

T.C  
BURDUR MEHMET AKİF ERSOY ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI  
YÜKSEK LİSANS TEZİ

KADEMELİ 2-NORMLU UZAYLARDA ÜÇ İNDİSLİ  
DİZİLER İÇİN LACUNARY İSTATİSTİKSEL  
YAKINSAKLIK

Gülsüm DERMENCİOĞLU

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Işıl AÇIK DEMİRCİ

BURDUR, 2024

## ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

Burdur Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Eğitim Öğretim ve Sınav Yönetmenliğinin ilgili hükümleri uyarınca Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “**Kademeli 2-Normlu Uzaylarda Üç İndisli Diziler İçin Lacunary İstatistiksel Yakınsaklık**” başlıklı bu tezin;

- Kendi çalışmam olduğunu,
- Sunduğum tüm sonuç, doküman, bilgi ve belgeleri bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde ettiğimi,
- Bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara atıf yaptığımı ve bunların kaynaklar listesinde usulüne uygun olarak verdiğimi,
- Kullandığım verilerde değişiklik yapmadığımı,
- Bu tez çalışması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını,
- Bu tezin herhangi bir bölümü bu üniversite veya diğer üniversitede başka bir tez çalışması içinde sunmadığımı,
- Bu tezin planlanmasından yazımına kadar bütün safhalarda bilimsel etik kurallarına uygun olarak davrandığımı

bildirim, aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul edeceğimi beyan ederim.

15/Ağustos/2024

Gülsüm DERMEŒCIOĞLU

## ÖNSÖZ

Beni yüksek lisans öğrencisi olarak kabul edip sabrı ve yol göstericiliği ile tez çalışmamın her aşamasında akademik bilgisini benden esirgemeyen değerli hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Işıl AÇIK DEMİRCİ'ye en içten dileklerle teşekkür ederim.

Eğitimim boyunca maddi anlamda bana destek veren TÜBİTAK 2211 Yurtiçi Lisansüstü Burs Programına teşekkür ederim.

**Ağustos/2024**

**Gülsüm DERMENCİOĞLU**



# İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖNSÖZ .....	i
İÇİNDEKİLER .....	ii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ .....	iii
ÖZET .....	v
ABSTRACT .....	vi
1. GİRİŞ .....	1
2. GENEL BİLGİLER .....	4
2.1. Temel Kavramlar .....	4
2.2. Normlu Uzaylar .....	8
2.3. Lacunary İstatistiksel Yakınsaklık .....	14
2.4. Kademeli Normlu Uzaylar .....	15
3. MATERYAL VE YÖNTEM .....	18
4. ARAŞTIRMA BULGULARI .....	29
5. SONUÇ .....	41
KAYNAKLAR .....	43

## SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

- $C[a, b]$  :  $[a, b]$  aralığı üzerinde sürekli reel değerli fonksiyonlar uzayı
- $G(\mathbb{R})$  : Tüm kademeli dizilerin kümesi
- $L$  : Lacunary dizilerin kümesi
- $l_\infty$  : Tüm sınırlı dizilerin uzayı
- $l_\infty^3$  : Tüm sınırlı üç indisli dizilerin uzayı
- $N_\theta$  : Lacunary kuvvetli yakınsak dizilerin uzayı
- $S$  : İstatistiksel yakınsak dizilerin uzayı
- $S_\theta$  : Lacunary istatistiksel yakınsak dizilerin uzayı
- $S(G)$  : Kademeli istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi
- $S_{\theta_3}$  : Üç indisli lacunary istatistiksel yakınsak diziler kümesi
- $S_\theta(G)$  : Tüm kademeli lacunary istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi
- $S_{\theta_3}(G2)$  : 2-normlu lineer uzayda üç indisli kademeli lacunary istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi
- $st - \lim_{k \rightarrow \infty} x_n$  :  $(x_n)$  dizisinin istatistiksel limiti
- $\mathbb{N}$  : Doğal sayılar kümesi
- $\mathbb{R}$  : Reel sayılar kümesi
- $\omega$  : Reel ya da kompleks terimli dizilerin uzayı
- $(x_n)$  : Reel veya kompleks sayı dizisi
- $(x_{nkl})$  : Reel veya kompleks sayı üç veya çok indisli dizisi
- $\underline{\delta}(A)$  :  $A$  kümesinin alt yoğunluğu
- $\overline{\delta}(A)$  :  $A$  kümesinin üst yoğunluğu
- $\delta(A)$  :  $A$  kümesinin doğal yoğunluğu
- $\delta_3(A)$  :  $A$  kümesinin de üç indisli dizilerin doğal yoğunluğu

- $|A|$  :  $A$  kümesinin eleman sayısı
- $\Lambda_x$  :  $(x_n)$  dizisinin istatistiksel limit noktası kümeleri
- $\Gamma_x$  :  $(x_n)$  dizisinin istatistiksel yığılma noktaları kümesi
- $\theta = (k_r)$  : Lacunary dizisi
- $\theta_3$  : Üç indisli lacunary dizisi
- $\sigma_1$  : Cesàro yakınsak diziler uzayı
- $|\sigma_1|$  : Kuvvetli Cesàro toplanabilir dizilerin kümesi
- $\|\cdot\|$  : 2-Norm fonksiyonu
- $(X, \|\cdot\|)$  :  $X$  üzerinde normlu uzay
- $(X, \|\cdot\|_2)$  :  $X$  üzerinde 2-Normlu uzay
- $(X, \|\cdot\|_G)$  : Kademeli normlu lineer uzay
- $(X, \|\cdot\|_G)$  :  $X$  üzerinde kademeli 2-Normlu uzay

# ÖZET

**Yüksek Lisans Tezi**

**Kademeli 2-Normlu Uzaylarda Üç  
İndisli Diziler için Lacunary İstatistiksel Yakınsaklık**

**Gülsüm DERMENCİOĞLU**

**Burdur Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı**

**Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Işıl AÇIK DEMİRCİ**

**Ağustos, 2024**

Bu tez çalışmasında öncelikle konunun tarihsel süreçteki gelişimi ifade edildi. Daha sonra tezde kullanılan bazı önemli tanım ve temel sonuçlar verildi. Ardından normlu uzaylar, 2-normlu uzaylar, istatistiksel yakınsaklık ve lacunary yakınsaklık kavramlarından bahsedildi. Son kısımda kademeli 2-normlu uzaylarda üç indisli dizilerin lacunary istatistiksel yakınsaklığı incelendi.

**Anahtar Kelimeler:** İstatistiksel yakınsaklık, kademeli norm, lacunary istatistiksel yakınsaklık, yoğunluk, 2-norm.

# ABSTRACT

M.Sc. Thesis

Lacunary Statistical Convergence of Triple Sequences in Gradual 2-Normed Spaces

Gülsüm DERMENCİOĞLU

Burdur Mehmet Akif Ersoy University  
Graduate School of Natural and Applied Sciences  
Department of Mathematics

Supervisor: Asst. Prof. Işıl AÇIK DEMİRCİ

August, 2024

In this thesis, the historical development of the subject is first presented. Then, some definitions and fundamental results used in the thesis are given. Subsequently, the concepts of normed spaces 2-normed spaces, statistical convergence, and lacunary convergence are discussed. The final part examined the lacunary statistical convergence of triple sequences in gradual 2-normed spaces.

**Key Words:** Statistical convergence, gradual norm, lacunary statistical convergence, density, 2-norm.

# 1.GİRİŞ

İstatistiksel yakınsaklık fikri, Steinhaus (Steinhaus, 1951) ve Fast (Fast, 1951) tarafından bağımsız olarak tanıtılmış ve daha sonra Schoenberg (Schoenberg, 1959) tarafından istatistiksel yakınsaklığın bazı temel özellikleri incelenmiştir.

1993 yılında, Fridy (Fridy, 1993) lacunary istatistiksel yakınsama kavramını istatistiksel yakınsamanın uzantılarından biri olarak tanıttı.  $\theta = (k_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$  lacunary dizisi  $k_0 = 0$  ve  $h_n = k_n - k_{n-1} \rightarrow \infty$ ,  $n \rightarrow \infty$  şartlarını sağlayan artan bir tam sayı dizisidir.

$\forall \varepsilon > 0$  olmak üzere gerçekte değerli bir  $(x_k)$  dizisi için  $I_n = (k_{n-1}, k_n]$  iken  $\lim_n \frac{1}{h_n} |\{k \in I_n : |x_k - l| \geq \varepsilon\}| = 0$  oluyorsa, bu dizi  $l$  gerçekte sayısına lacunary istatistiksel olarak yakınsaktır (kısaca  $S_\theta$  yakınsak) denir.

Bu durumda,  $l$  sayısına  $(x_k)$  lacunary istatistiksel dizisinin limiti denir ve sembolik olarak  $S_\theta - \lim(x_k) = l$  veya  $x_k \rightarrow l(S_\theta)$  şeklinde yazılır.  $\theta$  lacunary bir dizi olmak üzere  $\theta$ 'ya istatistiksel olarak yakınsak olan dizilerin tümü  $S_\theta$  olarak gösterilir. Fridy ve Orhan (Fridy ve Orhan, 1993) istatistiksel yakınsama ile lacunary istatistiksel yakınsama arasındaki ilişkiyi kurmuştur. Fridy ve Orhan (Fridy ve Orhan, 1993) lacunary istatistiksel Cauchy dizileri kavramını sunmuştur ve Freedman vd. (Freedman vd., 1978) tarafından  $|\sigma_1|$  sınıfı tüm kuvvetli Cesàro toplanabilir dizilerin kümesini ve  $N_\theta$  tüm lacunary kuvvetli yakınsak dizilerin uzayını göstermek üzere

$$|\sigma_1| = \left\{ (x_k) : \text{bazı } l \in \mathbb{R}, \lim_n \frac{1}{n} \left( \sum_{k=1}^n |x_k - l| \right) = 0 \right\} \quad (1.1)$$

$$N_\theta = \left\{ (x_k) : \text{bazı } l \in \mathbb{R}, \lim_n \frac{1}{h_n} \left( \sum_{k \in I_n} |x_k - l| \right) = 0 \right\} \quad (1.2)$$

bu iki dizi uzayı arasındaki ilişki incelenmiştir.

Ayrıca çift diziler üzerine ilk çalışmalar Bromwich (Bromwich, 1965) tarafından oluşturulmuştur. Çift diziler için düzenli yakınsama kavramı Hardy (Hardy, 1917) tarafından tanıtılmıştır. Daha sonra, Zeltser (Zeltser, 2001) doktora tezinde hem topolojik çift dizi uzayları teorisini hem de çift dizilerin toplanabilirlik teorisini esasen incelemiştir. Son zamanlarda, Mursaleen ve Edely (Mursaleen ve Edely, 2003) ve Şahiner, Gürdal ve

Düden (Şahiner vd., 2007) çoklu diziler için istatistiksel yakınsama fikrini ele alan matematikçilerdir. Çift indisli lacunary istatistiksel yakınsama kavramı ise Patterson ve Savaş (Patterson ve Savaş, 2005), üç indisli dizi kümeleri için lacunary istatistiksel yakınsaklık Demirci ve Gürdal (Demirci ve Gürdal, 2021) tarafından ve diğer matematikçiler tarafından çalışılmıştır.

Bulanık kümelerin fikrine bakılırsa, Zadeh tarafından 1965 yılında (Zadeh, 1965) klasik küme kuramsal kavramın bir genişlemesi olarak ilk kez tanıtılmıştır. Günümüzde, farklı bilim dalları ve mühendislik alanlarında geniş uygulama alanları vardır. "Bulanık sayı" terimi, bulanık küme teorisi çalışmalarında önemli bir rol oynamaktadır. Bulanık sayılar aslında sayıların değil, aralıkların genellemesidir. Hatta bulanık sayılar, klasik sayıların bazı cebirsel özelliklerine uymaz. Bu nedenle, "bulanık sayı" terimi farklı davranışı dolayısıyla birçok yazar için tartışmalıdır. Birçok yazar tarafından "bulanık aralıklar" terimi, bulanık sayılar yerine sıklıkla kullanılır. Araştırmacılar arasındaki karışıklığı aşmak için, 2008 yılında Fortin ve arkadaşları (Fortin vd., 2008) tarafından bulanık aralıkların elemanları olarak kademeli (aşamalı) gerçek sayılar kavramı sunulmuştur. Kademeli gerçek sayılar, bir üyelik fonksiyonu aracılığıyla bilinirler. Her gerçek sayı sabit bir atama fonksiyonuna sahip  $(0,1]$  aralığında kademeli bir sayı olarak görülebilir. Kademeli gerçek sayılar ayrıca klasik gerçek sayıların tüm cebirsel özelliklerine uyar; hesaplama ve optimizasyon problemlerinde kullanımları vardır.

2011 yılında Sadeqi ve Azari (Sadeqi ve Azari, 2011) ilk olarak kademeli normlu lineer uzay kavramını tanıttı. Uzayın çeşitli özelliklerini hem cebirsel hem de topolojik bakış açısıyla incelediler. Bu yönde daha fazla ilerleme Aiche ve Dubois (Aiche ve Dubois, 2012), Etefagh, Azari, ve Etemad (Etefagh vd., 2020) tarafından gerçekleştirildi.

Kademeli normlu lineer uzay dizilerinin yakınsaması üzerine yapılan çalışmalar henüz yeterli sayıda değildir. Yapılmış olan araştırmalar, kademeli normlu lineer uzaylarda dizilerin yakınsamasının davranışları arasında güçlü bir benzerlik ortaya koymaktadır.

Son zamanlarda, Etefagh vd. (Etefagh vd., 2020) tarafından kademeli normlu lineer uzaylarda dizilerin yakınsaması kavramı sunulmuştur. Aynı zamanda, onlar topolojik açıdan bazı özellikleri inceleme fırsatı yakalamışlardır. Choudhury ve Debnath (Choudhury ve Debnath, 2021) dizilerin kademeli normlu lineer uzaylar içinde

yakınsamasının kavramını ideal yakınsama olarak genişletmişlerdir. Bu nedenle, kademeli normlu lineer uzaylar içinde dizilerin lacunary istatistiksel yakınsamasının incelenmesi çok doğaldır.

1963 yılında Gähler tarafından tanıtılan ve iki yıl sonra, 1965'te yine Gähler tarafından geliştirilen “2-Normlu Uzaylar” kavramı, birçok matematikçinin ilgisini çeken önemli bir konu haline gelmiştir. Bu kavram, 2-Metrik Uzaylar (Gähler, 1965; Ehret, 1969), Non-Archimedean 2-Normlu Uzaylar (Ingleton, 1952; Gähler, 1965), 2-Banach Uzaylar (White, 1968; 1969), 2-Fonksiyonel (Lal ve Das, 1982), Lineer 2-Normlu Uzaylarda Tamlaştırma (Ehret, 1969), 2-İç çarpım Uzayı (Diminnie ve diğerleri, 1973; 1974; 1977), 2-Konvekslik (Diminnie, 1956; Diminnie ve White, 1978), Kombinatorik Teori (Grant, 1968) gibi matematiğin temel alanları ve klasik Fonksiyonel Analiz ile olan ilişkisi sayesinde büyük ilgi görmüştür. Özellikle, 2001 yılında Gunawan ve Mashadi tarafından “2-normlu Uzaylarda Yakınsaklık ve Cauchy” kavramlarının tanıtılmasıyla yeni bir analiz yaklaşımı ortaya çıkmıştır. Aynı yıl içerisinde Gunawan ve Mashadi, “ $n$ -normlu uzaylar ve  $n$ -Banach Uzaylar” kavramlarını ele alarak 2-normlu uzayları daha da genişletmişlerdir. Ayrıca, Gürdal ve Pehlivan (2004), Açık ve Gürdal (2007), Gürdal ve Açık (2008) tarafından yapılan çalışmalarla 2-normlu uzaylarda yakınsaklık ve istatistiksel yakınsaklık konusu incelenmiş ve bu alanda yeni bir araştırma alanı doğmuştur.

Böylelikle, bu tez çalışmasında, üç indisli diziler için lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramı kademeli 2-normlu uzaylarda geliştirilmiştir.

## 2. GENEL BİLGİLER

Şimdiki bölümde tez içerisinde kullanılacak önemli teoremler ve tanımlar verilecektir.

### 2.1. Temel Kavramlar

**Tanım 2.1.1.**  $(x_n)$  bir reel sayı dizisi ve  $x \in \mathbb{R}$  olsun. Her  $\varepsilon > 0$  için  $n > n_0$  olduğundan  $|x_n - x| < \varepsilon$  olacak biçimde  $\varepsilon$  a bağlı bir  $n_0 \in \mathbb{N}$  sayısı bulunabiliyorsa  $(x_n)$  dizisi  $x$  e yakınsaktır denir ve  $\lim x_n = x$  veya  $(x_n) \rightarrow x$  ile gösterilir (Maddox, 1977).

**Tanım 2.1.2.**  $(x_{k_n})$  dizisi  $(x_n)$  dizisinin bir alt dizisi olsun.  $(x_{k_n})$  dizisi yakınsak ve limiti  $x$  ise bu  $x$  noktasına  $(x_n)$  dizisinin bir limit noktası denir (Maddox, 1977).

**Tanım 2.1.3.**  $(x_n)$  bir reel terimli dizi olsun.  $(x_n)$  bir Cauchy dizisi olması için gerek ve yeter şart her  $\varepsilon > 0$  için bir  $n_0 \in \mathbb{N}$  vardır öyle ki  $m, n \geq n_0$  için  $|x_m - x_n| < \varepsilon$  dur (Maddox, 1977).

**Tanım 2.1.4.** Reel veya kompleks terimli bütün dizilerin  $\omega$  uzayının boş olmayan her alt vektör uzayına dizi uzayı denir (Choudhary ve Nanda, 1989).

**Tanım 2.1.5.**  $B$  kümesi  $\mathbb{N}$  doğal sayılar kümesinin bir alt kümesi ve  $B_n = \{k \leq n: k \in B\}$  olsun.  $B$  kümesinin sırayla alt ve üst yoğunluğu

$$\underline{\delta}(B) = \lim inf \frac{|B_n|}{n} \quad (2.1)$$

ve

$$\overline{\delta}(B) = \lim sup \frac{|B_n|}{n} \quad (2.2)$$

olarak verilir.

$\frac{|B_n|}{n}$  dizisinin limitinin var olması durumunda bu limite  $B$  kümesinin doğal yoğunluğu denir.  $B$  kümesinin doğal yoğunluğu  $\delta(B)$  ile gösterilir (Niven vd., 1991).

**Örnek 2.1.6.**  $C = \{1, 4, 9, \dots, n^2, \dots\}$  olsun.

$$\left(\frac{C(n)}{n}\right) = \left(\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{2}{5}, \dots\right)$$

olduğundan

$$\underline{\delta}(C) = \overline{\delta}(C) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C(n)}{n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{n}$$

olup  $\underline{\delta}(A) = \overline{\delta}(A) = 0$  dır.

