

T.C
BİTLİS EREN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DEFERRED ARİTMETİK İSTATİSTİKSEL
YAKINSAKLIK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KADİR GÜL

DANIŞMAN
DOÇ.DR. NAZLIM DENİZ ARAL

AĞUSTOS 2025

BİTLİS

T.C
BİTLİS EREN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DEFERRED ARİTMETİK İSTATİSTİKSEL
YAKINSAKLIK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KADİR GÜL
ORCID: 0009-0002-4009-5799

DANIŞMAN
DOÇ. DR. NAZLIM DENİZ ARAL

AĞUSTOS 2025

BİTLİS

T.C.
BİTLİS EREN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS TEZ ÇALIŞMASI
ETİK BEYANI

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisiyim. Hazırlamış olduğum “**Deferred Aritmetik İstatistiksel Yakınsaklık**” başlıklı tezde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi; tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu; tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi; kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı; bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.
...../...../2025

İmza

Kadir GÜL

T.C.
BİTLİS EREN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
TEZ YAZIM KILAVUZU UYGUNLUK BEYANI

“Deferred Aritmetik İstatistiksel Yakınsaklık” başlıklı yüksek lisans tezi
Bitlis Eren Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Tez Yazım Kılavuzuna uygun
olarak hazırlanmıştır./...../2025

Tezi Hazırlayan

İmza

Kadir GÜL

Danışman

İmza

Doç.Dr. Nazlım Deniz ARAL

Matematik Anabilim Dalı Başkanı

İmza

Prof. Dr. Hatice KUŞAK SAMANCI

T.C.
BİTLİS EREN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
TEZ ONAY SAYFASI

Bitlis Eren Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı öğrencisi Kadir GÜL tarafından hazırlanan “ **Deferred Aritmetik İstatistiksel Yakınsaklık** ” adlı Yüksek Lisans Tezi ile ilgili tez savunma sınavı,/...../2025 tarihinde yapılmış ve tezin oy birliği ile kabul edilmesine karar verilmiştir.

JÜRİ: İMZA

Danışman: Doç. Dr. Nazlım Deniz ARAL
(Bitlis Eren Üniversitesi)

Üye: Unvanı Adı SOYADI
(Üniversite Adı)

Üye: Unvanı Adı SOYADI
(Üniversite Adı)

Bitlis Eren Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Yönetim Kurulunun tarih ve sayılı kararıyla jüri tarafından kabul edilmiş bu çalışmanın yüksek lisans / doktora tezi olarak kabulü onaylanmıştır.

..../...../2025
Prof. Dr. Mehmet Bakır ŞENGÜL
Enstitü Müdürü

T.C.

Bitlis Eren Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

DEFERRED ARİTMETİK İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Yüksek Lisans Tezi

Kadir GÜL

Doç. Dr. Nazlım Deniz ARAL

Ağustos 2025

ÖZET

Bu tez çalışması beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, konuya dair literatürde yer alan önceki çalışmalar hakkında genel bir bilgi verilmiştir. İkinci bölümde ise “Temel Tanımlar ve Teoremler” başlığı altında Deferred Cesàro yakınsaklık, Deferred istatistiksel yoğunluk, Deferred istatistiksel yakınsaklık, aritmetik istatistiksel yakınsaklık ve aritmetik istatistiksel süreklilik kavramları tanımlanmıştır. Üçüncü bölümde, tez çalışmamızda elde edilen özgün sonuçlar sunulmuştur. Bu kapsamda, Deferred aritmetik istatistiksel yakınsaklık kavramı tanımlanmış ve temel özellikleri incelenmiştir. Ayrıca, Deferred aritmetik istatistiksel süreklilik kavramı tanımlanarak bu kavrama ilişkin bazı sonuçlara ulaşılmıştır. Dördüncü bölümde ise elde edilen bulgular doğrultusunda alana katkı sağlayacak yeni çalışma önerileri verilmiştir. Beşinci bölümde ise tezde yararlanılan kaynaklar listelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: İstatistiksel yakınsaklık, Aritmetik yakınsaklık, Aritmetik süreklilik, Deferred cesaro yakınsaklık.

Republic of Türkiye
Bitlis Eren University Graduate School
Department of Mathematics
DEFERRED ARITHMETIC STATISTICAL CONVERGENCE
Master's Thesis
Kadir GÜL
Supervisor: Asst. Prof. Dr. Nazlım Deniz ARAL

August 2025

ABSTRACT

This thesis consists of five chapters. In the first section, general information is given about previous studies in the literature on the subject. In the second part, under the title of “Basic Definitions and Theorems”, the concepts of Deferred Cesàro convergence, Deferred statistical density, Deferred statistical convergence, arithmetic statistical convergence and arithmetic statistical continuity are introduced. In the third chapter, the original results obtained in our thesis are presented. In this context, the concept of Deferred arithmetic statistical convergence is defined and its basic properties are examined. In addition, the concept of Deferred arithmetic statistical continuity was defined and some results related to this concept were reached. In the fourth section, new study suggestions that will contribute to the field are given in line with the findings. In the fifth chapter, the sources used in the thesis are listed.

Keywords: Statistical convergence, Arithmetic convergence, Arithmetic continuity, Deferred Cesaro convergence.

TEŞEKKÜR

Tüm lisansüstü eğitim sürecim boyunca ve tez çalışmasının her aşamasında, desteğini esirgemeyen tez danışman hocam Sayın Doç. Dr. Nazlım Deniz ARAL'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca eğitim hayatımın her noktasında destekleriyle yanımda olan GÜL ailesinin tüm paydaşlarına ve hayattaki en büyük destekçim canım ablam Mine KALAYCIK'a en içten teşekkürlerimi sunarım.



İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	I
ABSTRACT	II
TEŞEKKÜR	III
İÇİNDEKİLER	IV
1. GİRİŞ.....	1
2. MATERYEL VE YÖNTEM	3
2.1. ARİTMETİK YAKINSAKLIK VE TOPLANABİLME.....	3
2.2. YOĞUNLUK KAVRAMI VE İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK	4
2.3. DEFERRED CESARO VE DEREFFED İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK.....	6
2.4. ARİTMETİK İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK.....	7
2.5. ARİTMETİK SÜREKLİLİK.....	9
2.6. FONKSİYON DİZİLERİNİN ARİTMETİK YAKINSAKLIĞI.....	11
3. BULGULAR VE TARTIŞMA	13
3.1. DEFERRED ARİTMETİK İSTATİSTİKSEL SÜREKLİLİK	19
4. SONUÇ VE ÖNERİLER	23
KAYNAKLAR	24

1. GİRİŞ

Reel sayı dizilerinin limit davranışlarını anlamada önemli araçlardan biri olan klasik yakınsaklık kavramı genellemesi olarak istatistiksel yakınsaklık kavramı 1951 yılında Fast (1951) ve Steinhaus (1951) tarafından tanımlanmış ve bu tarihten itibaren birçok matematikçinin ilgisini çeken bir konu haline gelmiştir.

Agnew (1932) klasik Cesaro ortalamasının bir genellemesi olan Deferred Cesaro ortalaması kavramını tanıtmış ve bu kavram çok sayıda genel yakınsaklık kavramlarının gelişmesine katkı sağlamıştır. Deferred Cesaro ortalaması yardımıyla istatistiksel yakınsaklık kavramı aşağıdaki biçimde genelleştirilmiş ve Deferred istatistiksel yakınsaklık olarak adlandırılmıştır (Küçükaslan ve Yılmaztürk, 2016):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{q(n)-p(n)} |\{p(n) \leq k < q(n): |x_k - l| \geq \varepsilon\}| = 0.$$

Bu tanım yardımıyla hem yeni sonuçlar elde edilmiş hem de mevcut birçok sonucun genelleştirilmesi yapılmıştır.

Çift diziler için deferred istatistiksel yakınsaklık (Dağadur ve Sezgek, 2016; Kişi ve Güler, 2019; Ulusu ve Gülle, 2022) çalışmalarda ele alınmış, topolojik gruplarda Şengül, Et ve Çakallı (2019) tarafından, metrik uzaylarda ise Et, Çınar ve Şengül tarafından (2019) incelenmiştir. Ayrıca, küme dizileri için Et ve Yılmaz (2020) tarafından, nötrosofik normlu uzaylarda ise Debnath, Debnath ve Choudhury (Debnath, Debnath ve Choudhury, 2022) tarafından incelenmiştir. Bu konu farklı araştırmacılar tarafından çalışılmıştır (Demirci ve Gürdal, 2021), (Et, 2021), (Huban ve Gürdal, 2021), (Nuray, 2020), (Patterson, Nuray ve Başarır, 2016).

