&\leq C \|u\|^{1/4} \|u\|_1^{3/4} \|\nabla v\| \|w\| \\
&\leq C \lambda_1^{-1/8} \|u\|_1^{1/4} \|u\|_1^{3/4} \|v\|_1 \|w\|_1 \\
&\leq C \lambda_1^{-1/8} \|u\|_1 \|v\|_1 \|w\|_1
\end{aligned}$$

elde edilmiş olur. Böylece Eş. 2.12, Eş. 2.13, Eş. 2.14 ve Eş. 2.15'in ispatı tamamlanmış olur.

### 2.2.10. Gronwall Eşitsizliği

$\eta(\cdot)$  negatif olmayan sürekli bir fonksiyon olsun ve hemen hemen her  $t \in [0, T]$  için

$$\eta'(t) \leq \phi(t)\eta(t) + \psi(t)$$

eşitsizliği sağlansın. Burada  $\phi(t)$  ve  $\psi(t)$  de negatif olmayan ve  $[0, T]$  aralığında integrelenebilen fonksiyonlardır. Bu durumda  $\forall 0 \leq t \leq T$  için

$$\eta(t) \leq e^{\int_0^t \phi(s) ds} \left[ \eta(0) + \int_0^t \psi(s) ds \right] \quad (2.16)$$

eşitsizliği sağlanır [7].

### 2.2.11. Cauchy-Schwarz Eşitsizliği

$u, v \in H$  olmak üzere

$$|(u, v)| \leq \|u\| \|v\|$$

eşitsizliği sağlanır [7].

## 2.3. Ön Hazırlıklar

### 2.3.1. Lemma

$a(t)$  ve  $b(t)$   $(0, \infty)$  da lokal integrallenebilen fonksiyonlar olsun.  $T > 0$  için  $\gamma > 0, \Gamma > 0, a^- = \max\{-a, 0\}, b^+ = \max\{b, 0\}$  olmak üzere

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} a(\tau) d\tau = \gamma, \quad \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} a^-(\tau) d\tau = \Gamma,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} b^+(\tau) d\tau = 0$$

koşullarını sağlasın.  $\varphi$  negatif olmayan mutlak sürekli fonksiyon olmak üzere

$$\varphi'(t) + a(t)\varphi(t) \leq b(t) \quad t \in (0, \infty)$$

eşitsizliği sağlansın. Bu durumda  $t \rightarrow \infty$  için  $\varphi(t) \rightarrow 0$  dır [20].

### 2.3.2. Tanım

$S(t): V \rightarrow V, t \geq 0$  için bir yarı grup olsun. Eğer herhangi pozitif sayılar dizisi  $t_n \rightarrow \infty$  ve  $\forall \{v_n\} \subset V$  sınırlı dizisi için  $\{S(t_n)v_n\}$  dizisi  $V$  de pre-kompakt oluyorsa  $S(t)$ 'ye asimptotik olarak kompakttır denir [20].

Şimdi  $S(t)$ 'nin asimptotik kompaktlığıyla ilgili aşağıdaki teoremi ifade edelim.

### 2.3.3. Teorem

Kabul edelim ki  $t \geq t_0 > 0$  için  $S(t): V \rightarrow V$  yarı grubu

$$S(t) = Y(t) + Z(t)$$

formunda yazılsın. Burada  $Z(t)$ ,  $\forall t \geq t_0 > 0$  için  $V$  de kompakt operatördür.

$k, \forall R > 0$  için  $t \rightarrow \infty$  iken  $k(t, R) \rightarrow 0$  olacak şekilde bir  $k: [t_0, \infty) \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  sürekli fonksiyonu olmak üzere

$$\forall t \geq t_0 > 0 \text{ ve } \forall \|v\|_V \leq R \text{ için } \|Y(t)v\|_V \leq k(t, R)$$

sağlanırsa  $S(t): V \rightarrow V$ ,  $t \geq 0$  asimptotik kompakttır [20].



### 3. YEREL OLMAYAN ÇEKİCİLERİN VARLIĞI

Helmholtz-Leray izdüşüm operatörü  $P$ 'yi Eş. 1.1- Eş. 1.2 denklemlerine uygularsak

$$v_t + \nu Av + \alpha^2 Av_t + B(v, v) = h, \quad h = Pf \quad (3.1)$$

$$v(0) = v_0 \quad (3.2)$$

elde edilir. Burada  $h \in H^{-1}$  uzayının elemanı olsun. Eş. 3.1-Eş. 3.2 sisteminin yerel olmayan varlık ve teklifi ilk kez [31]'de çalışıldı. Böylece Eş. 1.1-Eş. 1.3 ile kurulan bu problem  $S(t): V \rightarrow V, t \in \mathbb{R}^+$  sürekli yarı grubunu oluşturur.

Bu bölümde  $S(t)$  yarı grubunun  $V$  ve  $V_2$ 'de yutan kümelerle sahip olduğunu daha sonra  $t \in \mathbb{R}^+$  için  $S(t): V \rightarrow V$  asimptotik kompakt olduğunu göstereceğiz. Böylece  $V$  de yerel olmayan çekicinin varlığı ispat edilmiş olacaktır.

#### 3.1. $V$ 'de Yutan Küme

Öncelikle Eş. 3.1 i  $v$  ile  $L^2$  de çarpalım.

$$(v_t, v) + \nu(Av, v) + \alpha^2(Av_t, v) + (B(v, v), v) = (h, v) \quad (3.3)$$

Buradaki her bir terimi düzenleyelim.

$$(v_t, v) = \frac{d}{dt}(v, v) - (v, v_t)$$

$$2(v_t, v) = \frac{d}{dt}(v, v) = \frac{d}{dt}\|v\|^2$$

$$\Rightarrow (v_t, v) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt}\|v\|^2$$

$$\nu(Av, v) = \nu\|\nabla v\|^2$$

$$\alpha^2(Av_t, v) = \alpha^2 \frac{1}{2} \frac{d}{dt}(Av, v) = \alpha^2 \frac{1}{2} \frac{d}{dt}(\nabla v, \nabla v) = \alpha^2 \frac{1}{2} \frac{d}{dt}\|\nabla v\|^2$$

Ayrıca sağ taraftaki terime Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanırsa

$$(h, v) = \|h\|_{-1} \|v\|_1$$

yazılır. Bu terimler Eş. 3.3'te yerine yazılırsa

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v\|^2 + \nu \|\nabla v\|^2 + \alpha^2 \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla v\|^2 \leq \|h\|_{-1} \|v\|_1$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{d}{dt} (\|v\|^2 + \alpha^2 \|\nabla v\|^2) + 2\nu \|\nabla v\|^2 \leq 2\|h\|_{-1} \|v\|_1$$

yazılır. Bu eşitlik yeniden

$$\frac{d}{dt} (\|v\|^2 + \alpha^2 \|v\|_1^2) + 2\nu \|v\|_1^2 \leq 2\|h\|_{-1} \|v\|_1$$

biçiminde yazılabilir. Eşitsizliğin sağ kısmındaki ifadeyi Eş. 2.5'ten yararlanarak

$$2\|h\|_{-1} \|v\|_1 \leq 2 \left( \frac{1}{2\nu} \|h\|_{-1}^2 + \frac{\nu}{2} \|v\|_1^2 \right) \leq \frac{1}{\nu} \|h\|_{-1}^2 + \nu \|v\|_1^2$$

şeklinde düzenleyebiliriz. O halde eşitsizlik

$$\frac{d}{dt} (\|v\|^2 + \alpha^2 \|v\|_1^2) + \nu \|v\|_1^2 \leq \frac{1}{\nu} \|h\|_{-1}^2 \quad (3.4)$$

biçiminde yazılır. Eş. 2.6'dan sol kısımdaki ikinci terimi aşağıdaki biçimde düzenleyelim.

$$\begin{aligned} \nu \|v\|_1^2 &\geq \frac{\nu}{2} \|v\|_1^2 + \frac{\nu}{2} \|v\|_1^2 \\ &\geq \frac{\nu}{2} \lambda_1 \|v\|^2 + \frac{\nu \alpha^2}{2 \alpha^2} \|v\|_1^2 \\ &\geq \frac{\nu}{2} \left[ \lambda_1 \|v\|^2 + \frac{1}{\alpha^2} \alpha^2 \|v\|_1^2 \right] \end{aligned}$$

$$d_0 := \frac{\nu}{2} \min \left\{ \lambda_1, \frac{1}{\alpha^2} \right\} = \nu d_1$$

olmak üzere buradan

$$\nu \|v\|_1^2 \geq d_0 [\|v\|^2 + \alpha^2 \|v\|_1^2]$$

elde edilir. Bu terim Eş. 3.4'te yerine yazılırsa

$$\frac{d}{dt} (\|v(t)\|^2 + \alpha^2 \|v(t)\|_1^2) + d_0 [\|v(t)\|^2 + \alpha^2 \|v(t)\|_1^2] \leq \frac{1}{\nu} \|h\|_{-1}^2$$

biçiminde elde edilir. Eş. 2.16'dan

$$\|v(t)\|^2 + \alpha^2 \|v(t)\|_1^2 \leq e^{-d_0(t-s)} \left[ \|v(s)\|^2 + \alpha^2 \|v(s)\|_1^2 - \frac{\|h\|_{-1}^2}{\nu d_0} \right] + \frac{1}{\nu d_0} \|h\|_{-1}^2$$

Son eşitsizlikten

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} [\|v(t)\|^2 + \alpha^2 \|v(t)\|_1^2] \leq \frac{\|h\|_{-1}^2}{\nu d_0} \quad (3.5)$$

yazılır. Eş. 3.5;  $S(t): V \rightarrow V$ ,  $t \in \mathbb{R}^+$ 'nin Eş. 1.1-Eş. 1.3 tarafından oluşturulan yarı grubun yutan kümeyle sahip olduğunu doğrular.

$$\mathcal{B}_1 := \left\{ v \in V: \|v\|_1 \leq \frac{2}{\sqrt{\nu \alpha^2 d_0}} \|h\|_{-1} \right\} \quad (3.6)$$

Buradan da  $M_1 = \frac{2}{\sqrt{\nu \alpha^2 d_0}} \|h\|_{-1}$  olmak üzere Eş. 3.6'dan

$$\|v(t)\|_1 \leq M_1 \quad (3.7)$$

eşitsizliği başlangıç verisine bağlı yeterince büyük  $t$  ler için geçerlidir [20].

