T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ZAMAN SKALASI ÜZERİNDE KESİRLİ MERTEBELİ SINIR DEĞER PROBLEMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MEHMET AVCI

DENİZLİ, AĞUSTOS - 2024

T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ZAMAN SKALASI ÜZERİNDE KESİRLİ MERTEBELİ SINIR DEĞER PROBLEMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MEHMET AVCI

DENİZLİ, AĞUSTOS - 2024

Bu tez çalışması TÜBİTAK tarafından BİDEB 2210-A(Yurtiçi Lisansüstü Burs Programı) (1649B022201306) numaralı proje ile desteklenmiştir.

Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırmalarının yapılması ve bulgularının analizlerinde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini; bu çalışmanın doğrudan birincil ürünü olmayan bulguların, verilerin ve materyallerin bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini ve alıntı yapılan çalışmalara atfedildiğine beyan ederim.

MEHMET AVCI

ÖZET

ZAMAN SKALASI ÜZERİNDE KESİRLİ MERTEBELİ SINIR DEĞER PROBLEMLERİ
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MEHMET AVCI
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
(TEZ DANIŞMANI:PROF.DR. İSMAİL YASLAN)

DENİZLİ, AĞUSTOS - 2024

Bu tez üç ana bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde problem tanıtımı yapılmıştır. İkinci bölümde zaman skalası, beta-kesirli türev ve beta-kesirli integral ile ilgili temel tanım ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde ise ilk olarak çözümlerin varlığı için gerekli tanımlar ve lemmalar verilmiştir. Daha sonra sınır değer problemi, integral denkleme indirgenerek en az bir pozitif çözümün varlığı Dört Fonksiyonel Sabit Nokta Teoremi yardımıyla, en az iki pozitif çözümün varlığı Avery Henderson Sabit Nokta Teoremi yardımıyla ve en az üç pozitif çözümün varlığı Beş Fonksiyonel Sabit Nokta Teoremi yardımıyla ispatlanmıştır. Son olarak elde edilen koşulların sağlanabilir koşullar olduğunu göstermek için örnekler verilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Zaman skalası, beta-kesirli türev, beta-kesirli integral, sınır değer problemi, sabit nokta teoremleri, pozitif çözümler.

ABSTRACT

FRACTİONAL ORDER BOUNDARY VALUE PROBLEMS ON TİME SCALES
MSC THESIS
MEHMET AVCI
PAMUKKALE UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATİCS

(SUPERVISOR:PROF.DR. İSMAİL YASLAN)

DENİZLİ, AUGUST 2024

This thesis consists of three main parts. In the first part, the problem was introduced. In the second part, the basic definitions and theorems related to time scale, beta-fractional derivative and beta-fractional integral were given. In the third part, the necessary definitions and lemmas for the existence of solutions were given. Then, the boundary value problem was reduced to the integral equation and the existence of at least one, two and three positive solutions proved by using Four Functionals Fixed Point Theorem, the Avery Henderson Fixed Point Theorem and the Five Functionals Fixed Point Theorem, respectively. Finally, examples were given to show that the obtained conditions are satisfiable.

KEYWORDS: Time scales, beta-fractional derivative, beta-fractional integral, boundary value problem, fixed point theorems, positive solutions.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ

Tez çalışmamın başlangıcından bu yana, tez konumda çalışmamı sağlayan, bütün enerjisiyle ve engin birikimiyle beni motive eden, anlayış ve sabırla bana destek olan, kıymetli vaktini, emeğini ve bilgisini esirgemeden yardımcı olup yönlendiren çok değerli danışman hocam Sayın Prof. Dr. İsmail YASLAN' a sonsuz saygılarımla teşekkür eder şükranlarımı sunarım.

Yüksek lisans eğitimim boyunca Bilim İnsanı Destekleme Programı Başkanlığı (BİDEB)-2211(Yurtiçi Lisansüstü Burs Programı) ile destek olan TÜBİTAK'a teşekkür ederim.

Eğitim hayatım boyunca başta bana matematiği öğreten ve sevdiren öğretmenlerim olmak üzere emeği geçen bütün öğretmenlerime ayrı ayrı teşekkürlerimi sunarım.

Beni her anlamda destekleyip benim yanımda olan, bana en çok inanan dedem Mehmet AVCI' ya, varlığıyla bana umut olan oğlum Yusuf Emin AVCI' ya, beni büyütüp bugünlere getiren anneme, babama ve kardeşlerime, bana iyi günümde de kötü günümde de dost olan kardeş kadar yakın arkadaşlarıma da en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Matematik öğrenme ve öğretme arzusunu diri tutabilen, umut etmekten vazgeçmeyen, çalışmaya inanan ve savaşmayı asla bırakmayan kendime de ayrıca teşekkür ederim.

1. GİRİŞ

Zaman skalası teorisi, ilk olarak 1988 de Bernd Aulbach'ın danışmanlığındaki Stefan Hilger'in doktora tezinde sunulmuştur. Ayrık olayları tanımlamada tam sayılar üzerindeki fark analizi ve sürekli doğal sayıları tanımlarken de reel sayılar üzerindeki bildiğimiz analiz kullanılır. Zaman skalası sürekli ve ayrık analizi birleştirdiğinden diferansiyel ve fark denklemlerinden daha genel sonuçlar elde edilir. Zaman skalası zamanın bir modeli olarak düşünülebilir. Gerçek yaşam problemlerinde zaman sürekli olmasına rağmen belirli değişkenlerin gerçekleşen değerleri zamanda farklı noktalarda kayıtlıdır. Örneğin borsa, hafta içi her gün izlenirken hafta sonu izlenmez ve gelecek hafta içi tekrar izlenmeye devam eder. Zaman skalası analizinin incelenmesi birçok önemli uygulamaya yol açmıştır. Örneğin belirli böcek popülasyonlarının modellenmesi, salgın modelleri, ısı transferi ve sinir ağları çalışması, kimyasal reaksiyonlar, metallerin fitoremediasyonu, yara iyileşmesi, ekonomide maksimizasyon problemleri ve trafik problemleri gibi sürekli olmayan bölge içeren çeşitli uygulamaları vardır (Agarval ve diğ. 2004).

Kesirli analiz, tamsayı olmayan mertebeli türev ve integral anlamına gelir. Bu kavram, Leibniz, Liouville, Riemann, Letnikov ve Grünwald tarafından tanıtılmış ve geliştirilmiştir (Oldham ve Spainer 1974). Kesirli mertebeli diferansiyel denklemler için çözümlerin varlık problemleri konusu, son zamanlarda büyük ilgiye sahiptir. Ancak, tam sayı olmayan mertebeli türevlerin incelenmesi, 1819'a kadar literatürde görünmedi. 1819 da Lacroix, kuvvet fonksiyonunun n. türevi için bir kesirli türev tanımı sunduğunda tam sayı olmayan mertebeli türevler ortaya çıktı (Lacroix 1820). 300 yılı aşkın bir geçmişe sahip olan kesirli analiz, bilinen analiz hesabının tam sayı olmayan mertebe durumuna genelleştirilmesi olan eski ve yeni bir konudur (Kilbas ve diğ. 2006, Podlubny 1998). Riemann-Liouville, Grünwald-Letnikov, Hadamard, Riesz, Caputo ve uyumlu kesirli gibi birçok farklı kesirli diferansiyel operatör biçimi tanımlanmıştır (Benkhettou ve diğ. 2016, Kilbas ve diğ. 2006, Ortigueira ve Trujillo 2012, Podlubny 1998, Samko ve diğ. 1993). Kesirli analiz, matematiksel fiziğin en hızlı gelişen dallarından biridir. Sinyal belirleme, sıvı ve gazlarda dalgalar, baraj hidroliği, petrol katmanlarındaki sıcaklık alanı sorunları veya difüzyon problemleri gibi kesirli analizin bilim ve mühendislikte birçok uygulaması vardır (Boyadjiev ve Scherer 2004, Chen ve Chen 2011, Kilbas ve diğ. 2006, Machado ve diğ. 2011, Schneider ve Wyss 1989).

Kesirli türevleri içeren denklemler, tam sayı mertebesindeki diferansiyel denklemlere göre uygulamalarda her zaman daha iyi etkilere sahip olduğundan, kesirli diferansiyel denklemler büyük ilgi görmüştür (Miller ve Ross 1988, Miller ve Ross 1993, Sabatier ve diğ. 2007). Kesirli analizde son zamanlarda, β-kesirli türev Abdon Atangana tarafından önerilmiştir (Atangana ve Goufo 2014, Atangana 2015, Atangana ve diğ. 2016). f fonksiyonunun α mertebesindeki β-kesirli türevi

$$D_t^{\alpha}(f)(t) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{f\left[t+\varepsilon\left(t+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{1-\alpha}\right]-f(t)}{\varepsilon}, \quad \alpha \in (0,1]\,,\, t>0$$

olarak tanımlanır.

Kesirli hesabı ve zaman skalalarını birleştirme fikri Bastos (2012) doktora teziyle doğdu. Konunun ortaya çıkmasından sonra bir dizi makale yayınlandı (Zhu ve Zhu 2013, Benkhettou 2015, Benkhettou ve diğ. 2016, Zhao ve You 2016, Bendouma ve Hammoudi 2019, Rahmat ve Noorani 2021). Yaslan (2023) makalesinde zaman skalasında β - kesirli türev ve integral kavramı tanıtıldı. Bu kesirli analiz, zaman skalası analizini ve β - kesirli analizi birleştirir ve genelleştirir. Zaman skalası üzerinde kesirli diferansiyel denklem konusunun, hem yeni bir çalışma alanı olup hem de elde edilecek sonuçların kesirli mertebeli diferansiyel denklemler için elde edilen sonuçlardan daha genel olması sebebiyle ileride bu alana olan ilgi daha da artacaktır.

Bu çalışmada, aşağıdaki üç noktalı β - kesirli sınır değer probleminin (SDP) zaman skalalarında birden fazla pozitif çözümünün varlığıyla ilgileniyoruz. Bu tez çalışmasında, $\mathbb{T}$ bir zaman skalası olmak üzere,

$$\begin{cases} {}^{\beta}T_{\alpha}^{\nabla}\left({}^{\beta}T_{\alpha}^{\Delta}(\mathrm{y}(t)\right) + \phi(t)\, f(t,\mathrm{y}(t)) = 0 & , \quad \mathrm{t} \in [a,b] \subset \mathbb{T} \\ \delta y(b) + \gamma\, {}^{\beta}T_{\alpha}^{\Delta}(\mathrm{y}(b)) = {}^{\beta}T_{\alpha}^{\Delta}(\mathrm{y}(c)) & , \quad \mathrm{c} \in (a,b) \\ {}^{\beta}T_{\alpha}^{\Delta}(\mathrm{y}(a)) = 0 & , \quad 0 < \alpha \le 1\,. \end{cases}$$

sınır değer problemi için sabit nokta teoremleri kullanılarak hangi koşullarda en az bir, en az iki ve en az üç pozitif çözümünün mevcut olduğunu inceleyeceğiz. Bu çalışma sınır değer probleminin zaman skalasında β - kesirli analiz içermesi açısından literatürde yapılan ilk çalışma olacaktır.

2. TEMEL BİLGİLER

Bu bölümde zaman skalası ile ilgili temel tanımlar, Beta-Δ-türev, Beta-Δ-integral, Beta-∇-türev, Beta- ∇-integral kavramları verilmiştir.

2.1 Zaman Skalası ile İlgili Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1: Reel sayıların boştan farklı kapalı alt kümesine zaman skalası denir ve $\mathbb{T}$ ile gösterilir (Bohner ve Peterson 2001).

Örneğin $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0$, Cantor kümesi, $[a, b]$, $\left\{\frac{1}{n}: n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$ kümeleri birer zaman skalası iken $\mathbb{Q}, \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}, \mathbb{C}, (a, b), [a, b)$ ve $(a, b]$ kümeleri zaman skalası değildir.

Tanım 2.1.2: $\mathbb{T}$ bir zaman skalası olsun. $\forall t \in \mathbb{T}$ için,

i. $\sigma(t) = inf\,\{s \in \mathbb{T}: s > t\}$ ile tanımlı $\sigma : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ operatörüne ileri sıçrama operatörü denir.

ii. $\rho(t) = sup\{s \in \mathbb{T}: s < t\}$ ile tanımlı $\rho: \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ operatörüne geri sıçrama operatörü denir.

iii. $\mu(t) = \sigma(t) - t$ şeklinde tanımlanan $\mu: \mathbb{T} \to [0, \infty)$ fonksiyonuna ileri graininess fonksiyonu adı verilir.

iv. $\nu(t) = t - \rho(t)$ şeklinde tanımlanan $\nu: \mathbb{T} \to [0, \infty)$ fonksiyonuna geriye graininess fonksiyonu adı verilir.

v. $\sigma(t) > t$ ise $t \in \mathbb{T}$ ye sağ-yayılmış nokta, $\sigma(t) = t$ ve $t < sup\, \mathbb{T}$ ise t ye sağ-yoğun nokta denir.

vi. $\rho(t) < t$ ise $t \in \mathbb{T}$ ye sol-yayılmış nokta, $\rho(t) = t$ ve $inf\, \mathbb{T} < t$ ise t ye sol-yoğun nokta denir.

vii. $\rho(t) < t < \sigma\,(t)$ ise yani $t \in \mathbb{T}$ hem sol-yayılmış nokta hem de sağ-yayılmış nokta ise $t \in \mathbb{T}$ ' ye izole(ayrık) nokta denir.

viii. $\rho(t) = t = \sigma(t)$ ise yani $t \in \mathbb{T}$ hem sol-yoğun nokta hem de sağ-yoğun nokta ise $t \in \mathbb{T}$ ye yoğun nokta denir (Bohner ve Peterson 2001).

Örnek 2.1.3: $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ olsun. $\forall t \in \mathbb{R}$ için $\sigma(t) = inf\{s \in \mathbb{R} : s > t\} = t$ ve $\rho(t) = sup\{s \in \mathbb{R}: s < t\} = t$ olur. Buradan $\mathbb{R}$ deki her nokta yoğundur. Ayrıca ileri graininess fonksiyonu $\mu(t) = \sigma(t) - t = t - t = 0$ ve geriye graininess fonksiyonu $\nu(t) = t - \rho(t) = t - t = 0$ olarak bulunur.

Örnek 2.1.4: $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ olsun. $\forall t \in \mathbb{Z}$ için $\sigma(t) = inf\{s \in \mathbb{Z}: s > t\} = t + 1$ ve $\rho(t) = sup\{s \in \mathbb{Z}: s < t\} = t - 1$ olur. Buradan $\mathbb{Z}$ deki her nokta izole(ayrık) noktadır. Ayrıca ileri graininess fonksiyonu, $\mu(t) = \sigma(t) - t = t + 1 - t = 1$ ve geriye graininess fonksiyonu $\nu(t) = t - \rho(t) = t - (t - 1) = 1$ olarak bulunur.

