

**KÜME DEĞERLİ FONKSİYONLAR İÇİN
DİFERANSİYEL HESAP**

Serkan Ali DÜZCE
Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı
HAZİRAN-2000

97004

**KÜME DEĞERLİ FONKSİYONLAR İÇİN
DİFERANSİYEL HESAP**

Serkan Ali DÜZCE
Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı
HAZİRAN-2000

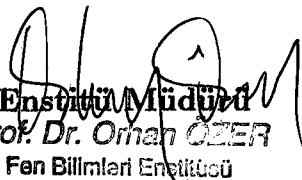
T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOĞUDAN MANTASYON MERKEZİ

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Serkan..Ali..Düzce.....'ın Küme..Değerli..Fonksiyonlar...
için..Diferansiyel..Hesap.... başlıklı ...Matematik.....
Anabilim Dalındaki, Yüksek Lisans tezi 28.07.2000 tarihinde, aşağıdaki
jüri tarafından Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav
Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

	Adı-Soyadı	İmza
Üye (Tez Danışmanı) :	Prof. Dr. Orhan Özer.....	
Üye	: Prof. Dr. Refail. Sasınoğlu.....	
Üye	: Doç. Dr. Halil..Haseynov.....	
Üye	:	
Üye	:	

Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun
02.08.2000.... tarih ve 21/2..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.


Enstitü Müdürü
Prof. Dr. Orhan ÖZER
Fen Bilimleri Enstitüsü
Müdürü

ÖZET
Yüksek Lisans Tezi

KÜME DEĞERLİ FONKSİYONLAR İÇİN
DİFERANSİYEL HESAP

SERKAN ALİ DÜZCE

Anadolu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Orhan ÖZER
2000, 95 Sayfa

Bu tezde, gerçel değerli fonksiyonların bazı özelliklerinin küme değerli dönüşümlere nasıl genelleştirilebileceği araştırılmıştır. Bu amaçla önce konveks analizin temel kavramları olan konveks fonksiyonlar, support fonksiyonu, konveks fonksiyonun subdiferansiyeli ve marjinal fonksiyonlar ile ilgili önemli teoremler incelenmiştir. Küme değerli dönüşümlerin sürekliliği, alttan-yarı sürekliliği, üstten-yarı sürekliliği hakkında bazı teoremlerin kanıtları verilmiştir. Son bölüm küme değerli dönüşümlerle ilgili araştırmaları içermektedir. Bu bölümde küme değerli dönüşümlerin sürekliliği ve türevlenebilmesi arasındaki ilişki belirlenmiş, grafiği konveks, kompakt küme değerli dönüşümlerin sürekli olduğu kanıtlanmıştır. Son olarak $\text{int}(V_*) \neq \emptyset$, $\text{int}(V^*) \neq \emptyset$ koşulunu sağlayan V_* , $V^* \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, konveks kümeleri için

$$t \rightarrow V(t) = \left(1 - \frac{t - t_*}{t^* - t_*}\right) \cdot V_* + \left(\frac{t - t_*}{t^* - t_*}\right) \cdot V^* , \quad t \in [t_*, t^*]$$

şeklinde tanımlanan $V(\cdot)$ küme değerli dönüşümü için konveks devamın varlığı kanıtlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Subdiferansiyel, Alttan-Yarı Süreklilik, Üstten-Yarı Süreklilik, Contingent Koni, Küme Değerli Dönüşümün Türevi

ABSTRACT
Master of Science Thesis

**DIFFERENTIAL CALCULUS
FOR SET-VALUED MAPS**

SERKAN ALİ DÜZCE

**Anadolu University
Graduate School of Natural And Applied Sciences
Mathematics Program**

Supervisor: Prof. Orhan ÖZER
2000, Pages 95

In this thesis, extensions of some properties of the single valued functions to set-valued maps are considered. Firstly, some basic theorems of convex analysis are presented, which are connected with notions as subdifferential of convex function, support function of sets and marginal function.

Upper and lower semi-continuity of the set-valued maps are studied. Some equivalent forms of these notions are considered. At the last chapter continuity properties of the set-valued maps are investigated. It is proved that, if the lower derivative sets of the set-valued maps are non-empty then the set-valued map is continuous. Finally, the convex continuation of the set-valued map is considered. It is showed that, if V_* , $V^* \subset \mathbb{R}^n$ are compact, convex sets, $\text{int}(V_*) \neq \emptyset$, $\text{int}(V^*) \neq \emptyset$ then the set-valued map $t \rightarrow V(t)$, defined as

$$t \rightarrow V(t) = \left(1 - \frac{t - t_*}{t^* - t_*}\right) \cdot V_* + \left(\frac{t - t_*}{t^* - t_*}\right) \cdot V^* , \quad t \in [t_*, t^*]$$

has a convex continuation.

Keywords: Subdifferential, Lower Semi-Continuity, Upper Semi-Continuity, Contingent Cone, Differential of Set-Valued Map

ÖNSÖZ

Son yıllarda, küme değerli analiz adı verilen teoriye büyük bir ilgi doğmuştur. Bilindiği gibi, klasik analizde fonksiyonlar tek değerlidir, yani belirli bir uzayın seçilmiş her bir elemanı diğer bir uzayın bir ve yalnız bir elemanına karşı gelmektedir. Küme değerli analizde fonksiyon kavramı farklı biçimde verilmiştir. Küme değerli dönüşümler, belirli bir kümenin her bir elemanına diğer bir kümenin belirli bir alt kümesini karşı getirmektedir. Küme değerli dönüşümlerin, tek değerli fonksiyonlar gibi araştırılabileceğini de belirtmek gerekir.

Günümüzde matematiğin birçok dalında, küme değerli dönüşümlerle çalışma ihtiyacı doğmuştur. Örneğin doğrusal olmayan programlama, çok ölçütlü karar verme, diferansiyel denklemler, optimal kontrol, diferansiyel oyun teorisi küme değerli dönüşümlerle ilgilenmektedir (Bkz.[1-15]). Çok geniş bir uygulama alanına sahip diferansiyel içermeler, yani sağ tarafı küme değerli dönüşüm olan diferansiyel denklemlerin araştırılması da, küme değerli analizin kavramları kullanılarak yapılmaktadır. (Bkz.[16-23])

Önceleri küme değerli analiz, konveks kümelerin ve konveks fonksiyonların özelliklerini araştıran konveks analiz araştırmaları içinde şekillenmiştir (Bkz.Ör.[1],[2]). Bu araştırmalarda konveks fonksiyonunun subdiferansiyeli tanımlanmış ve konveks fonksiyonların subdiferansiyellenebilir olduğu kanıtlanmıştır. Bundan öte, verilmiş bir konveks fonksiyonun subdiferansiyeli ile support fonksiyonunun yöne göre türevleri arasındaki bağıntı öğrenilmiştir.

Bugün küme değerli analiz, matematiğin gelişmiş teorileri arasında yerini almıştır (Bkz.[1],[4],[19],[24-27]). Küme değerli analizin temel kavramları tanımlanmış ve küme değerli dönüşümlerin özellikleri geniş kapsamlı olarak araştırılmıştır. Bu kavramlar arasında önce küme değerli dönüşümlerin, tek değerli selektörlerine değinelim. Tanım kümesindeki her bir elemana karşı gelen değer, küme değerli dönüşümün tanım kümesinin aynı elemanına karşılık getirdiği kümeye dahil olacak şekildeki tek değerli fonksiyona selektör diyoruz. Şimdiye kadar ölçülebilir, sürekli, Lipschitz, türevlenebilir vs. selektörlerin varlığı problemi bazı araştırmaların esas konusu

olmuştur (Bkz.Ör.[28-35]).

Küme değerli analizin temel kavramlarından biride integraldir. Küme değerli bir dönüşümün integrali, o dönüşümün bütün integrallenebilir selektörlerinin birleşimi şeklinde tanımlanmaktadır (Bkz.[36-40]). Ölçülebilir, sınırlı, kompakt küme değerli dönüşümlerin integralinin konveks, kompakt küme olduğu ispatlanmıştır (Bkz.[36], [37]).

Küme değerli analizin en temel konularından biriside teğetler kümesi tanımına dayanan küme değerli dönüşümlerin türevi kavramıdır. Küme değerli dönüşümün türevi, grafiği, verilen küme değerli dönüşümün tanjant konisi ile aynı olan küme değerli dönüşümdür. Araştırılan problemin özelliğine uygun olarak farklı tanjant koni tanımları kullanılabilmektedir (Bkz.[4],[18],[25],[41-43]). Ancak şu anda genel olarak kullanılan tanjant konisi tanımı ilk olarak 30'lu yıllarda ([49])'da verilmiştir.

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında yardımlarını esirgemeyen Prof.Dr.Orhan ÖZER'e ve Doç.Dr.Halik HÜSEYİNOV'a en içten teşekkürlerimi sunarım.



İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
ÖNSÖZ	iii
TEŞEKKÜR	v
İÇİNDEKİLER	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ	viii
SİMGELER DİZİNİ	ix
1 KOMPAKT KÜMELER UZAYI	1
1.1 Temel Gösterimler	1
1.2 Kümelerin Cebirsel Toplamı ve Skaler ile Çarpımı	2
1.3 Hausdorff Uzaklığı	4
2 KONVEKS ANALİZİN TEMEL KAVRAMLARI	6
2.1 Ayırma Teoremleri	6
2.2 Support Fonksiyonu	9
2.3 Konveks Fonksiyonlar	19
2.4 Konveks Fonksiyonun Yöne Göre Türevi	24
2.5 Konveks Fonksiyonun Subdiferansiyeli	27
2.6 Konveks Fonksiyonunun Yöne Göre Türevinin Subdiferansiyel ile İlişkisi	33
2.7 Marjinal Fonksiyonun Subdiferansiyeli	36
3 KÜME DEĞERLİ DÖNÜŞÜMLER	43
3.1 Süreklilik	43

3.2	Alttan-YarıSürekli ve Üstten-YarıSürekli Küme Değerli Dönüşümler, Denk Tanımlar	46
3.3	Üstten-YarıSürekli Küme Değerli Dönüşümlerin Özellikleri	58
4	KÜME DEĞERLİ DÖNÜŞÜMLERDE SÜREKLİLİK, TÜREVLENEBİLME VE KONVEKSLİK ARASINDAKİ İLİŞKİLER, KONVEKS DEVAM	64
4.1	Contingent Konilerin Tanımı ve Özellikleri	64
4.2	Küme Değerli Dönüşümler İçin Türev Tanımı	70
4.3	Küme Değerli Dönüşümlerin Sürekliliği ve Türevlenebilmesi Arasındaki Bağını	71
4.4	Örnekler	74
4.5	Grafiği Konveks, Kompakt Küme Değerli Dönüşümlerin Sürekliliği	76
4.6	Küme Değerli Dönüşümler İçin Konveks Devam	78
5	KAYNAKLAR	91

ŞEKİLLER DİZİNİ

1.1.	A ve B kümeleri arasındaki basit uzaklık	4
1.2.	$\alpha(A, B) = \max\{\beta(A, B), \beta(B, A)\}$	4
1.3.	$A, B \in K(\mathbb{R}^n)$ için $\alpha(A, B)$	5
2.1.	$ OY = 1$ birim olmak üzere $c(X, \psi_1) = OA $, $c(X, \psi_2) = - OB $	9
2.2.	Support kümesi ve support hiperdüzlemi örnekleri	10
3.1.	Üstten-yarı sürekli ve alttan-yarı sürekli fonksiyon örnekleri	47
4.1.	Contingent Koni Örnekleri	64
4.2.	Konveks Devam	90



SİMGELER DİZİNİ

$\emptyset$	: Boş küme
$B(x, r)$	: x merkezli r yarıçaplı kapalı top
$co(A)$	: A kümesinin konveks zarfı
$\alpha(A, B)$	: A ile B kümesi arasındaki Hausdorff uzaklığı
$c(A, \psi)$	: Support fonksiyonu
$f'(x; h)$	: f fonksiyonunun x noktasında, h yönündeki türevi
$\partial f(x)$	: f fonksiyonunun x noktasındaki subdiferansiyeli
$D^U W(t, x)$	: W küme değerli dönüşümünün (t, x) noktasındaki üst diferansiyeli
$D^L W(t, x)$	: W küme değerli dönüşümünün (t, x) noktasındaki alt diferansiyeli
$K(\mathbb{R}^n)$	: $\mathbb{R}^n$ 'nin boş olmayan, kompakt alt kümelerinin uzayı
$KV(\mathbb{R}^n)$	: $\mathbb{R}^n$ 'nin boş olmayan, kompakt, konveks alt kümelerinin uzayı
$T_K^U(x)$	: K kümesinin x noktasındaki üst contingent konisi
$T_K^L(x)$	: K kümesinin x noktasındaki alt contingent konisi

1 KOMPAKT KÜMELER UZAYI

1.1 Temel Gösterimler

$\mathbb{R}^n$ ile n-boyutlu Öklid uzayını göstereceğiz.

$x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ için

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n \quad x \text{ ve } y \text{ vektörlerinin iç çarpımı,}$$

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \quad x \text{ vektörünün Öklid normu,}$$

$$d(x, y) = \|x - y\| \quad x \text{ ve } y \text{ vektörleri arasındaki uzaklıktır.}$$

$x, y, z, \dots$ harfleriyle $\mathbb{R}^n$ 'in elemanlarını, $A, B, C, \dots$ ile $\mathbb{R}^n$ 'in altkümelerini, $\bar{A}$ ile A 'nın kapamışını, ∂A ile A 'nın sınırını, $\text{int}(A)$ ile A 'nın içini, $\text{co}(A)$ ile A 'nın konveks zarfını göstereceğiz.

$A \subset \mathbb{R}^n$ kümesinin konveks zarfını bulmak için aşağıdaki teoremi kullanabiliriz.

Teorem 1.1.1 (Carathedory Teoremi [2]). $A \subset \mathbb{R}^n$ olmak üzere

$$\text{co}(A) = \left\{ x = \sum_{i=0}^n \alpha_i \cdot x_i \mid x_i \in A, \alpha_i \geq 0, \sum_{i=0}^n \alpha_i = 1 \right\}$$

dır.

$A, B \subset \mathbb{R}^n$ için

$$\|A\| = \sup_{a \in A} \|a\|$$

ile A kümesinin normunu,

$$d(A, B) = \inf_{a \in A, b \in B} d(a, b)$$

ile A ile B kümesi arasındaki basit uzaklığı göstereceğiz.

$$B(a, \varepsilon) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| \leq \varepsilon \}$$

ile a noktasının kapalı ε komşuluğunu,

$$B(A, \varepsilon) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, A) \leq \varepsilon \}$$

ile A kümesinin kapalı ε komşuluğunu göstereceğiz.

$\mathbb{R}^n$ 'de tanımlı bir f fonksiyonu ve $A \subset \mathbb{R}^n$ altkümeleri için $f(A)$ kümesi

$$f(A) = \bigcup_{a \in A} f(a)$$

olarak tanımlanır ve $f(A)$ kümesine A kümesinin görüntüsü adı verilir.

$K(\mathbb{R}^n)$ ile $\mathbb{R}^n$ 'in tüm boş olmayan, kompakt altkümeleri ailesini, $KV(\mathbb{R}^n)$ ile de $\mathbb{R}^n$ 'in tüm boş olmayan, kompakt, konveks altkümeleri ailesini göstereceğiz. Açık ki,

$$KV(\mathbb{R}^n) \subset K(\mathbb{R}^n)$$

dir. Şimdi sonlu boyutlu uzaylarda kompaktlık ile ilgili bir teorem verelim.

Teorem 1.1.2. $A \subset \mathbb{R}^n$ olsun. A kümesinin kompakt olması için gerekli ve yeterli koşul A kümesinin kapalı ve sınırlı olmasıdır.

1.2 Kümelerin Cebirsel Toplamı ve Skaler ile Çarpımı

Kümeler için cebirsel toplam ve skaler ile çarpmanın tanımını verip, bazı özelliklerini inceleyelim.

Tanım 1.2.1. $A, B \subset \mathbb{R}^n$ olmak üzere A ile B kümesinin cebirsel toplamı

$$A + B = \{ a + b \mid a \in A, b \in B \}$$

olarak tanımlanır.

$K(\mathbb{R}^n)$ ve $KV(\mathbb{R}^n)$ küme aileleri, kümelerin cebirsel toplamı işlemine göre invarianttır. Yani

$$A, B \in K(\mathbb{R}^n) \Rightarrow A + B \in K(\mathbb{R}^n)$$

$$A, B \in KV(\mathbb{R}^n) \Rightarrow A + B \in KV(\mathbb{R}^n)$$

$A, B, C \in K(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere

$$1. A + B = B + A$$

$$2. A + (B + C) = (A + B) + C$$

$$3. A + \{0\} = A \quad (0 \in \mathbb{R}^n)$$

eşitlikleri kolayca doğrulanır.

Tanım 1.2.2. $A \subset \mathbb{R}^n$ olmak üzere A kümesinin $\lambda \in \mathbb{R}$ ile çarpımı

$$\lambda A = \{ \lambda \cdot a \mid a \in A \}$$

olarak tanımlanır.

$$A \in K(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \lambda A \in K(\mathbb{R}^n)$$

$$A \in KV(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \lambda A \in KV(\mathbb{R}^n)$$

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ve $A, B \in K(\mathbb{R}^n)$ için aşağıdaki önermeler doğrudur.

$$1. \alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$$

$$2. 1 \cdot A = A$$

$$3. \alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$$

$$4. (\alpha + \beta)A \subset \alpha A + \beta A$$

$$(\alpha, \beta \geq 0, A \in KV(\mathbb{R}^n) \text{ ise } (\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A)$$

$A + (-1) \cdot A = \{0\}$ eşitliği geçerli değildir. Bu yüzden $K(\mathbb{R}^n)$ ve $KV(\mathbb{R}^n)$ vektör uzayı değildir.

Tanım 1.2.3. $A, B \subset \mathbb{R}^n$ olsun.

$$A \overset{*}{-} B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x + B \subset A\}$$

şeklinde tanımlanan kümeye A ve B kümelerinin Pontryagin anlamında farkı denir.

Eğer $A \overset{*}{-} B = C$ ise $B + C \subset A$ olur.

1.3 Hausdorff Uzaklığı

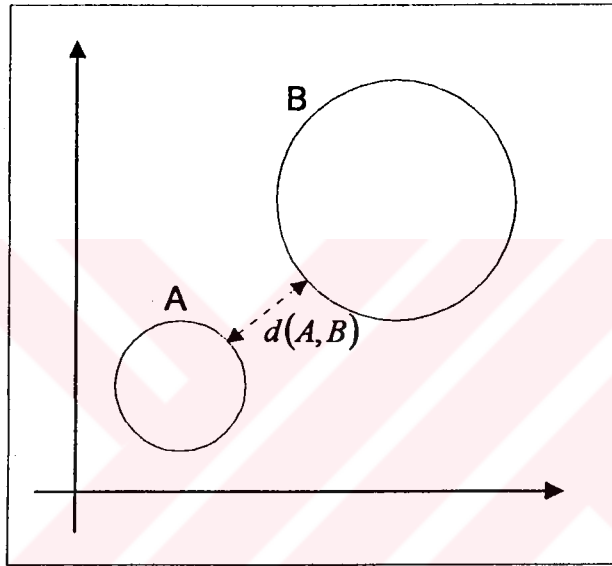
$A, B \subset K(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere

$$\beta(A, B) = \sup_{a \in A} d(a, B)$$

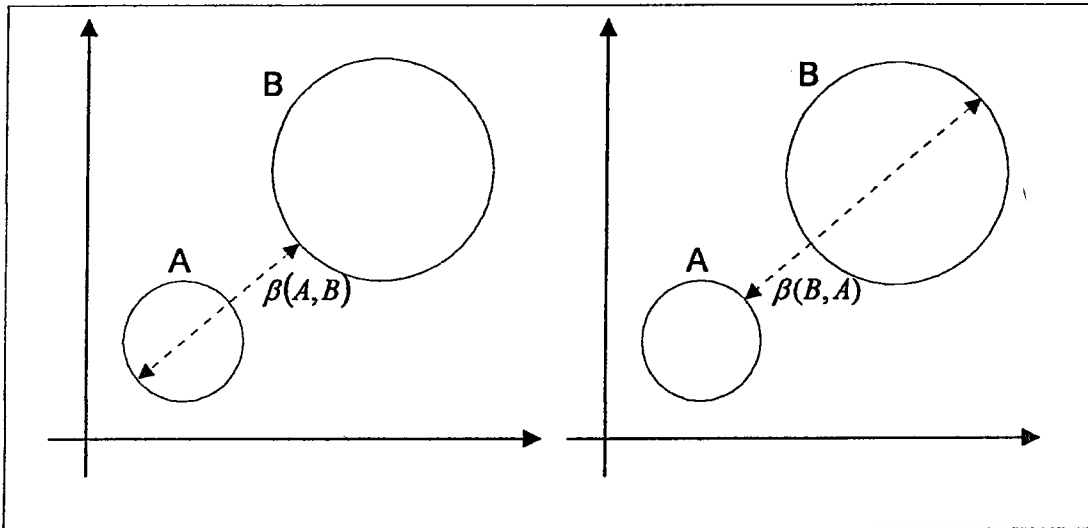
$$\beta(B, A) = \sup_{b \in B} d(b, A)$$

$$\alpha(A, B) = \alpha(B, A) = \max \{ \beta(A, B), \beta(B, A) \}$$

ile tanımlanan uzaklığa da Hausdorff uzaklığı denir.



Şekil 1.1. A ve B kümeleri arasındaki basit uzaklık



Şekil 1.2. $\alpha(A, B) = \max\{\beta(A, B), \beta(B, A)\}$

$A, B \in K(\mathbb{R}^n)$ için Hausdorff uzaklığını

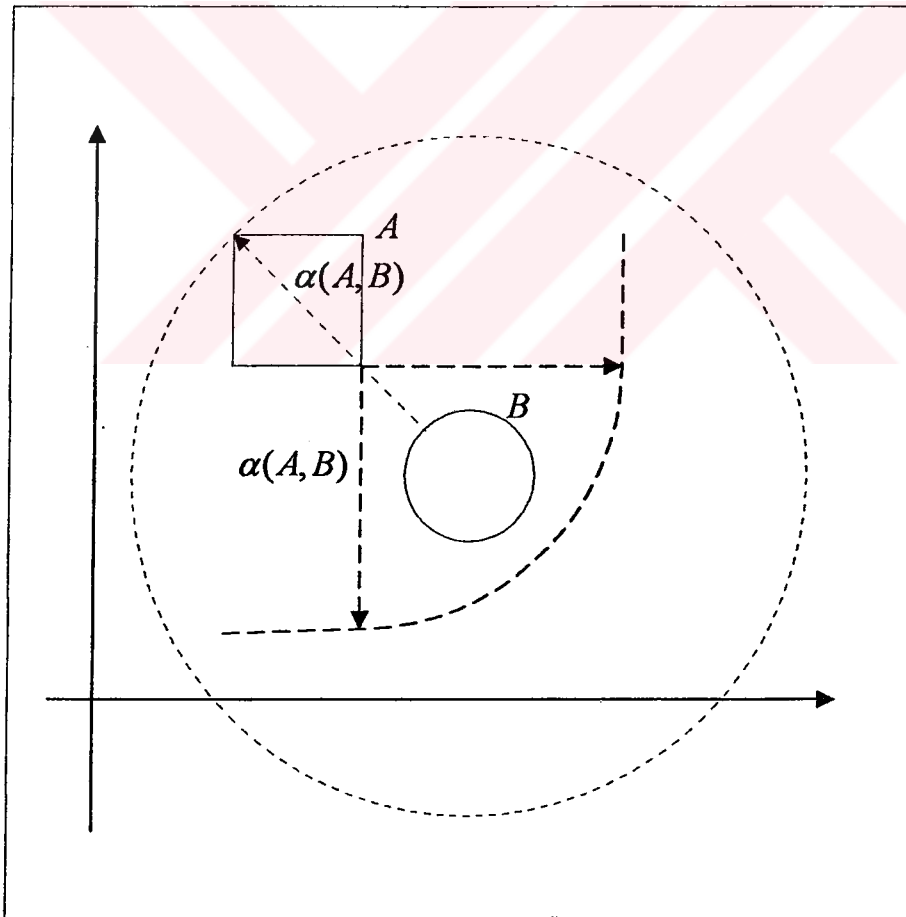
$$\alpha(A, B) = \min \{ r \geq 0 \mid A \subset B(B, r), B \subset B(A, r) \}$$

şeklinde verebiliriz.

$A, B, C \in K(\mathbb{R}^n)$ için aşağıdaki özellikler sağlanır.

1. $\alpha(A, B) \geq 0$
2. $\alpha(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$
3. $\alpha(A, B) = \alpha(B, A)$
4. $\alpha(A, B) \leq \alpha(A, C) + \alpha(C, B)$

Buna göre $K(\mathbb{R}^n)$ bir metrik uzaydır.



Şekil 1.3. $A, B \in K(\mathbb{R}^n)$ için $\alpha(A, B)$

2 KONVEKS ANALİZİN TEMEL KAVRAMLARI

Küme değerli dönüşümlerin ve diferansiyeli olmayan fonksiyonların araştırılmasında konveks kümeler ve konveks fonksiyonlar önemli bir yer tutmaktadır. Konveks kümelerin ve konveks fonksiyonların özellikleri konveks analiz kapsamında araştırılmaktadır. Bu bölümde konveks analizin bazı tanımlarını verip, özelliklerini araştıracağız.

2.1 Ayırma Teoremleri

Teorem 2.1.1. [6] $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ kapalı, konveks küme, $x_0 \notin \Omega$ olsun. O zaman $\forall x \in \Omega$ için

$$\langle x - x_0, h_0 \rangle \leq -\rho_0$$

koşulunu sağlayan, $\|h_0\| = 1$ olacak şekilde $\exists h_0 \in \mathbb{R}^n$ ve $\rho_0 > 0$ sayısı vardır.

Kanıt. Ω kapalı, konveks küme olduğundan

$$\min_{z \in \Omega} \|x_0 - z\|^2 = \|x_0 - z_0\|^2 = \rho_0^2$$

olacak şekilde tek bir $z_0 \in \Omega$ vardır. $x_0 \notin \Omega$ ve Ω kapalı küme olduğu için $\rho_0 > 0$ olur.

$$h_0 = -\frac{1}{\rho_0} \cdot (z_0 - x_0) \quad (2.1)$$

olarak belirleyelim. Şimdi $\forall x \in \Omega$ için

$$\langle x - x_0, h_0 \rangle \leq -\rho_0 \quad (2.2)$$

olduğunu kanıtlayalım. Tersini varsayalım. O zaman

$$\langle x_* - x_0, h_0 \rangle = -b_0 > -\rho_0 \quad (2.3)$$

olacak şekilde $\exists x_* \in \Omega$ vardır. $\alpha \in [0, 1]$ olmak üzere

$$x_\alpha = \alpha \cdot x_* + (1 - \alpha) \cdot z_0 = z_0 + \alpha \cdot (x_* - z_0)$$

diyelim. $x_\alpha \in \Omega$ 'dır.

$$\begin{aligned}
\|x_0 - x_\alpha\|^2 &= \|x_0 - [z_0 + \alpha \cdot (x_* - z_0)]\|^2 \\
&= \langle x_0 - z_0 - \alpha \cdot (x_* - z_0), x_0 - z_0 - \alpha \cdot (x_* - z_0) \rangle \\
&= \|x_0 - z_0\|^2 - 2\alpha \cdot \langle x_0 - z_0, x_* - z_0 \rangle + \alpha^2 \|x_* - z_0\|^2 \\
&= \rho_0^2 - 2\alpha [\langle x_* - x_0, x_0 - z_0 \rangle - \langle z_0 - x_0, x_0 - z_0 \rangle] + \alpha^2 \|x_* - z_0\|^2
\end{aligned}$$

(2.1) ve (2.3)'den

$$\begin{aligned}
-b_0 &= \langle x_* - x_0, h_0 \rangle \\
&= \left\langle x_* - x_0, -\frac{1}{\rho_0} \cdot (z_0 - x_0) \right\rangle \\
&= -\frac{1}{\rho_0} \cdot \langle x_* - x_0, z_0 - x_0 \rangle
\end{aligned}$$

buradan

$$-b_0\rho_0 = \langle x_* - x_0, x_0 - z_0 \rangle \quad (2.4)$$

olur. $\langle z_0 - x_0, x_0 - z_0 \rangle = -\|x_0 - z_0\|^2 = -\rho_0^2$ olarak seçilmişti. (2.4) eşitliğini kullanırsak

$$\|x_0 - x_\alpha\|^2 = \rho_0^2 - 2\alpha [-b_0\rho_0 + \rho_0^2] + \alpha^2 \|x_* - z_0\|^2 \quad (2.5)$$

olduğu elde edilir. (2.3) eşitsizliğinden $\rho_0 > b_0$ olduğu için $\rho_0^2 - b_0\rho_0 > 0$ olur. $\beta = \rho_0^2 - b_0\rho_0$, $\gamma = \|x_* - z_0\|^2$ diyelim. $\beta > 0$, $\gamma \geq 0$ ve (2.5) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
\|x_0 - x_\alpha\|^2 &= \rho_0^2 - 2\alpha\beta + \alpha^2\gamma \\
&= \rho_0^2 + \alpha[\alpha\gamma - 2\beta]
\end{aligned}$$

olur. $\alpha\gamma - 2\beta < 0$ olacak şekilde $\alpha \in (0, 1)$ seçersek, böyle bir α için

$$\|x_0 - x_\alpha\|^2 < \rho_0^2 \quad (2.6)$$

olur. Ancak bu sonuç

$$\min_{z \in \Omega} \|x_0 - z\|^2 = \|x_0 - z_0\|^2 = \rho_0^2$$

oluşuyla çelişir. O halde varsayımımız yanlıştır. Yani $\forall x \in \Omega$ için

$$\langle x - x_0, h_0 \rangle \leq -\rho_0$$

koşulu sağlanır. $\square$

Sonuç 1. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ kapalı, konveks küme, $x_0 \in \partial\Omega$ olsun. O zaman $\forall x \in \Omega$ için

$$\langle x - x_0, h_0 \rangle \leq 0$$

koşulunu sağlayan, $\|h_0\| = 1$ olacak şekilde $\exists h_0 \in \mathbb{R}^n$ vardır.

Kanıt. $x_0 \in \partial\Omega$ olduğundan $\forall k \in \mathbb{N}$ için $x_k \notin \Omega$, $x_k \rightarrow x_0$ olacak şekilde bir $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ dizisi vardır. $\forall k \in \mathbb{N}$ için $x_k \notin \Omega$ olduğuna göre

$$\alpha_k = \min_{z \in \Omega} \|x_k - z\| = \|x_k - z_k\| > 0,$$

$$h_k = -\frac{z_k - x_k}{\|z_k - x_k\|}$$

olmak üzere $\forall x \in \Omega$ için

$$\langle x - x_k, h_k \rangle \leq -\alpha_k \quad (2.7)$$

olur.

$$\alpha_k = \min_{z \in \Omega} \|x_k - z\| \leq \|x_0 - x_k\|$$

ve $x_k \rightarrow x_0$ olduğu için $\alpha_k \rightarrow 0$. $\forall k \in \mathbb{N}$ için $\|h_k\| = \left\| -\frac{z_k - x_k}{\|z_k - x_k\|} \right\| = 1$ olduğu için $\{h_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ dizisinden yakınsak bir alt dizi seçilebilir. Genelliği bozmadan $h_k \rightarrow h_0$ olduğunu varsayalım. O zaman $\|h_0\| = 1$ olur. (2.7) eşitsizliğinde limit alırsak $\forall x \in \Omega$ için

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \langle x - x_k, h_k \rangle &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} -\alpha_k \\ \langle x - x_0, h_0 \rangle &\leq 0 \end{aligned}$$

olduğu elde edilir. $\square$

2.2 Support Fonksiyonu

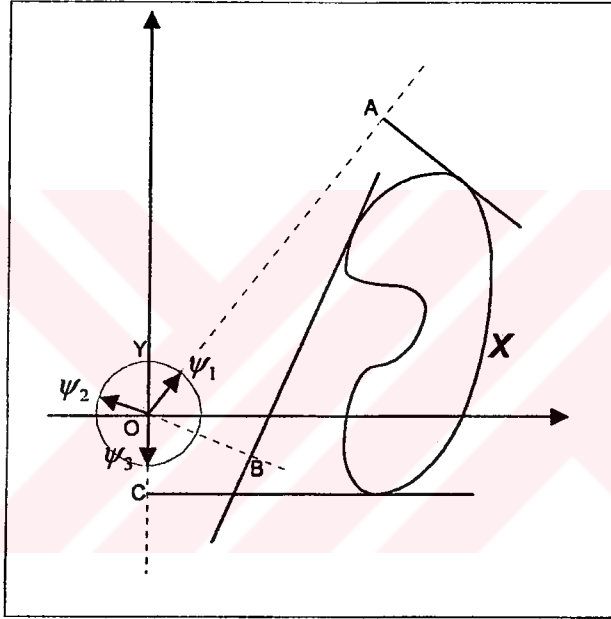
Bir kümenin support fonksiyonunun tanımını verelim.