## 3.1.1. Önerme

$s \in \mathbb{R}$  olsun. Eğer  $w_0 \in V_s, g \in L_2([0, T]; V_{s-2})$  ise

$$z_t + \nu Az + \alpha^2 Az_t = g(t), \quad z(0) = 0$$

lineer denklemi bir tek zayıf çözüme sahiptir ve bu çözüm  $C([0, T]; V_s)$  dedir. Ayrıca

$$\sup_{t \in [0, T]} \|z(t)\|_s \leq C \|g\|_{L_2([0, T]; V_{s-2})} \quad s \in \mathbb{R}$$

eşitsizliği sağlanır [20,36].

*İspat* [36] kaynağına bakılabilir.

## 3.1.2. Önerme

$h \in H$ 'yi zamandan bağımsız alalım.  $S(t), t \geq 0$  yarı grubu  $V$ 'de asimptotik olarak kompakt yarı gruptur [20].

*İspat*

$v_0 \in V$  olsun. İlk olarak  $S(t)$ 'nin

$$S(t)v_0 = Y(t)v_0 + Z(t)v_0$$

şeklinde yazılabileceğini göstereceğiz. Burada  $Y(t)$ ,

$$y_t + \nu Ay + \alpha^2 Ay_t = 0, \quad y(0) = v_0 \tag{3.8}$$

lineer denklemi ile oluşturulmuş yarı grup ve  $z(t) = Z(t)(v_0)$

$$z_t + \nu Az + \alpha^2 Az_t = h - B(v(t), v(t)), \quad z(0) = 0 \tag{3.9}$$

probleminin çözümü olsun. Burada hemen belirtelim ki  $v$ , başlangıç verisi  $v_0$  olan Eş. 1.1- Eş. 1.3 (yada eşit şekilde Eş. 3.1- Eş. 3.2) sisteminin çözümüdür. Eş. 3.8'i  $y$  ile  $H$  da iç çarpalım.

$$(y_t, y) + v(Ay, y) + \alpha^2(Ay_t, y) = 0 \quad (3.10)$$

Buradaki her bir terimi düzenlersek

$$(y_t, y) = \frac{d}{dt}(y, y) - (y, y_t)$$

$$2(y_t, y) = \frac{d}{dt}(y, y) = \frac{d}{dt} \|y\|^2$$

$$\Rightarrow (y_t, y) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|y\|^2$$

$$v(Ay, y) = v \|\nabla y\|^2$$

$$\alpha^2(Ay_t, y) = \alpha^2 \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (Ay, y) = \alpha^2 \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\nabla y, \nabla y) = \alpha^2 \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla y\|^2$$

elde edilir. Bulunan bu eşitlikler Eş.3.10'da yerlerine yazılırsa

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|y\|^2 + v \|\nabla y\|^2 + \alpha^2 \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla y\|^2 \leq 0$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|y\|^2 + \alpha^2 \|\nabla y\|^2) + v \|\nabla y\|^2 \leq 0$$

$$\frac{d}{dt} (\|y\|^2 + \alpha^2 \|\nabla y\|^2) + 2v \|\nabla y\|^2 \leq 0$$

$$\frac{d}{dt} (\|y(t)\|^2 + \alpha^2 \|y(t)\|_1^2) + 2v \|y(t)\|_1^2 \leq 0 \quad (3.11)$$

elde edilir. Eş. 3.11'in sol yanındaki ikinci terim Eş. 2.6'dan

$$\begin{aligned} v \|y(t)\|_1^2 &\geq \frac{v}{2} \|y(t)\|_1^2 + \frac{v}{2} \|y(t)\|_1^2 \\ &\geq \frac{v}{2} \lambda_1 \|y(t)\|^2 + \frac{v \alpha^2}{2 \alpha^2} \|y(t)\|_1^2 \\ &\geq \frac{v}{2} \left[ \lambda_1 \|y(t)\|^2 + \frac{1}{\alpha^2} \alpha^2 \|y(t)\|_1^2 \right] \end{aligned}$$

$$d_0 := \frac{\nu}{2} \min \left\{ \lambda_1, \frac{1}{\alpha^2} \right\} = \nu d_1$$

olmak üzere

$$\nu \|y(t)\|_1^2 \geq d_0 [\|y\|^2 + \alpha^2 \|y\|_1^2]$$

biçiminde düzenlenirse Eş. 3.11

$$\frac{d}{dt} (\|y(t)\|^2 + \alpha^2 \|y(t)\|_1^2) + d_0 [\|y\|^2 + \alpha^2 \|y\|_1^2] \leq 0$$

şeklinde yazılır. Gronwall eşitsizliğinden  $\forall t > 0$  için

$$\|y(t)\|^2 + \alpha^2 \|y(t)\|_1^2 \leq e^{-d_0 t} [\|y(0)\|^2 + \alpha^2 \|y(0)\|_1^2] \quad (3.12)$$

eşitsizliği sağlanır. Böylece  $Y(t): V \rightarrow V$  dönüşümü üstel olarak çekendir. Eş. 2.11 ve Eş. 2.9'dan

$$\begin{aligned} \|B(v, v)\|_{-1/2} &= \sup_{\phi \in V, \|A^{1/4}\phi\|=1} \frac{\langle B(v, v), \phi \rangle}{\|A^{1/4}\phi\|} = \sup_{\phi \in V, \|A^{1/4}\phi\|=1} b(v, v, \phi) \\ &= \sup_{\phi \in V, \|A^{1/4}\phi\|=1} \int_{\Omega} P((v \cdot \nabla)v) \cdot \phi \, dx \\ &= \sup_{\phi \in V, \|A^{1/4}\phi\|=1} \int_{\Omega} (v \cdot \nabla)v \cdot \phi \, dx \leq c \cdot \sup_{\phi \in V, \|A^{1/4}\phi\|=1} \|v\|_{L^6} \|v\|_1 \|\phi\|_{L^3} \end{aligned}$$

Ayrıca Eş. 2.9'dan

$$\|v\|_{L^6} \leq c \cdot \|v\|_1 \text{ ve } \|\phi\|_{L^3} \leq c \cdot \|A^{1/4}\phi\|$$

yazılabilir. Böylece

$$\|B(v, v)\|_{-1/2} = c \cdot \sup_{\phi \in V, \|A^{1/4}\phi\|=1} \|v\|_1^2 \|A^{1/4}\phi\| \leq c \cdot \|v\|_1^2 \quad (3.13)$$

ve

$$\|B(v, v)\|_{-1/2} \in L^\infty(\mathbb{R}^+; V_{-1/2})$$

elde edilir. Burada  $v(t)$  fonksiyonu  $v_0 \in V$  başlangıç koşulu ile Eş. 3.1-Eş. 3.2 sisteminin çözümü olarak  $L^\infty(\mathbb{R}^+; V)$  ye aittir. Böylece Eş. 3.13 ve Önerme 3.1.1'den dolayı Eş. 3.9 probleminin çözümü  $C(\mathbb{R}^+; V_{3/2})$  dedir. Yani  $Z(t)$  operatörü  $V$ 'yi  $V_{3/2}$  ye dönüştürmüştür  $V_{3/2} \subset V$  kompakt gömüldüğünden,  $Z(t)$  operatörü  $\forall t > 0$  için kompakt operatördür. Bundan dolayı  $S(t)$  Teorem 2.3.3'ün şartlarını sağlar ve asimptotik olarak kompakt yarı gruptur [20].

Her sınırlı yutan kümeye sahip ve asimptotik olarak kompakt yarı grup, bir kompakt yerel olmayan çekiciye sahiptir [2,12,22,40]. Buradan hareketle aşağıdaki teoremi verelim.

### 3.1.3. Teorem

Eğer  $h \in H$  ise

$$S(t): V \rightarrow V, \mathcal{B}_1 := \left\{ v \in V: \|v\|_1 \leq \frac{2}{\sqrt{v\alpha^2 d_0}} \|h\|_{-1} \right\}$$

yutan kümesine ve  $\mathcal{A}_1 \subset V$  yerel olmayan çekiciye sahiptir.  $\mathcal{A}_1$  çekicisi kompakt, bağlantılı ve invaryanttır [20].

Şimdi  $\mathcal{A}_1$ 'in  $V_2$  'de sınırlı alt küme olduğunu göstereceğiz. Eş. 3.9 denklemini  $V_{1/2}$  'de  $z$  ile iç çarpımını alalım.