Tanım 2.1.5: $\mathbb{T}$ sol-yayılmış maksimum m elemanına sahip ise $\mathbb{T}^\kappa = \mathbb{T} - \{m\}$, diğer durumlarda ise $\mathbb{T}^\kappa = \mathbb{T}$ olarak tanımlanır. Bir başka ifadeyle;

$$\mathbb{T}^\kappa = \begin{cases} \mathbb{T}\backslash[\rho(\sup\mathbb{T}), \sup\mathbb{T}] & , \quad \sup\mathbb{T} < \infty \\ \mathbb{T} & , \quad \sup\mathbb{T} = \infty \end{cases}$$

şeklinde yazılabilir (Bohner ve Peterson 2001).

Tanım 2.1.6: $\mathbb{T}$ sağ-yayılmış minimum m elemanına sahip ise $\mathbb{T}_\kappa = \mathbb{T} - \{m\}$, diğer durumlarda ise $\mathbb{T}_\kappa = \mathbb{T}$ olarak tanımlanır. Bir başka ifadeyle;

$$\mathbb{T}_\kappa = \begin{cases} \mathbb{T}\backslash[\sigma(\inf\mathbb{T}), \inf\mathbb{T}] & , \quad \inf\mathbb{T} < \infty \\ \mathbb{T} & , \quad \inf\mathbb{T} = \infty \end{cases}$$

şeklinde yazılabilir (Bohner ve Peterson 2001).

Tanım 2.1.7: $U \subset \mathbb{T}$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $U_\varepsilon(t) = \{s \in \mathbb{T}: |s - t| < \varepsilon\}$ kümesine t nin ε komşuluğu denir.

Tanım 2.1.8: $t_0 \in \mathbb{T}$ olsun. Verilen $\forall \varepsilon > 0$ için ve $\forall t \in U(t_0)$ için $|f(t) - f(t_0)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $U(t_0)$ komşuluğu var ise o halde $f: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna $t = t_0$ noktasında süreklidir denir.

Örnek 2.1.9: $g: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, $g(t) = \begin{cases} \sqrt{t-1} + 1 & , \quad t \geq 1 \\ t^2 - 2 & , \quad t < 1 \end{cases}$ fonksiyonu verilsin.

i. $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise $f, t = 1$ de sürekli değildir.

ii. $\mathbb{T}=\mathbb{Z}$ ise $f, t=1$ de süreklidir.

Tanım 2.1.10: $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t\in\mathbb{T}^{\kappa}$ olmak üzere $\forall\varepsilon>0$ ve t nin bir $U\subset\mathbb{T}$ komşuluğundaki her $s\in U$ için,

$$|f(\sigma(t))-f(s)-f^{\Delta}(t)(\sigma(t)-s)|\leq\varepsilon|\sigma(t)-s|$$

olacak şekilde bir $f^{\Delta}(t)$ sayısı varsa bu sayıya f fonksiyonunun t noktasındaki delta türevi denir. Ayrıca $\forall t\in\mathbb{T}^{\kappa}$ için $f^{\Delta}(t)$ mevcut ise f fonksiyonuna tüm $\mathbb{T}^{\kappa}$ kümesi üzerinde delta türevlenebilirdir ve $f^{\Delta}:\mathbb{T}^{\kappa}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu, f nin $\mathbb{T}^{\kappa}$ kümesindeki delta türevi olarak adlandırılır (Bohner ve Peterson, 2001).

Tanım 2.1.11: $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t\in\mathbb{T}_{\kappa}$ olmak üzere $\forall\varepsilon>0$ ve t nin bir $U\subset\mathbb{T}$ komşuluğundaki her $s\in U$ için,

$$|f(\rho(t))-f(s)-f^{\nabla}(t)(\rho(t)-s)|\leq\varepsilon|\rho(t)-s|$$

olacak şekilde bir $f^{\nabla}(t)$ sayısı varsa bu sayıya f fonksiyonunun t noktasındaki nabla türevi denir. Ayrıca $\forall t\in\mathbb{T}_{\kappa}$ için $f^{\nabla}(t)$ mevcut ise f fonksiyonuna tüm $\mathbb{T}_{\kappa}$ kümesi üzerinde nabla türevlenebilirdir ve $f^{\nabla}:\mathbb{T}_{\kappa}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu, f nin $\mathbb{T}_{\kappa}$ kümesindeki nabla türevi olarak adlandırılır (Bohner ve Peterson, 2001).

Tanım 2.1.12: Bir $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonuna, $\mathbb{T}$ deki tüm sağ-yoğun noktalarda sağ limiti sonlu ve mevcut, $\mathbb{T}$ deki tüm sol-yoğun noktalarda sol limitleri sonlu ve mevcut ise düzenli fonksiyon denir (Bohner ve Peterson 2001).

Tanım 2.1.13: $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathbb{T}$ deki sağ yoğun noktalarda sürekli ve sol yoğun noktalarda soldan limite sahipse bu fonksiyona sağ-yoğun-sürekli veya rd-sürekli fonksiyon denir. $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ rd-sürekli fonksiyonların kümesi $C_{rd}=C_{rd}(\mathbb{T})=C_{rd}(\mathbb{T},\mathbb{R})$ ile gösterilir (Bohner ve Peterson 2001).

Tanım 2.1.14: $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathbb{T}$ deki sol yoğun noktalarda sürekli ve sağ yoğun noktalarda sağdan limite sahipse bu fonksiyona sol-yoğun-sürekli veya ld-sürekli fonksiyon denir.$f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ ld-sürekli fonksiyonların kümesi $C_{ld}=C_{ld}(\mathbb{T})=C_{ld}(\mathbb{T},\mathbb{R})$ ile gösterilir (Bohner ve Peterson 2001).

Tanım 2.1.15: $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyonu verilsin. Eğer $F: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathbb{T}^{\kappa}$ kümesinde Δ-türevlenebilir ve $\forall t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ için $F^{\Delta}(t) = f(t)$ ise F fonksiyonuna f nin Δ-antitürevi denir. Eğer $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun Δ-antitürevi varsa f ye Δ integrallenebilir fonksiyon denir. Ayrıca $a, b \in \mathbb{T}$ olmak üzere f nin a dan b ye delta integrali,

$$\int_a^b f(t)\,\Delta t = F(b) - F(a)$$

ile tanımlanır (Bohner ve Peterson, 2001).

Tanım 2.1.16: $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyonu verilsin. Eğer $F: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathbb{T}_{\kappa}$ kümesinde ∇-türevlenebilir ve $\forall t \in \mathbb{T}_{\kappa}$ için $F^{\nabla}(t) = f(t)$ ise F fonksiyonuna f nin ∇-antitürevi denir. Eğer $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun ∇-antitürevi varsa f ye ∇ integrallenebilir fonksiyon denir. Ayrıca $a, b \in \mathbb{T}$ olmak üzere f nin a dan b ye nabla integrali,

$$\int_a^b f(t)\,\nabla t = F(b) - F(a)$$

ile tanımlanır (Bohner ve Peterson, 2001).

2.2 Beta-Delta Türev

Tanım 2.2.1: $\mathbb{T}$ bir zaman skalası, $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $\alpha \in (0,1]$ olduğunu varsayalım. $\forall \varepsilon > 0$ için

$$|[f(\sigma(t)) - f(s)](t + \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)})^{1-\alpha} - {}^{\beta}T_{\alpha}^{\Delta}(f)(t)(\sigma(t) - s)| \leq \varepsilon|\sigma(t) - s|\ , \forall s \in U,$$

olacak şekilde $t \in \mathbb{T}^{\kappa}(t > 0)$ nin U komşuluğu varsa f fonksiyonunun α mertebesinden t noktasındaki Beta-Delta$(\beta - \Delta)$ türevi ${}^{\beta}T_{\alpha}^{\Delta}(f)(t)$ ile tanımlanır. f nin α mertebesinden $t = 0$ noktasındaki Beta-Delta $(\beta - \Delta)$ türevi ${}^{\beta}T_{\alpha}^{\Delta}(f)(0) = \lim\limits_{t \rightarrow 0^{+}} {}^{\beta}T_{\alpha}^{\Delta}(f)(t)$ ile tanımlanır (Yaslan 2023).

Beta-Delta türevin, $\alpha = 1$ olduğunda ${}^{\beta}T_{\alpha}^{\Delta}\ (f)(t)$=$f^{\Delta}(t)$ ve eğer $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise o zaman ${}^{\beta}T_{\alpha}^{\Delta}(f)(t)$= $D_t^{\alpha}(f)(t)$ yani α mertebeli β-kesirli türev olur.

Teorem 2.2.2 : $\alpha\ \in (0,1]$, $\mathbb{T}$ bir zaman skalası, $t\ \in \mathbb{T}^{\kappa}(t > 0)$ ve $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. O halde aşağıdaki özellikler geçerlidir.

i. Eğer f fonksiyonu, t noktasında α mertebesinden $\beta - \Delta$ kesirli türevlenebilir ise f, t noktasında süreklidir.

ii. f fonksiyonu, t noktasında sürekli ve t noktası sağ-yayılmış olsun. Bu durumda *f* fonksiyonunun *t* noktasındaki α mertebesinden $\beta - \Delta$ kesirli türevi

$$ {}^{\beta}T_{\alpha}^{\Delta}(f)(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f\ (t)}{\mu\ (t)}(t + \frac{1}{\Gamma(\alpha)})^{1-\alpha} $$

olur.

iii. t noktası sağ-yoğun olsun. Eğer $\lim_{s\to t} \frac{f(t)-f(s)}{t-s}(t + \frac{1}{\Gamma(\alpha)})^{1-\alpha}$ sonlu bir sayıya eşit ise f fonksiyonunun t noktasındaki α mertebesinden $\beta - \Delta$ kesirli türevi mevcuttur ve

$$ {}^{\beta}T_{\alpha}^{\Delta}(f)(t) = \lim_{s\to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}(t + \frac{1}{\Gamma(\alpha)})^{1-\alpha} $$

olur.

iv. Eğer f fonksiyonunun t noktasındaki α mertebesinden $\beta - \Delta$ kesirli türevi mevcut ise o zaman

$$ f(\sigma(t)) = f(t) + \mu(t)(t + \frac{1}{\Gamma(\alpha)})^{\alpha-1}\ {}^{\beta}T_{\alpha}^{\Delta}(f)(t) $$

olur (Yaslan 2023).

Örnek 2.2.3: Herhangi bir c sabiti için $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, $f(t) = c$ ise ${}^{\beta}T_{\alpha}^{\Delta}(f)(t) = 0$ olur (Yaslan 2023).

Örnek 2.2.4: Eğer $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$, $f(t)=t$ ise ${}^{\beta}T_{\alpha}^{\Delta}(f)(t)=(t+\frac{1}{\Gamma(\alpha)})^{1-\alpha}$

olur (Yaslan 2023).

Örnek 2.2.5: Eğer $h>0$ ve $f:h\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon ise o zaman Teorem 2.2.2(ii) den ${}^{\beta}T_{\alpha}^{\Delta}(f)(t)=\frac{f(t+h)-f(t)}{h}(t+\frac{1}{\Gamma(\alpha)})^{1-\alpha}$ olur (Yaslan 2023).

Teorem 2.2.6: $f,g:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonları $t\in\mathbb{T}^{\kappa}(t>0)$ noktasında α mertebesinden $\beta-\Delta$ kesirli türevlenebilir olsun. O halde aşağıdaki özellikler geçerlidir.

i. $f+g:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu t noktasında α mertebesinden $\beta-\Delta$ kesirli türevlenebilirdir ve ${}^{\beta}T_{\alpha}^{\Delta}(f+g)(t)={}^{\beta}T_{\alpha}^{\Delta}(f)(t)+{}^{\beta}T_{\alpha}^{\Delta}(g)(t)$ olur.

ii. c herhangi bir sabit olmak üzere $cf:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu t noktasında α mertebesinden $\beta-\Delta$ kesirli türevlenebilirdir ve ${}^{\beta}T_{\alpha}^{\Delta}(cf)(t)=c\,{}^{\beta}T_{\alpha}^{\Delta}(f)(t)$ olur.

iii. $f.g:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu t noktasında α mertebesinden $\beta-\Delta$ kesirli türevlenebilirdir ve

$$\begin{aligned}{}^{\beta}T_{\alpha}^{\Delta}(f.g)(t) &= {}^{\beta}T_{\alpha}^{\Delta}(f)(t)g(t)+f(\sigma(t))\,{}^{\beta}T_{\alpha}^{\Delta}(g)(t)\\ &= {}^{\beta}T_{\alpha}^{\Delta}(g)(t)\,f(t)+g(\sigma(t))\,{}^{\beta}T_{\alpha}^{\Delta}(f)(t)\end{aligned}$$

olur.

iv. $f(t).f(\sigma(t))\neq 0$ olmak üzere $\frac{1}{f}$ fonksiyonu t noktasında α mertebesinden $\beta-\Delta$ kesirli türevlenebilirdir ve

$${}^{\beta}T_{\alpha}^{\Delta}(\frac{1}{f})(t)=-\frac{{}^{\beta}T_{\alpha}^{\Delta}(f)(t)}{f(t).f(\sigma(t))}$$

olur.

v. $g(t).g(\sigma(t))\neq 0$ olmak üzere $\frac{f}{g}$ fonksiyonu t noktasında α mertebesinden $\beta-\Delta$ kesirli türevlenebilirdir ve

$$ {}^{\beta}T_{\alpha}^{\Delta}(\frac{f}{g})(t) = \frac{{}^{\beta}T_{\alpha}^{\Delta}(f)(t)g(t) - f(t)\,{}^{\beta}T_{\alpha}^{\Delta}(g)(t)}{g(t).\,g(\sigma(t))} $$

olur (Yaslan 2023).

2.3 Beta-Delta İntegral

Tanım 2.3.1: Eğer $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu düzenli ve $\alpha \in (0,1]$ ise f nin α mertebesinden $\beta - \Delta$ kesirli integrali

$$ \int f(\mathrm{t})\,\Delta^{\alpha} t := \int f(\mathrm{t})(\mathrm{t} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)})^{\alpha-1} \Delta\, t $$

şeklinde tanımlanır (Yaslan 2023).

Eğer $\alpha = 1$ ise Tanım 2.3.1, belirsiz Δ-integraline ve eğer $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise o zaman Tanım 2.3.1, β-kesirli integraline indirgendiğine dikkat edelim.

Tanım 2.3.2: Eğer $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu düzenli ve $\alpha \in (0,1]$ ise f nin α mertebesinden $\beta - \Delta$ kesirli integrali şu şekilde tanımlanır:

$$ \int f(\mathrm{t})\,\Delta^{\alpha} t : = F_{\alpha}(\mathrm{t}) + \mathrm{c} $$

burada *c* herhangi bir sabittir ve $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ için ${}^{\beta}T_{\alpha}^{\Delta}(F_{\alpha})(\mathrm{t}) = f(\mathrm{t})$ olur.

