



T.C.

AMASYA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

OPTİK FİBERDE POLARİZASYON DÜZLEMİNİN HAREKETİNİN
GEOMETRİK YORUMLANMASI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ŞİRİN GONCA PERÇİN

AĞUSTOS

ŐIRİN GONCA PERÇİN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

AĞUSTOS 2024

**OPTİK FİBERDE POLARİZASYON DÜZLEMİNİN HAREKETİNİN
GEOMETRİK YORUMLANMASI**

Şirin Gonca PERÇİN

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

Danışman

Doç. Dr. Zehra ÖZDEMİR

**AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

AĞUSTOS 2024

Yüksek Lisans Tezi Kabul ve Onay Sayfası

Şirin Gonca PERÇİN tarafından hazırlanan “Optik Fiberde Polarizasyon Düzleminin Hareketinin Geometrik Yorumlanması” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. Zehra ÖZDEMİR

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Başkan: Prof. Dr. İsmail GÖK

Matematik Anabilim Dalı, Ankara Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Üye: Doç. Dr. Tevfik ŞAHİN

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Tez Savunma Tarihi: 24/06/2024

Juri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....
Doç. Dr. Ümit YILDIRIM
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dökümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

(İmza)

Şirin Gonca PERÇİN

(Tarih)

OPTİK FİBERDE POLARİZASYON DÜZLEMİNİN HAREKETİNİN GEOMETRİK
YORUMLANMASI
(Yüksek Lisans Tezi)

Şirin Gonca PERÇİN

AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
AĞUSTOS 2024

ÖZET

Bu tez çalışmasında, bir optik fiber ile ilişkili bir uzay eğrisi boyunca hareket eden polarize ışık dalgasının polarizasyon durumları incelenmiştir. Bu çalışmada, hareket geometrisinin temel araçlarından biri olan kuaterniyonlardan, Rodrigues formüllerinden ve Plücker koordinatlarından yararlanılmıştır. Ayrıca kuaterniyonlar ile Stokes vektörlerinin ilişkisi kullanılarak, polarizasyon durumları Stokes parametreleri ile yorumlanmıştır. Tüm polarizasyon durumları, elde edilen formülasyonlar sayesinde, matematik programları yardımıyla örneklendirilmiş ve görselleştirilmiştir.

Beş bölümden oluşan tez çalışmasının birinci bölümü, tezde adı geçen konu ile ilgili yapılmış çalışmaları ve bu tezde yapılanların motivasyonunun anlatıldığı bir giriş kısmından oluşmaktadır. İkinci bölümde, tezi hazırlarken yararlanılacak olan matematiksel ve fiziksel tanımlara ve teoremlere yer verilmiştir. Üçüncü bölümde, tezin diğer bölümlerinin oluşturulmasında örnek alınan eliptik ve dairesel polarizasyon durumu tanıtılmıştır. Tezin özgün bölümünü oluşturan dördüncü bölümünde ise hiperbolik bölünmüş kuaterniyonlar ve dual bölünmüş kuaterniyonlar yardımıyla optik fiber boyunca polarize ışık dalgasının polarizasyon durumları araştırılmıştır. Polarizasyon durumları Rodrigues formülleri, Plücker koordinatları ve vida hareketlerine göre incelenmiş ve bu sayede polarizasyon durumları formülasyonları elde edilmiştir. Tüm araştırılan polarizasyon durumları, Stokes vektörlerin kuaterniyonlar ile ilişkisi yardımıyla, Stokes parametreleri yardımıyla hesaplanmıştır. Son olarak bulunan sonuçları doğrulayan örnekler verilerek matematik programları yardımıyla görselleştirilmiştir. Tezin son bölümünü oluşturan beşinci bölümde ise elde edilen sonuçlar, geometriksel ve fiziksel olarak yorumlanmıştır.

Sayfa Adedi : 55
Anahtar Kelimeler : Kuaterniyonlar, Elektromanyetik dalga, Optik fiber
Danışman : Doç. Dr. Zehra ÖZDEMİR

GEOMETRIC INTERPRETATION OF POLARIZATION PLANE IN THE OPTICAL FIBER

(M. Sc. Thesis)

Şirin Gonca PERÇİN

AMASYA UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

August 2024

ABSTRACT

In this thesis study, the polarization states of the polarized light wave moving along the optical fiber associated with a curve are examined. In this research, quaternions, one of the fundamental tools of kinematic geometry, Plücker coordinates and Rodrigues formula are used. In addition, these polarization states are shown with Stokes parameters by using the relationship between quaternions and Stokes vectors. Some polarization states have been investigated using the surface-dependent curve associated with the optical fiber, along with the surface on which the curve is located. All polarization states are exemplified and visualized with the help of mathematical programs, thanks to the obtained formulations.

The first chapter of the thesis, which consists of seven chapters, consists of an introduction where the studies on the subject mentioned in the thesis and the motivation of what is done in this thesis are explained. In the second chapter, mathematical and physical definitions and theorems used in preparing the thesis are included. In the third chapter, elliptical and circular polarization cases, which are taken as examples in the creation of other chapters of the thesis, are introduced. In the fourth which constitutes the original part of the thesis, the polarization states of the polarized light wave along the optical fiber are investigated with the help of hyperbolic split quaternions and dual split quaternions. Polarization states are examined according to Rodrigues formula, Plücker coordinates and screw motions, and thus polarization state formulations are obtained. All investigated polarization states are calculated with the help of Stokes parameters, with the help of the relationship of Stokes vectors with quaternions. Finally, examples confirming the results are given and visualized with the help of mathematical programs. In the fifth chapter, which is the last part of the thesis, the results obtained are interpreted geometrically and physically.

Page Number : 55
Keywords : Quaternions, Electromagnetic wave, Optic fiber
Supervisor : Doç. Dr. Zehra ÖZDEMİR

ÖN SÖZ ve TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın gerçekleştirilmesinde, değerli bilgilerini benimle paylaşan, kendisine ne zaman danışsam büyük bir özveriyle, samimiyetle, gülen yüzüyle yardımcı olan ve meslek hayatımda örnek aldığım değerli danışman hocam Sayın Doç. Dr. Zehra ÖZDEMİR'e , tez çalışmam boyunca fikirlerini ve zamanını esirgemeyen hocam Sayın Dr. Hazal CEYHAN'a sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Hayatım boyunca bana hep destek olan annem, babam ve kardeşlerime, bu süreçteki sabırlı duruşlarıyla oğullarım Akif ve Asım'a ve her daim yanımda olan eşime teşekkür ederim.



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
ÖN SÖZ ve TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ	ix
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	xi
1. GİRİŞ	1
1.1. Teoriyi Oluşturmak İçin Literatür İncelemesi	3
2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR	6
2.1. Reel Kuaterniyonlar	11
2.2. Eliptik Kuaterniyonlar	12
2.3. Bölünmüş Kuaterniyonlar	14
2.4. Hiperbolik Bölünmüş Kuaterniyonlar	16
2.5. Dual Sayılar ve Eliptik Dual Kuaterniyonlar	20
2.6. Eliptik Dual Kuaterniyon Operatörü	20
2.7. Dual Hiperbolik Bölünmüş Kuaterniyon Operatörü	21
3. ELİPTİK VE DAİRESEL POLARİZASYON	22
3.1. Bir Optik Fiber Boyunca Polarize Işık Dalgasının Dairesel Polarizasyonu	22
3.2. Bir Optik Fiber Boyunca Polarize Işık Dalgasının Eliptik Polarizasyonu	25
3.3. Polarizasyon Durumlarının Stokes Parametreleri ve Matris Formları ile Yorumlanması	31