Aritmetik yakınsaklık kavramı ilk olarak Ruckle (2012) tarafından tanıtılmıştır. Bu yakınsaklık kavramından ve çarpan dizi tanımından yararlanarak Yaying ve Hazarika (2017a), aritmetik yakınsak çarpan dizi uzayı ve aritmetik toplanabilir çarpan dizi uzayı olmak üzere iki yeni dizi uzayı tanımlamış ve bu uzaylara ilişkin bazı temel özellikleri incelemişlerdir. Ayrıca, reel fonksiyonların sürekliliği ve dizilerdeki kompaktlık kavramları kullanılarak aritmetik süreklilik ve aritmetik kompaktlık tanımları verilmiştir. Daha sonra aritmetik yakınsaklık kavramından ve lacunary istatistiksel yakınsaklık tanımlarını kullanarak lacunary aritmetik yakınsaklık tanımları verilmiştir (Yaying ve Hazarika, 2020). Bununla birlikte invariant aritmetik istatistiksel yakınsaklık ve Lacunary invariant aritmetik

istatistiksel yakınsaklık, *I*-lacunary aritmetik istatistiksel yakınsaklık gibi kavramlarda Kişi tarafından incelenmiştir (Kişi, 2022a ve Kişi, 2022b). Nötrosifik normlu uzaylarda da aritmetik yakınsaklık ve aritmetik istatistiksel yakınsaklık çalışılmıştır (Bilgin, 2023).

Bu tez çalışmamızda aritmetik yakınsaklık ve deferred istatistiksel yakınsaklık tanımlarından yararlanılarak deferred aritmetik istatistiksel yakınsaklık tanımı yapılmış ve bu kavramın bazı özellikleri incelenmiştir. Ayrıca, deferred aritmetik istatistiksel süreklilik kavramı tanımlanmış ve bu yeni kavrama ilişkin bazı sonuçlar elde edilmiştir.



2. MATERYEL VE YÖNTEM

2.1. ARİTMETİK YAKINSAKLIK VE TOPLANABİLME

Bir $\sum x_n$ serisi ve onun kısmi toplamlar dizisi (s_n) verildiğinde, eğer bazı yeni yöntemler kullanılarak (s_n) dizisine bir s sayısı karşılık getirilebiliyorsa, yani (s_n) dizisi s -değerine yakınsak hale getirilebiliyorsa, o zaman bu dizi s değerine limitlenebilir veya $\sum x_n$ serisi s -değerine toplanabilirdir denir. Bu yeni yöntemlere **limitleme** veya **toplanabilme metotları** adı verilir.

Örnek olarak bir toplanabilirlik türü olan $(C, 1)$ toplanabilirlik metodunu verebiliriz:

Bir (x_m) dizi **Cesàro $(C,1)$ ortalaması** olarak adlandırılır eğer:

$$\frac{1}{m} \sum_{k=1}^m x_k$$

şeklinde gösterilir. Eğer $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m x_k = L$ ise (x_m) dizisi Cesàro yakınsaktır denir (Hardy, 1949).

Ruckle tarafından aşağıda verilen toplam kavramından yola çıkarak yeni bir toplanabilirlik metodu ve buna bağlı bir yakınsaklık tanımı ortaya koyulmuştur. Tanımlanan bu yeni toplanabilirlik kuramı, klasik anlamda sonlu toplam ve mutlak yakınsaklık kavramlarını genelleştirmesidir. Her ne kadar klasik sonsuz toplam kavramı ile doğrudan karşılaştırılabilir olmasa da bir toplam uzayı oluşturur.

Tanım 2.1.1. $\mathbb{N}$ kümesi üzerinde tanımlı bir (x_m) dizisi için ve herhangi bir $n \in \mathbb{N}$ alındığında

$$\sum_{m|r} x_m$$

gösterimi m değerinin 1 ve r dahil olmak üzere r yi bölen pozitif tam sayılar üzerinde değiştiği ve bu değerler için x_m sayılarının sonlu toplamını ifade eder. Genel olarak $m|r$ yi m, r nın bir katıdır anlamında yazılır. Ayrıca, iki tam sayı m ve r için $\langle m, r \rangle$ sembolü bu iki tam sayının en büyük ortak bölenini (EBOB) ifade eder (Ruckle, 2012).

Tanım 2.1.2. $\mathbb{N}$ kümesi üzerinde tanımlı bir (x_m) dizisi aritmetik olarak toplanabilir denir eğer her $\varepsilon > 0$ için bir r tam sayısı vardır ve her m tam sayısı için

$$\left| \sum_{k|m} x_k - \sum_{k|\langle m,r \rangle} x_k \right| < \varepsilon$$

şartı sağlanır (Ruckle, 2012).

Tanım 2.1.3. (x_m) dizisi aritmetik olarak yakınsaktır denir eğer her $\varepsilon > 0$ için bir r tam sayısı vardır ve her m tam sayısı için,

$$|x_m - x_{\langle m,r \rangle}| < \varepsilon$$

sağlanır (Ruckle, 2012).

Örnek 2.1.1. $(x_m) = 5$ sabit dizisi hem klasik anlamda yakınsaktır hem de aritmetik yakınsaktır.

Örnek 2.1.2. $(x_m) = \frac{1}{m}$ dizisi ise klasik anlamda yakınsak olmasına rağmen aritmetik yakınsak değildir. $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists r \in \mathbb{N}, \forall m : |x_m - x_{\langle m,r \rangle}| < \varepsilon$ koşulunu sağlayan diziler aritmetik yakınsaktır. $|x_m - x_{\langle m,r \rangle}| = \left| \frac{1}{m} - \frac{1}{\langle m,r \rangle} \right| = \left| \frac{\langle m,r \rangle - m}{m\langle m,r \rangle} \right|$ farkı hiçbir sabit r için $\varepsilon > 0$ olmak üzere ε dan küçük olacak şekilde sağlanmaz. Örneğin, $r = 1$ için $\langle m, 1 \rangle = 1$ dir. Fark ise

$$|x_m - x_{\langle m,r \rangle}| = \left| \frac{1}{m} - \frac{1}{\langle m,r \rangle} \right| = \left| \frac{\langle m,r \rangle - m}{m\langle m,r \rangle} \right| \rightarrow 1 \quad (m \rightarrow \infty) \text{ olur. Bu fark } \varepsilon < 1$$

için sağlanamadığından aritmetik yakınsak değildir.

2.2. YOĞUNLUK KAVRAMI VE İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Tanım 2.2.1. Doğal sayılar kümesinin bir alt kümesi olan D için, bu kümenin eleman sayısı $|D|$ ile gösterilsin; yani

$$|D| = \text{card} D$$

olsun. $D \subset \mathbb{N}$ olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için

$$D_n = \{d \leq n : d \in D\}$$

kümesi tanımlansın. Buna göre D kümesinin alt ve üst yoğunlukları sırasıyla aşağıdaki limitler ile ifade edilir:

$$\underline{\delta}(D) = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \frac{|D_n|}{n}, \quad \overline{\delta}(D) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \frac{|D_n|}{n}.$$

Eğer $\underline{\delta}(D) = \overline{\delta}(D)$ eşitliği sağlanıyorsa, yani bu limitler çakışıyorsa, bu ortak limite D kümesinin doğal yoğunluğu denir ve $\delta(D)$ ile gösterilir. Bu durumda doğal yoğunluk şu şekilde tanımlanır:

$$\delta(D) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|D_n|}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{d \leq n : d \in D\}|$$

(Freedman ve Sember, 1981).

Tanım 2.2.2. Reel (veya kompleks) sayı değerli bir dizi olan $x = (x_m)$ için ve sabit bir $L \in \mathbb{R}$ olmak üzere, eğer $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\delta(\{m : |x_m - L| \geq \varepsilon\}) = 0$$

şartı sağlanıyorsa $x = (x_m)$ dizisi L sayısına “istatistiksel yakınsaktır” denir. Bu durumda yakınsama $\lim x_m = L(S)$ biçiminde gösterilir (Fast, 1951).

Örnek 2.2.1.

$$x_m = \begin{cases} 1, & m = 2^k \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

şeklinde tanımlanan dizi 0’a istatistiksel yakınsaktır.

Dizi $(x_m) = (1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, \dots)$ şeklinde yazılabilir.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{m \leq n : |x_m - 0| \geq \varepsilon\}| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\llbracket \log_2 n \rrbracket + 1}{n} = 0$$

olup $\lim x_m = 0(S)$ elde edilir.