Cauchy $\beta - \Delta$ kesirli integrali,

$$ \int_{a}^{b} f(\mathrm{t})\,\Delta^{\alpha} t : = F_{\alpha}(\mathrm{b}) - F_{\alpha}(\mathrm{a}) \;, \quad \forall a, b \in \mathbb{T} $$

şeklinde tanımlanır (Yaslan 2023).

Teorem 2.3.3: $\alpha \in (0,1]$ ve $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ herhangi bir rd_sürekli fonksiyon, $\forall t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ için ${}^{\beta}T_{\alpha}^{\Delta}(F_{\alpha})(\mathrm{t}) = f(\mathrm{t})$ olacak şekilde bir $F_{\alpha}: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu vardır. F_{α} fonksiyonu f fonksiyonunun $\beta - \Delta -$kesirli antitürevi olarak isimlendirilir (Yaslan 2023).

Teorem 2.3.4: $\alpha \in (0,1]$, $a, b, c \in \mathbb{T}$, $f, g \in C_{rd}$ ve $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ olduğunda aşağıdaki özellikler mevcuttur.

i. $\int_a^b [\lambda f(t) + \mu g(t)]\, \Delta^\alpha t = \lambda \int_a^b f(t)\, \Delta^\alpha t + \mu \int_a^b g(t)\, \Delta^\alpha t,$

ii. $\int_a^b f(t)\, \Delta^\alpha t = -\int_b^a f(t)\, \Delta^\alpha t$,

iii. $\int_a^b f(t)\, \Delta^\alpha t = \int_a^c f(t)\, \Delta^\alpha t + \int_c^b f(t)\, \Delta^\alpha t$,

iv. $\int_a^a f(t)\, \Delta^\alpha t = 0,$

v. Eğer $\forall t \in [a, b)$ için $|f\ (t)| \leq g(t)$ ise o zaman

$$|\int_a^b f(t)\, \Delta^\alpha t| \leq \int_a^b\ |g(t)|\, \Delta^\alpha\, t$$

olur.

vi. Eğer $\forall t \in [a, b)$ için $f(t) \geq 0$ ise o zaman

$$\int_a^b\ f(\mathrm{t})\, \Delta^\alpha\, t \geq 0$$

olur (Yaslan 2023).

Teorem 2.3.5: Eğer $t\ \in\ \mathbb{T}^\kappa$, $\alpha \in (0,1]$ ve $f \in C_{rd}$ ise

$$\int_t^{\sigma(\mathrm{t})} f(s)\, \Delta^\alpha\, s = \mu(t) f(t)(t + \frac{1}{\Gamma(\alpha)})^{\alpha-1}$$

olur (Yaslan 2023).

Teorem 2.3.5: Eğer $\forall t \in [a, b]$ için ${}^{\beta}T_\alpha^\Delta(f)(t) \geq 0$ ise f fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde azalmayan bir fonksiyondur (Yaslan 2023).

2.4 Beta-Nabla Türev

Tanım 2.4.1: $\mathbb{T}$ bir zaman skalası, $f: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $\alpha \in (0,1]$ olduğunu varsayalım. $\forall \varepsilon > 0$ için

$$|[f(\rho(t)) - f(s)](t + \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)})^{1-\alpha} - {}^{\beta}T_{\alpha}^{\nabla}(f)(t)(\rho(t) - s)| \leq \varepsilon|\rho(t) - s|, \ \forall s \in U,$$

olacak şekilde $t \in \mathbb{T}_{\kappa}(t > 0)$ nin U komşuluğu varsa f nin α mertebesinden t noktasındaki Beta-Nabla($\beta - \nabla$) türevi ${}^{\beta}T_{\alpha}^{\nabla}(f)(t)$ ile tanımlanır. f nin α mertebesinden $t = 0$ noktasındaki Beta-Nabla($\beta - \nabla$) türevi

$${}^{\beta}T_{\alpha}^{\nabla}(f)(0) = \lim_{t \to 0^{+}} {}^{\beta}T_{\alpha}^{\nabla}(f)(t)$$

ile tanımlanır (Yaslan 2023).

Beta-Nabla($\beta - \nabla$) türevin, $\alpha = 1$ olduğunda ${}^{\beta}T_{\alpha}^{\nabla}(f)(t) = f^{\nabla}(t)$ eğer $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise o zaman ${}^{\beta}T_{\alpha}^{\nabla}(f)(t) = D_{t}^{\alpha}(f)(t)$ yani α mertebeli β-kesirli türev olur.

Teorem 2.4.2: $\alpha \in (0,1]$, $\mathbb{T}$ bir zaman skalası, $t \in \mathbb{T}_{\kappa}(t > 0)$ ve $f: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. O halde aşağıdaki özellikler geçerlidir.

i. Eğer f fonksiyonu, t noktasında α mertebesinden $\beta - \nabla$ kesirli türevlenebilir ise f, t noktasında süreklidir.

ii. f fonksiyonu, t noktasında sürekli ve t noktası sağ-yayılmış olsun. Bu durumda f fonksiyonunun t noktasındaki α mertebesinden $\beta - \nabla$ kesirli türevi

$${}^{\beta}T_{\alpha}^{\nabla}(f)(t) = \frac{f(t) - f(\rho(t))}{\nu(t)} (t + \frac{1}{\Gamma(\alpha)})^{1-\alpha}$$

olur.

iii. t noktası sağ-yoğun olsun. Eğer $\lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s} \left(t + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{1-\alpha}$ sonlu bir sayıya eşit ise f fonksiyonunun t noktasındaki α mertebesinden $\beta - \nabla$ kesirli türevi mevcuttur ve

$${}^{\beta}T_{\alpha}^{\nabla}(f)(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s} \left(t + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{1-\alpha}$$

olur.

iv. Eğer *f* fonksiyonunun *t* noktasındaki α mertebesinden β-∇ kesirli türevi mevcut ise o zaman

$$f(\rho(t)) = f(t) + \nu(t)\left(t + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha-1} \ {}^{\beta}T_{\alpha}^{\nabla}(f)(t)$$

olur (Yaslan 2023).

Örnek 2.4.3: Herhangi bir c sabiti için $f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, $f(t) = c$ ise

${}^{\beta}T_{\alpha}^{\nabla}(f)(t) = 0$ olur (Yaslan 2023).

Örnek 2.4.4: Eğer $f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, $f(t) = t$ ise ${}^{\beta}T_{\alpha}^{\nabla}(f)(t) = (t + \frac{1}{\Gamma(\alpha)})^{1-\alpha}$ olur (Yaslan 2023).

Örnek 2.4.5: Eğer $h > 0$ ve $f\colon h\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ise o zaman Teorem 2.4.2 (ii) den

$${}^{\beta}T_{\alpha}^{\nabla}(f)(t) = \frac{f(t+h) - f(t)}{h}(t + \frac{1}{\Gamma(\alpha)})^{1-\alpha}$$

olur (Yaslan 2023).

Teorem 2.4.6: $f, g\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonları $t \in \mathbb{T}_{\kappa}(t > 0)$ noktasında α mertebesinden $\beta - \nabla$ kesirli türevlenebilir olsun. O halde aşağıdaki özellikler geçerlidir.

i. $f + g\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu t noktasında α mertebesinden $\beta - \nabla$ kesirli türevlenebilirdir ve ${}^{\beta}T_{\alpha}^{\nabla}(f+g)(t) = {}^{\beta}T_{\alpha}^{\nabla}(f)(t) + {}^{\beta}T_{\alpha}^{\nabla}(g)(t)$ olur.

ii. c herhangi bir sabit olmak üzere $cf\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu t noktasında α mertebesinden $\beta - \nabla$ kesirli türevlenebilirdir ve ${}^{\beta}T_{\alpha}^{\nabla}(cf)(t) = c\,{}^{\beta}T_{\alpha}^{\nabla}(f)(t)$ olur.

iii. $f.g\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu t noktasında α mertebesinden $\beta - \nabla$ kesirli türevlenebilirdir ve

$${}^{\beta}T_{\alpha}^{\nabla}(f.g)(t) = {}^{\beta}T_{\alpha}^{\nabla}(f)(t)g(t) + f(\rho(t))\,{}^{\beta}T_{\alpha}^{\nabla}(g)(t)$$

$$= {}^{\beta}T_{\alpha}^{\nabla}(g)(t)\, f(t) + g(\rho(t))\, {}^{\beta}T_{\alpha}^{\nabla}(f)(t)$$

olur.

iv. $f(t).f(\rho(t)) \neq 0$ olmak üzere $\frac{1}{f}$ fonksiyonu t noktasında α mertebesinden $\beta - \nabla$ kesirli türevlenebilirdir ve

$${}^{\beta}T_{\alpha}^{\nabla}(\frac{1}{f})(t) = -\frac{{}^{\beta}T_{\alpha}^{\nabla}(f)(t)}{f(t).f(\rho(t))}$$

olur.

v. $g(t).g(\rho(t)) \neq 0$ olmak üzere $\frac{f}{g}$ fonksiyonu t noktasında α mertebesinden $\beta - \nabla$ kesirli türevlenebilirdir ve

$${}^{\beta}T_{\alpha}^{\nabla}(\frac{f}{g})(t) = \frac{{}^{\beta}T_{\alpha}^{\nabla}(f)(t)g(t) - f(t)\, {}^{\beta}T_{\alpha}^{\nabla}(g)(t)}{g(t).g(\rho(t))}$$

olur (Yaslan 2023).

2.5 Beta-Nabla İntegral

Tanım 2.5.1: Eğer $f: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu düzenli ve $\alpha \in (0,1]$ ise f nin α mertebesinden $\beta - \nabla$ kesirli integrali

$$\int f(t)\, \nabla^{\alpha} t := \int f(t)\, (t + \frac{1}{\Gamma(\alpha)})^{\alpha-1} \nabla t$$

şeklinde tanımlanır (Yaslan 2023).

Eğer $\alpha = 1$ ise Tanım 2.5.1, belirsiz ∇-integraline ve eğer $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise o zaman Tanım 2.5.1, β-kesirli integraline indirgendiğine dikkat edelim.

Tanım 2.5.2: Eğer $f: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu düzenli ve $\alpha \in (0,1]$ ise f nin α mertebesinden $\beta - \nabla$ kesirli integrali şu şekilde tanımlanır:

$$\int f(t)\,\nabla^{\alpha}t := F_{\alpha}(t) + \mathrm{c},$$

burada c herhangi bir sabittir ve $t \in \mathbb{T}^{k}$ için ${}^{\beta}T_{\alpha}^{\nabla}(F_{\alpha})(t) = f(t)$ olur.

Cauchy $\beta - \nabla$ kesirli integrali

$$\int_{a}^{b} f(t)\,\nabla^{\alpha}t := F_{\alpha}(b) - F_{\alpha}(a), \quad \forall a, b \in \mathbb{T}$$

şeklinde tanımlanır (Yaslan 2023).

Teorem 2.5.3: $\alpha \in (0,1]$ ve $f: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ herhangi bir ld-sürekli fonksiyon, $\forall t \in \mathbb{T}_{\kappa}$ için ${}^{\beta}T_{\alpha}^{\nabla}(F_{\alpha})(t) = f(t)$ olacak şekilde bir $F_{\alpha}: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu vardır. F_{α} fonksiyonu f fonksiyonunun $\beta - \nabla -$kesirli antitürevi olarak isimlendirilir (Yaslan 2023).

Teorem 2.5.4: $\alpha \in (0,1]$, $a, b, c \in \mathbb{T}$, $f, g \in C_{ld}$ ve $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ olsun. Aşağıdaki özelliklere sahibiz.

i. $\int_{a}^{b} [\lambda f(t) + \mu g(t)]\,\nabla^{\alpha}t = \lambda \int_{a}^{b} f(t)\,\nabla^{\alpha}t + \mu \int_{a}^{b} g(t)\,\nabla^{\alpha}t$,

ii. $\int_{a}^{b} f(t)\,\nabla^{\alpha}t = -\int_{b}^{a} f(t)\,\nabla^{\alpha}t$,

iii. $\int_{a}^{b} f(t)\,\nabla^{\alpha}t = \int_{a}^{c} f(t)\,\nabla^{\alpha}t + \int_{c}^{b} f(t)\,\nabla^{\alpha}t$,

iv. $\int_{a}^{a} f(t)\,\nabla^{\alpha}t = 0$,

v. Eğer $\forall t \in [a, b)$ için $|f(t)| \leq g(t)$ ise o zaman

$$\left|\int_{a}^{b} \mathrm{f(t)}\,\nabla^{\alpha}t\right| \leq \int_{a}^{b} |\mathrm{g(t)}|\,\nabla^{\alpha}t$$

olur.

vi. Eğer $\forall t \in [a, b)$ için $f(t) \geq 0$ ise o zaman $\int_{a}^{b} f(t)\,\nabla^{\alpha}t \geq 0$ olur (Yaslan 2023).

Teorem 2.5.5: Eğer $t \in \mathbb{T}_{\kappa}$, $\alpha \in (0,1]$ ve $f \in C_{ld}$ ise

$$\int_{\rho(t)}^{t} f(s)\,\nabla^{\alpha}s = \nu(t) f(t) \left(t + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha-1}$$

olur (Yaslan 2023).

Teorem 2.5.5: Eğer $\forall t \in [a,b]$ için ${}^{\beta}T_{\alpha}^{\nabla}(f)(t) \geq 0$ ise f fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde azalmayan bir fonksiyondur.

3. ZAMAN SKALASI ÜZERİNDE KESİRLİ MERTEBELİ SINIR DEĞER PROBLEMİ VE POZİTİF ÇÖZÜMLERİN VARLIĞI

Bu bölümde $\mathbb{T}$ bir zaman skalası olmak üzere,

$$\begin{cases} {}^{\beta}T_{\alpha}^{\nabla}\left({}^{\beta}T_{\alpha}^{\Delta}(y(t)\right) + \phi(t)\, f(t, y(t)) = 0 & , \quad t \in [a,b] \subset \mathbb{T} \\ \delta y(b) + \gamma\, {}^{\beta}T_{\alpha}^{\Delta}(\mathrm{y}(b)) = {}^{\beta}T_{\alpha}^{\Delta}(\mathrm{y}(c)) & , \quad \mathrm{c} \in (a,b) \\ {}^{\beta}T_{\alpha}^{\Delta}(y(a)) = 0 & , \quad 0 < \alpha \leq 1 \end{cases} \tag{3.1}$$

sınır değer problemi ele alınacaktır.

3.1 Temel Tanımlar ve Problemle İlgili Lemmalar

Lemma 3.1.1: $\alpha \in (0,1]$, $\delta \neq 0$, $t \in [a,b]$ ve $h \in C_{ld}[a,b]$ olsun ve

$$\begin{cases} {}^{\beta}T_{\alpha}^{\nabla}\left({}^{\beta}T_{\alpha}^{\Delta}(y(t)\right) + h(t) = 0 & , \quad t \in [a,b] \subset \mathbb{T} \\ \delta y(b) + \gamma\, {}^{\beta}T_{\alpha}^{\Delta}(\mathrm{y}(b)) = {}^{\beta}T_{\alpha}^{\Delta}(\mathrm{y}(c)) & , \quad \mathrm{c} \in (a,b) \\ {}^{\beta}T_{\alpha}^{\Delta}(y(a)) = 0 & , \quad 0 < \alpha \leq 1 \end{cases} \tag{3.2}$$

sınır değer problemi verilsin.