4. UZAY BENZERİ VE ZAMAN BENZERİ EĞRİLERLE İLİŞKİLİ BİR OPTİK FİBER BOYUNCA POLARİZASYON DURUMLARI	34
4.1. Polarizasyon Durumlarının Rodrigues Formülleri Aracılığı İle Yorumlanması	34
4.2. Polarizasyon Durumlarının Hiperbolik Bölünmüş Kuarterniyonlar Aracılığıyla Yorumlanması	37
4.3. Polarizasyon Durumlarının Vida ve Plücker Koordinatları Yardımıyla İncelenmesi	43
4.4. Polarizasyon Durumlarının Stokes Vektörleri ve Matris Formu ile Yorumlanması	44
5. SONUÇ VE ÖNERİLER	50
ÖZGEÇMİŞ	55

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil	Sayfa
Şekil 1.1. z -ekseni boyunca elektromanyetik dalga modeli	2
Şekil 3.1. Elektrik alanın eliptik dönme modeli	25
Şekil 3.2. d_{tE} eksenini boyunca θ açısı kadar dönme ve aynı eksen yönünde θ^* kadar öteleme yaptıran bir vida hareketi modeli	27
Şekil 3.3. (a) z -ekseni boyunca dairesel polarizasyonu (vida hareketi) ifade eden elektromanyetik dalga modeli ve (b) dairesel polarizasyonun polarizasyon düzlemindeki görünümü. (c) z -ekseni boyunca eliptik polarizasyonu (eliptik vida hareketi) ifade eden elektromanyetik dalga modeli ve (d) eliptik polarizasyonun polarizasyon düzlemindeki görünümü	28
Şekil 3.4. (a) Bir helis eğrisi ile ilişkili optik fiber boyunca dairesel polarizasyonu ifade eden elektromanyetik dalga modeli ve (b) dairesel polarizasyonun polarizasyon düzlemindeki görünümü. (c) Helis eğrisi boyunca polarizasyon sonucu oluşan dönen ve bükülen dairesel-Rytov eğrisi ve (d) dairesel-Rytov eğrisinin polarizasyon düzlemindeki görünümü	29
Şekil 3.5. (a) Bir eliptik helis eğrisi ile ilişkili optik fiber boyunca eliptik polarizasyonu ifade eden elektromanyetik dalga modeli ve (b) eliptik polarizasyonun polarizasyon düzlemindeki görünümü. (c) Eliptik helis eğrisi boyunca polarizasyon sonucu oluşan dönen ve bükülen eliptik-Rytov eğrisi ve (d) eliptik-Rytov eğrisinin polarizasyon düzlemindeki görünümü	30
Şekil 4.1. (a) x -ekseni ile ilişkilendirilmiş bir optik fiber boyunca zaman benzeri düzleminde eliptik polarizasyon durumunun görünümü ve (b) polarize ışık dalgasının yayılımı esnasında polarizasyon vektörünün uç noktalarının çizdiği zaman benzeri düzlemindeki çember eğrisinin (hiperbol) görünümü	39
Şekil 4.2. (a) x -ekseni ile ilişkilendirilmiş bir optik fiber boyunca uzay benzeri düzlemde eliptik polarizasyon durumunun görünümü ve (b) polarize ışık dalgasının yayılımı esnasında polarizasyon vektörünün uç noktalarının çizdiği uzay benzeri düzlemindeki çember eğrisinin (elips) görünümü	39
Şekil 4.3. (a) x -ekseni ile ilişkilendirilmiş bir optik fiber boyunca uzay benzeri düzlemdeki dairesel polarizasyon durumunun görünümü ve (b) polarize ışık dalgasının yayılımı esnasında polarizasyon vektörünün uç noktalarının çizdiği uzay düzlemindeki çember eğrisinin görünümü	40
Şekil 4.4. (a) x -ekseni ile ilişkilendirilmiş bir optik fiber boyunca doğrusal polarizasyon durumunda polarizasyon düzlemindeki görünüm	40

- Şekil 4.5. (a) Uzay benzeri bir γ eğrisi ile ilişkili bir optik fiber boyunca polarize ışık dalgasının zaman benzeri düzlemde eliptik polarizasyonunu gösteren elektromanyetik dalga modeli ve (b) ilgili Rytov eğrisi 41
- Şekil 4.6. (a) Zaman benzeri bir γ eğrisi ile ilişkili bir optik fiber boyunca polarize ışık dalgasının uzay benzeri düzlemde eliptik (dairese) polarizasyonunu gösteren elektromanyetik dalga modeli ve (b) ilgili eliptik (dairese) Rytov eğrisi 41
- Şekil 4.7. ((a),(c)) $\mathbb{H}^{1,2}$ Lorentz küresi üzerindeki uzay benzeri bir γ eğrisi ile ilişkili bir optik fiber boyunca zaman benzeri düzlemde eliptik polarizasyon durumunu veren elektromanyetik dalga modelleri ve ((b),(d)) ilgili Rytov eğrileri 42
- Şekil 4.8. ((a),(c)) $\mathbb{S}^{1,2}$ Lorentz küresi üzerindeki zaman benzeri bir γ eğrisi ile ilişkili bir optik fiber boyunca dairese polarizasyon durumunu ifade eden elektromanyetik dalga modelleri ve ((b),(d)) ilgili Rytov eğrileri 43

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

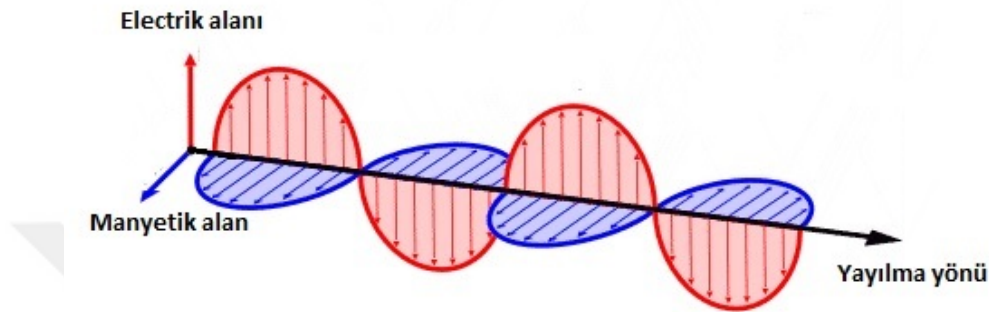
Simgeler	Açıklama
\mathbb{R}	Reel sayılar kümesi
\mathbb{D}	Dual sayılar kümesi
\mathbb{D}^3	\mathbb{D} -Modül
$T_{\mathbb{E}^n}(p)$	Tanjant vektör uzayı
\mathbb{R}^3	3-Boyutlu reel vektör uzayı
$\chi(M)$	M manifoldu üzerindeki vektör alanlarının kümesi
g	Metrik
∇	Levi-Civita koneksiyonu
Σ	Toplam sembolü
$[\cdot, \cdot]$	Lie operatörü
\mathbf{E}	Elektrik alan
F	Lorentz kuvveti
ϕ	Lorentz kuvveti operatörü
Ψ	Elektrik potansiyeli
\mathbf{B}	Manyetik alan
η	Elektrik öz direnci
a	Elektrik iletkenliği
$SO(3)$	Özel ortogonal grup (Lie grubu)
$so(3)$	Lie cebiri

1. GİRİŞ

Euler-Rodrigues formülü, 3-boyutlu uzayda bir vektör dönmesini tanımlar. Formül geometrik açıdan, verilen herhangi bir eksen ve açı için $SO(3)$ ' de bir dönme matrisini hesaplamak için kullanılmıştır. Başka bir deyişle Euler-Rodrigues formülü, üstel dönüşüm ile, $so(3)$ Lie cebirinin elemanı olan bir anti-simetrik matristen, $SO(3)$ Lie grubunun elemanı olan bir ortogonal matris hesaplamak için bir algoritma verir. Euler-Rodrigues formülü ilk olarak, 1775 yılında Leonhard Euler tarafından yayınlanan çalışmada hareketin Newton-Euler denklemleri olarak bilinen denklemlerde ele alınmıştır (Euler, 1775). Daha sonra Euler-Rodrigues formülü 1840 yılında dönme ekseninin koordinatlarına karşılık gelen Rodrigues parametreleri ile birlikte Olinde Rodrigues tarafından yeniden incelenmiştir (Rodrigues, 1840). Oene Bottema ve Bernard Roth tarafından düzlemsel ve uzaysal hareketlerde Rodrigues formülünün vektörel ifadesi kullanılmış ve hareket matrislerinin formları sunulmuştur (Bottema ve Roth, 1990).