Tanım 2.2.3. $A = (a_{n,k})$ sonsuz matrisi ve $x = (x_n)$ dizisi verilsin. Eğer $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$ olduğunda $\lim_{n \rightarrow \infty} (Ax)_n = l$ ise $A = (a_{n,k})$ matrisine “regüler matris” denir (Maddox, 1988).

Keyfi bir $A = (a_{n,k})$ matrisinin regüler olması, Silverman-Toeplitz koşulları olarak bilinen aşağıdaki teorem ile karakterize edilmektedir.

Teorem 2.2.4. (Silverman-Toeplitz) $A = (a_{n,k})$ matrisinin regüler olması için gerek ve yeter koşul;

- i) $\exists M > 0$ için $\|A\| = \sup_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{n,k}| \leq M < \infty$
- ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n,k} = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$

$$\text{iii)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} = 1$$

koşullarının sağlanmasıdır (Maddox, 1988).

Tanım 2.2.5.

$$C_1[n, m] = \begin{cases} \frac{1}{n}, & 0 < m \leq n \\ 0, & \text{diğer durumu} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan matrise birinci mertebeden Cesàro matrisi denir.

$C_1[n, m]$ matrisinin Teorem 2.2.4'de verilen (i), (ii) ve (iii) koşullarını sağladığı açıktır (Hardy, 1949).

2.3. DEFERRED CESARO VE DEREFFED İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Tanım 2.3.1. $p = (p_n)$ ve $q = (q_n)$ pozitif tam sayıların

$$p_n < q_n \quad \text{ve} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} q_n = \infty \quad (2.1)$$

koşulunu sağlayan diziler olmak üzere

$$(D_{p,q}x)_n = \frac{1}{q_n - p_n} \sum_{m=p_n+1}^{q_n} x_m, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

biçiminde tanımlanan dönüşüme $x = (x_m)$ dizisinin deferred Cesàro ortalaması denir. $D_{p,q}$ –dönüşümünün regüler olduğu Silverman-Toeplitz teoreminden görülür (Agnew, 1932).

Tanım 2.3.2. $x = (x_m)$ dizisi için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{q_n - p_n} \sum_{m=p_n+1}^{q_n} |x_m - L| = 0$$

sağlanırsa bu diziye güçlü $D_{p,q}$ -yakınsaktır denir ve bu yakınsama $\lim_{n \rightarrow \infty} x_m = L(D[p, q])$ ile gösterilir.

Tanım 2.3.3. Reel ya da karmaşık değerli bir dizi $x = (x_m)$ ve pozitif tam sayılar dizileri olan $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ve $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ (2.1) de belirtilen koşulları sağlamak üzere verilsin. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{q_n - p_n} |\{p_n < m \leq q_n : |x_m - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

şartı sağlanıyorsa $x = (x_m)$ dizisi L sayısına Deferred istatistiksel yakınsaktır denir. Bu durum $\lim_{k \rightarrow \infty} x_m = L(DS[p, q])$ şeklinde gösterilir (Küçükaslan ve Yılmaztürk, 2016).

Bu tanım;

$p_n = 0, q_n = n$ için istatistiksel yakınsaklığa indirgenir.

$p_n = k_{n-1}, q_n = k_n$ için lacunary istatistiksel yakınsaklığa indirgenir.

$p_n = 0, q_n = \lambda_n$ için λ –istatistiksel yakınsaklığa indirgenir.

Örnek 2.3.1. $x_m = \begin{cases} 1, & m \text{ tam kare ise} \\ 0, & \text{diğer durum} \end{cases}$ dizisi için $p_n = n, q_n = 2n$ seçilirse

$$\frac{1}{q_n - p_n} |\{p_n < m \leq q_n : x_m \neq 0\}| \approx \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

elde edilir. Böylece $\lim_{m \rightarrow \infty} x_m = 0(DS[p, q])$ dır.

Teorem 2.3.4. Eğer bir dizi $x = (x_m)$, L sayısına güçlü $D_{p,q}$ -yakınsak ise o halde aynı dizi aynı limite deferred istatistiksel olarak da yakınsaktır (Küçükaslan ve Yılmaztürk, 2016).

Sonuç: Eğer bir dizi $x = (x_m)$, klasik anlamda L sayısına yakınsıyorsa bu durumda aynı dizi aynı limite deferred istatistiksel olarak da yakınsaktır (Küçükaslan ve Yılmaztürk, 2016).

Teorem 2.3.5. Eğer $x = (x_m)$ dizisi sınırlı bir dizi ve $\lim_{m \rightarrow \infty} x_m = L(DS[p, q])$, yani deferred istatistiksel yakınsıyorsa, bu durumda bu dizi aynı zamanda güçlü $D_{p,q}$ -yakınsaktır; $\lim_{m \rightarrow \infty} x_m = L(D[p, q])$ dır (Küçükaslan ve Yılmaztürk, 2016).

2.4. ARİTMETİK İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Tanım 2.4.1. Bir $x = (x_m)$ dizisi aritmetik istatistiksel yakınsaktır denir, eğer $\varepsilon > 0$ için öyle bir r tamsayısı vardır ki

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} |\{m \leq t : |x_m - x_{\langle m, r \rangle}| \geq \varepsilon\}| = 0 \text{ dır.}$$

Burada belirtilen $\langle m, r \rangle$ ifadesi iki tam sayı olan m ve r nin en büyük ortak bölenini belirtmektedir (Yaying ve Hazarika, 2020).

Tüm aritmetik istatistiksel yakınsak dizilerin kümesini belirtmek için ASC 'yi kullanacağız. Böylece $\varepsilon > 0$ ve r tamsayısı için

$$ASC = \left\{ (x_m) : \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \left| \{m \leq t : |x_m - x_{\langle m, r \rangle}| \geq \varepsilon\} \right| = 0 \right\}$$

şeklinde gösterilir. (x_m) dizisinin $x_{\langle m, r \rangle}$ 'ye istatistiksel olarak yakınsak olduğunu belirtmek için $ASC - \lim x_m = x_{\langle m, r \rangle}$ ifadesini kullanacağız.

Teorem 2.4.2: $x = (x_m)$ ve $y = (y_m)$ dizileri aritmetik istatistiksel yakınsak iki dizi olsun.

(i) Eğer $ASC - \lim x_m = x_{\langle m, r \rangle}$ ve $c \in R$ ise, o zaman $ASC - \lim cx_m = cx_{\langle m, r \rangle}$ olur.

(ii) Eğer $ASC - \lim x_m = x_{\langle m, r \rangle}$ ve $ASC - \lim y_m = y_{\langle m, r \rangle}$ ise $ASC - \lim(x_m + y_m) = (x_{\langle m, r \rangle} + y_{\langle m, r \rangle})$ dir (Yaying ve Hazarika, 2020).

İspat:

(i) $c = 0$ olduğunda açıktır. Diyelim ki $c \neq 0$ o zaman r tamsayısı için

$$\frac{1}{t} \left| \{m \leq t : |cx_m - cx_{\langle m, r \rangle}| \geq \varepsilon\} \right| = \frac{1}{t} \left| \left\{ m \leq t : |x_m - x_{\langle m, r \rangle}| \geq \frac{\varepsilon}{|c|} \right\} \right|$$

bu da sonucu verir.

(ii) $ASC - \lim x_m = x_{\langle m, r \rangle}$ ve $ASC - \lim y_m = y_{\langle m, r \rangle}$ yakınsaklık tanımları kullanılarak

$$\begin{aligned} & \frac{1}{t} \left| \{m \leq t : |(x_m + y_m) - (x_{\langle m, r \rangle} + y_{\langle m, r \rangle})| \geq \varepsilon\} \right| \\ & \leq \frac{1}{t} \left| \left\{ m \leq t : |x_m - x_{\langle m, r \rangle}| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\} \right| + \frac{1}{t} \left| \left\{ m \leq t : |y_m - y_{\langle m, r \rangle}| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\} \right| \end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi Yaying ve Hazarika (Yaying ve Hazarika, 2017b) tarafından tanımlanmış aritmetik süreklilik ve fonksiyon dizilerinin aritmetik yakınsaklığı kavramlarını verelim.

2.5. ARİTMETİK SÜREKLİLİK

Tanım 2.5.1. $\mathbb{R}$ 'nin bir E alt kümesinde tanımlanan bir f fonksiyonu, aritmetik yakınsak dizileri aritmetik yakınsak dizilere dönüştürüyor ise aritmetik süreklidir denir. Başka bir deyişle (x_m) dizisi aritmetik yakınsak olması $(f(x_m))$ dizisinin de aritmetik yakınsak olduğu anlamına gelir (Yaying ve Hazarika, 2017b).