${}^{\beta}T_{\alpha}^{\nabla}\left({}^{\beta}T_{\alpha}^{\Delta}(y(t)\right) + h(t) = 0$ olmak üzere, (3.2) sınır değer probleminin tek çözümü,

$$y(t) = \int_a^b \left[b - s + \frac{\gamma}{\delta} \right] h(s)\, \nabla^{\alpha} s - \frac{1}{\delta} \int_a^b h(s)\, \nabla^{\alpha} s - \int_a^b (t-s)\, h(s) \nabla^{\alpha} s \tag{3.3}$$

olur.

İspat: $\alpha \in (0,1]$, $\delta \neq 0$, $t \in [a,b]$ ve $h \in C_{ld}[a,b]$ olsun.

${}^{\beta}T_{\alpha}^{\nabla}\left({}^{\beta}T_{\alpha}^{\Delta}(y(t)\right) = -\, h(t)$ eşitliğinde her iki tarafın β-∇ kesirli integralini alırsak,

$$\int_a^t {}^{\beta}T_{\alpha}^{\nabla}\left({}^{\beta}T_{\alpha}^{\Delta}(y(s)\right) \nabla^{\alpha} s = -\int_a^t h(s)\, \nabla^{\alpha} s$$

elde edilir. Sol tarafın işlemi yapıldığında,

$$ {}^{\beta}T_{\alpha}^{\Delta}(y(t)) - {}^{\beta}T_{\alpha}^{\Delta}(y(a)) = -\int_a^t h(s)\,\nabla^{\alpha}s $$

olur. Verilen ikinci sınır koşulunu kullanırsak,

$$ {}^{\beta}T_{\alpha}^{\Delta}(y(t)) = -\int_a^t h(s)\,\nabla^{\alpha}s \qquad (3.4) $$

elde edilir. Yukarıdaki eşitlikte her iki tarafın β-Δ kesirli integralini alırsak,

$$ \int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{t}} {}^{\beta}T_{\alpha}^{\Delta}(\mathrm{y(s)})\,\Delta^{\alpha}s = -\int_a^t \int_a^r h(s)\,\nabla^{\alpha}s\,\Delta^{\alpha}r $$

bulunur. Elde edilen eşitlikte sol tarafın işlemi yapılıp sağ tarafın integrasyon sırası değiştirilirse,

$$ y(t) - y(a) = -\int_a^t \int_s^t h(s)\,\Delta^{\alpha}\mathrm{r}\,\nabla^{\alpha}s $$

olur ve buradan

$$ y(t) = y(a) - \int_a^t (\mathrm{t}-\mathrm{s})\,h(\mathrm{s})\,\nabla^{\alpha}s \qquad (3.5) $$

eşitliği elde edilir. Şimdi (3.2) sınır değer probleminde verilen ilk sınır koşulunu kullanalım.

$$ \delta.y(b) + \gamma\,{}^{\beta}T_{\alpha}^{\Delta}(y(b)) = {}^{\beta}T_{\alpha}^{\Delta}(y(c)) $$

eşitliğinde (3.4) ve (3.5) denklemlerini kullanarak,

$$ \delta.[y(a) - \int_a^b (\mathrm{b}-\mathrm{s})\,h(s)\,\nabla^{\alpha}s] + \gamma[-\int_a^b h(s)\,\nabla^{\alpha}\mathrm{s})] = -\int_a^c h(s)\,\nabla^{\alpha}s $$

elde edilir. Buradan,

$$ \delta\,y(a) = \delta\int_a^b (b-s)\,h(s)\,\nabla^{\alpha}s + \gamma\int_a^b h(s)\,\nabla^{\alpha}\mathrm{s} - \int_a^c h(s)\,\nabla^{\alpha}\mathrm{s} $$

olduğundan

$$y(a) = \int_a^b \frac{\delta(b-s)+\gamma}{\delta}\, h(s)\, \nabla^\alpha s - \frac{1}{\delta}\int_a^c h(s)\, \nabla^\alpha s \tag{3.6}$$

olur. (3.6) eşitliğini (3.5) denkleminde yerine yazarsak,

$$y(t) = \int_a^b \left[b - s + \frac{\gamma}{\delta}\right] h(s)\, \nabla^\alpha s - \frac{1}{\delta}\int_a^c h(s)\, \nabla^\alpha s - \int_a^t (t-s)\, h(s)\, \nabla^\alpha s$$

olur ve ispat tamamlanır. □

Lemma 3.1.2: $\alpha \in (0,1], \delta > 0, \gamma \geq 1,\ \ t \in [a,b]$ ve $h \in C_{ld}([a,b],[0,\infty))$ olsun. (3.2) sınır değer probleminin (3.3) çözümü için $y(t) \geq 0$ sağlanır.

İspat: $\forall t \in [a,b]$ için $h(t) \geq 0$ ve buradan ${}^{\beta}T_{\alpha}^{\Delta}(y(t)) = -\int_a^t h(t)\, \nabla^\alpha t \leq 0$ olduğundan $[a,b]$ aralığında $y(t)$ artmayandır.

$$y(b) = \int_a^b \left[b - s + \frac{\gamma}{\delta}\right] h(s)\, \nabla^\alpha s - \frac{1}{\delta}\int_a^c h(s)\, \nabla^\alpha s - \int_a^b (b-s)\, h(s)\, \nabla^\alpha s$$

$$= \int_a^b \frac{\gamma}{\delta}\, h(s)\, \nabla^\alpha s - \frac{1}{\delta}\int_a^c h(s)\, \nabla^\alpha s$$

$$= \int_a^c \frac{\gamma - 1}{\delta}\, h(s)\, \nabla^\alpha s + \int_c^b \frac{\gamma}{\delta}\, h(s)\, \nabla^\alpha s \geq 0$$

eşitsizliğinden ve $[a,b]$ aralığında $y(t)$ artmayan olduğundan $\forall t \in [a,b]$ için $y(t) \geq 0$ olur. Buradan ispat tamamlanır.

□

Lemma 3.1.3 : $\alpha \in (0,1], \delta > 0, \gamma \geq 1$ ve $t \in [a,b]$ olsun. $\forall t \in [a,b]$ için (3.1) sınır değer probleminin (3.3) çözümü

$$y(t) \geq \frac{b-t}{b-a} \|y\| \tag{3.7}$$

eşitsizliğini sağlar. Burada $\| y \| = \sup_{t \in [a,b]} | y(t) |$ olur.

İspat: $\forall t \in [a,b]$ için $y(t)$ artmayan olduğundan $\| y \| = \sup_{t\in[a,b]} | y(t) | = y(a)$ olur. ${}^{\beta}T_{\alpha}^{\nabla}({}^{\beta}T_{\alpha}^{\Delta}(y(t))) = -h(t) \leq 0$ olduğundan $[a,b]$ üzerinde y fonksiyonunun grafiği konkavdır. y , $[a,b]$ üzerinde konkav olduğundan

$$y(t) \geq y(b) + \frac{t-b}{b-a}\big(y(b) - y(a)\big) \geq \frac{b-t}{b-a} y(a) = \frac{b-t}{b-a} \| y \|$$

elde edilir. Buradan ispat tamamlanır.

□

Şimdi $A : C_{ld}[a,b] \rightarrow C_{ld}[a,b]$ operatörümüzü tanıyalım.

$$A(y(t)) = \int_a^b [b - s + \tfrac{\gamma}{\delta}]\, \phi(\mathrm{s})\, f\,(s, y(s))\, \nabla^{\alpha}\mathrm{s} - \tfrac{1}{\delta}\int_a^c \phi(\mathrm{s}) f\big(s, y(s)\big)\nabla^{\alpha}\mathrm{s}$$

$$- \int_a^t (t-s)\, \phi(\mathrm{s})\, f(s, y(s))\nabla^{\alpha}\mathrm{s} \qquad (3.8)$$

Tanım 3.1.4: (X,d) ve (Y,ρ) iki metrik uzay olsun ve $A\colon D \subset X \rightarrow Y$ operatörü verilsin. $\forall \varepsilon > 0$ ve $x_0 \in D$ olmak üzere $\forall x \in D$ için $d(x, x_0) < \delta$ olduğunda $\rho(Ax, Ax_0) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa A operatörüne x_0 noktasında süreklidir denir. A operatörü $\forall x_0 \in D$ için sürekli ise A operatörüne süreklidir denir (Kreyszig 1987).

Tanım 3.1.5 : $M \subset C[a,b]$ olsun.

i. $\forall t \in [a,b]$ ve $\forall x \in M$ için $|x(t)| \leq c$ olacak şekilde sonlu bir c sabiti varsa M ye ait fonksiyonlara aynı dereceden sınırlı fonksiyonlar denir.
ii. $\forall \varepsilon > 0$ olsun. $\forall t_1, t_2 \in [a,b]$ için $|\, t_1 - t_2| < \delta$ olduğunda $\forall x \in M$ için $|x(t_1) – x(t_2)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı var ise M kümesine ait fonksiyonlara aynı dereceden sürekli fonksiyonlar denir (Deimling 1985).

Tanım 3.1.6: (X,d) ve (Y,ρ) iki metrik uzay olsun ve $A\colon D \subset X \rightarrow Y$ operatörü, D içindeki her sınırlı kümeyi Y içindeki relatively kompakt kümeye dönüştürüyorsa A ya D üzerinde kompakt operatör denir (Kreyszig 1987).

Teorem 3.1.7(Arzela-Ascoli Teoremi): $M \subset C[a,b]$ kümesinin relatively kompakt olması için gerek ve yeter şart M kümesine ait fonksiyonların aynı dereceden sınırlı ve aynı dereceden sürekli olmasıdır (Terzioğlu 1999).

Tanım 3.1.8: (X,d) ve (Y,ρ) iki metrik uzay olsun ve $A: D \subset X \to Y$ operatörü hem sürekli hem de kompakt operatör ise A ya tamamen sürekli operatör denir (Deimling 1985).

Lemma 3.1.9:

$(\boldsymbol{H_1})$: $\phi \in C_{ld}([a,b],[0,\infty))$ ve $\phi(t_0) > 0$ olacak şekilde $t_0 \in [a,b]$ vardır.

$(\boldsymbol{H_2})$: $f:[a,b] \times [0,\infty) \to [0,\infty)$ fonksiyonu sürekli ve t_0 noktasını içeren $\mathbb{T}$ nin herhangi bir alt kümesinde $f(t,.) > 0$ dır.

koşulları sağlanıyorsa $A: C_{ld}[a,b] \to C_{ld}[a,b]$ operatörü tamamen süreklidir.

İspat: A operatörünün sürekli ve kompakt olduğunu göstermeliyiz. A nın sürekli olduğunu göstermek için $\forall \varepsilon > 0$ için $\xi > 0$ vardır ki $\| y - y_0 \| < \xi$ olduğunda $\| Ay - Ay_0 \| < \varepsilon$ olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{aligned}|Ay(t) - Ay_0(t)| = \Big| &\int_a^b \Big[b - s + \frac{\gamma}{\delta}\Big] \phi(s) \, [f(s,y(s)) - f(s,y_0(s))] \, \nabla^\alpha s \\ &- \frac{1}{\delta}\int_a^c \phi(s)[f(s,y(s)) - f(s,y_0(s))]\nabla^\alpha s \\ &- \int_a^t (t-s)\,\phi(s)\,[f(s,y(s)) - f(s,y_0(s))]\nabla^\alpha s \Big|\end{aligned}$$

üçgen eşitsizliğini uyguladığımızda,

$$\begin{aligned}|Ay(t) - Ay_0(t)| \le &\int_a^b \Big|b - s + \frac{\gamma}{\delta}\Big| \, \phi(s) \, |f(s,y(s)) - f(s,y_0(s))| \, \nabla^\alpha s \\ &+ \frac{1}{\delta}\int_a^c \phi(s)|f(s,y(s)) - f(s,y_0(s))|\nabla^\alpha s \\ &+ \int_a^t |t-s| \, \phi(s) \, |f(s,y(s)) - f(s,y_0(s))|\nabla^\alpha s\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\le &\int_a^b \Big(b - s + \frac{\gamma}{\delta}\Big) \phi(s)|f(s,y(s)) - f(s,y_0(s))|\nabla^\alpha s \\ &+ \frac{1}{\delta}\int_a^b \phi(s)|f(s,y(s)) - f(s,y_0(s))| \, \nabla^\alpha s \\ &+ \int_a^b (b-s)\,\phi(s)\,|f(s,y(s)) - f(s,y_0(s))|\nabla^\alpha s\end{aligned}$$

$$\leq \int_a^b (2b-2s+\tfrac{\gamma+1}{\delta})\,\phi(s)\,|f(s,y(s))-f\,(s,y_o(s))|\,\nabla^\alpha s$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan, $|y-y_0|<\xi$ olduğundan $\forall s\in[a,b]$ için $|y(s)-y_0(s)|<\xi$ olur. f sürekli olduğundan

$$|f(s,y(s))-f(s,y_o(s))|<\frac{\varepsilon}{(b-a)\int_a^b (2b-2s+\tfrac{\gamma+1}{\delta})\phi(s)\nabla^\alpha s}$$

alınırsa $|Ay(t)-Ay_0(t)|<\varepsilon$ olur. Böylece A süreklidir.

Şimdi A operatörünün kompakt olduğunu gösterelim. Bunun için herhangi bir

$Y\subset C_{ld}[a,b]$ sınırlı kümesi için $A(Y)$ kümesinin relatively kompakt olduğunu göstermeliyiz. Y sınırlı olduğundan $\forall y\in Y$ için $\|y\|<c_1$ olacak şekilde bir $c_1\in\mathbb{R}$ sabiti vardır. $A(Y)$ nin relatively kompakt olduğunu göstermek için Arzela-Ascoli teoremini kullanacağız. Yani, $A(Y)$ ye ait fonksiyonların aynı dereceden sınırlı ve $A(Y)$ ye ait fonksiyonlar aynı dereceden sürekli olduğunu göstereceğiz.