**Örnek 2.1.7.**  $A = \mathbb{N}$  olsun.

$$\left(\frac{A(n)}{n}\right) = \left(\frac{1}{1}, \frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \frac{4}{4}, \frac{5}{5}, \dots\right)$$

olduğundan

$$\underline{\delta}(A) = \overline{\delta}(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$$

**Tanım 2.1.8.**  $\forall \varepsilon > 0$  için  $\delta(k \in \mathbb{N} : |x_k - L| \geq \varepsilon) = 0$

yani

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise  $x = (x_k)$  dizisi  $L$  noktasına istatistiksel yakınsaktır denir ve  $st - \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = L$  şeklinde gösterilir. Eğer  $L = 0$  ise bu takdirde  $x = (x_k)$  dizisine istatistiksel sıfır dizisi denir (Freedman ve Sember, 1981).

**Teorem 2.1.9.** Yakınsak her dizi aynı zamanda istatistiksel yakınsaktır. Fakat bunun tersi her zaman doğru değildir.

**İspat.**  $x = (x_n)$  dizisi  $L$  noktasına yakınsak olsun.  $L$  her bir  $\varepsilon$  komşuluğu dışında  $x = (x_n)$  dizisinin ancak sonlu sayıda elemanı bulunabilir. Yani  $\{k : |x_k - L| \geq \varepsilon\}$  kümesi sonlu olup, bu kümenin yoğunluğu 0 dır. Dolayısıyla  $x = (x_n)$  dizisi  $L$  noktasına istatistiksel yakınsak olduğu elde edilir. Tersine olarak  $x = (x_n)$  dizisi,

$$x_n = \begin{cases} n, & n = k^2, k \in \mathbb{N} \\ 0, & n \neq k^2, k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

olarak tanımlansın.

$(x_n) = (1, 0, 0, 4, 0, 0, 0, 0, 9, 0, 0, \dots)$  olduğundan  $\{n : |x_n - 0| \geq \varepsilon\} = \{1, 4, 9, \dots\}$  olup kümenin yoğunluğu 0 dır. Dolayısıyla  $st - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$  olur. Bu örnekte de görüldüğü gibi  $x = (x_n)$  dizisi 0 noktasına istatistiksel yakınsak olduğu halde, bu dizi yakınsak değildir.

**Tanım 2.1.10.**  $x = (x_k)$  dizisi verilsin. Eğer  $\delta(\{n_i: i \in \mathbb{N}\}) = 0$  ise  $(x_{n_i})$  dizisine seyrek alt dizi, aksi taktirde seyrek olmayan alt dizi adı verilir (Fridy, 1993).

**Tanım 2.1.11.**  $x = (x_k)$  dizisinin seyrek olmayan  $\lambda$  ya yakınsak bir alt dizisi varsa,  $\lambda$  ya  $x = (x_k)$  sayı dizisinin bir istatistiksel limit noktası denir ve  $x = (x_k)$  dizisinin istatistiksel limit noktaları kümesi  $\Lambda_x$  ile gösterilir (Fridy, 1993).

**Tanım 2.1.12.**  $x = (x_k)$  dizisi verilsin.  $\forall \varepsilon > 0$  için  $\{n \in \mathbb{N}: |x_n - \mu| < \varepsilon\}$  kümesi sıfır yoğunluğa sahip değilse  $\mu$  sayısına  $x = (x_k)$  dizisinin bir istatistiksel yığılma noktasıdır denir.  $x = (x_k)$  sayı dizisinin istatistiksel yığılma noktalarının kümesi  $\Gamma_x$  ile gösterilir (Fridy, 1993).

**Örnek 2.1.13.**

$$x_k = \begin{cases} 1, & k = n^2, n \in \mathbb{N} \\ 0, & k \neq n^2, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan  $x = (x_k)$  dizisi için

$$L_x = \{0,1\}, \Lambda_x = \{0\} \text{ ve } \Gamma_x = \{0\} \text{ dır.}$$

**Teorem 2.1.14.** İstatistiksel yakınsak bir dizinin istatistiksel yığılma noktası dizinin istatistiksel limit noktasıdır (Tripathy, 1997).

**İspat.**  $x = (x_n)$  dizisinin istatistiksel limit noktası  $L$ , istatistiksel yığılma noktası  $a$  olsun. Biz  $a \neq L$  olduğunu kabul edelim.

$$\varepsilon < \left| \frac{a - L}{2} \right|$$

aşağıdaki kapsamı yazabiliriz.

$$\{k \in \mathbb{N}: |x_k - L| \geq \varepsilon\} \supseteq \{k \in \mathbb{N}: |x_k - a| < \varepsilon\}$$

Buradan yoğunluğa geçerse,

$$\delta(k \in \mathbb{N}: |x_k - L| \geq \varepsilon) \geq \delta(\{k \in \mathbb{N}: |x_k - a| < \varepsilon\})$$

elde ederiz.  $(x_n)$  dizisi istatistiksel yakınsak olduğundan  $\delta(k \in \mathbb{N}: |x_k - L| \geq \varepsilon) = 0$  dır ve  $\delta(\{k \in \mathbb{N}: |x_k - a| < \varepsilon\}) = 0$  bulunur. Bu ise  $a$  nın istatistiksel yığılma noktası olmasıyla çelişir. O halde  $L = a$  olmalıdır.

**Tanım 2.1.15.**  $\forall \varepsilon > 0$  için

$$\lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n: |x_n - x_N| \geq \varepsilon\}| = 0 \quad (2.3)$$

olacak şekilde en az bir  $N = N(\varepsilon)$  sayısı varsa  $x = (x_k)$  dizisine bir istatistiksel Cauchy dizisidir denir. Bu ifade her  $\varepsilon > 0$  ve hemen hemen her  $k$  için  $|x_n - x_N| < \varepsilon$  olacak şekilde bir  $N = N(\varepsilon)$  sayısı vardır şeklinde de yazılabilir (Fridy, 1985).

**Tanım 2.1.16.**  $x = (x_k)$  reel sayı dizisi  $A \subseteq \mathbb{N}$  olmak üzere  $\delta(A) = 0$  olsun. Eğer  $\varepsilon > 0$  verildiğinde  $\forall k \geq n_0$  için  $|x_k - L| < \varepsilon$  olacak şekilde bir  $n_0 \in \mathbb{N}$  varsa,  $x = (x_k)$  dizisi hemen hemen her  $k$  için yakınsaktır (Buck, 1993).

**Teorem 2.1.17.** Aşağıdaki ifadeler denktir:

- i.  $x$  dizisi istatistiksel yakınsak dizidir;
- ii.  $x$  dizisi istatistiksel Cauchy dizisidir;
- iii.  $x$  dizisi verilsin. Hemen hemen her  $k$  için  $x_k = y_k$  olacak şekilde yakınsak bir  $y = (y_k)$  dizisi vardır (Fridy, 1985).

**Sonuç 2.1.18.** Eğer  $x$  dizisi  $st - \lim y_k = L$  olacak şekilde bir dizi ise, o zaman  $x$  dizisi  $st - \lim y_k = L$  olacak şekilde bir  $y$  alt dizisine sahiptir (Fridy, 1985).

**Yardımcı Teorem 2.1.19.** Sonsuz sayıda  $t$  için  $t_k \neq 0$  olacak şekilde bir sayı dizisi ise hemen hemen her  $k$  için  $x_k = 0$  olacak şekilde bir dizisi vardır ve

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k t_k = \infty \quad (2.4)$$

dır (Fridy, 1985).

**İspat.** Artan bir pozitif tam sayısı dizisi olan

$$\{m(k)\}_{k=1}^{\infty}$$

dizisi seçilsin. Her  $k$  için,  $m(k) > k^2$  ve  $t_{m(k)} \neq 0$  olsun.  $x$  dizisi  $x_{m(k)} = \frac{1}{t_{m(k)}}$  ya da

$x_k = 0$  şeklinde tanımlansın. O halde hemen hemen her  $k$  için

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k t_k = \sum_{k=1}^{\infty} x_{m(k)} t_{m(k)} = \infty$$

olur.

**Tanım 2.1.20.**  $x = (x_k)$  kompleks sayılar dizisi olsun. Eğer

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k = L \quad (2.5)$$

olacak şekilde bir  $L$  sayısı varsa  $x$  dizisi  $L$  ye Cesàro yakınsaktır denir. Cesàro yakınsak dizilerin kümesi

$$\sigma_1 = \left\{ x = (x_k) : \lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - L) = 0, \text{ en az bir } L \text{ için} \right\} \quad (2.6)$$

ile gösterilecektir (Powell ve Shah, 1972).

**Tanım 2.1.21.**  $x = (x_k)$  kompleks terimli bir dizi olsun.  $p \in \mathbb{R}^+$  olsun. Eğer

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k - L|^p = 0 \quad (2.7)$$

olacak şekilde bir  $L$  sayısı varsa  $x$  dizisi  $L$  ye kuvvetli  $p$ -Cesàro yakınsaktır denir. Kuvvetli  $p$ -Cesàro yakınsak dizilerin kümesi

$$\sigma_p = \left\{ x = (x_k): \lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k - L|^p = 0, \text{ en az bir } L \text{ için} \right\} \quad (2.8)$$

ile gösterilecektir (Connor, 1988).

**Tanım 2.1.22.**  $\mathbb{N}$  doğal sayılar kümesi olmak üzere

$$x: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow X$$

$$(n, k) \rightarrow x(n, k) = x_{nk}$$

şeklinde tanımlanan  $x$  fonksiyonuna bir çift indisli dizi denir (Pringsheim, 1898).

**Tanım 2.1.23.**  $(x_{nk})$  kompleks terimli bir çift indisli dizi olsun.  $\forall \varepsilon > 0$  için  $n, k \geq N$  iken  $|x_{nk} - L| < \varepsilon$  olacak şekilde en az bir  $N \in \mathbb{N}$  var ise  $x = (x_{nk})$  çift indisli dizisine Pringsheim anlamında  $L$  sayısına yakınsaktır denir (Pringsheim, 1900).

## 2.2. Normlu Uzaylar

**Tanım 2.2.1.** Bir  $X$  boş olmayan bir cümle  $\mathbb{K}$  reel veya kompleks sayılar cismi  $X \times X \rightarrow X$  ve  $\mathbb{K} \times X \rightarrow X$  olacak şekilde aşağıdaki koşulları sağlıyorsa  $X$  cümlesine  $\mathbb{K}$  cismi üzerinde bir lineer uzayı adı verilir.  $\forall x, y, z, \in X$  ve  $a, b \in \mathbb{K}$  için

- i.  $(x + y) + z = x + (y + z)$
- ii.  $x + y = y + x$
- iii.  $\forall x \in X$  için  $x + 0 = x$  eşitsizliğini sağlayan bir tek  $0$  elemanı vardır;
- iv.  $\forall x \in X$  için  $x + (-x) = 0$  eşitsizliğini sağlayan bir tek  $(-x) \in X$  elemanı vardır.
- v.  $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$
- vi.  $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$
- vii.  $a(\beta x) = (a\beta)x$
- viii.  $1 \cdot x = x$  (Maddox, 1970).

**Tanım 2.2.2.**  $X$  boş olmayan bir küme  $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  bir fonksiyon olsun. Her  $x, y, z \in X$  için;

$$(M1) \quad d(x, x) \geq 0$$

$$(M2) \quad d(x, y) = d(y, x)$$

$$(M3) \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

şartları sağlanırsa  $d$  fonksiyonuna  $X$  üzerinde yarı metrik fonksiyonu denir (Bayraktar, 2006).

(M1)  $d(x, x) \geq 0$  şartı yerine (M1)'  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$  alırsak  $d$  fonksiyonuna  $X$  üzerinde metrik fonksiyonu denir.

**Tanım 2.2.3.**  $X$  bir lineer uzay ve  $\| \cdot \| : X \rightarrow \mathbb{R}$  bir fonksiyon olsun. için  $x, y \in X$  ve her  $\alpha \in \mathbb{C}$  için

$$(N1) \quad \|x\| \geq 0,$$

$$(N2) \quad \|x\| = 0,$$

$$(N3) \quad \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|,$$

$$(N4) \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

şartları sağlanıyorsa  $\| \cdot \|$  fonksiyonuna  $X$  üzerinde bir yarı norm denir ve  $(X, \| \cdot \|)$  ikilisine bir yarı normlu uzay denir.

Burada (N2) şartı yerine (N2)'  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$  şartı sağlanıyorsa  $\| \cdot \|$  bir norm ve  $(X, \| \cdot \|)$  ikilisine de bir normlu uzay denir (Kreyszig, 1989).

**Örnek 2.2.4.**  $V_n(\mathbb{R})$   $n$ -boyutlu bir Öklid uzayı  $\mathbb{R}$  üzerinde bir lineer normlu lineer uzaydır ve  $V_n(\mathbb{R})$  üzerindeki norm  $\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in V_n(\mathbb{R})$  için

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

norm koşullarını sağladığından  $(V_n(\mathbb{R}), \| \cdot \|)$  bir lineer uzaydır (Raymond vd., 2001).

**Örnek 2.2.5.**  $C[a, b]$  uzayı  $\mathbb{R}$  üzerinde bir normlu lineer uzaydır.  $f \in C[a, b]$  nin normu

$$\|f\| = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$$

olup norm koşullarını sağladığından  $(C[a, b], \|\cdot\|)$  bir lineer uzaydır (Raymond vd., 2001).

**Tanım 2.2.6.**  $X, 2 \leq d < \infty$  olmak üzere  $d$  boyutlu bir reel vektör uzayı olsun.  $X$  üzerinde  $\|\cdot, \cdot\|: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu

- i.  $\|x, y\| = 0$  olması için gerek ve yeter koşul  $x$  ve  $y$  nin lineer bağımlı olmasıdır,
- ii.  $\|x, y\| = \|y, x\|$ ,
- iii.  $\|x, \alpha y\| = |\alpha| \|x, y\|, \alpha \in \mathbb{R}$ ,
- iv.  $\|x, y + z\| \leq \|x, y\| + \|x, z\|$

kurallarını sağlıyorsa  $\|\cdot, \cdot\|$  fonksiyonuna 2-norm denir.  $(X, \|\cdot, \cdot\|)$  ikilisine ise 2-normlu uzay denir.

2-normlu uzayın bir standart örneği aşağıdaki 2-normla donatılmış  $\mathbb{R}^2$  dir:

$0, x$  ve  $y$  vektörlerinin oluşturduğu üçgenin alanı veya  $x$  ve  $y$  vektörlerinin oluşturduğu paralelkenarın alanının yarısıdır. Ayrıca  $x, y, z$  lineer bağımlı ise (örneğin,  $d = 2$  olduğunda),  $\|x, y + z\| = \|x, y\| + \|x, z\|$  veya  $\|x, y - z\| = \|x, y\| + \|x, z\|$  dir (Gähler, 1963; 1965; Gunawan ve Mashadi, 2001).

**Tanım 2.2.7.** Her  $y \in X$  için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x, y\| = 0 \text{ ise}$$

$X$  deki bir  $(x_n)$  dizisine  $x \in X$  değerine yakınsaktır denir. Bu durumda  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  ile gösterilir ve  $(x_n)$  dizisinin limiti  $x$  dir, denir (Gunawan ve Mashadi, 2001).

Şimdi 2-normlu uzayda yakınsak bir dizinin limitinin tek olduğunu gösterelim:  $(x_n)$  dizisinin  $X$  deki iki farklı  $x$  ve  $y$  limitlerine yakınsadığını kabul edelim.  $\|x - y, z\| \neq 0$  olacak şekilde  $z \in X$  seçelim ve

$$\|x_N - x, z\| < \frac{1}{2} \|x - y, z\| \tag{2.9}$$

ve

$$\|x_N - y, z\| < \frac{1}{2} \|x - y, z\| \tag{2.10}$$

olacak şekilde yeteri kadar büyük  $N \in \mathbb{N}$  alalım. O zaman üçgen eşitsizliğinde,

$$\begin{aligned}
\|x - y, z\| &\leq \|x - x_N, z\| + \|x_N - y, z\| \\
&< \frac{1}{2}\|x - y, z\| + \frac{1}{2}\|x - y, z\| = \|x - y, z\|
\end{aligned} \tag{2.11}$$

elde edilir. Bu mümkün olmadığından  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  tek olmalıdır.

**Tanım 2.2.8.**  $(X, \|\cdot, \cdot\|)$  lineer 2-normlu uzayında herhangi bir  $(x_n)$  dizisi ve her  $z \in X$  için

$$\lim_{n, N \rightarrow \infty} \|x_n - x_N\| = 0 \text{ ise}$$

$(x_n)$  dizisine bir Cauchy dizisi denir (Raymond vd., 2001).

**Tanım 2.2.9.** Eğer lineer 2-normlu  $X$  uzayında Cauchy dizisi  $X$  de bir  $x$  değerine yakınsak ise  $(X, \|\cdot, \cdot\|)$  ikilisine 2-Banach uzayı denir (Raymond vd., 2001).

**Teorem 2.2.10.**  $(X, \|\cdot, \cdot\|)$  bir lineer 2-normlu uzay olmak üzere  $a, b$  değerlerine göre  $(x_k)$  ve  $(y_k)$  2-normlu  $X$  uzayında Cauchy dizileri ise

- i.  $(\|x_k, a\|)$  ve  $(\|x_k, b\|)$  birer reel Cauchy dizileridir.
- ii.  $(a_k)$  bir reel Cauchy dizisi olmak üzere  $(x_k + y_k)$  ve  $(a_k x_k)$  dizileri  $X$  de Cauchy dizileridir (Raymond vd., 2001).

**İspat.**

- i. 2-normlu uzayın  $\|x, y + z\| \leq \|x, y\| + \|x, z\|$  özelliğinden yola çıkarak

$$\|x_k, a\| \leq \|x_k - x_m, a\| + \|x_m, a\|$$

elde edilir. Buradan

$$\|x_k, a\| - \|x_m, a\| \leq \|x_k - x_m, a\|$$

olur. Hipoteze göre  $(x_k)$  bir Cauchy dizisi olduğundan

$$\lim_{k, m \rightarrow \infty} |\|x_k - a\| - \|x_m - a\|| \leq \lim_{k, m \rightarrow \infty} \|x_k - x_m, a\| = 0$$

olur ve böylece  $(\|x_k, a\|)$  dizisi Cauchy dizisidir. Benzer şekilde  $(\|x_k, b\|)$  de bir Cauchy dizisidir.