$v(t) = y(t) + z(t) \in \mathcal{A}_1$  olduğunu göz önünde bulundurursak

$$z_t + vAz + \alpha^2 Az_t = h - B(v(t), v(t)), \quad z(0) = 0$$

$$(z_t, z)_{1/2} + v(Az, z)_{1/2} + \alpha^2 (Az_t, z)_{1/2} = (h, z)_{1/2} - (B(v, v), z)_{1/2}$$

elde edilir. Her bir terimi ayrı ayrı düzenleyelim.

$$(z_t, z)_{1/2} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|z\|_{1/2}^2$$

$$v(Az, z)_{1/2} = v(\nabla z, \nabla z)_{1/2} = v \|\nabla z\|_{1/2}^2$$

$$\alpha^2 (Az_t, z)_{1/2} = \alpha^2 \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla z\|_{1/2}^2$$

Böylece buradan

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|z\|_{1/2}^2 + \alpha^2 \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla z\|_{1/2}^2 + v \|\nabla z\|_{1/2}^2 = (h, z)_{1/2} - (B(v, v), z)_{1/2}$$

elde edilir. Eş. 2.6'dan faydalanarak

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|z\|_{1/2}^2 + \alpha^2 \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|z\|_{3/2}^2 + v \|z\|_{3/2}^2 &= (h, z)_{1/2} - (B(v, v), z)_{1/2} \\ \frac{d}{dt} [\|z\|_{1/2}^2 + \alpha^2 \|z\|_{3/2}^2] + 2v \|z\|_{3/2}^2 &= 2(h, z)_{1/2} - 2(B(v, v), z)_{1/2} \end{aligned} \quad (3.14)$$

biçiminde düzenlenir. Sağ taraftaki ilk terimi Eş. 2.11 ve Eş. 2.5 eşitsizliklerini kullanarak daha da düzenleyelim.

$$|2(h, z)_{1/2}| \leq 2 \|h\|_{-1/2} \|z\|_{3/2} \leq \frac{v}{2} \|z\|_{3/2}^2 + \frac{2}{v} \|h\|_{-1/2}^2$$

elde edilir. Sağ yandaki ikinci terim ise Eş. 3.13'ten dolayı

$$\begin{aligned} |2(B(v, v), z)_{1/2}| &\leq C \cdot \|B(v, v)\|_{-1/2} \|z\|_{3/2} \\ &\leq \frac{v}{2} \|z\|_{3/2}^2 + \frac{C}{v} \|B(v, v)\|_{-1/2}^2 \\ &\leq \frac{v}{2} \|z\|_{3/2}^2 + \frac{C}{v} \|v\|_1^4 \end{aligned}$$

şeklinde düzenlenebilir. Böylece Eş. 3.14

$$\frac{d}{dt} [\|z\|_{1/2}^2 + \alpha^2 \|z\|_{3/2}^2] + 2v \|z\|_{3/2}^2 \leq v \|z\|_{3/2}^2 + \frac{C}{v} [\|h\|_{-1/2}^2 + \|v\|_1^4]$$

biçiminde yazılır. Bu eşitsizlik düzenlenirse

$$\frac{d}{dt} [\|z\|_{1/2}^2 + \alpha^2 \|z\|_{3/2}^2] + \nu \|z\|_{3/2}^2 \leq \frac{C}{\nu} [\|h\|_{-1/2}^2 + \|v\|_1^4] \quad (3.15)$$

elde edilir. Şimdi de Eş. 3.15 eşitsizliğinin sol yanındaki ikinci terimi düzenleyelim.

$$\begin{aligned} \nu \|z\|_{3/2}^2 &\geq \frac{\nu}{2} \|z\|_{3/2}^2 + \frac{\nu}{2} \|z\|_{3/2}^2 \\ &\geq \frac{\nu}{2} \lambda_1 \|z\|_{1/2}^2 + \frac{\nu \alpha^2}{2} \|z\|_{3/2}^2 \\ &\geq \frac{\nu}{2} [\lambda_1 \|z\|_{1/2}^2 + \frac{1}{\alpha^2} \alpha^2 \|z\|_{3/2}^2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_0 &= \min \left\{ \lambda, \frac{1}{\alpha^2} \right\} \text{ olmak üzere} \\ &\geq d_0 [\|z\|_{1/2}^2 + \alpha^2 \|z\|_{3/2}^2] \end{aligned}$$

Düzenlenen bu ifadeyi Eş. 3.15'te yerine yazalım.

$$\frac{d}{dt} [\|z\|_{1/2}^2 + \alpha^2 \|z\|_{3/2}^2] + d_0 [\|z\|_{1/2}^2 + \alpha^2 \|z\|_{3/2}^2] \leq \frac{C}{\nu} [\|h\|_{-1/2}^2 + \|v\|_1^4]$$

eşitsizliği elde edilmiş olacaktır. Bu son ifadeyi integre edersek

$$e^{d_0 t} [\|z\|_{1/2}^2 + \alpha^2 \|z\|_{3/2}^2] \leq \int e^{d_0 t} \frac{C}{\nu} [\|h\|_{-1/2}^2 + \|v\|_1^4] dt$$

$$e^{d_0 t} [\|z\|_{1/2}^2 + \alpha^2 \|z\|_{3/2}^2] \leq \frac{e^{d_0 t} C}{d_0 \nu} [\|h\|_{-1/2}^2 + \|v\|_1^4]$$

$$[\|z\|_{1/2}^2 + \alpha^2 \|z\|_{3/2}^2] \leq \frac{1}{d_0} \frac{C}{\nu} [\|h\|_{-1/2}^2 + \|v\|_1^4]$$

Eş. 3.7'den  $\|v(t)\|_1^4 \leq M_1^4$  olduğundan

$$[\|z\|_{1/2}^2 + \alpha^2 \|z\|_{3/2}^2] \leq \frac{C}{\nu d_0} [\|h\|_{-1/2}^2 + M_1^4]$$

$$\Rightarrow \alpha^2 \|z\|_{3/2}^2 \leq \frac{C}{\nu d_0} [\|h\|_{-1/2}^2 + M_1^4]$$

$$\|z\|_{3/2}^2 \leq \frac{C}{\nu d_0 \alpha^2} [\|h\|_{-1/2}^2 + M_1^4] = L_0 \quad (3.16)$$

$\mathcal{A}_1$  çekicisi invaryant olduğundan  $S(t)\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_1$  dir ve Eş. 3.12'den dolayı

$$\|v(t) - z(t)\|_1 = \|y(t)\|_1 \leq C(\|y(0)\|_1) e^{-d_0 t}$$

eşitsizliği sağlanır. Buradan şunu anlıyoruz;

$\forall u \in \mathcal{A}_1$  için  $t_k \rightarrow \infty$  iken bir  $\{z(t_k)\}$ , dizisi vardır öyle ki

$$u = \lim_{k \rightarrow \infty} z(t_k), v_k(0) \in \mathcal{A}_1 \quad (3.17)$$

olacak şekilde  $v_k(0) \in \mathcal{A}_1$  e karşılık gelir. Eş. 3.16'dan dolayı  $\{z(t_k)\}$  dizisi  $V_{3/2}$  yuvarına aittir ve yarıçap  $L_0$  sadece  $M_1$  ve  $\|h\|_{-1/2}$  normuna bağlıdır. Bu yüzden  $\{z(t_k)\}$  dizisi  $V_{3/2}$  de zayıf kompakttır. Bu yüzden Eş. 3.17 ve  $\|u\|_{3/2} \leq \liminf_{t_k \rightarrow \infty} \|z(t_k)\|_{3/2}$  eşitsizliğinden görüyoruz ki  $\mathcal{A}_1$ ,  $V_{3/2}$ 'de sınırlıdır.  $\mathcal{A}_1$ 'in  $V_{3/2}$ 'de sınırlı olduğunu bildiğimizden dolayı benzer olarak  $\mathcal{A}_1$  in  $V_{5/3}$  ve  $V_2$ 'de de sınırlı olduğunu gösterebiliriz [20].

### 3.2. $V_2$ 'de Yutan Küme

$S(t): V_2 \rightarrow V_2$  yarı grubunun  $V_2 = D(A)$  uzayında yutan kümeye sahip olduğunu göstermek için Eş. 3.1'in  $H$ 'da  $Av(t)$  ile iç çarpımını alalım.

$$\begin{aligned} v_t + \nu Av + \alpha^2 Av_t + B(v, v) &= h, \quad h = Pf \\ (v_t, Av) + \nu(Av, Av) + \alpha^2(Av_t, Av) + (B(v, v), Av) &= (h, Av) \end{aligned} \quad (3.18)$$

Soldaki terimleri düzenleyelim.

$$\begin{aligned} (v_t, Av) &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (v, Av) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (A^{1/2} v, A^{1/2} v) \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\nabla v, \nabla v) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla v\|^2 = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v\|_1^2 \end{aligned}$$

$$\nu(Av, Av) = \nu \|Av\|^2$$

$$\alpha^2 (Av_t, Av) = \alpha^2 \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|Av\|^2$$

Bu ifadeleri Eş. 3.18'de yerine yazalım.