$\forall y\in Y$ ve $\forall t\in[a,b]$ için ϕ fonksiyonu $[a,b]$ kapalı aralığında sürekli olduğundan sınırlıdır. Yani $\forall t\in[a,b]$ için $|\phi(t)|<c_2$ olacak şekilde bir $c_2\in\mathbb{R}$ sabiti vardır. f fonksiyonu $[a,b]\times[-c_1,c_1]$ kapalı aralığında sürekli olduğundan $|f(t,y(t))|<c_3$ olacak şekilde bir $c_3\in\mathbb{R}$ sabiti vardır. $\forall y\in Y$ ve $\forall t\in[a,b]$ için

$$|A(y(t))|=|\int_a^b [b-s+\tfrac{\gamma}{\delta}]\phi(s)f(s,y(s))\nabla^\alpha s-\tfrac{1}{\delta}\int_a^c \phi(s)f(s,y(s))\nabla^\alpha s$$

$$-\int_a^t (t-s)\,\phi(s)\,f(s,y(s))\nabla^\alpha s\,|$$

$$\leq \int_a^b |b-s+\tfrac{\gamma}{\delta}|\,|\phi(s)|\,|f(s,y(s))|\,\nabla^\alpha s+\tfrac{1}{\delta}\int_a^c |\phi(s)|\,|f(s,y(s))|\nabla^\alpha s$$

$$+\int_a^t |t-s|\,|\phi(s)|\,|f(s,y(s))|\nabla^\alpha s$$

$$\leq \int_a^b (b-s+\frac{\gamma}{\delta})|\phi(s)||f(s,y(s))|\nabla^\alpha s+\frac{1}{\delta}\int_a^b |\phi(s)||f(s,y(s))|\nabla^\alpha s$$

$$+\int_a^b (b-s)\,|\phi(s)|\,|f(s,y(s))|\nabla^\alpha s$$

$$\leq \int_a^b (2b-2s+\frac{\gamma+1}{\delta})\ |\phi(s)|\ |f(s,y(s))|\ \nabla^\alpha s$$

$$< c_2c_3\ \int_a^b (2b-2s+\frac{\gamma+1}{\delta})\ \nabla^\alpha s = \ M$$

olduğundan $A(Y)$ ye ait fonksiyonlar aynı dereceden sınırlıdır.

$\forall y\ \in Y,\ \forall \varepsilon > 0$ ve $\forall x_1, x_2 \in\ [a,b]$ için $|x_1-x_2| < \xi$ olduğunda $|Ay(x_1) – Ay(x_2)| < \varepsilon$ olacak şekilde $\exists\, \xi > 0$ sayısının var olduğunu göstermeliyiz.

$$|Ay(x_1) – Ay(x_2)| = |\int_a^b [b-s+\tfrac{\gamma}{\delta}]\phi(s)[f\big(s,y(s)\big) - f\big(s,y(s)\big)]\nabla^\alpha s$$

$$-\frac{1}{\delta}\int_a^c \phi(s)\big[f\big(s,y(s)\big) - f\big(s,y(s)\big)\big]\nabla^\alpha s$$

$$-\int_a^{x_1}(x_1-s)\ \phi(\mathrm{r}) f\big(s,y(s)\big)\nabla^\alpha s$$

$$+\int_a^{x_2}(x_2-s)\ \phi(\mathrm{s})\ f(s,y(s))\nabla^\alpha \mathrm{s}|$$

$$= |\int_a^{x_2}(x_2-s)\ \phi(\mathrm{s})\ f(s,y(s))\nabla^\alpha s$$

$$-\int_a^{\mathrm{x}_1}(\mathrm{x}_1-s)\ \phi(\mathrm{s})\ f(s,y(s))\nabla^\alpha \mathrm{s}|$$

$$= |\int_a^{x_1} [x_2-s-(x_1-s)]\ \phi(\mathrm{s}) f(s,y(s))\nabla^\alpha s$$

$$+\int_{\mathrm{x}_1}^{\mathrm{x}_2}(\mathrm{x}_2-s)\ \phi(\mathrm{s})\ f(s,y(s))\nabla^\alpha \mathrm{s}|$$

$$\leq |\int_a^{x_1} [x_2-x_1]\ \phi(\mathrm{s}) f\big(s,y(s)\big)\nabla^\alpha \mathrm{s}|$$

$$+|\int_{\mathrm{x}_1}^{\mathrm{x}_2} (\mathrm{x}_2-s)\ \phi(\mathrm{s})\ f(s,y(s))\nabla^\alpha \mathrm{s}|$$

$$\leq \int_a^{\mathrm{x}_1} |x_2-\mathrm{x}_1|\ |\phi(\mathrm{s})||f\big(s,y(s)\big)|\nabla^\alpha \mathrm{s}$$

$$+\int_{x_1}^{x_2} |x_2 - x_1|\,|\phi(s)|\,|f(s, y(s)|\nabla^{\alpha} s$$

$$< c_2.c_3.\xi \int_a^{x_1} \nabla^{\alpha} s + c_2.c_3\,.\xi \int_{x_1}^{x_2} \nabla^{\alpha} s = c_2.c_3\,.\xi \int_a^{x_2} \nabla^{\alpha} s$$

ifadesinde

$$\xi \;=\; \frac{\varepsilon}{c_2\,.c_3\;\int_a^{x_2} \nabla^{\alpha} s}$$

olarak alınırsa,

$$|Ay(x_1) - Ay(x_2)| < c_2\,.c_3\,.\xi \int_a^{x_2} \nabla^{\alpha} s = \varepsilon$$

olur. Buradan $A(Y)$ kümesine ait fonksiyonlar aynı dereceden süreklidir. Böylece $A(Y)$ relatively kompakt olduğundan A kompakttır. O halde A operatörü tamamen süreklidir.

Tanım 3.1.10: $\mathcal{B}$ Banach uzayı olmak üzere

i. $P \subset \mathcal{B}$ boştan farklı, kapalı ve konvekstir,
ii. $x \in P$ ise $\forall\lambda \geq 0$ için $\lambda x \in P$,
iii. $x \in P, x \neq 0$ iken $-x \notin P$,

şartlarını sağlayan $P \subset \mathcal{B}$ kümesine koni denir (Liang ve diğ. 2009).

$C_{ld}[a, b]$ Banach uzayı üzerindeki koni,

$$P = \{y \in C_{ld}[a, b] : y(t) \geq 0,\; y(t) \geq \frac{b-t}{b-a} \parallel y \parallel \;, t \in [a, b]\} \tag{3.9}$$

şeklinde tanımlansın.

3.2 En Az Bir Pozitif Çözümün Varlığı

φ ve ψ , P konisi üzerinde negatif olmayan sürekli iç bükey fonksiyoneller, η ve θ , P konisi üzerinde negatif olmayan sürekli dış bükey fonksiyoneller olsun. r, τ, K ve R pozitif sayıları için aşağıdaki kümeleri tanımlayalım:

$$Q(\varphi, \eta, r, R) = \{y \in P : r \leq \varphi(y), \eta(y) \leq R\},$$

$$U(\psi, \tau) = \{y \in Q(\varphi, \eta, r, R) : \tau \leq \psi(y)\},$$

$$V(\theta, K) = \{y \in Q(\varphi, \eta, r, R) :\ \theta(y) \leq K\}.$$

Şimdi ilk olarak (3.1) sınır değer probleminin en az bir pozitif çözümünün varlığı için koşulları veren teoremi verelim.

Teorem 3.2.1(Dört Fonksiyonel Sabit Nokta Teoremi): P **,** E Banach uzayında bir koni olsun. φ ve ψ , P konisi üzerinde negatif olmayan sürekli iç bükey fonksiyoneller, η ve θ , P konisi üzerinde negatif olmayan sürekli dış bükey fonksiyoneller olsun. r , τ , K ve R pozitif sayıları vardır öyle ki $A : Q(\varphi, \eta, r, R) \to P$ tamamen sürekli bir operatör ve $Q(\varphi, \eta, r, R)$ sınırlı bir küme olsun.

Eğer,

i. $\{y \in U(\psi, \tau) :\ \eta(y) < R\} \cap \{y \in V(\theta, K) : r < \varphi(y)\} \neq \emptyset$,
ii. $\forall y \in Q(\varphi, \eta, r, R), \varphi(y) = r$ ve $K < \theta(Ay)\ için\ \varphi(Ay) \geq r$,
iii. $\forall y \in V(\theta, K)$ ve $\varphi(y) = r$ için $\varphi(Ay) \geq r$,
iv. $\forall y \in Q(\varphi, \eta, r, R), \eta(y) = R$ ve $\psi(Ay) < \tau$ için $\eta(Ay) \leq R$,
v. $\forall y \in U(\psi, \tau)$ ve $\eta(y) = R$ için $\eta(Ay) \leq R$,

şartları sağlanırsa bu durumda A nın $Q(\varphi, \eta, r, R)$ de pozitif bir sabit y noktası vardır (Avery ve diğ. 2008).

En az bir pozitif çözümün varlığını göstermek için Teorem 3.2.1(Dört Fonksiyonel Sabit Nokta Teoremi) i kullanacağız.

Teorem 3.2.2: (H_1) ve (H_2) koşulları sağlansın. $\alpha \in (0,1]$, $\delta > 0, \gamma > 1$ ve $[a,b] \subset \mathbb{T}$ olsun. Varsayalım ki r, R, K, τ ile $0 < r < \tau \le K < R$ eşitsizliği ve

$$R = \frac{\tau[\delta(b-a)+\gamma]}{\gamma-1}, r = \frac{K(\gamma-1)}{\delta(b-a)+\gamma}, L_1 = \int_a^b \phi(s)\nabla^{\alpha}s,\ L_2 = \int_c^b \phi(s)\nabla^{\alpha}s$$

sabitleri mevcut olsun.

Eğer f fonksiyonu,

i. $f(s,y(s)) \ge \frac{r\delta}{L_2\gamma}$, $(s,y) \in [c,b] \times [r,K]$,

ii. $f(s,y(s)) \le \frac{R}{L_1(b-a+\frac{\gamma}{\delta})}$, $(s,y) \in [a,b] \times [\tau,R]$,

koşullarını sağlıyorsa (3.1) sınır değer probleminin $t \in [a,b]$ için $r \le y(t) \le R$ olacak şekilde en az bir pozitif y çözümü vardır.

İspat : $\varphi(y) := \psi(y) := y(b), \theta(y) := y(c), \eta(y) := y(a)$ olarak tanımlayalım. (3.9) da verilen P konisini alalım. O zaman φ ve ψ, P üzerinde negatif olmayan sürekli içbükey fonksiyoneller, η ve θ, P üzerinde negatif olmayan sürekli dışbükey fonksiyonellerdir.

$\| y \| = \sup_{t\in[a,b]} |y(t)| = y(a) = \eta(y) \le R$ olduğundan $\forall y \in Q(\varphi,\eta,r,R)$ için $Q\ (\varphi,\eta,r,R)$ sınırlı bir kümedir. $A: Q(\varphi,\eta,r,R) \to P$ operatörü, Lemma 3.1.9 ‘a göre tamamen süreklidir.

Şimdi Teorem3.2.1(Dört Fonksiyonlu Sabit Nokta Teoremi) ’nin koşullarını doğrulayalım. $\Psi(K) = K \ge \tau,\ \theta(K) = K, \eta(K) = K < R, \varphi(K) = K > r$ dir. Buradan $K \in \{y \in U(\psi,\tau) : \eta(y) < R\} \cap \{y \in V(\theta,K) : r < \varphi(y)\} \ne \emptyset$ dır. Bu da Teorem3.2.1(i) koşulunun sağlandığı anlamına gelir.

Şimdi Teorem3.2.1 (ii) ’nin sağlandığını gösterelim. $\varphi(y) = r$ ve $\theta(Ay) > K$ olsun.

$K < \theta(Ay) = A\big(y(c)\big)$

$$= \int_a^b [b - s + \frac{\gamma}{\delta}]\, \phi(s)\, f(s, y(s))\, \nabla^\alpha s\ - \frac{1}{\delta}\int_a^c\ \phi(s) f(s, y(s)) \nabla^\alpha s$$

$$- \int_a^c (c - s)\, \phi(s)\, f(s, y(s)) \nabla^\alpha s]\, \phi(s)\, f(s, y(s))\, \nabla^\alpha s$$

$$= \int_a^b [b - s + \frac{\gamma}{\delta}]\, \phi(s)\, f(s, y(s))\, \nabla^\alpha s - \int_a^c (c - s + \frac{1}{\delta})\, \phi(s) f(s, y(s)) \nabla^\alpha s$$

$$\leq \int_a^b [b - s + \tfrac{\gamma}{\delta}]\, \phi(s)\, f(s, y(s))\, \nabla^\alpha s < \int_a^b [b - a + \tfrac{\gamma}{\delta}]\, \phi(s)\, f(s, y(s))\, \nabla^\alpha s$$

Buradan $\frac{K}{[b - a + \frac{\gamma}{\delta}]} < \int_a^b\ \phi(s)\, f(s, y(s))\, \nabla^\alpha s$ bulunur.

$\varphi(Ay)$=$A\big(y(b)\big)$

$$= \int_a^b [b - s + \tfrac{\gamma}{\delta}]\, \phi(s)\, f(s, y(s))\, \nabla^\alpha s\quad - \quad \tfrac{1}{\delta}\int_a^c\ \phi(s) f(s, y(s)) \nabla^\alpha s$$

$$- \int_a^b (b - s)\, \phi(s)\, f(s, y(s)) \nabla^\alpha s$$

$$= \int_a^b \tfrac{\gamma}{\delta}\ \phi(s)\, f(s, y(s))\, \nabla^\alpha s\quad - \quad \tfrac{1}{\delta}\int_a^c\ \phi(s) f(s, y(s)) \nabla^\alpha s$$

$$\geq \int_a^b \tfrac{\gamma}{\delta}\ \phi(s)\, f(s, y(s))\, \nabla^\alpha s - \quad \tfrac{1}{\delta}\int_a^b\ \phi(s) f(s, y(s)) \nabla^\alpha s$$

$$= \int_a^b \tfrac{\gamma - 1}{\delta}\ \phi(s)\, f(s, y(s))\, \nabla^\alpha s > \frac{\gamma - 1}{\delta}\ \frac{K}{[b - a + \frac{\gamma}{\delta}]} =\ r$$

elde edilir. Buradan Teorem3.2.1(ii) sağlanmış olur.

Şimdi de Teorem 3.2.1 (iii) koşulunun sağlandığını gösterelim. $y \in V(\theta, K)$ ve $\varphi(y) = r$ olduğunda $t \in [c, b]$ için $r = y(c) \leq y(t) \leq$ y(b) $\leq K$ olur. O halde (i) den

$\varphi(Ay)$ =$A(y(b))$

$$= \int_a^b [b - s + \tfrac{\gamma}{\delta}]\, \phi(s)\, f(s, y(s))\, \nabla^\alpha s \quad - \quad \tfrac{1}{\delta} \int_a^c \phi(s) f(s, y(s)) \nabla^\alpha s$$
$$- \int_a^b (b - s)\, \phi(s) f\big(s, y(s)\big) \nabla^\alpha s$$

$$= \int_a^b \tfrac{\gamma}{\delta} \phi(s) f\big(s, y(s)\big) \nabla^\alpha s - \tfrac{1}{\delta} \int_a^c \phi(s) f\big(s, y(s)\big) \nabla^\alpha s$$

$$\geq \int_a^b \tfrac{\gamma}{\delta}\, \phi(s)\, f(s, y(s))\, \nabla^\alpha s$$

$$\geq \int_c^b \tfrac{\gamma}{\delta}\, \phi(s)\, f(s, y(s))\, \nabla^\alpha s$$

$$> \frac{\gamma}{\delta} \frac{r\delta}{L_2\, \gamma} L_2 = r$$

elde edilir. Buradan Teorem 3.2.1(iii) koşulu sağlanmış olur.