- ii.  $\|(x_k + y_k) - (x_m + y_m), a\| = \|(x_k - x_m) + (y_k - y_m), a\| \leq \|x_k - x_m, a\| + \|y_k - y_m, a\|$

bulunur. Burada limite geçildiğinde hipotezden sağ taraf 0 bulunur. Bu yüzden sol tarafın limiti 0 olur. Bu yüzden  $(x_k + y_k)$  dizisi  $X$  de Cauchy dizisidir. Şimdi  $(a_k x_k)$  dizisini inceleyelim.

$$\begin{aligned} \|a_k x_k - a_m x_m, a\| &= \|(a_k x_k - a_k x_m) + (a_k x_m - a_m x_m), a\| \\ &\leq \|a_k x_k - a_k x_m, a\| + \|a_k x_m - a_m x_m, a\| \\ &= |a_k| \|x_k - x_m, a\| + |a_k - a_m| \|x_m, a\| \\ &\leq n_1 \|x_k - x_m, a\| + n_2 |a_k - a_m| \end{aligned}$$

burada  $(a_k)$  ve  $(\|x_k, a\|)$  reel Cauchy dizileri olduğundan sınırlıdır. Bundan dolayı önce  $|a_k| \leq n_1$  ve  $\|x_m, a\| \leq n_2$  yazıldı. Ayrıca, yine Cauchy dizileri olanları nedeniyle  $\|x_k - x_m, a\| \rightarrow 0$  ve  $|a_k - a_m| \rightarrow 0$  olur ve böylece sağ taraf 0 olur. O halde

$$\lim_{k,m \rightarrow \infty} \|a_k x_k - a_m x_m, a\| = 0$$

elde edilir. Bu yüzden  $(a_k x_k)$ ,  $X$  de bir Cauchy dizisidir.

**Teorem 2.2.11.** 2-boyutlu her lineer 2-normlu uzay tanımlandığı cisim altında tam ise bir 2-Banach uzayıdır (Raymond vd., 2001).

**Teorem 2.2.12.** Her  $(X, \|\cdot, \cdot\|)$  lineer 2-normlu uzayında aşağıdaki özellikler sağlanır:

- i.  $x_k \rightarrow x, k \rightarrow \infty$  ve  $y_k \rightarrow y, k \rightarrow \infty$  ise,  $k \rightarrow \infty$  için  $x_k + y_k \rightarrow x + y$ ,
- ii.  $x_k \rightarrow x, k \rightarrow \infty$  ve  $a_k \rightarrow a, k \rightarrow \infty$  ise,  $k \rightarrow \infty$  için  $a_k x_k \rightarrow ax$ ,
- iii. boy  $X \geq 2$  ve  $k \rightarrow \infty$  için  $x_k \rightarrow x$  ve  $x_k \rightarrow y$  ise  $x = y$  dir (Raymond vd., 2001).

**Tanım 2.2.13.**  $(x_n)$ , 2-normlu  $(X, \|\cdot, \cdot\|)$  uzayında bir dizi olsun. Eğer  $\forall \varepsilon > 0$  için  $X$  de sıfırdan farklı her bir  $z$  için  $\{n \in \mathbb{N} : \|x_n - L, z\| \geq \varepsilon\}$  kümesinin yoğunluğu sıfır ise  $(x_n)$  dizisi  $L$  ye istatistiksel yakınsaktır denir (Gürdal ve Pehlivan, 2009).

**Tanım 2.2.14.**  $(X, \|\cdot, \cdot\|)$  2-normlu uzayında  $(x_n)$  dizisi alalım. Eğer  $\forall \varepsilon > 0$  ve sıfırdan farklı her  $z \in X$  için  $N = N(\varepsilon)$  var öyle ki

$$\delta(\{n \in N : \|x_n - x_{N(\varepsilon)}, z\| \geq \varepsilon\}) = 0 \quad (2.12)$$

ise,  $(x_n)$  dizisi  $X$  de istatistiksel Cauchy dizisidir denir (Gürdal ve Pehlivan, 2009).

**Örnek 2.2.15.**

$$\|x, y\| = |x_1 y_2 - x_2 y_1|, \quad x = (x_1, x_2), \quad y = (y_1, y_2)$$

ile formüle edilen  $(X, \|\cdot, \cdot\|)$  2-normu ile donatılmış  $X = \mathbb{R}^2$  uzayını alalım. 2-normlu  $(X, \|\cdot, \cdot\|)$  uzayında bir  $(x_n)$ , dizisi

$$x_n = \begin{cases} (1, n), & n = k^2, k \in \mathbb{N} \text{ ise} \\ \left(1, \frac{n-1}{n}\right), & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın ve  $L = (1, 1)$  ve  $z = (z_1, z_2)$  olsun. Eğer  $z_1 = 0$  ise o zaman  $X$  de her bir  $z$  için

$$K = \{n \in \mathbb{N}: \|x_n - L, z\| \geq \varepsilon\} = \emptyset$$

dir. Böylece  $\delta(K) = 0$  dir. Buradan,  $z_1 \neq 0$  elde ederiz. Her  $\varepsilon > 0$  ve  $z \in X$ ,

$$\left\{n \in \mathbb{N}: n \neq k^2, k \leq \frac{|z_1|}{\varepsilon}\right\}$$

bir sınırlı kümedir ve bu yüzden

$$\{n \in \mathbb{N}: \|x_n - L, z\| \geq \varepsilon\} = \left\{n \in \mathbb{N}: n = k^2, k \geq \sqrt{\frac{\varepsilon}{|z_1|} + 1}\right\} \cup \{\text{sınırlı küme}\}$$

dir. Buradan  $X$  deki her bir  $z$  için

$$\frac{1}{n} \{n \in \mathbb{N}: \|x_n - L, z\| \geq \varepsilon\} = \frac{1}{n} \left\{n \in \mathbb{N}: n = k^2, k \geq \sqrt{\frac{\varepsilon}{|z_1|} + 1}\right\} \cup \frac{1}{n} O(1)$$

dir. O halde . her  $\varepsilon > 0$  ve  $z \in X$  için

$$\delta\{n \in \mathbb{N}: \|x_n - L, z\| \geq \varepsilon\} = 0$$

dır. Bunun anlamı

$$st - \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n, z\| = \|L, z\|$$

dir. Fakat  $(x_n)$  dizisi  $L$  ye yakınsak değildir (Gürdal ve Pehlivan, 2009).

### 2.3. Lacunary İstatistiksel Yakınsaklık

**Tanım 2.3.1**  $\theta = (k_r)$  dizisi ( $r = 1, 2, 3, \dots$ ),  $k_0 = 0$  ve  $r \rightarrow \infty$  iken  $h_n = k_n - k_{n-1} \rightarrow \infty$  olacak şekilde pozitif tam sayıların artan dizisi ise, lacunary dizi olarak adlandırılır (Freedman vd., 1978). Çalışmada  $\theta = (k_r)$  lacunary dizi tarafından belirlenen aralıklar  $I_n = (h_{n-1}, h_n]$  ile belirtilip  $\frac{k_n}{k_{n-1}}$  oranı  $q_n$  ile gösterilecektir.

**Tanım 2.3.2.**  $\theta = (k_r)$  bir lacunary dizi olsun. Eğer  $x = (x_n)$  dizisi için

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r}^n |x_k - L| = 0 \quad (2.13)$$

olacak şekilde  $L$  sayısı varsa,  $x$  dizisi  $L$  ye kuvvetli lacunary toplanabilir denir (Fridy ve Orhan 1993).

**Tanım 2.3.3.**  $\theta = (k_r)$  bir lacunary dizi olsun. Eğer her  $\varepsilon > 0$  için

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0 \quad (2.14)$$

ise  $x$  dizisi  $L$  ye lacunary istatistiksel yakınsaktır denir.  $S_\theta - \lim x = L$  biçiminde gösterilir (Freedman vd., 1978).

**Tanım 2.3.4.**  $\theta = (k_r)$  bir lacunary dizi olsun. Eğer  $x = (x_n)$  dizisi için

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r}^n |x_k| = L \quad (2.15)$$

olacak şekilde  $L$  sayısı varsa,  $x$  dizisi  $L$  ye lacunary toplanabilir denir (Fridy ve Orhan 1993).

**Teorem 2.3.5.**  $\theta = (x_k)$  bir lacunary dizisi olsun;

- i.  $x_k \rightarrow L(N_\theta) \Rightarrow x_k \rightarrow L(S_\theta)$
- ii.  $x \in l_\infty$  ve  $x_k \rightarrow L(S_\theta) \Rightarrow x_k \rightarrow L(N_\theta)$
- iii.  $S_\theta \cap l_\infty = N_\theta \cap l_\infty$

**İspat.**

i. Eğer  $\varepsilon > 0$  ve  $x_k \rightarrow L(N_\theta)$  ise

$$\sum_{k \in I} |x_k - L| \geq \sum_{\substack{k \in I \\ |x_k - L| \geq \varepsilon}} |x_k - L| \geq |\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}|,$$

yazılabilir.

ii.  $x_k \rightarrow L(S_\theta)$  ve  $x \in l_\infty$  her  $k$  için  $|x_k - L| \leq M$  sağlanır, denilebilir.  $\varepsilon > 0$ ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} |x_k - L| &= \frac{1}{h_r} \sum_{\substack{k \in I_r \\ |x_k - L| \geq \varepsilon}} |x_k - L| + \frac{1}{h_r} \sum_{\substack{k \in I_r \\ |x_k - L| < \varepsilon}} |x_k - L| \\ &\leq \frac{M}{h_r} |\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \end{aligned}$$

olur.

iii. i ve ii den elde edilir.

**Teorem 2.3.6.** Herhangi bir  $\theta = (k_r)$  lacunary dizisi için istatistiksel yakınsaklığın lacunary istatistiksel yakınsaklığı gerektirmesi için gerek ve yeter koşul  $\lim_{r \rightarrow \infty} \inf_r q_r > 1$  olmasıdır. Eğer  $\lim_{r \rightarrow \infty} \inf_r q_r = 1$  ise, o zaman istatistiksel yakınsak olan fakat lacunary istatistiksel yakınsak olmayan sınırlı bir  $(x_k)$  dizisi vardır.

#### 2.4. Kademeli Normlu Uzaylar

**Tanım 2.4.1.**  $\tilde{r}$  kademeli gerçel bir sayı ve  $A_{\tilde{r}} : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu olarak tanımlasın. Eğer  $\tilde{r}$  gerçel sayısı  $\forall \xi \in (0, 1]$ , için  $A_{\tilde{r}}(\xi) \geq 0$  ise,  $\tilde{r} \geq 0$  dır. Tüm sıfırdan büyük veya eşit kademeli gerçel sayıların kümesi  $G^*(\mathbb{R})$  ile gösterilir (Fortin vd., 2008).

$G^*(\mathbb{R})$  nin elemanları arasındaki kademeli işlemler aşağıdakiler gibi tanımlanmıştır:

**Tanım 2.4.2.** “\*” işlemi  $\mathbb{R}$  içinde tanımlanmış bir işlem ve  $\tilde{r}_1, \tilde{r}_2 \in G(\mathbb{R})$  sırasıyla  $A_{\tilde{r}_1}$  ve  $A_{\tilde{r}_2}$  tanımlı fonksiyonlar olsun. Ardından  $\tilde{r}_1 * \tilde{r}_2 \in G(\mathbb{R})$ ,  $A_{\tilde{r}_1 * \tilde{r}_2}$  tanımlı fonksiyonu  $A_{\tilde{r}_1 * \tilde{r}_2}(\xi) = A_{\tilde{r}_1}(\xi) * A_{\tilde{r}_2}(\xi), \forall \xi \in (0, 1]$  dır. Kademeli toplama  $\tilde{r}_1 + \tilde{r}_2$  ve kademeli skaler çarpma  $c\tilde{r}$  ( $c \in \mathbb{R}$ ) işlemleri şu şekilde tanımlansın:

$$A_{\tilde{r}_1 + \tilde{r}_2}(\xi) = A_{\tilde{r}_1}(\xi) + A_{\tilde{r}_2}(\xi) \text{ ve } A_{c\tilde{r}}(\xi) = cA_{\tilde{r}}(\xi), \quad \forall \xi \in (0, 1]. \quad (2.16)$$

Herhangi bir gerçel  $p \in \mathbb{R}$  sayısı, sabit bir gerçel sayı  $\tilde{p}$  için  $A_{\tilde{p}}(\xi) = p \forall \xi \in (0, 1]$  sabit fonksiyonu şeklinde tanımlansın. Özellikle,  $\tilde{0}$  ve  $\tilde{1}$  sırasıyla  $A_{\tilde{0}}(\xi) = 0$  ve  $A_{\tilde{1}}(\xi) = 1$  tarafından tanımlanan sabit kademeli sayılardır.  $G(\mathbb{R})$  nin kademeli toplam ve kademeli skaler çarpma ile oluşan gerçel vektör uzayı olduğu kolayca doğrulanabilir (Fortin vd., 2008).

**Tanım 2.4.3.**  $X$  gerçektektör uzayı olsun. Herhangi  $x, y \in X$  için aşığıdaki üç koşul sağlandığında  $\|\cdot\|_G : X \rightarrow G^*(\mathbb{R})$  fonksiyonuna  $\forall \xi \in (0, 1]$  için  $X$  üzerinde kademeli bir norm denir:

$$(G1) \quad A_{\|x\|_G}(\xi) = A_{\tilde{0}}(\xi) \text{ ancak ve ancak } x = 0;$$

$$(G2) \quad A_{\|\lambda x\|_G}(\xi) = |\lambda| A_{\|x\|_G}(\xi) \text{ herhangi bir } \lambda \in \mathbb{R} \text{ için};$$

$$(G3) \quad A_{\|x+y\|_G}(\xi) \leq A_{\|x\|_G}(\xi) + A_{\|y\|_G}(\xi).$$

$(X, \|\cdot\|_G)$  çiftine kademeli normlu lineer uzay denir (Sadeqi ve Azari, 2011).

**Tanım 2.4.4.**  $(x_k)$  dizisi kademeli normlu lineer uzay  $(X, \|\cdot\|_G)$  içindeki bir dizi olsun. Ardından herhangi  $\xi \in (0, 1]$  için  $A_{\|x_k\|_G} \leq B, \forall k \in \mathbb{N}$  olacak şekilde bir  $B = B(\xi) > 0$  sağlanıyorsa  $(x_k)$  dizisi için kademeli olarak sınırlıdır denir (Ettfagh vd., 2020).

**Tanım 2.4.5.**  $(x_k)$ , kademeli normlu lineer uzay  $(X, \|\cdot\|_G)$  çiftindeki bir dizi olsun. Ardından  $(x_k)$  dizisi,  $\forall \xi \in (0, 1]$  ve  $\varepsilon > 0$  için

$$A_{\|x_k - x\|_G}(\xi) < \varepsilon, \forall k \geq N \tag{2.17}$$

olacak şekilde bir  $N(= N_\varepsilon(\xi)) \in \mathbb{N}$  varsa  $(x_k)$  dizisine  $x \in X$  e kademeli yakınsak denir (Sadeqi ve Azari, 2011).

**Tanım 2.4.6.**  $(x_k)$ , kademeli normlu lineer uzay  $(X, \|\cdot\|_G)$  de bir dizi olsun. Ardından  $(x_k)$  dizisi,  $\forall \xi \in (0, 1]$  ve  $\varepsilon > 0$  için

$$A_{\|x_k - x_j\|_G}(\xi) < \varepsilon, \forall k, j \geq N \tag{2.18}$$

olacak şekilde  $N(= N_\varepsilon(\xi)) \in \mathbb{N}$  varsa kademeli olarak Cauchy denilebilir (Sadeqi ve Azari, 2011).

**Teorem 2.4.7.**  $(X, \|\cdot\|_G)$ . bir kademeli normlu uzay olsun.  $X$  deki her kademeli olarak yakınsak dizi aynı zamanda kademeli olarak Cauchy dizisidir (Sadeqi ve Azari, 2011).

**Örnek 2.4.8.**  $X = \mathbb{R}^m$  ve  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m, \xi \in (0, 1]$  olsun.  $\|\cdot\|_G$ , şu şekilde

$$A_{\|x\|_G}(\xi) = e^\xi \sum_{i=1}^m |x_i|$$

tanımlansın. Ardından  $\mathbb{R}^m$  de bir kademeli norm  $\|\cdot\|_G$  olur ve  $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_G)$  ise bir kademeli normlu uzaydır (Sadeqi ve Azari, 2011).

**Tanım 2.4.9.**  $\theta = (k_n)$  bir lacunary dizi ve  $(x_k)$  bir reel değerli dizi olsun.

- i. Herhangi  $n, k'(n) \in I_n$  için;
- ii.  $n \rightarrow \infty$  iken  $(x_{k'(n)})$  dizisi  $x$  e yakınsaktır;
- iii. Herhangi bir  $\varepsilon > 0$  için  $\lim_n \frac{1}{h_n} |\{k \in I_n : |x_k - x_{k'(n)}| \geq \varepsilon\}| = 0$  dır;

olacak şekilde üç koşulu sağlayan  $(x_k)$  dizisinin  $(x_{k'(n)})$  şeklinde bir dizisi varsa  $(x_k)$  dizisine lacunary istatistiksel Cauchy dizisidir denir (kısaca  $S_\theta$ -Cauchy) (Fridy, 1993).

**Teorem 2.4.10.** Gerçek değerli bir  $(x_k)$  dizisi  $S_\theta$ -yakınsaktır ancak ve ancak  $S_\theta$ -Cauchydir (Fridy, 1993).

### 3. MATERYAL VE YÖNTEM

**Tanım 3.1.**  $(X, \|\cdot\|_G)$  herhangi bir kademeli normlu uzay olsun. Aşağıda verildiği gibi  $|\sigma_1(G)|$  ve  $N_\theta(G)$  yeni dizi uzayları tanımlanır:

$$|\sigma_1(G)| = \left\{ (x_k) : \text{bazı } x \in X \text{ ve } \forall \xi \in (0, 1], \lim_n \frac{1}{n} \left( \sum_{k=1}^n A_{\|x_k-x\|_G}(\xi) \right) = 0 \right\}$$

ve

$$N_\theta(G) = \left\{ (x_k) : \text{bazı } x \in X \text{ ve } \forall \xi \in (0, 1], \lim_n \frac{1}{h_n} \left( \sum_{k \in I_n} A_{\|x_k-x\|_G}(\xi) \right) = 0 \right\}$$

**Tanım 3.2.**  $(x_k)$ , kademeli normlu lineer uzay  $(X, \|\cdot\|_G)$  deki bir dizi olsun. Eğer her  $\xi \in (0, 1]$  and  $\varepsilon > 0$  için

$$\left\{ k \in \mathbb{N} : A_{\|x_k-x\|_G}(\xi) \geq \varepsilon \right\}$$

kümesinin doğal yoğunluğu sıfır ise,  $(x_k)$  dizisi  $x \in X$  e kademeli olarak istatistiksel yakınsaktır denir. Sembolik olarak  $S(G)$  - $\lim x_k = x$  veya  $x_k \rightarrow x(S(G))$  şeklindedir.  $X$ 'deki tüm kademeli olarak istatistiksel yakınsak diziler kümesi  $S(G)$  ile belirtilsin.

Tez boyunca, basit olması açısından  $\mathbf{0}$  ifadesi,  $(0, 0, \dots, 0, 0)$   $m$ -li olarak kullanılacaktır.