Tanım 2.2.1. $X \subset \mathbb{R}^n$ için X kümesinin support fonksiyonu

$$c(X, \cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

$$\psi \rightarrow c(X, \psi) = \sup_{x \in X} \langle x, \psi \rangle$$

olarak tanımlanır.



Şekil 2.1. $|OY| = 1$ birim olmak üzere $c(X, \psi_1) = |OA|$, $c(X, \psi_2) = -|OB|$,
 $c(X, \psi_3) = |OC|$

Eğer $X \subset K(\mathbb{R}^n)$ ise support fonksiyonu

$$c(X, \psi) = \max_{x \in X} \langle x, \psi \rangle$$

olarak tanımlanır.

Şimdi support vektörü ve support hiperdüzleminin tanımlarını verelim.

Tanım 2.2.2. $\psi_0 \in \mathbb{R}^n, x_0 \in X$ için $c(X, \psi_0) = \langle x_0, \psi_0 \rangle$ koşulu sağlanıyorsa ψ_0 'a X kümesinin x_0 noktasındaki support vektörü denir.

Tanım 2.2.3.

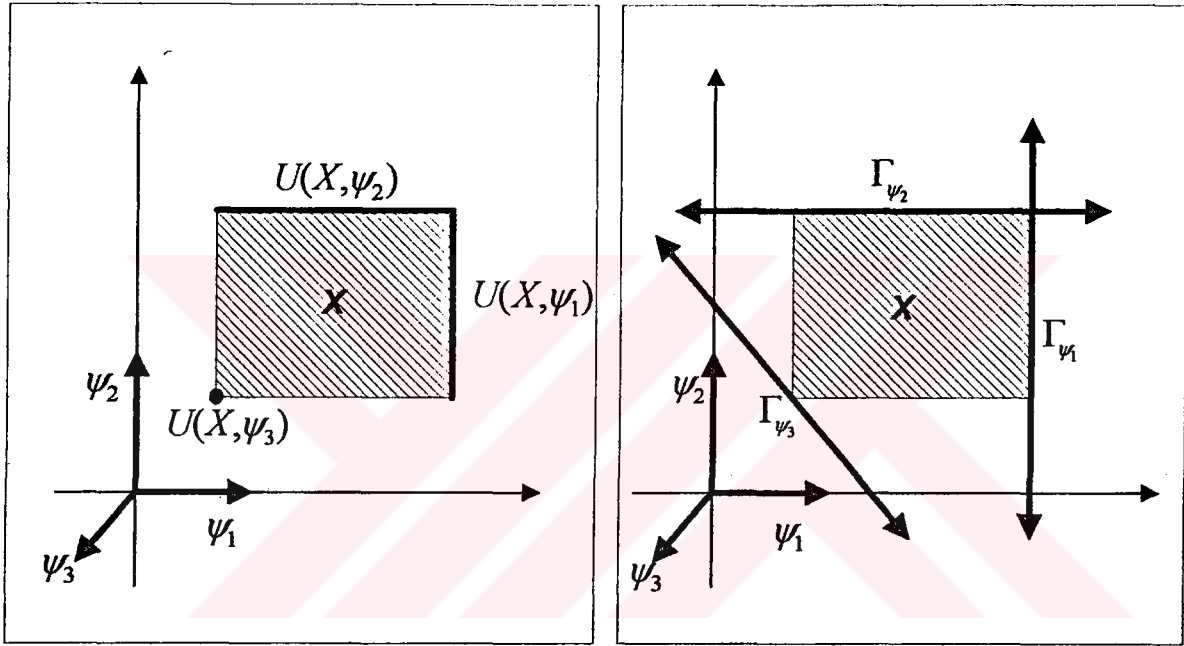
$$U(X, \psi_0) = \{ x_0 \in X \mid c(X, \psi_0) = \langle x_0, \psi_0 \rangle \}$$

kümesine ψ_0 vektörünün support kümesi adı verilir.

Tanım 2.2.4. $x_0 \in U(X, \psi_0)$ olmak üzere,

$$\Gamma_{\psi_0} = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, \psi_0 \rangle = \langle x_0, \psi_0 \rangle \}$$

kümesine X kümesinin ψ_0 vektörü yönündeki support hiperdüzlemi adı verilir.



Şekil 2.2. Support kümesi ve support hiperdüzlemi örnekleri

$U(X, \psi_0) = X \cap \Gamma_{\psi_0}$ olduğu ispatlanabilir.

Tanım 2.2.5. $K \subset \mathbb{R}^n, \forall x \in K$ ve $\lambda \geq 0$ için $\lambda x \in K$ ise K kümesine koni adı verilir. Eğer K konisi konveks bir küme ise K konisine konveks koni denir.

Tanım 2.2.6. Verilen bir $x_0 \in \mathbb{R}^n$ için $c(X, \psi_0) = \langle x_0, \psi_0 \rangle$ koşulunu sağlayan ψ_0 vektörlerinin kümesine, x_0 noktasında X kümesinin support koni adı verilir ve $N(X, x_0)$ ile gösterilir.

Support fonksiyonunun özellikleri

Şimdi bir kümenin support fonksiyonunun özelliklerini araştıralım (Bkz.[2], [44]).

$X \subset K(\mathbb{R}^n)$ olsun. O zaman

1. $c(X, \cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ homojen fonksiyondur. Yani $\forall \lambda \geq 0$ ve $\psi_0 \in \mathbb{R}^n$ için

$$c(X, \lambda \psi_0) = \lambda c(X, \psi_0)$$

Kanıt. $\psi_0 \in \mathbb{R}^n$, $\lambda > 0$ olsun. O zaman

$$c(X, \lambda \cdot \psi_0) = \max_{x \in X} \langle x, \lambda \cdot \psi_0 \rangle = \lambda \max_{x \in X} \langle x, \psi_0 \rangle = \lambda c(X, \psi_0)$$

olur. $\lambda = 0$ iken

$$c(X, \lambda \cdot \psi_0) = c(X, 0) = \max_{x \in X} \langle x, 0 \rangle = 0 = 0 c(X, \psi_0)$$

olur. O halde $\lambda \geq 0$ iken $c(X, \lambda \cdot \psi_0) = \lambda c(X, \psi_0)$ olur. $\square$

2. $c(X, \cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ yarı-additive fonksiyondur. Yani $\forall \psi_1, \psi_2 \in \mathbb{R}^n$ için

$$c(X, \psi_1 + \psi_2) \leq c(X, \psi_1) + c(X, \psi_2)$$

Kanıt. $\psi_1, \psi_2 \in \mathbb{R}^n$ alalım.

$$\begin{aligned} c(X, \psi_1 + \psi_2) &= \max_{x \in X} \langle x, \psi_1 + \psi_2 \rangle = \max_{x \in X} [\langle x, \psi_1 \rangle + \langle x, \psi_2 \rangle] \\ &\leq \max_{x \in X} \langle x, \psi_1 \rangle + \max_{x \in X} \langle x, \psi_2 \rangle \\ &= c(X, \psi_1) + c(X, \psi_2) \end{aligned}$$

$\square$

3. $X_1, X_2 \in K(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere

$$c(X_1 + X_2, \psi) = c(X_1, \psi) + c(X_2, \psi)$$

Kanıt. $X_1, X_2 \in K(\mathbb{R}^n)$ alalım. $X_1, X_2 \in K(\mathbb{R}^n)$ olduğu için $X_1 + X_2 \in K(\mathbb{R}^n)$ olur. $\forall \psi \in \mathbb{R}^n$ için

$$\begin{aligned} c(X_1 + X_2, \psi) &= \max_{x \in X_1 + X_2} \langle x, \psi \rangle = \max_{x_1 \in X_1, x_2 \in X_2} \langle x_1 + x_2, \psi \rangle \\ &= \max_{x_1 \in X_1, x_2 \in X_2} [\langle x_1, \psi \rangle + \langle x_2, \psi \rangle] \\ &= \max_{x_1 \in X_1} \langle x_1, \psi \rangle + \max_{x_2 \in X_2} \langle x_2, \psi \rangle \\ &= c(X_1, \psi) + c(X_2, \psi) \end{aligned}$$

$\square$

4. $X \in K(\mathbb{R}^n)$, $\lambda \geq 0$ için

$$c(\lambda X, \psi) = c(X, \lambda \psi) = \lambda c(X, \psi)$$

5. $X \in K(\mathbb{R}^n)$, A , $n \times n$ tipinde bir matris olsun. O halde

$$c(AX, \psi) = c(X, A^* \psi)$$

(A^* , A matrisinin transpozu)

Kanıt. A , $n \times n$ tipinde bir matris olsun. $\forall \psi \in \mathbb{R}^n$ için

$$c(AX, \psi) = \max_{x \in X} \langle Ax, \psi \rangle = \max_{x \in X} \langle x, A^* \psi \rangle = c(X, A^* \psi)$$

□

6. $X \in K(\mathbb{R}^n)$ ve $c(X, \psi)$ support fonksiyonu olsun.

$$co(X) = \bigcap_{\psi \in S} \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, \psi \rangle \leq c(X, \psi) \}$$

$$(S = \{ \psi \in \mathbb{R}^n \mid \|\psi\| = 1 \})$$

Buradan $c(co(X), \psi) = c(X, \psi)$ olduğu çıkar.

Kanıt. $x_* \in coX$, $\psi \in S$ alalım. Caratheodory teoremine göre $\forall 0 \leq i \leq n$ için $\alpha_i \geq 0$, $x_i \in X$, $\sum_{i=0}^n \alpha_i = 1$, olmak üzere $x_* = \sum_{i=0}^n \alpha_i \cdot x_i$ şeklinde yazılabilir.

O zaman

$$\langle x_*, \psi \rangle = \left\langle \sum_{i=0}^n \alpha_i \cdot x_i, \psi \right\rangle = \sum_{i=0}^n \alpha_i \langle x_i, \psi \rangle$$

$0 \leq i \leq n$ için $x_i \in X$ olduğundan $\langle x_i, \psi \rangle \leq c(X, \psi)$ olur. Buradan $\forall \psi \in S$ için

$$\langle x_*, \psi \rangle = \sum_{i=0}^n \alpha_i \langle x_i, \psi \rangle \leq \sum_{i=0}^n \alpha_i c(X, \psi) = c(X, \psi) \sum_{i=0}^n \alpha_i = c(X, \psi)$$

$$\langle x_*, \psi \rangle \leq c(X, \psi)$$

olduğu elde edilir. $\psi \in S$ keyfi seçildiğinden $x_* \in \bigcap_{\psi \in S} \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x_*, \psi \rangle \leq c(X, \psi)\}$ olur. O halde

$$coX \subset \bigcap_{\psi \in S} \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x_*, \psi \rangle \leq c(X, \psi)\} \quad (2.8)$$

Şimdi

$$x_* \in \bigcap_{\psi \in S} \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, \psi \rangle \leq c(X, \psi)\} \quad (2.9)$$

alalım. $x_* \notin coX$ olduğunu varsayalım. O zaman ayırma teoremine göre $\exists \psi_* \in S$ ve $\exists \alpha > 0$ vardır $\ni \forall x \in coX$ için

$$\langle x - x_*, \psi_* \rangle \leq -\alpha$$

$$\langle x, \psi_* \rangle \leq \langle x_*, \psi_* \rangle - \alpha$$

$$\max_{x \in coX} \langle x, \psi_* \rangle \leq \langle x_*, \psi_* \rangle - \alpha$$

olur. $\max_{x \in X} \langle x, \psi_* \rangle \leq \max_{x \in coX} \langle x, \psi_* \rangle$ olduğundan $\psi_* \in S$ için

$$c(X, \psi_*) \leq \langle x_*, \psi_* \rangle - \alpha < \langle x_*, \psi_* \rangle$$

olduğu elde edilir. Bu ise (2.8) ile çelişir. O halde $x_* \in coX$, yani

$$\bigcap_{\psi \in S} \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, \psi \rangle \leq c(X, \psi)\} \subset coX \quad (2.10)$$

olur. (2.8) ve (2.10)'dan

$$coX = \bigcap_{\psi \in S} \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, \psi \rangle \leq c(X, \psi)\}$$

olduğu çıkar. □

7. $X_1, X_2 \in K(\mathbb{R}^n)$ olsun. $X_1 = X_2$ ise $\forall \psi \in \mathbb{R}^n$ için

$$c(X_1, \psi) = c(X_2, \psi)$$

olur.

Tersine $\forall \psi \in \mathbb{R}^n$ için $c(X_1, \psi) = c(X_2, \psi)$ ise

$$co(X_1) = co(X_2)$$

olur.

Sonuç: $X_1, X_2 \in KV(\mathbb{R}^n)$ olsun. $X_1 = X_2 \Leftrightarrow \forall \psi \in \mathbb{R}^n$ için $c(X_1, \psi) = c(X_2, \psi)$

8. $X_1, X_2 \in K(\mathbb{R}^n)$ ve $X_1 \subset X_2$ olsun. Bu durumda $\forall \psi \in \mathbb{R}^n$ için

$$c(X_1, \psi) \leq c(X_2, \psi)$$

Tersine $\forall \psi \in \mathbb{R}^n$ için $c(X_1, \psi) \leq c(X_2, \psi)$ oluyorsa

$$co(X_1) \subset co(X_2)$$

olur.

Kanıt. $X_1, X_2 \in K(\mathbb{R}^n)$ alalım. $X_1 \subset X_2$ ise $\forall \psi \in \mathbb{R}^n$ için

$$c(X_1, \psi) = \max_{x \in X_1} \langle x, \psi \rangle \leq \max_{x \in X_2} \langle x, \psi \rangle = c(X_2, \psi)$$

olur. Tersine $\forall \psi \in \mathbb{R}^n$ için $c(X_1, \psi) \leq c(X_2, \psi)$ olduğunu varsayalım. $x \in coX_1$ alalım. 6.özellğe göre $\forall \psi \in S$ için

$$\langle x, \psi \rangle \leq c(X_1, \psi) \leq c(X_2, \psi)$$

olur. O zaman $x \in coX_2$ 'dir. Yani $coX_1 \subset coX_2$. □

Sonuç 1: $X_1, X_2 \in KV(\mathbb{R}^n)$ olsun. $X_1 \subset X_2 \Leftrightarrow \forall \psi \in \mathbb{R}^n$ için $c(X_1, \psi) \leq c(X_2, \psi)$

Sonuç 2: $X \in K(\mathbb{R}^n)$ ve $\forall x \in X, \forall \psi \in \mathbb{R}^n$ için

$$\langle x, \psi \rangle \leq c(X, \psi)$$

Tersine $x \in \mathbb{R}^n$ olsun. Eğer $\forall \psi \in \mathbb{R}^n$ için

$$\langle x, \psi \rangle \leq c(X, \psi)$$

oluyorsa $x \in co(X)$

Sonuç 3: $X \in KV(\mathbb{R}^n)$ olsun.

$$x \in X \Leftrightarrow \forall \psi \in \mathbb{R}^n \text{ için } \langle x, \psi \rangle \leq c(X, \psi)$$

9. $X \in K(\mathbb{R}^n)$ olsun. Eğer $x \in int(X)$ ise $\forall \psi \in S$ için

$$\langle x, \psi \rangle < c(X, \psi)$$

Tersine $\forall \psi \in S$ için

$$\langle x, \psi \rangle < c(X, \psi)$$

ise $x \in int\ co(X)$

Kanıt. $x_* \in int X$ olsun. O zaman $\exists \varepsilon > 0$ için $x_* + \varepsilon \cdot B \subset X$ olur. Şimdi keyfi $\psi \in S$ alalım. $x_* + \varepsilon \cdot \psi \in X$ olur.

$$\langle x_*, \psi \rangle < \langle x_*, \psi \rangle + \varepsilon = \langle x_* + \varepsilon \cdot \psi, \psi \rangle \leq \max_{x \in X} \langle x, \psi \rangle = c(X, \psi)$$

Yani $\forall \psi \in S$ için

$$\langle x_*, \psi \rangle < c(X, \psi)$$

olur.

Şimdi $\forall \psi \in S$ için $\langle x_*, \psi \rangle < c(X, \psi)$ olsun. $\langle x_*, \psi \rangle - c(X, \psi)$ sürekli fonksiyondur. S kompakt olduğundan $\exists \varepsilon > 0$ vardır $\ni \psi \in S$ ve $\forall x \in x_* + \varepsilon \cdot B$ için $\langle x, \psi \rangle - c(X, \psi) \leq 0$ olur. O zaman $\forall \psi \in S$ ve $\forall x \in x_* + \varepsilon \cdot B$ için $\langle x, \psi \rangle \leq c(X, \psi)$ olur. 6.özellığe göre $x_* + \varepsilon \cdot B \subset coX$ olur. O zaman $x_* \in int\ co(X)$ olduğu elde edilir. $\square$

Sonuç: $X \in KV(\mathbb{R}^n)$ olsun. $x \in int(X) \Leftrightarrow \forall \psi \in S$ için $\langle x, \psi \rangle < c(X, \psi)$

10. $X_1, X_2 \in K(\mathbb{R}^n)$, $\psi_1, \psi_2 \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere

$$|c(X_1, \psi_1) - c(X_2, \psi_2)| \leq |\psi_0| \cdot \alpha(X_1, X_2) + \|X_0\| \cdot |\psi_1 - \psi_2|$$

$$(|\psi_0| = \max\{|\psi_1|, |\psi_2|\}, \|X_0\| = \max\{\|X_1\|, \|X_2\|\})$$

Kanıt. $\psi_1, \psi_2 \in \mathbb{R}^n$ alalım.

$$c(X_1, \psi_1) - c(X_2, \psi_2) = \max_{x_1 \in X_1} \langle x_1, \psi_1 \rangle - \max_{x_2 \in X_2} \langle x_2, \psi_2 \rangle$$

olur. $\max_{x_1 \in X_1} \langle x_1, \psi_1 \rangle = \langle x_*, \psi_1 \rangle$ olacak şekilde bir $x_* \in X_1$ ve $\|x_* - x^*\| \leq \alpha(X_1, X_2)$ ¹ olacak şekilde bir $x^* \in X_2$ aldığımızı varsayalım. $x^* \in X_2$ olduğundan

$$\max_{x_2 \in X_2} \langle x_2, \psi_2 \rangle \geq \langle x^*, \psi_2 \rangle$$

olur. O zaman

$$\begin{aligned} c(X_1, \psi_1) - c(X_2, \psi_2) &\leq \langle x_*, \psi_1 \rangle - \langle x^*, \psi_2 \rangle \\ &= \langle x_*, \psi_1 \rangle - \langle x_*, \psi_2 \rangle + \langle x_*, \psi_2 \rangle - \langle x^*, \psi_2 \rangle \\ &= \langle x_*, \psi_1 - \psi_2 \rangle + \langle x_* - x^*, \psi_2 \rangle \\ &\leq \|x_*\| \|\psi_1 - \psi_2\| + \|x_* - x^*\| \|\psi_2\| \\ &\leq \max\{\|X_1\|, \|X_2\|\} \|\psi_1 - \psi_2\| \\ &\quad + \max\{\|\psi_1\|, \|\psi_2\|\} \|x_* - x^*\| \\ &= \|X_0\| \|\psi_1 - \psi_2\| + \|\psi_0\| \alpha(X_1, X_2) \end{aligned}$$

olur. Yani

$$c(X_1, \psi_1) - c(X_2, \psi_2) \leq \|X_0\| \|\psi_1 - \psi_2\| + \|\psi_0\| \alpha(X_1, X_2) \quad (2.11)$$

olduğu elde edilir.

Şimdi

$$c(X_2, \psi_2) - c(X_1, \psi_1) \leq \|X_0\| \|\psi_1 - \psi_2\| + \|\psi_0\| \alpha(X_1, X_2)$$

olduğunu gösterelim. $\max_{x_2 \in X_2} \langle x_2, \psi_2 \rangle = \langle x^*, \psi_2 \rangle$ olacak şekilde bir $x^* \in X_2$ ve $\|x_* - x^*\| \leq \alpha(X_1, X_2)$ olacak şekilde bir $x_* \in X_1$ aldığımızı varsayalım. $x_* \in X_1$ olduğundan

$$\max_{x_1 \in X_1} \langle x_1, \psi_1 \rangle \geq \langle x_*, \psi_1 \rangle$$

$$^1\alpha(X_1, X_2) = \max \left\{ \max_{x_1 \in X_1} d(x_1, X_2), \max_{x_2 \in X_2} d(x_2, X_1) \right\}$$

olur. O zaman

$$\begin{aligned}
c(X_2, \psi_2) - c(X_1, \psi_1) &\leq \langle x^*, \psi_2 \rangle - \langle x_*, \psi_1 \rangle \\
&= \langle x^*, \psi_2 \rangle - \langle x^*, \psi_1 \rangle + \langle x^*, \psi_1 \rangle - \langle x_*, \psi_1 \rangle \\
&= \langle x^*, \psi_2 - \psi_1 \rangle + \langle x^* - x_*, \psi_1 \rangle \\
&\leq \|x^*\| \|\psi_1 - \psi_2\| + \|x_* - x^*\| \|\psi_1\| \\
&\leq \max\{\|X_1\|, \|X_2\|\} \|\psi_1 - \psi_2\| \\
&\quad + \max\{\|\psi_1\|, \|\psi_2\|\} \|x_* - x^*\| \\
&= \|X_0\| \|\psi_1 - \psi_2\| + \|\psi_0\| \alpha(X_1, X_2)
\end{aligned}$$

olur. Yani

$$c(X_2, \psi_2) - c(X_1, \psi_1) \leq \|X_0\| \|\psi_1 - \psi_2\| + \|\psi_0\| \alpha(X_1, X_2) \quad (2.12)$$

olduğu elde edilir. (2.11) ve (2.12) eşitsizliklerinden

$$|c(X_1, \psi_1) - c(X_2, \psi_2)| \leq \|X_0\| \|\psi_1 - \psi_2\| + \|\psi_0\| \alpha(X_1, X_2)$$

olur. □

Sonuç: $c(X, \psi) : K(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ süreklidir.

11. $X_1, X_2 \in K(\mathbb{R}^n)$ için

$$\alpha(co(X_1), co(X_2)) = \max_{\psi \in S} |c(X_1, \psi) - c(X_2, \psi)| \leq \alpha(X_1, X_2)$$

Kanıt. $X_1, X_2 \in K(\mathbb{R}^n)$ alalım. 10. özelliğe göre $\forall X_1, X_2 \in K(\mathbb{R}^n)$ ve $\psi_1, \psi_2 \in \mathbb{R}^n$ için $\|\psi_0\| = \max\{\|\psi_1\|, \|\psi_2\|\}$, $\|X_0\| = \max\{\|X_1\|, \|X_2\|\}$ olmak üzere,

$$|c(X_1, \psi_1) - c(X_2, \psi_2)| \leq \|X_0\| \|\psi_1 - \psi_2\| + \|\psi_0\| \alpha(X_1, X_2)$$

olduğunu biliyoruz. $S = \{\psi \in \mathbb{R}^n \mid \|\psi\| = 1\}$ olmak üzere $\psi_1 = \psi_2 = \psi \in S$ alırsak $\|\psi_0\| = 1$, $\|\psi_1 - \psi_2\| = 0$ olur. O zaman $\forall \psi \in S$ için

$$|c(X_1, \psi) - c(X_2, \psi)| \leq \alpha(X_1, X_2)$$

ve buradan

$$\max_{\psi \in S} |c(X_1, \psi) - c(X_2, \psi)| \leq \alpha(X_1, X_2) \quad (2.13)$$

olduğu elde edilir.

Şimdi $\max_{\psi \in S} |c(X_1, \psi) - c(X_2, \psi)| = \alpha(coX_1, coX_2)$ olduğunu görelim. $c(coX_1, \psi) = c(X_1, \psi)$, $c(coX_2, \psi) = c(X_2, \psi)$ olduğunu biliyoruz. O zaman (2.13) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \max_{\psi \in S} |c(X_1, \psi) - c(X_2, \psi)| &= \max_{\psi \in S} |c(coX_1, \psi) - c(coX_2, \psi)| \\ &\leq \alpha(coX_1, coX_2) \end{aligned} \quad (2.14)$$

olur.

$\alpha(coX_1, coX_2) = r$ diyelim.

$$\alpha(coX_1, coX_2) = \max \left\{ \max_{x_2 \in coX_2} d(x_2, coX_1), \max_{x_1 \in coX_1} d(x_1, coX_2) \right\}$$

idi. $r = \max_{x_2 \in coX_2} d(x_2, coX_1)$ olduğunu varsayalım. O zaman $\exists x^* \in coX_2$ vardır $d(x^*, coX_1) = r$ olur. coX_1 konveks, kompakt küme olduğu için $\|x_* - x^*\| = r$ olacak şekilde $\exists x_* \in coX_1$ vardır. $\psi_* = \frac{x^* - x_*}{\|x^* - x_*\|}$ diyelim. coX_1 konveks küme, $d(x^*, coX_1) = \|x_* - x^*\| = r$ olduğundan ayırma teoremine göre $\forall x_1 \in coX_1$ için

$$\langle x_1, \psi_* \rangle \leq \langle x_*, \psi_* \rangle$$

olur. $x_* \in coX_1$ olduğu için

$$c(coX_1, \psi_*) = \langle x_*, \psi_* \rangle \quad (2.15)$$

ve $x^* = x_* + r \cdot \psi_*$ olur. Gerçekten

$$x^* - x_* = \|x^* - x_*\| \cdot \frac{x^* - x_*}{\|x^* - x_*\|} = r \cdot \psi_*$$

ve buradan

$$x^* = x_* + r \cdot \psi_* \quad (2.16)$$

olduğu çıkar. (2.15) ve (2.16)'dan

$$c(coX_2, \psi_*) = \max_{x_2 \in X_2} \langle x_2, \psi_* \rangle \geq \langle x^*, \psi_* \rangle = \langle x_* + r \cdot \psi_*, \psi_* \rangle = \langle x_*, \psi_* \rangle + r$$

buradan

$$\begin{aligned} c(coX_1, \psi_*) + r &\leq c(coX_2, \psi_*) \\ r &\leq c(coX_2, \psi_*) - c(coX_1, \psi_*) \end{aligned}$$

olur. $r = \alpha(coX_1, coX_2) \geq 0$ olduğundan

$$\alpha(coX_1, coX_2) \leq |c(coX_2, \psi_*) - c(coX_1, \psi_*)| = |c(X_2, \psi_*) - c(X_1, \psi_*)|$$

olduğu elde edilir. $\|\psi_*\| = 1$ olduğundan $\psi_* \in S$ 'dir. O zaman

$$\alpha(coX_1, coX_2) \leq \max_{\psi \in S} |c(X_2, \psi) - c(X_1, \psi)|$$

olduğu elde edilir. Benzer şekilde $r = \max_{x_1 \in coX_1} d(x_1, coX_2)$ olursa aynı sonucu elde ederiz. O zaman

$$\alpha(coX_1, coX_2) = \max_{\psi \in S} |c(X_2, \psi) - c(X_1, \psi)|$$

olduğu elde edilir. □

Sonuç: $X_1, X_2 \in KV(\mathbb{R}^n)$ ise

$$\alpha(X_1, X_2) = \max_{\psi \in S} |c(X_1, \psi) - c(X_2, \psi)|$$

2.3 Konveks Fonksiyonlar

Diferansiyeli olmayan fonksiyonların minimizasyon problemlerinin araştırılmasında konveks fonksiyonlar özel bir yer tutmaktadır. Konveks fonksiyonlar için diferansiyel anlamının genelleşmesi olan subdiferansiyel tanımlanır ve bu yapı yardımıyla konveks fonksiyonların minimizasyonu problemi araştırılabilir. Önce konveks fonksiyon tanımını yapalım.

Tanım 2.3.1. $\forall \alpha, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1$ ve $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ için

$$f(\alpha x_1 + \beta x_2) \leq \alpha f(x_1) + \beta f(x_2)$$

koşulunu sağlayan $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna *konveks fonksiyon* adı verilir.

Teorem 2.3.1. [2] $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon olsun. f yerel Lipschitzdir.

Kanıt. 1.Adım: Keyfi $x_0 \in \mathbb{R}^n$ alalım. Şimdi f fonksiyonunun $x_0 \in \mathbb{R}^n$ noktasının bir komşuluğunda üstten sınırlı olduğunu ispatlayalım.