Şimdi Teorem 3.2.1(iv) koşulunun geçerli olduğunu gösterelim. $\forall y \in Q(\varphi, \eta, r, R)$ için $\eta(y) = y(a) = R$ ve $\psi(Ay) = A(y(b)) < \tau$ olsun.

$$\tau > \psi(Ay) = A\big(y(b)\big)$$

$$= \int_a^b [b - s + \frac{\gamma}{\delta}] \phi(s) f(s, y(s)) \nabla^\alpha s - \frac{1}{\delta} \int_a^c \phi(s) f(s, y(s)) \nabla^\alpha s$$

$$- \int_a^b (b - s)\, \phi(s) f\big(s, y(s)\big) \nabla^\alpha s$$

$$= \int_a^b \frac{\gamma}{\delta} \phi(s) f\big(s, y(s)\big) \nabla^\alpha s - \frac{1}{\delta} \int_a^c \phi(s) f\big(s, y(s)\big) \nabla^\alpha s$$

$$\geq \int_a^b \frac{\gamma}{\delta} \phi(s) f\big(s, y(s)\big) \nabla^\alpha s - \frac{1}{\delta} \int_a^b \phi(s) f\big(s, y(s)\big) \nabla^\alpha s$$

$$= \int_a^b \frac{\gamma - 1}{\delta}\, \phi(s)\, f(s, y(s))\, \nabla^\alpha s$$

Buradan $\int_a^b \phi(s)\, f(s, y(s))\, \nabla^\alpha s < \frac{\tau\, \delta}{\gamma - 1}$ bulunur.

$$\eta(Ay) = A\big(y(a)\big)$$

$$= \int_a^b [b - s + \frac{\gamma}{\delta}]\, \phi(s)\, f(s, y(s))\, \nabla^\alpha s \quad - \quad \frac{1}{\delta}\int_a^c \phi(s) f(s, y(s)) \nabla^\alpha s$$

$$\leq \int_a^b [b - s + \frac{\gamma}{\delta}]\, \phi(s)\, f(s, y(s))\, \nabla^\alpha s$$

$$\leq \int_a^b [b - a + \frac{\gamma}{\delta}]\, \phi(s) f(s, y(s)) \nabla^\alpha s < (b - a + \frac{\gamma}{\delta}) \frac{\tau\, \delta}{\gamma - 1} = R$$

elde edilir. Buradan Teorem 3.2.1(iv) koşulu sağlanmış olur.

Son olarak Teorem 3.2.1(v) koşulunun geçerli olduğunu gösterelim. $\forall y \in U(\psi, \tau)$ ve $\eta(y) = y(a) = R$ olduğunda $t \in [a, b]$ için $\tau \leq y(b) \leq y(t) \leq y(a) = R$ olur. O halde (ii) den

$\eta(Ay) = A\big(y(a)\big)$

$$= \int_a^b [b - s + \frac{\gamma}{\delta}]\, \phi(s)\, f(s, y(s))\, \nabla^\alpha s \quad - \quad \frac{1}{\delta}\int_a^c \phi(s) f(s, y(s)) \nabla^\alpha s$$

$$\leq \int_a^b [b - s + \frac{\gamma}{\delta}]\, \phi(s)\, f(s, y(s))\, \nabla^\alpha s$$

$$\leq \int_a^b [b - a + \tfrac{\gamma}{\delta}]\, \phi(s)\, f(s, y(s))\, \nabla^\alpha \mathrm{s}$$

$$< (b - a + \frac{\gamma}{\delta})\, \frac{R}{L_1(\, b - a + \frac{\gamma}{\delta})} L_1 = R$$

elde edilir. Dolasıyla Teorem 3.2.1'e göre (3.1) sınır değer probleminin $t \in [a, b]$ için $r \leq y(t) \leq R$ olacak şekilde en az bir pozitif y çözümü vardır. İspat tamamlanır.

□

Örnek 3.2.3: $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ olsun. (3.1) sınır değer probleminde $a = 1,\ c = 2,\ b = 3,\ \alpha = \frac{1}{2}, \gamma = \frac{3}{2}, \delta = \frac{1}{4}, \phi(t) = t^2$ ve $f(t, y(t)) = \frac{y}{y+t}$ alarak aşağıdaki sınır değer problemini ele alalım:

$$\begin{cases} {}^{\beta}T_{\frac{1}{2}}^{\nabla}\left({}^{\beta}T_{\frac{1}{2}}^{\Delta}(y(t)) + t^2 \frac{y}{y+t} = 0 \right. & , \quad t \in [1,3] \subset \mathbb{T} \\ \delta y(3) + \gamma\, {}^{\beta}T_{\frac{1}{2}}^{\Delta}(y(3)) = {}^{\beta}T_{\frac{1}{2}}^{\Delta}(y(2)) & \\ {}^{\beta}T_{\frac{1}{2}}^{\Delta}(y(1)) = 0 & \end{cases} \tag{3.10}$$

(3.10) sınır değer probleminin en az bir pozitif çözümünün varlığını Teorem 3.3.1'e göre kanıtlayalım. Şimdi τ, K, L_1 ve L_2 değerlerini Teorem 3.3.1'e göre hesaplarsak, $\tau = \frac{R}{4}, K = 4r, L_1 = 7{,}265142, L_2 = 4{,}767186$ olarak bulunur. Eğer $r = 4$ ve $R = 58$ alırsak Teorem 3.3.1 deki (i) ve (ii) koşulları sağlanmış olur. O zaman $t \in [1, 3]$ için $4 \leq y(t) \leq 58$ olacak şekilde (3.10) sınır değer probleminin en az bir y pozitif çözümü vardır.

3.3 En Az İki Pozitif Çözümün Varlığı

Teorem 3.3.1(Avery Henderson Sabit Nokta Teoremi): E reel Banach uzayında P bir koni olsun.

$P(\varphi, r) = \{y \in P: \varphi(y) < r\}$ kümesini tanımlayalım.

φ, η, P üzerinde negatif olmayan artan sürekli fonksiyoneller ve θ, P üzerinde negatif olmayan sürekli bir fonksiyonel olsun. Pozitif r ve M sayıları verildiğinde $\theta(0) = 0$ olmak üzere,$\forall y \in \overline{P(\varphi, r)}$ için $\varphi(y) \leq \theta(y) \leq \eta(y)$ ve $\| y \| \leq M.\varphi(y)$ olsun. Her $0 \leq \lambda \leq 1$ ve $y \in \partial P(\theta, q)$ için $\theta(\lambda y) \leq \lambda\theta(y)$ olacak şekilde $p < q < r$ pozitif sayılarının olduğunu varsayalım. Eğer $A: \overline{P(\varphi, r)} \to P$ tamamen sürekli operatörü için

i. $\forall\, y \in \partial P(\varphi, r)$ için $\varphi(Ay) > r$,
ii. $\forall\, y \in \partial P(\theta, q)$ için $\theta(Ay) < q$,
iii. $\forall\, y \in \partial P(\eta, p)$ için $P(\eta, p) \neq \emptyset$ ve $\eta(Ay) > p$,

şartları sağlanırsa o zaman

$$p < \eta(y_1) \quad \text{ile} \quad \theta(y_1) < q \quad \text{ve} \quad q < \theta(y_2) \quad \text{ile} \quad \varphi(y_2) < r$$

olacak şekilde A nın en az iki y_1 ve y_2 sabit noktaları vardır(Avery ve Henderson 2001).

En az iki pozitif çözümün varlığını göstermek için Teorem 3.3.1(Avery Henderson Sabit Nokta Teoremi) i kullanacağız.

Teorem 3.3.2: (H_1) ve (H_2) koşulları sağlansın. $\alpha \in (0,1]$, $\delta > 0, \gamma \geq 1$ ve $[a,b] \subset \mathbb{T}$ olsun. Varsayalım ki $0 < p < q < r$ eşitsizliği ile p, q, r ve

$$L_1 = \int_a^b \phi(s)\nabla^\alpha s\,, \qquad L_3 = \int_a^c \phi(s)\,\nabla^\alpha s$$

sabitleri mevcut olsun.

Eğer f fonksiyonu,

i. $f(\mathrm{s},\mathrm{y}(\mathrm{s})) \geq \frac{r}{L_3(b-c+\frac{\gamma-1}{\delta})}$, $(s,y) \in [a,c] \times [r, \frac{b-a}{b-c} r]$,

ii. $f(\mathrm{s},\mathrm{y}(\mathrm{s})) \leq \frac{q}{L_1(b-a+\frac{\gamma}{\delta})}$, $(s,y) \in [a,b] \times [0, \frac{b-a}{b-c} q]$,

iii. $f(\mathrm{s},\mathrm{y}(\mathrm{s})) > \frac{p.}{L_3(b-c+\frac{\gamma-1}{\delta})}$, $(s,y) \in [a,c] \times [\frac{b-c}{b-a} p, p]$,

koşullarını sağlıyorsa (3.1) sınır değer probleminin

$y_1(a) > p$ ile $y_1(c) < q$ ve $y_2(c) > q$ ile $y_2(b) < r$

olacak şekilde en az iki y_1 ve y_2 pozitif çözümleri vardır.

İspat: $\varphi(y) := \theta(y) := y(c)$, $\eta(y) := y(a)$ olarak tanımlayalım.

(3.9) de verilen P konisini alalım. O zaman φ, θ ve η, P üzerinde negatif olmayan artan sürekli fonksiyonellerdir.

Lemma 3.1.9'a göre $A\colon \overline{P(\varphi,r)} \to P$ operatörü tamamen süreklidir. $\forall y \in P$ için $\varphi(y) = \theta(y) = y(c) \leq y(a) = \eta(y)$ olur. Ayrıca (3.6) dan $\forall y \in P$ için $y(t) \geq \frac{b-t}{b-a} \parallel y \parallel$ olduğundan $y(c) \geq \frac{b-c}{b-a} \parallel y \parallel$ olur. Buradan $\parallel y \parallel \leq \frac{b-a}{b-c} y(c)$ olup $M = \frac{b-a}{b-c} > 0$ alınırsa $\parallel y \parallel \leq My(c)$ elde edilir. Ayrıca $\theta(0) = 0$ olur. $\forall y \in P$ ve $\lambda \in [0,1]$ için $\theta(\lambda y) = \lambda\theta(y)$ eşitliği geçerlidir.

Şimdi Teorem 3.2.2 nin diğer koşullarını doğrulayalım. $\forall y \in \partial P(\varphi,r) = \{y \in P\colon \varphi(y) = r\}$ için $\varphi(Ay) > r$ olduğunu gösterelim. $\forall y \in \partial P(\varphi,r)$ ise $t \in [a,c]$ için $r = y(c) \leq y(t) \leq \parallel y \parallel \leq \frac{b-a}{b-c} r$ olur. O halde (i) den

$$\varphi(Ay) = A\big(y(c)\big)$$

$$= \int_a^b [b - s + \frac{\gamma}{\delta}]\, \phi(s)\, f(s, y(s))\, \nabla^{\alpha}s - \frac{1}{\delta}\int_a^c \phi(s) f(s, y(s)) \nabla^{\alpha}s$$

$$- \int_a^c (c - s)\, \phi(s)\, f(s, y(s)) \nabla^{\alpha}s$$

$$= \int_a^b [b - s + \tfrac{\gamma}{\delta}] \phi(s) f(s, y(s)) \nabla^{\alpha}s - \int_a^c (c - s + \tfrac{1}{\delta})\, \phi(s) f(s, y(s)) \nabla^{\alpha}s$$

$$= \int_a^c [b - c + \tfrac{\gamma-1}{\delta}] \phi(s) f(s, y(s)) \nabla^{\alpha}s + \int_c^b [b - s + \tfrac{\gamma}{\delta}] \phi(s) f(s, y(s)) \nabla^{\alpha}s$$

$$> \int_a^c [b - c + \tfrac{\gamma-1}{\delta}] \phi(s) f(s, y(s)) \nabla^{\alpha}s$$

$$= [b - c + \tfrac{\gamma-1}{\delta}] \int_a^c \phi(s) f(s, y(s)) \nabla^{\alpha}s$$

$$\geq [b - c + \tfrac{\gamma-1}{\delta}] \frac{r}{L_3(b-c+\frac{\gamma-1}{\delta})} L_3 = r$$

elde edilir. Böylece Teorem 3.2.2(i) koşulu sağlanmış olur.

Şimdi Teorem 3.2.2(ii) koşulunun sağlandığını gösterelim. $\forall y \in \partial P(\theta,q)$ için $\theta(Ay) < q$ olduğunu gösterelim. $\forall y \in \partial P(\theta,q)$ ise $t \in [a,b]$ için $0 \leq y(t) \leq \parallel y \parallel \leq \frac{b-a}{b-c} q$ olur. O halde (ii) den

$\theta(Ay) = A(y(c))$

$$= \int_a^b [b - s + \tfrac{\gamma}{\delta}]\, \phi(s)\, f(s, y(s))\, \nabla^\alpha s \quad - \quad \tfrac{1}{\delta}\int_a^c \phi(s) f(s, y(s)) \nabla^\alpha s$$
$$- \int_a^c (c - s)\, \phi(s)\, f(s, y(s)) \nabla^\alpha s$$

$$= \int_a^b [b - s + \frac{\gamma}{\delta}]\, \phi(s)\, f(s, y(s))\, \nabla^\alpha s - \int_a^c (c - s + \frac{1}{\delta})\, \phi(s) f(s, y(s)) \nabla^\alpha s$$

$$\leq \int_a^b [b - s + \tfrac{\gamma}{\delta}]\, \phi(s)\, f(s, y(s))\, \nabla^\alpha s$$

$$\leq \int_a^b [b - a + \frac{\gamma}{\delta}]\, \phi(s)\, f(s, y(s))\, \nabla^\alpha s$$

$$\leq (b - a + \tfrac{\gamma}{\delta})\, L_1 \frac{q}{(b-a+\frac{\gamma}{\delta})L_1} = q$$

elde edilir. Böylece Teorem 3.2.2(ii) koşulu sağlanmış olur.