**Tanım 3.3.**  $(x_k)$  kademeli normlu lineer uzay  $(X, \|\cdot\|_G)$  deki bir dizi ve  $\theta$  bir lacunary dizi olsun. Tüm  $\varepsilon > 0$  ve  $\xi \in (0, 1]$  için

$$\lim_n \frac{1}{h_n} \left| \left\{ k \in I_n : A_{\|x_k-x\|_G}(\xi) \geq \varepsilon \right\} \right| = 0 \quad (3.1)$$

ise;  $(x_k)$  dizisi  $x \in X$  e kademeli  $S_\theta$ -yakınsak (ya da kısaca  $S_\theta(G)$ -yakınsak) denilebilir. Bu durumda,  $S_\theta(G) - \lim x_k = x$  veya  $x_k \rightarrow x(S_\theta(G))$  ifadesi yazılabilir. Ayrıca,  $S_\theta(G)$  ifadesi  $X$  'deki tüm kademeli  $S_\theta$ -yakınsak dizilerin toplamını temsil eder (Choudhury ve Debnath, 2022).

**Örnek 3.4.** Örnek 2.4.8. de tanımlanan  $X = \mathbb{R}^m$  ve  $\|\cdot\|_G$  ifadeleri olsun.  $\theta = (\theta_n)$  ifadesi

$$\theta_n = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ 3^n, & n \geq 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Ardından  $\mathbb{R}^m$  deki

$$x_k = \begin{cases} (0, 0, \dots, 0, m), & \text{eğer } k = p^2, p \in \mathbb{N} \text{ için} \\ (0, 0, \dots, 0, 0), & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan bir  $(x_k)$  dizisi;  $\mathbb{R}^m$ 'de  $\mathbf{0}$ 'a kademeli olarak  $S_\theta$ -yakınsaktır. Gerçekleştirmesini yaparken

$$\begin{aligned} \lim_n \frac{1}{h_n} \left| \left\{ k \in I_n : A_{\|x_k - \mathbf{0}\|_G}(\xi) \geq \varepsilon \right\} \right| &= 3 \lim_n \frac{1}{3^n} \left| \left\{ k \in (3^{n-1}, 3^n] : A_{\|x_k - \mathbf{0}\|_G}(\xi) \geq \varepsilon \right\} \right| \\ &\leq 3 \lim_n \frac{1}{3^n} \left| \left\{ k \leq 3^n : A_{\|x_k - \mathbf{0}\|_G}(\xi) \geq \varepsilon \right\} \right| \\ &\leq 3 \lim_n \frac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}{n}, \end{aligned}$$

$\lfloor p \rfloor$  ifadesi  $\leq p$  olan en büyük tamsayıyı gösterdiğinde; 0 elde edilir.

Bu nedenle  $x_k \rightarrow \mathbf{0}(S_\theta(G))$  sonucuna ulaşılır.

**Örnek 3.5.**  $X = \mathbb{R}$  ve herhangi  $x \in \mathbb{R}$  için,  $\|\cdot\|_G$  ifadeleri

$$A_{\|x\|_G} = e^\xi |x|$$

şeklinde tanımlanmış olsun.  $\theta = (\theta_n)$  dizisi Örnek 2.4.8'de tanımlanan dizi olarak düşünölsün. Ardından  $x_k = k^2$  şeklinde tanımlanan  $X$  deki  $(x_k)$  dizisi  $S_\theta(G)$ -yakınsak değildir.

*Gereçlendirme.* Herhangi  $x \in \mathbb{R}$  için  $x \leq 0$  veya  $x > 0$  olsun. Ardından aşğıdaki tüm durumlar için  $(x_k)$  dizisi  $x$ 'e  $S_\theta(G)$ -yakınsak olmayacaktır.

**Durum-3.I.**  $x \leq 0$  iken,  $\varepsilon = \frac{1}{2}e^\xi$  olarak seçelim. Ardından,

$$\begin{aligned} \lim_n \frac{1}{h_n} \left| \left\{ k \in I_n : A_{\|x_k - x\|_G}(\xi) \geq \varepsilon \right\} \right| \\ = \lim_n \frac{3}{n} \left| \left\{ k \in (3^{n-1}, 3^n] : A_{\|k^2 - x\|_G}(\xi) \geq \frac{1}{2}e^\xi \right\} \right| = 1 \end{aligned}$$

olur.

**Durum-3.II.**  $x > 0$  ise,  $x_{k_0-1} \leq x \leq x_{k_0}$  olacak şekilde bir  $k_0 \in \mathbb{N}$  vardır.

**Alt Durum- 3.I.**  $0 < x < 1$  olacak şekilde bir  $\varepsilon = \frac{e^\xi}{2} \min\{x, 1 - x\}$  seçilsin. Bu durumda

$$\lim_n \frac{1}{h_n} \left| \left\{ k \in I_n : A_{\|x_k-x\|_G}(\xi) \geq \varepsilon \right\} \right| = 1$$

ifadesi kolayca doğrulanabilir.

**Alt Durum- 3.II.**  $x \geq 1$  olacak şekilde bir  $\varepsilon = \frac{e^\xi}{2} \min\{x - x_{k_0-1}, x_{k_0} - x\}$  seçelim. Bu durumda

$$\lim_n \frac{1}{h_n} \left| \left\{ k \in I_n : A_{\|x_k-x\|_G}(\xi) \geq \varepsilon \right\} \right| = 1$$

ifadesi kolayca doğrulanabilir.

Yukarıdaki durum çalışmasından  $(x_k)$  dizisinin  $S_\theta(G)$ -yakınsak olmadığı sonucuna varılabilir.

**Teorem 3.6.**  $(x_k)$  dizisi, sabit bir  $\theta$  için  $x_k \rightarrow x(S_\theta(G))$  olacak şekilde kademeli normlu lineer uzay  $(X, \|\cdot\|_G)$  içindeki bir dizidir. Ardından  $x$  tek ve eşsizdir.

**İspat.**  $X$  deki bazı  $x \neq y$  için  $x_k \rightarrow x(S_\theta(G))$  ve  $x_k \rightarrow y(S_\theta(G))$  ifadeleri varsayılırsa; bazı  $\xi \in (0,1]$  ve  $\varepsilon > 0$  için,

$$\lim_n \frac{1}{h_n} \left| \left\{ k \in I_n : A_{\|x_k-x\|_G}(\xi) \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

ve

$$\lim_n \frac{1}{h_n} \left| \left\{ k \in I_n : A_{\|x_k-y\|_G}(\xi) \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

dir. Bu yüzden,

$$M = \left\{ k \in I_n : A_{\|x_k-x\|_G}(\xi) < \varepsilon \right\} \cap \left\{ k \in I_n : A_{\|x_k-y\|_G}(\xi) < \varepsilon \right\} \neq \emptyset$$

dır.

$\varepsilon = A_{\left\|\frac{x-y}{2}\right\|_G}(\xi)$  seçilsin. Ardından herhangi bir  $p \in M$  için,

$$2\varepsilon = A_{\|x-y\|_G}(\xi) \leq A_{\|x_p-x\|_G}(\xi) + A_{\|x_p-y\|_G}(\xi) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

elde edilir ki bu bir çelişkidir. Bu durumda  $x = y$  olmak zorundadır.

**Teorem 3.7.**  $(x_k)$  ve  $(y_k)$  dizileri  $x_k \rightarrow x(S_\theta(G))$  ve  $y_k \rightarrow y(S_\theta(G))$  olacak şekilde kademeli normlu lineer uzay  $(X, \|\cdot\|_G)$  de iki dizi olsun. Ardından herhangi bir  $c \in \mathbb{R}$  için,

- i.  $x_k + y_k \rightarrow (x + y)(S_\theta(G))$  ve
- ii.  $cx_k \rightarrow cx(S_\theta(G))$  olur.

**İspat.**

(i)  $x_k \rightarrow x(S_\theta(G))$  ve  $y_k \rightarrow y(S_\theta(G))$  olduğundan dolayı, tüm  $\xi \in (0, 1]$  ve  $\varepsilon > 0$  için,

$$C_1 = \left\{ k \in I_n : A_{\|x_k - x\|_G}(\xi) \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\}$$

ve

$$C_2 = \left\{ k \in I_n : A_{\|y_k - y\|_G}(\xi) \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\}$$

olduğunda

$$\lim_n \frac{1}{h_n} |C_1| = 0$$

(3.2)

ve

$$\lim_n \frac{1}{h_n} |C_2| = 0$$

$$\left\{ k \in I_n : A_{\|x_k - y_k - x - y\|_G}(\xi) \geq \varepsilon \right\} \subseteq C_1 \cup C_2$$

olduğunda,

$$\frac{1}{h_n} \left| \left\{ k \in I_n : A_{\|x_k - y_k - x - y\|_G}(\xi) \geq \varepsilon \right\} \right| \leq \frac{1}{h_n} |C_1| + \frac{1}{h_n} |C_2|$$

olması gerekir ve sonuç olarak (3.2) den

$$\lim_n \frac{1}{h_n} \left| \left\{ k \in I_n : A_{\|x_k - y_k - x - y\|_G}(\xi) \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

sonucuna ulaşılır. Bu durum ispatı tamamlamaktadır.

(ii) Bu bölümün ispatı kolaylıkla atlanabilir.

**Teorem 3.8.**  $(x_k)$  dizisi kademeli normlu lineer uzay  $(X, \|\cdot\|_G)$  de bir dizi ve  $\theta = (\theta_n)$  dizisi lacunary dizi olsun. Ardından

- i. Tersinin doğru olması zorunlu olmasa da,  $x_k \rightarrow x(N_\theta(G))$  ise  $x_k \rightarrow x(S_\theta(G))$  dir.

ii.  $(x_k)$  dizisi kademeli sınırlandırılmışsa, (i) nin tersi geçerlidir.

**İspat.**

i.  $\varepsilon > 0$  tesadüfi bir değer ve  $x_k \rightarrow x(N_\theta(G))$  olsun. Ardından ispat aşağıdaki şekilde devam eder:

$$\sum_{k \in I_n} A_{\|x_k - x\|_G}(\xi) \geq \sum_{\substack{k \in I_n \\ A_{\|x_k - x\|_G}(\xi) \geq \varepsilon}} A_{\|x_k - x\|_G}(\xi) \geq \varepsilon \left| \left\{ k \in I_n : A_{\|x_k - x\|_G}(\xi) \geq \varepsilon \right\} \right|.$$

Şimdi tersi durum için, Örnek 2.4.8 de tanımlanan  $\|\cdot\|_G$  de,  $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_G)$  kademeli normlu uzayı dikkate alarak bir sayısal örnek oluşturur.  $\theta$  verilsin.  $I_n$  aralığındaki  $\lceil \sqrt{h_n} \rceil$  tam sayılarına göre  $x_k$  dizisi  $(0,0,\dots,1), (0,0,\dots,2), \dots, (0,0,\dots, \lceil \sqrt{h_n} \rceil)$  şeklinde olsun ve aksine  $x_k = \mathbf{0}$  olsun. Ardından

$$\lim_n \frac{1}{h_n} \left| \left\{ k \in I_n : A_{\|x_k - 0\|_G}(\xi) \geq \varepsilon \right\} \right| = \lim_n \frac{\lceil \sqrt{h_n} \rceil}{h_n} = 0$$

dır. Bu yüzden  $x_k \rightarrow \mathbf{0}(S_\theta(G))$  olur. Diğer taraftan;

$$\lim_n \frac{1}{h_n} \left( \sum_{k \in I_n} A_{\|x_k - 0\|_G}(\xi) \right) = \lim_n \frac{\lceil \sqrt{h_n} \rceil (\lceil \sqrt{h_n} \rceil + 1)}{2h_n} = \frac{1}{2} \neq 0$$

olur ve bu da  $x_k \not\rightarrow \mathbf{0}(S_\theta(G))$  anlamına gelir.

ii.  $x_k \rightarrow x(S_\theta(G))$  ve  $(x_k)$  kademeli sınırlandırılmış olduğu varsayalım. Ardından  $(x_k)$  nin kademeli sınırlılığı, tüm  $k \in \mathbb{N}$  için  $A_{\|x_k - x\|_G} \leq B$  olacak şekilde bir  $B = B(\xi) > 0$  in varlığını vurgular. Verilen  $\varepsilon > 0$  için,  $x_k \rightarrow x(N_\theta(G))$  sonucunu ifade eden

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h_n} \left( \sum_{k \in I_n} A_{\|x_k - x\|_G}(\xi) \right) \\ &= \frac{1}{h_n} \left( \sum_{\substack{k \in I_n \\ A_{\|x_k - x\|_G}(\xi) \geq \varepsilon}} A_{\|x_k - x\|_G}(\xi) \right) + \frac{1}{h_n} \left( \sum_{\substack{k \in I_n \\ A_{\|x_k - x\|_G}(\xi) < \varepsilon}} A_{\|x_k - x\|_G}(\xi) \right) \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\leq \frac{B}{h_n} \left| \left\{ k \in I_n : A_{\|x_k-x\|_G}(\xi) \geq \varepsilon \right\} \right| + \varepsilon$$

ifadesine ulaşılır.

Aşağıdaki yardımcı teorem  $\theta$  lacunary dizisi için bazı kısıtlamalar altında  $S(G)$  ve  $S_\theta(G)$  kümeleri arasındaki ilişkiyi inceler ve  $\frac{k_n}{k_{n-1}}$  oranını ifade eden  $q_n$  kullanılır.

**Yardımcı Teorem 3.9.**  $(x_k)$  dizisi kademeli normlu lineer uzay  $(X, \|\cdot\|_G)$  deki bir dizi olsun. Ardından herhangi bir lacunary dizisi  $\theta$  için  $S(G) - \lim x_k = x$  olması için gerek ve yeter koşul  $\liminf_n q_n > 1$  olup  $S_\theta(G) - \lim x_k = x$  limitini ima eder. Ayrıca eğer

$\liminf_n q_n = 1$  ise herhangi bir limite  $S_\theta(G)$ -yakınsak olmayan bir  $S(G)$ -yakınsak dizisi vardır.

**İspat.** İlk olarak  $\liminf_n q_n > 1$  olarak varsayalım. Ardından yeterince büyük olan bir  $n$  için,  $\frac{k_n}{h_n} \leq \frac{1+\nu}{\nu}$  i ifade eden  $q_n > 1 + \nu$  olacak şekilde bir  $\nu > 0$  vardır. Şimdi herhangi bir  $\varepsilon > 0$  ve yeterince büyük olan bir  $n$  için  $S(G) - \lim x_k = x$  iken

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_n} \left| \left\{ k \in I_n : A_{\|x_k-x\|_G}(\xi) \geq \varepsilon \right\} \right| &= \frac{k_n}{h_n} \frac{1}{k_n} \left| \left\{ k \in I_n : A_{\|x_k-x\|_G}(\xi) \geq \varepsilon \right\} \right| \\ &\leq \frac{1+\nu}{\nu} \frac{1}{k_n} \left| \left\{ k \leq k_n : A_{\|x_k-x\|_G}(\xi) \geq \varepsilon \right\} \right| \end{aligned}$$

eşitsizlikleri

$S_\theta(G) - \lim x_k = x$  eşitliğini verir.

Tersi durum için,  $\liminf_n q_n = 1$  alınsın.  $S(G)$ -yakınsak fakat  $S_\theta(G)$  herhangi bir limit değerine yakınsak olmayacak şekilde bir dizi oluşturmak amaçlanmaktadır.  $\theta$  lacunary dizisinin bir alt dizi  $(k_{n_j})$  seçilebilir. Bu dizi  $n_j - n_{j-1} \geq 2$  olduğunda  $\frac{k_{n_{j-1}}}{k_{n_j}} > \frac{j}{j+1}$  ve  $\frac{k_{n_{j-1}}}{k_{n_{j-1}}} < j$  yi sağlar. Şimdi aşağıdaki adımları izleyerek  $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_G)$  (Örnek 2.4.8 de tanımlanan bir norm  $\|\cdot\|_G$ ) içinde bir kademeli sınırlı dizi  $(x_k)$  tanımlanabilir.

$$x_k = \begin{cases} (0, 0, \dots, 0, 1) & k \in I_{n_j}, j = 1, 2, 3, \dots \\ \mathbf{0}, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

Ardından, herhangi bir  $x \in \mathbb{R}^m$  için,

$$\frac{1}{h_{n_j}} \left( \sum_{k \in I_{n_j}} A_{\|x_k - x\|_G}(\xi) \right) = A_{\|0,0,\dots,0,1\|_G}(\xi), j = 1, 2, 3, \dots$$

ve

$$\frac{1}{h_{n_j}} \left( \sum_{k \in I_n} A_{\|x_k - x\|_G}(\xi) \right) = A_{\|x\|_G}(\xi), \quad n \neq n_j$$

ifadeleri

$$\lim_n \frac{1}{h_n} \left| \left\{ k \in I_n : A_{\|x_k - x\|_G}(\xi) \geq \varepsilon \right\} \right| \neq 0$$

Yani  $x_k \not\rightarrow x(S_\theta(G))$  sonucunu verir.

Fakat  $(x_k)$  dizisi  $S(G)$ -yakınsaktır,  $p$  yeterince büyük bir tam sayı olduğunda  $k_{n_{j-1}} < p \leq k_{n_{j+1}-1}$  ifadesini sağlayan eşsiz bir  $j$  ye sahip olunabilir ve ardından  $p \rightarrow \infty$  iken

$$\frac{1}{p} \sum_{k=1}^p A_{\|x\|_G}(\xi) \leq \frac{k_{n_{j-1}} + h_{n_j}}{k_{n_{j-1}}} \leq \frac{1}{j} + \frac{1}{j} = \frac{2}{j}$$

$j \rightarrow \infty$  olur. Bu nedenle  $(x_k) \in |\sigma_1(G)|^0$  dır. Connor (Connor, 1988) makalesinin kullanılan tekniği uygulayarak,  $(x_k)$  dizisinin  $S(G)$ -yakınsak olduğu gösterilebilir.

**Yardımcı Teorem 3.10.**  $(x_k)$  dizisi kademeli normlu lineer uzay  $(X, \|\cdot\|_G)$  içinde bir dizi olsun. Ardından herhangi bir lacunary  $\theta$  dizisi için,  $S_\theta(G) - \lim x_k = x$  limitinin olması için gerek ve yeter şart  $\limsup_n q_n < \infty$  olup  $S(G) - \lim x_k = x$  limitini ima eder.

Ayrıca  $\limsup_n q_n = \infty$  ise, herhangi bir limite  $S(G)$ -yakınsak olmayan bir  $S_\theta(G)$ -yakınsak dizisi vardır.

**İspat.** İlk olarak  $S_\theta(G) - \lim x_k = x$  ile birlikte  $\limsup_n q_n < \infty$  varsayalım. Tüm  $n$  ler için  $q_n < B$  sağlayacak şekilde  $B > 0$  vardır.  $N_n, \left\{ k \in I_n : A_{\|x_k - x\|_G}(\xi) \geq \varepsilon \right\}$  kümesinin kardinal sayısını ifade etsin. Ardından,  $\eta > 0$  için varsayım gereği,  $\forall n > n_0, \frac{N_n}{h_n} < \eta$  olacak şekilde bir  $n_0 \in \mathbb{N}$  vardır.