Karmaşık sayıların uygulama alanının genişlemesiyle birlikte, karmaşık sayılara benzer üçlü bir sayı sistemi kurulmaya çalışılmıştır. 1843 yılında Hamilton kuaterniyon cebiri olarak adlandırdığı dördü sayı sistemini kurmuştur. Bu önemli çalışma ile birlikte, üç boyutlu uzayda dönme hareketinin kuaterniyonlar yardımıyla incelenebileceği anlaşılmıştır. Bu bilgiler ışığında kuaterniyon cebiri birçok farklı alanda kullanım alanı bulmuştur. Bu alanlardan bazıları şunlardır: fizik, geometri, mekanik, bilgisayar bilimi, animasyon, robotik uygulama ve kinematiktir. Düzlemde kinematik uygulamalar, yani dönme, öteleme, simetri gibi önemli hareketler karmaşık sayılarla ifade edilerek incelenebilmektedir, benzer şekilde aynı hareketler üç boyutlu uzaylarda kuaterniyon cebiri kullanılarak ifade edilerek incelenebilir. Kuaterniyonların üç boyutlu uzaylarda herhangi bir eksen etrafında dönme hareketinin ifade edilmesine olanak sağlaması, vektörel çalışmalarda kullanılması, küresel geometri ve bazı fiziksel denklemlerin kuaterniyonlar yardımıyla yorumlanması ve ifade edilmesi, kuaterniyonların uygulama alanını oldukça genişletmiştir. Ayrıca kuaterniyonlar yardımıyla dört boyutlu uzaylarda dönme hareketini yorumlamak mümkündür. Reel kuaterniyonların yanı sıra bölünmüş kuaterniyon, dual kuaterniyon, eliptik kuaterniyon, hiperbolik kuaterniyon gibi farklı uzaylarda kullanılabilmesi için birçok farklı kuaterniyon türü vardır. Bileşenleri dual sayılardan oluşan kuaterniyonlar, dual kuaterniyonlar olarak adlandırılmıştır. Dual kuaterniyonlar, 1898 yılında, McAulay tarafından bulunmuştur. Bu kuaterniyonlar, sekiz boyutlu reel cebir olarak düşünülebilir. Dual kuaterniyonlar yardımıyla vida hareketi, yani bir eksen etrafında dönme ve aynı eksen boyunca öteleme hareketi tanımlanabilir. Vida teorisi, Ball tarafından 1876 yılında kinematik ve katı cisim mekaniği alanlarında araştırma yapılması için ortaya çıkmıştır. Vida hareketi ve dual kuaterniyonlar robotik, hesaplamalı geometri, robot mekaniği, mekanik tasarım gibi bir çok uygulama alanına sahiptir.

Diğer taraftan, elektromanyetik dalgalar ilk olarak James Clerk Maxwell tarafından öne sürülmüştür ve daha sonra Heinrich Hertz tarafından doğrulanmıştır. Elektromanyetik dalgalar, elektrik alanı ile manyetik alan arasındaki titreşimler sonucunda oluşur. Şekil 1.1’ de bir elektromanyetik dalga modeli verilmiştir.



Şekil 1.1 z-ekseni boyunca elektromanyetik dalga modeli

Elektromanyetik dalgalar yayılmak için bir ortama ihtiyaç duymazlar. Yani, sadece maddesel ortamlarda değil, aynı zamanda boşlukta da hareket edebilirler. 1860’lar ve 1870’lerde James Clerk Maxwell adında bir bilim insanı, elektrik ve manyetik alanların elektromanyetik dalga oluşturmak için bir çiftlenim meydana getirebileceğini açıklamıştır. Bugün Maxwell Denklemleri olarak bilinen denklem sistemi, elektrik ve manyetizma arasındaki ilişkinin matematiksel temelidir. Heinrich Hertz, Maxwell’in teorilerini radyo dalgalarının üretimi ve alımı için uyarlamıştır ve radyo dalgalarının bir saniyedeki devinim sayısı (frekans) ile hertz birimi tanımlanmıştır. Hertz’in radyo dalgaları ile yaptığı çalışmalar iki problemi çözmüştür: İlki, radyo dalgalarının ışık hızında ilerlemesi bilgisinin edinilmesidir. Yani radyo dalgaları, ışığın (dolayısıyla elektromanyetik dalganın) bir formudur. Işığın bir diğer özelliği de kutuplanabilmesidir, buna polarizasyon da denir. Elektromanyetik alanın hizalanmasının bir ölçüsü olan kutuplanma, kumbaraya metal para atma olayıyla canlandırılabilir. Belli bir yönelim haricinde para kutuya giremez. Çoğumuzun kullandığı polarize camlı güneş gözlükleri de gözü rahatsız edebilecek parlaklıkları (fazladan yönelim bileşenleri ile oluşan) bu şekilde yok eder. Elektromanyetik dalgaların tıpkı okyanus dalgaları gibi tepe noktaları vardır. Bu tepe noktalarının bir saniyede belli bir referans noktasına göre geçişi, frekansı; iki tepe noktası arası mesafe de dalga boyunu verir. Elektromanyetik dalgalar ve elektromanyetik radyasyon aynı fiziksel olguyu işaret eder: Her ikisi de elektromanyetik enerji ile ilgilidir. Bu enerji frekans (radyo dalgalarında), dalga boyu (kızılötesi ve görünür bölgede) veya direkt enerji (x ve gama ışınlarında) ile ifade edilebilir. Üçü de matematiksel olarak birbirleriyle ilişkilidir ve biri bilinirse diğer ikisi bulunabilir. Uzayda herhangi bir yönde dik düzlemler şeklinde hareket eden dalgalar, fizikte düzlem dalgalar olarak adlandırılır. Düzlem dalganın

doğasına uygun olarak hem elektrik hem de manyetik alan bileşenleri hareket yönüne diktir. Elektromanyetik dalgalar için dalga denklemi, Maxwell denklemlerinden türetilmektedir.

Polarize ışık dalgasının polarizasyon durumlarını incelemek için Rodrigues formülleri ve kuaterniyon cebiri çok güçlü matematiksel araçlardır. Polarizasyon vektörünün pozisyonunu ve yönünü belirtmek için birim kuaterniyon kullanılabilir. Kuaterniyon cebiri, hareket teorisi alanında kullanılmasıyla birlikte birçok konuda önemli avantajlar elde edilmesini sağlar. Bu avantajlar fizik ve geometri alanında araştırma yaparken, daha açık ve anlaşılır olmasını ve cebirsel anlamda hesaplama yapılabilmesini sağlar. Polarize ışık dalgasının hareketi, son zamanlarda fizikçiler kadar matematikçilerin de ilgisini çekmektedir. Ayrıca polarizasyon durumlarını incelemek için kullanılan Stokes vektörleri, kuaterniyonlar ile yorumlanmasıyla önemli araştırma alanlarından biri olmuştur. Kuaterniyonlar ile birlikte Stokes vektörleri eşleştirilmiş, bu sayede polarizasyon durumunun geometrik olarak incelenebilmesine imkan sağlanmıştır.