$x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^n) \in \mathbb{R}^n$ ve $0 < \eta < 1$ alalım. $1 \leq i \leq n$ için

$$e_i = \left(0, \dots, 0, \underset{i.\text{terim}}{1}, 0, \dots, 0\right) \in \mathbb{R}^n, \quad e_i^* = \left(0, \dots, 0, \underset{i.\text{terim}}{-1}, 0, \dots, 0\right) \in \mathbb{R}^n$$

ve $y_i = \eta \cdot e_i$, $z_i = \eta \cdot e_i^*$ olsun. O zaman $1 \leq i \leq n$ için

$$x_0 + y_i = x_0 + \eta \cdot e_i \in x_0 + \eta \cdot B$$

$$x_0 + z_i = x_0 + \eta \cdot e_i^* \in x_0 + \eta \cdot B$$

olur. Şimdi $x = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ alalım.

$$\alpha_i = \begin{cases} \frac{1}{\eta} (x^i - x_0^i) & , \quad x^i - x_0^i > 0 \\ 0 & , \quad x^i - x_0^i \leq 0 \end{cases} \quad (2.17)$$

$$\beta_i = \begin{cases} -\frac{1}{\eta} (x^i - x_0^i) & , \quad x^i - x_0^i < 0 \\ 0 & , \quad x^i - x_0^i \geq 0 \end{cases} \quad (2.18)$$

olarak tanımlayalım. (2.17) ve (2.18)'den $1 \leq i \leq n$ için $\alpha_i \geq 0$, $\beta_i \geq 0$ ve $\alpha_i \beta_i = 0$ olur. Ayrıca

$$\begin{aligned} \alpha_i \cdot y_i + \beta_i \cdot z_i &= \alpha_i (0, \dots, 0, \eta, 0, \dots, 0) + \beta_i (0, \dots, 0, -\eta, 0, \dots, 0) \\ &= \begin{cases} \left(0, \dots, 0, \eta \frac{1}{\eta} (x^i - x_0^i), 0, \dots, 0\right) & , \quad x^i - x_0^i > 0 \\ \left(0, \dots, 0, -\eta \left(-\frac{1}{\eta}\right) (x^i - x_0^i), 0, \dots, 0\right) & , \quad x^i - x_0^i < 0 \\ 0 & , \quad x^i - x_0^i = 0 \end{cases} \\ &= (0, \dots, 0, x^i - x_0^i, 0, \dots, 0) \end{aligned}$$

olduğu elde edilir. O zaman

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot y_i + \sum_{i=1}^n \beta_i \cdot z_i &= \sum_{i=1}^n (\alpha_i \cdot y_i + \beta_i \cdot z_i) \\ &= x - x_0\end{aligned}$$

ve buradan

$$x = x_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot y_i + \sum_{i=1}^n \beta_i \cdot z_i$$

olur. Şimdi

$$\gamma_j = \begin{cases} \alpha_j & , \quad 1 \leq j \leq n \\ \beta_{j-n} & , \quad n+1 \leq j \leq 2n \end{cases}$$

ve

$$p_j = \begin{cases} y_j & , \quad 1 \leq j \leq n \\ z_{j-n} & , \quad n+1 \leq j \leq 2n \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. O zaman

$$x = x_0 + \sum_{i=1}^{2n} \gamma_i \cdot p_i \quad (2.19)$$

olarak yazılabilir.

$$|\gamma_j| = \begin{cases} \frac{1}{\eta} |x^j - x_0^j| & , \quad 1 \leq j \leq n \\ \frac{1}{\eta} |x^{j-n} - x_0^{j-n}| & , \quad n+1 \leq j \leq 2n \end{cases} \quad (2.20)$$

Şimdi $x \in x_0 + \frac{\eta}{4n} \cdot B$ alalım. $\|x - x_0\| \leq \frac{\eta}{4n}$ ve buradan $1 \leq i \leq n$ için

$$|x^i - x_0^i| \leq \frac{\eta}{4n} \quad (2.21)$$

olur. (2.20) ve (2.21)'den $1 \leq j \leq 2n$ için

$$\gamma_j \leq \frac{1}{4n}, \quad \sum_{j=1}^{2n} \gamma_j = \frac{1}{2} < 1 \quad (2.22)$$

olduğu elde edilir. O zaman (2.19) eşitliğinden

$$x = \left(1 - \sum_{i=1}^{2n} \gamma_i\right) \cdot x_0 + \sum_{i=1}^{2n} \gamma_i \cdot (x_0 + p_i) \quad (2.23)$$

olur. $\lambda_0 = 1 - \sum_{i=1}^{2n} \gamma_i$ dersek, (2.22)'den $\lambda_0 \in (0, 1]$ olur. f konveks fonksiyon olduğu için

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(\left(1 - \sum_{i=1}^{2n} \gamma_i\right) \cdot x_0 + \sum_{i=1}^{2n} \gamma_i \cdot (x_0 + p_i)\right) \\ &\leq \left(1 - \sum_{i=1}^{2n} \gamma_i\right) f(x_0) + \sum_{i=1}^{2n} \gamma_i f(x_0 + p_i) \\ &\leq |f(x_0)| + \sum_{i=1}^{2n} |f(x_0 + p_i)| = c \end{aligned}$$

olduğu elde edilir. O zaman

$$\sup_{x \in x_0 + \frac{\eta}{4n} \cdot B} f(x) \leq c$$

olur. Yani $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ konveks fonksiyonu x_0 noktasının $x_0 + \frac{\eta}{4n} \cdot B$ komşuluğunda üstten sınırlıdır.

2.Adım: Şimdi $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon ve bir $x_0 \in \mathbb{R}^n$ noktasının komşuluğunda üstten sınırlı ise f fonksiyonunun yerel sınırlı, yani $\forall x \in \mathbb{R}^n$ noktasının en az bir komşuluğunda f fonksiyonunun sınırlı olduğunu ispatlayalım.

1.adımda f fonksiyonunun bir $x_0 \in \mathbb{R}^n$ noktasının $x_0 + \frac{\eta}{4n} \cdot B$ komşuluğunda üstten sınırlı olduğunu göstermiştik. Şimdi aynı komşuluk için f fonksiyonunun $x_0 \in \mathbb{R}^n$ noktasında alttan sınırlı olduğunu gösterelim.

$x_0 \in \mathbb{R}^n$ ve $x \in x_0 + \frac{\eta}{4n} \cdot B$ alalım. $y = 2 \cdot x_0 - x$ diyelim.

$$\|y - x_0\| = \|2 \cdot x_0 - x - x_0\| = \|x_0 - x\|$$

olduğu için

$$\|y - x_0\| \leq \frac{\eta}{4n}$$

, yani $y \in x_0 + \frac{\eta}{4n} \cdot B$ olur.

$$x_0 = \frac{1}{2} \cdot y + \frac{1}{2} \cdot x$$

şeklinde yazılabilir. f konveks fonksiyon olduğu için

$$\begin{aligned} f(x_0) &= f\left(\frac{1}{2} \cdot y + \frac{1}{2} \cdot x\right) \\ &\leq \frac{1}{2}f(y) + \frac{1}{2}f(x) \end{aligned}$$

olur. $y \in x_0 + \frac{\eta}{4n}B$ olduğu için $f(y) \leq c$, buradan

$$\begin{aligned} f(x_0) &\leq \frac{c}{2} + \frac{f(x)}{2} \\ f(x_0) - \frac{c}{2} &\leq \frac{f(x)}{2} \\ 2f(x_0) - c &\leq f(x) \end{aligned}$$

olduğu elde edilir. O halde f fonksiyonu $x_0 \in \mathbb{R}^n$ noktasının $x_0 + \frac{\eta}{4n} \cdot B$ komşuluğunda alttan sınırlıdır. Yani f fonksiyonu yerel sınırlıdır.

3.Adım: Şimdi f fonksiyonunu yerel Lipschitz olduğunu ispatlayalım. $x_0 \in \mathbb{R}^n$ alalım. f yerel sınırlı olduğundan $\exists \delta > 0$ sayısı için $\|x - x_0\| < 2\delta$ iken $|f(x)| < M$ olacak şekilde $M > 0$ sayısı vardır. $x_1 \neq x_2$ olacak şekilde $x_1, x_2 \in B(x_0, \delta)$ alalım ve $\alpha = \|x_2 - x_1\|$ olmak üzere $x_3 = x_2 + \left(\frac{\delta}{\alpha}\right) \cdot (x_2 - x_1)$ diyelim. Seçiliştikten dolayı

$$\begin{aligned} \|x_3 - x_0\| &= \left\| \left[x_2 + \left(\frac{\delta}{\alpha}\right) \cdot (x_2 - x_1) \right] - x_0 \right\| \\ &< \|x_2 - x_0\| + \left(\frac{\delta}{\alpha}\right) \cdot \|x_2 - x_1\| \\ &< 2\delta \end{aligned}$$

olur. Ayrıca $x_2 = \frac{\alpha}{\alpha+\delta} \cdot x_3 + \frac{\delta}{\alpha+\delta} \cdot x_1$ ve f konveks olduğu için

$$f(x_2) \leq \frac{\alpha}{\alpha+\delta} \cdot f(x_3) + \frac{\delta}{\alpha+\delta} \cdot f(x_1)$$

olur. Buradan $\|x_3 - x_0\| < 2\delta$ ve f fonksiyonunun yerel sınırlı olduğu düşünülürse

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &\leq \frac{\alpha}{\alpha+\delta} \cdot [f(x_3) - f(x_1)] \\ &\leq \frac{\alpha}{\delta} \cdot |f(x_3) - f(x_1)| \\ &< \frac{2M}{\delta} \cdot \|x_2 - x_1\| \end{aligned}$$

olduğu elde edilir. O halde $x_1, x_2 \in B(x_0, \delta)$ için

$$f(x_2) - f(x_1) < \frac{2M}{\delta} \cdot \|x_2 - x_1\| \quad (2.24)$$

eşitsizliği sağlanır. Şimdi $x_4 = x_1 + \left(\frac{\delta}{\alpha}\right) \cdot (x_1 - x_2)$ olarak alalım. f konveks fonksiyon ve

$$x_1 = \left(\frac{\alpha}{\alpha + \delta}\right) \cdot x_4 + \left(\frac{\delta}{\alpha + \delta}\right) \cdot x_2$$

olarak yazılabileceği için

$$f(x_1) \leq \left(\frac{\alpha}{\alpha + \delta}\right) \cdot f(x_4) + \left(\frac{\delta}{\alpha + \delta}\right) \cdot f(x_2)$$

olduğu elde edilir.

$$\begin{aligned} \|x_4 - x_0\| &= \|[x_1 + \left(\frac{\delta}{\alpha}\right) \cdot (x_1 - x_2)] - x_0\| \\ &< \|x_1 - x_0\| + \left(\frac{\delta}{\alpha}\right) \cdot \|x_2 - x_1\| \\ &< 2\delta \end{aligned}$$

olduğu için

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &\leq \frac{\alpha}{\alpha + \delta} \cdot [f(x_4) - f(x_2)] \\ &\leq \frac{\alpha}{\delta} \cdot |f(x_4) - f(x_2)| \\ &< \frac{2M}{\delta} \cdot \|x_2 - x_1\| \end{aligned}$$

olduğu elde edilir. O halde $x_1, x_2 \in B(x_0, \delta)$ için

$$f(x_1) - f(x_2) < \frac{2M}{\delta} \cdot \|x_2 - x_1\| \quad (2.25)$$

eşitsizliği sağlanır. (2.24) ve (2.25) eşitsizliklerinden $\forall x_1, x_2 \in B(x_0, \delta)$ için

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{2M}{\delta} \cdot \|x_2 - x_1\|$$

olur. □

2.4 Konveks Fonksiyonun Yöne Göre Türevi

Şimdi konveks fonksiyonlar için yöne göre türev kavramını tanımlayalım.

Tanım 2.4.1. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $h \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{f(x + \lambda \cdot h) - f(x)}{\lambda}$$

limiti varsa, bu limit değerine f fonksiyonunun $x \in \mathbb{R}^n$ noktasında h yönündeki türevi denir ve $f'(x; h)$ ile gösterilir.

Sıradaki teorem, konveks fonksiyonların yöne göre türevlenebilir olduğunu göstermektedir.

Teorem 2.4.1. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ konveks fonksiyon ise $\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall h \in \mathbb{R}^n$ için $f'(x; h)$ vardır, $h \rightarrow f'(x; h)$ fonksiyonu konvektir ve

$$f'(x; \alpha h) = \alpha f'(x; h), (\alpha \geq 0, h \in \mathbb{R}^n)$$

$$f'(x; h_1 + h_2) \leq f'(x; h_1) + f'(x; h_2), (h_1, h_2 \in \mathbb{R}^n)$$

Kanıt. $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ve $\delta > 0$ sayısını alalım. $\lambda_0 \in (0, \delta)$ olsun. $\forall \lambda \in (0, \lambda_0]$ için $\beta = 1 - \frac{\lambda}{\lambda_0}$ olsun. O zaman $\beta \in [0, 1)$ için

$$f(x_0 + \lambda \cdot h) = f(\beta \cdot x_0 + (1 - \beta)(x_0 + \lambda_0 \cdot h))$$

yazılabilir. $\lambda \in (0, \lambda_0]$ olduğu için $\beta \in [0, 1)$ olur. f konveks fonksiyon olduğundan

$$\begin{aligned} f(x_0 + \lambda \cdot h) &\leq \beta \cdot f(x_0) + (1 - \beta) \cdot f(x_0 + \lambda_0 \cdot h) \\ &\leq f(x_0) - (1 - \beta) \cdot f(x_0) + (1 - \beta) \cdot f(x_0 + \lambda_0 \cdot h) \\ &\leq f(x_0) + (1 - \beta) \cdot [f(x_0 + \lambda_0 \cdot h) - f(x_0)] \end{aligned}$$

ve buradan

$$f(x_0 + \lambda \cdot h) - f(x_0) \leq (1 - \beta) \cdot [f(x_0 + \lambda_0 \cdot h) - f(x_0)] \quad (2.26)$$

olduğu elde edilir. Şimdi $g(\lambda) = \frac{f(x_0 + \lambda \cdot h) - f(x_0)}{\lambda}$ fonksiyonunu tanımlayalım. (2.26) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} \cdot [f(x_0 + \lambda \cdot h) - f(x_0)] &\leq \frac{1}{\lambda_0} \cdot [f(x_0 + \lambda_0 \cdot h) - f(x_0)] \\ g(\lambda) &\leq g(\lambda_0) \end{aligned}$$

olur. O halde $\lambda \rightarrow 0^+$ iken $g(\lambda)$ artmayan fonksiyondur. Öte yandan

$$\begin{aligned} f(x_0) &= f\left(\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_0 + \lambda}\right) \cdot (x_0 + \lambda \cdot h) + \left(\frac{\lambda}{\lambda_0 + \lambda}\right) \cdot (x_0 - \lambda_0 \cdot h)\right) \\ &\leq \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_0 + \lambda}\right) \cdot f(x_0 + \lambda \cdot h) + \left(\frac{\lambda}{\lambda_0 + \lambda}\right) \cdot f(x_0 - \lambda_0 \cdot h) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(x_0) - \left(\frac{\lambda}{\lambda_0 + \lambda}\right) \cdot f(x_0 - \lambda_0 \cdot h) &\leq \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_0 + \lambda}\right) \cdot f(x_0 + \lambda \cdot h) \\
\left(1 + \frac{\lambda}{\lambda_0}\right) \cdot f(x_0) - \frac{\lambda}{\lambda_0} \cdot f(x_0 - \lambda_0 \cdot h) &\leq f(x_0 + \lambda \cdot h) \\
f(x_0) + \frac{\lambda}{\lambda_0} \cdot [f(x_0) - f(x_0 - \lambda_0 \cdot h)] &\leq f(x_0 + \lambda \cdot h) \\
\frac{1}{\lambda_0} \cdot [f(x_0) - f(x_0 - \lambda_0 \cdot h)] &\leq \frac{1}{\lambda} \cdot [f(x_0 + \lambda \cdot h) - f(x_0)]
\end{aligned}$$

olur. $\lambda \rightarrow 0^+$ iken $g(\lambda)$ fonksiyonu alttan sınırlıdır. Monoton azalan, alttan sınırlı fonksiyonun limiti vardır ve

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} g(\lambda) = \inf_{\lambda \in (0, \lambda_0]} g(\lambda) = f'(x_0; h)$$

olur. $\alpha = 0$ için $f'(x_0; 0) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0) - f(x_0)}{\lambda} = 0$.

$\alpha > 0$ için $f'(x_0; \alpha h) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \lambda \cdot \alpha h) - f(x_0)}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \alpha \frac{f(x_0 + \lambda \alpha \cdot h) - f(x_0)}{\lambda \alpha}$ olur. $\lambda \alpha = \tau$ dersek, $\alpha > 0$ olduğundan $\lambda \rightarrow 0^+$ iken $\tau \rightarrow 0^+$. O zaman

$$f'(x_0; \alpha h) = \alpha \lim_{\tau \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \tau \cdot h) - f(x_0)}{\tau} = \alpha f'(x_0; h)$$

olur. O halde $h \rightarrow f'(x_0; h)$ fonksiyonu pozitif homojendir.

$h_1, h_2 \in \mathbb{R}^n$ ve $\alpha \in [0, 1]$ alalım. $\frac{1}{\lambda} [f(x_0 + \lambda(\alpha h_1 + (1 - \alpha) h_2)) - f(x_0)]$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\lambda} [f(\alpha(x_0 + \lambda h_1) + (1 - \alpha)(x_0 + \lambda h_2)) - f(x_0)] \\
&\leq \frac{1}{\lambda} [\alpha f(x_0 + \lambda h_1) + (1 - \alpha) f(x_0 + \lambda h_2) - f(x_0)]
\end{aligned}$$

$$= \alpha \frac{f(x_0 + \lambda h_1) - f(x_0)}{\lambda} + (1 - \alpha) \frac{f(x_0 + \lambda h_2) - f(x_0)}{\lambda}$$

$\lambda \rightarrow 0^+$ iken limit alırsak

$$f'(x_0; (\alpha \cdot h_1 + (1 - \alpha) \cdot h_2)) \leq \alpha f'(x_0; h_1) + (1 - \alpha) f'(x_0; h_2)$$

olduğu elde edilir. O halde $h \rightarrow f'(x_0; h)$ fonksiyonu konvektir.

Şimdi

$$f'(x_0; (h_1 + h_2)) \leq f'(x_0; h_1) + f'(x_0; h_2)$$

olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
 f'(x_0; (h_1 + h_2)) &= f'\left(x_0; 2\frac{1}{2}(h_1 + h_2)\right) \\
 &= f'\left(x_0; 2\left(\frac{1}{2}h_1 + \frac{1}{2}h_2\right)\right) \\
 &= 2f'\left(x_0; \left(\frac{1}{2}h_1 + \frac{1}{2}h_2\right)\right) \\
 &\leq 2\frac{1}{2}f'(x_0; h_1) + 2\frac{1}{2}f'(x_0; h_2) \\
 &= f'(x_0; h_1) + f'(x_0; h_2)
 \end{aligned}$$

□

Sonuç: $F \in K(\mathbb{R}^n)$ sabit bir küme ve $c(F, \psi)$ support fonksiyonu olsun. $\forall \psi_0 \in \mathbb{R}^n$ ve $\forall \psi_1$ yönü için $c'(F, \psi_0; \psi_1)$ vardır ve

$$c'(F, \psi_0; \alpha \psi_1) = \alpha c'(F, \psi_0; \psi_1), \quad (\alpha \geq 0)$$

$$c'(F, \psi_0; \psi_1 + \psi_2) \leq c'(F, \psi_0; \psi_1) + c'(F, \psi_0; \psi_2)$$

2.5 Konveks Fonksiyonun Subdiferansiyeli

Konveks fonksiyonlar için subgradient ve subdiferansiyelin tanımlarını verelim.

Tanım 2.5.1. [2] $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ konveks fonksiyon, $p \in \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere $\forall x \in \mathbb{R}^n$ için

$$\langle p, x - x_0 \rangle \leq f(x) - f(x_0)$$

koşulu sağlanıyorsa p vektörüne f fonksiyonunun x_0 noktasındaki subgradienti denir.

f fonksiyonunun x_0 noktasındaki tüm subgradientleri kümesine f fonksiyonunun x_0 noktasındaki subdiferansiyeli denir ve $\partial f(x_0)$ ile gösterilir.

$$\partial f(x_0) = \{ p \in \mathbb{R}^n \mid \forall x \in \mathbb{R}^n \text{ için } \langle p, x - x_0 \rangle \leq f(x) - f(x_0) \}$$

Eğer $\partial f(x_0) \neq \emptyset$ ise f fonksiyonu x_0 noktasında subdiferansiyellenebilir denir.

Örnek 2.5.1. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ fonksiyonu için

$$\partial f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & , x \neq 0 \\ [-1, 1] & , x = 0 \end{cases}$$

$f(x) = |x|$ fonksiyonu için $x = 0$ noktasındaki subdiferansiyel

$$\partial f(0) = \{p \in \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R} \text{ için } |x| \geq px\}$$

olur. $\forall x \in \mathbb{R}$ için $|x| \geq 0x = 0$ olduğundan $0 \in \partial f(0)$ 'dir.

i) $p \in (0, 1]$ olsun. O zaman

$$\forall x \in (0, +\infty) \text{ için } |x| = x \geq px$$

$$\forall x \in (-\infty, 0) \text{ için } |x| = -x \geq px$$

olur. O zaman $\forall x \in \mathbb{R}$ ve $p \in (0, 1]$ için $|x| \geq px$ olur. Yani $(0, 1] \subset \partial f(0)$.

ii) $p \in [-1, 0)$ olsun. O zaman

$$\forall x \in (0, +\infty) \text{ için } |x| = x \geq px$$

$$\forall x \in (-\infty, 0) \text{ için } |x| = -x \geq px$$

olur. O zaman $\forall x \in \mathbb{R}$ ve $p \in [-1, 0)$ için $|x| \geq px$ olur. Yani $[-1, 0) \subset \partial f(0)$.

i) ve ii)'den $[-1, 1] \subset \partial f(0)$ olduğu elde edilir. Şimdi $|p| > 1$ olacak şekilde bir $p \in \mathbb{R}$ alalım. Eğer $p > 1$ ise $x_0 = 2$ için, $p < -1$ ise $x_0 = -2$ için $|x_0| < px_0$ olur. Yani $|p| > 1$ ise $p \notin \partial f(0)$. O zaman $\partial f(0) = [-1, 1]$.

Şimdi konveks fonksiyonun subdiferansiyelinin varlığını gösterelim.

Teorem 2.5.1. [6] $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ konveks fonksiyon ve $x_0 \in \mathbb{R}^n$ olsun. O zaman $\partial f(x_0)$ boş kümeden farklı, konveks, kompakt kümedir.

Kanıt. $\bar{Z} = \{(x, \beta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid f(x) \leq \beta\}$ kümesini tanımlayalım. Önce bu kümenin konveks olduğunu gösterelim. $(x_1, \beta_1), (x_2, \beta_2) \in \bar{Z}$ ve $\alpha \in [0, 1]$ alalım. O zaman $f(x_1) \leq \beta_1$, $f(x_2) \leq \beta_2$,

$$\alpha f(x_1) + (1 - \alpha) f(x_2) \leq \alpha \beta_1 + (1 - \alpha) \beta_2$$

ve f konveks fonksiyon olduğu için

$$f(\alpha \cdot x_1 + (1 - \alpha) \cdot x_2) \leq \alpha \beta_1 + (1 - \alpha) \beta_2$$

olur. Bu ise

$$(\alpha \cdot x_1 + (1 - \alpha) \cdot x_2, \alpha \beta_1 + (1 - \alpha) \beta_2) = \alpha \cdot (x_1, \beta_1) + (1 - \alpha) \cdot (x_2, \beta_2) \in \bar{Z}$$

demektir. O halde $\bar{Z}$ konveks kümedir. $(x_0, f(x_0))$ noktası $\bar{Z}$ kümesinin sınır noktasıdır. Ayırma teoremine göre $\exists (v, c) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ vardır $\ni (v, c) \neq 0$ (yani $c^2 + \|v\|^2 > 0$) ve $\forall (x, \beta) \in \bar{Z}$ için

$$c\beta + \langle x, v \rangle \geq cf(x_0) + \langle x_0, v \rangle \quad (2.27)$$

eşitsizliği sağlanır. $x = x_0$ dersek (2.27) eşitsizliğinden $\forall \beta \geq f(x_0)$ için

$$c\beta \geq cf(x_0)$$

$$c(\beta - f(x_0)) \geq 0$$

ve $\beta \geq f(x_0)$ olduğundan $\beta - f(x_0) \geq 0$ buradan $c \geq 0$ olduğu görülür. $c = 0$ olduğunu varsayalım. O zaman (2.27) eşitsizliğinden $\forall x \in \mathbb{R}^n$ için

$$\langle x - x_0, v \rangle \geq 0 \quad (2.28)$$

olur. Ancak bu $v = 0 \in \mathbb{R}^n$ demektir. Bu sonuç $(v, c) \neq 0$ oluşuyla çelişir. O zaman $c > 0$ olmalıdır. $(x, f(x)) \in \bar{Z}$ olduğundan (2.27) eşitsizliğinde $\beta = f(x)$ alınırsa $\forall x \in \mathbb{R}^n$ için

$$c \cdot f(x) + \langle x, v \rangle \geq c \cdot f(x_0) + \langle x_0, v \rangle$$

olur. $c > 0$ olduğundan $\forall x \in \mathbb{R}^n$ için

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &\geq \left\langle \frac{1}{c} \cdot v, x_0 - x \right\rangle \\ f(x) - f(x_0) &\geq \left\langle -\frac{1}{c} \cdot v, x - x_0 \right\rangle \end{aligned}$$

olur. O zaman $-c^{-1} \cdot v \in \partial f(x_0)$ 'dır. Yani $\partial f(x_0) \neq \emptyset$.

Şimdi $\partial f(x_0)$ kümesinin konveks olduğunu gösterelim. Bunun için $v_1, v_2 \in \partial f(x_0)$ ve $\alpha \in (0, 1)$ alalım. $v_1, v_2 \in \partial f(x_0)$ olduğundan $\forall x \in \mathbb{R}^n$ için

$$f(x) - f(x_0) \geq \langle v_1, x - x_0 \rangle$$

$$f(x) - f(x_0) \geq \langle v_2, x - x_0 \rangle$$

eşitsizlikleri sağlanır. İlk eşitsizlik α , ikinci eşitsizlik $(1 - \alpha)$ ile çarpılır, taraf tarafa toplanırsa

$$f(x) - f(x_0) \geq \langle \alpha \cdot v_1 + (1 - \alpha) \cdot v_2, x - x_0 \rangle$$

olduğu elde edilir. Bu ise $\alpha \cdot v_1 + (1 - \alpha) \cdot v_2 \in \partial f(x_0)$ demektir. Yani $\partial f(x_0)$ kümesi konvektir.

$\partial f(x_0)$ kümesinin kapalı olduğunu gösterelim. $\forall k = 1, 2, \dots$ için $v_k \in \partial f(x_0)$ ve $v_k \rightarrow v_*$ olacak şekilde bir $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisi seçelim. $\partial f(x_0)$ kümesinin tanımından dolayı $\forall k = 1, 2, \dots$ ve $\forall x \in \mathbb{R}^n$ için

$$f(x) - f(x_0) \geq \langle v_k, x - x_0 \rangle \quad (2.29)$$

eşitsizliği sağlanır. Şimdi $x \in \mathbb{R}^n$ alalım.

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} [f(x) - f(x_0)] &\geq \lim_{k \rightarrow \infty} \langle v_k, x - x_0 \rangle \\ f(x) - f(x_0) &\geq \langle v_*, x - x_0 \rangle \end{aligned}$$

olur. Keyfi $x \in \mathbb{R}^n$ için $f(x) - f(x_0) \geq \langle v_*, x - x_0 \rangle$ olduğuna göre $v_* \in \partial f(x_0)$. O halde $\partial f(x_0)$ kapalı kümedir.

Şimdi $\partial f(x_0)$ kümesinin sınırlı olduğunu gösterelim. Bunun için $\partial f(x_0)$ kümesinin sınırlı olmadığını varsayalım. O zaman $\forall k = 1, 2, \dots$ için $v_k \in \partial f(x_0)$, $k \rightarrow \infty$ iken $\|v_k\| \rightarrow \infty$ olacak şekilde bir $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisi vardır. Şimdi bu $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisini gözönüne alalım. $\delta_0 > 0$ ve $k \in \mathbb{N}$ için

$$x_k = x_0 + \delta_0 \cdot \frac{v_k}{\|v_k\|}$$

olarak tanımlansın. O zaman $\forall k \in \mathbb{N}$ için $v_k \in \partial f(x_0)$ olduğundan

$$f(x_k) - f(x_0) \geq \langle v_k, x_k - x_0 \rangle \quad (2.30)$$

elde edilir. $x_k - x_0 = \delta_0 \cdot \frac{v_k}{\|v_k\|}$ olduğu için

$$\langle v_k, x_k - x_0 \rangle = \delta_0 \cdot \|v_k\|$$

olur. (2.30) eşitsizliğinden $\forall k \in \mathbb{N}$ için

$$f(x_k) - f(x_0) \geq \delta_0 \cdot \|v_k\|$$

olur. $\forall k \in \mathbb{N}$ için $\|x_k - x_0\| = \left\| \delta_0 \cdot \frac{v_k}{\|v_k\|} \right\| = \delta_0$ olduğundan $\forall k \in \mathbb{N}$ için $x_k \in B(x_0, \delta_0)$ dir. f konveks fonksiyon olduğu için $B(x_0, \delta_0)$ kümesi üzerinde süreklidir. O zaman

$$\max\{f(x) - f(x_0) \mid x \in B(x_0, \delta_0)\} = c_* < +\infty \quad (2.31)$$

olur. $k \rightarrow +\infty$ iken

$$\|v_k\| \rightarrow +\infty$$

olduğu için $\sup\{f(x_k) - f(x_0) \mid x_k \in B(x_0, \delta_0)\} = +\infty$ olduğu elde edilir. Bu ise (2.31) ile çelişir. O zaman varsayımımız hatalıdır. $\partial f(x_0)$ kümesi sınırlıdır. $\square$

Teorem 2.5.2. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ konveks fonksiyon olsun. $\forall x \in \mathbb{R}^n$ için $x \rightarrow \partial f(x)$ olarak tanımlanan $\partial f : \mathbb{R}^n \rightarrow KV(\mathbb{R}^n)$ küme değerli dönüşümünün sınırlı küme üzerindeki görüntüsü sınırlıdır. Yani $M \subset \mathbb{R}^n$ sınırlı bir küme ise

$$\partial f(M) = \bigcup_{x \in M} \partial f(x)$$

kümesi sınırlıdır.

Kanıt. $M \subset \mathbb{R}^n$ sınırlı kümesi için $\partial f(M)$ kümesinin sınırlı olmadığını varsayalım. O zaman $\forall k \in \mathbb{N}$ için, $x_k \in M$ ve $v_k \in \partial f(x_k)$ olacak şekilde $\{v_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ ve $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ dizileri vardır $\ni k \rightarrow \infty$ iken $\|v_k\| \rightarrow \infty$ olur. M sınırlı küme olduğu için $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ dizisinin yakınsak alt dizisi vardır. Genelliği bozmadan $x_k \rightarrow x_*$ olduğunu varsayalım. $\delta_0 > 0$ olmak üzere

$$y_k = x_k + \delta_0 \cdot \frac{v_k}{\|v_k\|}, (k \in \mathbb{N})$$

olarak tanımlayalım. O zaman $\forall k \in \mathbb{N}$ için

$$\|y_k - x_k\| = \left\| x_k + \delta_0 \cdot \frac{v_k}{\|v_k\|} - x_k \right\| = \delta_0 \quad (2.32)$$

olur. $x_k \rightarrow x_*$ olduğu için $\delta_0 > 0$ sayısı için $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ vardır $\ni k \geq k_0$ için

$$\|x_k - x_*\| \leq \delta_0 \quad (2.33)$$

olur. (2.32) ve (2.33) eşitsizliklerinden

$$\|y_k - x_*\| \leq \|y_k - x_k\| + \|x_k - x_*\| \leq 2\delta_0 \quad (2.34)$$

olur. Yani $\forall k \geq k_0$ için $x_k, y_k \in B(x_*, 2\delta_0)$ olur. $\forall k \in \mathbb{N}$ için $v_k \in \partial f(x_k)$ olduğundan $\forall x \in \mathbb{R}^n$ için $f(x) - f(x_k) \geq \langle v_k, x - x_k \rangle$ eşitsizliği sağlanır. $x = y_k$ alınırsa $\forall k \in \mathbb{N}$ için

$$f(y_k) - f(x_k) \geq \langle v_k, y_k - x_k \rangle$$

olduğu elde edilir. $y_k - x_k = \delta_0 \cdot \frac{v_k}{\|v_k\|}$ olduğundan $\forall k \in \mathbb{N}$ için

$$f(y_k) - f(x_k) \geq \delta_0 \cdot \|v_k\| \quad (2.35)$$

olur. f konveks fonksiyon olduğu için süreklidir. Dolayısıyla

$$\max_{x, y \in B(x_*, 2\delta_0)} [f(y) - f(x)] = c < +\infty \quad (2.36)$$

olacak şekilde $\exists c \in \mathbb{R}$ vardır. $k \rightarrow +\infty$ iken $\|v_k\| \rightarrow +\infty$ olduğu için (2.33), (2.34) ve (2.35) eşitsizliklerinden

$$\sup \{f(y_k) - f(x_k) \mid k \geq k_0\} = +\infty$$

olduğu elde edilir. $\forall k \in \mathbb{N}$ için $x_k, y_k \in B(x_*, 2\delta_0)$ olduğu için

$$\max_{x, y \in B(x_*, 2\delta_0)} [f(y) - f(x)] \geq \sup \{f(y_k) - f(x_k) \mid k \geq k_0\} = +\infty$$

olur. Bu ise (2.36) ile çelişir. O halde varsayımımız yanlıştır. Yani $\forall M \subset \mathbb{R}^n$ sınırlı kümesi için $\partial f(M)$ kümesi sınırlıdır. $\square$

Teorem 2.5.3. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ konveks fonksiyon olsun. $\forall x \in \mathbb{R}^n$ için $x \rightarrow \partial f(x)$ olarak tanımlanan $\partial f : \mathbb{R}^n \rightarrow KV(\mathbb{R}^n)$ küme değerli dönüşümünün grafiği kapalıdır.