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v\|_1^2 + \nu \|Av\|^2 + \alpha^2 \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|Av\|^2 + (B(v, v), Av) = (h, Av)$$

Bu eşitsizlik düzenlenirse

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} [\|v\|_1^2 + \alpha^2 \|Av\|^2] + \nu \|Av\|^2 + (B(v, v), Av) = (h, Av)$$

yazılır. Böylece

$$\frac{d}{dt} [\|v\|_1^2 + \alpha^2 \|Av\|^2] + 2\nu \|Av\|^2 + 2(B(v, v), Av) = 2(h, Av) \quad (3.19)$$

Eş.3.19'un sağ tarafındaki terim için Cauchy-Schwarz ve Young eşitsizlikleri kullanılırsa

$$|2(h, Av)| \leq \frac{1}{\nu} \|h\|^2 + \nu \|Av\|^2 \quad (3.20)$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Eş. 2.10 ve  $p = 4/3$  için Eş. 2.5 kullanılarak Eş. 3.19'un sol tarafındaki en son terimi şu şekilde düzenleyebiliriz.

$$\begin{aligned} |2(B(v, v), Av)| &= 2b(v, v, Av) = \int (v \cdot \nabla) v Av = \|v\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla v\| \|Av\| \\ &\leq C \cdot \|v\|_{L^\infty} \|v\|_1 \|Av\| \\ &\leq C \cdot \|v\|_1^{1/2} \|Av\|^{1/2} \|v\|_1 \|Av\| \\ &\leq C \cdot \|v\|_1^{3/2} \|Av\|^{3/2} \\ &\leq \frac{3\varepsilon}{4} (\|Av\|^{3/2})^{4/3} + \frac{1}{4\varepsilon^3} (\|v\|_1^{3/2})^4 \\ &\leq \frac{3\varepsilon}{4} \|Av\|^2 + \frac{c}{\varepsilon^3} \|v\|_1^6 \end{aligned}$$

$\varepsilon = 2\nu/3$  için

$$|2(B(v, v), Av)| \leq \frac{\nu}{2} \|Av\|^2 + \frac{3}{8} \frac{c}{\nu^3} \|v\|_1^6$$

biçiminde yazılabilir. Eş. 3.20'yi ve son eşitsizliği kullanarak, Eş. 3.19

$$\frac{d}{dt} [\|v\|_1^2 + \alpha^2 \|Av\|^2] + 2\nu \|Av\|^2 + \frac{\nu}{2} \|Av\|^2 + \frac{3}{8} \frac{c}{\nu^3} \|v\|_1^6 \leq \frac{1}{\nu} \|h\|^2 + \nu \|Av\|^2$$

şeklinde yazılır. Bu eşitsizlik düzenlenirse

$$\frac{d}{dt} [\|v\|_1^2 + \alpha^2 \|Av\|^2] + \frac{3\nu}{2} \|Av\|^2 \leq \frac{1}{\nu} \|h\|^2 - \frac{3}{8} \frac{c}{\nu^3} \|v\|_1^6$$

elde edilir. Böylece

$$\frac{d}{dt} [\|v\|_1^2 + \alpha^2 \|Av\|^2] + \nu \|Av\|^2 \leq \frac{1}{\nu} \|h\|^2 + \frac{c_1}{\nu^3} \|v\|_1^6 \quad (3.21)$$

elde edilir. Şimdi elde ettiğimiz Eş. 3.21'in sol yanındaki ikinci ifadeyi düzenleyelim.

$$\begin{aligned} \nu \|Av\|^2 &\geq \frac{\nu}{2} \|Av\|^2 + \frac{\nu}{2} \|Av\|^2 \\ &\geq \frac{\nu}{2} \|v\|_2^2 + \frac{\nu \alpha^2}{2 \alpha^2} \|Av\|^2 \\ &\geq \frac{\nu}{2} c_2 \|v\|_1^2 + \frac{\nu \alpha^2}{2 \alpha^2} \|Av\|^2 \\ &\geq \frac{\nu}{2} \left[ c_2 \|v\|_1^2 + \frac{1}{\alpha^2} \alpha^2 \|Av\|^2 \right] \end{aligned}$$

$$d_0 := \frac{\nu}{2} \min \left\{ c_2, \frac{1}{\alpha^2} \right\} = \nu d_1 \text{ olmak üzere}$$

$$\nu \|Av\|^2 \geq d_0 [\|v\|_1^2 + \alpha^2 \|Av\|^2]$$

elde edilir. Bu son eşitsizliği de hesaba katarsak Eş. 3.21

$$\frac{d}{dt} [\|v\|_1^2 + \alpha^2 \|Av\|^2] + d_0 [\|v\|_1^2 + \alpha^2 \|Av\|^2] \leq \frac{1}{\nu} \|h\|^2 + \frac{c_1}{\nu^3} \|v\|_1^6$$

biçiminde ifade edilir. Ayrıca Eş. 3.7'den  $\forall t > t_0$  için  $\|v(t)\|_1 \leq M_1$  sağlandığından eşitsizlik

$$\frac{d}{dt} [\|v\|_1^2 + \alpha^2 \|Av\|^2] + d_0 [\|v\|_1^2 + \alpha^2 \|Av\|^2] \leq \frac{1}{\nu} \|h\|^2 + \frac{c_1}{\nu^3} M_1^6$$

biçiminde yazılabilir. Son eşitsizliği  $(t_0, t)$  aralığında integre edersek

$$e^{d_0(t-t_0)} [\|v\|_1^2 + \alpha^2 \|Av\|^2] \Big|_{t_0}^t \leq \int_{t_0}^t e^{d_0(t-s)} \left( \frac{1}{\nu} \|h\|^2 + \frac{c_1}{\nu^3} M_1^6 \right) ds$$

yazılır.

$$\begin{aligned} e^{d_0(t-t_0)} [\|v(t)\|_1^2 + \alpha^2 \|Av(t)\|^2] - [\|v(t_0)\|_1^2 + \alpha^2 \|Av(t_0)\|^2] \\ \leq \frac{1}{d_0} e^{d_0(t-t_0)} \left( \frac{1}{\nu} \|h\|^2 + \frac{c_1}{\nu^3} M_1^6 \right) - \frac{1}{d_0} \left( \frac{1}{\nu} \|h\|^2 + \frac{c_1}{\nu^3} M_1^6 \right) \end{aligned}$$

$R_2 = \frac{1}{\nu} \|h\|^2 + \frac{c_1}{\nu^3} M_1^6$  olsun. O halde

$$e^{d_0(t-t_0)} [\|v(t)\|_1^2 + \alpha^2 \|Av(t)\|^2] - [\|v(t_0)\|_1^2 + \alpha^2 \|Av(t_0)\|^2] \leq \frac{1}{d_0} e^{d_0(t-t_0)} R_2 - \frac{1}{d_0} R_2$$

$$e^{d_0(t-t_0)} [\|v(t)\|_1^2 + \alpha^2 \|Av(t)\|^2] \leq [\|v(t_0)\|_1^2 + \alpha^2 \|Av(t_0)\|^2] + \frac{1}{d_0} e^{d_0(t-t_0)} R_2 - \frac{R_2}{d_0}$$

Bu son eşitsizlik biraz daha düzenlenirse

$$[\|v(t)\|_1^2 + \alpha^2 \|Av(t)\|^2] \leq e^{-d_0(t-t_0)} [\|v(t_0)\|_1^2 + \alpha^2 \|Av(t_0)\|^2] + \frac{R_2}{d_0} - \frac{R_2}{d_0} e^{-d_0(t-t_0)}$$

$$\|v(t)\|_1^2 + \alpha^2 \|Av(t)\|^2 \leq e^{-d_0(t-t_0)} [\|v(t_0)\|_1^2 + \alpha^2 \|Av(t_0)\|^2] + \frac{R_2}{d_0} (1 - e^{-d_0(t-t_0)})$$

elde edilmiş olur. Bu son eşitsizlik  $M_2^2 = \frac{2R_2}{(\alpha^2 + \lambda_1^{-1})d_0}$  olmak üzere

$$\mathcal{B}_2 := \{v \in V_2: \|Av\| \leq M_2\}$$

yutan kümesinin varlığını gösterir. Yani  $\forall t \gg 1$  için  $\|Av(t)\| \leq M_2$  dir [20]. Benzer şekilde aşağıdaki teorem ispat edilebilir.

### 3.2.1. Teorem

Eğer  $h \in V_1$  ise  $S(t): V_2 \rightarrow V_2$  yarı grubu  $\mathcal{A}_2 \subset V_2$  yerel olmayan çekicisine sahiptir.  $\mathcal{A}_2$  çekicisi kompakt, bağlantılı ve invaryanttır.

## 4. BELİRLEYİCİ MODLARIN SAYISI İÇİN DEĞERLENDİRMELER

Fiziksel argümanlar ve boyut analizine dair teoriler türbülans akışların uzun zaman aralıklarındaki davranışları bir sonlu sayıda serbestlik derecesi tarafından belirlenir. Bu fikirle ilgili ilk ciddi sonuçlar iki boyutta Navier-Stokes denklemleri için [8]'de elde edildi. [8]'de Navier-Stokes denklemlerinin iki farklı çözümü için ilk  $m$  Fourier modunun  $t \rightarrow \infty$  için aynı asimptotik davranışa sahip olduğu gösterilmiştir. Daha sonra kalan sonsuz sayıdaki terim içinde aynı asimptotik davranışa sahip olduğu görülmüştür.

[22]'de Dirichlet sınır koşuluyla birlikte iki boyutta Navier-Stokes denklemleri için başlangıç koşulu tarafından oluşturulmuş yarı grubun yerel olmayan çekiciye sahip olduğu gösterilmiş ve bu çekicinin de kompakt, invaryant ve bağlantılı olduğu ifade edilmiştir. [8] ve [22]'de elde edilen sonuçlar geliştirilip, genelleştirilerek çeşitli sonsuz boyutlu yutan kümeye sahip problemlere uygulanmıştır. Bu konudaki çalışmaları [4-6,9,10,13,15-17, 23,29,30] kaynaklarında görebiliriz.

Biz de bu bölümde üç boyutta Navier-Stokes-Voight denklemlerinin belirleyici modlarının sayısı üzerinde çalışacağız [20].

### 4.1. Asimptotik Belirleyici Modlar

$v$  ve  $u$  Navier-Stokes-Voight denkleminin iki çözümü olsun. O halde

$$v_t + \nu Av + \alpha^2 Av_t + B(v, v) = h(t), \quad v(0) = v_0 \quad (4.1)$$

$$u_t + \nu Au + \alpha^2 Au_t + B(u, u) = g(t), \quad u(0) = u_0 \quad (4.2)$$

eşitlikleri sağlar.