Son olarak Teorem 3.2.2(iii) koşulunun sağlandığını gösterelim. $\forall y \in \partial P(\eta, p) = \{y \in P: \eta(y) = p\}$ için $\frac{p}{2} \in P(\eta, p) = \{y \in P: \eta(y) < p\}$ olduğundan $P(\eta, p) \neq \emptyset$ dir. $\forall y \in \partial P(\eta, p)$ için $\eta(Ay) > p$ olduğunu gösterelim. $\forall y \in \partial P(\eta, p)$ ise $t \in [a, b]$ için $\frac{b-c}{b-a} p \leq y(b) \leq y(t) \leq y(a) \leq p$ olur. O halde (iii) den

$\eta(Ay) = A(y(a))$

$$= \int_a^b [b - s + \frac{\gamma}{\delta}]\, \phi(s)\, f(s, y(s))\, \nabla^\alpha s \quad - \quad \frac{1}{\delta}\int_a^c \phi(s) f(s, y(s)) \nabla^\alpha s$$

$$\geq \int_a^c [b - s + \tfrac{\gamma-1}{\delta}]\, \phi(s)\, f(s, y(s))\, \nabla^\alpha s + \int_c^b [b - s + \tfrac{\gamma}{\delta}]\, \phi(s)\, f(s, y(s))\, \nabla^\alpha s$$

$$> \int_a^c [b - s + \tfrac{\gamma-1}{\delta}]\, \phi(s) f(s, y(s)) \nabla^\alpha s$$

$$\geq \int_a^c [b - c + \tfrac{\gamma-1}{\delta}] \phi(s) f(s, y(s)) \nabla^\alpha s$$

$$> (b - c + \tfrac{\gamma-1}{\delta})\, \frac{p}{L_3(b - c + \frac{\gamma-1}{\delta})} L_3 = p$$

Böylece Teorem 3.2.2’nin tüm koşulları sağlandığından ispat tamamlanır.

□

Örnek 3.3.3: $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ olsun. (3.1) sınır değer probleminde $a = 1, c = 2,$ $b = 3, \alpha = \frac{1}{2}, \gamma = \frac{3}{2}, \delta = \frac{1}{4}, \phi(t) = \frac{t}{2}$ ve $f(t, y(t)) = \frac{y}{y-1}$ alarak aşağıdaki sınır değer problemini ele alalım:

$$\begin{cases} {}^{\beta}T_{\frac{1}{2}}^{\nabla}\left({}^{\beta}T_{\frac{1}{2}}^{\Delta}(y(t)) + \frac{t}{2}\frac{y}{y-1} = 0 \right. \quad , \quad t \in [1,3] \subset \mathbb{T} \\ \delta y(3) + \gamma\, {}^{\beta}T_{\frac{1}{2}}^{\Delta}(y(3)) = {}^{\beta}T_{\frac{1}{2}}^{\Delta}(y(2)) \\ {}^{\beta}T_{\frac{1}{2}}^{\Delta}(y(1)) = 0. \end{cases} \tag{3.11}$$

(3.11) sınır değer probleminin en az iki pozitif çözümünün varlığını Teorem 3.4.1’e göre kanıtlayalım. Şimdi L_1 ve L_3 değerlerini Teorem 3.4.1’e göre hesaplarsak, $L_1 = 1{,}231356$, $L_3 = 0{,}518776$ olarak bulunur. Eğer $p = 0{,}48$, $q = 0{,}49$ ve $r = 2{,}05$ alırsak Teorem 3.4.1’deki (i), (ii) ve (iii) koşulları sağlanmış olur. O zaman (3.11) sınır değer probleminin

$y_1(1) > 0{,}48$ ile $y_1(2) < 0{,}49$ ve $y_2(2) > 0{,}49$ ile $y_2(3) < 2{,}05$

olacak şekilde en az iki y_1 ve y_2 pozitif çözümleri vardır.

3.4 En Az Üç Pozitif Çözümün Varlığı

φ, η ve θ, P üzerinde negatif olmayan sürekli dışbükey fonksiyoneller, ω ve ψ, P üzerinde negatif olmayan sürekli içbükey fonksiyoneller olsun. Negatif olmayan h, m, n, k, ℓ sayıları için aşağıdaki dışbükey kümeleri tanımlayalım:

$$P(\varphi, \ell) = \{y \in P: \varphi(y) < \ell\},$$

$$P(\varphi, \omega, n, \ell) = \{y \in P: n \leq \omega(y), \varphi(y) \leq \ell\},$$

$$Q(\varphi, \eta, m, \ell) = \{y \in P: \eta(y) \leq m, \varphi(y) \leq \ell\},$$

$$P(\varphi,\theta,\omega,n,k,\ell)=\{y\in P: n\ \le\ \omega(y),\theta(y)\ \le k,\varphi(y)\le \ell\ \},$$

$$Q(\varphi,\eta,\psi,h,m,\ell)=\{y\in P: h\le\psi(y),\eta(y)\le m,\varphi(y)\le \ell\}.$$

Teorem 3.4.1(Beş Fonksiyonel Sabit Nokta Teoremi): E reel Banach uzayında P bir koni olsun. φ, η ve θ, P üzerinde negatif olmayan sürekli dışbükey fonksiyoneller, ω ve ψ, P üzerinde negatif olmayan sürekli içbükey fonksiyoneller ve $\forall\, y\in \overline{P(\varphi,\ell)}$ için $\omega(y)\le\eta(y)$, $\parallel y \parallel \le\ M\varphi(y)$ olacak şekilde negatif olmayan ℓ, M sayıları mevcut olsun. A: $\overline{P(\varphi,\ell)}\ \rightarrow\ \overline{P(\varphi,\ell)}$ operatörünün tamamen sürekli olduğunu varsayalım. Eğer,

i. $y\in P(\varphi,\theta,\omega,n,k,\ell)$ için $\{y\in P(\varphi,\theta,\omega,n,k,\ell): \omega(y)>n\}\neq\emptyset$ ve $\omega(Ay)>n$,
ii. $y\ \in Q(\varphi,\eta,\psi,h,m,\ell)$ için $\{\,y\ \in\ Q(\varphi,\eta,\psi,h,m,\ell): \eta(y)<m\,\}\neq\emptyset$ ve $\eta(Ay)<m$,
iii. $y\ \in\ P(\varphi,\omega,n,\ell)$ ile $\theta(Ay)>k$ için $\omega(Ay)>n$,
iv. $y\ \in\ Q(\varphi,\eta\,,m,\ell)$ ile $\psi(Ay)>h$ için $\eta(Ay)<m$,

olacak şekilde $0<m<n$ eşitsizliğini sağlayan, negatif olmayan h,m,k,n sayılarının mevcut ise o zaman A operatörünün

$$\eta(y_1)<m,\omega(y_2)>n,\omega(y_3)<n,\eta(y_3)>m$$

olacak şekilde en az üç $y_1,y_2,y_3\in\ \overline{P(\varphi,\ell)}$ sabit noktaları vardır(Avery 1999).

En az üç pozitif çözümün varlığını göstermek için Teorem 3.2.3(Beş Fonksiyonel Sabit Nokta Teoremi)'ü kullanacağız.

Teorem 3.4.2: (H_1) ve (H_2) koşulları sağlansın. $\alpha\in(0,1]$, $\delta>0,\gamma>1$ ve $[a,b]\subset\mathbb{T}$ olsun. Varsayalım ki $0<\ h<\ m\ <n<k<\ \ell$ eşitsizliği ile m,n,ℓ ve

$$k=\frac{n(\delta(b-a)+\gamma)}{\gamma-1}\ ,\quad h\ =\frac{m(\gamma-1)}{\delta(b-a)+\gamma}\ ,\quad L_1=\int_a^b\ \phi(s)\,\nabla^{\alpha}s\ ,\ \ L_2=\int_c^b\ \phi(s)\nabla^{\alpha}s$$

sabitleri mevcut olsun.

Eğer f fonksiyonu,

i. $f(\mathrm{s}, \mathrm{y}(\mathrm{s})) > \frac{n\delta}{L_2(\gamma-1)}$, $(s,y) \in [c,b] \times [n,k]$,

ii. $f(\mathrm{s}, \mathrm{y}(\mathrm{s})) \leq \frac{m}{L_1(b-a+\frac{\gamma}{\delta})}$, $(s,y) \in [a,b] \times [h,\ell]$,

iii. $f(\mathrm{s}, \mathrm{y}(\mathrm{s})) \leq \frac{\ell}{L_1(b-a+\frac{\gamma}{\delta})}$, $(s,y) \in [a,b] \times [0,\ell]$,

koşullarını sağlıyorsa (3.1) sınır değer probleminin

$\eta(y_1) < m, \omega(y_2) > n, \eta(y_3) > m, \ \omega(y_3) < n$

olacak şekilde en az üç y_1, y_2 ve y_3 pozitif çözümü vardır.

İspat : $\omega(y) := \psi(y) := y(b), \theta(y) := y(c), \varphi(y) := \eta(y) := y(a)$ olarak tanımlayalım. (3.9) da verilen P konisini alalım. O zaman ω ve ψ, P üzerinde negatif olmayan sürekli içbükey fonksiyoneller, φ, η ve θ, P üzerinde negatif olmayan sürekli dışbükey fonksiyonellerdir. $\forall\, y \in \overline{P(\varphi,\ell)}$ için $\omega(y) = y(b) \leq y(a) = \eta(y)$, $\| y \| = y(a) = \varphi(y)$ olup $M = 1$ alınırsa $\| y \| \leq 1\, \varphi(y)$ olduğu açıktır.

Eğer $y \in \overline{P(\varphi,\ell)}$ ise o zaman $\forall\, t \in [a,b]$ için $0 \leq y(t) \leq y(a) \leq \ell$ olduğundan (iii) den

$\varphi(Ay) = A\big(y(a)\big)$

$$= \int_a^b [b-s+\frac{\gamma}{\delta}]\, \phi(s) f(s,y(s))\, \nabla^\alpha s - \frac{1}{\delta}\int_a^c \phi(s) f(s,y(s)) \nabla^\alpha s$$

$$\leq \int_a^b [b-s+\frac{\gamma}{\delta}] \phi(s) f(s,y(s)) \nabla^\alpha s$$

$$\leq \int_a^b [b-a+\frac{\gamma}{\delta}] \phi(s) f(s,y(s)) \nabla^\alpha s$$

$$\leq [b-a+\frac{\gamma}{\delta}] \frac{\ell}{L_1(b-a+\frac{\gamma}{\delta})} L_1 = \ell$$

elde edilir. Buradan $A\colon \overline{P(\varphi,\ell)} \to \overline{P(\varphi,\ell)}$ operatördür ve Lemma 3.1.9'a göre tamamen süreklidir.

Şimdi Teorem 3.2.3(Beş Fonksiyonlu Sabit Nokta Teoremi)'nin kalan koşullarını doğrulayalım. $0 < h < m < n < k < \ell$ eşitsizliği ile h, m, n, k, ℓ sabit sayılarının olduğunu varsayalım.

İlk olarak Teorem 3.2.3(i) koşulunu doğrulayalım. $\forall y \in P(\varphi,\theta,\omega,n,k,\ell)$ için $\{y \in P(\varphi,\theta,\omega,n,k,\ell)\colon \omega(y) > n\} \neq \emptyset$ ve $\omega(Ay) > n$ olduğunu göstereceğiz. $P(\varphi,\theta,\omega,n,k,\ell) = \{y \in P\colon n \leq \omega(y), \theta(y) \leq k, \varphi(y) \leq \ell \quad \}$ olmak üzere $0 < \varepsilon_1 < k - n$ olacak şekilde $x_1 = n + \varepsilon_1$ olsun. $n < \omega(x_1) = n + \varepsilon_1$, $\theta(x_1) = n + \varepsilon_1 < k$, $\varphi(x_1) = n + \varepsilon_1 < k < \ell$ olduğundan

$$x_1 \in \{y \in P(\varphi,\theta,\omega,n,k,\ell)\colon \omega(y) > n\} \neq \emptyset$$

elde edilir. $\forall y \in P(\varphi,\theta,\omega,n,k,\ell)$ ise $t \in [c,b]$ için $n \leq y(b) \leq y(t) \leq y(c) \leq k$ olur. O halde (i) den

$$\varphi(Ay) = A\big(y(b)\big)$$

$$= \int_a^b [b - s + \frac{\gamma}{\delta}]\, \phi(s)\, f(s,y(s))\, \nabla^\alpha s \quad - \quad \frac{1}{\delta}\int_a^c \phi(s) f(s,y(s)) \nabla^\alpha s$$

$$- \int_a^b (b-s)\, \phi(s)\, f(s,y(s)) \nabla^\alpha s$$

$$= \int_a^b \frac{\gamma}{\delta}\, \phi(s)\, f(s,y(s))\, \nabla^\alpha s \quad - \quad \frac{1}{\delta}\int_a^c \phi(s) f(s,y(s)) \nabla^\alpha s$$

$$> \int_a^b \frac{\gamma}{\delta}\, \phi(s)\, f(s,y(s))\, \nabla^\alpha s \quad - \quad \frac{1}{\delta}\int_a^b \phi(s) f(s,y(s)) \nabla^\alpha s$$

$$= \int_a^b \frac{\gamma - 1}{\delta} \phi(s) f\big(s,y(s)\big) \nabla^\alpha s$$

$$> \int_c^b \frac{\gamma - 1}{\delta} \phi(s) f\big(s,y(s)\big) \nabla^\alpha s$$

$$> \frac{\gamma - 1}{\delta} \frac{n\delta}{L_2(\gamma - 1)} L_2 = n$$

elde edilir. Buradan Teorem 3.2.3 (i) koşulu doğrulanmış olur.

Şimdi Teorem 3.2.3(ii) koşulunun doğrulandığını gösterelim. $\forall y \in Q(\varphi, \eta, \psi, h, m, \ell)$ için $\{y \in Q(\varphi, \eta, \psi, h, m, \ell) : \eta(y) < m\} \neq \emptyset$ ve $\eta(Ay) < m$ olduğunu göstereceğiz.

$Q(\varphi, \eta, \psi, h, m, \ell) = \{y \in P : h \leq \psi(y), \eta(y) \leq m, \varphi(y) \leq \ell\}$ olmak üzere

$0 < \varepsilon_2 < m - h$ olacak şekilde $x_2 = m - \varepsilon_2$ olsun. Buradan $\psi(x_2) = m - \varepsilon_2 > h$,

$\eta(x_2) = m - \varepsilon_2 < m$ ve $\varphi(x_2) = m - \varepsilon_2 < \ell$

olduğundan

$$x_2 \in \{y \in Q(\varphi, \eta, \psi, h, m, \ell) : \eta(y) < m\} \neq \emptyset$$

elde edilir. $\forall y \in Q(\varphi, \eta, \psi, h, m, \ell)$ ise $t \in [a, b]$ için $h \leq y(b) \leq y(t) \leq y(a) \leq \ell$ olur. O halde (ii) den

$$\eta(Ay) = A\big(y(a)\big)$$

$$= \int_a^b [b - s + \frac{\gamma}{\delta}]\, \phi(s)\, f(s, y(s))\, \nabla^\alpha s \quad - \quad \frac{1}{\delta} \int_a^c \phi(s) f(s, y(s)) \nabla^\alpha s$$

$$\leq \int_a^b [b - s + \frac{\gamma}{\delta}]\, \phi(s)\, f(s, y(s))\, \nabla^\alpha s$$

$$\leq \int_a^b [b - a + \frac{\gamma}{\delta}]\, \phi(s)\, f(s, y(s))\, \nabla^\alpha s$$

$$< [b - a + \frac{\gamma}{\delta}] \frac{m}{L_1(b - a + \frac{\gamma}{\delta})} L_1 = m$$

elde edilir. Buradan Teorem 3.2.3(ii) şartı sağlanmış olur.