$M = \max\{N_1, N_2, \dots, N_{n_0}\}$  ve  $k_{n-1} < t < k_n$  ifadesini sağlayan bir  $t$  tamsayısı olsun.

Ardından

$S(G) - \lim x_k = x$  eşitliğini veren

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t} \left| \left\{ k \leq t : A_{\|x_k - x\|_G}(\xi) \geq \varepsilon \right\} \right| &\leq \frac{1}{k_{n-1}} \left| \left\{ k \leq k_n : A_{\|x_k - x\|_G}(\xi) \geq \varepsilon \right\} \right| \\
&= \frac{1}{k_{n-1}} \{N_1 + N_2 + \dots + N_{n_0} + N_{n_0+1} + \dots + N_n\} \\
&\leq \frac{M}{k_{n-1}} n_0 + \frac{1}{k_{n-1}} \left\{ h_{n_0+1} \frac{N_{n_0+1}}{h_{n_0+1}} + \dots + h_n \frac{N_n}{h_n} \right\} \\
&\leq \frac{n_0 M}{k_{n-1}} + \frac{1}{k_{n-1}} \left( \sup_{n > n_0} \frac{N_n}{h_n} \right) \{h_{n_0+1} + \dots + h_n\} \\
&\leq \frac{n_0 M}{k_{n-1}} + \eta \frac{k_n - k_{n_0}}{k_{n-1}} \\
&\leq \frac{n_0 M}{k_{n-1}} + \eta q_n \\
&\leq \frac{n_0 M}{k_{n-1}} + \eta B
\end{aligned}$$

eşitsizliği bulunur.

Tersi durum için,  $\limsup_n q_n = \infty$  varsayalım.  $S_\theta(G)$ -yakınsak fakat herhangi bir limit değerine  $S(G)$ -yakınsak olmayacak şekilde bir dizi oluşması amaçlanmaktadır.  $q_{n_j} > j$  olacak şekilde  $\theta = (k_n)$  lacunary dizisinin alt dizisi olan  $(k_{n_j})$  oluşturulabilir. Şimdi aşağıdaki adımları izleyerek  $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_G)$  (Örnek 2.4.8 de tanımlanan bir norm  $\|\cdot\|_G$ ) içinde bir kademeli sınırlı dizi  $(x_k)$  tanımlanabilir:

$$x_k = \begin{cases} (0, 0, \dots, 0, 1) & k_{n_{j-1}} < k < 2k_{n_{j-1}}, j = 1, 2, \dots \\ \mathbf{0}, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

$(x_k) \in N_\theta(G)$  ama  $(x_k) \notin |\sigma_1(G)|$  olduğu gösterilebilir (Freedman vd., 1978, Fridy, ve Orhan, 1993).

Yukarıdaki iki yardımcı teoremin birleşiminden aşağıdaki teoremler ifade edilir:

**Teorem 3.11.**  $(x_k)$  dizisi kademeli normlu lineer uzay  $(X, \|\cdot\|_G)$  içinde bir dizi olsun. Ardından, herhangi bir lacunary  $\theta$  dizisi için,  $1 \leq \liminf_n q_n \leq \limsup_n q_n < \infty$  olması için gerek ve yeter şart

$S_\theta(G) - \lim x_k = S(G) - \lim x_k$  dır (Choudhury ve Debnath, 2022).

**Tanım 3.12.**  $\theta = (k_n)$  bir lacunary dizi ve  $(x_k)$  dizisi kademeli normlu lineer uzay  $(X, \|\cdot\|_G)$  içindeki herhangi bir dizi olsun.

- i. Herhangi bir  $n$  için,  $k'(n) \in I_n$ ;
- ii.  $(x_{k'(n)})$  alt dizisi bazı  $x \in X$  için  $n \rightarrow \infty$  giderken  $x$ 'e kademeli yakınsaktır;
- iii. Herhangi bir  $\varepsilon > 0$  ve  $\xi \in (0, 1]$  için,

$$\lim_n \frac{1}{h_n} \left| \left\{ k \in I_n : A_{\|x_k - x_{k'(n)}\|_G}(\xi) \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

şartlarını sağlayan  $(x_k)$  dizisinin  $(x_{k'(n)})$  alt dizisi varsa  $(x_k)$  dizisine kademeli lacunary istatistiksel Cauchy (kısaca  $S_\theta(G)$ -Cauchy) dizisi denir (Choudhury ve Debnath, 2022).

**Teorem 3.13.**  $(x_k)$  dizisi kademeli normlu lineer uzay  $(X, \|\cdot\|_G)$  içinde bir dizi olsun. Ardından,  $(x_k)$  dizisinin  $S_\theta(G)$ -Cauchy olması için gerek ve yeter şart  $S_\theta(G)$ -yakınsaktır olmasıdır (Choudhury ve Debnath, 2022).

**İspat.**  $x_k \rightarrow x(S_\theta(G))$  ve tüm  $m \in \mathbb{N}$  için  $K(\xi, m)$ ,  $\left\{ k \in \mathbb{N} : A_{\|x_k - x\|_G}(\xi) < \frac{1}{m} \right\}$  kümesini belirttiği varsayalım. Ardından, herhangi bir  $m \in \mathbb{N}$  için  $K(\xi, m+1) \subseteq K(\xi, m)$  sağlanır ve  $\lim_n \frac{|K(\xi, m) \cap I_n|}{h_n} = 1$  limiti elde edilir.  $\frac{|K(\xi, m) \cap I_n|}{h_n} > 0$  olduğunu ifade eden  $n \geq r(1)$  şeklinde bir  $r(1)$  seçilsin ( $K(\xi, 1) \cap I_n \neq \emptyset$ ). Ardından  $K(\xi, 2) \cap I_n \neq \emptyset$  olduğunu ifade eden  $n \geq r(2)$  şeklinde bir  $r(2) > r(1)$  seçilsin.

$r(1) < n \leq r(2)$  sağlayan tüm  $n$  için,  $k'(n) \in I_n \cap K(\xi, 1)$  olacak şekilde  $k'(n) \in I_n$  seçilsin ( $A_{\|x_{k'(n)} - x\|_G}(\xi) < 1$ ). Buradaki gibi ilerleyerek,  $n > r(p+1)$  olacak şekilde  $K(\xi, p+1) \cap I_n \neq \emptyset$  olduğunu ifade eden  $r(p+1) > r(p)$  seçilebilir. Ardından,  $r(p) \leq n < r(p+1)$  i sağlayan herhangi bir  $n$  için  $k'(n) \in I_n \cap K(\xi, p)$  seçilsin:

$$A_{\|x_{k'(n)} - x\|_G}(\xi) < \frac{1}{p} \tag{3.3}$$

Bundan dolayı, herhangi bir  $r$  için  $k'(n) \in I_n$  ifadesi vardır ve denklem (3.3) de,  $n \rightarrow \infty$  iken  $(x_{k'(n)})$  'in  $x$ 'e kademeli yakınsak olduğunu ifade eder.

Ardından, herhangi bir  $\xi \in (0, 1]$  ve  $\varepsilon > 0$  için;

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h_n} \left| \left\{ k \in I_n : A_{\|x_k - x_{k'(n)}\|_G}(\xi) \geq \varepsilon \right\} \right| \\ & \leq \frac{1}{h_n} \left| \left\{ k \in I_n : A_{\|x_k - x\|_G}(\xi) \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\} \right| \\ & \quad + \frac{1}{h_n} \left| \left\{ k \in I_n : A_{\|x_{k'(n)} - x\|_G}(\xi) \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\} \right| \end{aligned}$$

ifadeleri elde edilir.

Şimdi  $x_k \rightarrow x(S_\theta(G))$  varsayımını ve  $(x_{k'(n)})$  dizisinin  $x$ 'e kademeli yakınsadığı gerçeği kullanılarak, yukarıdaki eşitsizlik sağlanır.

Şimdi tersi durum için,  $(x_k)$  dizisinin  $S_\theta$ -Cauchy dizisi olduğu varsayalım. Ardından herhangi bir  $\xi \in (0, 1]$  ve  $\varepsilon > 0$  için,

$$\begin{aligned} & \left| \left\{ k \in I_n : A_{\|x_k - x\|_G}(\xi) \geq \varepsilon \right\} \right| \\ & \leq \left| \left\{ k \in I_n : A_{\|x_k - x_{k'(n)}\|_G}(\xi) \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\} \right| \\ & \quad + \left| \left\{ k \in I_n : A_{\|x_{k'(n)} - x\|_G}(\xi) \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\} \right| \end{aligned}$$

sonucu  $x_k \rightarrow x(S_\theta(G))$  olduğunu ifade eder.

Pringsheim (Pringsheim, 1900) ve Şahiner, Gürdal ve Düden (Şahiner vd., 2007) çalışmaları kullanılarak üç indisli diziler için istatistiksel yakınsama kavramı hatırlansın.

**Tanım 3.14.**  $K(n, m, o)$ ,  $K$  da  $j \leq n, k \leq m$  ve  $l \leq o$  olacak şekilde  $(j, k, l)$  sayısı ve  $K \subset \mathbb{N}^3$  pozitif tamsayılardan oluşan üç boyutlu bir küme olsun. Dolayısıyla, doğal yoğunluğun üç boyutlu bir benzeri aşağıdaki gibi tanımlanır:

Bir  $K \subset \mathbb{N}^3$  kümesinin alt yoğunluğu  $\underline{\delta}_3(K) = P - \lim \inf_{nmo} \frac{K(n, m, o)}{nmo}$  sembolü ile gösterilir.  $\left( \frac{K(n, m, o)}{nmo} \right)$ , Pringsheim anlamında bir limite sahip olduğunda,  $K$  nın üç indisli doğal yoğunluğa sahip olduğu söylenir ve  $\delta_3(K) = P - \lim_{nmo} \frac{K(n, m, o)}{nmo}$  şeklinde tanımlanır (Şahiner vd., 2007).

**Tanım 3.15.** Bir reel (karmaşık) üç indisli dizi  $x = (x_{jkl})$ ,  $x: \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  (veya  $\mathbb{C}$ ) fonksiyonuna verilen isimdir.  $\forall j, k, l > N$  olduğunda  $|x_{jkl} - L| < \varepsilon$  olduğu göz önüne alındığında, tüm  $\varepsilon > 0$  için  $N \in \mathbb{N}$  vardır. Böylece  $x = (x_{jkl})$  üç indisli dizi Pringsheim anlamında bir  $L$  sayısına yakınsar (Şahiner vd., 2007).

**Tanım 3.16.** Sınırlı bir üç indisli dizi tüm  $(j, k, l,)$  için  $|x_{jkl}| < M$  pozitif bir  $M$  sayısı mevcut olan dizidir ve bu tür üç indisli diziler  $\|x\|_{(\infty,3)} = \sup_{jkl} |x_{jkl}| < \infty$  ile gösterilecektir.  $P$ -yakınsak bir üçlü indisli dizinin tek indisli dizilerdeki durumun aksine sınırlı olması gerekmez (Şahiner vd., 2007).

**Tanım 3.18.** Eğer  $\forall \varepsilon > 0$  için  $\delta_3(\{(j, k, l) \in \mathbb{N}^3: |x_{jkl} - L| \geq \varepsilon\}) = 0$  ise, bu durumda  $x = (x_{jkl})$  reel üç indisli dizisi  $L$  sayısına istatistiksel yakınsaktır denir (Şahiner vd., 2007).

**Tanım 3.19.** Üç indisli bir lacunary dizisi olarak  $j_0 = 0, h_r = j_r - j_{r-1} \rightarrow \infty$  iken  $r \rightarrow \infty$ ,  $k_0 = 0, h_s = k_s - k_{s-1} \rightarrow \infty$  iken  $s \rightarrow \infty$ ,  $l_0 = 0, h_t = l_t - l_{t-1} \rightarrow \infty$  iken  $t \rightarrow \infty$  koşullarını sağlayan  $\theta_3 = \theta_{rst} = \{(j_r, k_s, l_t)\}$  artan pozitif tamsayı dizisi kastedilmektedir.

Burada  $k_{rst} = j_r k_s l_t, h_{rst} = h_r h_s h_t$  ve  $\theta_{rst}$  ile  $I_{rst} = \{(j, k, l): j_{r-1} < j \leq j_r, k_{s-1} < k \leq k_s, l_{t-1} < l \leq l_t\}, q_r = \frac{j_r}{j_{r-1}}, q_s = \frac{k_s}{k_{s-1}}, q_t = \frac{l_t}{l_{t-1}}$  ve  $q_{rst} = q_r q_s q_t$  aralıkları gösterilmektedir (Esi ve Savaş, 2015).

#### 4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu tezde  $X$  reel vektör uzayı,  $x = \{x_{jkl}\}$  üç indisli dizi ve  $\theta_3 = \{\theta_3\} = \{\theta_{nop}\} = \{j_n k_o l_p\}$ ,  $(X, \|\cdot, \cdot\|_G)$  kademeli 2-normlu lineer uzayda herhangi bir üç indisli lacunary dizi olarak alınacaktır.

**Tanım 4.1.** Eğer herhangi bir  $\xi \in (0,1]$  ve her  $x, y, z \in X$  için  $\|\cdot, \cdot\|_G: X \times X \rightarrow G^*(\mathbb{R})$  fonksiyonu

$$(G2_1). \quad A_{\|x,z\|_G}(\xi) = A_{\tilde{0}}(\xi) \text{ eğer } x \text{ ve } z \text{ doğrusal bağımlıysa;}$$

$$(G2_2). \quad |\lambda| A_{\|x,z\|_G}(\xi) = A_{\|\lambda x,z\|_G}(\xi), \lambda \in \mathbb{R} \text{ olduğunda;}$$

$$(G2_3). \quad A_{\|y+x,z\|_G}(\xi) \leq A_{\|y,z\|_G}(\xi) + A_{\|x,z\|_G}(\xi)$$

koşullarını sağlarsa  $X$  üzerinde kademeli 2-norm,  $(X, \|\cdot, \cdot\|_G)$  çifti ise kademeli 2-normlu lineer uzay olarak adlandırılır.

Tez boyunca  $X$  uzayı  $2 \leq d < \infty$ ,  $d$ -boyutlu bir uzay,  $X$  üzerinde  $\|\cdot, \cdot\|_G: X \times X \rightarrow G^*(\mathbb{R})$  kademeli 2-normlu fonksiyon olsun.

**Tanım 4.2.**  $X$  üzerinde  $\|\cdot, \cdot\|_G: X \times X \rightarrow G^*(\mathbb{R})$  kademeli 2-normlu fonksiyonu ve herhangi bir  $z \in X, \varepsilon > 0$  ve  $z \in X, \varepsilon > 0$  için

$$\delta_3 \left( \left\{ (j, k, l) \in I_{nop} : A_{\|x_{jkl}-R,z\|_G}(\xi) \geq \varepsilon \right\} \right) = 0 \quad (4.1)$$

ise istatistiksel olarak  $R \in X$  e yakınsak olarak adlandırılır. Böylece,  $st_3(G2) - \lim x_{jkl} = R$  veya  $x_{jkl} \rightarrow R\{st_3(G2)\}$  şeklinde yazılabilir.

**Tanım 4.3.**  $\|\cdot, \cdot\|_G: X \times X \rightarrow G^*(\mathbb{R})$  fonksiyonu ve her  $z \in X, \varepsilon > 0$  ve  $\xi \in (0,1]$  için,

$$\lim_{nop} \frac{1}{h_{nop}} \left| \left\{ (j, k, l) \in I_{nop} : A_{\|x_{jkl}-R,z\|_G}(\xi) \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

ise  $\{x_{jkl}\}$  dizisi kademeli olarak  $R \in X$  'e  $S_{\theta_3}$ -yakınsak denir.

Bu durumda,  $S_{\theta_3}(G2) - \lim x_{jki} = R$  ya da  $x_{jkl} \rightarrow R\{S_{\theta_3}(G2)\}$  yazılır. Ayrıca  $X$ 'teki tüm  $S_{\theta_3}$ -yakınsak üç indisli dizilerin kümesi  $S_{\theta_3}(G2)$  olarak yazılsın.

**Örnek 4.4.** Örnek 2.4.8'de tanımlandığı gibi  $X = \mathbb{R}^m$  ve  $\|\cdot, \cdot\|$  2-norm olsun.

$$\theta_{nop} = \begin{cases} 0, & nop = 0 \\ 3^{nop}, & nop \geq 1 \end{cases}$$

ile tanımlanır. Üç indisli  $\{x_{jkl}\} \in \mathbb{R}^m$  dizisi şu şekilde tanımlanır:

$$x_{jkl} = \begin{cases} (0,0, \dots, 0, m), & j = r^2, k = s^2, l = t^2; (r, s, t) \in \mathbb{N}^3 \\ (0,0, \dots, 0, 0), & \text{aksi halde} \end{cases}$$

$\mathbb{R}^m$  de sıfıra kademeli olarak  $S_{\theta_3}$ -yakınsaktır.

Her  $z \in X$  için

$$\begin{aligned} & \lim_{nop} \frac{1}{h_{nop}} \left| \left\{ (j, k, l) \in I_{nop} : A_{\|x_{jkl}-0, z\|_G}(\xi) \geq \varepsilon \right\} \right| \\ &= 3 \lim_{nop} \frac{1}{3^{nop}} \left| \left\{ j \in (3^{n-1}, 3^n], k \in (3^{o-1}, 3^o], l \in (3^{p-1}, 3^p] : A_{\|x_{jkl}-0, z\|_G}(\xi) \geq \varepsilon \right\} \right| \\ &\leq 3 \lim_{nop} \frac{1}{3^{nop}} \left| \left\{ j \leq 3^n, k \leq 3^o, l \leq 3^p : A_{\|x_{jkl}-0, z\|_G}(\varepsilon) \geq \varepsilon \right\} \right| \\ &\leq 3 \lim_{nop} \frac{\lceil \sqrt{nop} \rceil}{nop} = 0 \end{aligned}$$

“ $\leq p$ ” için en büyük tam sayı  $\lceil p \rceil$  ile gösterilir.

Dolayısıyla  $x_{jki} \rightarrow \mathbf{0}\{S_{\theta_3}(G2)\}$  sonucuna ulaşılır.

**Örnek 4.5.**  $X = \mathbb{R}, \| \cdot \|_G$  herhangi bir  $R \in \mathbb{R}$  için  $A_{\|\mathbb{R}\|_G} = e^\xi |R|$  olarak tanımlanan norm olsun. Örnek 4.4’te tanımlanan  $\theta_3 = \{\theta_{nop}\}$  üç indisli dizisi düşünüldüğünde, o halde  $x_{jkl} = j^2 k^2 l^2$  olarak tanımlanan  $x_{jkl} = j^2 k^2 l^2, S_{\theta_3}(G2)$ -yakınsak değildir.

Mantıksal Gerekçe: Her  $R \in \mathbb{R}$  için  $R \leq 0$  veya  $R > 0$  alınsın. Bu şartların sağlandığı tüm durumlarda,  $x$  dizisi  $R$  ye  $S_{\theta_3}(G2)$ -yakınsak olmayacaktır.