#### 4.1.1. Tanım

Eğer

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|h(t) - g(t)\|_{-1} = 0 \quad \text{ve} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|P_m(v(t) - u(t))\|_1 = 0 \quad \text{olduğunda}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|v(t) - u(t)\|_1 = 0$$

oluyorsa,  $\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$  modlarının kümesine asimptotik belirleyicidir denir [20].

#### 4.1.2. Teorem

Varsayalım ki

$$\forall t \in \mathbb{R} \text{ için } \|h(t)\|_{-1} \leq \mathbf{h} < \infty$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|h(t) - g(t)\|_{-1} = 0 \text{ ve } \lim_{t \rightarrow \infty} \|P_m(v(t) - u(t))\|_1 = 0$$

sağlansın. Yeterince büyük  $m$  için

$$\lambda_{m+1} > C \frac{\mathbf{h}^4}{\alpha^4 \nu^8 d_1^2}$$

eşitsizliğinin sağlanması koşuluyla Stokes operatörünün ilk  $m$  öz fonksiyonları, homojen Dirichlet sınır koşullarıyla Navier-Stokes-Voight denklemleri için asimptotik olarak belirleyicilerdir [20].

*İspat*

$H_m = \text{span}\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$  olmak üzere  $P_m: H \rightarrow H_m$  dik izdüşüm operatörü ve  $Q_m = I - P_m$  olsun.

Eş. 4.1 ve Eş. 4.2'yi taraf tarafa çıkarırsak

$$(v_t - u_t) + \nu(Av - Au) + \alpha^2(Av_t - Au_t) + (B(v, v) - B(u, u)) = h(t) - g(t).$$

elde edilir. Şimdi sol kısımdaki bilineer form terimlerini düzenleyelim. Bu durumda

$$\begin{aligned} B(v, v) - B(u, u) &= B(v, v) - B(u, u) + B(v, v) - B(v, v) + B(u, v) - \\ &\quad - B(u, v) + B(v, u) - B(v, u) \end{aligned}$$

$$B(v, v) - B(u, u) = B(v - u, v) + B(v, v - u) - B(v, v) - B(u, u) + B(u, v) + B(v, u)$$

$w = v - u$  denilirse

$$B(v, v) - B(u, u) = B(w, v) + B(v, w) - (B(v, v) + B(u, u) - B(u, v) - B(v, u))$$

elde edilir. Buradan

$$B(v, v) - B(u, u) = B(w, v) + B(v, w) - (B(v - u, v) - B(v - u, u))$$

$$B(v, v) - B(u, u) = B(w, v) + B(v, w) - B(v - u, v - u)$$

$$B(v, v) - B(u, u) = B(w, v) + B(v, w) - B(w, w)$$

elde edilir. Bulunan bu ifadeyi yukarıdaki denklemde yerine yazalım.  $\theta(t) = h(t) - g(t)$  olsun.  $w = v - u$  olduğundan

$$w_t + vAw + \alpha^2 Aw_t + B(w, v) + B(v, w) - B(w, w) = \theta(t), \quad v(0) = v_0 \quad (4.3)$$

elde edilir. Eş. 3.5'ten

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \|v(t)\|_1 \leq \frac{h}{\alpha v \sqrt{d_1}}$$

Eş. 4.3'ü  $q(t) = Q_m w(t)$  ile iç çarpıma tabi tutalım.

$$(w_t, q) + v(Aw, q) + \alpha^2(Aw_t, q) + (B(w, v), q) + (B(v, w), q) - (B(w, w), q) = (\theta(t), q) \quad (4.4)$$

elde edilir. Eş. 4.4'teki her bir terimi düzenleyelim.

$$\begin{aligned} (w_t, q) &= (w_t, Q_m w) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (w, Q_m w) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (P_m w + Q_m w, Q_m w) \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (P_m w, Q_m w) + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (Q_m w, Q_m w) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (Q_m w, Q_m w) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|Q_m w\|^2 = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|q\|^2$$

$$\begin{aligned} v(Aw, q) &= v(Aw, Q_m w) = v(AP_m w + AQ_m w, Q_m w) \\ &= v(AP_m w, Q_m w) + v(AQ_m w, Q_m w) \\ &= v(A^{1/2} P_m w, A^{1/2} Q_m w) + v(A^{1/2} Q_m w, A^{1/2} Q_m w) \\ &= v(A^{1/2} Q_m w, A^{1/2} Q_m w) = v \|\nabla Q_m w\|^2 = v \|Q_m w\|_1^2 = v \|q\|_1^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha^2(Aw_t, q) &= \alpha^2(Aw_t, Q_m w) = \alpha^2 \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (Aw, Q_m w) = \alpha^2 \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (AP_m w + AQ_m w, Q_m w) \\ &= \alpha^2 \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (AP_m w, Q_m w) + \alpha^2 \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (AQ_m w, Q_m w) \\ &= \alpha^2 \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (A^{1/2} P_m w, A^{1/2} Q_m w) + \alpha^2 \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (A^{1/2} Q_m w, A^{1/2} Q_m w) \\ &= \alpha^2 \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (A^{1/2} Q_m w, A^{1/2} Q_m w) = \alpha^2 \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla Q_m w\|^2 \\ &= \alpha^2 \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|Q_m w\|_1^2 = \alpha^2 \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|q\|_1^2 \end{aligned}$$

$$(B(w, v), q) = b(v, w, q) = b(v, p + q, q) = b(v, p, q) + b(v, q, q) = b(v, p, q)$$

$$(B(w, v), q) = b(w, v, q) = b(p + q, v, q) = b(p, v, q) + b(q, v, q)$$

$$\begin{aligned} (B(w, w), q) &= b(w, w, q) = b(p + q, p + q, q) \\ &= b(p, p, q) + b(p, q, q) + b(q, p, q) + b(q, q, q) \\ &= b(p, p, q) + b(q, p, q) \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilecektir. Bulunan bütün eşitlikleri Eş. 4.4'te yerine yazalım.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|q\|^2 + v \|q\|_1^2 + \alpha^2 \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|q\|_1^2 + b(v, p, q) + b(p, v, q) \\ + b(q, v, q) - b(p, p, q) - b(q, p, q) = (\theta, q) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [\|q\|^2 + \alpha^2 \|q\|_1^2] + 2v \|q\|_1^2 + 2b(q, v, q) = 2(\theta, q) - 2b(v, p, q) \\ + 2b(p, p, q) + 2b(q, p, q) - 2b(p, v, q) \end{aligned} \quad (4.5)$$

elde edilir. Eş. 4.5'in terimlerini düzenleyelim. Öncelikle

$$\lambda_{m+1} \|Q_m \phi\|^2 \leq \|Q_m \phi\|_1^2 \text{ ve } \|P_m \phi\|_1^2 \leq \lambda_m \|P_m \phi\|^2 \quad (4.6)$$

eşitliklerinin sağlandığı kolayca görülebilir [10]. Eş. 2.13 ve Eş. 4.6'dan dolayı Eş. 4.5'in sol yanındaki son terim

$$\begin{aligned} 2|b(q, v, q)| &\leq c \|q\|^{1/2} \|q\|_1^{3/2} \|v\|_1 \\ &\leq c \frac{1}{\lambda_{m+1}^{1/4}} \|q\|_1^{1/2} \|q\|_1^{3/2} \|v\|_1 \\ &\leq c \lambda_{m+1}^{-1/4} \|q\|_1^2 \|v\|_1 \end{aligned}$$

haline gelir. Şimdi Eş. 4.5'in sağ yanındaki ilk terimden başlayarak düzenleyelim.

$$2|(\theta, q)| \leq 2\|\theta\|_{-1} \|q\|_1 \leq \frac{2}{\nu} \|\theta\|_{-1}^2 + \frac{\nu}{2} \|q\|_1^2$$

Eş. 2.14, Eş. 4.6'dan ve Young eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned} |-2b(v, p, q)| &\leq 2c_0 \|v\|_1 \|p\|_1 \|q\|^{1/2} \|q\|_1^{1/2} \\ &\leq 2c_0 \lambda_{m+1}^{-1/4} \|v\|_1 \|p\|_1 \|q\|_1^{1/2} \|q\|_1^{1/2} \\ &\leq 2c_0 \lambda_{m+1}^{-1/4} \|v\|_1 \|p\|_1 \|q\|_1 \\ &\leq 2c_0 \lambda_{m+1}^{-1/4} \|p\|_1^{1/2} \|q\|_1 \|p\|_1^{1/2} \|v\|_1 \\ &\leq 2c_0 \lambda_{m+1}^{-1/4} \left( \frac{1}{2} \|p\|_1 \|q\|_1^2 + \frac{1}{2} \|p\|_1 \|v\|_1^2 \right) \\ &\leq c_0 \lambda_{m+1}^{-1/4} \|p\|_1 (\|q\|_1^2 + \|v\|_1^2) \end{aligned}$$

elde edilir. Eş. 2.13'ten

$$\begin{aligned} |2b(q, p, q)| &\leq c_1 \|q\|^{1/2} \|q\|_1^{3/2} \|p\|_1 \\ &\leq c_1 \lambda_{m+1}^{-1/4} \|q\|_1^{1/2} \|q\|_1^{3/2} \|p\|_1 \\ &\leq c_1 \lambda_{m+1}^{-1/4} \|q\|_1^2 \|p\|_1 \end{aligned}$$

yazılır. Eş. 2.14'ten

$$\begin{aligned}
|2b(p, p, q)| &\leq c_2 \|p\|_1 \|p\|_1 \|q\|^{1/2} \|q\|_1^{1/2} \\
&\leq c_2 \lambda_{m+1}^{-1/4} \|p\|_1^2 \|q\|_1^{1/2} \|q\|_1^{1/2} \\
&\leq c_2 \lambda_{m+1}^{-1/4} \|p\|_1^2 \|q\|_1
\end{aligned}$$