Şimdi Teorem 3.2.3(iii) koşulunun doğrulandığını gösterelim. Bunun için $\forall y \in P(\varphi, \omega, n, \ell) = \{y \in P: n \leq \omega(y),\ \varphi(y) \leq \ell\}$ ve $\theta(Ay) > k$ olmak üzere $\omega(Ay) > n$ olduğunu göstereceğiz.

$$k < \theta(Ay) = A\big(y(c)\big)$$

$$= \int_a^b [b - s + \tfrac{\gamma}{\delta}]\, \phi(s)\, f(s, y(s))\, \nabla^\alpha s \ - \ \tfrac{1}{\delta}\int_a^c \phi(s) f(s, y(s)) \nabla^\alpha s$$
$$- \int_a^c (c - s)\, \phi(s)\, f(s, y(s)) \nabla^\alpha s$$

$$= \int_a^b [b - s + \tfrac{\gamma}{\delta}]\, \phi(s)\, f(s, y(s))\, \nabla^\alpha s - \int_a^c \ (c - \ s + \tfrac{1}{\delta})\, \phi(s) f(s, y(s)) \nabla^\alpha s$$

$$< \int_a^b [b - s + \tfrac{\gamma}{\delta}]\, \phi(s)\, f(s, y(s))\, \nabla^\alpha s$$

$$\leq \int_a^b [b - a + \tfrac{\gamma}{\delta}]\, \phi(s)\, f(s, y(s))\, \nabla^\alpha s$$

elde edilir. Buradan $\frac{k}{[b - a + \frac{\gamma}{\delta}]} < \int_a^b \ \phi(s)\, f(s, y(s))\, \nabla^\alpha s$ bulunur. $k = \frac{n(\delta(b-a)+\gamma)}{\gamma - 1}$ olduğundan $\int_a^b \ \phi(s)\, f(s, y(s))\, \nabla^\alpha s > \frac{n\delta}{\gamma - 1}$ olur. Böylece

$$\omega(Ay) = A\big(y(b)\big)$$

$$= \int_a^b [b - s + \frac{\gamma}{\delta}]\, \phi(s)\, f(s, y(s))\, \nabla^\alpha s - \frac{1}{\delta}\int_a^c \ \phi(s) f(s, y(s)) \nabla^\alpha s$$

$$- \int_a^b (b - s)\, \phi(s)\, f(s, y(s)) \nabla^\alpha s$$

$$= \int_a^b \frac{\gamma}{\delta}\, \phi(s)\, f(s, y(s))\, \nabla^\alpha s \quad - \quad \frac{1}{\delta}\int_a^c \ \phi(s) f(s, y(s)) \nabla^\alpha s$$

$$\geq \int_a^b \frac{\gamma}{\delta}\, \phi(s)\, f(s, y(s)) \nabla^\alpha s - \ \frac{1}{\delta}\int_a^b \ \phi(s) f(s, y(s)) \nabla^\alpha s$$

$$= \int_a^b \frac{\gamma - 1}{\delta} \phi(s) f\big(s, y(s)\big) \nabla^\alpha s$$

$$> \frac{\gamma-1}{\delta}\ \frac{n\delta}{\gamma-1} = n$$

elde edilir. Buradan Teorem 3.2.3 (iii) koşulu sağlanmış olur.

Son olarak Teorem 3.2.3(iv) koşulunun sağlandığını gösterelim. Bunun için $\forall y \in Q(\varphi,\eta,m,\ell) = \{y \in P: \eta(y) \le m,\ \varphi(y) \le \ell\}$ ve $\psi(Ay) < h$ olmak üzere $\eta(Ay) < m$ olduğunu göstereceğiz.

$$h > \psi(Ay) = A\big(y(b)\big)$$

$$= \int_a^b [b - s + \tfrac{\gamma}{\delta}]\, \phi(s)\, f(s, y(s))\, \nabla^\alpha s \ - \ \tfrac{1}{\delta}\int_a^c \phi(s) f(s, y(s)) \nabla^\alpha s$$

$$- \int_a^b (b-s)\, \phi(s)\, f(s, y(s)) \nabla^\alpha s$$

$$= \int_a^b \tfrac{\gamma}{\delta}\, \phi(s)\, f(s, y(s))\, \nabla^\alpha s \ - \ \tfrac{1}{\delta}\int_a^c \phi(s) f(s, y(s)) \nabla^\alpha s$$

$$\ge \int_a^b \frac{\gamma}{\delta}\, \phi(s) f\big(s, y(s)\big) \nabla^\alpha s \ - \ \frac{1}{\delta}\int_a^b \phi(s) f(s, y(s)) \nabla^\alpha s$$

$$= \int_a^b \frac{\gamma-1}{\delta}\, \phi(s)\, f(s, y(s))\, \nabla^\alpha s$$

elde edilir. Buradan $\frac{h\delta}{[\gamma-1]} > \int_a^b \phi(s)\, f(s, y(s))\, \nabla^\alpha s$ bulunur. $h = \frac{m(\gamma-1)}{\delta(b-a)+\gamma}$ olduğundan $\int_a^b \phi(s)\, f(s, y(s))\, \nabla^\alpha s < \frac{m\,\delta}{\delta(b-a)+\gamma}$ olur. Böylece

$$\eta(Ay) = A\big(y(a)\big)$$

$$= \int_a^b [b - s + \frac{\gamma}{\delta}]\, \phi(s)\, f(s, y(s))\, \nabla^\alpha s \ - \ \frac{1}{\delta}\int_a^c \phi(s) f(s, y(s)) \nabla^\alpha s$$

$$\le \int_a^b [b - s + \tfrac{\gamma}{\delta}]\, \phi(s)\, f(s, y(s))\, \nabla^\alpha s$$

$$\le \int_a^b [b - a + \tfrac{\gamma}{\delta}]\, \phi(s)\, f(s, y(s))\, \nabla^\alpha s$$

$$< \frac{\delta(b-a)+\gamma}{\delta} \frac{m\,\delta}{\delta(b-a)+\gamma} = m$$

elde edilir. Buradan Teorem 3.2.3'ün tüm koşulları sağlanmış olduğundan ispat tamamlanır.

□

Örnek 3.4.3: $\mathbb{T} = \{\frac{n}{2} : n \in \mathbb{N}_0\}$ olsun. $a = \frac{1}{2}, c = 1, b = \frac{3}{2}, \alpha = \frac{1}{2}, \gamma = 2, \delta = 1, \phi(t) = 4t$ ve $f(t, y(t)) = \frac{y^2}{y^3+1}$ alarak aşağıdaki sınır değer problemini ele alalım:

$$\begin{cases} {}^{\beta}T^{\nabla}_{\frac{1}{2}}\left({}^{\beta}T^{\Delta}_{\frac{1}{2}}(y(t))\right) + 4t\frac{y^2}{y^3+1} = 0 & , \; t \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}] \subset \mathbb{T} \\ \delta y(\frac{3}{2}) + \gamma\, {}^{\beta}T^{\Delta}_{\frac{1}{2}}(y(\frac{3}{2})) = {}^{\beta}T^{\Delta}_{\frac{1}{2}}(y(1)) & \\ {}^{\beta}T^{\Delta}_{\frac{1}{2}}(y(\frac{1}{2})) = 0. & \end{cases} \tag{3.12}$$

(3.12) sınır değer probleminin en az üç pozitif çözümünün varlığını Teorem 3.5.1'e göre kanıtlayalım. Şimdi k, h, L_1 ve L_3 değerlerini Teorem 3.4.1'e göre hesaplarsak, $L_1 = 3{,}6874,\ L_3 = 2{,}0882,\ k = 3n$ ve $h = \frac{m}{3}$ olarak bulunur. Eğer $m = 0{,}09,\ n = 0{,}57$ ve $\ell = 5{,}87$ alırsak Teorem 3.5.1'deki (i), (ii) ve (iii) koşulları sağlanmış olur. O zaman (3.12) sınır değer probleminin

$\eta(y_1) < 0{,}09$ ile $\eta(y_3) > 0{,}09$ ve $\omega(y_2) > 0{,}57$ ile $\omega(y_3) < 0{,}57$

olacak şekilde en az üç y_1, y_2 ve y_3 pozitif çözümleri vardır.

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında zaman skalası üzerinde kesirli mertebeli sınır değer problemi ele alınmıştır. Beta-kesirli analiz içeren problemimizde önce Dört Fonksiyonel Sabit Nokta teoremiyle en az bir pozitif çözümün varlığı, Avery Henderson Sabit Nokta Teoremiyle en az iki pozitif çözümün varlığı ve Beş Fonksiyonel Sabit Nokta Teoremiyle de en az üç pozitif çözümün varlığı incelenmiştir. Son olarak elde edilen koşulların sağlanabilir koşullar olduğunu göstermek için örnekler verilmiştir. Bu çalışma zaman skalasında Beta-kesirli analizle yapılan ilk çalışmadır. Başka sınır değer problemleri ele alınarak bu çalışmaların sayısı arttırılabilir.

5. KAYNAKÇA

Agarval R.P., Bohner M., Li W.T., *Nonoscillation and oscillation theory for functional differention equations, in: Pure and applied mathematics series,* New York: Marcel Dekker, (2004).

Atangana A., Goufo E.F.D., "Extension of matched asymptotic method to fractional boundary layers". *Math. Probl. Eng.,* Article ID 107535, 1-7, (2014).

Atangana A., "A novel model fort he lassa homorrhagic fever: deathly disease for pregnant women". *Neural Comput. Appl*., 26, 1895-1903, (2015).

Atangana A., Baleanu D., Alsaedi A., "Analysis of time fractional Hunter-Saxton equation: A model of neumatic liquit crystal". *Open Phys.*, 14, 145-149 , (2016).

Avery R.I., "A generalization of the Legget-Williams fixed point theorem", *Math. Sci. Research Hot-Line* , 3, 9-14, (1999).

Avery R.I., Henderson J., "Two positive fixed points of nonlinear operators on ordered Banach spaces". *Comm. Appl. Nonlinear Anal*., 8, 27-36, (2001).

Avery R.I., Henderson J., O'Regan D., "Four functionals fixed point theorem", *Math. Comput. Modelling*, 48, 1081-1089, (2008).

Bendouma B., Hammoudi A., "A Nabla confornable fractional calculus on time scales", *Electr. J. Math. Anal. Appl*., 7, 202-216, (2019).

Boyadjiev L. and Scherer R., "Fractional extensions of the temperature field problem in oil strata", *Kuwait J. Sci. Eng*., 31,15-32, (2004).

Bastos N.R.O., "Fractional calculus on time scales", Ph.D. thesis, *University of Aveiro*, (2012).

Benkhettou N., Brito da Cruz A.M.C., Torres D.F.M., "A fractional calculus on arbitrary time scales: Fractional differention and fractional Integration", *Signal Process*, 107, 230-237, (2015).

Benkhettou N., Hassani S., Torres D.F.M., "A conformable fractional calculus on arbitrary time scales", *Journal of King Saud Universty*, 28, 93-98, (2016).

Bohner M., Peterson A., *Dynamic equations on time scales: An introduction with applications*, Boston: Birkhäuser, (2001).

Bohner M., Peterson A., *Advances in dynamic equations on time scales*, Boston: Birkhäuser, (2003).

Bouchard B., Touzi N., “Discrete-time approximation and Monte-Carlo simulation of backward stoshactic differential equations”, *Stoch. Process*, 111, 175-206, (2004).

Chen A.P. and Chen Y., “Existence of solutions to anti-periodic boundary value problem for nonlinear fractional differential equations with impulses”, *Adv. Difference Equ.*, Article ID 915689, 1-17, (2011).

Deimling, K., *Nonlinear functional analysis*, New York: Springer-Verlag, (1985).

Hilger S., “Analysis on measure chains-A unified approach to continuous and discrete calculus”, *Results Math.*, 18, 18-56, (1990).

Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J., *Theory and a aplications of fractional differential equations*, Amsterdam: Elsevier, (2006).

Kreyszig, E., *Introductory functional analysis with application*, New York: John Wiley and Sons., (1987).

Lacroix S.F., *Trait ımentaire de calcul diffrentiel et de calcul intgral*, Paris: Courtier, (1820).

Liang, S., Zhang, J. and Wang, Z., “The existence of three positive solutions of m-point boundary value problems for some dynamic equations on time scales”, *Math. Comput. Modelling*, 49, 1386-1393, (2009).

Machado J.T., Kiryakova V. and Mainardi F., “Recent history of fractional calculus”, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 16, 1140-1153, (2011).

Miller K.S., Ross B., “Fractional difference calculus, Proceedings of the Integrational Symposium on Unilavent Functions, Fractional Calculus and Their Applications”, *Ellis Horwood Series in Mathematics and Its Applications*, *Horwood*, *Chichester*, 139-152, (1989).

Miller K.S., Ross B., *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations*, New York: Wiley, (1993).

Oldham K.B. and Spanier J., *The fractional calculus: Theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order*, New York: Academic Press, (1974).

Ortigueira M.D., Trujillo J.J., “A unified approach to fractional derivatives”, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 17, 5151-5157, (2012).

Pepe P., Verriest E., “On the stability of coupled delay differential and continuous time difference equations”, *IEEE Trans. Automat.*, 48, 5567-5572, (2003).

Podlubny I., *Fractional differential equations: An introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*, Amsterdam: Elsevier (1998).

Rahmat M.R.S., Noorani M.S.M., “A new conformable nabla derivative and its application on arbitrary time scales”, *Adv. Diff. Equ.*, Article No 238, 1-27, (2021).

Sabatier J., Agrawal O.P., Machado J.A., *Advances in fractional calculus: Theoretical developments and aplications in physics and engineering*, Heidelberg: Springer, (2007).

Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I., *Fractional integrals and derivatives*, Yverdon: Gordon and Breach, (1993).

Schneider W.R. and Wyss W., “Fractional diffusion and wave equations”, *J. Math. Phys.*, 30, 134-144, (1989).

Terzioğlu, T., *An Introduction to real analysis*, İstanbul: ODTÜ Basımevi, (1999).

Yaslan İ., “Beta-fractional calculus on time scales”, *J. Frac. Calc. And Nonlinear Sys.*, 4, 56-68, (2023).

Zhao D.F., You X.X., “A new fractional derivative on time scales”, *Adv. Appl. Math. Anal.*, 11, 1-9, (2016).

Zhu J., Zhu Y., “Fractional Cauchy problem with Riemann-Lioville fractional delta derivative on time scales”, *Abst. Appl. Anal.*, Article ID 401596, 1-19, (2013).