1.1. Teoriyi Oluşturmak İçin Literatür İncelemesi

Bu bölümde tez çalışmasına konu olan Rodrigues formülü, kuaterniyonlar, dual kuaterniyonlar, vida hareketi, Stokes vektörleri ve polarizasyon durumları ile ilgili çalışmalar üzerinde durulacaktır. Euler-Rodrigues formülü ilk olarak, 1775 yılında Leonhard Euler tarafından yayınlanan çalışmada hareketin Newton-Euler denklemleri olarak bilinen denklemlerde ele alınmıştır (Euler, 1775). Daha sonra Euler-Rodrigues formülü 1840 yılında dönme ekseninin koordinatlarına karşılık gelen Rodrigues parametreleri ile birlikte Olinde Rodrigues tarafından yeniden incelenmiştir (Rodrigues, 1840). Oene Bottema ve Bernard Roth tarafından düzlemsel ve uzaysal hareketlerde Rodrigues formülünün vektörel ifadesi kullanılmış ve hareket matrislerinin formları sunulmuştur (Bottema ve Roth, 1990). Hamilton 1844 yılında, matematik bilimi ve diğer bilimlerin uygulama alanlarında kullanılacak önemli araçlardan biri olan kuaterniyonları tanımlamıştır (Hamilton, 1844). Bu tanım ile birlikte kuaterniyon cebiri ile ilgili birçok çalışma yapılmıştır. Uygulama alanlarının keşfedilmesi ile birlikte kuaterniyonik yapının, farklı uzayların sahip olduğu metriklere uygun olarak yeni tanımları ortaya çıkmıştır. Bu çalışmaları şöyle özetleyebiliriz: Clifford, Bikuaterniyonlar olarak adlandırılan kuaterniyonları tanıtmıştır (Clifford, 1871). Ardından McAulay, bikuaterniyonları farklı bakış açısıyla yeniden yorumlamıştır (McAulay, 1898). Ward, kuaterniyonlar ve Cayley sayıları arasındaki ilişkiyi araştırmıştır (Ward, 1997). Bölünmüş kuaterniyonlar ise Cockle tarafından keşfedilmiştir, (Cockle, 1849). Daha sonra, Kula ve Yaylı bölünmüş kuaterniyonların dönme matrislerini incelemiştir ve böylelikle Lorentz-Minkowski uzayında bölünmüş kuaterniyonların uygulama alanı tanıtılmıştır (Kula ve Yayli, 2007). Özdemir, bölünmüş kuaterniyonların köklerini araştırarak yeni bir bakış açısı sergilemiştir (Özdemir, 2009). Ardından Özdemir, eliptik kuaterniyonlar yardımıyla eliptik hareketi araştırmıştır (Özdemir,

2016). Aynı dönemde, Özdemir ve Şimşek hiperbolik kuaterniyonlar yardımıyla hiperboloid üzerinde hiperbolik dönme matrisini araştırmıştır (Şimşek ve Özdemir, 2016). Flamant ve diğerleri, kuaterniyon cebirini spektropolimetrik görüntüleme yönteminde kullanmıştır (Flamant ve diğerleri, 2019). Özdemir, 2020 yılında kuaterniyon türlerinin ve kuaterniyonik dönme matrislerinin anlatıldığı kapsamlı bir kitap yayınlamıştır (Özdemir, 2020).

Kuaterniyonlar ile birlikte uygulama alanı genişleyen dual sayılar kullanılarak elde edilen çalışmalardan ise şöyle bahsedebiliriz: 1985 yılında, Pennock ve Yang dual sayılar ve robot teorisinde araştırmasını yapmıştır (Pennock ve Yang, 1985). Ardından, McCarthy, manipülatör kinematik alanında dual ortogonal matrisleri kullanmıştır (McCarthy, 1986). Aynı yıllarda, Gu ve Luh, dual sayıları robotik transformation alanında araştırmıştır (Gu ve Luh, 1987). Han ve diğerleri kontrol teorisinde dual sayıları katı hareketi ile incelemiştir (Han ve diğerleri, 2008). Aynı yıl Ata ve Yaylı geometri alanında dual birim matris ve birim dual kuaterniyonları araştırmıştır (Ata ve Yaylı, 2008). Gouasmi, dual sayılar ve robot kinematiğine farklı bir soluk getirmiştir (Gouasmi, 2012). Guillaume, birim dual kuaterniyonları sinir bilimi alanında kullanarak üç boyutta kinematik ilişkisini incelemiştir (Leclercg ve diğerleri, 2013). Adorno, 2017 yılında robot kinematiğinde dual kuaterniyonlardan yararlanmıştır (Adorno, 2017). Yüca ve Yaylı, dual hareketleri geometrik olarak incelemiştir (Yüca ve Yaylı, 2021).

Kuaterniyonlar ve dual sayıların kullanılması ile birlikte vida hareketi ile ilgili çalışmalar yayınlanmaya başlamıştır. 1876 yılında, Ball, vida hareketini yorumlamıştır (Ball, 1876). Dimentberg, vida hareketini mekanik alanında uygulamıştır (Dimentberg, 1969). Ardından uygulama alanlarında kullanılmasının artmasıyla birlikte, Yang, dizayn teorisinde vida hareketini kullanmıştır (Yang, 1974). Funda ve Paul, robotik alanında vida transformation uygulamasını araştırmıştır (Funda ve Paul, 1990). Sarıyıldız ve Temeltaş, robotik teoride vida hareketini farklı bir bakış açısı ile yorumlamıştır (Sarıyıldız ve Temeltas, 2011).

1852 yılında, polarize edilmiş ışığın polarizasyon durumunu inceleyebilmek için önemli araçlardan biri olan Stokes vektörleri, Stokes tarafından tanımlanmıştır (Stokes, 1852). Berry ve diğerleri bu çalışmaya farklı bir bakış açısı ile yaklaşmıştır (Berry ve diğerleri, 1977). Üç boyutta Stokes vektörleri yardımıyla polarizasyon durumu da araştırılmıştır (Sheppard, 2014). Kuntman ve diğerleri kuaterniyonlar ve Stokes parametre ilişkisini araştırmıştır (Kuntman ve diğerleri, 2019). Stenflo, Stokes vektörlerini Minkowski uzayındaki vektörler ile birlikte araştırmıştır (Stenflo, 2019).

Polarizasyon durumu ve polarize ışık dalgasının hareketi fizikçiler ve matematikçiler için önemli araştırma konularından biridir. Kuaterniyon cebirinin, dual kuaterniyonların ve vida hareketinin uygulama alanlarından yukarıda bahsetmiştik. Bu uygulama alanlarından biri de polarize ışık dalgasının hareketidir. Stokes vektörleriyle kuaterniyonların ilişkisinin araştırılması ile de birlikte, polarizasyon durumları geometri alanında da araştırılmaya başlanmıştır. Kuşkusuz bu ilerlemenin en önemli sebeplerinden biri de geometrik faz araştırmadır. Kompfner dalga tüpleri içerisinde mikrodalgaların hareketini araştırmıştır (Kompfner, 1947). Aynı yılda, Lewin kesit eğriliği ile yayılım eğrileri ve bükülmüş dalgalarını araştırmıştır (Lewin, 1955). Waldron, elektromanyetik teoride helisel koordinat sistemlerini araştırmıştır (Waldron, 1958). Hareket teorisi ile dalga tüplerinin ilişkisi araştırılmıştır (Kompfner, 1976). Çift kırımlı optik fiber ile ilgili çalışma yayınlanmıştır (Rashleigh ve Ulrich, 1979). Ross, polarize ışık dalgasının polarizasyon durumlarını geometrik olarak araştırmıştır (Ross, 1984). Qian ve Hussey, helis merkezli optik fiber boyunca dairesel hareketi incelemiştir (Qian ve Hussey, 1986). Dairesel çift kırımlı fiberlerin karakterizasyonu araştırılmıştır (Birch, 1987). Ayrıca, çift kırımlı optik fiber yardımıyla elektrik sensörleri araştırılmıştır (Laming ve Payne, 1989). Menyuk ve Wai bükülmüş fiber boyunca polarizasyon durumlarını dönme hareketi aracılığıyla incelemiştir (Menyuk ve Wai, 1994). Goldstein, polarize ışık dalgasına yeni bir bakış açısı ile yaklaşmıştır (Goldstein, 2003). Nicolet, elektromanyetizm teoride hesaplamalı yöntem yardımıyla geometrik olarak incelemeler yapmıştır (Nicolet ve diğerleri, 2008). Helisel optik ve helisel merkezli optikler ile ilgili de araştırmalara yer verilmiştir (Alexeyev ve Yavorsky, 2008; Alexeyev ve diğerleri, 2015).