Örnek 2.5.1. $x_m = \begin{cases} 1, & m \neq 5 \\ 0, & m = 5 \end{cases}$ dizisi ve $f(x) = x^2$ fonksiyonu verilsin.

Verilen fonksiyon aritmetik yakınsaktır.

Teorem 2.5.2. İki aritmetik sürekli fonksiyonun toplamı da aritmetik süreklidir (Yaying ve Hazarika, 2017b).

İspat: f ve g 'nin $\mathbb{R}$ 'nin bir E alt kümesi üzerinde aritmetik sürekli fonksiyonlar olduğunu kabul edelim. $f + g$ fonksiyonunun E üzerinde aritmetik sürekli bir fonksiyon olduğunu ispatlayalım.

$\varepsilon > 0$ ve (x_m) , E üzerinde herhangi bir aritmetik yakınsak dizi olsun. Aritmetik sürekliliğin tanımı gereği $(f(x_m))$ ve $(g(x_m))$ dizileri aritmetik yakınsak dizilerdir.

$(f(x_m))$ ve $(g(x_m))$ aritmetik yakınsak diziler olduğundan, $\varepsilon > 0$ ve pozitif bir r tam sayısı ve her bir m için

$$|f(x_m) - f(x_{\langle m,r \rangle})| \leq \frac{\varepsilon}{2} \text{ ve } |g(x_m) - g(x_{\langle m,r \rangle})| < \frac{\varepsilon}{2}$$

sağlanır.

Şimdi her bir m için

$$\begin{aligned} |(f + g)(x_m) - (f + g)(x_{\langle m,r \rangle})| &= |f(x_m) + g(x_m) - f(x_{\langle m,r \rangle}) - g(x_{\langle m,r \rangle})| \\ &\leq |f(x_m) - f(x_{\langle m,r \rangle})| + |g(x_m) - g(x_{\langle m,r \rangle})| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

bulunur. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 2.5.3. İki aritmetik sürekli fonksiyonun farkı da aritmetik süreklidir (Yaying ve Hazarika, 2017b).

İspat: Yukarıdaki teoremin ispatına benzer olarak, f ve g 'nin $\mathbb{R}$ 'nin bir E alt kümesi üzerinde aritmetik sürekli fonksiyonlar olsun. $f - g$ fonksiyonunun aritmetik

sürekli olduğunu ispatlamak için, $\varepsilon > 0$ ve (x_m) , E üzerinde herhangi bir aritmetik yakınsak dizi olsun. Aritmetik sürekliliğin tanımı gereği $(f(x_m))$ ve $(g(x_m))$ dizileri de aritmetik yakınsak dizilerdir.

$(f(x_m))$ ve $(g(x_m))$ aritmetik yakınsak diziler olduğundan $\varepsilon > 0$ ve pozitif bir r tam sayısı ve her m için

$$|f(x_m) - f(x_{\langle m,r \rangle})| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{ve} \quad |g(x_m) - g(x_{\langle m,r \rangle})| < \frac{\varepsilon}{2}$$

elde edilir. Her m için,

$$\begin{aligned} |(f - g)(x_m) - (f - g)(x_{\langle m,r \rangle})| &= |f(x_m) - g(x_m) - f(x_{\langle m,r \rangle}) + g(x_{\langle m,r \rangle})| \\ &\leq |f(x_m) - f(x_{\langle m,r \rangle})| + |-g(x_m) + g(x_{\langle m,r \rangle})| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise teoremi ispatlar.

Teorem 2.5.4. Eğer f bir aritmetik fonksiyon ise $|f|$ aritmetik süreklidir (Yaying ve Hazarika, 2017b).

İspat: $f, \mathbb{R}'$ nin bir E alt kümesi üzerinde aritmetik sürekli bir fonksiyon olsun. (x_m) 'nin E' de herhangi bir aritmetik yakınsak dizi olduğunu varsayalım. Aritmetik sürekliliğin tanımı gereği $(f(x_m))$ dizisi aritmetik yakınsaktır. O halde $\varepsilon > 0$ için pozitif bir r tamsayısı vardır öyle ki her bir m için

$$|f(x_m) - f(x_{\langle m,r \rangle})| < \varepsilon$$

dir.

Her m için,

$$||f|(x_m) - |f|(x_{\langle m,r \rangle})| = ||f(x_m)| - |f(x_{\langle m,r \rangle})|| \leq |f(x_m) - f(x_{\langle m,r \rangle})| < \varepsilon$$

bulunur. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 2.5.6. İki aritmetik sürekli fonksiyonun birleşimi yine aritmetik süreklidir (Yaying ve Hazarika, 2017b).

İspat: f ve g , $\mathbb{R}$ kümesinin bir E alt kümesi üzerinde iki aritmetik sürekli fonksiyon olsun.

$f \circ g(x_m) = f(g(x_m))$ fonksiyonunun aritmetik sürekli bir fonksiyon olduğunu ispatlayalım. (x_m) herhangi bir aritmetik yakınsak dizi olsun. g aritmetik sürekli olduğundan, $(g(x_m))$ dizisi de aritmetik yakınsaktır. Ayrıca f 'nin aritmetik

sürekli olduğu verildiğinden, aritmetik yakınsak dizi $(g(x_m))$ aritmetik yakınsak diziye $(f(g(x_m)))$ dönüşür. Bu ise istenileni verir.

Teorem 2.5.7. Eğer f , $\mathbb{R}$ 'nin bir E alt kümesi üzerinde düzgün sürekli ise o zaman aritmetik süreklidir (Yaying ve Hazarika, 2017b).

İspat: f , düzgün sürekli ve (x_m) de E ' deki herhangi bir aritmetik yakınsak dizi olsun. f , E ' de düzgün sürekli olduğundan verilen $\varepsilon > 0$ için öyle bir $\delta > 0$ sayısı vardır ki her $x, y \in E$ için $|x - y| < \delta$, $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ dir.

(x_m) dizisi aritmetik yakınsak olduğundan aynı $\delta > 0$ için bir pozitif r tam sayısı vardır öyle ki her m için $|x_m - x_{(m,r)}| < \delta$ bu ise

$$|f(x_m) - f(x_{(m,r)})| < \varepsilon$$

dır. O halde her n için $(f(x_m))$ dizisi aritmetik yakınsaktır. Böylece f fonksiyonu aritmetik süreklidir. İspat böylece tamamlanır.

2.6. FONKSİYON DİZİLERİNİN ARİTMETİK YAKINSAKLIĞI

Tanım 2.6.1. $\mathbb{R}$ 'nin bir E alt kümesi üzerinde tanımlanan (f_m) fonksiyon dizisi aritmetik yakınsak denir eğer herhangi bir $\varepsilon > 0$ ve $\forall x \in E$ için öyle bir r pozitif tam sayısı vardır ki, tüm $m \in \mathbb{N}$ için;

$$|f_m(x) - f_{(m,r)}(x)| < \varepsilon$$

dır (Yaying ve Hazarika, 2017b).

Örnek: Her $x \in \mathbb{R}$ için, $f_m(x) = \begin{cases} 3, & m \geq 2 \\ 0, & m = 1 \end{cases}$ dizisi aritmetik yakınsak bir fonksiyon dizisidir.

Teorem 2.6.2. (f_m) , $\mathbb{R}$ 'nin bir E alt kümesi üzerinde tanımlanmış bir aritmetik fonksiyon dizisi ve x_0 , E 'de bir nokta öyle ki

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f_m(x) = y_m \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

ise o zaman (y_m) dizisi de aritmetik yakınsaktır (Yaying ve Hazarika, 2017b).

Teorem 2.6.3. Eğer (f_m) aritmetik sürekli fonksiyonlardan oluşan bir dizi ve (f_m) dizisi f fonksiyonuna düzgün yakınsak ise limit fonksiyonu olan f de aritmetik süreklidir (Yaying ve Hazarika, 2017b).

Teorem 2.6.4. Aritmetik sürekli fonksiyonlar kümesi tüm sürekli fonksiyonlar kümesinde kapalıdır. Yani,

$$acf(E) = \overline{acf(E)}$$

dır (Yaying ve Hazarika, 2017b).



3. BULGULAR VE TARTIŞMA

Tanım 3.1. $p = (p_n)$ ve $q = (q_n)$, (2.1) koşulunu sağlayan diziler olmak üzere $x = (x_m)$ dizisine deferred aritmetik istatistiksel yakınsaktır denir eğer her $\varepsilon > 0$ için öyle bir r tamsayısı vardır ki

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{q_n - p_n} |\{p_n < m \leq q_n : |x_m - x_{\langle m, r \rangle}| \geq \varepsilon\}| = 0$$

sağlanır. (x_m) dizisinin deferred aritmetik istatistiksel olarak $x_{\langle m, r \rangle}$ 'ye yakınsak olduğunu göstermek için $ASD_{[p, q]} - \lim x_m = x_{\langle m, r \rangle}$ ifadesini kullanacağız.