yazılır. Eş. 2.14 ve Young eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
|-2b(p, v, q)| &\leq 2c_3 \|p\|_1 \|v\|_1 \|q\|^{1/2} \|q\|_1^{1/2} \\
&\leq 2c_3 \lambda_{m+1}^{-1/4} \|p\|_1 \|v\|_1 \|q\|_1^{1/2} \|q\|_1^{1/2} \\
&\leq 2c_3 \lambda_{m+1}^{-1/4} \|p\|_1^{1/2} \|v\|_1 \|p\|_1^{1/2} \|q\|_1 \\
&\leq 2c_3 \lambda_{m+1}^{-1/4} \left( \frac{1}{2} \|p\|_1 \|v\|_1^2 + \frac{1}{2} \|p\|_1 \|q\|_1^2 \right) \\
&\leq c_3 \lambda_{m+1}^{-1/4} \|p\|_1 (\|v\|_1^2 + \|q\|_1^2)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bulunan bütün eşitsizlikler Eş. 4.5'te yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} [\|q\|^2 + \alpha^2 \|q\|_1^2] + 2\nu \|q\|_1^2 - \frac{C}{\lambda_{m+1}^{1/4}} \|q\|_1^2 \|v\|_1 &\leq \frac{2}{\nu} \|\theta\|_{-1}^2 + \frac{\nu}{2} \|q\|_1^2 + \\
&+ c_0 \lambda_{m+1}^{-1/4} \|p\|_1 (\|q\|_1^2 + \|v\|_1^2) \\
&+ c_1 \lambda_{m+1}^{-1/4} \|q\|_1^2 \|p\|_1 + c_2 \lambda_{m+1}^{-1/4} \|p\|_1^2 \|q\|_1 \\
&+ c_3 \lambda_{m+1}^{-1/4} \|p\|_1 (\|v\|_1^2 + \|q\|_1^2)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitsizliği daha da düzenlersek

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} [\|q\|^2 + \alpha^2 \|q\|_1^2] + \frac{3\nu}{2} \|q\|_1^2 - \frac{C}{\lambda_{m+1}^{1/4}} \|q\|_1^2 \|v\|_1 &\leq \frac{2}{\nu} \|\theta\|_{-1}^2 + \\
&+ (c_0 + c_3) \lambda_{m+1}^{-1/4} \|p\|_1 (\|q\|_1^2 + \|v\|_1^2) \\
&+ c_1 \lambda_{m+1}^{-1/4} \|q\|_1^2 \|p\|_1 + c_2 \lambda_{m+1}^{-1/4} \|p\|_1^2 \|q\|_1
\end{aligned}$$

$c_0 + c_3 = c_4$  olmak üzere

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [\|q\|^2 + \alpha^2 \|q\|_1^2] + \frac{\nu}{2} \|q\|_1^2 + \nu \|q\|_1^2 - \frac{C}{\lambda_{m+1}^{1/4}} \|q\|_1^2 \|v\|_1 &\leq \frac{2}{\nu} \|\theta\|_{-1}^2 + \\ &+ c_4 \lambda_{m+1}^{-1/4} \|p\|_1 (\|q\|_1^2 + \|v\|_1^2) \\ &+ c_1 \lambda_{m+1}^{-1/4} \|q\|_1^2 \|p\|_1 + c_2 \lambda_{m+1}^{-1/4} \|p\|_1^2 \|q\|_1 \end{aligned}$$

elde edilir. Sağ yandaki terimlerin hepsine birden  $b(t)$  dersek son eşitsizlik Eş. 4.6'yı kullanarak

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [\|q\|^2 + \alpha^2 \|q\|_1^2] + \frac{\nu}{2} \|q\|_1^2 + \|q\|_1^2 \left( \nu - \frac{C}{\lambda_{m+1}^{1/4}} \|v\|_1 \right) &\leq b(t) \\ \frac{d}{dt} [\|q\|^2 + \alpha^2 \|q\|_1^2] + \frac{\nu}{2} \|q\|_1^2 + \|q\|_1^2 \left( \frac{\nu}{2} - \frac{C}{\lambda_{m+1}^{1/4}} \|v\|_1 \right) - \|q\|_1^2 \frac{C}{\lambda_{m+1}^{1/4}} \|v\|_1 &\leq b(t) \\ \frac{d}{dt} [\|q\|^2 + \alpha^2 \|q\|_1^2] + \lambda_{m+1} \|q\|^2 \left( \frac{\nu}{2} - \frac{C}{\lambda_{m+1}^{1/4}} \|v\|_1 \right) + \|q\|_1^2 \left( \frac{\nu}{2} - \frac{C}{\lambda_{m+1}^{1/4}} \|v\|_1 \right) &\leq b(t) \\ \frac{d}{dt} [\|q\|^2 + \alpha^2 \|q\|_1^2] + \lambda_1^{3/4} \|q\|^2 \left( \frac{\nu}{2} \lambda_{m+1}^{1/4} - C \|v\|_1 \right) + \\ &+ \frac{1}{\lambda_{m+1}^{1/4}} \frac{\alpha^2}{\alpha^2} \|q\|_1^2 \left( \frac{\nu}{2} \lambda_{m+1}^{1/4} - C \|v\|_1 \right) \leq b(t) \end{aligned}$$

biçiminde yazılır.

$$d_m = \min \left\{ \lambda_1^{3/4}, \frac{1}{\lambda_{m+1}^{1/4} \alpha^2} \right\} \text{ olmak üzere}$$

$$\frac{d}{dt} [\|q\|^2 + \alpha^2 \|q\|_1^2] + d_m \left( \frac{\nu}{2} \lambda_{m+1}^{1/4} - C \|v\|_1 \right) [\|q\|^2 + \alpha^2 \|q\|_1^2] \leq b(t) \quad (4.7)$$

şeklinde düzenlenir.  $b^+ = \max(b, 0)$  olmak üzere hipotezden

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\theta\|_{-1} = \lim_{t \rightarrow \infty} \|h(t) - g(t)\|_{-1} = 0 \text{ ve } \lim_{t \rightarrow \infty} \|P_m(v(t) - u(t))\|_1 = 0$$

olduğundan sağ yandaki bütün terimler sıfıra gidecektir. Yani  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} b^+(\tau) d\tau = 0$

olacaktır. Ayrıca yeterince büyük  $t_1 > 0$  için Eş. 3.7'den  $\|v(t)\|_1 \leq M_1$  olduğundan  $\forall t \geq t_1$  için

$$a(t) = \left( \frac{\nu}{2} \lambda_{m+1}^{1/4} - C \|v\|_1 \right) > 0$$

olmak koşuluyla Eş. 4.7

$$\frac{d}{dt} [\|q\|^2 + \alpha^2 \|q\|_1^2] + d_m a(t) [\|q\|^2 + \alpha^2 \|q\|_1^2] \leq b(t)$$

biçiminde düzenlenebilir.

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} a(\tau) d\tau = \frac{\nu}{2} \lambda_{m+1}^{1/4} - C \|v\|_1 > 0$$

olacağından Lemma 2.3.1'in şartları sağlanmış olur.

$$\|v\|_1 \leq M_1 = \frac{2}{\sqrt{\nu^2 \alpha^2 d_1}} \|h\|_{-1}$$

olduğundan

$$\lambda_{m+1} > C \frac{h^4}{\alpha^4 \nu^8 d_1^2}$$

eşitsizliği de sağlanmış olur. Burada son eşitsizlikte  $\forall t \in \mathbb{R}$  için  $\|h(t)\|_{-1} \leq h < \infty$  olduğu kullanılmıştır. Böylece ispat tamamlanmış olur. Ayrıca Navier-Stokes-Voigt denklemleri için bir üst sınır elde edilmiştir ve Tanım 4.1.1'deki

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|v(t) - u(t)\|_1 = 0$$

sağlandığından dolayı  $\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$  modlarının kümesi asimptotik olarak belirleyicidir [20].

## 4.2. Çekici Üzerindeki Belirleyici Modlar

### 4.2.1. Tanım

$\mathcal{A}_1$  çekicisi üzerindeki yörüngeler  $u(t)$  ve  $v(t)$  olsun. Eğer

$$\|P_m(v(t) - u(t))\|_1 = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (4.8)$$

eşitliği

$$\forall t \in \mathbb{R} \text{ için } u(t) = v(t)$$

eşitliğini gerçeklerse,  $\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$  modlarının kümesi çekici üzerinde belirleyici olarak adlandırılır [20,22].

### 4.2.2. Teorem

$u$  ve  $v$ , Eş. 1.1-Eş. 1.3 probleminin  $\mathcal{A}_1$  çekicisinde olan iki çözüm olsun. Kabul edelim ki  $\forall t \in \mathbb{R}$  için  $P_m(u(t)) = P_m(v(t))$  olsun. Bu durumda  $\forall t \in \mathbb{R}$  için  $v(t) = u(t)$  dir. Burada m,

$$\lambda_{m+1} \geq \frac{c \|h\|_{-1}^4}{\alpha^4 \nu^8 d_1^2}$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde seçilmiştir [20].