2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

2.1 Tanım V , \mathbb{R} cismi üzerinde tanımlı bir vektör uzayı olmak üzere, her $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3) \in V$ için

$$F : V \times V \rightarrow \mathbb{R}, \quad (2.1)$$

$$(x, y) \rightarrow F(x, y) \quad (2.2)$$

dönüşümü, her $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ve $x, y, z \in V$ için,

$$F(ax + by, z) = aF(x, z) + bF(y, z), \quad (2.3)$$

$$F(x, cy + dz) = cF(x, y) + dF(x, z), \quad (2.4)$$

eşitliklerini sağlıyorsa F dönüşümüne V vektör uzayı üzerinde bilinear form adı verilir (Hacısalıhoğlu, 1980).

2.2 Tanım F bilinear form olmak üzere F dönüşümü, her $x, y \in V$ için $F(x, y) = F(y, x)$ ise simetrik bilinear form, $F(x, y) = -F(y, x)$ ise ters simetrik bilinear form olarak adlandırılır. Her $x \in V$ için $F(x, x) = 0$ eşitliği sadece $x = 0$ için sağlanıyorsa F dönüşümüne dejenere olmayan bilinear form denir. Aksi halde dejenere form denir (Hacısalıhoğlu, 1980).

2.3 Tanım F bir bilinear form olmak üzere, her $x \in V$ için $F(x, x) \geq 0$ ve $F(x, x) = 0$ olması ancak $x = 0$ için sağlanıyorsa, F bilinear formuna pozitif tanımlıdır denir. Eğer, $F(x, x) \geq 0$ koşulu sağlanıyorsa, $x = 0$ iken $F(x, x) = 0$ ise, ama $F(x, x) = 0$ iken x sıfır vektöründen başka bir vektör de olabiliyorsa, F yarı pozitif tanımlıdır denir (Hacısalıhoğlu, 1980).

2.4 Tanım V bir vektör uzayı olmak üzere, $g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ biçiminde tanımlanan dönüşüm bilinear, simetrik ve dejenere olmayan bir dönüşüm ise, g dönüşümüne V vektör uzayı üzerinde bir skaler çarpım, V vektör uzayına da, \mathbb{R} cismi üzerinde tanımlı skaler çarpım uzayı denir (Hacısalıhoğlu, 1980).

2.5 Tanım V bir vektör uzayı olmak üzere, $g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ biçiminde tanımlanan dönüşüm, her $x, y, z \in V$ ve her $a, b \in \mathbb{R}$ için aşağıdaki koşulları sağlıyor ise V vektör uzayına \mathbb{R} cismi üzerinde bir iç çarpım uzayı, g dönüşümüne de V üzerinde bir iç çarpım denir.

i. $g(ax + by, z) = ag(x, z) + bg(y, z)$ ve $g(x, ay + bz) = ag(x, y) + bg(x, z)$

ii. $g(x, y) = g(y, x)$

iii. Her $x \in V$ için $g(x, x) \geq 0$

iv. $g(x, x) = 0$ ancak ve ancak $x = 0$

Eğer yukarıdaki özelliklerden ilk üçü sağlanıyor ve dördüncü özellik yerine, $x = 0$ ise $g(x, x) =$

0 özelliği sağlanıyor ise g dönüşümüne yarı iç çarpım denir (Hacısalihoglu, 1980).

2.6 Tanım V bir vektör uzayı olmak üzere,

$$f : V \times V \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \rightarrow f(x, y) = \varepsilon a_1 x_1 y_1 + a_2 x_2 y_2 + a_3 x_3 y_3 \quad (2.5)$$

$a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^+$ ve $\varepsilon = \pm 1$ olmak üzere şeklinde tanımlı metriği göz önüne alalım. Eğer $\varepsilon = 1$ ise elde edilen metriğe genelleştirilmiş skaler metrik adı verilir. Bu tez boyunca genelleştirilmiş skaler metriği g_E notasyonu ile, üzerinde tanımlı g_E metriğiyle birlikte tanımlanan 3-boyutlu uzayı ise $\mathbb{R}_{a_1, a_2, a_3}^3$ ile göstereceğiz. Buradan açıkça görülür ki eğer $a_1 = a_2 = a_3 = \varepsilon = 1$ ise elde edilen metrik standart Öklid metriğidir. Bu tez boyunca Öklid metriği g notasyonu ile üzerinde tanımlı g metriğiyle birlikte Öklidiyen 3-uzayı da \mathbb{R}^3 ile göstereceğiz. Eğer $\varepsilon = -1$ ise elde edilen metriğe Lorentzian g -iç çarpım adı verilir. Bu tez boyunca bu şekilde tanımlanan Lorentzian g -iç çarpımı g_H notasyonu ile, üzerinde tanımlı g_H metriğiyle birlikte tanımlanan 3-boyutlu uzayı ise $\mathbb{R}_{a_1, a_2, a_3}^{1,2}$ ile göstereceğiz. Benzer şekilde eğer $\varepsilon = -1$ ve $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ ise elde edilen metrik standart Lorentz metriğidir. Bu tez boyunca Lorentz metriği g_H notasyonu ile, üzerinde tanımlı g_H metriğiyle birlikte tanımlanan 3-boyutlu uzayı ise \mathbb{L}^3 ile göstereceğiz (López, 2014; Özdemir, 2016; Şimsek ve Özdemir, 2016).

Aşağıdaki tanımları

$$f(x, y) = \varepsilon a_1 x_1 y_1 + a_2 x_2 y_2 + a_3 x_3 y_3 \quad (2.6)$$

şeklinde tanımlanan metrik için vereceğiz.

Yukarıdaki gibi tanımlı f metriği ile ilişkili vektörel çarpım, her $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3)$ için aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$x \times_f y = \Delta \begin{vmatrix} \varepsilon \mathbf{e}_1/a_1 & \mathbf{e}_2/a_2 & \mathbf{e}_3/a_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \quad (2.7)$$

burada $\Delta = \sqrt{a_1 a_2 a_3}$, $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^+$ biçimindedir, (López, 2014; Özdemir, 2016; Şimsek ve Özdemir, 2016).

$\varepsilon = -1$ olması durumunda Lorentz uzayında tanımlanan metriğin yapısından dolayı bir $x \in \mathbb{R}_{a_1, a_2, a_3}^{1,2}$ vektörü için aşağıdaki karakterizasyonlar mevcuttur:

- i. $g_H(x, x) > 0$ veya $x = 0$ ise x vektörüne uzay benzeri vektör denir.
- ii. $g_H(x, x) < 0$ ise x vektörüne zaman benzeri vektör denir.
- iii. $g_H(x, x) = 0, x \neq 0$, ise x vektörüne ışık benzeri vektör denir.

Her ikisinde aynı anda ışık benzeri olmayan vektörler için $g_H(x, y) = 0$ ise bu iki vektör birbirine diktir denir. Her ikisi de aynı anda ışık benzeri olan iki vektör için $g_H(x, y) = 0$ olması demek bu iki vektörün lineer bağımlı olması demektir.