Tüm deferred aritmetik istatistiksel yakınsak dizilerin kümesini

$$ASD_{[p, q]} = \left\{ x = (x_m) : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{q_n - p_n} |\{p_n < m \leq q_n : |x_m - x_{\langle m, r \rangle}| \geq \varepsilon\}| = 0 \right\}$$

ile göstereceğiz.

Tanım 3.2. $p = (p_n)$ ve $q = (q_n)$, (2.1) koşulunu sağlayan diziler olmak üzere $x = (x_m)$ dizisine güçlü deferred aritmetik yakınsaktır denir eğer her $\varepsilon > 0$ için öyle bir r tamsayısı vardır ki

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{q_n - p_n} \sum_{m=p(n)+1}^{q(n)} |x_m - x_{\langle m, r \rangle}| = 0$$

sağlanır. (x_m) dizisinin kuvvetli deferred aritmetik olarak $x_{\langle m, r \rangle}$ 'ye yakınsak olduğunu göstermek için $AD_{[p, q]} - \lim x_m = x_{\langle m, r \rangle}$ ifadesini kullanacağız.

Tüm kuvvetli deferred aritmetik yakınsak dizilerin uzayını aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$AD_{[p, q]} = \left\{ (x_m) : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{q_n - p_n} \sum_{m=p(n)+1}^{q(n)} |x_m - x_{\langle m, r \rangle}| = 0 \text{ bir } r \text{ tamsayısı için} \right\}.$$

Yukarıdaki tanımlar,

$p_n = 0, q_n = n$ için Tanım 3.1. aritmetik istatistiksel yakınsaklığa, $p_n = k_{n-1}, q_n = k_n$ için lacunary aritmetik istatistiksel yakınsaklığa indirgenir.

Teorem 3.1. $x = (x_m)$ ve $y = (y_m)$ iki dizi olsun.

i) Eğer $ASD_{[p, q]} - \lim x_m = x_{\langle m, r \rangle}$ ve $c \in \mathbb{R}$ ise $ASD_{[p, q]} - \lim cx_m = cx_{\langle m, r \rangle}$.

ii) Eğer $ASD_{[p,q]} - \lim x_m = x_{\langle m,r \rangle}$ ve $ASD_{[p,q]} - \lim y_m = y_{\langle m,r \rangle}$, ise $ASD_{[p,q]} - \lim(x_m + y_m) = (x_{\langle m,r \rangle} + y_{\langle m,r \rangle})$.

İspat: (i) Sonuç $c = 0$ ise açıktır. $c \neq 0$ olsun. O halde r tamsayısı için

$$\begin{aligned} & \frac{1}{q_n - p_n} |\{p_n < m \leq q_n : |cx_m - cx_{\langle m,r \rangle}| \geq \varepsilon\}| \\ &= \frac{1}{q_n - p_n} |\{p_n < m \leq q_n : |c||x_m - x_{\langle m,r \rangle}| \geq \varepsilon\}| \\ &= \frac{1}{q_n - p_n} |\{p_n < m \leq q_n : |x_m - x_{\langle m,r \rangle}| \geq \frac{\varepsilon}{|c|}\}| \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

(ii) $ASD_{[p,q]} - \lim x_m = x_{\langle m,r \rangle}$ ve $ASD_{[p,q]} - \lim y_m = y_{\langle m,r \rangle}$ olsun.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{q_n - p_n} |\{p_n < m \leq q_n : |(x_m + y_m) - (x_{\langle m,r \rangle} + y_{\langle m,r \rangle})| \geq \varepsilon\}| \\ &= \frac{1}{q_n - p_n} |\{p_n < m \leq q_n : |(x_m - x_{\langle m,r \rangle}) + (y_m - y_{\langle m,r \rangle})| \geq \varepsilon\}| \\ &\leq \frac{1}{q_n - p_n} |\{p_n < m \leq q_n : |x_m - x_{\langle m,r \rangle}| \geq \frac{\varepsilon}{2}\}| \\ &\quad + \frac{1}{q_n - p_n} |\{p_n < m \leq q_n : |y_m - y_{\langle m,r \rangle}| \geq \frac{\varepsilon}{2}\}| \end{aligned}$$

ifadesinin her iki tarafının limiti alınır ise istenen sonuç elde edilir.

Teorem 3.2. $\lim \inf_n \frac{q_n}{p_n} > 1$ ve $q_n - p_n < p_n$ ise $ASC \subset ASD_{[p,q]}$ dır.

İspat: Farz edelim ki $\lim \inf_n \frac{q_n}{p_n} > 1$ olsun.

O halde $\frac{q_n}{p_n} \geq 1 + t$ olacak şekilde yeterince büyük n için bir $t > 0$ sayısı vardır. Böylece

$$\frac{q_n - p_n}{p_n} \geq \frac{t}{t+1} \Rightarrow \frac{1}{p_n} \geq \frac{t}{1+t} \cdot \frac{1}{q_n - p_n}$$

elde edilir. $(x_m) \in ASC$ ise yeterince büyük n ve r tamsayısı ve her $\varepsilon > 0$ için

$$\frac{1}{p_n} |\{m \leq p_n : |x_m - x_{\langle m,r \rangle}| \geq \varepsilon\}|$$

$$\begin{aligned}
&\geq \frac{1}{p_n} |\{p_n < m \leq q_n : |x_m - x_{\langle m,r \rangle}| \geq \varepsilon\}| \\
&\geq \frac{t}{1+t} \cdot \frac{1}{q_n - p_n} |\{p_n < m \leq q_n : |x_m - x_{\langle m,r \rangle}| \geq \varepsilon\}|
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, $x = (x_m) \in ASD \Rightarrow (x_m) \in ASD_{[p,q]}$ bulunur.

Teorem 3.3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \inf \frac{q_n - p_n}{n} > 0$ ve $q_n < n$ ise $ASC \subseteq ASD_{[p,q]}$ dır.

İspat: $\lim_{n \rightarrow \infty} \inf \frac{q_n - p_n}{n} > 0$ ve $q_n < n$ ise her bir $\varepsilon > 0$ için

$$\{m < n : |x_m - x_{\langle m,r \rangle}| \geq \varepsilon\} \supset \{p_n < m \leq q_n : |x_m - x_{\langle m,r \rangle}| \geq \varepsilon\}$$

sağlanır. Böylece

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n} |\{m < n : |x_m - x_{\langle m,r \rangle}| \geq \varepsilon\}| &\geq \frac{1}{n} |\{p_n < m \leq q_n : |x_m - x_{\langle m,r \rangle}| \geq \varepsilon\}| \\
&= \frac{q_n - p_n}{n} \cdot \frac{1}{q_n - p_n} |\{p_n < m \leq q_n : |x_m - x_{\langle m,r \rangle}| \geq \varepsilon\}|
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise $ASD \subseteq ASD_{[p,q]}$ olduğunu gösterir.

Teorem 3.4. $(p_n), (q_n), (p'_n)$ ve (q'_n) dizileri (2.1)'deki koşulları sağlayan dört dizi olmak üzere tüm $n \in \mathbb{N}$ için

$$p_n < q_n, p'_n < q'_n \text{ ve } q_n - p_n \leq q'_n - p'_n \quad (3.1)$$

sağlansın.

(i) Eğer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q_n - p_n}{q'_n - p'_n} = s > 0 \quad (3.2)$$

$$ASD_{[p',q']} \subseteq ASD_{[p,q]} \text{ dır.}$$

(ii) Eğer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q'_n - p'_n}{q_n - p_n} = 1 \quad (3.3)$$

ise $ASD_{[p,q]} \subseteq ASD_{[p',q']}$ dır.

İspat: (i) (3.2) koşulu sağlansın. $\varepsilon > 0$ için

$$|\{p'_n < m \leq q'_n : |x_m - x_{\langle m,r \rangle}| \geq \varepsilon\}| \supseteq |\{p_n < m \leq q_n : |x_m - x_{\langle m,r \rangle}| \geq \varepsilon\}|$$

sağlanır. Böylece

$$\begin{aligned} & \frac{1}{q'_n - p'_n} |\{p'_n < m \leq q'_n : |x_m - x_{\langle m, r \rangle}| \geq \varepsilon\}| \\ & \geq \frac{q_n - p_n}{q'_n - p'_n} \cdot \frac{1}{q_n - p_n} |\{p_n < m \leq q_n : |x_m - x_{\langle m, r \rangle}| \geq \varepsilon\}| \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitsizlikten yararlanarak $ASD_{[p', q']} \subseteq ASD_{[p, q]}$ bulunur.