Kanıt.

$$\text{graph} \partial f(\cdot) = \{(x, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid v \in \partial f(x)\}$$

∂f küme değerli dönüşümünün grafiğinin kapalı olduğunu göstermek amacıyla $\forall k \in \mathbb{N}$ için $(x_k, v_k) \in \text{graph} \partial f$ ve $(x_k, v_k) \rightarrow (x_*, v_*)$ olacak şekilde bir $\{(x_k, v_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ dizisi alalım. $(x_*, v_*) \in \text{graph} \partial f$ olduğunu gösterirsek ispat tamamlanmış olacaktır. $\forall k \in \mathbb{N}$ için $(x_k, v_k) \in \text{graph} \partial f$ ise $v_k \in \partial f(x_k)$ olur. O zaman $\forall x \in \mathbb{R}^n$ için

$$f(x) - f(x_k) \geq \langle v_k, x - x_k \rangle \quad (2.37)$$

eşitsizliği sağlanır. Sabit bir $x \in \mathbb{R}^n$ alalım. $(x_k, v_k) \rightarrow (x_*, v_*)$ olduğu için $x_k \rightarrow x_*$ ve $v_k \rightarrow v_*$ olur. f konveks fonksiyonu sürekli olduğundan $x_k \rightarrow x_*$ iken $f(x_k) \rightarrow f(x_*)$ olur. (2.37) eşitsizliği için $k \rightarrow +\infty$ iken limit alırsak

$$f(x) - f(x_*) \geq \langle v_*, x - x_* \rangle \quad (2.38)$$

olduğu görülür. Keyfi $x \in \mathbb{R}^n$ için (2.38) eşitsizliği sağlanacağı için $v_* \in \partial f(x_*)$, yani $(x_*, v_*) \in \text{graph} \partial f$ olur. O halde $\text{graph} \partial f$ kapalıdır. $\square$

2.6 Konveks Fonksiyonunun Yöne Göre Türevinin Subdiferansiyel ile İlişkisi

Şimdi konveks fonksiyonun yöne göre türevi ile subdiferansiyeli arasındaki ilişkiyi inceleyelim.

Teorem 2.6.1. [44] $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ konveks fonksiyon olsun. $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ve $\forall h \in \mathbb{R}^n$ için

$$f'(x_0; h) = \max_{v \in \partial f(x_0)} \langle v, h \rangle$$

Kanıt. f fonksiyonu konveks olduğundan teorem 2.4.1'e göre $x \in \mathbb{R}^n$ ve $\forall h \in \mathbb{R}^n$ için $f'(x; h)$ vardır. $\alpha > 0$ için

$$g(\alpha) = \frac{f(x_0 + \alpha \cdot h) - f(x_0)}{\alpha}$$

olarak tanımlayalım. Şimdi $f'(x_0; h) = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} g(\alpha)$ limitini hesaplayalım.

$$\partial f(x_0) = \{v \in \mathbb{R}^n \mid f(x) - f(x_0) \geq \langle v, x - x_0 \rangle\}$$

olduğunu biliyoruz. $x = x_0 + \alpha \cdot h$ olarak alınırsa $\forall v \in \partial f(x_0)$ için

$$f(x_0 + \alpha \cdot h) - f(x_0) \geq \langle v, \alpha \cdot h \rangle$$

olduğu bulunur. O zaman $\forall \alpha > 0$ için

$$\begin{aligned} \frac{f(x_0 + \alpha \cdot h) - f(x_0)}{\alpha} &\geq \langle v, h \rangle \\ \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \alpha \cdot h) - f(x_0)}{\alpha} &\geq \langle v, h \rangle \\ \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} g(\alpha) &\geq \langle v, h \rangle \end{aligned}$$

Yani $\forall v \in \partial f(x_0)$ için $f'(x_0; h) \geq \langle v, h \rangle$ olur. Buradan

$$f'(x_0; h) \geq \max_{v \in \partial f(x_0)} \langle v, h \rangle \quad (2.39)$$

olduğu elde edilir.

$$Z = \{(x, \beta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid f(x) < \beta\}$$

$$L = \{(x, \beta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid \beta = f(x_0) + \alpha f'(x_0; h), x = x_0 + \alpha \cdot h, \alpha > 0\}$$

kümeleri tanımlansın. Teorem 2.4.1'in ispatından $g(\alpha)$ artmayan fonksiyondur. O zaman $\forall \alpha_0 > 0$ için

$$f'(x; h) = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} g(\alpha) \leq g(\alpha_0) \quad (2.40)$$

olur. Buradan $\forall \alpha > 0$ için

$$f(x_0 + \alpha \cdot h) \geq f(x_0) + \alpha f'(x_0; h) \quad (2.41)$$

olduğu elde edilir.

Şimdi $Z \cap L = \emptyset$ olduğunu gösterelim. Bunun için $Z \cap L \neq \emptyset$ olduğunu varsayalım. $(x_*, \beta_*) \in Z \cap L$ olsun. O zaman

$$\beta_* > f(x_*), \beta_* = f(x_0) + \alpha_* f'(x_0; h)$$

$$x_* = x_0 + \alpha_* \cdot h$$

olacak şekilde $\alpha_* > 0$ vardır. Buradan $\alpha_* > 0$ için

$$f(x_0) + \alpha_* f'(x_0; h) = \beta_* > f(x_*) = f(x_0 + \alpha_* \cdot h)$$

olduğu elde edilir. Ancak bu sonuç (2.41) ile çelişir. O halde varsayım hatalıdır. Yani

$$Z \cap L = \emptyset \quad (2.42)$$

olmalıdır.

$$P = Z - L = \{w = v - v' \mid v \in Z, v' \in L\}$$

kümesini tanımlayalım. P konveks kümedir ve (2.42)'ye göre $0 \notin P$. Ayırma teoremine göre $\forall w \in P$ için

$$\langle (y, c), w \rangle \geq 0$$

olacak şekilde $\exists 0 \neq (y, c) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ vektörü vardır. O zaman $\forall v \in Z$ ve $\forall v' \in L$ için

$$\langle (y, c), v - v' \rangle \geq 0$$

$$\langle (y, c), v \rangle \geq \langle (y, c), v' \rangle$$

olur. Z ve L kümelerinin tanımından dolayı $\forall \alpha > 0$ ve $(x, \beta) \in Z$ için

$$\langle (y, c), (x, \beta) \rangle \geq \langle (y, c), (x_0 + \alpha h, f(x_0) + \alpha f'(x_0; h)) \rangle$$

olur. Yani $\forall \beta > f(x)$ ve $\alpha > 0$ için

$$c\beta + \langle y, x \rangle \geq c(f(x_0) + \alpha f'(x_0; h)) + \langle y, x_0 + \alpha h \rangle$$

ve dolayısıyla $\forall \beta \geq f(x)$ ve $\alpha \geq 0$ için

$$c\beta + \langle y, x \rangle \geq c(f(x_0) + \alpha f'(x_0; h)) + \langle y, x_0 + \alpha h \rangle \quad (2.43)$$

eşitsizliği sağlanır. Eğer (2.43) eşitsizliğinde $\alpha = 0$, $x = x_0$ dersek $\forall \beta \geq f(x_0)$ için $c(\beta - x_0) \geq 0$ olur. O halde $c \geq 0$ 'dır. Şimdi $c > 0$ olduğunu gösterelim. $c = 0$ ise (2.43)'ten $\forall x \in \mathbb{R}^n$ ve $\alpha \geq 0$ için

$$\langle y, x \rangle \geq \langle y, x_0 + \alpha h \rangle$$

olur. $\alpha = 0$ alınırsa $\forall x \in \mathbb{R}^n$ için $\langle y, x - x_0 \rangle \geq 0$ olduğu elde edilir. Bu ise $y = 0$ ve sonuçta $(y, c) = (0, 0)$ olması demektir. Ancak bu $0 \neq (y, c)$ oluşuyla çelişir. O halde $c > 0$ olmalıdır.

(2.43) eşitsizliğinde $\beta = f(x)$, $\alpha = 0$ alınırsa $c > 0$ olduğundan $\forall x \in \mathbb{R}^n$ için

$$\begin{aligned} c \cdot f(x) + \langle y, x \rangle &\geq c \cdot f(x_0) + \langle y, x_0 \rangle \\ c \cdot f(x) - c \cdot f(x_0) &\geq \langle -y, x - x_0 \rangle \\ f(x) - f(x_0) &\geq \left\langle -\frac{1}{c} \cdot y, x - x_0 \right\rangle \end{aligned}$$

olur. O zaman $-\frac{1}{c} \cdot y \in \partial f(x_0)$.

(2.43) eşitsizliğinde $\beta = f(x)$ alınırsa

$$\begin{aligned} c f(x) + \langle y, x \rangle &\geq c f(x_0) + c \alpha f'(x_0; h) + \langle y, x_0 \rangle + \alpha \langle y, h \rangle \\ f(x) - f(x_0) &\geq \alpha \left(f'(x_0; h) + \left\langle \frac{1}{c} \cdot y, h \right\rangle \right) + \left\langle -\frac{1}{c} \cdot y, x - x_0 \right\rangle \end{aligned}$$

$y_0 = -\frac{1}{c} \cdot y$ dersek, $\forall x \in \mathbb{R}^n$ ve $\forall \alpha \geq 0$ için

$$f(x) - f(x_0) \geq \alpha \cdot (f'(x_0; h) - \langle y_0, h \rangle) + \langle y_0, x - x_0 \rangle$$

olduğu elde edilir. $x = x_0$ seçelim. $y_0 \in \partial f(x_0)$ olduğu için

$$\begin{aligned} \alpha \cdot (f'(x_0; h) - \langle y_0, h \rangle) &\leq 0 \\ f'(x_0; h) &\leq \langle y_0, h \rangle \end{aligned}$$

$$f'(x_0; h) \leq \max_{v \in \partial f(x_0)} \langle v, h \rangle \quad (2.44)$$

olur. (2.39) ve (2.44) eşitsizliklerinden

$$f'(x_0; h) = \max_{v \in \partial f(x_0)} \langle v, h \rangle$$

elde edilir. □

2.7 Marjinal Fonksiyonun Subdiferansiyeli

Tanım 2.7.1. $G \subset \mathbb{R}^k$, $\varphi : \mathbb{R}^n \times G \rightarrow \mathbb{R}$ olsun. $\forall x \in \mathbb{R}^n$ için

$$f(x) = \sup_{y \in G} \varphi(x, y)$$

şeklinde tanımlanan $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ fonksiyonuna marjinal fonksiyon denir.

Şimdi marjinal fonksiyonun subdiferansiyelini karakterize eden bir teorem sunalım.

Teorem 2.7.1. [6] $G \subset \mathbb{R}^k$ kompakt küme, $\varphi : \mathbb{R}^n \times G \rightarrow \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$ için $\varphi(x, \cdot)$ sürekli, $\forall y \in G$ için $\varphi(\cdot, y)$ konveks fonksiyon olsun.

$$f(x) = \max_{y \in G} \varphi(x, y)$$

şeklinde tanımlanan $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun, keyfi $v \in \mathbb{R}^n$ yönüne göre türevi vardır. Ayrıca f subdiferansiyellenebilirdir ve $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$, $v \in \mathbb{R}^n$ için $G(x_0) = \{y \in G \mid f(x_0) = \varphi(x_0, y)\}$ olmak üzere

$$f'(x_0; v) = \sup_{y \in G(x_0)} \varphi'(x_0, y; v) \quad (2.45)$$

$$\partial f(x_0) = \overline{\text{co}} \{ \partial \varphi(x_0, y) \mid y \in G(x_0) \} \quad (2.46)$$

Kanıt. Önce f fonksiyonunun konveks olduğunu gösterelim. $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ ve $\alpha \in (0, 1)$ alalım. $\forall y \in G$ için $\varphi(\cdot, y)$ konveks fonksiyon olduğu için

$$\begin{aligned} f(\alpha \cdot x_1 + (1 - \alpha) \cdot x_2) &= \max_{y \in G} \varphi(\alpha \cdot x_1 + (1 - \alpha) \cdot x_2, y) \\ &\leq \max_{y \in G} [\alpha \cdot \varphi(x_1, y) + (1 - \alpha) \cdot \varphi(x_2, y)] \\ &\leq \alpha \cdot \max_{y \in G} \varphi(x_1, y) + (1 - \alpha) \cdot \max_{y \in G} \varphi(x_2, y) \\ &= \alpha \cdot f(x_1) + (1 - \alpha) \cdot f(x_2) \end{aligned}$$

olur. Yani f fonksiyonu konvekstir. Teorem 2.4.1'e göre $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$ için f fonksiyonunun keyfi $v \in \mathbb{R}^n$ yönüne göre türevi vardır ve teorem 2.5.1'e göre $\partial f(x_0) \neq \emptyset$, konveks, kompakt kümedir. Yani f fonksiyonu subdiferansiyellenebilirdir.

Şimdi $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$ için $G(x_0)$ kümesinin kompakt küme olduğunu gösterelim. $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$ için $G(x_0) \subset G$ ve G kompakt küme olduğu için $G(x_0)$ sınırlı kümedir. O halde $G(x_0)$ kümesinin kapalı olduğunu göstermek yeterli olacaktır. $\forall k \in \mathbb{N}$ için $y_k \in G(x_0)$, $y_k \rightarrow y_0$ olacak şekilde bir $\{y_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ dizisi alalım. $y_k \in G(x_0)$ olduğundan

$$f(x_0) = \varphi(x_0, y_k) \quad (2.47)$$

G kompakt küme olduğu için $y_0 \in G$, $\varphi(x_0, \cdot)$ fonksiyonu G üzerinde sürekli olduğu için $\varphi(x_0, y_0) = f(x_0)$ olur. O halde $y_0 \in G(x_0)$, $G(x_0)$ kümesi kapalıdır. $G(x_0)$ kümesi kapalı ve sınırlı küme olduğu için kompakttır.

$v \in \mathbb{R}^n$ ve $y_0 \in G(x_0)$ alalım. $\alpha > 0$ için

$$f(x_0) = \varphi(x_0, y_0), \quad f(x_0 + \alpha \cdot v) \geq \varphi(x_0 + \alpha \cdot v, y_0)$$

$$\begin{aligned} \frac{f(x_0 + \alpha \cdot v) - f(x_0)}{\alpha} &\geq \frac{\varphi(x_0 + \alpha \cdot v, y_0) - \varphi(x_0, y_0)}{\alpha} \\ f'(x_0; v) &\geq \varphi'(x_0, y_0; v) \end{aligned}$$

olur. $y_0 \in G(x_0)$ keyfi seçildiğinden

$$f'(x_0; v) \geq \sup_{y \in G(x_0)} \varphi'(x_0, y; v) \quad (2.48)$$

olduğu elde edilir.

$g(\alpha) = \frac{f(x_0 + \alpha \cdot v) - f(x_0)}{\alpha}$ diyelim. Teorem 2.4.1'de $\exists \alpha_* \in (0, 1)$ için $(0, \alpha_*)$ aralığında g fonksiyonunun artmayan fonksiyon ve

$$f'(x_0; v) = \inf_{\alpha \in (0, \alpha_*)} g(\alpha) \quad (2.49)$$

olduğu ispatlandı. O zaman $\forall \alpha \in (0, \alpha_*)$ ve $\varepsilon > 0$ için

$$B_\alpha = \left\{ y \in G \mid \frac{\varphi(x_0 + \alpha \cdot v, y) - f(x_0)}{\alpha} \geq f'(x_0; v) - \varepsilon \right\}$$

kümesi boş kümeden farklıdır. Gerçektende (2.49) eşitliğinden $\forall \alpha \in (0, \alpha_*)$ için

$$g(\alpha) = \frac{f(x_0 + \alpha \cdot v) - f(x_0)}{\alpha} \geq f'(x_0; v)$$

ve $f(x_0 + \alpha \cdot v) = \max_{y \in G} \varphi(x_0 + \alpha \cdot v, y)$ olduğundan $\frac{\varphi(x_0 + \alpha \cdot v, y) - f(x_0)}{\alpha} \geq f'(x_0; v) - \varepsilon$ olacak şekilde $y \in G$ vardır.

Şimdi B_α kümesinin kapalı olduğunu gösterelim. $\forall k \in \mathbb{N}$ için $y_k \in B_\alpha$, $y_k \rightarrow y_0$ olacak şekilde bir $\{y_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ dizisi alalım. G kompakt küme olduğundan $y_0 \in G$ olur. $\forall k \in \mathbb{N}$ için $y_k \in B_\alpha$ olduğu için

$$\frac{\varphi(x_0 + \alpha \cdot v, y_k) - f(x_0)}{\alpha} \geq f'(x_0; v) - \varepsilon \quad (2.50)$$

ve $\varphi(x_0 + \alpha \cdot v, \cdot)$ fonksiyonu sürekli olduğundan $\varphi(x_0 + \alpha \cdot v, y_k) \rightarrow \varphi(x_0 + \alpha \cdot v, y_0)$ olur. O halde (2.50) eşitsizliğinden

$$\frac{\varphi(x_0 + \alpha \cdot v, y_0) - f(x_0)}{\alpha} \geq f'(x_0; v) - \varepsilon$$

$y_0 \in B_\alpha$ olduğu elde edilir.

$0 < \alpha_1 \leq \alpha_2 < \alpha_*$ ise $B_{\alpha_1} \subset B_{\alpha_2}$ olduğunu gösterelim. $y \in B_{\alpha_1}$ olsun.

$$x_0 + \alpha_1 \cdot v = \left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right) \cdot x_0 + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \cdot (x_0 + \alpha_2 \cdot v) \quad (2.51)$$

olarak yazılabilir. $y \in B_{\alpha_1}$ olduğundan

$$\frac{\varphi(x_0 + \alpha_1 \cdot v, y) - f(x_0)}{\alpha_1} \geq f'(x_0; v) - \varepsilon \quad (2.52)$$

eşitsizliği sağlanır. $\varphi(\cdot, y)$ konveks fonksiyon olduğu için (2.51) eşitliğinden

$$\begin{aligned} \varphi(x_0 + \alpha_1 \cdot v, y) &= \varphi\left(\left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right) \cdot x_0 + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \cdot (x_0 + \alpha_2 \cdot v), y\right) \\ &\leq \left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right) \cdot \varphi(x_0, y) + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \cdot \varphi(x_0 + \alpha_2 \cdot v, y) \end{aligned}$$

olduğu görülür. Buradan ve (2.52) eşitsizliğinden

$$f'(x_0; v) - \varepsilon \leq \frac{1}{\alpha_1} \left[\left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right) (\varphi(x_0, y) - f(x_0)) + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} (\varphi(x_0 + \alpha_2 v, y) - f(x_0)) \right] \quad (2.53)$$

olur. $f(x_0) = \max_{y \in G} \varphi(x_0, y)$ olduğundan $\varphi(x_0, y) - f(x_0) \leq 0$. (2.53) eşitsizliğinden

$$f'(x_0; v) - \varepsilon \leq \frac{1}{\alpha_2} \cdot [(\varphi(x_0 + \alpha_2 \cdot v, y) - f(x_0))] \quad (2.54)$$

elde edilir. $y \in G$ olduğu için (2.54) eşitsizliğinden $y \in B_{\alpha_2}$ olduğunu elde ederiz. O halde $0 < \alpha_1 \leq \alpha_2 < \alpha_*$ ise

$$B_{\alpha_1} \subset B_{\alpha_2} \quad (2.55)$$

$\forall \alpha \in (0, \alpha_*)$ için B_α kapalı, $B_\alpha \subset G$, G kompakt küme olduğu için B_α kümesinde kompaktır. O halde (2.55)'den

$$\bigcap_{\alpha > 0} B_\alpha \neq \emptyset \quad (2.56)$$

olur. B_α kümesinin tanımlanışından $\forall y_* \in \bigcap_{\alpha \in (0, \alpha_*)} B_\alpha$ için

$$\frac{\varphi(x_0 + \alpha \cdot v, y_*) - f(x_0)}{\alpha} \geq f'(x_0; v) - \varepsilon \quad (2.57)$$

ve buradan $\forall \alpha \in (0, \alpha_*)$ için

$$\varphi(x_0 + \alpha \cdot v, y_*) - f(x_0) \geq \alpha \cdot [f'(x_0; v) - \varepsilon] \quad (2.58)$$

olduğu elde edilir. $\varphi(\cdot, y_*)$ konveks fonksiyon olduğu için sürekli. (2.58) eşitsizliğinde $\alpha \rightarrow 0^+$ iken limit alınır

$$\varphi(x_0, y_*) - f(x_0) \geq 0 \quad (2.59)$$

$f(x_0) = \max_{y \in G} \varphi(x_0, y)$, $y_* \in G$ olduğu için

$$f(x_0) \geq \varphi(x_0, y_*) \quad (2.60)$$

(2.59) ve (2.60) eşitsizliklerinden $f(x_0) = \varphi(x_0, y_*)$, yani $y_* \in G(x_0)$ olduğu bulunur. Elde edilen (2.57) eşitsizliğinde yerine yazılırsa $\forall \alpha \in (0, \alpha_*)$ için

$$\frac{\varphi(x_0 + \alpha \cdot v, y_*) - \varphi(x_0, y_*)}{\alpha} \geq f'(x_0; v) - \varepsilon$$

olur. $\alpha \rightarrow 0^+$ iken limit alınır

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(x_0 + \alpha \cdot v, y_*) - \varphi(x_0, y_*)}{\alpha} &\geq f'(x_0; v) - \varepsilon \\ \varphi'(x_0, y_*; v) &\geq f'(x_0; v) - \varepsilon \end{aligned}$$

ve $y_* \in G(x_0)$ olduğu için

$$\sup_{y \in G(x_0)} \varphi'(x_0, y; v) \geq f'(x_0; v) - \varepsilon$$

olduğu elde edilir. $\varepsilon > 0$ keyfi seçildiğinden

$$\sup_{y \in G(x_0)} \varphi'(x_0, y; v) \geq f'(x_0; v) \quad (2.61)$$

olur. (2.48) ve (2.61) eşitsizliklerinden

$$\sup_{y \in G(x_0)} \varphi'(x_0, y; v) = f'(x_0; v) \quad (2.62)$$

olduğu bulunur.

Şimdi

$$D(x_0) = \overline{\text{co}} \{ \partial\varphi(x_0, y) \mid y \in G(x_0) \} \quad (2.63)$$

kümesini tanımlayalım. $\varphi(\cdot, y)$ konveks fonksiyon olduğu için teorem 2.6.1'e göre

$$\varphi'(x_0, y; v) = \max_{e \in \partial\varphi(x_0, y)} \langle v, e \rangle$$

ve (2.62) eşitliğinden

$$f'(x_0; v) = \sup_{y \in G(x_0)} \max_{e \in \partial\varphi(x_0, y)} \langle v, e \rangle \quad (2.64)$$

olur. (2.63) ve (2.64)'ten

$$f'(x_0; v) = \sup_{e \in D(x_0)} \langle v, e \rangle \quad (2.65)$$

elde edilir. Öte yandan f fonksiyonu konveks olduğundan teorem 2.6.1'e göre

$$f'(x_0; v) = \max_{e \in \partial f(x_0)} \langle v, e \rangle \quad (2.66)$$

olduğu için (2.65) ve (2.66) eşitliklerinden

$$\max_{e \in \partial f(x_0)} \langle v, e \rangle = \sup_{e \in D(x_0)} \langle v, e \rangle$$

olduğu bulunur. O halde $\partial f(x_0)$ ve $D(x_0)$ kümelerinin support fonksiyonları aynıdır.

$\partial f(x_0)$ ve $D(x_0)$ kapalı ve konveks olduğundan $\partial f(x_0) = D(x_0)$ olur. Yani

$$\partial f(x_0) = \overline{\text{co}} \{ \partial\varphi(x_0, y) \mid y \in G(x_0) \}$$

olduğu elde edilir. □

Teorem 2.7.2. $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt küme olsun. $\forall p \in \mathbb{R}^n$ için

$$c(K, p) = \max_{y \in K} \langle y, p \rangle$$

şeklinde tanımlanan K kümesinin support fonksiyonunu alalım. O zaman $\forall p \in \mathbb{R}^n$ için

$$\partial c(K, p) = \{ y \in K \mid c(K, p) = \langle y, p \rangle \}$$

Kanıt. $\varphi(p, y) = \langle y, p \rangle$ fonksiyonu Teorem 2.7.1. koşullarını sağladığı için, $K(p) = \{y \in K \mid c(K, p) = \langle y, p \rangle\}$ olmak üzere

$$\partial c(K, p) = \overline{co} \{ \partial \varphi(p, y) \mid y \in K(p) \}$$

olduğu elde edilir. $\varphi(p, y) = \langle y, p \rangle$ olduğu için diferansiyellenebilirdir ve

$$\partial \varphi(p, y) = \partial \langle y, p \rangle = y$$

olur. O zaman $\partial c(K, p) = \overline{co} \{y \mid y \in K(p)\} = \overline{co} K(p)$ ve K kümesi kompakt, konveks olduğu için $K(p)$ kümesinde kompakt, konveks küme olacağından

$$\partial c(K, p) = K(p) = \{y \in K \mid c(K, p) = \langle y, p \rangle\}$$

olduğu elde edilir. □

3 KÜME DEĞERLİ DÖNÜŞÜMLER

Klasik analiz içinde tek değerli fonksiyonlar için verilen bazı tanımlar ve konstrüksiyonlar küme değerli dönüşümler için geçerli olmayabilir. Bu bölümdeki tanım ve konstrüksiyonların yardımıyla küme değerli dönüşümlerin özelliklerinin ve tek değerli fonksiyonlara ait bazı özelliklerin küme değerli dönüşümlere uygulanışı son yıllarda bazı araştırmaların konusu olmuştur. Bu bölümde küme değerli dönüşümlerin tanımı dahil olmak üzere, küme değerli analizin bazı konstrüksiyonları ve problemleri araştırılacaktır.

3.1 Süreklilik

Tanım 3.1.1. $\forall x \in \mathbb{R}^m$ noktasına $K(\mathbb{R}^n)$ uzayının bir altkümesini karşılık getiren $F : \mathbb{R}^m \rightarrow K(\mathbb{R}^n)$ dönüşümüne küme değerli dönüşüm denir.

$\mathbb{R}^m$ ve $K(\mathbb{R}^n)$ uzayları metrik uzaylar olduğundan küme değerli dönüşümler için sürekliliği tanımlayabiliriz.

Tanım 3.1.2. $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0$ varsa $\ni \|x - x_0\| < \delta$ iken $\alpha(F(x), F(x_0)) < \varepsilon$ koşulu sağlanıyorsa F küme değerli dönüşümü, x_0 noktasında süreklidir denir. Bu durumda verilen $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0$ vardır $\ni \forall x \in B(x_0, \delta)$ için

$$F(x) \subset F(x_0) + \varepsilon B$$

$$F(x_0) \subset F(x) + \varepsilon B$$

koşulları sağlanır.

$\forall x \in \mathbb{R}^m$ için F sürekli ise $F : \mathbb{R}^m \rightarrow K(\mathbb{R}^n)$ küme değerli dönüşümü süreklidir denir.

Şimdi küme değerli dönüşümlere bir örnek verelim.

Örnek 3.1.1. $a(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $r(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ sürekli fonksiyonlar

$$F_*(x) = \{ v \in \mathbb{R}^n \mid \|v - a(x)\| \leq r(x) \}$$

olmak üzere $x \rightarrow F_*(x)$ küme değerli dönüşümü sürekli. F_* küme değerli dönüşümünün support fonksiyonu

$$c(F_*(x), \psi) = \langle a(x), \psi \rangle + r(x) \|\psi\|$$

Gerçekten $F_*(x) = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \|v - a(x)\| \leq r(x)\} = a(x) + r(x) B$ olduğundan $\psi \neq 0$ iken

$$\begin{aligned} c(F_*(x), \psi) &= \sup_{y \in F_*(x)} \langle y, \psi \rangle = \sup_{b \in B} \langle a(x) + r(x)b, \psi \rangle \\ &= \langle a(x), \psi \rangle + r(x) \sup_{b \in B} \langle b, \psi \rangle \\ &= \langle a(x), \psi \rangle + \|\psi\| r(x) \sup_{b \in B} \left\langle b, \frac{\psi}{\|\psi\|} \right\rangle \\ &= \langle a(x), \psi \rangle + \|\psi\| r(x) \end{aligned}$$

olur. Eğer $\psi = 0$ ise

$$0 = c(F_*(x), 0) = \langle a(x), 0 \rangle + \|0\| r(x)$$

olur. Yani $\forall \psi \in \mathbb{R}^n$ için

$$c(F_*(x), \psi) = \langle a(x), \psi \rangle + \|\psi\| r(x)$$

Küme değerli dönüşümlerin sürekliliği, bu dönüşümlerin support fonksiyonları ile karakterize edilebilir.

Teorem 3.1.1. [44] $F : \mathbb{R}^m \rightarrow K(\mathbb{R}^n)$ sürekli küme değerli dönüşüm olsun. O zaman $(x, \psi) \rightarrow c(F(x), \psi)$ support fonksiyonu sürekli. Tersine $(x, \psi) \rightarrow c(F(x), \psi)$ fonksiyonu sürekli ise

$$coF : \mathbb{R}^m \rightarrow KV(\mathbb{R}^n)$$

küme değerli dönüşümü sürekli.

Kanıt. $F : \mathbb{R}^m \rightarrow K(\mathbb{R}^n)$ küme değerli dönüşümünün sürekli olduğunu varsayalım. $\psi_0 \in \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathbb{R}^m$ alalım. O zaman $x \rightarrow x_0$ iken

$$\alpha(F(x), F(x_0)) \rightarrow 0$$

olur. Support fonksiyonunun özelliğine göre $\|\psi_*\| = \max\{\|\psi\|, \|\psi_0\|\}$, $\|F_0(x)\| = \max\{\|F(x)\|, \|F(x_0)\|\}$ olmak üzere

$$|c(F(x), \psi) - c(F(x_0), \psi_0)| \leq \|\psi_*\| \alpha(F(x), F(x_0)) + \|F_0(x)\| \|\psi - \psi_0\| \quad (3.1)$$

olur. $(x, \psi) \rightarrow (x_0, \psi_0)$ iken $\psi_* \rightarrow \psi_0$, $\|F_0(x)\| \rightarrow \|F(x_0)\|$ olacaktır. $\varepsilon = 1$ için $\exists \delta_* \in (0, 1)$ vardır $\ni \|\psi_* - \psi_0\| < \delta_*$, $\|x - x_0\| < \delta_*$ iken

$$\begin{aligned} \|\psi_*\| &\leq 1 + \|\psi_0\| \\ \|F_0(x)\| &\leq \|F(x_0)\| + 1 \end{aligned}$$

olur. O zaman (3.1)'den $\|\psi - \psi_*\| < \delta_*$, $\|x - x_0\| < \delta_*$ koşulunu sağlayan $\forall (x, \psi)$ için

$$|c(F(x), \psi) - c(F(x_0), \psi_0)| \leq (1 + \|\psi_0\|) \alpha(F(x), F(x_0)) + (\|F(x_0)\| + 1) \|\psi - \psi_0\|$$

olduğu elde edilir. O zaman $(x, \psi) \rightarrow (x_0, \psi_0)$ iken $c(F(x), \psi) \rightarrow c(F(x_0), \psi_0)$ olur.