Aynı zamanda Lorentz uzayına ait metriktten dolayı bu uzayda bulunan eğriler üç farklı karakterde ifade edilir. Bu karakterler eğrilerin teğet vektörlerine göre değişiklik göstermektedir. Yani uzay benzeri bir eğri teğet vektörü uzay benzeri vektör olan eğri, zaman benzeri eğri teğet vektörü zaman benzeri vektör olan eğri ve ışık benzeri eğri ise teğet vektörü ışık benzeri vektör olan eğridir (López, 2014; Özdemir, 2016).

2.7 Tanım Lorentz uzayında $p, v \in \mathbb{R}^3$ ve $r > 0$ olmak üzere,

- i) $\alpha(t) = p + tv$ bir doğru belirtir ve bu doğrunun karakteri v vektörü ile aynı karakterdedir.
- ii) $\alpha(t) = p + r(\cos t, \sin t, 0)$ eğrisi uzay benzeri çember eğrisidir ve uzay benzeri düzlemde bulunmaktadır.
- iii) $\alpha(t) = p + r(0, \sinh t, \cosh t)$ eğrisi uzay benzeri hiperbol eğrisidir ve zaman benzeri düzlemde bulunmaktadır.
- iv) $\alpha(t) = p + r(0, \cosh t, \sinh t)$ eğrisi zaman benzeri hiperbol eğrisidir ve ışık benzeri düzlemde bulunmaktadır.
- v) $\alpha(t) = (t, t^2, t^2)$ eğrisi uzay benzeri parabol eğrisidir ve ışık benzeri düzlemde bulunmaktadır.

(López, 2014; Özdemir, 2016)

2.8 Tanım $\mathbb{R}_{a_1, a_2, a_3}^{1,2}$ uzayında g_H metriğine göre aşağıdaki gibi verilen üç tür küre yüzeyi vardır:

$$\mathbb{S}_{a_1, a_2, a_3}^{1,2} = \{x \in \mathbb{R}_{a_1, a_2, a_3}^{1,2} : g_H(x, x) = 1\}, \quad (2.8)$$

$$\mathbb{H}_{a_1, a_2, a_3}^{1,2} = \{x \in \mathbb{R}_{a_1, a_2, a_3}^{1,2} : g_H(x, x) = -1\}, \quad (2.9)$$

$$\mathbb{LC}_{a_1, a_2, a_3}^{1,2} = \{x \in \mathbb{R}_{a_1, a_2, a_3}^{1,2} : g_H(x, x) = 0\}. \quad (2.10)$$

Bu yüzeyler sırasıyla g_H -de Sitter 2-uzay, g_H -hiperbolik 2-uzay ve g_H -ışık konisi olarak adlandırılır (Özdemir, 2016).

Elektrik ve manyetik alanların davranışı Maxwell denklemleri tarafından yönetilir: Diverjansı sıfır olan vektör alanlarına manyetik vektör alanı adı verilir. Bir \mathbf{B} manyetik alanı Gauss yasasını sağlar:

$$g(\nabla, \mathbf{B}) = 0 \quad (2.11)$$

B manyetik alan **E** elektrik alan olmak üzere Faraday Yasası

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -c \nabla \times \mathbf{E} = \nabla \times (v \times \mathbf{B}) \quad (2.12)$$

şeklindedir. Burada J akış ve $\mu_0 = c/4\pi$ boşluğun geçirgenliği (sabit), c ışık hızı olmak üzere Ampere yasası

$$\nabla \times \mathbf{B} = J\mu_0 \quad (2.13)$$

şeklinde verilir (Pontin ve Priest, 2022).

2.9 Tanım Lie grubu hem grup hem de sonlu boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold olup, (G, \cdot) grubu üzerinde, grup işlemi yardımıyla tanımlanan fonksiyonlar

$$\eta : G \times G \rightarrow G \quad (2.14)$$

$$(x, y) \rightarrow \eta(x, y) = x \cdot y \quad (2.15)$$

ve $\zeta(x, y) = x^{-1} \cdot y$ fonksiyonları diferansiyellenebilirdir (Özdemir, 2020).

2.10 Tanım \mathbb{V} , bir F cismi üzerinde vektör uzayı olmak üzere

$$[\cdot, \cdot] : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V} \quad (2.16)$$

dönüşümü, her $x, y, z \in \mathbb{V}$ için,

i. 2-lineer

ii. Ters simetrik, yani

$$[x, y] = -[y, x], \quad (2.17)$$

iii. Jakobi özdeşliğini sağlayan, yani

$$[x, [y, z]] + [z, [x, y]] + [y, [z, x]] = 0, \quad (2.18)$$

koşullarını sağlıyorsa $[\cdot, \cdot]$ dönüşümüne \mathbb{V} üzerinde bir Lie operatörü denir. Bu operatör \mathbb{V} vektör uzayında yeni bir çarpma işlemi tanımlar. Bu yeni işlemle birlikte \mathbb{V} uzayı bir cebir oluşturur. Bu cebire Lie cebiri denir (Özdemir, 2020).

2.11 Tanım Exponensiyel dönüşüm, Lie cebirinden Lie grubuna giden bir dönüşümdür. G

bir Lie grubu ve g ise bu grubun Lie cebiri olsun,

$$\exp : g \rightarrow G \quad (2.19)$$

biçiminde tanımlanan bir dönüşümdür. Örneğin,

$$\exp(A) = e^A = I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \dots \quad (2.20)$$

olmak üzere,

$$\exp : so(n) \rightarrow SO(n) \quad (2.21)$$

biçiminde tanımlanır (Euler, 1775; Rodrigues, 1840; Bottema ve Roth, 1990; Özdemir, 2020). Burada $so(n)$ ters simetrik matrislerin vektör uzayı olup bir Lie cebiri, $SO(n)$ kümesi $n \times n$ dönme matrislerinin kümesi olup matris çarpımı ile birlikte bir özel ortonormal gruptur ve aynı zamanda bir Lie grubudur.

2.12 Tanım

$$\exp : so(n) \rightarrow SO(n) \quad (2.22)$$

biçiminde tanımlanan eksponensiyel dönüşüm, iyi tanımlı ve örten olduğundan $n = 3$ olmak üzere, her A antisimetrik matrisi için bir dönme matrisi üretir. Böylece e^A için açık bir formül verilerek, dönme matrisleri üretilebilir, bu formüle Rodrigues formülü denir (Euler, 1775; Rodrigues, 1840; Bottema ve Roth, 1990; Özdemir, 2020).

2.1 Teorem $A \in so(3)$ bir ters simetrik matris olsun. Bu durumda Rodrigues formülü

$$e^A = I + \sin \theta A + (1 - \cos \theta A^2) \quad (2.23)$$

biçiminde verilir (Euler, 1775; Rodrigues, 1840; Bottema ve Roth, 1990; Özdemir, 2020).

b 3-boyutlu Lorentz uzayında bir vektör olmak üzere, 3-boyutlu Lorentz uzayında Rodrigues formülleri ise aşağıdaki gibi verilir.

i. Eğer b uzay benzeri bir vektör ise

$$e^A = I + \sinh \phi A + (-1 + \cosh \phi A^2) \quad (2.24)$$

ii. Eğer b zaman benzeri bir vektör ise

$$e^A = I + \sin \theta A + (1 - \cos \theta A^2) \quad (2.25)$$

biçimindedir (Kahveci ve diğ., 2016).

iii. Eğer b ışık benzeri bir vektör ise

$$R_{\phi}^{gH,u} = e^{-A\phi} = I - \phi A + \frac{\phi^2}{2} A^2 \quad (2.26)$$

şeklindedir (Şimsek ve Özdemir, 2016).