(ii) (3.3) koşulu sağlansın. $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned} & \frac{1}{q'_n - p'_n} |\{p'_n < m \leq q'_n : |x_m - x_{\langle m, r \rangle}| \geq \varepsilon\}| \leq \\ & \quad \frac{1}{q'_n - p'_n} |\{p'_n < m \leq p_n : |x_m - x_{\langle m, r \rangle}| \geq \varepsilon\}| \\ & \quad + \frac{1}{q'_n - p'_n} |\{q_n < m \leq q'_n : |x_m - x_{\langle m, r \rangle}| \geq \varepsilon\}| \\ & \quad + \frac{1}{q'_n - p'_n} |\{p_n < m \leq q_n : |x_m - x_{\langle m, r \rangle}| \geq \varepsilon\}| \\ & \leq \frac{p_n - p'_n + q'_n - q'_n}{q'_n - p'_n} + \frac{1}{q'_n - p'_n} |\{p_n < m \leq q_n : |x_m - x_{\langle m, r \rangle}| \geq \varepsilon\}| \\ & = \frac{(q'_n - p'_n) - (q_n - p_n)}{q'_n - p'_n} + \frac{1}{q'_n - p'_n} |\{p_n < m \leq q_n : |x_m - x_{\langle m, r \rangle}| \geq \varepsilon\}| \\ & \leq \frac{(q'_n - p'_n) - (q_n - p_n)}{q_n - p_n} + \frac{1}{q_n - p_n} |\{p_n < m \leq q_n : |x_m - x_{\langle m, r \rangle}| \geq \varepsilon\}| \\ & = \left(\frac{q'_n - p'_n}{q_n - p_n} - 1 \right) \cdot \frac{1}{q_n - p_n} |\{p_n < m \leq q_n : |x_m - x_{\langle m, r \rangle}| \geq \varepsilon\}| \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $ASD_{[p, q]} \subseteq ASD_{[p', q']}$ bulunur.

Teorem 3.5. $(p_n), (q_n), (p'_n)$ ve (q'_n) yukarıdaki (2.1) ve (3.1) koşullarını sağlayan dört dizi olmak üzere,

(i) Eğer (3.2) koşulu sağlanırsa $AD_{[p', q']} \subseteq AD_{[p, q]}$ sağlanır.

(ii) Eğer (3.3) koşulu sağlanırsa ve $x = (x_m)$ sınırlı bir dizi ise $AD_{[p, q]} \subseteq AD_{[p', q']}$ sağlanır.

İspat: (i) (3.2) koşulu sağlansın.

$$\sum_{m=p_n+1}^{q_n} |x_m - x_{\langle m,r \rangle}| \leq \sum_{m=p'_n+1}^{q'_n} |x_m - x_{\langle m,r \rangle}|$$

$$\frac{q_n - p_n}{q_n - p_n} \frac{1}{q'_n - p'_n} \sum_{m=p_n+1}^{q_n} |x_m - x_{\langle m,r \rangle}| \leq \frac{1}{q'_n - p'_n} \sum_{m=p'_n+1}^{q'_n} |x_m - x_{\langle m,r \rangle}|$$

bulunur. $n \rightarrow \infty$ limit alınırsa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{q_n - p_n} \sum_{m=p_n+1}^{q_n} |x_m - x_{\langle m,r \rangle}| = 0$$

elde edilir.

(ii) Farz edelim ki $AD_{[p,q]} - \lim x_m = x_{\langle m,r \rangle}$ ve $x = (x_m)$ sınırlı bir dizi olsun.

$$\begin{aligned} \frac{1}{q'_n - p'_n} \sum_{m=p'_n+1}^{q'_n} |x_m - x_{\langle m,r \rangle}| &= \frac{1}{q'_n - p'_n} \left[\sum_{m=p'_n+1}^{p_n} |x_m - x_{\langle m,r \rangle}| + \right. \\ &\quad \left. \sum_{m=p_n+1}^{q_n} |x_m - x_{\langle m,r \rangle}| + \sum_{m=q_n+1}^{q'_n} |x_m - x_{\langle m,r \rangle}| \right] \\ &\leq \frac{p_n - p'_n + q'_n - q_n}{q'_n - p'_n} M + \frac{1}{q'_n - p'_n} \sum_{m=p_n+1}^{q_n} |x_m - x_{\langle m,r \rangle}| \\ &\leq \frac{(q'_n - p'_n) - (q_n - p_n)}{q_n - p_n} M + \frac{1}{q_n - p_n} \sum_{m=p_n+1}^{q_n} |x_m - x_{\langle m,r \rangle}| \\ &= \left(\frac{q'_n - p'_n}{q_n - p_n} - 1 \right) M + \frac{1}{q_n - p_n} \sum_{m=p_n+1}^{q_n} |x_m - x_{\langle m,r \rangle}| \end{aligned}$$

olduğundan sonuç elde edilir.

Teorem 3.6. $(x_m) \in AD_{[p,q]}$ ise $(x_m) \in ASD_{[p,q]}$ dır.

İspat: $(x_m) \in AD_{[p,q]}$ olsun. $\varepsilon > 0$ ve bir r tamsayısı için

$$\sum_{m=p_n+1}^{q_n} |x_m - x_{\langle m,r \rangle}| \geq \sum_{\substack{m=p_n+1 \\ |x_m - x_{\langle m,r \rangle}| \geq \varepsilon}}^{q_n} |x_m - x_{\langle m,r \rangle}| + \sum_{\substack{m=p_n+1 \\ |x_m - x_{\langle m,r \rangle}| < \varepsilon}}^{q_n} |x_m - x_{\langle m,r \rangle}|$$

$$\begin{aligned}
&\geq \sum_{m=p_n+1}^{q_n} |x_m - x_{\langle m,r \rangle}| \\
&\quad |x_m - x_{\langle m,r \rangle}| \geq \varepsilon \\
&\geq \varepsilon |\{p_n < m \leq q_n : |x_m - x_{\langle m,r \rangle}| \geq \varepsilon\}|
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise istenen sonuçtur.

Teorem 3.7. $(p_n), (q_n), (p'_n)$ ve (q'_n) yukarıdaki (2.1) ve (3.1) koşullarını sağlayan diziler olmak üzere;

(i) (3.2) koşulu sağlanırsa $(x_m) \in AD_{[p',q']}$ ise $(x_m) \in ASD_{[p,q]}$ dır.

(ii) (3.3) koşulu sağlanırsa ve (x_m) sınırlı bir dizi ise $(x_m) \in ASD_{[p,q]}$ ise $(x_m) \in AD_{[p',q']}$ dır.

İspat: (i) (3.2) koşulu sağlansın ve $AD_{[p',q]} - \lim x_m = x_{\langle m,r \rangle}$ olsun. $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned}
\frac{1}{q'_n - p'_n} \sum_{m=p'_n+1}^{q'_n} |x_m - x_{\langle m,r \rangle}| &\geq \frac{q_n - p_n}{q_n - p_n} \frac{1}{q'_n - p'_n} \sum_{m=p_n+1}^{q_n} |x_m - x_{\langle m,r \rangle}| \\
&\geq \frac{q_n - p_n}{q'_n - p'_n} \frac{1}{q_n - p_n} \sum_{m=p_n+1}^{q_n} |x_m - x_{\langle m,r \rangle}| \\
&\quad |x_m - x_{\langle m,r \rangle}| \geq \varepsilon \\
&\geq \frac{q_n - p_n}{q'_n - p'_n} \varepsilon \frac{1}{q_n - p_n} |\{p_n < m \leq q_n : |x_m - x_{\langle m,r \rangle}| \geq \varepsilon\}|
\end{aligned}$$

sağlanır. Yukarıdaki eşitsizlikte her iki tarafın $n \rightarrow \infty$ limit alınırsa $(x_m) \in ASD_{[p,q]}$ olduğu elde edilir.