**Durum 4.I.**  $R \leq 0$  olduğunda,  $\varepsilon = \frac{1}{2} e^\xi$  olsun. Buna göre tüm  $z \in X$  için şunu elde ederiz:

$$\begin{aligned} & \lim_{nop} \frac{1}{h_{nop}} \left| \left\{ (j, k, l) \in I_{nop} : A_{\|x_{jkl}-R, z\|_G}(\xi) \geq \varepsilon \right\} \right| \\ & \lim_{nop} \frac{3}{nop} \left| \left\{ j \in (3^{n-1}, 3^n], k \in (3^{o-1}, 3^o], l \in (3^{p-1}, 3^p] : A_{\|j^2 k^2 l^2 - R, z\|_G}(\xi) \geq \frac{1}{2} e^\xi \right\} \right| = 1 \end{aligned}$$

**Durum 4.II.** Eğer  $R > 0$  ise, o halde  $x_{j_0 k_0 l_0 - 1} \leq R \leq x_{j_0 k_0 l_0}$  şeklinde  $(j_0, k_0, l_0) \in \mathbb{N}^3$  vardır.

**Alt durum 4.I.**  $0 < R < 1$ , olduğunda  $\varepsilon = \frac{e^\xi}{2} \min\{R, 1 - R\}$  olsun. Dolayısıyla, aşağıdaki eşitlik tüm  $z \in X$  için kolaylıkla gösterilebilir:

$$\lim_{nop} \frac{1}{h_{nop}} \left| \left\{ (j, k, l) \in I_{nop} : A_{\|x_{jkl} - R, z\|_G}(\xi) \geq \varepsilon \right\} \right| = 1$$

**Alt durum 4.II.**  $R \geq 1$  ise, o halde  $\varepsilon = \frac{e^\xi}{2} \min\{R - x_{j_0 k_0 l_0 - 1}, x_{j_0 k_0 l_0} - R\}$  seçilirse, dolayısıyla aşağıdaki eşitliği tüm  $z \in X$  için göstermek kolaydır:

$$\lim_{nop} \frac{1}{h_{nop}} \left| \left\{ (j, k, l) \in I_{nop} : A_{\|x_{jkl} - R, z\|_G}(\xi) \geq \varepsilon \right\} \right| = 1.$$

**Tanım 4.6.** Yeni dizi uzayları olan  $|\sigma_{1,1,1}(G2)|$  ve  $N_{\theta_3}(G2)$  aşağıdaki gibi tanımlanır:

Tüm  $z \in X$  için,

$$|\sigma_{1,1,1}(G2)| = \left\{ \{x_{jkl}\} : \text{bazı } R \in X \text{ ve } \forall \xi \in (0,1] \text{ için, } \lim_{nop} \frac{1}{nop} \left( \sum_{j,k,1=1,1,1}^{n,o,p} A_{\|x_{jkl} - R, z\|_G}(\xi) \right) = 0 \right\}$$

ve

$$N_{\theta_3}(G2) = \left\{ \{x_{jkl}\} : \text{bazı } R \in X \text{ ve } \forall \xi \in (0,1] \text{ için, } \lim_{nop} \frac{1}{h_{nop}} \left( \sum_{(j,k,l) \in I_n} A_{\|x_{jkl} - R, z\|_G}(\xi) \right) = 0 \right\}$$

**Teorem 4.7.** Aşağıdakiler geçerlidir:

- i. Eğer  $x_{jki} \rightarrow R\{N_{\theta_3}(G2)\}$  ise o halde  $x_{jkl} \rightarrow R\{S_{\theta_3}(G2)\}$  olur; ancak tersi doğru değildir.
- ii. Eğer  $\{x_{jkl}\}$  kademeli sınırlıysa, (i) nin tersi geçerlidir.

**İspat.**

- i.  $\varepsilon > 0$  keyfi seçilmiş bir değer ve  $x_{jkl} \rightarrow R\{N_{\theta_3}(G2)\}$  olduğu varsayalım. Bu durumda tüm  $z \in X$  için aşağıdakiler yazılır:

$$\begin{aligned} \sum_{(j,k,l) \in I_{nop}} A_{\|x_{jkl}-R,z\|_G}(\xi) &\geq \sum_{\substack{(j,k,l) \in I_{nop} \\ A_{\|x_{jkl}-R,z\|_G}(\xi) \geq \varepsilon}} A_{\|x_{jkl}-R,z\|_G}(\xi) \\ &\geq \varepsilon \left| \left\{ (j,k,l) \in I_{nop} : A_{\|x_{jkl}-R,z\|_G}(\xi) \geq \varepsilon \right\} \right| \end{aligned}$$

Daha sonra kademeli 2-normlu uzayı  $(\mathbb{R}^m, \|\cdot, \cdot\|_G)$  olduğunu dikkate alarak karşı bir örnek oluşturulur. Burada Örnek 2.4.8'deki gibi tanımlanan  $\|\cdot, \cdot\|_G$  2-normdur.

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & \left\lfloor \sqrt[3]{h_{nop}} \right\rfloor & 0 & \cdots \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & \left\lfloor \sqrt[3]{h_{nop}} \right\rfloor & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2 & \left\lfloor \sqrt[3]{h_{nop}} \right\rfloor & \cdots & \cdots & \left\lfloor \sqrt[3]{h_{nop}} \right\rfloor & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

$\theta_3$  verilsin (Savaş ve Patterson, 2006).

O halde, herhangi bir  $\varepsilon > 0$  ile tüm  $z \in X$  için  $0 < \varepsilon e^\xi \leq 1$  vardır.

$$\lim_{nop} \frac{1}{h_{nop}} \left| \left\{ (j,k,l) \in I_{nop} : A_{\|x_{jkl}-0,z\|_G}(\xi) \geq \varepsilon \right\} \right| = \lim_{nop} \frac{\left\lfloor \sqrt[3]{h_{nop}} \right\rfloor}{h_{nop}} = 0$$

O halde,  $x_{jkl} \rightarrow \mathbf{0}\{S_{\theta_3}(G2)\}$ . Ve eşitliğin diğer tarafında, tüm  $z \in X$  için,

$$\begin{aligned} &\lim_{nop} \frac{1}{h_{nop}} \left( \sum_{(j,k,l) \in I_{nop}} A_{\|x_{jkl}-0,z\|_G}(\xi) \right) \\ &= \lim_{nop} \frac{\left\lfloor \sqrt[3]{h_{nop}} \right\rfloor \left( \left\lfloor \sqrt[3]{h_{nop}} \right\rfloor \left( \left\lfloor \sqrt[3]{h_{nop}} \right\rfloor + 1 \right) \right)}{2h_{nop}} = \frac{1}{2} \neq 0 \end{aligned}$$

dolayısıyla  $x_{jkl} \not\rightarrow \mathbf{0}\{S_{\theta_3}(G2)\}$ .

ii.  $x_{jkl} \rightarrow R\{S_{\theta_3}(G2)\}$  ve  $x$ 'in kademeli sınırlı olduğunu varsayalım.  $x$  kademeli sınırlı olduğundan tüm  $z \in X$  and  $(j,k,l) \in \mathbb{N}^3$  için  $A_{\|x_{jkl}-R,z\|_G} \leq B$  koşulunu sağlayan pozitif bir  $B = B(\xi) > 0$  sabitinin mevcut olduğu anlamına gelir. Bu durumda  $\varepsilon > 0$  için aşağıdaki eşitlik elde edilir:

Tüm  $z \in X$  için,

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_{nop}} \left( \sum_{(j,k,l) \in I_{nop}} A_{\|x_{jkl}-R,z\|_G}(\xi) \right) &= \frac{1}{h_{nop}} \left( \sum_{\substack{(j,k,l) \in I_{nop} \\ A_{\|x_{jkl}-R,z\|_G}(\xi) \geq \varepsilon}} A_{\|x_{jkl}-R,z\|_G}(\xi) \right) \\ &+ \frac{1}{h_{nop}} \left( \sum_{\substack{(j,k,l) \in I_{nop} \\ A_{\|x_{jkl}-R,z\|_G}(\xi) < \varepsilon}} A_{\|x_{jkl}-R,z\|_G}(\xi) \right) \\ &\leq \frac{B}{h_{nop}} \left| \left\{ (j, k, l) \in I : A_{\|x_{jkl}-R,z\|_G}(\xi) \geq \varepsilon \right\} \right| + \varepsilon \end{aligned}$$

bu da sonuç olarak  $x_{jkl} \rightarrow R\{N_{\theta_3}(G2)\}$  olduğunu ifade eder.

**Teorem 4.8.** Belirli bir  $\theta_3$  için  $x_{jkl} \rightarrow R_1\{S_{\theta_3}(G2)\}$  ise bu durumda tek bir  $R_1$  vardır.

**İspat.**  $X$  içerisinde  $x_{jkl} \rightarrow R_1\{S_{\theta_3}(G2)\}$  ve  $x_{jkl} \rightarrow R_2\{S_{\theta_3}(G2)\}$  ( $R_1 \neq R_2$ ) olduğu varsayalım. Buna uyarak tüm  $\xi \in (0,1]$ ,  $\varepsilon > 0$  ve  $z \in X$  için,

$$\lim_{nop} \frac{1}{h_{nop}} \left| \left\{ (j, k, l) \in I_{nop} : A_{\|x_{jkl}-R_1,z\|_G}(\xi) \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

ve

$$\lim_{nop} \frac{1}{h_{nop}} \left| \left\{ (j, k, l) \in I_{nop} : A_{\|x_{jkl}-R_2,z\|_G}(\xi) \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

olur. Bu nedenle,

$$\begin{aligned} M &= \left\{ (j, k, l) \in I_{nop} : A_{\|x_{jkl}-R_1,z\|_G}(\xi) < \varepsilon \right\} \cap \left\{ (j, k, l) \in I_{nop} : A_{\|x_{jkl}-R_2,z\|_G}(\xi) < \varepsilon \right\} \\ &\neq \emptyset. \end{aligned}$$

$\varepsilon = A_{\|\frac{R_1-R_2}{2},z\|_G}(\xi)$  seçilirse bu durumda  $r, s, t \in M$  ve tüm  $z \in X$  için

$$2\varepsilon = A_{\|R_1 - R_2, z\|_G}(\xi) \leq A_{\|x_{rst} - R_1, z\|_G}(\xi) + A_{\|x_{rst} - R_2, z\|_G}(\xi) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

gibi çelişkili bir durum ortaya çıkar. Bu yüzden  $R_1 = R_2$  olmak zorundadır.

**Teorem 4.9.**  $(X, \|\cdot, \cdot\|_G)$  kademeli 2-normlu lineer uzay içerisinde  $\{x_{jkl}\}$  üç indisli bir dizi ve  $\{y_{jkl}\}$  diğer üç indisli dizi olsun. Eğer  $x_{jkl} \rightarrow R_1\{N_{\theta_2}(G_2)\}$  ve  $y_{jkl} \rightarrow R_2\{N_{\theta_2}(G_2)\}$  ise bu durumda

- i.  $x_{jkl} + y_{jkl} \rightarrow (R_1 + R_2)\{S_{\theta_3}(G_2)\}$  ve
- ii. Herhangi bir  $c \in \mathbb{R}$  için,  $cx_{jkl} \rightarrow cR_1\{S_{\theta_3}(G_2)\}$ .

**İspat.**

- i.  $x_{jkl} \rightarrow R_1\{S_{\theta_3}(G_2)\}$  ve  $y_{jkl} \rightarrow R_2\{S_{\theta_3}(G_2)\}$  olduğunda, her  $\xi \in (0, 1]$  ve  $\varepsilon > 0$  için

$$\lim_{nop} \frac{1}{h_{nop}} |C_1| = 0 \text{ ve } \lim_{nop} \frac{1}{h_{nop}} |C_2| = 0 \quad (4.2)$$

burada

$$C_1 = \left\{ (j, k, l) \in I_{nop} : A_{\|x_{jkl} - R_1, z\|_G}(\xi) \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\}$$

ve

$$C_2 = \left\{ (j, k, l) \in I_{nop} : A_{\|y_{jkl} - R_2, z\|_G}(\xi) \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\}, z \in X.$$

Şimdi aşağıdaki dahil edilirse

$$\left\{ (j, k, l) \in I_{nop} : A_{\|x_{jkl} + y_{jkl} - R_1 - R_2, z\|_G}(\xi) \geq \varepsilon \right\} \subseteq C_1 \cup C_2$$

elde edilir.

$$\frac{1}{h_{nop}} \left| \left\{ (j, k, l) \in I_{nop} : A_{\|x_{jkl} + y_{jkl} - R_1 - R_2, z\|_G}(\xi) \geq \varepsilon \right\} \right| \leq \frac{1}{h_{nop}} |C_1| + \frac{1}{h_{nop}} |C_2|$$

ve (4.2) den dolayı

$$\lim_{nop} \frac{1}{h_{nop}} \left| \left\{ (j, k, l) \in I_{nop} : A_{\|x_{jkl} + y_{jkl} - R_1 - R_2, z\|_G}(\xi) \geq \varepsilon \right\} \right| = 0, z \in X$$

ve böylece ispat tamamlanmış olur.

ii. İspatı kolay olduğu için bu kısım atlanmıştır.

Aşağıdaki yardımcı teoremlerde  $\theta_3$  üzerindeki belirli kısıtlılıklara tabi olarak  $S(G2)$  ve  $S_{\theta_2}(G2)$  kümeleri arasındaki ilişkilerin içerikleri incelenecektir.

$q_{nop} = q_n q_o q_p$  eşitliği kullanılacaktır.

**Yardımcı Teorem 4.10.**  $S(G2) - \lim x_{jkl} = R$  eşitliğinin  $S_{\theta_3}(G2) - \lim x_{jkl} = R$  olması için gerek ve yeter koşul  $\lim inf_{nop} q_{nop} > 1$  olmasıdır.

Bunun yanı sıra,  $\lim inf_{nop} q_{nop} = 1$  ise, bu durumda  $S(G2)$ -yakınsak olan fakat herhangi bir limite  $S_{\theta_3}(G2)$  -yakınsak olmayan bir üç indisli dizi mevcuttur.

**İspat.**  $\lim inf_{nop} q_{nop} > 1$  olarak alınsın. Yeterince büyük  $n, o, p$  koşulu altında  $q_n > 1 + v$ ,  $q_o > 1 + v$  ve  $q_p > 1 + v$  koşullarını sağlayan bir  $v > 0$  mevcuttur. Bu da,  $\left(\frac{j_n}{h_n}\right) \leq \frac{1+v}{v}$ ,  $\left(\frac{k_o}{h_o}\right) \leq \frac{1+v}{v}$  ve  $\left(\frac{l_p}{h_p}\right) \leq \frac{1+v}{v}$  anlamına gelir. Şimdi  $S(G2) - \lim x_{jkl} = R$  olduğundan, herhangi bir  $\varepsilon > 0$  ve yeterince büyük  $n, o, p$  için aşağıdaki eşitsizlik tüm  $z \in X$  için  $S_{\theta_3}(G2) - \lim x_{jkl} = R$  yi verir.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h_{nop}} \left| \left\{ (j, k, l) \in I_{nop} : A_{\|x_{jkl}-R, z\|_G}(\xi) \geq \varepsilon \right\} \right| \\ &= \frac{k_{nop}}{h_{nop} k_{nop}} \left| \left\{ (j, k, l) \in I : A_{\|x_{jkl}-R, z\|_G}(\xi) \geq \varepsilon \right\} \right| \\ &\leq \left(\frac{1+v}{v}\right)^3 \frac{1}{k_{nop}} \left| \left\{ j \leq j_n, k \leq k_o, l \leq l_p : A_{\|x_{jkl}-R, z\|_G}(\xi) \geq \varepsilon \right\} \right| \end{aligned}$$

Bunun tersi için,  $\lim inf_{nop} q_{nop} = 1$  olduğu varsayılınsın.  $S(G2)$  -yakınsak ama herhangi bir  $S_{\theta_3}(G2)$  -yakınsak olmayan üç indisli bir dizi oluşturulsun. Devam edilirse  $\theta_3$  lacunary üç indisli dizisinin aşağıdakileri sağlayan  $(k_{n_a o_b p_c})$  üç indisli alt dizisi seçilebilir:

$$\left(\frac{j_{n_a-1}}{j_{n_a}}\right) > \frac{a}{(a+1)} \text{ ve } \left(\frac{j_{n_a-1}}{j_{n_{(a-1)}}}\right) > a \text{ burada } n_a - n_{(a-1)} \geq 2;$$

$$\left(\frac{k_{a_b-1}}{k_{a_b}}\right) > \frac{b}{(b+1)} \text{ ve } \left(\frac{k_{a_0-1}}{k_{c_{(b-1)}}}\right) > b \text{ burada } o_b - q_{(b-1)} \geq 2;$$

$$\left(\frac{l_{p_c-1}}{l_{p_c}}\right) > \frac{c}{(c+1)} \text{ ve } \left(\frac{l_{p_c-1}}{l_{p_{c-1}}}\right) > c \text{ burada } p_c - p_{(c-1)} \geq 2.$$

Aşağıda  $(\mathbb{R}^m, \|\cdot, \cdot\|_G)$  içerisinde kademeli olarak sınırlı üç indisli bir  $x$  dizisinin nasıl tanımlandığı gösterilmektedir (burada Örnek 2.4.8'de açıklamasına benzer olarak  $\|\cdot, \cdot\|_G$  2-normdur):

$$x_{jkl} = \begin{cases} (0,0, \dots, 0,1), & (j, k, l) \in I_{n_a o_b p_c}; a, b, c = 1, 2, \dots \\ \mathbf{0}, & \text{diğer durumlar} \end{cases}.$$

O halde, her  $R \in \mathbb{R}^m$ , için aşağıdakiler elde edilir:

Tüm  $z \in X$  ve  $n \neq n_a, o \neq o_b, p \neq p_c$  için

$$\left(\frac{1}{h_{n_a o_b p_c}}\right) \left( \sum_{(j,k,l) \in I_{n_a o_b p_c}} A_{\|x_{jkl}-R, z\|_G}(\xi) \right) = A_{\|(0,0,\dots,0,1)-R, z\|_G}(\xi); a, b, c = 1, 2, \dots$$

ve

$$\left(\frac{1}{h_{n_a o_b p_c}}\right) \left( \sum_{(j,k,l) \in I_{n_a o_b p_c}} A_{\|x_{jkl}-R, z\|_G}(\xi) \right) = A_{\|R, z\|_G}(\xi)$$

bu da aşağıdaki sonucu verir:

Tüm  $z \in X$  için

$$\lim_{nop} \left(\frac{1}{h_{nop}}\right) \left| \left\{ (j, k, l) \in I_{nop} : A_{\|x_{jkl}-R, z\|_G}(\xi) \geq \varepsilon \right\} \right| \neq 0,$$

yani  $x_{jkl} \not\rightarrow R \{S_{\theta_3}(G2)\}$ .