2.1. Reel Kuaterniyonlar

2.13 Tanım Reel kuaterniyonlar aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\mathbb{H} = \{q_1 + q_2i + q_3j + q_4k : i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1, q_i \in \mathbb{R}, i = \{1, 2, 3, 4\}\}.$$

Dörtlü sayı kümesine, kuaterniyonlar kümesi denir ve bu küme \mathbb{H} ile gösterilir (Hamilton, 1844). Bu kümenin elemanlarına reel kuaterniyonlar denir. Kuaterniyon çarpımı, Öklid iç çarpım ve Öklid vektörel çarpımı yardımıyla aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\otimes : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}; (p, q) \rightarrow \otimes(p, q) = p \otimes q, \quad (2.27)$$

$$p \otimes q = S_p S_q - g_H(V_p, V_q) + S_p V_q + V_p S_q + V_p \times V_q, \quad (2.28)$$

Ayrıca p ve q olarak gösterilen iki has kuaterniyonun (yani iki üç boyutlu vektörün) kuaterniyon çarpımı aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$p \otimes q = -g_H(V_p, V_q) + V_p \times V_q, \quad (2.29)$$

burada V_p ve V_q , p ve q kuaterniyonlarının vektörel kısmını belirtmek üzere, $g_H(\cdot)$ iç çarpım ve \times dış çarpımı göstermektedir. $p = p_1 + p_2i + p_3j + p_4k$ ve $q = q_1 + q_2i + q_3j + q_4k$ iki kuaterniyon olmak üzere, bu iki kuaterniyonun kuaterniyon çarpımının matris gösterimi aşağıdaki gibi belirtilir:

$$p \otimes q = \begin{bmatrix} p_1 & -p_2 & -p_3 & -p_4 \\ p_2 & p_1 & -p_4 & p_3 \\ p_3 & p_4 & p_1 & -p_2 \\ p_4 & -p_3 & p_2 & p_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix}. \quad (2.30)$$

Bir reel kuaterniyon $q = q_1 + q_2i + q_3j + q_4k$ olmak üzere, bu kuaterniyonun eşleniği \bar{q} olarak gösterilir ve $\bar{q} = q_1 - q_2i - q_3j - q_4k$ şeklinde bulunur. $q = q_1 + q_2i + q_3j + q_4k \in \mathbb{H}$ ile

gösterilen reel kuaterniyonun normu aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\| \cdot \|: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}; q \rightarrow \| q \| = \sqrt{q \otimes \bar{q}} = \sqrt{\bar{q} \otimes q} = \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2} \quad (2.31)$$

$q = q_1 + q_2i + q_3j + q_4k$ bir reel kuaterniyon olsun. Eğer $\| q \| = 1$ ise, q birim kuaterniyon olarak adlandırılır. Ayrıca q kuaterniyonun tersi $q^{-1} = \frac{\bar{q}}{\|q\|^2}$ şeklinde tanımlanır. Her kuaterniyon kutupsal formda aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$q = \| q \| (\cos \theta + n \sin \theta) \quad (2.32)$$

burada S_q ve V_q sırasıyla q kuaterniyonun skaler ve vektörel kısmını belirtir. Ayrıca $n = \frac{V_q}{\|V_q\|}$, $n^2 = -1$ olmak üzere, $\cos \theta = \frac{S_q}{\|q\|}$ ve $\sin \theta = \frac{\|V_q\|}{\|q\|}$ olarak hesaplanır. Üç boyutlu Öklid uzayında her birim kuaterniyon dönme hareketine karşılık gelir (Özdemir, 2020).

2.2 Teorem $q = \cos \theta + n \sin \theta$ bir birim kuaterniyon olmak üzere aşağıdaki gibi verilen $R_q(u)$ dönüşümü, bir u vektörünün n eksenini etrafında 2θ açısı kadar dönüşümü ifade eden bir lineer dönüşümdür:

$$R_q(u) = q \otimes u \otimes q^{-1} \quad (2.33)$$

(Özdemir, 2020).

2.2. Eliptik Kuaterniyonlar

$q_1, q_2, q_3, q_4 \in \mathbb{R}$ ve $\Delta = \sqrt{a_1 a_2 a_3}$, $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere eliptik kuaterniyonlar aşağıdaki gibi verilir:

$$\mathbb{H}_E = \{q_E = q_1 + q_2i + q_3j + q_4k : i^2 = -a_1, j^2 = -a_2, k^2 = -a_3, ijk = -\Delta\}.$$

\mathbb{H}_E kümesi eliptik kuaterniyonlar kümesi olarak adlandırılır. Ayrıca eliptik kuaterniyon çarpımını aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\otimes_E : \mathbb{H}_E \times \mathbb{H}_E \rightarrow \mathbb{H}_E; (p_E, q_E) \rightarrow \otimes_E(p_E, q_E) = p_E \otimes_E q_E, \quad (2.34)$$

$$p_E \otimes_E q_E = S_{p_E} S_{q_E} - g_E(V_{p_E}, V_{q_E}) + S_{p_E} V_{q_E} + V_{p_E} S_{q_E} + V_{p_E} \times_E V_{q_E}, \quad (2.35)$$

Burada g_E ile gösterilen eliptik skaler çarpım aşağıdaki gibi belirtilir:

$g_E(x, y) = a_1 x_1 y_1 + a_2 x_2 y_2 + a_3 x_3 y_3$ ve \times_E ile belirtilen eliptik dış çarpım da aşağıdaki gibi

gösterilir:

$$x \times_E y = \begin{bmatrix} i/a_1 & j/a_2 & k/a_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}. \quad (2.36)$$

Bununla birlikte, p_E ve q_E has eliptik kauetroniyon ise iki kuaterniyonun çarpımı aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$p_E \otimes_E q_E = -g(V_{p_E}, V_{q_E}) + V_{p_E} \times_E V_{q_E}. \quad (2.37)$$

$p_E = p_1 + p_2i + p_3j + p_4k$ ve $q_E = q_1 + q_2i + q_3j + q_4k$ iki eliptik kuaterniyon olmak üzere, p_E ve q_E kuaterniyonlarının kuaterniyon çarpımının matris gösterimi aşağıdaki gibi verilir:

$$p_E \otimes_E q_E = \begin{bmatrix} p_1 & -a_1p_2 & -a_3p_3 & -a_3p_4 \\ p_2 & p_1 & -p_4\Delta/a_1 & p_3\Delta/a_1 \\ p_3 & p_4\Delta/a_2 & p_1 & -p_2\Delta/a_2 \\ p_4 & -p_3\Delta/a_3 & p_2\Delta/a_3 & p_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix}. \quad (2.38)$$

$q_E = q_1 + q_2i + q_3j + q_4k$ bir eliptik kuaterniyon olmak üzere, bu kuaterniyonun eşleniği \bar{q}_E ile gösterilir ve $\bar{q}_E = q_1 - q_2i - q_3j - q_4k$ olarak tanımlanır. Ayrıca, $q_E = q_1 + q_2i + q_3j + q_4k \in \mathbb{H}_E$ kuaterniyonun normu :

$$\|\cdot\|_E: \mathbb{H}_E \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}; q_E \rightarrow \|q_E\|_E = \sqrt{q_E \otimes_E \bar{q}_E} = \sqrt{\bar{q}_E \otimes_E q_E} = \sqrt{q_1^2 + a_1q_2^2 + a_2q_3^2 + a_3q_4^2} \quad (2.39)$$

olarak tanımlanır. $q_E = q_1 + q_2i + q_3j + q_4k \in \mathbb{H}_E$ eliptik kuaterniyonu için $\|q_E\|_E = 1$ ise, q_E birim eliptik kuaterniyon olarak adlandırılır. q_E eliptik kuaterniyonun tersi, $q_E^{-1} = \frac{\bar{q}_E}{\|q_E\|_E^2}$ şeklinde tanımlanır. Her $q_E = S_{q_E} + V_{q_E}$ eliptik kuaterniyonu, kutupsal formda, aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$q_E = \|q_E\|_E (\cos \theta + n_E \sin \theta) \quad (2.40)$$

burada $n_E = \frac{V_{q_E}}{\|V_{q_E}\|_E}$, $n_E^2 = -1$, $\cos \theta = \frac{S_{q_E}}{\|q_E\|_E}$, ve $\sin \theta = \frac{\|V_{q_E}\|_E}{\|q_E\|_E}$ olarak belirlenir. Üç boyutlu Öklid uzayında, her birim kuaterniyon bir dönme hareketi tanımlar (Özdemir, 2020).