(ii) Farz edelim ki $ASD_{[p,q]} - \lim x_m = x_{\langle m,r \rangle}$ ve (x_m) sınırlı bir dizi olsun. O halde $\exists M > 0$ sayısı vardır ki tüm $m \in \mathbb{N}$ için $|x_m - x_{\langle m,r \rangle}| < M$ dır. Böylece her $\varepsilon > 0$ için

$$\frac{1}{q'_n - p'_n} \sum_{m=p'_n+1}^{q'_n} |x_m - x_{\langle m,r \rangle}|$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{q'_n - p'_n} \sum_{m=q_n - p_n + 1}^{q'_n - p'_n} |x_m - x_{\langle m, r \rangle}| + \frac{1}{q'_n - p'_n} \sum_{m=p_n + 1}^{q_n} |x_m - x_{\langle m, r \rangle}| \\
&\leq \left(\frac{(q'_n - p'_n) - (q_n - p_n)}{(q_n - p_n)} \right) M + \frac{1}{q'_n - p'_n} \sum_{m=p_n + 1}^{q_n} |x_m - x_{\langle m, r \rangle}| \\
&\leq \left(\frac{q'_n - p'_n}{q_n - p_n} - 1 \right) M + \frac{1}{q_n - p_n} \sum_{m=p_n + 1}^{q_n} |x_m - x_{\langle m, r \rangle}| \\
&\quad |x_m - x_{\langle m, r \rangle}| \geq \varepsilon \\
&\quad + \frac{1}{q_n - p_n} \sum_{m=p_n + 1}^{q_n} |x_m - x_{\langle m, r \rangle}| \\
&\quad |x_m - x_{\langle m, r \rangle}| < \varepsilon \\
&\leq \left(\frac{q'_n - p'_n}{q_n - p_n} - 1 \right) M \\
&\quad + \frac{M}{q_n - p_n} |\{p_n < m \leq q_n : |x_m - x_{\langle m, r \rangle}| \geq \varepsilon\}| + \frac{q'_n - p'_n}{q_n - p_n} \varepsilon
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitsizlikte her iki tarafın $n \rightarrow \infty$ limit alınırsa $(x_m) \in AD_{[p', q']}$ olduğu elde edilir.

3.1. DEFERRED ARİTMETİK İSTATİSTİKSEL SÜREKLİLİK

Bu bölümde deferred aritmetik istatistiksel sürekliliği tanımlayacağız ve bazı sonuçlar ortaya koyacağız.

Tanım 3.1.1. $\mathbb{R}$ 'nin bir E alt kümesinde tanımlanan bir f fonksiyonu verilsin. Eğer bu fonksiyon deferred aritmetik istatistiksel yakınsaklığı koruyorsa yani $ASD_{[p, q]} - \lim x_m = x_{\langle m, r \rangle}$ olduğunda $ASD_{[p, q]} - \lim f(x_m) = f(x_{\langle m, r \rangle})$ ise f fonksiyonuna deferred aritmetik istatistiksel süreklidir denir.

Deferred aritmetik istatistiksel sürekli fonksiyonu belirtmek için $ASD_{[p, q]} -$ sürekli fonksiyon şeklinde belirteceğiz.

Teorem 3.1.1. E üzerinde tanımlı iki f ve g fonksiyonları ve $ASD_{[p, q]} -$ sürekli fonksiyon olsunlar. Bu durumda $(f \overline{+} g)(x_m)$ fonksiyonu da $ASD_{[p, q]} -$ süreklidir.

İspat: f ve g fonksiyonları ve $ASD_{[p, q]} -$ sürekli fonksiyonlar olduğundan

$ASD_{[p,q]} - \lim x_m = x_{\langle m,r \rangle}$ ise $ASD_{[p,q]} - \lim f(x_m) = f(x_{\langle m,r \rangle})$ ve $ASD_{[p,q]} - \lim g(x_m) = g(x_{\langle m,r \rangle})$ sağlanır. Buradan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{q_n - p_n} |\{p_n < m \leq q_n : |f(x_m) - f(x_{\langle m,r \rangle})| \geq \varepsilon\}| = 0 \text{ ve}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{q_n - p_n} |\{p_n < m \leq q_n : |f(x_m) - f(x_{\langle m,r \rangle})| \geq \varepsilon\}| = 0.$$

$(f + g)(x_m)$ fonksiyonunun $ASD_{[p,q]}$ -sürekli olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{q_n - p_n} |\{p_n < m \leq q_n : |(f + g)(x_m) - (f + g)(x_{\langle m,r \rangle})| \geq \varepsilon\}| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{q_n - p_n} |\{p_n < m \leq q_n : |f(x_m) + g(x_m) - f(x_{\langle m,r \rangle}) - g(x_{\langle m,r \rangle})| \geq \varepsilon\}| \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{q_n - p_n} |\{p_n < m \leq q_n : |f(x_m) - f(x_{\langle m,r \rangle})| \geq \varepsilon\}| \\ &\quad + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{q_n - p_n} |\{p_n < m \leq q_n : |g(x_m) - g(x_{\langle m,r \rangle})| \geq \varepsilon\}| = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece istenen sonuç elde edilir.

$(f - g)(x_m)$ fonksiyonunun $ASD_{[p,q]}$ -sürekli olduğu benzer yöntemle gösterilir.

Aynı zamanda iki $ASD_{[p,q]}$ - sürekli fonksiyonun çarpımı, bileşkesi de $ASD_{[p,q]}$ - süreklidir.

Teorem 3.1.2. $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$, $\mathbb{R}$ 'nin E alt kümesinde tanımlanan $ASD_{[p,q]}$ - sürekli fonksiyonlarının bir dizisi ve (f_m) bir f fonksiyonuna düzgün yakınsak olsun, o halde $f, ASD_{[p,q]}$ - süreklidir.

İspat: $\varepsilon > 0$ ve (x_m) , $\mathbb{R}$ 'nin bir E alt kümesi üzerinde $ASD_{[p,q]}$ - yakınsak dizi olsun (f_m) dizisi f 'e düzgün yakınsak olduğundan; tüm $m \geq N$ ve $x \in E$ 'ler için $|f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ olacak şekilde $N \in \mathbb{N}$ vardır.

f_N, E üzerinde $ASD_{[p,q]}$ - sürekli olduğundan, bir r tamsayısı için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{q_n - p_n} |\{p_n < m \leq q_n : |f_N(x_m) - f_N(x_{\langle m,r \rangle})| \geq \frac{\varepsilon}{3}\}| = 0$$

dır. Öte yandan, bir r tamsayısı için

$$\{p_n < m \leq q_n : |f(x_m) - f(x_{\langle m,r \rangle})| \geq \frac{\varepsilon}{3}\}$$

$$\begin{aligned}
&\subset \left\{ p_n < m \leq q_n : |f_N(x_{\langle m,r \rangle}) - f(x_{\langle m,r \rangle})| \geq \frac{\varepsilon}{3} \right\} \\
&\cup \left\{ p_n < m \leq q_n : |f_N(x_{\langle m,r \rangle}) - f_N(x_m)| \geq \frac{\varepsilon}{3} \right\} \\
&\cup \left\{ p_n < m \leq q_n : |f_N(x_m) - f(x_m)| \geq \frac{\varepsilon}{3} \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla yukarıdaki içermekten şu sonuç elde edilir.

$$\begin{aligned}
&\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{q_n - p_n} |\{p_n < m \leq q_n : |f(x_m) - f(x_{\langle m,r \rangle})| \geq \varepsilon\}| \\
&\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{q_n - p_n} |\{p_n < m \leq q_n : |f_N(x_m) - f(x_{\langle m,r \rangle})| \geq \frac{\varepsilon}{3}\}| \\
&+ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{q_n - p_n} |\{p_n < m \leq q_n : |f_N(x_{\langle m,r \rangle}) - f_N(x_m)| \geq \frac{\varepsilon}{3}\}| \\
&\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{q_n - p_n} |\{p_n < m \leq q_n : |f_N(x_{\langle m,n \rangle}) - f(x_m)| \geq \frac{\varepsilon}{3}\}| \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Dolayısıyla f , $ASD_{[p,q]}$ – sürekli.

Teorem 3.1.3. $\mathbb{R}$ ’nin bir E alt kümesinde üzerinde tanımlı tüm $ASD_{[p,q]}$ – sürekli fonksiyonların kümesi, E üzerinde tanımlı tüm sürekli fonksiyonların bir kapalı bir alt kümesidir. Yani,

$$\overline{ASD_{[p,q]}(E)} = ASD_{[p,q]}(E)$$

dır.

Burada $ASD_{[p,q]}(E)$ kümesi E üzerinde tanımlı tüm $ASD_{[p,q]}$ sürekli fonksiyonların kümesini göstermektedir. Ayrıca $\overline{ASD_{[p,q]}(E)}$ kümesi $ASD_{[p,q]}(E)$ kümesinin kapanışını göstermektedir.