Şimdi $(x, \psi) \rightarrow c(F(x), \psi)$ fonksiyonunun sürekli olduğunu varsayalım. O zaman $x \rightarrow x_0$ iken $c(F(x), \psi_0) \rightarrow c(F(x_0), \psi_0)$ olur. Support fonksiyonun 11. özelliğine göre

$$\alpha(cF(x), cF(x_0)) = \max_{\psi \in S} |c(F(x), \psi) - c(F(x_0), \psi)| \quad (3.2)$$

olur. $\mathbb{R}^m \times S$ 'de $(x, \psi) \rightarrow c(F(x), \psi)$ fonksiyonunun sürekli, S kümesi kompakt olduğu için [8]'de teorem 1.2.15'e göre $x \rightarrow x_0$ iken $c(F(x), \psi)$, $c(F(x_0), \psi)$ 'ye ψ 'ye göre düzgün yakınsar. Yani verilen $\forall \varepsilon > 0$ sayısı için $\exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ vardır $\ni \forall x \in B(x_0, \delta)$ ve $\forall \psi \in S$ için

$$|c(F(x), \psi) - c(F(x_0), \psi)| < \varepsilon$$

ve dolayısıyla

$$\max_{\psi \in S} |c(F(x), \psi) - c(F(x_0), \psi)| < \varepsilon \quad (3.3)$$

olur. (3.2) ve (3.3)'ten verilen $\forall \varepsilon > 0$ sayısı için $\exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ vardır $\ni \forall x \in B(x_0, \delta)$ için

$$\alpha(coF(x), coF(x_0)) < \varepsilon$$

olur. O zaman $x \rightarrow coF(x)$ küme değerli dönüşümü sürekli dir. $\square$

3.2 Alttan-Yarı Sürekli ve Üstten-Yarı Sürekli Küme Değerli Dönüşümler, Denk Tanımlar

Şimdi küme değerli dönüşümler için alttan-yarı süreklilik ve üstten-yarı süreklilik tanımlarını verelim. Küme değerli dönüşümler için verilen alttan-yarı süreklilik ve üstten-yarı süreklilik , tek değerli fonksiyonlar için verilen alt-yarı süreklilik ve üst-yarı süreklilikten farklıdır.

Tanım 3.2.1. [44] $F : \mathbb{R}^m \rightarrow K(\mathbb{R}^n)$ küme değerli dönüşümü verilsin.

$\forall \varepsilon > 0$ sayısı için , $\exists \delta > 0$ sayısı varsa $\ni \forall x \in B(x_0, \delta)$ için

$$F(x) \subset F(x_0) + \varepsilon \cdot B$$

koşulu sağlanıyorsa F küme değerli dönüşümüne x_0 noktasında üstten-yarı sürekli dir denir.

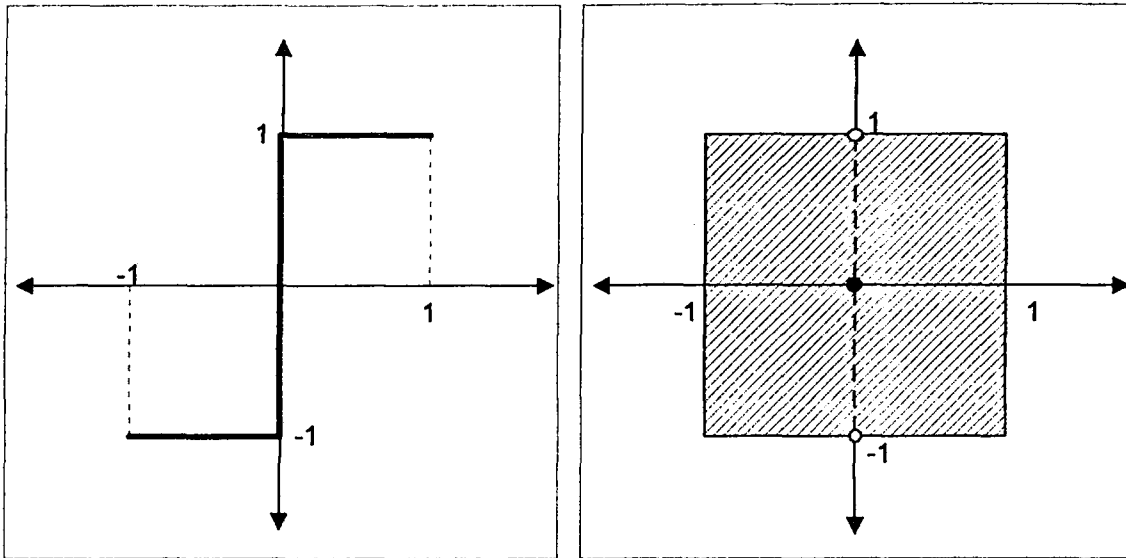
Tanım 3.2.2. [44] $\forall \varepsilon > 0$ sayısı için , $\exists \delta > 0$ sayısı varsa $\ni \forall x \in B(x_0, \delta)$ için

$$F(x_0) \subset F(x) + \varepsilon \cdot B$$

koşulu sağlanıyorsa F küme değerli dönüşümüne x_0 noktasında alttan-yarı sürekli dir denir.

Tanım 3.2.3. $\forall x_0 \in \mathbb{R}^m$ için $F : \mathbb{R}^m \rightarrow K(\mathbb{R}^n)$ küme değerli dönüşümü üstten-yarı sürekli ise F küme değerli dönüşümü $\mathbb{R}^m$ 'de üstten-yarı sürekli dir, $\forall x_0 \in \mathbb{R}^m$ için $F : \mathbb{R}^m \rightarrow K(\mathbb{R}^n)$ küme değerli dönüşümü alttan-yarı sürekli ise F küme değerli dönüşümü $\mathbb{R}^m$ 'de alttan-yarı sürekli dir denir. $F : \mathbb{R}^m \rightarrow K(\mathbb{R}^n)$ küme değerli dönüşümü sürekli ise hem üstten, hemde alttan-yarı sürekli dir.

Altan-yarı sürekli ve üstten-yarı sürekli küme değerli dönüşümlere örnekler verelim.



Şekil 3.1. Üstten-yarı sürekli ve alttan-yarı sürekli fonksiyon örnekleri

Örnek 3.2.1. $F : \mathbb{R} \rightarrow KV(\mathbb{R})$

$$F(x) = \begin{cases} 1 & , x > 0 \\ [-1, 1] & , x = 0 \\ -1 & , x < 0 \end{cases}$$

küme değerli dönüşümü $x = 0$ noktasında üstten-yarı sürekli, ancak alttan-yarı sürekli değildir.

$$F : \mathbb{R} \rightarrow KV(\mathbb{R})$$

$$F(x) = \begin{cases} [-1, 1] & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

küme değerli dönüşümü $x = 0$ noktasında alttan-yarı sürekli, ancak üstten-yarı sürekli değildir.

$F : \mathbb{R}^m \rightarrow K(\mathbb{R}^n)$ küme değerli dönüşümü $F(x) = \{f(x)\}$ şeklinde tanımlansın. F alttan veya üstten-yarı sürekli ise $x \rightarrow f(x)$ dönüşümü sürekli dir.

Aşağıda verilmiş olan iki teorem alttan-yarı sürekli ve üstten-yarı sürekli küme değerli dönüşümlerin support fonksiyonu ile karakterize edilebilmesini sağlar.

Teorem 3.2.1. [45] $F : \mathbb{R}^m \rightarrow K(\mathbb{R}^n)$, küme değerli dönüşüm olsun. Eğer F , $x_0 \in \mathbb{R}^m$ noktasında üstten-yarı sürekli ise $(x, \psi) \rightarrow c(F(x), \psi)$ fonksiyonu

$$\limsup_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ \psi \rightarrow \psi_0}} c(F(x), \psi) \leq c(F(x_0), \psi_0)$$

koşulunu sağlar. Eğer F , $x_0 \in \mathbb{R}^m$ noktasında alttan-yarı sürekli ise $(x, \psi) \rightarrow c(F(x), \psi)$ fonksiyonu

$$\liminf_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ \psi \rightarrow \psi_0}} c(F(x), \psi) \geq c(F(x_0), \psi_0)$$

koşulunu sağlar.

Kanıt. $F : \mathbb{R}^m \rightarrow K(\mathbb{R}^n)$, $x_0 \in \mathbb{R}^m$ noktasında üstten-yarı sürekli, küme değerli dönüşüm olsun. O zaman verilen $\forall \varepsilon > 0$ sayısı için $\exists \delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0$ sayısı vardır
 $\ni \forall x \in B(x_0, \delta)$ için

$$F(x) \subset F(x_0) + \varepsilon \cdot B$$

olur. O zaman $\forall \psi \in \mathbb{R}^n$ için

$$c(F(x), \psi) \leq c(F(x_0) + \varepsilon \cdot B, \psi)$$

olur.

$$\begin{aligned} c(F(x_0) + \varepsilon \cdot B, \psi) &= \max_{y \in F(x_0), b \in B} \langle y + \varepsilon \cdot b, \psi \rangle \\ &= \max_{y \in F(x_0)} \langle y, \psi \rangle + \varepsilon \max_{b \in B} \langle b, \psi \rangle \\ &= c(F(x_0), \psi) + \varepsilon \|\psi\| \end{aligned}$$

olduğundan, $\forall x \in B(x_0, \delta)$ ve $\forall \psi \in \mathbb{R}^n$ için

$$c(F(x), \psi) \leq c(F(x_0), \psi) + \varepsilon \|\psi\| \quad (3.4)$$

olduğu elde edilir. Şimdi $\psi_0 \in \mathbb{R}^n$ alalım. (3.4) eşitsizliği $\forall x \in B(x_0, \delta)$ ve $\forall \psi \in \mathbb{R}^n$ için sağlandığına göre

$$\begin{aligned} \limsup_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ \psi \rightarrow \psi_0}} c(F(x), \psi) &\leq \limsup_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ \psi \rightarrow \psi_0}} [c(F(x_0), \psi) + \varepsilon \|\psi\|] \\ &= \limsup_{\psi \rightarrow \psi_0} [c(F(x_0), \psi) + \varepsilon \|\psi\|] \end{aligned}$$

$\psi \rightarrow c(F(x), \psi)$ fonksiyonu sürekli olduğundan

$$\begin{aligned} \limsup_{\psi \rightarrow \psi_0} [c(F(x_0), \psi) + \varepsilon \|\psi\|] &= \lim_{\psi \rightarrow \psi_0} [c(F(x_0), \psi) + \varepsilon \|\psi\|] \\ &= c(F(x_0), \psi_0) + \varepsilon \|\psi_0\| \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\limsup_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ \psi \rightarrow \psi_0}} c(F(x), \psi) \leq c(F(x_0), \psi_0) + \varepsilon \|\psi_0\| \quad (3.5)$$

olduğu elde edilir. $\|\psi_0\|$ sabit bir sayıdır. (3.5) eşitsizliği $\forall \varepsilon > 0$ için sağlanacağından

$$\limsup_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ \psi \rightarrow \psi_0}} c(F(x), \psi) \leq c(F(x_0), \psi_0)$$

olduğu elde edilir.

$F : \mathbb{R}^m \rightarrow K(\mathbb{R}^n)$, $x_0 \in \mathbb{R}^m$ noktasında alttan-yarı sürekli küme değerli dönüşüm olsun. O zaman verilen $\forall \varepsilon > 0$ sayısı için $\exists \delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0$ sayısı vardır $\ni \forall x \in B(x_0, \delta)$ için

$$F(x_0) \subset F(x) + \varepsilon \cdot B$$

olur. O zaman $\forall \psi \in \mathbb{R}^n$ için

$$c(F(x_0), \psi) \leq c(F(x) + \varepsilon \cdot B, \psi)$$

olur.

$$\begin{aligned} c(F(x) + \varepsilon \cdot B, \psi) &= \max_{y \in F(x), b \in B} \langle y + \varepsilon \cdot b, \psi \rangle \\ &= \max_{y \in F(x)} \langle y, \psi \rangle + \varepsilon \max_{b \in B} \langle b, \psi \rangle \\ &= c(F(x), \psi) + \varepsilon \|\psi\| \end{aligned}$$

olduğundan, $\forall x \in B(x_0, \delta)$ ve $\forall \psi \in \mathbb{R}^n$ için

$$c(F(x_0), \psi) - \varepsilon \|\psi\| \leq c(F(x), \psi) \quad (3.6)$$

olduğu elde edilir. Şimdi $\psi_0 \in \mathbb{R}^n$ alalım. (3.6) eşitsizliği $\forall x \in B(x_0, \delta)$ ve $\forall \psi \in \mathbb{R}^n$ için sağlandığına göre

$$\begin{aligned} \liminf_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ \psi \rightarrow \psi_0}} c(F(x), \psi) &\geq \liminf_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ \psi \rightarrow \psi_0}} [c(F(x_0), \psi) - \varepsilon \|\psi\|] \\ &= \liminf_{\psi \rightarrow \psi_0} [c(F(x_0), \psi) - \varepsilon \|\psi\|] \end{aligned}$$

$\psi \rightarrow c(F(x), \psi)$ fonksiyonu sürekli olduğundan

$$\begin{aligned} \liminf_{\psi \rightarrow \psi_0} [c(F(x_0), \psi) - \varepsilon \|\psi\|] &= \lim_{\psi \rightarrow \psi_0} [c(F(x_0), \psi) - \varepsilon \|\psi\|] \\ &= c(F(x_0), \psi_0) - \varepsilon \|\psi_0\| \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\liminf_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ \psi \rightarrow \psi_0}} c(F(x), \psi) \geq c(F(x_0), \psi_0) - \varepsilon \|\psi_0\| \quad (3.7)$$

olduğu elde edilir. $\|\psi_0\|$ sabit bir sayıdır. (3.7) eşitsizliği $\forall \varepsilon > 0$ için sağlanacağından

$$\liminf_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ \psi \rightarrow \psi_0}} c(F(x), \psi) \geq c(F(x_0), \psi_0)$$

olduğu elde edilir. □

Teorem 3.2.2. [45] $F : \mathbb{R}^m \rightarrow K(\mathbb{R}^n)$, küme değerli dönüşüm olsun. Eğer $(x, \psi) \rightarrow c(F(x), \psi)$ fonksiyonu $\forall \psi_0 \in \mathbb{R}^n$ için

$$\limsup_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ \psi \rightarrow \psi_0}} c(F(x), \psi) \leq c(F(x_0), \psi_0)$$

koşulunu sağlıyorsa $x \rightarrow coF(x)$ küme değerli dönüşümü $x_0 \in \mathbb{R}^m$ noktasında üstten-yarı süreklidir. Eğer $(x, \psi) \rightarrow c(F(x), \psi)$ fonksiyonu $\forall \psi_0 \in \mathbb{R}^n$ için

$$\liminf_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ \psi \rightarrow \psi_0}} c(F(x), \psi) \geq c(F(x_0), \psi_0)$$

koşulunu sağlıyorsa $x \rightarrow coF(x)$ küme değerli dönüşümü $x_0 \in \mathbb{R}^m$ noktasında alttan-yarı süreklidir.

Kanıt. $\forall \psi_0 \in \mathbb{R}^n$ için

$$\limsup_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ \psi \rightarrow \psi_0}} c(F(x), \psi) \leq c(F(x_0), \psi_0)$$

olduğunu varsayalım. Önce verilen $\forall \varepsilon > 0$ sayısına karşılık $\forall x \in B(x_0, \delta)$ ve $\forall \psi \in S$ için

$$c(F(x), \psi) \leq c(F(x_0), \psi) + \varepsilon$$

olacak şekilde $\exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ sayısının olduğunu gösterelim. Tersini varsayalım.

O zaman $\exists \varepsilon_* > 0$ vardır $\ni \delta_i \rightarrow 0^+$ olacak şekilde $\forall \delta_i > 0$ sayısı için

$$c(F(x_i), \psi_i) > c(F(x_0), \psi_i) + \varepsilon_* \quad (3.8)$$

koşulunu sağlayan $\exists x_i \in B(x_0, \delta_i)$ ve $\exists \psi_i \in S$ vardır. $\forall i \in \mathbb{N}$ için $\psi_i \in S$ ve S kompakt küme olduğundan $\{\psi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ dizisinin yakınsak bir alt dizisi vardır. Genelliği bozmadan $\psi_i \rightarrow \psi_0$ olduğunu varsayalım. $x_i \in B(x_0, \delta_i)$ ve $\delta_i \rightarrow 0^+$ olduğundan $i \rightarrow \infty$ iken $x_i \rightarrow x_0$ olur. O zaman (3.8)'den

$$\begin{aligned} \limsup_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ \psi \rightarrow \psi_0}} c(F(x), \psi) &\geq \limsup_{i \rightarrow \infty} c(F(x_i), \psi_i) \\ &\geq \limsup_{i \rightarrow \infty} [c(F(x_0), \psi_i) + \varepsilon_*] \\ &= c(F(x_0), \psi_0) + \varepsilon_* \end{aligned}$$

olduğu elde edilir. Ancak elde edilen sonuç varsayımımız ile çelişir. O halde verilen $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ sayısı vardır $\ni \forall x \in B(x_0, \delta)$ ve $\forall \psi \in S$ için

$$c(F(x), \psi) \leq c(F(x_0), \psi) + \varepsilon$$

olur. $\forall \psi \in S$ için

$$\begin{aligned} c(\text{co}F(x_0) + \varepsilon \cdot B, \psi) &= \max_{y \in \text{co}F(x_0), b \in B} \langle y + \varepsilon \cdot b, \psi \rangle \\ &= \max_{y \in \text{co}F(x_0)} \langle y, \psi \rangle + \varepsilon \\ &= c(\text{co}F(x_0), \psi) + \varepsilon \end{aligned}$$

olduğundan $\forall \psi \in S$ için

$$\begin{aligned}
 c(coF(x), \psi) &= c(F(x), \psi) \\
 &\leq c(F(x_0), \psi) + \varepsilon \\
 &= c(coF(x_0), \psi) + \varepsilon \\
 &= c(coF(x_0) + \varepsilon \cdot B, \psi)
 \end{aligned}$$

olur. Buradan verilen $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0 \ni \forall x \in B(x_0, \delta)$ ve $\forall \psi \in S$ için $coF(x) \subset coF(x_0) + \varepsilon \cdot B$ olduğu elde edilir. Yani coF küme değerli dönüşümü x_0 noktasında üstten-yarı süreklidir.

Şimdi $\forall \psi_0 \in \mathbb{R}^n$ için

$$\liminf_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ \psi \rightarrow \psi_0}} c(F(x), \psi) \geq c(F(x_0), \psi_0)$$

olduğunu varsayalım. Önce verilen $\forall \varepsilon > 0$ sayısına karşılık $\forall x \in B(x_0, \delta)$ ve $\forall \psi \in S$ için

$$c(F(x), \psi) \geq c(F(x_0), \psi) - \varepsilon$$

olacak şekilde $\exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ sayısının olduğunu gösterelim. Tersini varsayalım.

O zaman $\exists \varepsilon_* > 0$ vardır $\ni \delta_i \rightarrow 0^+$ olacak şekilde $\forall \delta_i > 0$ sayısı için

$$c(F(x_i), \psi_i) < c(F(x_0), \psi_i) - \varepsilon_* \quad (3.9)$$

koşulunu sağlayan $\exists x_i \in B(x_0, \delta_i)$ ve $\exists \psi_i \in S$ vardır. $\forall i \in \mathbb{N}$ için $\psi_i \in S$ ve S kompakt küme olduğundan $\{\psi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ dizisinin yakınsak bir alt dizisi vardır. Genelliği bozmadan $\psi_i \rightarrow \psi_0$ olduğunu varsayalım. $x_i \in B(x_0, \delta_i)$ ve $\delta_i \rightarrow 0^+$ olduğundan $i \rightarrow \infty$ iken $x_i \rightarrow x_0$ olur. O zaman (2)'den

$$\begin{aligned}
 \liminf_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ \psi \rightarrow \psi_0}} c(F(x), \psi) &\leq \liminf_{i \rightarrow \infty} c(F(x_i), \psi_i) \\
 &\leq \liminf_{i \rightarrow \infty} [c(F(x_0), \psi_i) - \varepsilon_*] \\
 &= c(F(x_0), \psi_0) - \varepsilon_*
 \end{aligned}$$

olduğu elde edilir. Ancak elde edilen sonuç varsayımımız ile çelişir. O halde verilen $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ sayısı vardır $\ni \forall x \in B(x_0, \delta)$ ve $\forall \psi \in S$ için

$$c(F(x), \psi) \geq c(F(x_0), \psi) - \varepsilon$$

olur. $\forall \psi \in S$ için

$$\begin{aligned} c(coF(x) + \varepsilon \cdot B, \psi) &= \max_{y \in coF(x), b \in B} \langle y + \varepsilon \cdot b, \psi \rangle \\ &= \max_{y \in coF(x)} \langle y, \psi \rangle + \varepsilon \\ &= c(coF(x), \psi) + \varepsilon \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} c(coF(x) + \varepsilon \cdot B, \psi) &= c(coF(x), \psi) + \varepsilon \\ &= c(F(x), \psi) + \varepsilon \\ &\geq c(F(x_0), \psi) = c(coF(x_0), \psi) \end{aligned}$$

olduğu elde edilir. Buradan verilen $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0 \ni \forall x \in B(x_0, \delta)$ ve $\forall \psi \in S$ için $coF(x_0) \subset coF(x) + \varepsilon \cdot B$ olduğu elde edilir. Yani coF küme değerli dönüşümü x_0 noktasında alttan-yarı süreklidir. $\square$

Küme değerli dönüşümlerin üstten-yarı süreklilikleri çeşitli formlarda karakterize edilebilir.

Teorem 3.2.3. [24] $F : \mathbb{R}^m \rightarrow K(\mathbb{R}^n)$ küme değerli bir dönüşüm olsun. Aşağıdaki koşullar denktir.

1. F üstten-yarı süreklidir.
2. $\forall A \subset \mathbb{R}^n$ kapalı kümesi için

$$F^{-1}(A) = \{x \in \mathbb{R}^m \mid F(x) \cap A \neq \emptyset\}$$

kümesi kapalıdır.

3. $\forall A \subset \mathbb{R}^n$ açık kümesi için

$$F^{+1}(A) = \{x \in \mathbb{R}^m \mid F(x) \subset A\}$$

kümesi açıktır.

Kanıt. 1) $\Rightarrow$ 2) $F : \mathbb{R}^m \rightarrow K(\mathbb{R}^n)$ üstten-yarı sürekli küme değerli bir dönüşüm olsun. $A \subset \mathbb{R}^n$ kapalı kümesi için $F^{-1}(A)$ kümesi kapalı mıdır? $\forall k \in \mathbb{N}$ için $x_k \in F^{-1}(A)$ olacak şekilde yakınsak bir $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ dizisi alalım ve $x_k \rightarrow x_0$ olsun. $i \rightarrow +\infty$ iken $\varepsilon_i \rightarrow 0^+$ olacak şekildeki $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ dizisini düşünelim. F üstten-yarı sürekli olduğundan $\forall i \in \mathbb{N}$ için

$$F(x_{k_i}) \subset F(x_0) + \varepsilon_i \cdot B \quad (3.10)$$

olacak şekilde $\{x_{k_i}\}_{i \in \mathbb{N}}$ alt dizisi vardır. $i \in \mathbb{N}$ için $x_{k_i} \in F^{-1}(A)$ olduğundan $F(x_{k_i}) \cap A \neq \emptyset$. O zaman (3.10)'dan $\forall i \in \mathbb{N}$ için

$$(F(x_0) + \varepsilon_i \cdot B) \cap A \neq \emptyset \quad (3.11)$$

olur. $i \rightarrow +\infty$ iken $\varepsilon_i \rightarrow 0^+$, A kapalı küme olduğundan (3.11)'den $F(x_0) \cap A \neq \emptyset$, yani $x_0 \in F^{-1}(A)$ olur. O halde $F^{-1}(A)$ kapalı kümedir.

2) $\Rightarrow$ 3) $A \subset \mathbb{R}^n$ açık kümesini alalım. $F^{+1}(A)$ kümesi açık mıdır?

$A \subset \mathbb{R}^n$ açık küme olduğu için $\mathbb{R}^n \setminus A$ kapalı kümedir. O zaman $F^{-1}(\mathbb{R}^n \setminus A) \subset \mathbb{R}^m$ kapalı, $\mathbb{R}^m \setminus F^{-1}(\mathbb{R}^n \setminus A)$ açık kümedir.

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^m \setminus F^{-1}(\mathbb{R}^n \setminus A) &= \{x \in \mathbb{R}^m \mid F(x) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) = \emptyset\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^m \mid F(x) \subset A\} \\ &= F^{+1}(A) \end{aligned}$$

olduğundan $F^{+1}(A)$ açık kümedir.

3) $\Rightarrow$ 1) $\forall A \subset \mathbb{R}^n$ açık kümesi için $F^{+1}(A)$ kümesinin açık olduğunu kabul edelim.

$\varepsilon > 0$ verilsin. $x_0 \in \mathbb{R}^m$ alalım. F küme değerli dönüşümü x_0 noktasında üstten-yarı sürekli midir? $F(x_0) + \varepsilon \cdot \overset{\circ}{B}$ açık küme olduğundan

$$F^{+1}\left(F(x_0) + \varepsilon \cdot \overset{\circ}{B}\right) = \left\{x \in \mathbb{R}^m \mid F(x) \subset F(x_0) + \varepsilon \cdot \overset{\circ}{B}\right\}$$

açık kümedir. $F(x_0) \subset F(x_0) + \varepsilon \cdot \overset{\circ}{B}$ olacağı için $x_0 \in F^{+1}\left(F(x_0) + \varepsilon \cdot \overset{\circ}{B}\right)$. $F^{+1}\left(F(x_0) + \varepsilon \cdot \overset{\circ}{B}\right)$ açık küme olduğundan

$$B(x_0, \delta) \subset F^{+1}\left(F(x_0) + \varepsilon \cdot \overset{\circ}{B}\right)$$

olacak şekilde $\exists \delta > 0$ sayısı vardır. Yani $\forall x \in B(x_0, \delta)$ için

$$F(x) \subset F(x_0) + \varepsilon \cdot \overset{\circ}{B} \subset F(x_0) + \varepsilon \cdot B$$

olur. $\varepsilon > 0$ keyfi seçildiğinden F küme değerli dönüşümü x_0 noktasında üstten-yarı sürekli. $\square$

Teorem 3.2.4. [24] $F : \mathbb{R}^m \rightarrow K(\mathbb{R}^n)$ küme değerli bir dönüşüm olsun. Aşağıdaki koşullar denktir.

1. F alttan-yarı sürekli.
2. $\forall A \subset \mathbb{R}^n$ kapalı kümesi için

$$F^{+1}(A) = \{x \in \mathbb{R}^m \mid F(x) \subset A\}$$

kümesi kapalıdır.

3. $\forall A \subset \mathbb{R}^n$ açık kümesi için

$$F^{-1}(A) = \{x \in \mathbb{R}^m \mid F(x) \cap A \neq \emptyset\}$$

kümesi açıktır.

Kanıt. 1) $\Rightarrow$ 2) F alttan-yarı sürekli bir küme değerli dönüşüm olsun. $A \subset \mathbb{R}^n$ kapalı kümesini alalım. $F^{+1}(A)$ kümesi kapalı mıdır?

$\forall i \in \mathbb{N}$ için $x_i \in F^{+1}(A)$ olacak şekilde yakınsak bir $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ dizisi alalım ve $x_i \rightarrow x_0$ olsun. $i \rightarrow +\infty$ iken $\varepsilon_i \rightarrow 0^+$ olacak şekildeki $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ dizisini düşünelim. F küme değerli dönüşümü x_0 noktasında alttan-yarı sürekli olduğundan $\varepsilon_i > 0$ sayısına karşılık $\forall x \in B(x_0, \delta_i)$ için

$$F(x_0) \subset F(x) + \varepsilon_i \cdot B \tag{3.12}$$

olacak şekilde $\exists 0 < \delta_i < \frac{1}{i}$ sayısı vardır. $x_i \rightarrow x_0$ olduğu için $\delta_i > 0$ sayısına karşılık

$$x_{k_i} \in B(x_0, \delta_i) \subset B\left(x_0, \frac{1}{i}\right)$$

olacak şekilde $\exists k_i \in \mathbb{N}$ vardır. O zaman (3.12)'den $\forall i \in \mathbb{N}$ için

$$x_{k_i} \in B\left(x_0, \frac{1}{i}\right), \quad F(x_0) \subset F(x_{k_i}) + \varepsilon_i \cdot B$$

olacak şekilde bir $k_i \in \mathbb{N}$ vardır. $\forall i \in \mathbb{N}$ için $x_i \in F^{+1}(A)$ olduğundan $x_{k_i} \in F^{+1}(A)$, $F(x_{k_i}) \subset A$ ve (3.12)'den $F(x_0) \subset A + \varepsilon_i \cdot B$ olur. $i \rightarrow +\infty$ iken $\varepsilon_i \rightarrow 0^+$, $F(x_0)$ kompakt, A kapalı küme olduğu için $F(x_0) \subset A$, $x_0 \in F^{+1}(A)$ olur. Yani $F^{+1}(A)$ kapalı kümedir.

2) $\Rightarrow$ 3) $A \subset \mathbb{R}^n$ açık kümesini alalım. $F^{-1}(A)$ kümesi açık mıdır? $A \subset \mathbb{R}^n$ açık küme olduğu için $\mathbb{R}^n \setminus A$ kapalı kümedir. O zaman

$$F^{+1}(\mathbb{R}^n \setminus A) = \{x \in \mathbb{R}^m \mid F(x) \subset \mathbb{R}^n \setminus A\}$$

kümesi de kapalı küme olur.

$$\{x \in \mathbb{R}^m \mid F(x) \subset \mathbb{R}^n \setminus A\} = \{x \in \mathbb{R}^m \mid F(x) \cap A = \emptyset\}$$

olduğu için

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^m \setminus F^{+1}(\mathbb{R}^n \setminus A) &= \{x \in \mathbb{R}^m \mid F(x) \cap A \neq \emptyset\} \\ &= F^{-1}(A) \end{aligned}$$

olduğu elde edilir. $F^{+1}(\mathbb{R}^n \setminus A)$ kapalı küme olduğu için $F^{-1}(A)$ kümesi açık kümedir.