Ancak  $\{x_{jkl}\}$  dizisi  $S(G2)$ -yakınsaktır, çünkü  $\alpha, \beta, \gamma$  yeterince büyük herhangi bir tamsayıya sadece  $a, b$  ve  $c$   $j_{n_a-1} < \alpha \leq j_{n_a}, k_{o_b-1} < \beta \leq k_{o_b}, l_{p_c-1} < \gamma \leq l_{p_c}$  de yerine konulursa tüm  $z \in X$  için  $\alpha, \beta, \gamma \rightarrow \infty$  iken

$$\frac{1}{\alpha\beta\gamma} \left( \sum_{j=1, k=1, l=1}^{\alpha, \beta, \gamma} A_{\|x_{jkl}, z\|_G}(\xi) \right) \leq \left( \frac{(j_{n_a-1} k_{o_b-1} l_{p_c-1} + h_{n_a o_b p_c})}{(j_{n_a-1} k_{o_b-1} l_{p_c-1})} \right) < \frac{2}{abc}$$

$a, b, c \rightarrow \infty$  olduğu sonucu çıkar.

Dolayısıyla  $\{x_{jkl}\} \in |\sigma_{1,1,1}(G2)|^0$ . Bu yüzden  $\{x_{jkl}\}$  dizisinin  $S(G2)$  –yakınsak olduğu gösterilebilir.

**Yardımcı Teorem 4.11.**  $S(G2) - \lim x_{jkl} = R$  olması için gerek ve yeter koşul  $\limsup_{nop} q_{nop} < \infty$  olup  $S_{\theta_3}(G2) - \lim x_{jkl} = R$  olduğu anlamına gelir. Ayrıca,  $\limsup_{nop} q_{nop} = \infty$  ise,  $S_{\theta_3}(G2)$ -yakınsaktır fakat herhangi bir limite  $S(G2)$ -yakınsak olmayan  $\{x_{jkl}\}$  üç indisli dizisi vardır.

**İspat.** İlk olarak  $S_{\theta_3}(G2) - \lim x_{jkl} = R$  ile  $\limsup_{nop} q_{nop} < \infty$  olduğunu varsayalım.

Böylece herhangi bir  $n_0, o_0, p_0 \in \mathbb{N}$  i için  $q_{nop} < B$  ( $\infty > B > 0$ ).  $N_{nop}$ , tüm  $z \in X$  için

$$\{(j, k, l) \in I_{nop} : A_{\|x_{jkl}-R, z\|_G}(\xi) \geq \varepsilon\}$$

kümesinin kardinal sayısını gösterebilirsin. O halde, varsayıma göre belli bir  $\eta > 0$ , için  $\forall n \geq$

$n_0, o \geq o_0, p \geq p_0; \left(\frac{N_{nop}}{h_{nop}}\right) < \eta$  olacak biçimde  $n_0, o_0, p_0 \in \mathbb{N}$  vardır.  $M =$

$\max\{N_{nop} : 1 \leq n \leq n_0, 1 \leq o \leq o_0, 1 \leq p \leq p_0\}$  olsun ve  $\alpha, \beta, \gamma, j_{(n-1)} < \alpha <$

$j_n, k_{(o-1)} < \beta < k_o, l_{(p-1)} < \gamma < l_p$  koşullarını sağlayan üç tamsayı olsun. Bu durumda

tüm  $z \in X$  için aşağıdakiler elde edilir:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\alpha\beta\gamma}\right) \left| \{j \leq \alpha, k \leq \beta, l \leq \gamma : A_{\|x_{jkl}-R, z\|_G}(\xi) \geq \varepsilon\} \right| \\ & \leq \left(\frac{1}{(j_{(n-1)} k_{(o-1)} l_{(p-1)})}\right) \left| \{j \leq j_n, k \leq k_o, l \leq l_p : A_{\|x_{jkl}-R, z\|_G}(\xi) \geq \varepsilon\} \right| \\ & = \left(\frac{1}{(j_{(n-1)} k_{(o-1)} l_{(p-1)})}\right) \{N_{111} + N_{222} + \dots + N_{n_0 o_0 p_0} + N_{n_0+1 o_0+1 p_0+1} + \dots + N_{nop}\} \\ & \leq \left(\frac{M}{(j_{(n-1)} k_{(o-1)} l_{(p-1)})}\right) n_0 o_0 p_0 + \left(\frac{1}{(j_{(n-1)} k_{(o-1)} l_{(p-1)})}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ \frac{(h_{n_0+1o_0+1p_0+1}N_{n_0+1o_0+1p_0+1})}{h_{n_0+1o_0+1p_0+1}} + \dots + \frac{(h_{nop}N_{nop})}{h_{nop}} \right\} \\
& \leq \left( \frac{n_0o_0p_0M}{j_{(n-1)k_{(o-1)l_{(p-1)}}}} \right) + \frac{1}{j_{(n-1)k_{(o-1)l_{(p-1)}}} \sup_{n>n_0, o>o_0, p>p_0}} \\
& \left( \frac{N_{nop}}{h_{nop}} \right) \{h_{n_0+1o_0+1p_0+1} + \dots + h_{nop}\} \\
& \leq \left( \frac{(n_0o_0p_0M)}{(j_{(n-1)k_{(o-1)l_{(p-1)}}})} \right) + \frac{\eta(j_n k_o l_p - j_{n_0} k_{o_0} l_{p_0})}{(j_{(n-1)k_{(o-1)l_{(p-1)}}})} \\
& \leq \frac{(n_0o_0p_0M)}{(j_{(n-1)k_{(o-1)l_{(p-1)}}})} + \eta q_{nop} \\
& \leq \frac{(n_0o_0p_0M)}{(j_{(n-1)k_{(o-1)l_{(p-1)}}})} + \eta B
\end{aligned}$$

Buradan  $S(G2) - \lim x_{jkl} = R$  sonucuna ulaşılır.

Bunun tersi durumda,  $\limsup_{nop} q_{nop} = \infty$  olduğu varsayılısın. Şimdi  $S_{\theta_3}(G2)$ -yakınsak değil de herhangi bir limite  $S(G2)$ -yakınsak olmayan üçlü dizisiyle başlansın.  $\theta_3$  üç indisli lacunary dizisinin  $\{j_{n_a} k_{o_b} l_{p_c}\}$  üç indisli alt dizisi  $q_{n_a o_b p_c} > abc$  olacak şekilde oluşturulsun. Şimdi artık  $(\mathbb{R}^m, \|\cdot, \cdot\|_G)$  kademeli sınırlı  $\{x_{jkl}\}$  üç indisli dizi aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$x_{jkl} = \begin{cases} ((0,0, \dots, 0, 1) & j_{n_a-1} < j < 2j_{n_a-1}, \quad k_{o_b-1} < k < 2k_{o_b-1} \\ & l_{p_c-1} < l < 2l_{p_c-1}; \quad a, b, c = 1, 2, \dots \\ 0, & \text{diğer halde} \end{cases}$$

$x \in N_{\theta_3}(G2)$  ancak  $x \notin |\sigma_1(G2)|$  olduğu gösterilebilir. Dolayısıyla  $x$ 'in  $S_{\theta_3}(G2)$ -yakınsak olduğu ortaya çıkar. Fakat  $x$ 'in  $S(G2)$ -yakınsak olmadığı kolayca gösterilebilir.

Yukarıda bahsedilen iki yardımcı önerme birleştirildiğinde aşağıdaki teoreme ulaşılabilir:

**Teorem 4.12.**

$$S(G2) - \lim x_{jkl} = S_{\theta_3}(G2) - \lim x_{jkl}$$

olması için gerek ve yeter koşul

$$1 \leq \liminf_{nop} q_{nop} \leq \limsup_{nop} q_{nop} < \infty$$

olmasıdır.

**Tanım 4.13.**  $\theta_3 = \{j_n k_o l_p\}$  üç indisli lacunary dizi olsun. Dolayısıyla, eğer  $x$  dizisinin  $\{x_{j'(n)k'(o)l'(p)}\}$  şeklinde bir üç indisli alt dizisi mevcut ve

- i. Herhangi bir,  $n, o, p$  için  $(j'(n), k'(o), l'(p)) \in I_{nop}$ ;
- ii. Bazı  $R \in X$ ,  $\{x_{j'(n)k'(o)l'(p)}\}$  dizisi kademeli olarak  $R$  ( $n, o, p \rightarrow \infty$ ) ya yakınsar;
- iii. Herhangi bir  $\varepsilon > 0, \xi \in (0,1]$  ve  $z \in X$  için

$$\lim_{nop} \frac{1}{h_{nop}} \left| \left\{ (j, k, l) \in I_{nop} : A_{\|x_{jkl} - x_{j'(n)k'(o)l'(p)}\|_G}(\xi) \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

oluyorsa,  $x$  dizisinin kademeli lacunary istatistiksel Cauchy olduğu söylenir (kısaca  $S_{\theta_3}(G2)$  –Cauchy).

**Teorem 4.14.**  $x$  dizisinin  $S_{\theta_3}(G2)$ -yakınsak olması için gerek ve yeter koşul  $S_{\theta_3}(G2)$ -Cauchy olmasıdır.

**İspat.** Her  $e \in \mathbb{N}$  için,  $x_{jkl} \rightarrow R\{S_{\theta_3}(G2)\}$  ve

$$K(\xi, e) = \left\{ (j, k, l) \in \mathbb{N}^3 : A_{\|x_{jkl} - R, z\|_G}(\xi) < \frac{1}{e} \right\}$$

olduğu varsayalım. Dolayısıyla, herhangi bir  $e \in \mathbb{N}$  için  $K(\xi, e) \supseteq K(\xi, e + 1)$  sağlanır

ve  $\lim_{nop} \frac{|K(\xi, e) \cap I_{nop}|}{h_{nop}} = 1$  elde edilir.  $n \geq s_1, o \geq t_1, p \geq w_1$  olacak şekilde  $s_1, t_1, w_1$

seçilmesi,  $\frac{|K(\xi, e) \cap I_{nop}|}{h_{nop}} > 0$  anlamına gelir yani,  $K(\xi, 1) \cap I_{nop} \neq \emptyset$ .

Ardından  $s_2 > s_1, t_2 > t_1, w_2 > w_1$ ,  $n \geq s_2, o \geq t_2, p \geq w_2$  koşullarını sağlayacak şekilde seçilir bu da  $K(\xi, 2) \cap I_{nop} \neq \emptyset$  anlamına gelir. Daha sonra,  $s_1 < n \leq s_2, t_1 < o \leq t_2, w_1 < p \leq w_2$  koşullarını her bir  $n, o, p$  için sağlayan  $(j'(n), k'(o), l'(p)) \in I_{nop} \cap K(\xi, 1)$  olacak şekilde  $(j'(n), k'(o), l'(p)) \in I_{nop}$  seçilir. Yani tüm  $z \in X$  için

$$A_{\|x_{j'(n)k'(o)l'(p)} - R, z\|_G}(\xi) < 1$$

olur. Bu şekilde devam edildiğinde  $n > s_{(e+1)}, o > t_{(e+1)}, p > w_{(e+1)}$  olacak şekilde  $s_{(e+1)} > s_e, t_{(e+1)} > t_e, w_{(e+1)} > w_e$  seçilebilir bu da  $K(\xi, e + 1) \cap I_{nop} \neq \emptyset$  olduğu anlamına gelir.

Dolayısıyla, tüm  $s, t, w$  için  $s_e \leq r < s_{(e+1)}, t_e \leq o < t_{(e+1)}, w_e \leq p < w_{(e+1)}$  olacak şekilde  $(j'(n), k'(o), l'(p)) \in I_{nop} \cap K(\xi, e)$  yani tüm  $z \in X$  için

$$A_{\|x_{j'(n)k'(o)l'(p)}-R,z\|_G}(\xi) < \frac{1}{e} \quad (4.3)$$

seçilir.

O halde herhangi bir  $s, t, w$  için  $(j'(n), k'(o), l'(p)) \in I_{nop}$  elde ederiz ve (4.3)  $\{x_{j'(n)k'(o)l'(p)}\}$  olduğu anlamına gelir ve  $(n, o, p \rightarrow \infty)$  kademeli olarak  $R$  ye yakınsaktır.

Buradan aşağıdakiler elde edilir:

Herhangi bir  $\xi \in (0,1], \varepsilon > 0$  ve  $z \in X$  için,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h_{nop}} \left| \left\{ (j, k, l) \in I_{nop} : A_{\|x_{jkl}-x_{j'(n)k'(o)l'(p)},z\|_G}(\xi) \geq \varepsilon \right\} \right| \\ & \leq \frac{1}{h_{nop}} \left| \left\{ (j, k, l) \in I_{nop} : A_{\|x_{jkl}-R,z\|_G}(\xi) \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\} \right|. \end{aligned}$$

Aşağıdaki varsayım kullanılarak ve yukarıda belirtilen eşitsizlikten  $x_{jkl} \rightarrow x\{S_{\theta_3}(G2)\}$  ve  $\{x_{j'(n)k'(o)l'(p)}\}$  dizisinin  $R$  'ye kademeli olarak yakınsak olduğu sonucu çıkar.

Bunun tersi için,  $\{x_{jkl}\}$  nin bir  $S_{\theta_3}$ -Cauchy dizisi olduğu varsayalım. Yani herhangi bir  $\xi \in (0,1], \varepsilon > 0$  ve  $z \in X$  için

$$\begin{aligned} & \left| \left\{ (j, k, l) \in I_{nop} : A_{\|x_{jkl}-R,z\|_G}(\xi) \geq \varepsilon \right\} \right| \\ & \leq \left| \left\{ (j, k, l) \in I_{nop} : A_{\|x_{jkl}-x_{j'(n)k'(o)l'(p)},z\|_G}(\xi) \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\} \right| \\ & \quad + \left| \left\{ (j, k, l) \in I_{nop} : A_{\|x_{j'(n)k'(o)l'(p)}-R,z\|_G}(\xi) \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\} \right| \end{aligned}$$

eşitsizliğinden  $x_{jkl} \rightarrow R\{S_{\theta_3}(G2)\}$  sonucuna ulaşılır.

## 5. SONUÇ

Bu çalışma, kademeli normlu uzaylarda üç indisli dizilerin lacunary istatistiksel yakınsaklığı konusundaki araştırmaların önemini vurgulamaktadır. Bu tür dizilerin matematiksel özelliklerini anlamak ve çeşitli uygulamalarda nasıl kullanılabileceğini belirlemek, bu alandaki çalışmaların temel amacıdır. Kademeli normlu uzaylarda üç indisli dizilerin lacunary istatistiksel yakınsaklığı üzerine yapılan çalışmaların önemi birkaç nedene dayanmaktadır. İlk olarak, bu dizilerin matematiksel yapıları ve davranışları, işlevsel analiz, olasılık teorisi ve sayısal analiz gibi pek çok alanda uygulanmaktadır. Bu nedenle, bu dizilerin yakınsaklık özelliklerini anlamak, söz konusu alanlardaki araştırmalara ve uygulamalara katkı sağlayabilir. Ayrıca, bu tür dizilerin yakınsaklık özelliklerini anlamak, genel matematik teorisine ve metodolojilere de önemli katkılarda bulunabilir.

Bu çalışmanın bulguları, gelecekteki araştırmalara ve uygulamalara yönelik birçok potansiyel açılım sunmaktadır. Örneğin, kademeli normlar yerine daha genel normlar veya metrikler tanımlayarak üç indisli dizilerin lacunary istatistiksel yakınsaklığını incelemek mümkündür. Banach uzayları veya daha genel topolojik vektör uzaylarında yapılan çalışmalar, daha geniş bir bağlamda sonuçlar elde edilmesini sağlayabilir. Hilbert uzayları, Sobolev uzayları veya Lebesgue uzayları gibi farklı fonksiyonel uzaylarda üç indisli dizilerin lacunary istatistiksel yakınsaklığını incelemek, farklı yakınsama ve konvergans kavramlarını anlamaya yardımcı olabilir.

Kademeli normlu uzaylarda, klasik istatistiksel yakınsama ve lacunary yakınsama kavramlarını genişleterek yeni yakınsama türleri tanımlanabilir. Örneğin, ağırlıklı lacunary yakınsama veya zamana bağlı yakınsama kriterleri geliştirilebilir. Birden fazla yakınsama kriterini bir arada kullanarak daha güçlü sonuçlar elde etmek de mümkündür. Bu şekilde, bir dizinin hem klasik hem de lacunary anlamda yakınsadığı durumlar daha derinlemesine incelenebilir. Lacunary istatistiksel yakınsama analizinde, istatistiksel dağılımları ve olasılık teorisini kullanarak daha ayrıntılı sonuçlar elde edilebilir. Özellikle üç indisli dizilerin belirli alt dizilerinin davranışlarını anlamak için bu yaklaşım faydalı olabilir. Ayrıca, Monte Carlo simülasyonları gibi istatistiksel yöntemler kullanılarak teorik sonuçların pratikte nasıl uygulanabileceği test edilebilir.

Son olarak, kademeli normlu uzaylarda üç indisli dizilerin lacunary istatistiksel yakınsaklığını incelemek için numerik analiz ve hesaplama yöntemleri kullanılabilir. Bu yöntemler, özellikle karmaşık dizilerin ve serilerin davranışlarını anlamada önemli bir rol

oyunlar. Lacunary dizilerin genelleştirilmiş versiyonları üzerinde çalışarak, farklı türde yakınsama ve konvergens kavramlarının geliştirilmesine katkı sağlanabilir.

Bu çalışmada belirtilen yöntemler ve teknikler, kademeli normlu uzaylarda üç indisli dizilerin lacunary istatistiksel yakınsaklığı üzerine yapılan araştırmalarda hem teorik hem de uygulamalı bilimlerde yeni buluşların elde edilmesine olanak tanıyabilir. Bu alanda yapılacak çalışmalar, matematiksel analiz, veri bilimi, mühendislik gibi birçok alanda önemli ilerlemelere yol açabilir.



## KAYNAKLAR

- Açık, I. (2007). *2-Banach uzayları. (Yüksek Lisans Tezi)*. Süleyman Demirel Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Isparta.
- Aiche, F., ve Dubois, F. (2012). Possibility and gradual number approaches to ranking methods for random fuzzy intervals. *Communications in Computer Information Science*, 299, 9-18.
- Alotaibi, A., ve Alroqi, A. M. (2012). Statistical convergence in a paranormed space. *Journal of Inequalities and Applications*, 2012(1), 1-6.
- Altay, A., ve Başar, F. (2005). Some new spaces of double sequences. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 309(1), 70-90.
- Balcerzak, M., Dems, K., ve Komisarski, A. (2007), Statistical convergence and ideal convergence for sequences of functions, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 328, 715-729.
- Balcı, M. (2010). *Matematik analiz-1*. Ankara: Balcı Yayınları.
- Başar, F. (2012). *Summability theory and its applications*. İstanbul: Bentham Science Publishers.
- Başarır, M. (1992). On some new sequence spaces. *Rivista di Matematica della Università di Parma*, 51, 339-347.
- Başarır, M., Konca, Ş., ve Kara, E. E. (2013). Some generalized difference statistically convergent sequence spaces in 2-normed space. *Journal of Inequalities and Applications*, 2013(177) 1-12.
- Bayraktar, M. (2006). *Fonksiyonel analiz*. Ankara: Gazi Kitabevi.
- Belen, C., ve Mohiuddine, S. A. (2013). Generalized weighted statistical convergence and application. *Applied Mathematics and Computation*, 219, 9821-9826.
- Bromwich, T. J. (1965). *An introduction to the theory of infinite series*. New York: Macmillan and Company Limited.
- Buck, R. C. (1953). Generalized asymptotic density. *American Journal of Mathematics*, 75, 335-346.
- Choudhary, B., ve Nanda, S. (1989). *Functional analysis with applications*. New York: John Wiley-Sons.