*İspat*

$v$  ve  $u$  Eş. 3.1'in  $\mathcal{A}_1$  çekicisi üzerinde iki yörüngesi olsun.  $w = v - u$  için

$$w_t + \alpha^2 A w_t + \nu A w + B(w, v) + B(u, w) = 0 \quad (4.9)$$

elde edilir. Şimdi Eş. 4.9'u  $q = Q_m w$  ile iç çarpalım.

$$(w_t, q) + \alpha^2 (A w_t, q) + \nu (A w, q) + (B(w, v), q) + (B(u, w), q) = 0 \quad (4.10)$$

$w = P_m w + Q_m w$  olmak üzere Eş. 4.10'un terimlerini düzenleyelim. İlk terim

$$\begin{aligned} (w_t, q) &= (w_t, Q_m w) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (w, Q_m w) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (P_m w + Q_m w, Q_m w) \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (P_m w, Q_m w) + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (Q_m w, Q_m w) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (Q_m w, Q_m w) \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|Q_m w\|^2 = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|q\|^2 \end{aligned}$$

biçiminde yazılır. Daha sonra

$$\begin{aligned} v(Aw, q) &= v(Aw, Q_m w) = v(AP_m w + AQ_m w, Q_m w) \\ &= v(AP_m w, Q_m w) + v(AQ_m w, Q_m w) \\ &= v(A^{1/2} P_m w, A^{1/2} Q_m w) + v(A^{1/2} Q_m w, A^{1/2} Q_m w) \\ &= v(A^{1/2} Q_m w, A^{1/2} Q_m w) = v\|\nabla Q_m w\|^2 = v\|Q_m w\|_1^2 = v\|q\|_1^2 \end{aligned}$$

yazılır.

$$\begin{aligned} \alpha^2 (Aw_t, q) &= \alpha^2 \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (Aw, Q_m w) \\ &= \alpha^2 \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (AP_m w + AQ_m w, Q_m w) \\ &= \alpha^2 \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (AP_m w, Q_m w) + \alpha^2 \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (AQ_m w, Q_m w) \\ &= \alpha^2 \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (A^{1/2} P_m w, A^{1/2} Q_m w) + \alpha^2 \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (A^{1/2} Q_m w, A^{1/2} Q_m w) \\ &= \alpha^2 \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (A^{1/2} Q_m w, A^{1/2} Q_m w) = \alpha^2 \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla Q_m w\|^2 \\ &= \alpha^2 \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|Q_m w\|_1^2 = \alpha^2 \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|q\|_1^2. \end{aligned}$$

Diğer yandan

$$(B(w, v), q) = b(w, v, q)$$

$$(B(u, w), q) = b(u, w, q)$$

dır. Bulunan eşitlikleri Eş. 4.10'da yerine yazalım.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|q\|^2 + \nu \|q\|_1^2 + \alpha^2 \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|q\|_1^2 + b(w, v, q) + b(u, w, q) &= 0 \\ \frac{d}{dt} [\|q\|^2 + \alpha^2 \|q\|_1^2] + 2\nu \|q\|_1^2 &= -2b(w, v, q) - 2b(u, w, q) \end{aligned} \quad (4.11)$$

denklemini elde edilmiş olur. Varsayalım ki  $\forall t \in \mathbb{R}$  için  $P_m w(t) = 0$  olsun. Eş. 4.11'in sağ tarafındaki terimler  $p = P_m w$  ve  $q = Q_m w$  için,

$$\begin{aligned} b(w, v, q) + b(u, w, q) &= b(p, v, q) + b(q, v, q) + \\ &+ b(u, p, q) + b(u, q, q) = b(q, v, q) \end{aligned} \quad (4.12)$$

biçiminde düzenlenebilir. Buradan da Eş. 4.8'den dolayı Eş. 4.12'deki 1. ve 3. terim sıfırdır. Ayrıca Eş. 2.2'den  $b(u, q, q) = 0$  sağlanır. Böylece

$$\frac{d}{dt} [\|q\|^2 + \alpha^2 \|q\|_1^2] + 2\nu \|q\|_1^2 = 2b(q, v, q) \quad (4.13)$$

eşitliği elde edilir. Eş. 2.13 ve Eş. 4.6'dan dolayı

$$\begin{aligned} |2b(q, v, q)| &\leq C \|q\|^{1/2} \|q\|_1^{3/2} \|v\|_1 \\ &\leq C \lambda_{m+1}^{-1/4} \|q\|_1^{1/2} \|q\|_1^{3/2} \|v\|_1 \\ &\leq C \lambda_{m+1}^{-1/4} \|q\|_1^2 \|v\|_1 \end{aligned}$$

yazılır. Böylece Eş. 4.13'ü, Eş. 3.7'den yararlanarak

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [\|q\|^2 + \alpha^2 \|q\|_1^2] + \nu \|q\|_1^2 + \nu \|q\|_1^2 - C \lambda_{m+1}^{-1/4} \|q\|_1^2 \|v\|_1 &\leq 0 \\ \frac{d}{dt} [\|q\|^2 + \alpha^2 \|q\|_1^2] + \nu \|q\|_1^2 + \|q\|_1^2 (\nu \lambda_{m+1}^{1/4} - CM_1) &\leq 0 \end{aligned} \quad (4.14)$$

biçiminde yazılabilir. Yeterince büyük  $m$  için  $\lambda_{m+1} \geq \left(\frac{CM_1}{\nu}\right)^4$  olacak şekilde seçelim. O halde Eş. 4.14

$$\frac{d}{dt} [\|q\|^2 + \alpha^2 \|q\|_1^2] + \nu \|q\|_1^2 \leq 0$$

şeklinde ifade edilir. Sol yandaki ikinci terimi Eş. 4.6'yı kullanarak düzenlersek,

$$\begin{aligned} \nu \|q\|_1^2 &= \frac{\nu}{2} \|q\|_1^2 + \frac{\nu}{2} \|q\|_1^2 \geq \frac{\nu}{2} \|q\|_1^2 + \frac{\nu}{2} \lambda_{m+1} \|q\|^2 \\ &\geq \frac{\nu}{2} \left( \frac{1}{\alpha^2} \alpha^2 \|q\|_1^2 + \lambda_{m+1} \|q\|^2 \right) \end{aligned}$$

elde edilir.  $l_m = \frac{\nu}{2} \min \left\{ \lambda_{m+1}, \frac{1}{\alpha^2} \right\}$  biçiminde seçilirse

$$\nu \|q\|_1^2 \geq l_m [\|q\|^2 + \alpha^2 \|q\|_1^2]$$

elde edilir. Böylece son eşitsizlik

$$\frac{d}{dt} [\|q\|^2 + \alpha^2 \|q\|_1^2] + l_m [\|q\|^2 + \alpha^2 \|q\|_1^2] \leq 0$$

şeklinde düzenlenmiş olur. Son olarak bu eşitsizliği s'den t'ye integre edersek

$$\begin{aligned} e^{l_m t} [\|q(t)\|^2 + \alpha^2 \|q(t)\|_1^2] - e^{l_m s} [\|q(s)\|^2 + \alpha^2 \|q(s)\|_1^2] &\leq 0 \\ [\|q(t)\|^2 + \alpha^2 \|q(t)\|_1^2] &\leq e^{-l_m(t-s)} [\|q(s)\|^2 + \alpha^2 \|q(s)\|_1^2] \end{aligned} \quad (4.15)$$

elde edilir. Eş. 4.15'te  $s \rightarrow -\infty$  için limit alırsak

$$\|q(t)\|^2 + \alpha^2 \|q(t)\|_1^2 = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

elde edilmiş olur [20]. Böylece ispat tamamlanmış olur.

## 5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Euclide uzayında bilinen hiçbir kurala tam uymayan bir hareket türü olan türbülans hususunda birçok matematikçi ve fizikçi araştırma yapmışsa da, konu tam olarak aydınlığa kavuşturulamamıştır. Meteorolojik olaylarda, havacılıkta, su bilimlerinde ve doğada pek çok olayda türbülanslı akışlar mevcuttur. Arabaların, uçakların, trenlerin etrafında oluşan akışlar, petrol ve doğalgaz boru hatlarındaki akışlar, atmosferdeki hareketler, okyanus ve nehir akıntıları bu akışlara birer örnektir. Türbülans üzerinde pek çok araştırma yapılmıştır. Navier-Stokes denklemleri bu akış hareketlerini ifade etmektedir [41]. Bu denklemin iki boyutlu uzayda varlık tekliği ispatlanmış ancak üç boyutlu uzayda çözümlerin regüleriği hâlâ açık problemdir. Bu nedenle bu probleme bilim adamları tarafından pek çok yaklaşımlar önerilmektedir. Bu tezde ele alınan Navier-Stokes-Voight denklemleri de Navier-Stokes denklemlerinin çözümlerini regüleriştirmek için Oskolkov tarafından [31] ortaya konmuştur. Bu denklemlerin Dirichlet sınır koşulları altında çözümlerinin varlık ve tekliği için bilinen çalışmalar incelenmiştir. Ayrıca bu denklemler için yerel olmayan çekiciler ve belirleyici modlar hakkında değerlendirmeler elde edilmiştir. Uygulamada çok önemli olan akışkanlar mekaniğinin pek çok problemi için benzer yaklaşımlar kullanılarak bu konuda ele alınan problemlerin çözümlerinin özellikleri, uzun zamanlı davranışları incelenebilir. Böylece doğada hareket düzenini anlamakta zorlandığımız akışların, yani türbülansın ve çeşitli bilimlerde karşılaşılan problemlerin çözümlerine ışık tutulmuş olacaktır.