3) $\Rightarrow$ 1) $\forall A \subset \mathbb{R}^n$ açık kümesi için $F^{-1}(A)$ kümesi açık olduğunu varsayalım. $x_0 \in \mathbb{R}^m$ alalım. F küme değerli dönüşümü x_0 noktasında alttan-yarı sürekli midir? $\varepsilon > 0$ verilsin.

$$F(x_0) \subset \bigcup_{y \in F(x_0)} \overset{\circ}{B}\left(y, \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

olur. $F(x_0)$ kompakt küme olduğu için $y_i \in F(x_0)$ olmak üzere

$$F(x_0) \subset \bigcup_{i=1}^k \overset{\circ}{B}\left(y_i, \frac{\varepsilon}{2}\right) \quad (3.13)$$

olacak şekilde bir $k \in \mathbb{N}$ vardır. $1 \leq i \leq k$ için

$$F^{-1}\left(\overset{\circ}{B}\left(y_i, \frac{\varepsilon}{2}\right)\right) = \left\{x \in \mathbb{R}^m \mid F(x) \cap \overset{\circ}{B}\left(y_i, \frac{\varepsilon}{2}\right) \neq \emptyset\right\}$$

ve $\forall i = 1, 2, \dots$ için $y_i \in F(x_0)$ olduğundan $x_0 \in F^{-1}\left(\overset{\circ}{B}\left(y_i, \frac{\varepsilon}{2}\right)\right)$ olur. $\overset{\circ}{B}\left(y_i, \frac{\varepsilon}{2}\right) \subset \mathbb{R}^n$ açık küme olduğu için $F^{-1}\left(\overset{\circ}{B}\left(y_i, \frac{\varepsilon}{2}\right)\right)$ kümesi de açık kümedir. O halde

$$\overset{\circ}{B}(x_0, \delta_i) \subset F^{-1}\left(\overset{\circ}{B}\left(y_i, \frac{\varepsilon}{2}\right)\right)$$

olacak şekilde $\delta_i > 0$ sayısı vardır. Yani $1 \leq i \leq k$, $\forall x \in \overset{\circ}{B}(x_0, \delta_i)$ için

$$F(x) \cap \overset{\circ}{B}\left(y_i, \frac{\varepsilon}{2}\right) \neq \emptyset \quad (3.14)$$

$\delta_* = \min\{\delta_i \mid 1 \leq i \leq k\}$ dersek (3.13)'ten $\forall i = 1, 2, \dots$ ve $\forall x \in \overset{\circ}{B}(x_0, \delta_*)$ için

$$F(x) \cap \overset{\circ}{B}\left(y_i, \frac{\varepsilon}{2}\right) \neq \emptyset \quad (3.15)$$

olur. Şimdi $y_* \in F(x_0)$, $x \in \overset{\circ}{B}(x_0, \delta_*)$ alalım. O zaman $\exists 1 \leq i_* \leq k$ vardır $\ni$

$$y_* \in \overset{\circ}{B}\left(y_{i_*}, \frac{\varepsilon}{2}\right) \quad (3.16)$$

olur. $x \in \overset{\circ}{B}(x_0, \delta_*)$ olduğundan (3.15)'e göre

$$z_* \in F(x) \cap \overset{\circ}{B}\left(y_{i_*}, \frac{\varepsilon}{2}\right) \quad (3.17)$$

olacak şekilde $\exists z_* \in F(x)$ vardır. (3.16) ve (3.17)'den

$$\|y_* - z_*\| \leq \|y_* - y_{i_*}\| + \|y_{i_*} - z_*\| < \varepsilon$$

olur. Böylece keyfi $y_* \in F(x_0)$ için $\exists z_* \in F(x)$ vardır $\ni \|y_* - z_*\| < \varepsilon$ olur.

Buradan

$$F(x_0) \subset F(x) + \varepsilon \cdot B \quad (3.18)$$

olduğu söylenebilir. $x \in B(x_0, \delta_*)$ keyfi seçildiğinden (3.18) içermesi $\forall x \in \overset{\circ}{B}(x_0, \delta_*)$ için sağlanır. Yani keyfi $\varepsilon > 0$ sayısı için $\exists \delta > 0$ sayısı vardır $\ni x \in \overset{\circ}{B}(x_0, \delta_*)$ iken

$$F(x_0) \subset F(x) + \varepsilon \cdot B$$

olur. O halde F küme değerli dönüşümü $x_0 \in \mathbb{R}^m$ noktasında alttan-yarı süreklidir. $\square$

3.3 Üstten-Yarı Sürekli Küme Değerli Dönüşümlerin Özellikleri

Üstten-yarı sürekli küme değerli dönüşümlerin bazı özellikleri [24],[27]'de ayrıntılı olarak incelenmiştir.

Tanım 3.3.1. $F : \mathbb{R}^m \rightarrow K(\mathbb{R}^n)$ küme değerli bir dönüşüm olsun.

$$\{ (x, \xi) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \mid \xi \in F(x) \}$$

şeklinde tanımlanan kümeye, F küme değerli dönüşümünün grafiği denir ve $\text{graph}F(\cdot)$ ile gösterilir.

Tanım 3.3.2. $F : \mathbb{R}^m \rightarrow K(\mathbb{R}^n)$, $A \subset \mathbb{R}^m$ olsun. $\forall x \in A$ için $\|F(x)\| \leq c$ olacak şekilde $0 \leq c < +\infty$ sayısı varsa F küme değerli dönüşümü, A kümesinde sınırlıdır denir. Eğer keyfi $x_0 \in \mathbb{R}^m$ için F küme değerli dönüşümü, bu x_0 noktasının en az bir komşuluğunda sınırlı ise F küme değerli dönüşümü, $\mathbb{R}^m$ 'de yerel sınırlıdır denir.

Teorem 3.3.1. [27] $F : \mathbb{R}^m \rightarrow K(\mathbb{R}^n)$, üstten-yarı sürekli ise $\text{graph}F(\cdot)$ kapalıdır. Tersine $\text{graph}F(\cdot)$ kapalı ve F küme değerli dönüşümü $\mathbb{R}^m$ 'de yerel sınırlı ise, $F : \mathbb{R}^m \rightarrow K(\mathbb{R}^n)$ küme değerli dönüşümü üstten-yarı süreklidir.

Kanıt. $F : \mathbb{R}^m \rightarrow K(\mathbb{R}^n)$ üstten-yarı sürekli küme değerli dönüşüm olsun.

$$\text{graph}F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \mid y \in F(x)\}$$

kümesinin kapalı olduğunu gösterelim. $\forall k \in \mathbb{N}$ için $(x_k, y_k) \in \text{graph}F$ ve $(x_k, y_k) \rightarrow (x_0, y_0)$ olacak şekilde bir $\{(x_k, y_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ dizisi alalım. $\forall k \in \mathbb{N}$ için $(x_k, y_k) \in \text{graph}F$ olduğundan

$$y_k \in F(x_k) \tag{3.19}$$

olur. Şimdi $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin. F üstten-yarı sürekli küme değerli dönüşüm olduğundan $x_0 \in \mathbb{R}^m$ için $\exists \delta(x_0, \varepsilon) > 0$ vardır $\ni \forall x \in B(x_0, \delta)$ için

$$F(x) \subset F(x_0) + \varepsilon B$$

olur. $x_k \rightarrow x_0$ olduğundan $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ vardır $\ni k \geq k_0$ için $x_k \in B(x_0, \delta)$ olur. O zaman $\forall k \geq k_0$ için

$$F(x_k) \subset F(x_0) + \varepsilon B \quad (3.20)$$

olduğu elde edilir. (3.19) ve (3.20)'den $\forall k \geq k_0$ için $y_k \in F(x_0) + \varepsilon B$ olur. $y_k \rightarrow y_0$ ve $F(x_0) + \varepsilon B$ kompakt olduğu için $y_0 \in F(x_0) + \varepsilon B$ olur. $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan $y_0 \in F(x_0)$, yani $(x_0, y_0) \in \text{graph} F$ olur. $\text{graph} F$ kapalıdır.

Şimdi $\text{graph} F$ kümesinin kapalı ve F küme değerli dönüşümünün $\mathbb{R}^m$ 'de yerel sınırlı olduğunu varsayalım. Keyfi $x_0 \in \mathbb{R}^m$ alalım. O zaman $\exists \eta > 0$ vardır $\ni \forall x \in B(x_0, \eta)$ için

$$\|F(x)\| \leq c < +\infty \quad (3.21)$$

olur. $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin. $\forall x \in B(x_0, \delta)$ için $F(x) \subset F(x_0) + \varepsilon B$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı olduğunu göstermeliyiz. Aksini varsayalım. Yani $\exists \varepsilon_* > 0$ ve $x_k \rightarrow x_0$ olacak şekilde $\exists \{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ dizisi vardır $\ni \forall k \in \mathbb{N}$ için $y_k \in F(x_k)$ ve

$$y_k \notin F(x_0) + \varepsilon_* B \quad (3.22)$$

olur. $x_k \rightarrow x_0$ olduğundan $\eta > 0$ sayısı için $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ vardır $\ni k \geq k_0$ için $x_k \in B(x_0, \eta)$ olur. $y_k \in F(x_k)$ olduğundan (3.21)'den $k \geq k_0$ için $\|y_k\| \leq c$ olduğu elde edilir. O halde $\{y_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ dizisinin yakınsak alt dizisi vardır. Genelliği bozmadan $y_k \rightarrow y_0$ olduğunu kabul edelim. $\forall k \in \mathbb{N}$ için $(x_k, y_k) \in \text{graph} F$ ve $\text{graph} F$ kapalı ve $(x_k, y_k) \rightarrow (x_0, y_0)$ olduğundan $(x_0, y_0) \in \text{graph} F$ olur. Yani $y_0 \in F(x_0)$,

$$d(y_0, F(x_0)) = 0 \quad (3.23)$$

olduğu elde edilir. (3.22)'den $\forall k \in \mathbb{N}$ için $d(y_k, F(x_0)) \geq \varepsilon_*$, $y_k \rightarrow y_0$ olduğundan

$$d(y_0, F(x_0)) \geq \varepsilon_* > 0$$

olur. Ancak bu sonuç (3.23)'de elde edilen ile çelişir. Öyleyse varsayımımız hatalıdır. Yani F küme değerli dönüşümü x_0 noktasında üstten-yarı sürekli değildir. $\square$

Teorem 3.3.2. $F : \mathbb{R}^m \rightarrow K(\mathbb{R}^n)$ küme değerli dönüşümü üstten-yarı sürekli olsun. Bu durumda $x_i \rightarrow x_0$ olacak şekildeki $\forall \{x_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^m$ dizisine karşılık, $\xi_i \in F(x_i)$, $\xi_i \rightarrow \xi_0$ şeklindeki $\forall \{\xi_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$ dizisi için $\xi_0 \in F(x_0)$ olur. Tersine $F : \mathbb{R}^m \rightarrow K(\mathbb{R}^n)$ küme değerli dönüşümü, x_0 noktasının bir komşuluğunda sınırlı² ve $x_i \rightarrow x_0$ olacak şekildeki $\forall \{x_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^m$ dizisine karşılık, $\xi_i \in F(x_i)$, $\xi_i \rightarrow \xi_0$ şeklindeki $\forall \{\xi_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$ dizisi için $\xi_0 \in F(x_0)$ ise F küme değerli dönüşümü x_0 noktasında üstten-yarı sürekli değildir.

Kanıt. Teorem 3.3.1'den direkt olarak elde edilir. $\square$

Eğer $F : \mathbb{R}^m \rightarrow K(\mathbb{R}^n)$ küme değerli dönüşümü x_0 noktasının komşuluğunda sınırlı olmazsa yukarıdaki teoremin tersi doğru olmaz.

Örnek 3.3.1. $F(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow K(\mathbb{R})$, $F(x) = \{f(x)\}$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

fonksiyonu verilsin. $x_0 = 0$ alalım. $i \rightarrow \infty$ iken $x_i \rightarrow 0$ olacak şekildeki $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ dizilerini düşünelim. $\xi_i \in F(x_i)$ olsun. $x \rightarrow F(x)$ tek değerli olduğu için

$$\xi_i = \begin{cases} \frac{1}{x_i} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

olmalıdır. $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ dizisinin yakınsak olması için belirli bir $N_0 \in \mathbb{N}$ sayısına karşılık $\forall i \geq N_0$ için $x_i = 0$ olmalıdır. Bu $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ dizisine karşılık $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ dizisi için $i \geq N_0$ iken $\xi_i = 0$ olur. O zaman $i \rightarrow \infty$ iken $\xi_i \rightarrow F(x_0) = 0$ olur. Ancak $F(\cdot)$ küme değerli dönüşümü $x_0 = 0$ noktasında üstten-yarı sürekli değildir.

Tanım 3.3.3. $F : \mathbb{R}^m \rightarrow K(\mathbb{R}^n)$ küme değerli bir dönüşüm olsun. $A \subset \mathbb{R}^m$ kümesinin F küme değerli dönüşümü altındaki görüntüsü $F(A)$,

$$F(A) = \bigcup_{a \in A} F(a)$$

²Yani $\exists \varepsilon > 0$ ve $\exists K \geq 0$ sayısı varsa $\exists \forall x \in B(x_0, \varepsilon)$ için $\|F(x)\| \leq K$ oluyorsa

olarak tanımlanır.

Teorem 3.3.3. $F : \mathbb{R}^m \rightarrow K(\mathbb{R}^n)$ üstten-yarı sürekli küme değerli bir dönüşüm, $A \subset \mathbb{R}^m$ kompakt bir küme olsun. Bu durumda $F(A)$, $\mathbb{R}^n$ 'de kompakt kümedir.

Kanıt. Önce $F(A)$ kümesinin kapalı olduğunu gösterelim. $\forall i \in \mathbb{N}$ için $y_i \in F(A)$, $y_i \rightarrow y_0$ olacak şekilde bir $\{y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ dizisi alalım. $y_0 \in F(A)$ olduğunu gösterelim.

$\forall i \in \mathbb{N}$ için $y_i \in F(A)$ olduğundan $\exists x_i \in A$ vardır $\ni y_i \in F(x_i)$ olur. A kompakt olduğu için $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ dizisinin yakınsak bir $\{x_{i_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ alt dizisi vardır ve $x_{i_k} \rightarrow x_0$ olduğunu varsayarsak $x_0 \in A$ olur. O zaman $k \rightarrow \infty$ iken $y_{i_k} \rightarrow y_0$ olur. F üstten-yarı sürekli dönüşüm olduğuna göre Teorem 3.3.2'ye göre $y_0 \in F(x_0)$ olur. $x_0 \in A$ olduğundan $y_0 \in F(A)$ olduğu görülür. O halde $F(A)$ kümesi kapalıdır.

Şimdi $F(A)$ kümesinin sınırlı olduğunu gösterelim. Aksini varsayalım. O zaman $\forall i \in \mathbb{N}$ için $y_i \in F(A)$ olacak şekilde bir $\{y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ dizisi vardır $\ni i \rightarrow \infty$ iken $\|y_i\| \rightarrow \infty$ olur. $\forall i \in \mathbb{N}$ için $y_i \in F(A)$ olduğundan $\exists x_i \in A$ vardır $\ni y_i \in F(x_i)$ olur. A kompakt olduğu için $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ dizisinin yakınsak bir $\{x_{i_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ alt dizisi vardır ve $x_{i_k} \rightarrow x_0$ olduğunu varsayarsak $x_0 \in A$ olur. F üstten-yarı sürekli dönüşüm olduğuna göre, F , x_0 noktasında üstten-yarı süreklidir. O zaman $\varepsilon = 1$ için $\exists \delta > 0$ vardır $\ni \forall x \in B(x_0, \delta)$ için

$$F(x) \subset F(x_0) + B$$

olur. $x_{i_k} \rightarrow x_0$ olduğundan $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ vardır $\ni k \geq k_0$ için $x_{i_k} \in B(x_0, \delta)$ olur. O zaman

$$F(x_{i_k}) \subset F(x_0) + B$$

olur. $y_{i_k} \in F(x_{i_k})$ olduğundan $\forall k \geq k_0$ için

$$y_{i_k} \in F(x_0) + B \quad (3.24)$$

olduğu elde edilir. $c_0 = \max \{\|y\| \mid y \in F(x_0)\}$ diyelim. O zaman (3.24)'ten $\forall k \in \mathbb{N}$ için

$$\|y_{i_k}\| \leq c_0 + 1 \quad (3.25)$$

olur. $i \rightarrow \infty$ iken $\|y_i\| \rightarrow \infty$ olduğundan $k \rightarrow \infty$ iken $\|y_{i_k}\| \rightarrow \infty$ olur. Bu (3.25) ile çelişir. O halde varsayım hatalıdır. $F(A)$ kümesi sınırlıdır.

$F(A) \subset \mathbb{R}^n$ kapalı ve sınırlı olduğundan kompaktır. $\square$

Şimdi iki küme değerli dönüşümün bileşkesinin tanımını verelim.

Tanım 3.3.4. $F_1 : \mathbb{R}^m \rightarrow K(\mathbb{R}^n)$, $F_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow K(\mathbb{R}^p)$ küme değerli dönüşümleri verilsin. $F : \mathbb{R}^m \rightarrow 2^{\mathbb{R}^p}$ küme değerli bileşke dönüşümü

$$F(x) = F_2(F_1(x)) = \bigcup_{y \in F_1(x)} F_2(y)$$

olarak tanımlanır. $2^{\mathbb{R}^p} - \mathbb{R}^p$ uzayının boş olmayan, altkümeleri uzayıdır.

Eğer $F_1(x)$ kompakt küme, F_2 küme değerli dönüşümü üstten-yarı sürekli ise $F_2(F_1(x))$ kompakt kümedir.

Sıradaki teorem konveks bir fonksiyonun, subdiferansiyel kümesinin belirlediği küme değerli dönüşümün üstten-yarı sürekli olduğunu göstermektedir.

Teorem 3.3.4. [2] $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ konveks fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\partial f(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow KV(\mathbb{R}^n)$$

üstten-yarı sürekli küme değerli dönüşümdür. $\partial f(\cdot), f(\cdot)$ fonksiyonunun subdiferansiyelidir.

Kanıt. $x \in \mathbb{R}^n$ alalım. Teorem 2.5.1'e göre $\partial f(x)$ boş kümeden farklı, konveks, kompakt kümedir. Şimdi $x_0 \in \mathbb{R}^n$ alalım ve $\partial f(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow KV(\mathbb{R}^n)$ küme değerli dönüşümünün $x_0 \in \mathbb{R}^n$ noktasında üstten-yarı sürekli olduğunu gösterelim. Teorem 2.5.3.'e göre $\text{graph} \partial f$ kapalıdır. Teorem 2.5.2'ye göre $\partial f(B(x_0, 1))$ kümesi sınırlıdır. O zaman teorem 3.3.1'e göre ∂f küme değerli dönüşümü $x_0 \in \mathbb{R}^n$ noktasında üstten-yarı süreklidir. $\square$

Sonuç: $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ konveks ve türevlenebilir bir fonksiyon ise f sürekli türevlenebilirdir. Yani $\frac{\partial f(\cdot)}{\partial x}$ süreklidir.

Kanıt. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ konveks fonksiyonu türevlenebilir olduğundan $\forall x \in \mathbb{R}^n$ için $\partial f(x) = \left\{ \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right\}$ olur. Teorem 3.3.4'e göre $\partial f(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow KV(\mathbb{R}^n)$ küme değerli dönüşümü üstten-yarı süreklidir. $\partial f(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow KV(\mathbb{R}^n)$ küme değerli dönüşümü üstten-yarı sürekli ve tek değerli olduğundan dolayı süreklidir. O zaman

$$\frac{\partial f(\cdot)}{\partial x} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

fonksiyonu süreklidir. □

4 KÜME DEĞERLİ DÖNÜŞÜMLERDE SÜREKLİLİK, TÜREVLENEBİLME VE KONVEKSLİK ARASINDAKİ İLİŞKİLER, KONVEKS UZATMA

4.1 Contingent Konilerin Tanımı ve Özellikleri

$K \subset \mathbb{R}^n$ kapalı bir küme olsun. $\forall x \in \mathbb{R}^n$ için

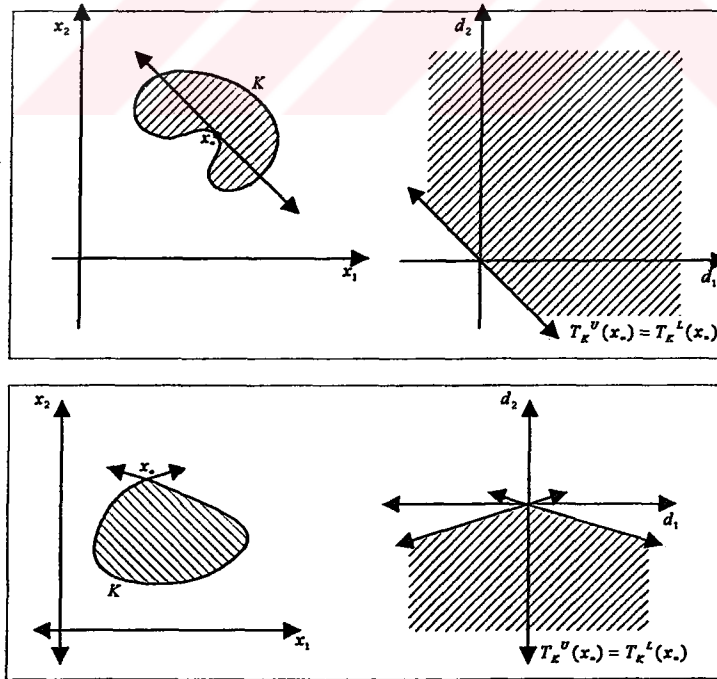
$$T_K^U(x) = \left\{ r \in \mathbb{R}^n \mid \liminf_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\delta} d(x + \delta r, K) = 0 \right\}$$

$$T_K^L(x) = \left\{ r \in \mathbb{R}^n \mid \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\delta} d(x + \delta r, K) = 0 \right\}$$

kümelerini tanımlayalım.

Tanım 4.1.1. $T_K^U(x)$ ($T_K^L(x)$) kümesine K kümesinin x noktasındaki üst(alt) contingent konisi (bazı yerlerde de üst(alt) Bouligand Konisi) adı verilir.

Bu tanım ilk olarak [49]'da yapılmıştır.



Şekil 5.1. Contingent Koni Örnekleri

Önerme 4.1.1. K kapalı küme olmak üzere $\forall x \in \mathbb{R}^n$ için

$$T_K^U(x) , T_K^L(x)$$

kümeleri kapalıdır.

Önerme 4.1.2. $x \notin K \Rightarrow T_K^U(x) = \emptyset , T_K^L(x) = \emptyset$

Önerme 4.1.3. $x \in \text{int}K \Rightarrow T_K^U(x) = \mathbb{R}^n , T_K^L(x) = \mathbb{R}^n$

Önerme 4.1.4. $T_K^U(x) , T_K^L(x)$ kümeleri konidir.

Kanıt. Önce $T_K^U(x)$ kümesinin koni olduğunu görelim.

$x_0 \in K, r \in T_K^U(x_0)$ olsun. $\lambda \geq 0$ için $\lambda r \in T_K^U(x_0)$ olduğunu göstermemiz yeterlidir.

$\lambda = 0 \Rightarrow x_0 \in K$ olduğu için

$$\begin{aligned} \liminf_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\delta} d(x_0 + 0r, K) &= \liminf_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\delta} d(x_0, K) \\ &= \liminf_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{0}{\delta} = 0 \end{aligned}$$

$\lambda > 0$ için

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \inf \frac{1}{\delta} d(x_0 + \delta \lambda r, K) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \inf \frac{\lambda}{\lambda \delta} d(x_0 + (\lambda \delta) r, K)$$

$\gamma = \lambda \delta$ dersek;

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \inf \frac{\lambda}{\lambda \delta} d(x_0 + (\lambda \delta) r, K) &= \lim_{\gamma \rightarrow 0^+} \inf \frac{\lambda}{\gamma} d(x_0 + \gamma r, K) \\ &= \lambda \lim_{\gamma \rightarrow 0^+} \inf \frac{1}{\gamma} d(x_0 + \gamma r, K) \end{aligned}$$

$r \in T_K^U(x_0)$ olduğu için

$$\lambda \lim_{\gamma \rightarrow 0^+} \inf \frac{1}{\gamma} d(x_0 + \gamma r, K) = \lambda 0 = 0$$

olur.

O halde $\lambda \geq 0$ için

$$\liminf_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\delta} d(x_0 + \delta \lambda r, K) = 0$$

Buna göre $\lambda \geq 0$ için $\lambda r \in T_K^U(x_0)$ olur. $T_K^U(x_0)$ konidir.

Şimdi $T_K^L(x)$ kümesinin koni olduğunu görelim.

$x_0 \in K, r \in T_K^L(x_0)$ olsun. $\lambda \geq 0$ için $\lambda r \in T_K^L(x_0)$ olduğunu göstermemiz yeterlidir.

$\lambda = 0 \Rightarrow x_0 \in K$ olduğu için

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\delta} d(x_0 + 0r, K) &= \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\delta} d(x_0, K) \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{0}{\delta} = 0 \end{aligned}$$

$\lambda > 0$ için

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\delta} d(x_0 + \delta \lambda r, K) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{\lambda}{\lambda \delta} d(x_0 + (\lambda \delta) r, K)$$

$\gamma = \lambda \delta$ dersek;

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{\lambda}{\lambda \delta} d(x_0 + (\lambda \delta) r, K) &= \lim_{\gamma \rightarrow 0^+} \frac{\lambda}{\gamma} d(x_0 + \gamma r, K) \\ &= \lambda \lim_{\gamma \rightarrow 0^+} \frac{1}{\gamma} d(x_0 + \gamma r, K) \end{aligned}$$

$r \in T_K^L(x_0)$ olduğu için

$$\lambda \lim_{\gamma \rightarrow 0^+} \frac{1}{\gamma} d(x_0 + \gamma r, K) = \lambda 0 = 0$$

olur. O halde

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\delta} d(x_0 + \delta \lambda r, K) = 0$$

Buna göre $\lambda \geq 0$ için $\lambda r \in T_K^L(x_0)$ olur. $T_K^L(x_0)$ konidir. $\square$

Önerme 4.1.5. $r \in T_K^U(x_0) \Leftrightarrow x_0 + \delta_k r + \delta_k s_k^* \in K$ olacak şekilde $\exists \{\delta_k\}_{k=1}^\infty (k \rightarrow \infty \text{ iken } \delta_k \rightarrow 0^+)$ dizisi ve $\exists \{s_k^*\}_{k=1}^\infty (k \rightarrow \infty \text{ iken } \|s_k^*\| \rightarrow 0)$ vektör dizisi vardır.

Kanıt.

$$\begin{aligned}
x_0 \in K, r \in T_K^U(x_0) &\Leftrightarrow \liminf_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\delta} d(x_0 + \delta r, K) = 0 \\
&\Leftrightarrow \lim_{\delta_k \rightarrow 0^+} \frac{1}{\delta_k} d(x_0 + \delta_k r, K) = 0 \\
&\quad \text{olacak şekilde } \exists \{\delta_k\}_{k=1}^\infty \text{ dizisi vardır.} \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{\delta_k} d(x_0 + \delta_k r, K) = \varepsilon_k, k \rightarrow \infty \text{ iken } \varepsilon_k \rightarrow 0 \\
&\Leftrightarrow d(x_0 + \delta_k r, K) = \varepsilon_k \delta_k \\
&\Leftrightarrow \exists x_k \in K \text{ vardır } \ni \|x_k - x_0 - \delta_k r\| = \varepsilon_k \delta_k \\
&\Leftrightarrow x_k - \delta_k r - x_0 = \varepsilon_k \delta_k s_k, s_k \in S \\
&\quad (S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}) \\
&\Leftrightarrow x_k = x_0 + \delta_k r + \delta_k s_k^* \\
&\quad, \quad k \rightarrow \infty \text{ iken } \|s_k^*\| = \|\varepsilon_k s_k\| \rightarrow 0
\end{aligned}$$

□

Önerme 4.1.6. $r \in T_K^L(x_0) \Leftrightarrow \forall \delta \in [0, \mu]$ için $x_0 + \delta r + \delta s(\delta) \in K$ olacak şekilde $\exists \mu > 0$ sayısı ve $\|s(\delta)\| \rightarrow 0$ olacak şekilde $\exists s(\delta) : [0, \mu] \rightarrow \mathbb{R}^n$ fonksiyonu vardır.

Önerme 4.1.7. $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \varphi \in C^1$ ve $K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(x) \leq 0\}$ olmak üzere

- $x_0 \in \text{int} K$ ise $T_K^U(x_0) = \mathbb{R}^n$
- $x_0 \notin K$ ise $T_K^U(x_0) = \emptyset$ olur.
- $x_0 \in \partial K$ ve $\text{grad} \varphi(x_0) \neq 0$ ise

$$T_K^U(x_0) = \{r \in \mathbb{R}^n \mid \langle \text{grad} \varphi(x_0), r \rangle \leq 0\}$$

Kanıt. $r \in T_K^U(x_0)$ alalım. O zaman $\exists \{\delta_k\}$ dizisi ($\delta_k \rightarrow 0^+$) ve $\exists \{s_k\} (k \rightarrow \infty \text{ iken } \|s_k\| \rightarrow 0)$ vektör dizisi vardır $\ni$

$$x_0 + \delta_k r + s_k \delta_k \in K$$

olur.

$$x_0 + \delta_k r + s_k \delta_k \in K \Rightarrow \varphi(x_0 + \delta_k r + s_k \delta_k) \leq 0$$

$x_0 \in \partial K$ ve $\varphi \in C^1$ olduğu için $\varphi(x_0) = 0$ olur. O zaman

$$\varphi(x_0 + \delta_k r + s_k \delta_k) - \varphi(x_0) \leq 0$$

$\varphi \in C^1$ olduğu için $\forall k \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} \varphi(x_0 + \delta_k r + s_k \delta_k) - \varphi(x_0) &= \left\langle \frac{d\varphi(x_0)}{dx}, (x_0 + \delta_k r + s_k \delta_k - x_0) \right\rangle \\ &\quad + o(x_0 + \delta_k r + s_k \delta_k - x_0) \\ &= \left\langle \frac{d\varphi(x_0)}{dx}, \delta_k r + s_k \delta_k \right\rangle + o(\delta_k r + s_k \delta_k) \end{aligned}$$

yazabiliriz. $\delta_k > 0$ olduğu için

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta_k} [\varphi(x_0 + \delta_k r + s_k \delta_k) - \varphi(x_0)] &= \left\langle \frac{d\varphi(x_0)}{dx}, r \right\rangle + \left\langle \frac{d\varphi(x_0)}{dx}, s_k \right\rangle \\ &\quad + \frac{1}{\delta_k} o(\delta_k r + s_k \delta_k) \leq 0 \end{aligned}$$

Buradan

$$\lim_{\delta_k \rightarrow 0} \frac{1}{\delta_k} [\varphi(x_0 + \delta_k r + s_k \delta_k) - \varphi(x_0)] = \langle \text{grad } \varphi(x_0), r \rangle \leq 0$$

olur. O halde

$$T_K^U(x_0) \subset \{r \in \mathbb{R}^n \mid \langle \text{grad } \varphi(x_0), r \rangle \leq 0\}. \quad (4.1)$$

Şimdi $\text{grad } \varphi(x_0) \neq 0$ olduğunu varsayalım. $r_0 = -\text{grad } \varphi(x_0)$ dersek;

$$\langle \text{grad } \varphi(x_0), r_0 \rangle = -\|\text{grad } \varphi(x_0)\| < 0$$

olur. O halde

$$\{r \in \mathbb{R}^n \mid \langle \text{grad } \varphi(x_0), r \rangle < 0\} \neq \emptyset$$

olur. Şimdi

$$D(x_0) = \{r \in \mathbb{R}^n \mid \langle \text{grad } \varphi(x_0), r_0 \rangle < 0\}$$

diyelim. $r_* \in D(x_0)$ alalım. $r_* \in T_K^U(x_0)$ mıdır?

$r_* \notin T_K^U(x_0)$ olduğunu varsayalım. O zaman $\forall \delta \in [0, \mu]$ için

$$x_0 + \delta r_* \notin K$$

olacak şekilde $\exists \mu > 0$ sayısı vardır. Buna göre $\forall \delta \in [0, \mu]$ için

$$\varphi(x_0 + \delta r_*) > 0$$

olur. $x_0 \in \partial K$ ve $\varphi \in C^1$ olduğu için $\varphi(x_0) = 0$ olur. $\varphi \in C^1$ olduğu için $\forall k \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} \varphi(x_0 + \delta r_*) - \varphi(x_0) &= \left\langle \frac{d\varphi(x_0)}{dx}, (x_0 + \delta r_*) - x_0 \right\rangle \\ &\quad + o(x_0 + \delta r_* - x_0) \\ &= \left\langle \frac{d\varphi(x_0)}{dx}, \delta r_* \right\rangle + o(\delta r_*) \end{aligned}$$

yazabiliriz. $\delta > 0$ olduğu için

$$\frac{1}{\delta} [\varphi(x_0 + \delta r_*) - \varphi(x_0)] = \left\langle \frac{d\varphi(x_0)}{dx}, r_* \right\rangle + \frac{1}{\delta} o(\delta r_*) > 0$$

Buradan

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\delta} [\varphi(x_0 + \delta r_*) - \varphi(x_0)] = \langle \text{grad } \varphi(x_0), r_* \rangle \geq 0$$

olur. Buna göre $r_* \notin D(x_0)$ olduğu çıkar. Bu ise $r_* \in D(x_0)$ almamız ile çelişir. O halde $r_* \in T_K^U(x_0)$ olmalıdır.

$$\{r \in \mathbb{R}^n \mid \langle \text{grad } \varphi(x_0), r_0 \rangle < 0\} \subset T_K^U(x_0)$$

olur. $T_K^U(x_0)$ kapalı küme olduğu için

$$\{r \in \mathbb{R}^n \mid \langle \text{grad } \varphi(x_0), r_0 \rangle \leq 0\} \subset T_K^U(x_0) \quad (4.2)$$

(4.1) ve (4.2)'den dolayı

$$T_K^U(x_0) = \{r \in \mathbb{R}^n \mid \langle \text{grad } \varphi(x_0), r_0 \rangle \leq 0\}$$

olur.