- Choudhury, C., ve Debnath, S.(2022). On lacunary statistical convergence of sequences in gradual normed linear spaces. *Annals of the University of Craiova, Mathematics and Computer Science Series*, 49(1), 110-119.
- Choudhury, C., ve Debnath, S.(2021). On I-convergence of sequences in gradual normed linear spaces. *Facta Universitatis Series: Mathematics Informatics*, 36(3), 595-604.
- Connor, J, S. (1988). The statistical and strong  $p$ -cesàro convergence of sequences. *Analysis*, 8, 47-63.
- Das, G., ve Mishra, S. K. (1983). Banach limits and lacunary strong almost convergence, *Journal of Orissa Mathematical Society*, 2(2), 61-70.
- Das, G., ve Patel, B. K. (1989). Lacunary distribution of sequences. *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 20(1), 64-74.
- Das, G., ve Sahoo, S. K. (1992). On some sequence spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 164, 381-398.
- Das, B., Tripathy, B. C., Debnath, P., ve Bhattacharya, B. (2020). Characterization of statistical convergence of complex uncertain double sequence. *Analysis and Mathematical Physics*, 10(4), 1-20.
- Das, B., Tripathy, B. C., Debnath, P., ve Bhattacharya, B. (2021). Almost convergence of complex uncertain double sequences. *Filomat*, 35(1), 61-78.
- Das, B., Tripathy, B. C., Debnath, P., ve Bhattacharya, B. (2021). Study of matrix transformation of uniformly almost surely convergent complex uncertain sequences. *Filomat*, 34(14), 4907-4922.
- Das, B., Tripathy, B. C., Debnath, P., Nath, J., ve Bhattacharya, B. (2021). Almost convergence of complex uncertain triple sequences. *Proceedings of the National Academy of Sciences, India Section A: Physical Sciences*, 91(2), 245- 256.
- Das, B., Tripathy, B. C., Debnath, P., ve Bhattacharya, B. (2022). Statistical convergence of complex uncertain triple sequence. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 51(20), 7088-7100.
- Demirci, I. A., ve Gürdal, M. (2021). Lacunary statistical convergence for sets of triple sequences via Orlicz function. *Theory and Applications of Mathematics and Computer Science*, 11(1), 1-13.
- Diminnie, C., ve Gähler, S. (1978). Some geometric results concerning strictly 2-convex 2-normed spaces. *Mathematics Seminar Notes, Kobe University*, 6, 245-253.
- Diminnie, C., Gähler, S., ve White, A. (1974). Remarks on generalizations of 2-inner products. *Mathematische Nachrichten*, 74, 269-278.
- Diminnie, C., Gähler, S., ve White, A. (1974). Strictly convex linear 2-normed spaces. *Mathematische Nachrichten*, 59, 319-324.

- Diminnie, C., Gähler, S., ve White, A. (1977). 2-Inner product spaces II. *Demonstratio Mathematica*, 10, 169-188.
- Dubois, D., ve Prade, H. (2007). Gradual elements in a fuzzy set. *Soft Computing*, 12(2), 165-175.
- Duran, J. P. (1972). Infinite matrices and almost convergence. *Mathematische Zeitschrift*, 128, 75-83.
- Dutta, A. J., Esi, A., ve Tripathy, B. (2013). Statistically convergent triple sequence spaces defined by Orlicz function. *Journal of Mathematical Analysis*, 4(2), 16-22.
- Ehret, R. (1969). *Linear 2-normed spaces. (Dissertation)*. Saint Louis University.
- Esi, A. (2013). Statistical convergence of triple sequences in topological groups. *Annals of the University of Craiova-Mathematics and Computer Science Series*, 40(1), 29-33.
- Esi, A., ve Açıkgöz, M. (2013). On some double lacunary strong Zweier convergent sequence spaces, *Annals of the University of Craiova-Mathematics and Computer Science Series*, 40(2), 121-127.
- Esi, A., ve Savaş, E. (2015). On lacunary statistically convergent triple sequences in probabilistic normed space. *Applied Mathematics and Information Sciences*, 9(5), 2529-2534.
- Ettefagh, M., Azari, F. Y., ve Etemad, S. (2020). On some topological properties in gradual normed spaces. *Facta Universitatis Series: Mathematics and Informatics*, 35(3), 549-559.
- Ettefagh, M., Etemad, S., ve Azari, F. Y. (2020). Some properties of sequences in gradual normed spaces. *Asian-European Journal of Mathematics*, 13(4), 2050085.
- Fast, H. (1951). Sur la convergence statistique. *Colluquium Mathematicum*, 2, 241-244.
- Fortin, J., Dubois, D., ve Fargier, H. (2008). Gradual numbers and their application to fuzzy interval analysis, *IEEE Transactions of Fuzzy Systems*, 16(2), 388-402.
- Freedman, A. R., ve Sember, J. J. (1981). Densities and summability. *Pacific Journal Mathematics*, 95, 293-305.
- Freedman, A. R., Sember, J. J., ve Raphael, M. (1978). Some Cesàro-type summability spaces. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 3(3), 508-520.
- Freese, R. W., ve Gähler, S. (1982). Remarks on semi-2-normed spaces. *Mathematische Nachrichten*, 105(1), 151-161.
- Fridy, J. A. (1985). On statistical convergence, *Analysis*, 5, 301-313.

- Fridy, J. A. (1993). Statistical limit point. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 4, 1187-1192.
- Fridy, J. A., ve Orhan, C. (1993). Lacunary statistical summability, *Journal of Mathematical Analysis Applications*, 173(2), 497-504.
- Fridy, J. A., ve Orhan, C. (1993). Lacunary statistical convergence. *Pacific Journal of Mathematics*, 160(1), 43-51.
- Fridy, J. A., ve Orhan, C. (1997). Statistical limit superior and limit inferior. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 125(12), 3625-3631.
- Gähler, S. (1963). 2-Metrische räume und ihre topologische struktur. *Mathematische Nachrichten*, 26, 115-148.
- Gähler, S. (1964). Über der uniformisierbarkeit 2-metrische räume. *Mathematische Nachrichten*, 28, 235-244.
- Gähler, S. (1965). Linear 2-normierte räume. *Mathematische Nachrichten*, 28, 1-43.
- Gähler, S., Siddiqui, A. H., ve Gupta, S. C. (1975). Contribution to non-archimedean functional analysis. *Mathematische Nachrichten*, 69, 163-171.
- Grant, K. E. (1968). *A 2-metric lattice structure. (Doctor of philosophy)*, Saint Louis University.
- Greub, W. (1975). *Linear Algebra*. New York: Springer-Verlag.
- Gökhan, A., ve Güngör, M. (2002). On Pointwise Statistical convergence. *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 33(9), 1379-1384.
- Gökhan, A., Güngör, M., ve Et, M. (2007). Statistical convergence of double sequences of real-valued functions. *International Mathematical Forum*, 2, 365-374.
- Gunawan, H. (2001). On  $n$ -inner product,  $n$ -norms and the Cauchy-Schwartz inequality. *Scientiae Mathematicae Japonicae*, 5, 47-54.
- Gunawan, H. (2001). The space of  $p$ -summable sequences and its natural  $n$ -norm. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 64(1), 137-147.
- Gunawan, H., ve Mashadi, M. (2001). On Finite Dimensional 2-normed spaces. *Soochow Journal of Mathematics*, 27(3), 321-329.
- Gunawan, H., ve Mashadi, M. (2001). On  $n$ -normed spaces, *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 27(10), 631-639.
- Gürdal, M., ve Açık, I. (2008). On I-Cauchy sequences in 2-normed spaces. *Mathematical Inequalities. and Applications*, 11(7), 349-354.

- Gürdal, M., ve Huban. M. B. (2014). On I-convergence of double sequences in the topology induced by random 2-norms. *Matematički Vesnik*, 66(1), 73-83.
- Gürdal, M., ve Pehlivan, S. (2004). The statistical convergence in 2-Banach spaces. *Thai Journal of Mathematics*, 2(1), 107-113.
- Gürdal, M., ve Pehlivan, S. (2009). The statistical convergence in 2-normed spaces, *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, 33(2), 257-264.
- Gürdal, M., Sarı, N., ve Savaş, E. (2020). A-statistically localized sequences in n-normed spaces. *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistic*, 69(2), 1484-1497.
- Gürdal, M., ve Şahiner, A. (2008). Extremal I-limit points of double sequences. *Applied Mathematics E-Notes*, 8, 131-137.
- Gürdal, M., ve Şahiner, A. (2012). Statistical approximation with a sequence of 2-Banach spaces. *Mathematical and Computer Modelling*, 55(3-4), 471-479.
- Gürdal, M., Şahiner, A., ve Açık, I. (2009). Approximation theory in 2-Banach spaces. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 71(5), 1654-1661.
- Hardy, G. H. (1917). On the convergence of certain multiple series, *Proceedings of the London Mathematical Society*, 19, 86-95.
- Hazarika, B., Alotaibi, A., ve Mohiudine, S. A. (2020). Statistical convergence in measure for double sequences of fuzzy-valued functions, *Soft Computing*, 24(9), 6613-6622
- Hazarika, B., ve Esi, A. (2014). On fuzzy real valued asymptotically equivalent sequences and lacunary ideal convergence. *Annals of the University of Craiova, Mathematics and Computer Science Series*, 41(2), 209-225.
- Hazarika, B., ve Esi, A. (2018). Lacunary ideal quasi Cauchy sequences. *Annals of the University of Craiova, Mathematics and Computer Science Series*, 45(2), 220-231.
- Ingleton, A. W. (1952). The Hahn-Banach-theorem for non-Archimedean valued fields. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 48, 41- 45.
- İbrahim, I. S., ve Çolak, R. (2021). On strong lacunary summability of order with respect to modulus functions. *Annals of the University of Craiova, Mathematics and Computer Science Series*, 48(1), 127-136.
- Kadak, U., ve Mohiuddine, S. A. (2018). Generalized statistically almost convergence based on the difference operator which includes the  $(p, q)$ -Gamma function and related approximation theorems. *Results in Mathematics*, 73(9), 1-31.
- King, J. P. (1966). Almost summable sequences. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 17 1219-1225.

- Konca, S., ve Başarir, M. (2013). Almost convergent sequences in 2-normed space and g-statistical convergence. *Journal of Mathematical Analysis*, 4, 32-39.
- Konca, Ş., ve Başarır, M. (2013). Generalized difference sequence spaces associated with a multiplier sequence on a real  $n$ -normed space. *Journal Inequalities Applications*, 335, 1-18.
- Konca, Ş., İdris, M., ve Gunawan H. (2016). A new 2-inner product on the space of  $p$ -summable sequences. *Journal of the Egyptian Mathematical Society*, 24, 244-249.
- Kostyrko, P., Salat, T., ve Wilczynski, W. (2000). I-convergence. *Real Analysis Exchange*, 26(2), 669- 686.
- Kreyszig, E. (1989). *Introductory Functional Analysis with Applications*. Canada: John Wiley & Sons.
- Lietard, L, ve Rocacher, D. (2008). Conditions with aggregates evaluated using gradual numbers. *Control and Cybernetics*, 38(2), 395-417.
- Lindenstrauss, J., ve Tzafriri, L. (1971). On Orlicz sequence spaces. *Israel Journal of Mathematics*, 10, 379-390.
- Lorentz, G. G. (1948). A contribution to the theory of divergent sequences. *Acta Mathematica*, 80, 167-190.
- Maddox, I. J. (1970). *Elements of functional analysis*, Cambridge at the University Press.
- Maddox, I. J. (1977). *Mathematical analysis*. Institute of Physics Publishing.
- Maddox, I. J. (1978). A new type of convergence, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 83, 61-64.
- Maddox, I. J. (1979). On strong almost convergence, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 85, 345-350.
- Misiak, A. (1989).  $n$ -inner product spaces. *Mathematische Nachrichten*, 140, 299-319.
- Misiak, A. (1989). Orthogonality and orthonormality in  $n$ -inner product spaces. *Mathematische Nachrichten*, 143, 249-261.
- Mohiuddine, S, A., ve Aiyub, M. (2012). Lacunary statistical convergence in random 2-normed spaces, *Applied Mathematics and Information Sciences*, 6(3), 518-585.
- Mohiuddine, S. A., ve Alamri, B. A. S. (2019). Generalization of equi-statistical convergence via weighted lacunary sequence with associated Korovkin and Voronovskaya type approximation theorems. *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Series A Matemáticas*, 113(3), 1955-1973.

- Mohiuddine, S. A., Asiri, A., ve Hazarika, B. (2019). Weighted statistical convergence through difference operator of sequences of fuzzy numbers with application to fuzzy approximation theorems, *International Journal of General Systems*, 48(5), 492-506.
- Mohiuddine, S. A., Hazarika, B., ve Alghamdi, M. A. (2019). Ideal relatively uniform convergence with Korovkin and Voronovskaya types approximation theorems. *Filomat*, 33(14), 4549- 4560.
- Mohiuddine, S. A., Şevli, H., ve Cancan, M. (2010). Statistical convergence in fuzzy 2-normed space. *Journal Computer Analysis and Applications*, 12(4), 787-798.
- Mursaleen, M., ve Belen, C. (2014). On statistical lacunary summability of double sequences. *Filomat*, 28(2), 231-239.
- Mursaleen, M., ve Edely, O. H. H. (2003). Statistical convergence of double sequences. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 288, 223-231.
- Mursaleen, M., ve Mohiuddine, S. A. (2009). On lacunary statistical convergence with respect to the intuitionistic fuzzy normed space, *Journal of Computational Analysis and Applications*, 233(2), 142-149.
- Nabiev, A., Pehlivan, S., ve Gürdal, M. (2007). On I-Cauchy sequences, *Taiwanese Journal of Mathematics*, 11(2), 569-576.
- Niven, I., Pehlivan, S., ve Montgomery., H. L. (1991). *An introduction to the theory of numbers*. Fifth Edition, John Wiley and Sons.
- Nuray, F., Ulusu, U., ve Dündar, E. (2016). Lacunary statistical convergence of double sequences of sets. *Soft Computing*, 20(7), 2883-2888.
- Pehlivan, S., Gürdal, M., ve Fisher, B. (2006). Lacunary statistical cluster points of sequences, *Mathematical Communications*, 11(1), 39-46.
- Powell, R. R., ve Shah, S. M. (1972). *Summability theory and its applications*. London: V.N.R. Company.
- Pringsheim, A. (1897). Elementare theorie der unendliche doppelreihen. *Sitzungsberichte Akademie der Wissenschaft, Munich*, 27, 101-153.
- Pringsheim, A. (1900). Zur theorie der zweifach unendlichen Zahlenfolgen. *Mathematische Annalen*, 53, 289-321.
- Raj, K., Esi, A., ve Pandoh, S. (2019). Applications of Riesz mean and lacunary sequences to generate Banach spaces and AK-BK spaces. *Annals of the University of Craiova, Mathematics and Computer Science Series*, 46(1), 150-163.
- Raymond, W., Freese, R. W., ve Cho, J. (2001). *Geometry of linear 2-normed spaces*. NewYork: Nova Science Publishers.

- Sadeqi, I., ve Azari, F. Y. (2011). Gradual normed linear space. *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, 8(5), 131-139.
- Savaş, E., ve Debnath, S. (2019). Lacunary Statistically  $\phi$ -convergence, *Note Mathematica*, 39(2), 111-120.
- Savaş, E., ve Debnath, S. (2019). On I-statistically rough convergence, *Publications de l'Institut Mathématique*. 105(119), 145-150.
- Savaş, E., ve Gürdal, M. (2014). Generalized statistically convergent sequences of functions in fuzzy 2-normed spaces, *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, 27(4), 2067-2075.
- Savaş, E., ve Gürdal, M. (2015) A generalized statistical convergence in intuitionistic fuzzy normed spaces, *ScienceAsia*, 41(4), 289-294.
- Savaş, E., ve Gürdal, M. (2015). I-statistical convergence in probabilistic normed spaces. *University Politehnica of Bucharest Scientific Bulletin Series A Applied Mathematics and Physics*, 77(4), 195-204.
- Savaş, E., ve Patterson, R. F. (2006). Lacunary statistical convergence of multiple sequences. *Applied Mathematics Letters*, 19(6), 527-534.
- Sharma, A., ve Kumar, K. (2008). Statistical convergences in probabilistic 2-normed spaces. *Mathematical Sciences*, 2, 373-390.
- Steinhaus, H. (1951). Sur la convergence ordinaire et la convergence asymptotique. *Colloquium Mathematicum*, 2, 73-74.
- Stock, E. A. (2010). *Gradual numbers and fuzzy optimization. (Doctor of philosophy) thesis*. University of Colorado Denver, Denver, America.
- Şengül, H., ve Et, M. (2018).  $f$ -lacunary statistical convergence and strong  $f$ -lacunary summability of order. *Filomat*, 32(13), 4513-4521.
- Şahiner, A., Gürdal, M., ve Düden, F. K. (2007). Triple sequences and their statistical convergence. *Selçuk Journal Applied Mathematics*, 8(2), 49-55.
- Şahiner, A., Gürdal, M., ve Yiğit, T. (2011). Ideal convergence characterization of the completion of linear  $n$ -normed spaces. *Computers & Mathematics with Applications*, 61(3), 683-689.
- Trenogin, V. A. (1980). *Functional Analysis*. Moscow: Nauka.
- Tripathy, B. (1997). On statistically convergent and statistically bounded sequences. *Bulletin Malaysian Mathematical Sciences Society*, 20(1), 31-33.
- Tripathy, B. (1998). On statistical convergence, *Proceeding of the Estonian Academy of Sciences, Physics and Mathematics*, 47, 299-303.

Tripathy, B., ve Sen, M. (2015). On lacunary strongly almost convergent double sequences of fuzzy numbers. *Annals of the University of Craiova, Mathematics and Computer Science Series*, 42(2), 254-259.

Tuzcuođlu, İ. (2021). *Sezgisel Fuzzy n-Normlu Uzaylarda Fibonacci Lacunary İstatistiksel Yakınsaklık. (Yüksek Lisans Tezi)*. Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Bartın Üniversitesi, Bartın.

White, A., (1968). *2-Banach Spaces*. (Doktoral Dissertation). Saint Louis University.

White, A., (1969). 2-Banach Spaces. *Mathematische Nachrichten*, 42, 43-60:

Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets, *Information Control*, 8(3), 338-353.