## KAYNAKLAR

1. Adams, R. A. (1975). Sobolev Spaces, *Academic Press*, New York, 4-7, 22.
2. Babin, A. V. and Vishik, M. I. (1992). Attractors of Evolution Equations, *North-Holland*, Amsterdam.
3. Constantin, P. and Foias, C. (1989). Navier-Stokes Equations, Second Edition, *Springer*, USA.
4. Chueshov, I. D. (1998). The Theory of Functionals that Uniquely Determine the Asymptotic Dynamics of Infinite-Dimensional Dissipative Systems, *Russian Math. Surveys* 53(4), 731–776.
5. Cockburn, B., Jones, D. and Titi, E. S. (1995). Determining Degrees of Freedom for Nonlinear Dissipative Equations, *C. R. Acad. Sci. Paris S'er. I Math.* 321(5), 563–568.
6. Cockburn, B., Jones D. and Titi, E. S. (1997). Estimating the Number of Asymptotic Degrees of Freedom for Nonlinear Dissipative Systems, *Math. Comput.* 66, 1073–87.
7. Evans, L. C. (1998). Partial Differential Equations, Graduate Studies in Mathematics Volume 19, *American Mathematical Society*, United States of America, 240, 262–266, 269, 271, 283, 413–414, 622, 624–625, 636.
8. Foias, C., Prodi, G. (1967). Sur le comportement Global des Solutions Non Stationnaires des Equations de Navier-Stokes en dimension 2, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova* 39, 1-34.
9. Foias, C., Manley, O. P., Temam, R. and Tréve, Y. M. (1983). Asymptotic Analysis of the Navier-Stokes Equations, *Physica D* 9(1-2), 157–188.
10. Foias, C., Manley, O., Rosa, R. and Temam, R. (2001). Navier-Stokes Equations and Turbulence, *Cambridge University Press*, New York, 96-101.
11. Galdi, G. P. (2011). An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier-Stokes Equations Steady State Problems, Second Edition, *Springer*, New York, USA.
12. Hale, J. K. (1988). Asymptotic Behaviour of Dissipative Systems. Mathematical Surveys and Monographs Volume 25, *AMS*, RI.
13. Holst, M. J., Titi, E. S., (1997). Determining Projections and Functionals for Weak Solutions of the Navier-Stokes Equations, Recent Developments in Optimization Theory and Nonlinear Analysis (Jerusalem, 1995), 125–138, *Contemp. Math.*, 204, *Amer. Math. Soc.*, Providence, RI.
14. Hopf, E. (1951). Über die Anfangswertaufgabe für die hydrodynamischen Grundgleichungen, *Math. Nachr.* 4, 213-231.

15. Ilyin, A. A. and Titi, E. S. (2006). Sharp Estimates for The Number of Degrees of Freedom for The Damped-Driven 2D Navier-Stokes Equations, *J. Nonlinear Sci.* 16(3), 233–253.
16. Jones, D. A. and Titi, E. S. (1992). Determining Finite Volume Elements for the 2D Navier-Stokes Equations, *PhysicaD* 60, 165–174.
17. Jones, D. A. and Titi, E. S. (1993). Upper Bounds on The Number of Determining Modes, Nodes, and Volume Elements for the Navier-Stokes Equations, *Indiana Univ. Math. J.* 42, 875-887.
18. Kalantarov, V. K. (1986). Attractors for Some Nonlinear Problems of Mathematical Physics, *Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI)* 152, 50–54.
19. Kalantarov, V. K. (1988). Global Behavior of Solutions of Nonlinear Equations of Mathematical Physics of Classical and Non-classical Type, *Postdoctoral Thesis*, St. Petersburg.
20. Kalantarov, V. K. and Titi, E. S. (2009). Global Attractors and Determining Modes for The 3D Navier-Stokes-Voigt Equations, *Chinese Annals of Mathematics, Series B* 30(6), 697-714.
21. Kiselev, A. A. and Ladyzhenskaya, O. A. (1957). On the Existence and Uniqueness of the Solution of the Nonstationary Problem for a Viscous Incompressible Fluid, *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat.*, 21, 655-680.
22. Ladyzhenskaya, O. A. (1969). The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow. (Çev. R.A. Silverman, J. Chu). New York: *Gordon and Breach Science Publishers*. (Eserin orijinali 1963'te yayımlandı), 7-23.
23. Ladyzhenskaya, O. A. (1991). Attractors for Semigroups and Evolution Equations, *Lezioni Lincee, Cambridge University Press*, Cambridge.
24. Ladyzhenskaya, O. A. (1982). On Finite-Dimensionality of Bounded Invariant Sets for The Navier-Stokes Equations and for Other Dissipative Systems, *Zap. Nauch. Sem. LOMI*, 115, 137-155.
25. Leray, J. (1933). Etude de diverses équations intégrales non linéaires et de quelques problèmes que pose l'hydrodynamique, *J. Math. Pures Appl.* 12, 1-82.
26. Leray, J. (1934a). Essai sur les mouvements plans d'un liquide visqueux que limitent des parois, *J. Math. Pures Appl.* 13, 331-418.
27. Leray, J. (1934b). Essai sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace, *Acta Math.* 63, 193-248.
28. Lions, J. L. (1969). Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites non Linéaires, *Dunod Gauthier-Villars*, Paris.

29. Olson, E. and Titi, E. S. (2003). Determining Modes for Continuous Data Assimilation in 2D Turbulence, *J. Statist. Phys.* **113**(5-6), 799–840.
30. Olson, E. and Titi, E. S. (2008). Determining Modes and Grashof Number in 2D Turbulence - A Numerical Case Study, *Theor. Comput. Fluid. Dyn.* **22**, 327-339.
31. Oskolkov, A. P. (1973). The Uniqueness and Global Solvability of Boundary-Value Problems for The Equations of Motion for Aqueous Solutions of Polymers, *Zap. Nauchn. Sem. LOMI* **38**, 98-136.
32. Oskolkov, A. P. (1975). On Some Model Nonstationary Systems in The Theory of Non-Newtonian Fluids, *Trudy Mat. Inst. Akad. Nauk SSSR*, **127**, 32-57.
33. Oskolkov, A. P. (1976). On Some Nonstationary Linear and Quasilinear Systems Occuring in The Study of The Motion of Viscous Fluids, *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, **59**, 133-177.
34. Oskolkov, A. P. (1983). On Nonstationary Flows of Viscoelastic Fluids, *Trudy Mat. Inst. Akad. Nauk SSSR*, **159**, 103-131.
35. Oskolkov, A. P. (1988). Initial Boundary- Value Problems for The Equations of Motion of Kelvin-Voight and Oldroyd Fluids, *Trudy Mat. Inst. Akad. Nauk SSSR*, **179**, 126-164.
36. Polat, M. (1999). Global Attractors for Generalized Benjamin-Bona-Mahony Equation, *Ph. D.*, Ankara, 38-42.
37. Reddy, B. D. (1986). Functional Analysis and Boundary-Value Problems:an Introductory Treatment, *John Wiley&Sons Inc.*, Newyork, 28, 40, 50, 115, 152, 175.
38. Robinson, J. C. (2001). Infinite-Dimensional Dynamical Systems, *Cambridge University Press*, USA, 17, 23, 62-88, 138, 188-189, 241, 244, 264.
39. Temam, R. (1977). Navier-Stokes Equations Theory and Numerical Analysis, *North-Holland Publishing Company*, England, 3, 4.
40. Temam, R. (1997). Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics, *Springer*, New York.
41. Wiggert, D. C., Potter, M. (2008). Fluid Mechanics (Schaum's Series), *Schaum's Outlines*, McGraw-Hill, USA.



## ÖZGEÇMİŞ

### Kişisel Bilgiler

Soyadı, Adı : GÜÇKIRAN, Samet  
Uyruğu : T.C.  
Doğum tarihi ve yeri : 02.11.1989, Ankara  
Medeni hali : Bekar  
Telefon : 0 (536) 8100649  
Faks :  
E-Posta : samet.guckiran@hotmail.com



### Eğitim

Derece	Okul/Program	Mezuniyet Tarihi
Lisans	Gazi Üniversitesi/Matematik	2011
Lise	İnönü (Y.D.A) Lisesi	2007

### İş Deneyimi

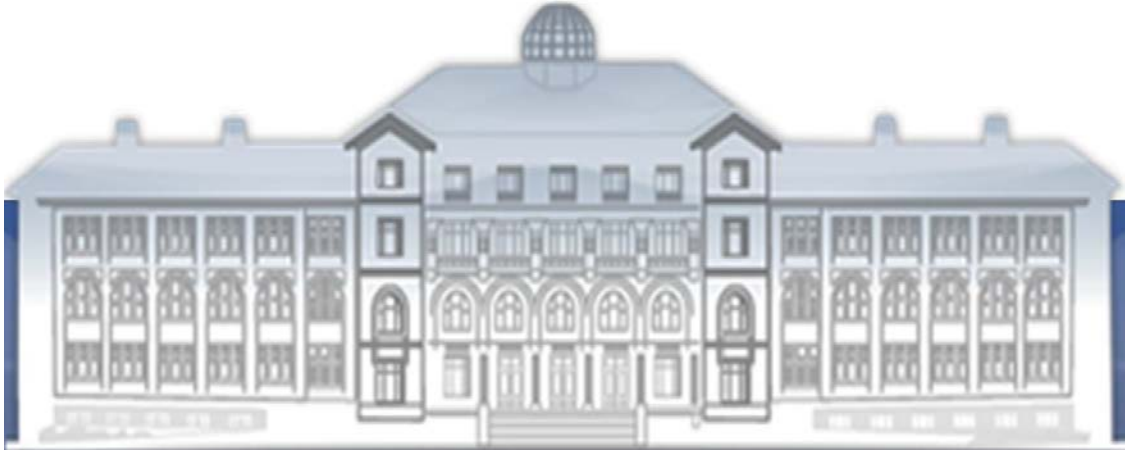
Yıl	Çalıştığı Yer	Görev
2012-2013	Gazi Üniversitesi Teknoloji Fakültesi	Serbest Öğretim Görevlisi

### Yabancı Dil

İngilizce

### Hobiler

Ney, Yüzme, Bilgisayar Teknolojisi



*GAZİ GELECEKTİR..*