□

4.2 Küme Değerli Dönüşümler İçin Türev Tanımı

$t \in [t_0, \theta]$, $W(t) \subset \mathbb{R}^n$ olmak üzere $t \rightarrow W(t)$ küme değerli dönüşümüne bakalım.

$$W = \text{graph}W(\cdot) = \{ (t, x) \in [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n \mid x \in W(t) \}$$

diyelim. W kümesini her zaman kapalı küme alacağız.

$$t \rightarrow W(t) \text{ üstten-yarı sürekli} \Rightarrow W \text{ kapalıdır.}$$

$(t, x) \in [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n$, $W \subset [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n$, olmak üzere (t, x) noktasındaki alt teğet konisini $T_W^L(t, x) \subset \mathbb{R}^{n+1}$, üst teğet konisini $T_W^U(t, x) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ile gösterelim.

Tanım 4.2.1. [16] $p \in \mathbb{R}$ olmak üzere grafiği $T_W^U(t, x) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ kümesiyle aynı olan

$$p \rightarrow \mathcal{D}^U W(t, x)|(p)$$

küme değerli dönüşümüne $t \rightarrow W(t)$ küme değerli dönüşümünün (t, x) noktasındaki üst diferansiyeli denir.

Tanım 4.2.2. [16] $p \in \mathbb{R}$ olmak üzere grafiği $T_W^L(t, x) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ kümesiyle aynı olan

$$p \rightarrow \mathcal{D}^L W(t, x)|(p)$$

küme değerli dönüşümüne $t \rightarrow W(t)$ küme değerli dönüşümünün (t, x) noktasındaki alt diferansiyeli denir.

$(t, x) \in [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n$ olmak üzere, aşağıdaki kümeleri belirleyelim. (Bkz.[17])

$$\begin{aligned} D^U W(t, x)|(1) &= \left\{ r \in \mathbb{R}^n \mid \exists x_k \in W(t_k), t_k > t, \lim_{t_k \rightarrow t^+} \frac{x_k - x}{t_k - t} = r \right\} \\ D^L W(t, x)|(1) &= \left\{ r \in \mathbb{R}^n \mid \exists x(\tau) \in W(\tau), \tau > t, \lim_{\tau \rightarrow t^+} \frac{x(\tau) - x}{\tau - t} = r \right\} \\ D^U W(t, x)|(-1) &= \left\{ r \in \mathbb{R}^n \mid \exists x_k \in W(t_k), t_k < t, \lim_{t_k \rightarrow t^-} \frac{x_k - x}{t_k - t} = r \right\} \\ D^L W(t, x)|(-1) &= \left\{ r \in \mathbb{R}^n \mid \exists x(\tau) \in W(\tau), \tau < t, \lim_{\tau \rightarrow t^-} \frac{x(\tau) - x}{\tau - t} = r \right\} \end{aligned}$$

$D^U W(t, x)|(1)$ kümesine $t \rightarrow W(t)$ dönüşümünün (t, x) noktasındaki üst sağ türevi, $D^U W(t, x)|(-1)$ kümesine $t \rightarrow W(t)$ dönüşümünün (t, x) noktasındaki üst

için nasıl olduğunu araştıralım. Gösterim kolaylığı açısından

$$D^U W(t, x)|(1) = D^+ W(t, x) , D^U W(t, x)|(-1) = D^- W(t, x)$$

$$D^L W(t, x)|(1) = D_*^+ W(t, x) , D^L W(t, x)|(-1) = D_*^- W(t, x)$$

diyelim.

Önerme 4.3.1. $W \subset \mathbb{R}^{n+1}$ kompakt küme , $t \in [t_0, \theta)$ olmak üzere $\forall (t, x) \in W$ için $D_*^+ W(t, x) \neq \emptyset$ olsun. O zaman $\forall t \in [t_0, \theta)$ için $t \rightarrow W(t)$ küme değerli dönüşümü sağdan süreklidir.

Önerme 4.3.2. $W \subset \mathbb{R}^{n+1}$ kompakt küme , $t \in (t_0, \theta]$ olmak üzere $\forall (t, x) \in W$ için $D_*^- W(t, x) \neq \emptyset$ olsun. O zaman $\forall t \in (t_0, \theta]$ için $t \rightarrow W(t)$ küme değerli dönüşümü soldan süreklidir.

Sonuç: $W \subset \mathbb{R}^{n+1}$ kompakt küme , $t \in [t_0, \theta)$ olmak üzere $\forall (t, x) \in W$ için $D_*^+ W(t, x) \neq \emptyset$ ve $t \in (t_0, \theta]$ olmak üzere $\forall (t, x) \in W$ için $D_*^- W(t, x) \neq \emptyset$ olsun. O zaman $\forall t \in [t_0, \theta]$ için $t \rightarrow W(t)$ küme değerli dönüşümü süreklidir. (t_0 'da sağdan, θ 'da soldan süreklidir.)

Kanıt. (Önerme 4.3.1) W kümesi kompakt olduğu için kapalı ve sınırlıdır. O halde $\exists K > 0$ sayısı vardır $\exists \forall t \in [t_0, \theta]$ için $\|W(t)\| \leq K$ olur³. $t \rightarrow W(t)$ küme değerli dönüşümünün sağdan sürekli olması için sağdan alttan-yarı sürekli ve sağdan üstten-yarı sürekli olması gerekir. W kapalı ve sınırlı olduğu için $t \rightarrow W(t)$ küme değerli dönüşümü üstten-yarı süreklidir. (t_0 'da sağdan, θ 'da soldan) O halde $[t_0, \theta]$ aralığında $t \rightarrow W(t)$ sağdan alttan-yarı sürekli olduğunu göstermek yetecektir.

$t_* \in [t_0, \theta)$ alalım. $t \rightarrow W(t)$ küme değerli dönüşümünün t_* 'da sağdan alttan-yarı sürekli olduğunu görelim.

Bunun için $\delta \rightarrow 0^+$ iken

$$\max_{x \in W(t_*)} d(x, W(t_* + \delta)) \rightarrow 0$$

olduğunu görmek yetecektir.

³ $\|W(t)\| = \max\{ \|x\| \mid x \in W(t) \}$

Aksini varsayalım. O zaman $\exists \{\delta_i\}_{i=1}^{\infty}$ ve $\exists \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ dizisi vardır $\ni i \rightarrow \infty$ iken $\delta_i \rightarrow 0$ ve $x_i \in W(t_*)$ için

$$\lim_{i \rightarrow \infty} d(x_i, W(t_* + \delta_i)) = \varepsilon_* > 0$$

$\sigma \in (0, \varepsilon_*/3)$ alalım. O zaman $\exists N_1 \in \mathbb{N}$ vardır $\ni i \geq N_1$ için

$$d(x_i, W(t_* + \delta_i)) > \varepsilon_* - \sigma \quad (4.3)$$

$x_i \in W(t_*)$ ve $W(t_*)$ kompakt olduğu için $\{x_i\}$ dizisinden yakınsak alt dizisi seçebiliriz. Genelliği bozmadan bu yakınsak alt diziyi $\{x_i\}$ dizisi olarak alalım. $i \rightarrow \infty$ iken $x_i \rightarrow x_*$, $x_* \in W(t_*)$ olur.

O zaman $\sigma > 0$ için $\exists N_2 \in \mathbb{N}$ vardır $\ni i \geq N_2$ için

$$d(x_i, x_*) < \sigma \quad (4.4)$$

olur.

$N = \max\{N_1, N_2\}$ seçersek (4.3) ve (4.4)'ten $i \geq N$ için

$$d(x_i, W(t_* + \delta_i)) - d(x_i, x_*) > \varepsilon_* - 2\sigma \quad (4.5)$$

$$d(x_i, W(t_* + \delta_i)) \leq d(x_i, x_*) + d(x_*, W(t_* + \delta_i))$$

olduğu için

$$d(x_*, W(t_* + \delta_i)) \geq d(x_i, W(t_* + \delta_i)) - d(x_i, x_*) \quad (4.6)$$

O zaman (4.5) ve (4.6)'dan

$$d(x_*, W(t_* + \delta_i)) > \varepsilon_* - 2\sigma > \varepsilon_*/3 \quad (4.7)$$

olur. $\varepsilon_0 = \varepsilon_*/3$ dersek (4.7)'den $i \geq N$ için

$$\overset{\circ}{B}(x_*, \varepsilon_0) \cap W(t_* + \delta_i) = \emptyset \quad (4.8)$$

olduğu elde edilir. $x_* \in W(t_*)$ olduğu için $(t_*, x_*) \in W$ olur. $D_*^+W(t_*, x_*) \neq \emptyset$ olduğunu biliyoruz. Şimdi $r \in D_*^+W(t_*, x_*)$ alalım. Tanıma göre $\exists \mu > 0$ ve $\exists x(t_* + \delta) \in W(t_* + \delta) (\delta \in [0, \mu])$ eğrisi vardır $\ni$

$$r = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{x(t_* + \delta) - x_*}{\delta}$$

Buradan $\delta \rightarrow 0^+$ iken $\|s(\delta)\| \rightarrow 0$ olacak şekilde $\exists \{s(\delta)\}$ eğrisi vardır $\ni \forall \delta \in [0, \mu]$ için

$$\frac{x(t_* + \delta) - x_*}{\delta} = r + s(\delta)$$

olur. Buradan $x(t_* + \delta) = x_* + \delta r + \delta s(\delta)$, $\delta \in (0, \mu]$, $(\mu > 0)$

Yukarıdaki δ_i dizisi için $\exists N_*$ vardır $\ni i \geq N_*$ için $x(t_* + \delta_i) \in W(t_* + \delta_i)$ ve $i \rightarrow \infty$ iken $x(t_* + \delta_i) \rightarrow x_*$. O zaman $\exists N'_* \in \mathbb{N}$ vardır $\ni \forall i \geq N'_*$ için

$$d(x(t_* + \delta_i), x_*) < \varepsilon_0$$

olur. $N_0 = \max\{N_*, N'_*\}$ alırsak $i \geq N_0$ için

$$x(t_* + \delta_i) \in W(t_* + \delta_i) \quad , \quad d(x(t_* + \delta_i), x_*) < \varepsilon_0 \quad (4.9)$$

(4.9)'dan $\forall i \geq N_0$ için

$$d(x_*, W(t_* + \delta_i)) < \varepsilon_0 \quad (4.10)$$

(4.10)'dan dolayı $\forall i \geq N_0$ için

$$\overset{\circ}{B}(x_*, \varepsilon_0) \cap W(t_* + \delta_i) \neq \emptyset \quad (4.11)$$

$N_2 = \max\{N_0, N\}$ dersek $\forall i \geq N_2$ için (4.8) ve (4.11)'den

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{B}(x_*, \varepsilon_0) \cap W(t_* + \delta_i) &= \emptyset \\ \overset{\circ}{B}(x_*, \varepsilon_0) \cap W(t_* + \delta_i) &\neq \emptyset \end{aligned}$$

çıkar. Bu ise çelişkidir. O halde $t \rightarrow W(t)$ küme değerli dönüşümü alttan-yarı sürekli'dir. $\square$

4.4 Örnekler

Eğer $\forall (t, x) \in W, t \in [t_0, \theta]$ için $D^+W(t, x) \neq \emptyset$ ise $t \rightarrow W(t)$ küme değerli dönüşümü sağdan sürekli olur mu?

Örnek 4.4.1. $W(\cdot) : [-1, 1] \rightarrow KV([-1, 1])$

$$W(t) = \begin{cases} \sin \frac{1}{t} & , t \neq 0 \\ [-1, 1] & , t = 0 \end{cases}$$

$t \rightarrow W(t)$, küme değerli dönüşümü $t \in (-1, 1), t \neq 0$ iken sürekli, $t = -1$ noktasında sağdan, $t = 1$ noktasında soldan süreklidir. $t = 0$ noktasında üstten-yarı süreklidir.

$$W = \text{graph}W(\cdot)$$

olmak üzere,

$$D^+W(t, x) = \begin{cases} -\frac{1}{t^2} \cos \frac{1}{t} & , (t, x) \in W, t \in [-1, 1), t \neq 0 \\ (-\infty, \infty) & , t = 0, |x| < 1 \\ (-\infty, 0] & , t = 0, x = 1 \\ [0, \infty) & , t = 0, x = -1 \end{cases}$$

$\forall (t, x) \in W$ için $D^+W(t, x) \neq \emptyset$. Ancak bu dönüşüm $(0, 0)$ noktasında sağdan sürekli değildir. O halde önerme 4.3.1'deki $D_*^+W(t, x)$ kümesi $D^+W(t, x)$ ile değiştirilemez.

$t \rightarrow W(t)$ sürekli, küme değerli bir dönüşüm olsun. $t \in [t_0, \theta)$ olmak üzere $\forall (t, x) \in W$ için $D^+W(t, x) \neq \emptyset$ midir?

Örnek 4.4.2. $W : [-1, 1] \rightarrow KV(\mathbb{R})$

$$t \rightarrow W(t) = \{ x \in \mathbb{R} \mid \sqrt[3]{t} \leq x \leq 2 \}$$

$W(\cdot)$ sürekli, küme değerli bir dönüşümdür. $(0, 0) \in W$ 'dir.

$\forall k$ için $t_k > 0, t_k \downarrow 0$ olmak üzere $x_k \in W(t_k)$ olacak şekilde bir $\{x_k\}$ dizisi alalım.

$$x_k \geq \sqrt[3]{t_k};$$

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_k - 0}{t_k - 0} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_k}{t_k} \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{t_k}}{t_k} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[3]{t_k^2}} \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Bu yüzden $D^+W(0,0) = \emptyset$ olur. O halde sürekli, küme değerli bir dönüşüm için $D^+W(t,x) = \emptyset$ olabilir.

4.5 Grafiği Konveks, Kompakt Küme Değerli

Dönüşümlerin Sürekliliği

Teorem 2.3.1'e göre konveks fonksiyon sürekli dir. Grafiği konveks, kompakt küme değerli dönüşümlerin sürekli olduğunu gösteren aşağıdaki teorem, Teorem 2.3.1'in küme değerli analogisidir.

Teorem 4.5.1. $W(t_0) \neq \emptyset, W(\theta) \neq \emptyset$ ve $t \in [t_0, \theta]$ olmak üzere $t \rightarrow W(t)$ küme değerli dönüşümü için $\text{graph}W(\cdot)$ kompakt, konveks küme ise $t \rightarrow W(t)$ küme değerli dönüşümü $t \in [t_0, \theta]$ aralığında sürekli dir. (t_0 noktasında sağdan, θ noktasında soldan sürekli dir.)

Kanıt. $t \in [t_0, \theta)$ olmak üzere $\forall (t, x) \in W$ için $D_*^+W(t, x) \neq \emptyset$ ve $t \in (t_0, \theta]$ olmak üzere $\forall (t, x) \in W$ için $D_*^-W(t, x) \neq \emptyset$ olduğunu göstermek yetecektir.

$t \in [t_0, \theta)$ olmak üzere $\forall (t, x) \in W$ için $D_*^+W(t, x) \neq \emptyset$ olduğunu gösterelim. $t_* \in [t_0, \theta)$ olmak üzere $(t_*, x_*) \in W$ alalım. $D_*^+W(t_*, x_*) \neq \emptyset$ mi? $t_* \in [t_0, \theta)$ olduğu için $\exists t^* > t_*$ vardır $\ni t^* \in [t_*, \theta)$ olur. $W(t_0) \neq \emptyset, W(\theta) \neq \emptyset$ olduğu için $\forall t \in [t_0, \theta)$ için $W(t) \neq \emptyset$ olur. Şimdi $y_* \in W(t^*)$ alalım.

$$d_* = \frac{y_* - x_*}{t^* - t_*}$$

diyelim. $\delta \in [0, t^* - t_*]$ için

$$x(t_* + \delta) = x_* + \delta d_* \quad (4.12)$$

olsun.

$$\begin{aligned}
x(t_* + \delta) &= x_* + \delta \frac{y_* - x_*}{t^* - t_*} \\
&= \left(1 - \frac{\delta}{t^* - t_*}\right) x_* + \frac{\delta}{t^* - t_*} y_*
\end{aligned}$$

Buradan

$$\begin{aligned}
(t_* + \delta, x(t_* + \delta)) &= \left(1 - \frac{\delta}{t^* - t_*}\right) (t_*, x_*) \\
&\quad + \frac{\delta}{t^* - t_*} (t^*, y_*)
\end{aligned} \tag{4.13}$$

olur.

$\delta \in [0, t^* - t_*]$ olduğu için

$$0 \leq \frac{\delta}{t^* - t_*} \leq 1 \tag{4.14}$$

olur.

$x_* \in W(t_*)$, $y_* \in W(t^*)$ idi. O halde $(t_*, x_*) \in W$, $(t^*, y_*) \in W$ olur. W konveks küme olduğundan (4.13) ve (4.14)'ten

$$\forall \delta \in [0, t^* - t_*] \text{ için } (t_* + \delta, x(t_* + \delta)) \in W$$

$$x(t_* + \delta) \in W(t_* + \delta)$$

olur. (4.12)'den dolayı

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{x(t_* + \delta) - x_*}{\delta} = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{x_* + \delta d_* - x_*}{\delta} = d_*$$

olur. Buna göre $d_* \in D_*^+ W(t_*, x_*)$ olur. Yani $D_*^+ W(t_*, x_*) \neq \emptyset$.

$t_* \in [t_0, \theta)$ olmak üzere $(t_*, x_*) \in W$ keyfi seçildiğinden $\forall (t, x) \in W$ için $D_*^+ W(t, x) \neq \emptyset$.

Benzer olarak keyfi $(t, x) \in W$, $t \in [t_0, \theta]$ için $D_*^- W(t, x) \neq \emptyset$ olduğu gösterilebilir.

O zaman önerme 4.3.1 ve önerme 4.3.2'den istenen ispatlanmış olur. $\square$

4.6 Küme Değerli Dönüşümler İçin

Konveks Devam

Tanım 4.6.1. $W \subset [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n$ konveks, kompakt küme $W(t_0) \neq \emptyset, W(\theta) \neq \emptyset$ ve

$$W(t) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (t, x) \in W \}$$

olsun. $W_*(t_0 - \alpha) \neq \emptyset, W_*(\theta + \alpha) \neq \emptyset, \forall t \in [t_0, \theta]$ için $W_*(t) = W(t)$ şartlarını sağlayacak şekilde $\exists \alpha > 0$ ve $\exists W_* \subset [t_0 - \alpha, \theta + \alpha] \times \mathbb{R}^n$ kompakt, konveks kümesi varsa $t \rightarrow W_*(t), (t \in [t_0 - \alpha, \theta + \alpha])$ dönüşümüne $t \rightarrow W(t)$ dönüşümünün konveks devamı denir.

Konveks, kompakt keyfi bir W kümesi, $t \in [t_0, \theta], t \rightarrow W(t)$ küme değerli dönüşümü için böyle bir devam olmayabilir.

Örnek 4.6.1.

$$W = \{ (t, x) \in [0, 2] \times \mathbb{R} \mid -1 - \sqrt{t} \leq x \leq 1 + \sqrt{t} \}$$

$t \rightarrow W(t)$ küme değerli dönüşümü için $\text{int}(W(0)) \neq \emptyset, \text{int}(W(2)) \neq \emptyset$. W konveks, kompakt kümedir. Ancak W 'nin 0'dan sola konveks olarak uzatılması mümkün değil.

$V_*, V^* \subset \mathbb{R}^n$ konveks, kompakt kümeler, $t_*, t^* \in \mathbb{R}, t_* < t^*, t \in [t_*, t^*]$ olmak üzere

$$V(t) = \left(1 - \frac{t - t_*}{t^* - t_*}\right) V_* + \frac{t - t_*}{t^* - t_*} V^* \quad (4.15)$$

kümesini tanımlayalım.

$$t = t_* \Rightarrow V(t_*) = V_*$$

$$t = t^* \Rightarrow V(t^*) = V^*$$

$t \rightarrow V(t)$ küme değerli dönüşümünün grafiğini,

$$V = \text{graph} V(\cdot) = \{ (t, x) \in [t_*, t^*] \times \mathbb{R}^n \mid x \in V(t) \} \quad (4.16)$$

ile göstereceğiz.

Önerme 4.6.1. $V \subset [t_*, t^*] \times \mathbb{R}^n$ konveks, kompakt kümedir.

Teorem 4.6.1. $V_*, V^* \subset \mathbb{R}^n$ konveks, kompakt kümeler ve $\text{int}(V_*) \neq \emptyset$, $\text{int}(V^*) \neq \emptyset$ olsun.

O zaman $\exists \alpha_* > 0$ sayısı ve $\exists W \subset [t_* - \alpha_*, t^* + \alpha_*] \times \mathbb{R}^n$ konveks, kompakt kümesi vardır $\ni$

$$W(t_* - \alpha_*) \neq \emptyset, W(t^* + \alpha_*) \neq \emptyset$$

ve $\forall t \in [t_*, t^*]$ için $W(t) = V(t)$ olur.

$$(W(t) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (t, x) \in W \})$$

Kanıt. $x_0 \in \text{int}(V_*)$, $x_1 \in \text{int}(V^*)$ alalım. O zaman $\exists \varepsilon > 0$ sayısı vardır $\ni S_\varepsilon(x_0) \subset V_*$, $S_\varepsilon(x_1) \subset V^*$ olur.

$\alpha > 0$ herhangi bir sayı olsun. $t \in [t_* - \alpha, t^* + \alpha]$ olmak üzere

$$V_\alpha^-(x_0)|(t) = x_0 + \frac{t - t_* + \alpha}{\alpha}(V_* - x_0)$$

$$V_\alpha^+(x_1)|(t) = x_1 + \frac{t^* + \alpha - t}{\alpha}(V^* - x_1)$$

kümelerini tanımlayalım. O zaman

$$V_\alpha^-(x_0)|(t_* - \alpha) = x_0, \quad V_\alpha^-(x_0)|(t_*) = V_* \quad (4.17)$$

$$V_\alpha^+(x_1)|(t^* + \alpha) = x_1, \quad V_\alpha^+(x_1)|(t^*) = V^* \quad (4.18)$$

eşitlikleri doğru olur. $S_\varepsilon(x_0) \subset V_*$, $S_\varepsilon(x_1) \subset V^*$ olduğu için

$$S_\varepsilon\left(\frac{t^* - t_* + \alpha}{\alpha}\right)(x_0) \subset V_\alpha^-(x_0)|(t^*) \quad (4.19)$$

$$S_\varepsilon\left(\frac{t^* - t_* + \alpha}{\alpha}\right)(x_1) \subset V_\alpha^+(x_1)|(t_*) \quad (4.20)$$

olduğu çıkar.

$\forall \varepsilon > 0$ için $\alpha \downarrow 0$ iken $\varepsilon \left(\frac{t^* - t_* + \alpha}{\alpha}\right)$ monoton artarak ∞ 'a gider. $V_*, V^* \subset \mathbb{R}^n$ konveks, kompakt kümelerdir. O zaman (4.19), (4.20)'den yeteri kadar küçük α 'lar

için

$$V^* \subset S_{\varepsilon}\left(\frac{t^*-t_*+\alpha}{\alpha}\right)(x_0) \quad (4.21)$$

$$V_* \subset S_{\varepsilon}\left(\frac{t^*-t_*+\alpha}{\alpha}\right)(x_1) \quad (4.22)$$

olur.

(4.19)-(4.22)'den yeteri kadar küçük α 'lar için

$$V^* \subset V_{\alpha}^-(x_0)|(t^*)$$

$$V_* \subset V_{\alpha}^+(x_1)|(t_*)$$

olur. O halde

$$A = \{ \beta > 0 \mid V^* \subset V_{\beta}^-(x_0)|(t^*) \} \quad (4.23)$$

$$B = \{ \gamma > 0 \mid V_* \subset V_{\gamma}^+(x_1)|(t_*) \} \quad (4.24)$$

şeklinde tanımlayacağımız $A, B \subset \mathbb{R}$ kümeleri için $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$ olur.

$\beta_* \in A (\gamma_* \in B)$ ise $\forall \beta \in (0, \beta_*) (\forall \gamma \in (0, \gamma_*))$ için $\beta \in A (\gamma \in B)$ olur. $\alpha_* = \min\{\gamma_*, \beta_*\}$ alırsak $\alpha_* \in A \cap B$ olur.

Şimdi $t \in [t_* - \alpha_*, t^* + \alpha_*]$ olmak üzere

$$V_{\alpha_*}^-(x_0)|(t) = x_0 + \frac{t - t_* + \alpha_*}{\alpha_*}(V_* - x_0) \quad (4.25)$$

$$V_{\alpha_*}^+(x_1)|(t) = x_1 + \frac{t^* + \alpha_* - t}{\alpha_*}(V^* - x_1) \quad (4.26)$$

diyelim.

$\alpha_* > 0$ sayısının belirlenişinden ve (4.25),(4.26)'dan dolayı

$$\begin{aligned} V_{\alpha_*}^-(x_0)|(t_* - \alpha_*) &= x_0, \quad V_{\alpha_*}^-(x_0)|(t_*) = V_*, \\ V^* &\subset V_{\alpha_*}^-(x_0)|(t^*) \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} V_{\alpha_*}^+(x_1)|(t^* + \alpha_*) &= x_1, \quad V_{\alpha_*}^+(x_1)|(t^*) = V^*, \\ V_* &\subset V_{\alpha_*}^+(x_1)|(t_*) \end{aligned} \quad (4.28)$$

şartları sağlanır.

$$V_{\alpha_*}^-(x_0) = \{ (t, x) \in [t_* - \alpha_*, t^* + \alpha_*] \times \mathbb{R}^n \mid x \in V_{\alpha_*}^-(x_0)|(t) \}$$

$$V_{\alpha_*}^+(x_1) = \{ (t, x) \in [t_* - \alpha_*, t^* + \alpha_*] \times \mathbb{R}^n \mid x \in V_{\alpha_*}^+(x_1)|(t) \}$$

diyelim.

$G \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, konveks küme, $0 \in G$, $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2$ ise $\lambda_1 G \subset \lambda_2 G$ olduğunu ispatlayabiliriz.

$t \rightarrow \frac{t-t_*+\alpha_*}{\alpha_*}$ fonksiyonu monoton artan ve $0 \in V_* - x_0$ olduğu için $t_1 \in [t_*, t^* + \alpha_*)$, $z_* \in V_{\alpha_*}^-(x_0)|(t_1)$ ise $\forall t \in [t_1, t^* + \alpha_*)$ için $z_* \in V_{\alpha_*}^-(x_0)|(t)$ olur.

Benzer olarak $t_1 \in (t_* - \alpha_*, t^*]$, $z_* \in V_{\alpha_*}^+(x_1)|(t_1)$ ise $\forall t \in (t_* - \alpha_*, t_1]$ için $z_* \in V_{\alpha_*}^+(x_1)|(t)$ olur.

Şimdi $\forall t \in [t_*, t^*]$ için

$$V(t) \subset V_{\alpha_*}^-(x_0)|(t) \quad (4.29)$$

olduğunu ispatlayalım.

$$t = t_* \Rightarrow V(t_*) = V_* = V_{\alpha_*}^-(x_0)|(t_*)$$

$$t = t^* \Rightarrow V(t^*) = V^* \subset V_{\alpha_*}^-(x_0)|(t^*)$$

olduğu için $t = t_*, t = t^*$ durumları için (4.29) doğrudur.

Şimdi $t_0 \in (t_*, t^*)$ ve $x_0^* \in V(t_0)$ alalım. (4.15)'ten $\exists x_0' \in V_*, \exists x_1' \in V^*$ vardır $\ni$

$$x_0^* = \left(1 - \frac{t_0 - t_*}{t^* - t_*}\right) x_0' + \frac{t_0 - t_*}{t^* - t_*} x_1'$$

olur.

$$x_0' \in V_* = V_{\alpha_*}^-(x_0)|(t_*) \quad , \quad x_1' \in V^* \subset V_{\alpha_*}^-(x_0)|(t^*)$$

ve $V_{\alpha_*}^-(x_0)$ konveks olduğu için

$$(t_0, x_0^*) \subset V_{\alpha_*}^-(x_0)$$

$$x_0^* \in V_{\alpha_*}^-(x_0)|(t_0)$$

olur.

O halde $\forall t \in [t_*, t^*]$ için

$$V(t) \subset V_{\alpha_*}^-(x_0)|(t)$$

olur.

Şimdi $\forall t \in [t^*, t^* + \alpha_*]$ için

$$V_{\alpha_*}^+(x_1)|(t) \subset V_{\alpha_*}^-(x_0)|(t) \quad (4.30)$$

olduğunu ispatlayalım.

$t = t^*$ iken $V_{\alpha_*}^+(x_1)|(t^*) = V^*$ ve $\alpha_* \in A \cap B$ olduğu için

$$V_{\alpha_*}^+(x_1)|(t^*) = V^* \subset V_{\alpha_*}^-(x_0)|(t^*)$$

olur.

$x_1 \in \text{int}(V^*)$ olduğu için $x_1 \in V_{\alpha_*}^-(x_0)|(t^*)$ olur. Buradan $\forall t \in [t^*, t^* + \alpha_*]$ için $x_1 \in V_{\alpha_*}^-(x_0)|(t)$ olur. $x_1 \in V_{\alpha_*}^-(x_0)|(t^* + \alpha_*)$ 'dir.

$V_{\alpha_*}^+(x_1)|(t^* + \alpha_*) = x_1$ olduğu için

$$V_{\alpha_*}^+(x_1)|(t^* + \alpha_*) \subset V_{\alpha_*}^-(x_0)|(t^* + \alpha_*)$$

olur.

Şimdi $t^0 \in (t^*, t^* + \alpha_*)$ ve $z_* \in V_{\alpha_*}^+(x_1)|(t^0)$ alalım. (4.26)'ya göre $\exists x^* \in V^*$ vardır $\ni$

$$\begin{aligned} z_* &= x_1 + \frac{t^* + \alpha_* - t_0}{\alpha_*} (x^* - x_1) \\ &= \left(1 - \frac{t^* + \alpha_* - t_0}{\alpha_*}\right) x_1 + \frac{t^* + \alpha_* - t_0}{\alpha_*} x^* \\ &= \left(\frac{t^0 - t^*}{\alpha_*}\right) x_1 + \left(1 - \frac{t^0 - t^*}{\alpha_*}\right) x^* \end{aligned}$$

olur.

$$x^* \in V_{\alpha_*}^-(x_0)|(t^*) \quad , \quad x_1 \in V_{\alpha_*}^-(x_0)|(t^* + \alpha_*)$$

ve $V_{\alpha_*}^-(x_0)$ konveks olduğu için $(t^0, z_*) \in V_{\alpha_*}^-(x_0)$, $z_* \in V_{\alpha_*}^-(x_0)|(t^0)$ olur.

O halde $\forall t \in [t^*, t^* + \alpha_*]$ için

$$V_{\alpha_*}^+(x_1)|(t) \subset V_{\alpha_*}^-(x_0)|(t)$$

olur.