İspat: $f, \overline{ASD_{[p,q]}(E)}$ kümesinden aldığımız herhangi bir elaman olsun. O halde $ASD_{[p,q]}(E)$ kümesinde $\lim f_m = f$ olacak şekilde bir (f_m) dizi vardır. E kümesinde $(x_m) \in ASD_{[p,q]}$ olsun. (f_m) , f' ye yakınsadığından, öyle bir pozitif N tamsayısı vardır ki $\forall m \geq N$ ve $\forall x \in E$ için

$$|f(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (3.4)$$

Aynı zamanda f_N , E üzerinde $ASD_{[p,q]}$ – sürekli olduğundan bir r tamsayısı için:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{q_n - p_n} \left| \left\{ p_n < m \leq q_n : |f_N(x_m) - f_N(x_{\langle m,r \rangle})| \geq \frac{\varepsilon}{3} \right\} \right| = 0$$

elde edilir. Diğer taraftan, bir r tamsayısı için

$$\begin{aligned} & \left\{ p_n < m \leq q_n : |f(x_m) - f(x_{\langle m,r \rangle})| \geq \frac{\varepsilon}{3} \right\} \\ & \subset \left\{ p_n < m \leq q_n : |f_N(x_{\langle m,r \rangle}) - f(x_{\langle m,r \rangle})| \geq \frac{\varepsilon}{3} \right\} \\ & \cup \left\{ p_n < m \leq q_n : |f_N(x_{\langle m,r \rangle}) - f_N(x_m)| \geq \frac{\varepsilon}{3} \right\} \\ & \cup \left\{ p_n < m \leq q_n : |f_N(x_m) - f(x_m)| \geq \frac{\varepsilon}{3} \right\} \end{aligned}$$

elde edilir.

Dolayısıyla yukarıdaki içermekten şu sonuç elde edilir;

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{q_n - p_n} \left| \left\{ p_n < m \leq q_n : |f(x_m) - f(x_{\langle m,r \rangle})| \geq \varepsilon \right\} \right| \\ & \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{q_n - p_n} \left| \left\{ p_n < m \leq q_n : |f_N(x_m) - f(x_{\langle m,r \rangle})| \geq \frac{\varepsilon}{3} \right\} \right| \\ & + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{q_n - p_n} \left| \left\{ p_n < m \leq q_n : |f_N(x_{\langle m,r \rangle}) - f_N(x_m)| \geq \frac{\varepsilon}{3} \right\} \right| \\ & \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{q_n - p_n} \left| \left\{ p_n < m \leq q_n : |f_N(x_{\langle m,r \rangle}) - f(x_m)| \geq \frac{\varepsilon}{3} \right\} \right| \\ & = 0. \end{aligned}$$

Böylece $f, ASD_{[p,q]}$ – sürekli. Yani $f \in ASD_{[p,q]}(E)$ dir. Bu bize gerekli sonucu verir.

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Aritmetik yakınsaklık kavramı, matematiksel analizde önemli bir yer tutmakta ve yıllar içinde birçok araştırmacı tarafından farklı yönleriyle ele alınmaktadır. Bu tezde, klasik aritmetik yakınsaklık kavramı ile deferred istatistiksel yakınsaklık kavramı birleştirilerek, *deferred aritmetik istatistiksel yakınsaklık* adı verilen yeni bir yakınsaklık türü incelenmiştir. Elde edilen sonuçlar, bu yeni kavramın klasik yakınsaklık türleriyle ilişkisini ortaya koymakta ve matematiksel analizde alternatif bir yaklaşım sunmaktadır.

Bu çalışma, toplanabilme teorisi bağlamında yapılacak ileri araştırmalar için teorik bir temel oluşturmayı amaçlamaktadır. Özellikle, istatistiksel ve ideal yakınsaklık türlerinin farklı normlu uzaylara uygulanabilirliğine dair yapılacak çalışmalarda, bu çalışmanın bulgularının referans niteliği taşıyacağı düşünülmektedir.

Buna ek olarak, bu yaklaşımlar nörtosofik normlu uzaylar ve bulanık (fuzzy) normlu uzaylar gibi daha genel yapılara taşınarak, bu alanlardaki yakınsaklık türleri üzerine yeni ve özgün sonuçlar elde edilebilir. Bu bağlamda, araştırmacıların bu çalışmadan ilham alarak benzer yapıların farklı yakınsaklık türleri ile etkileşimini incelemeleri, literatüre önemli katkılar sağlayacaktır.

KAYNAKLAR

- Agnew, R. P. (1932). On deferred Cesaro mean. *Annals of Mathematics*, 33, 413–421.
- Altinok, M., Inan, B., & Küçükaslan, M. (2015). On deferred statistical convergence of sequences of sets in metric space. *Turkish Journal of Mathematics and Computer Science*, Article ID 20150050, 9 pages.
- Bilgin, N. G. (2023). Arithmetic statistically convergent on neutrosophic normed spaces. *Gümüşhane Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi*, 13(2), 270–280. <https://doi.org/10.17714/gumusfenbil.1180772>
- Dağadur, I., & Sezgek, Ş. (2016). Deferred Cesaro mean and deferred statistical convergence of double sequences. *Journal of Inequalities and Special Functions*, 7(4), 118–136.
- Debnath, S., Debnath, S., & Choudhury, C. (2022). On deferred statistical convergence of sequences in neutrosophic normed spaces. *Sahand Communications in Mathematical Analysis*, 19(4), 81–96. <https://doi.org/10.22130/scma.2022.544537.1031>
- Demirci, I. A., & Gürdal, M. (2021). On deferred statistical convergence for the sets of triple sequences. *Journal of Mathematics and Analysis*, 12(4), 38–50.
- Et, M. (2021). On some generalized deferred Cesaro means of order β . *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 44(9), 7433–7441.
- Et, M., & Yilmazer, M. Ç. (2020). On deferred statistical convergence of sequences of sets. *AIMS Mathematics*, 5(3), 2143–2152.
- Et, M., Çınar, M., & Şengül, H. (2019). Deferred statistical convergence in metric spaces. *Conference Proceedings of Science and Technology*, 2(3), 189–193.
- Fast, H. (1951). Sur la convergence statistique. *Colloquium Mathematicum*, 2, 241–244.
- Freedman AR, Sember JJ.(1981). Density and summability, *Pac. J. Math.*, 95(2): 293-305.
- Hardy, G.H. (1949). Divergent series. Clarendon Press.

- Huban, M. B., & Gürdal, M. (2021). Deferred invariant statistical convergent triple sequences via Orlicz function. *Bulletin of Mathematical Analysis and Applications*, 13(2), 25–38.
- Kiş, Ö. (2022a). I-lacunary arithmetic statistical convergence. *Journal of Applied Mathematics & Informatics*, 40(1–2), 327–339.
- Kiş, Ö. (2022b). On invariant arithmetic statistically convergence and lacunary invariant arithmetic statistically convergence. *Palestine Journal of Mathematics*, 11(2).
- Kiş, Ö., & Güler, E. (2019). Deferred statistical convergence of double sequences in intuitionistic fuzzy normed linear spaces. *Turkish Journal of Mathematics and Computer Science*, 11, 95–104.
- Küçükaslan, M., & Yılmaztürk, M. (2016). On deferred statistical convergence of sequences. *Kyungpook Mathematical Journal*, 56, 357–366.
- Maddox, I. J. (1988). *Elements of functional analysis*. Cambridge University Press.
- Nuray, F. (2020). Strongly deferred invariant convergence and deferred invariant statistical convergence. *Journal of Computer Science and Computational Mathematics*, 10(1), 1–6.
- Patterson, R. F., Nuray, F., & Başarir, M. (2016). Inclusion theorems of double deferred Cesaro means II. *Tbilisi Mathematical Journal*, 9(2), 15–23.
- Ruckle, W. H. (2012). Arithmetical summability. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 396, 741–748.
- Steinhaus, H. (1951). Sur la convergence ordinaire et la convergence asymptotique. *Colloquium Mathematicum*, 2, 73–74.
- Şengül, H., Et, M., & Çakallı, H. (2019). Deferred statistical convergence of order α in topological groups. *AIP Conference Proceedings*, 2183(1), 050014.
- Ulus, U., & Güle, E. (2022). Deferred Cesaro summability and statistical convergence for double sequences of sets. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, 42(4), 4095–4103.

- Yaying, T., & Hazarika, B. (2017a). On arithmetical summability and multiplier sequences. *National Academy Science Letters*, 40, 43–46.
<https://doi.org/10.1007/s40009-016-0525-2>
- Yaying, T., & Hazarika, B. (2017b). On arithmetic countinuity. *Bol. Soc. Paran. Mat.*, 35(1), 139-145.
- Yaying, T., & Hazarika, B. (2020). Lacunary arithmetic statistical convergence. *National Academy Science Letters*, 43, 547–551.
<https://doi.org/10.1007/s40009-020-00910-6>