Benzer olarak $\forall t \in [t_*, t^*]$ için

$$V(t) \subset V_{\alpha_*}^+(x_1)|(t) \quad (4.31)$$

ve $\forall t \in (t_* - \alpha_*, t_*]$ için

$$V_{\alpha_*}^-(x_0)|(t) \subset V_{\alpha_*}^+(x_1)|(t) \quad (4.32)$$

olduğu gösterilebilir.

$$V_0(t_* - \alpha_*) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid V^* \subset x + \frac{t^* + \alpha_* - t_*}{\alpha_*} (V_* - x)\} \quad (4.33)$$

$$V_0(t^* + \alpha_*) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid V_* \subset x + \frac{t^* + \alpha_* - t_*}{\alpha_*} (V^* - x)\} \quad (4.34)$$

kümelerini tanımlayalım.

$\alpha_* \in A \cap B$ olduğu için $V_0(t_* - \alpha_*) \neq \emptyset$, $V_0(t^* + \alpha_*) \neq \emptyset$ 'dir. $V_0(t_* - \alpha_*)$ kümesinin konveks, kompakt olduğunu gösterelim.

Önce $V_0(t_* - \alpha_*)$ kümesinin konveks olduğunu gösterelim.

$x_1, x_2 \in V_0(t_* - \alpha_*)$ alalım. $V_0(t_* - \alpha_*)$ kümesinin tanımlanışından,

$$V^* \subset \left(1 - \frac{t^* + \alpha_* - t_*}{\alpha_*}\right) x_1 + \left(\frac{t^* + \alpha_* - t_*}{\alpha_*}\right) V_* \quad (4.35)$$

$$V^* \subset \left(1 - \frac{t^* + \alpha_* - t_*}{\alpha_*}\right) x_2 + \left(\frac{t^* + \alpha_* - t_*}{\alpha_*}\right) V_* \quad (4.36)$$

olur.

$\lambda \in [0, 1]$ alalım.

$$\begin{aligned} \lambda V^* + (1 - \lambda) V^* &\subset \\ \left(1 - \frac{t^* + \alpha_* - t_*}{\alpha_*}\right) (\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2) &+ \left(\frac{t^* + \alpha_* - t_*}{\alpha_*}\right) \lambda V_* + (1 - \lambda) V_* \end{aligned}$$

V_*, V^* konveks kümeler olduğu için

$$\lambda V^* + (1 - \lambda) V^* = V^*, \lambda V_* + (1 - \lambda) V_* = V_*$$

olur. Buradan

$$V^* \subset \left(1 - \frac{t^* + \alpha_* - t_*}{\alpha_*}\right) (\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) + \left(\frac{t^* + \alpha_* - t_*}{\alpha_*}\right) V_*$$

çıkar. O halde $(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \in V_0(t_* - \alpha_*)$ olur. Yani $V_0(t_* - \alpha_*)$ kümesi konvektstir.

Şimdi $V_0(t_* - \alpha_*)$ kümesinin kompakt olduğunu göstereyim. $n \rightarrow \infty$ iken $x_n \rightarrow x_*$ olacak şekilde bir $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset V_0(t_* - \alpha_*)$ dizisi alalım. Buna göre $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$V^* \subset \left(1 - \frac{t^* + \alpha_* - t_*}{\alpha_*}\right) x_n + \left(\frac{t^* + \alpha_* - t_*}{\alpha_*}\right) V_* \quad (4.37)$$

olur. V_* ve V^* kompakt olduğu için

$$V^* \subset \left(1 - \frac{t^* + \alpha_* - t_*}{\alpha_*}\right) x_* + \left(\frac{t^* + \alpha_* - t_*}{\alpha_*}\right) V_* \quad (4.38)$$

olur. O halde $x_* \in V_0(t_* - \alpha_*)$ 'dir. $V_0(t_* - \alpha_*)$ kümesi kapalıdır.

$V_0(t_* - \alpha_*)$ kümesi sınırlı mı? Tersini kabul edelim. O zaman $n \rightarrow \infty$ iken $\|y_n\| \rightarrow \infty$ olacak şekilde $\exists \{y_n\}_{n=1}^\infty \subset V_0(t_* - \alpha_*)$ dizisi vardır. $v^* \in V^*$ alalım. (4.33)'e göre $\forall y_n \in V_0(t_* - \alpha_*)$ için $\exists v_n \in V_*$ vardır $\ni$

$$v^* = \left(1 - \frac{t^* + \alpha_* - t_*}{\alpha_*}\right) y_n + \left(\frac{t^* + \alpha_* - t_*}{\alpha_*}\right) v_n$$

olur. Buradan

$$y_n = \left(\frac{t^* + \alpha_* - t_*}{t^* - t_*}\right) v_n - \left(\frac{\alpha_*}{t_* - t^*}\right) v^*$$

$v_n \in V_*, n = 1, 2, \dots$

V_* kompakt olduğu için $\exists M > 0$ sayısı vardır $\ni \forall n \in \mathbb{N}$ için $\|v_n\| \leq M$ olur.

$$\begin{aligned} \|y_n\| &= \left\| \frac{t^* + \alpha_* - t_*}{t^* - t_*} \cdot v_n - \frac{\alpha_*}{t_* - t^*} \cdot v^* \right\| \\ &\leq \frac{t^* + \alpha_* - t_*}{t^* - t_*} \cdot \|v_n\| + \frac{\alpha_*}{t_* - t^*} \cdot \|v^*\| \\ &\leq \frac{t^* + \alpha_* - t_*}{t^* - t_*} \cdot M + \frac{\alpha_*}{t_* - t^*} \cdot \|v^*\| \end{aligned}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\|y_n\| \leq \frac{t^* + \alpha_* - t_*}{t^* - t_*} \cdot M + \frac{\alpha_*}{t_* - t^*} \cdot \|v^*\|$$

olur. Bu eşitsizlik $n \rightarrow \infty$ iken $\|y_n\| \rightarrow \infty$ olması ile çelişir. O halde $V_0(t_* - \alpha_*)$ kümesi sınırlıdır.

$V_0(t_* - \alpha_*)$ kümesi hem kapalı, hem sınırlıdır. Buna göre $V_0(t_* - \alpha_*)$ kümesi kompaktır.

Benzer olarak $V_0(t^* + \alpha_*)$ konveks, kompakt kümedir.

Şimdi $\forall t \in [t_* - \alpha_*, t^* + \alpha_*]$ için $t \rightarrow V_0^-(t)$,

$$V_0^-(t) = \left(1 - \frac{t - t_* + \alpha_*}{\alpha_*}\right) V_0(t_* - \alpha_*) + \left(\frac{t - t_* + \alpha_*}{\alpha_*}\right) V_*$$

, $\forall t \in [t_* - \alpha_*, t^* + \alpha_*]$ için $t \rightarrow V_0^+(t)$,

$$V_0^+(t) = \left(1 - \frac{t^* + \alpha_* - t}{\alpha_*}\right) V_0(t^* + \alpha_*) + \left(\frac{t^* + \alpha_* - t}{\alpha_*}\right) V^*$$

küme değerli dönüşümlerini ve

$$V_0^- = \{ (t, x) \in [t_* - \alpha_*, t^* + \alpha_*] \times \mathbb{R}^n \mid x \in V_0^-(t) \}$$

$$V_0^+ = \{ (t, x) \in [t_* - \alpha_*, t^* + \alpha_*] \times \mathbb{R}^n \mid x \in V_0^+(t) \}$$

kümelerini tanımlayalım.

Şimdi $t \in [t_* - \alpha_*, t^* + \alpha_*]$ olmak üzere $t \rightarrow W(t)$,

$$W(t) = \begin{cases} V_0^-(t) & , t \in [t_* - \alpha_*, t_*] \\ V(t) & , t \in [t_*, t^*] \\ V_0^+(t) & , t \in [t^*, t^* + \alpha_*] \end{cases} \quad (4.39)$$

küme değerli dönüşümünü tanımlayalım.

$$\begin{aligned} W &= graph W(\cdot) \\ &= \{ (t, x) \in [t_* - \alpha_*, t^* + \alpha_*] \times \mathbb{R}^n \mid x \in W(t) \} \end{aligned} \quad (4.40)$$

diyelim.

$V_0^-(t_*) = V(t_*) = V_*$, $V_0^+(t^*) = V(t^*) = V^*$ olduğu için (4.39) doğrudur. W kümesi kapalı ve sınırlıdır.

$$W(t_* - \alpha_*) \neq \emptyset, W(t^* + \alpha_*) \neq \emptyset$$

ve $\forall t \in [t_*, t^*]$ için $W(t) = V(t)$ koşulları sağlanır.

Şimdi W kümesinin konveks olduğunu gösterelim. $t_1 > t_0$ olmak üzere $(t_0, y_0), (t_1, y_1) \in W$ alalım.

$$Q = \left\{ (t, x) \in [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \mid (t, x) = \left(1 - \frac{t_1 - t}{t_1 - t_0}\right) (t_0, y_0) + \frac{t_1 - t}{t_1 - t_0} (t_1, y_1) \right\}$$

kümesini tanımlayalım. Q kümesi (t_0, y_0) ve (t_1, y_1) noktalarını birleştiren kapalı aralıktır.

Eğer $t_1 \in [t_* - \alpha_*, t_*]$ veya $t_0 \in [t^*, t^* + \alpha_*]$ ise

$$V_0 = \{(t, x) \in [t_* - \alpha_*, t_*] \times \mathbb{R}^n \mid x \in V_0^-(t)\}$$

$$V_1 = \{(t, x) \in [t^*, t^* + \alpha_*] \times \mathbb{R}^n \mid x \in V_0^+(t)\}$$

kümeleri konveks olduğundan dolayı $Q \subset W$ olur. Eğer $t_0, t_1 \in [t_*, t^*]$ ise V kümesinin konveks oluşundan dolayı $Q \subset W$ olur.

Şimdi $t_0 \in [t_* - \alpha_*, t_*], t_1 \in (t^*, t^* + \alpha_*]$ alalım.

$$W(t_0) = V_0^-(t_0), W(t_1) = V_0^+(t_1)$$

olduğu için $V_0^-(\cdot), V_0^+(\cdot)$ dönüşümlerinin tanımlanışından

$\exists y_* \in V_0^-(t_* - \alpha_*) = V_0(t_* - \alpha_*), \exists v_* \in V_*$ ve $\exists y^* \in V_0^+(t^* + \alpha_*) = V_0(t^* + \alpha_*), \exists v^* \in V^*$ vardır $\ni$

$$y_0 = \left(1 - \frac{t_0 - t_* + \alpha_*}{\alpha_*}\right) y_* + \left(\frac{t_0 - t_* + \alpha_*}{\alpha_*}\right) v_* \quad (4.41)$$

$$y_1 = \left(1 - \frac{t^* + \alpha_* - t_1}{\alpha_*}\right) y^* + \left(\frac{t^* + \alpha_* - t_1}{\alpha_*}\right) v^* \quad (4.42)$$

olur.

$t \in [t_* - \alpha_*, t^* + \alpha_*]$ için $V_{\alpha_*}^-(y_*)|(t)$ ve $V_{\alpha_*}^+(y^*)|(t)$ dönüşümlerine bakalım. Burada

$$V_{\alpha_*}^-(y_*)|(t) = y_* + \frac{t - t_* + \alpha_*}{\alpha_*} \cdot (V_* - y_*) \quad (4.43)$$

$$V_{\alpha_*}^+(y^*)|(t) = y^* + \frac{t^* + \alpha_* - t}{\alpha_*} \cdot (V^* - y^*)$$

olmak üzere; $y_* \in V_0(t_* - \alpha_*)$ ve $y^* \in V_0(t^* + \alpha_*)$ olduğu için (4.33) ve (4.34)'e göre

$$V_{\alpha_*}^-(y_*)|(t_*) = V_* \quad , \quad V^* \subset V_{\alpha_*}^-(y_*)|(t^*) \quad (4.44)$$

$$V_{\alpha_*}^+(y^*)|(t^*) = V^* \quad , \quad V_* \subset V_{\alpha_*}^+(y^*)|(t_*). \quad (4.45)$$

Buradan (4.26), (4.30)'a benzer olarak $\forall t \in [t_*, t^*]$ için

$$V(t) \subset V_{\alpha_*}^-(y_*)|(t) \quad , \quad V(t) \subset V_{\alpha_*}^+(y^*)|(t) \quad (4.46)$$

olur.

Şimdi $y^* \in V_{\alpha_*}^-(y_*)|(t^* + \alpha_*)$ olduğunu ispatlayalım.

$E \subset \mathbb{R}^n, \psi \in \mathbb{R}^n$ için

$$c(E, \psi) = \sup_{e \in E} \langle e, \psi \rangle$$

fonksiyonunu tanımlayalım. (4.43)'ten $\forall t \in [t_* - \alpha_*, t^* + \alpha_*]$ için

$$\begin{aligned} c(V_{\alpha_*}^-(y_*)|(t), \psi) &= \left(1 - \frac{t - t_* + \alpha_*}{\alpha_*}\right) \langle y_*, \psi \rangle \\ &+ \left(\frac{t - t_* + \alpha_*}{\alpha_*}\right) c(V_*, \psi) \end{aligned} \quad (4.47)$$

$$\begin{aligned} c(V_{\alpha_*}^+(y^*)|(t), \psi) &= \left(1 - \frac{t^* + \alpha_* - t}{\alpha_*}\right) \langle y^*, \psi \rangle \\ &+ \left(\frac{t^* + \alpha_* - t}{\alpha_*}\right) c(V^*, \psi) \end{aligned} \quad (4.48)$$

(4.44) ve (4.47)'den

$$c(V^*, \psi) \leq \left(1 - \frac{t^* - t_* + \alpha_*}{\alpha_*}\right) \langle y_*, \psi \rangle + \frac{t^* - t_* + \alpha_*}{\alpha_*} c(V_*, \psi).$$

Buradan $\forall \psi \in \mathbb{R}^n$ için

$$\langle y_*, \psi \rangle \leq c(V_*, \psi) + \frac{\alpha_*}{t^* - t_*} \cdot [c(V_*, \psi) - c(V^*, \psi)] \quad (4.49)$$

çıkar. (4.45) ve (4.48)'den

$$c(V_*, \psi) \leq \left(1 - \frac{t^* - t_* + \alpha_*}{\alpha_*}\right) \langle y^*, \psi \rangle + \frac{t^* - t_* + \alpha_*}{\alpha_*} c(V^*, \psi).$$

Buradan $\forall \psi \in \mathbb{R}^n$ için

$$\langle y^*, \psi \rangle \leq c(V^*, \psi) + \frac{\alpha_*}{t^* - t_*} \cdot [c(V^*, \psi) - c(V_*, \psi)] \quad (4.50)$$

çıkar. (4.49)'u $\frac{t^* + \alpha_* - t_*}{\alpha_*} > 0$ sayısı ile çarpıp, (4.50) ile toplarsak $\forall \psi \in \mathbb{R}^n$ için

$$\begin{aligned} \langle y^*, \psi \rangle &\leq \left(1 - \frac{t^* + 2\alpha_* - t_*}{\alpha_*}\right) \langle y_*, \psi \rangle \\ &+ \left[\frac{t^* + \alpha_* - t_*}{\alpha_*} + \frac{t^* + \alpha_* - t_*}{t^* - t_*} - \frac{\alpha_*}{t^* - t_*} \right] c(V_*, \psi) \\ &+ \underbrace{\left[1 + \frac{\alpha_*}{t^* - t_*} - \frac{t^* + \alpha_* - t_*}{t^* - t_*} \right]}_0 c(V^*, \psi) \end{aligned}$$

Buradan $\forall \psi \in \mathbb{R}^n$ için

$$\begin{aligned} \langle y^*, \psi \rangle &\leq \left(1 - \frac{t^* + 2\alpha_* - t_*}{\alpha_*}\right) \langle y_*, \psi \rangle \\ &+ \left(\frac{t^* + 2\alpha_* - t_*}{\alpha_*} \right) c(V_*, \psi) = c(V_{\alpha_*}^-(y_*)|(t^* + \alpha_*), \psi) \end{aligned}$$

olur ki, bu $y^* \in V_{\alpha_*}^-(y_*)|(t^* + \alpha_*)$ demektir.

Benzer olarak $y_* \in V_{\alpha_*}^+(y^*)|(t_* - \alpha_*)$ olduğu ispatlanır.

$y^* \in V_{\alpha_*}^-(y_*)|(t^* + \alpha_*)$, $y_* \in V_{\alpha_*}^+(y^*)|(t_* - \alpha_*)$ olduğu için $\forall t \in [t^*, t^* + \alpha_*]$ için

$$V_{\alpha_*}^+(y^*)|(t) \subset V_{\alpha_*}^-(y_*)|(t) \quad (4.51)$$

ve $\forall t \in [t_*, t_* - \alpha_*]$ için

$$V_{\alpha_*}^-(y_*)|(t) \subset V_{\alpha_*}^+(y^*)|(t) \quad (4.52)$$

olur.

$$(t_*, y_0^*) = \left(1 - \frac{t_1 - t_*}{t_1 - t_0}\right) (t_0, y_0) + \left(\frac{t_1 - t_*}{t_1 - t_0}\right) (t_1, y_1) \quad (4.53)$$

$$(t^*, y_1^*) = \left(1 - \frac{t_1 - t^*}{t_1 - t_0}\right) (t_0, y_0) + \left(\frac{t_1 - t^*}{t_1 - t_0}\right) (t_1, y_1) \quad (4.54)$$

diyelim.

$[(t_1, x), (t_2, y)]$ ile (t_1, x) ve (t_2, y) , $(t_2 > t_1)$ noktalarını birleştiren kapalı aralığı gösterelim. O zaman Q kümesinin tanımlanışından ve (4.53), (4.54)'ten

$$Q = [(t_0, y_0), (t_*, y_*)] \cup [(t_*, y_0^*), (t^*, y_1^*)] \cup [(t^*, y_1^*), (t_1, y_1)] \quad (4.55)$$

olur. (4.41)'den $(t_0, y_0) \in V_{\alpha_*}^-(y_*)$, (4.42) ve (4.51)'den $(t_1, y_1) \in V_{\alpha_*}^-(y_*)$ ve $V_{\alpha_*}^-(y_*)$ konveks küme olduğu için

$$Q \subset V_{\alpha_*}^-(y_*)$$

$Q(t_*) = y_0^*, V_{\alpha_*}^-(y_0)|(t_*) = V_*$, buradan $[(t_0, y_0), (t_*, y_0^*)] \subset V_{\alpha_*}^-(y_*)$ olur. V_0^- kümesinin tanımlanışından, (4.39), (4.40)'tan ve $V_{\alpha_*}^-(y_*) \subset V_0^-$ olduğu için

$$[(t_0, y_0), (t_*, y_0^*)] \subset W \quad (4.56)$$

olur. $(V_0^- = \{(t, x) \in [t_* - \alpha_*, t_* + \alpha_*] \times \mathbb{R}^n \mid x \in V_0^-(t)\})$

(4.41), (4.52)'ye göre $(t_0, y_0) \in V_{\alpha_*}^+(y^*)$, (4.42)'ye göre $(t_1, y_1) \in V_{\alpha_*}^+(y^*)$ olur. $V_{\alpha_*}^+(y^*)$ konveks küme olduğu için $Q \subset V_{\alpha_*}^+(y^*)$ olur. $Q(t^*) = y_1^*, V_{\alpha_*}^+(y^*)|(t^*) = V^*$ olduğundan $[(t^*, y_1^*), (t_1, y_1)] \subset V_{\alpha_*}^+(y^*)$, $V_{\alpha_*}^+(y^*) \subset V_0^+$ olduğu için V_0^+ kümesinin tanımlanışı, (4.39) ve (4.40)'tan

$$[(t^*, y_0^*), (t_1, y_1)] \subset W \quad (4.57)$$

olur. $(V_0^+ = \{(t, x) \in [t_* - \alpha_*, t_* + \alpha_*] \times \mathbb{R}^n \mid x \in V_0^+(t)\})$

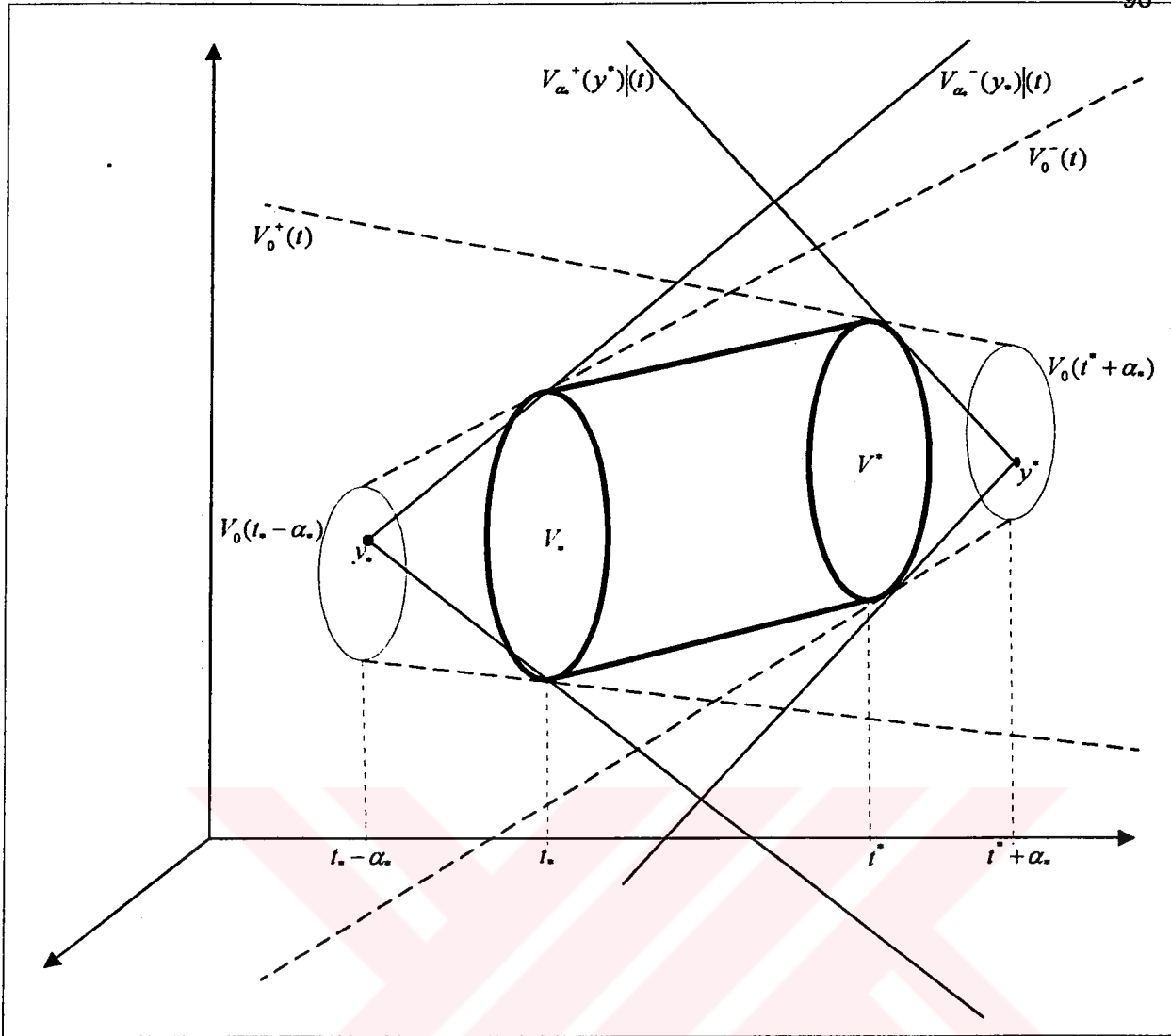
$y_0^* \in V_*$, $y_1^* \in V^*$ olduğu için (4.15), (4.16)'dan $[(t^*, y_0^*), (t^*, y_1^*)] \subset V$ olur. Burada V ile W aynıdır. O halde

$$[(t^*, y_0^*), (t^*, y_1^*)] \subset W$$

olur. Buradan $Q \subset W$ olduğu çıkar.

Benzer olarak $t_0 \in [t_* - \alpha_*, t_*]$, $t_1 \in (t_*, t^*]$ ve $t_0 \in [t_*, t^*)$, $t_1 \in (t^*, t^* + \alpha_*]$ olursa $Q \subset W$ olduğu ispatlanabilir.

Buna göre W konvektir. İstenen ispatlanmış olur. $\square$



Şekil 4.6.

KAYNAKLAR

- [1] ROCKAFELLAR R.T. & WETS R. *Variational Analysis*. Springer, New York, 1998.
- [2] ROCKAFELLAR R.T. *Convex Analysis*. Princeton University Press, 1970.
- [3] IOFFE A.D.& TIHOMIROV V.M. *Theory Of Extremal Problems*. Nauka, Moskow, 1974. (In Russian)
- [4] AUBIN J.P. & FRANKOWSKA H. *Set-Valued Analysis*. Birkhauser, Boston, 1990.
- [5] AUBIN J.P. *Viability Theory*. Birkhauser, Boston, 1991
- [6] DEMIANOV V.F. *Nondifferentiable Optimization*. Moscow, Nauka, 1980
- [7] MORDUKHOVITCH B. *Approximation Methods In Problems Of Optimization And Control*. Nauka, 1988. (In Russian)
- [8] WARGA J. *Optimal Control Of Differential And Functional Equations*. Academic Press, New York, 1972.
- [9] HESTENES M. R. *Calculus Of Variations And Optimal Control Theory*. Willey, 1966.
- [10] POLOVINKIN E.S. *Theory Of Multivalued Maps*. Moskow Phys.Tech.Inst.Publ., 1983. (In Russian)
- [11] GUSEINOV H.G., SUBBOTIN A.I. & USHAKOV V.N. *Derivatives For Multivalued mappings With Applications To Game Theoretical Problems Of Control*, Problems Of Control And Information Theory, 14, 155-167, 1985.
- [12] KRASOVSKII N.N. & SUBBOTIN A.I. *Game Theoretical Problems Of Control*. Springer, New York, 1988.

- [13] SUBBOTIN A.I. *Generalized Solutions Of First Order Partial Differential Equations*. The Dynamical Optimization Perspective, Birkhauser, Boston, 1995.
- [14] FILIPPOV A.F. *On Some Problems Of Optimal Control Theory*, Vestnik Moskovskogo Universiteta, 2, 25-32, 1959. (In Russian)
- [15] FILIPPOV A.F. *Differential Equations With Discontinuous Right Hand Side*. Nauka, 1985. (In Russian)
- [16] AUBIN J.-P. & CELLINA A. *Differential Inclusions*, Grundlehren Der Math. Wiss. #264, Springer-Verlag, 1984.
- [17] GUSEINOV Kh.G. & USHAKOV V.N. *Weakly And Strongly invariant Sets With Respect To A Differential Inclusion*, Soviet Math. Dokl., Vol.38, 3, 603-605, 1989.
- [18] CLARKE F.H. *Optimization And Nonsmooth Analysis*. Wiley-Interscience, 1983.
- [19] DEIMLING K. *Nonlinear Functional Analysis*. Springer-Verlag, 1985.
- [20] HADDAD G. *Monotone Trajectories Of Differential Inclusions With Memory*. Isr.J.Math., 39, 83-100, 1981.
- [21] POLOVINKIN E.S. & SMIRNOV G.V. *Differentiation Of Multivalued Mappings And Properties of Solutions of Differential Inclusions*. Soviet Math.Dokl., 33, 662-666, 1986.
- [22] OLECH C. *Existence Theory In Optimal Control*, In Control Theory And Topics In Functional Analysis, International Atom. Energy. Agency, 291-328, 1976.
- [23] WĄŻEWSKI T. *On Optimal Control Problem*, Proc. Conference Differential Equations And Their Applications, Prague, 229-242, 1962.
- [24] KURATOWSKI K. *Topologie*. Academic Press, New York, 1966.

- [25] CLARKE F.H. *Generalized Gradients And Applications*, Trans.Am.Math.Soc., 205, 247-262, 1975.
- [26] AUBIN J.-P. & EKELAND I. *Applied Nonlinear Analysis*. Wiley-Interscience, 1984.
- [27] BERGE C. *Topological Spaces(Multi-valued Function, Vector Spaces and Convexity)*. L., 1963.
- [28] MICHAEL E. *Continuous selections I*, Annals Of Math., 63, 361-381, 1956.
- [29] CELLINA A. *A Theorem On The Approximation Of Set-Valued Mappings*, Rend.Ac, Na. Lincei, 47, 429-433, 1969.
- [30] SHEPARD G.C. *The Steiner Point Of A Convex Polytope*, Canad.J.Math., 18, 1294-1300, 1966.
- [31] WAGNER D.M. *Survey Of Measurable Selection Theorems*, SIAM J. Contr. Opt., 15, 859-903, 1977.
- [32] CASTAING CH. & VALADIER M. *Convex Analysis And Measurable Multifunctions*. Lecture Notes in Math.#580, Springer-Verlag, 1977.
- [33] KIKUCHI N. *On Some Fundamental Problems Of Contingent Equations In Connection With The Control Problems*, Publ.RIMS, Kyoto Univ.Ser.A., 3, 117-201, 1967.
- [34] HERMES H. *On Continuous And Measurable Selections And The Existence Of Solutions of Generalized Differential Equations*, Proc.Amer.Math.Soc., 29, 535-542, 1971.
- [35] ASEEV C.M. *Existence Of Differentiable Selector Of Set-Valued Map*, Moscow State Univ.Publ., 36-39, 1982. (In Russian)
- [36] AUMANN R.J. *Integrals Of Set Valued Functions*, J.Math.Anal. and Appl., 12, 1-12, 1965.

- [37] OLECH C. *Lexicographical order, Range Of Integrals and "Bang-Bang" Principle*, Mathematical Theory Of Control, Academic Press, New York, 35-45, 1967.
- [38] PONTRIAGIN L.S. *Linear Differential Games Of Pursuit*, Math.USSR Sbornik, 112, 307-380, 1980. (In Russian)
- [39] NIKOLSKII M.S. *On The Alternate Integral Of Pontriagin* Math. USSR Sbornik, 44, 125-132, 1983.
- [40] POLVINKIN E.S. *On Integral Of Set-Valued Maps*, Dokl.Acad.Sci. of USSR, 271, 1069-1074. (In Russian)
- [41] POLVINKIN E.S. *Theory Of Multivalued Maps*. Moscow Phys.Techn. Inst. Publ., 1983. (In Russian)
- [42] URSESKU C. *Tangent Set's Calculus And Necessary Conditions For Extramality*, SIAM J. On Contr. Optimiz., 20, 565-574, 1982.
- [43] WARD D. *The Quantification Tangent Cones*, Can. J. Math., Vol.40., 3, 1404-1419, 1988.
- [44] BLAGODATSKIKH V.I. & FILIPPOV A.I. *Differential Inclusions And Optimal Control*, Proc. Of Math. Inst. Of Acad. Sci. Of USSR., Vol.169, 194-252, 1985. (In Russian)
- [45] BLAGODATSKIKH V.I. *Differential Inclusion Theory*. Moscow State Univ. Publ., 1979. (In Russian)
- [46] FILIPPOV A.F. *Classic Solutions Of The Differential Equations With set Valued Right Hand Side*, Vestnik MGU, 3, 16-26, 1967. (In Russian)
- [47] CELLINA A. *Approximation Of Set-Valued Functions And Fixed Point Theorems*, Annali Mat. Pura. Appl., 82, 17-24.

- [48] HERMES H. *Calculus Of Set Valued Functions And Control*, J.Math. And Mech., Vol.18, 1, 47-59, 1968.
- [49] BOULIGAND G. *Sur Les Surfaces Dépourvues De Points Hyperlimites*, Ann.Soc.Polon.Math., 9, 32-41, 1930.
- [50] ASEEV S.M. *Approximation Of Semicontinuous Multivalued Mappings By Continuous Ones*, Izvestiya Acad. Nauk, USSR, Vol.20, 435-448, 1982. (In Russian)