2.3 Teorem $q_E = \cos \theta + \varepsilon \sin \theta$ birim eliptik kuaterniyon olmak üzere, aşağıdaki dönüşüm ε eksenini etrafında, 2θ eliptik açı kadar, eliptik dönme hareketi belirten bir lineer dönüşümdür:

$$R_{q_E}(u) = q_E \otimes_E u \otimes_E q_E^{-1} \quad (2.41)$$

(Özdemir, 2020).

2.3. Bölünmüş Kuaterniyonlar

Bölünmüş kuaterniyonların kümesi,

$$\begin{aligned} i^2 &= -1, & j^2 &= 1, & k^2 &= 1 \\ ij &= k = -ji, & jk &= i = -kj, & ki &= j = -ik \end{aligned} \quad (2.42)$$

şeklinde belirtilen özellikleri sağlayan ve $q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$ elemanlarından oluşan ve \mathbb{H}_L sembolüyle gösterilen bir kümedir. Bir bölünmüş kuaterniyonun skaler ve vektörel kısımları sırasıyla $S_q = q_0$ ve $V_q = q_1i + q_2j + q_3k$ şeklinde gösterilir. $p = p_0 + p_1i + p_2j + p_3k$ ve $q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$ bölünmüş kuaterniyonlarının çarpımı aşağıdaki gibi verilir,

$$p \otimes_L q = p_0q_0 + g_H(V_p, V_q) + p_0V_q + q_0V_p + (V_p \times_L V_q)$$

burada sırasıyla g_H ve \times_L , Lorentz iç çarpımı ve Lorentz vektörel çarpımı göstermektedir. Bölünmüş kuaterniyon çarpımının matris formu ise aşağıdaki gibidir:

$$p \otimes_L q = \begin{bmatrix} p_0 & -p_1 & p_2 & p_3 \\ p_1 & p_0 & p_3 & -p_2 \\ p_2 & p_3 & p_0 & -p_1 \\ p_3 & -p_2 & p_1 & p_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}.$$

Bir $q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$ bölünmüş kuaterniyonunun eşleniği $\bar{q} = q_0 - q_1i - q_2j - q_3k$ biçiminde tanımlıdır. Bir hiperbolik bölünmüş kuaterniyonun normu ve tersi sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\begin{aligned} N_q &= \sqrt{|q \otimes_L \bar{q}|} = \sqrt{|\bar{q} \otimes_L q|} = \sqrt{|q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2|} \\ q^{-1} &= \frac{\bar{q}}{J_q} \end{aligned}$$

burada $J_q = q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2$ şeklindedir. Burada metrik yapısından dolayı üç tip kuaterniyon tanımlanabilir. Bunlar uzay benzeri, zaman benzeri veya ışık benzeri kuaterniyonlardır ve sırasıyla $J_q < 0, J_q > 0$ veya $J_q = 0$ eşitliklerini sağlarlar. Herhangi bir uzay benzeri kuaterniyonun vektör kısmı uzay benzeri bir vektördür. Zaman benzeri bir kuaterniyonun vektör kısmı ise uzay benzeri, zaman benzeri veya ışık benzeri olabilir (Özdemir, 2020).

Bir bölünmüş kuaterniyon kutupsal formda aşağıdaki gibi üç farklı şekilde ifade edilir:

i. Eğer q H-uzay benzeri bir kuaterniyon ise,

$$q = N_q (\sinh \phi + \xi_0 \cosh \phi)$$

burada $\sinh \phi = \frac{q_0}{N_q}$, $\cosh \phi = \frac{\sqrt{-q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}}{N_q}$ biçiminde olup $\xi_0 = \frac{q_1 i + q_2 j + q_3 k}{\sqrt{-q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}}$, \mathbb{R}^3 uzayında birim uzay benzeri birim vektördür.

ii. Eğer q H-zaman benzeri bir kuaterniyon ve vektör kısmı uzay benzeri ise

$$q = N_q (\cosh \phi + \xi_0 \sinh \phi)$$

şeklindedir. Burada $\cosh \phi = \frac{q_0}{N_q}$, $\sinh \phi = \frac{\sqrt{-q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}}{N_q}$ şeklindedir, $\xi_0 = \frac{q_1 i + q_2 j + q_3 k}{\sqrt{-q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}}$, \mathbb{R}^3 uzayında birim uzay benzeri bir vektördür.

iii. Eğer q H-zaman benzeri bir kuaterniyon ve vektör kısmı zaman benzeri ise

$$q = N_q (\cos \phi + \xi_0 \sin \phi)$$

burada $\cos \phi = \frac{q_0}{N_q}$, $\sin \phi = \frac{\sqrt{q_1^2 - q_2^2 - q_3^2}}{N_q}$ şeklindedir, $\xi_0 = \frac{q_2 i + q_3 j + q_4 k}{\sqrt{q_1^2 - q_2^2 - q_3^2}}$, \mathbb{R}^3 uzayında birim zaman benzeri bir vektördür.

Burada ξ_0 vektörü hiperbolik dönme eksenidir (Özdemir, 2020).

Ayrıca, H-zaman benzeri hiperbolik bölünmüş kuaterniyonlar kümesi, hiperbolik bölünmüş kuaterniyon çarpımı altında bir grup oluşturur ve aşağıdaki gibi gösterilir:

$$\mathbb{T} = \{q = (q_1, q_2, q_3, q_4) : q_1, q_2, q_3, q_4 \in \mathbb{R}, J_q > 0\}$$

2.4 Teorem 3-boyutlu Lorentz uzayında dönme hareketleri, zaman benzeri birim bölünmüş kuaterniyonlar tarafından ifade edilebilir. Zaman benzeri birim bölünmüş q kuaterniyonuna karşılık gelen Lorentz uzayındaki dönme hareketinin matris formu aşağıdaki gibidir:

$$\mathbf{R}_q = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 & 2q_0q_3 - 2a_2q_1q_2 & -2q_0q_2 - 2q_1q_3 \\ 2q_1q_2 + 2q_0q_3 & q_0^2q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 & -2q_0q_1 - 2q_2q_3 \\ 2q_1q_3 - 2q_0q_2 & 2q_0q_1 - 2q_2q_3 & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 \end{bmatrix}$$

(Özdemir, 2020).

2.5 Teorem $\{\xi_0, \xi_1, \xi_2\}$ ortonormal kümesi aşağıdaki eşitliği sağlar:

$$\xi_0 \times_L \xi_1 = \xi_2, \quad \xi_2 \times_L \xi_0 = -\xi_1, \quad \xi_1 \times_L \xi_2 = \xi_0$$

burada ξ_1 zaman benzeri vektör, \mathbf{v} vektörü ξ_0 ve ξ_1 vektörlerinin gerdiği düzlemde yatan bir vektör olmak üzere aşağıdaki ifadeler gerçekleşir:

- i. Eğer $q = \cosh \phi + \xi_0 \sinh \phi$ uzay benzeri vektör kısmına sahip, birim zamana benzer bölünmüş kuaterniyon ise $\mathbf{R}_q(\mathbf{v}) = q \otimes_L \mathbf{v} \otimes_L q^{-1}$ dönüşümü 2ϕ hiperbolik açılı ve ξ_0 uzay benzeri eksenli bir dönme hareketi tanımlar.
- ii. Eğer $q = \cos \phi + \xi_0 \sin \phi$ zaman benzeri vektör kısmına sahip, birim zamana benzer bölünmüş kuaterniyon ise $\mathbf{R}_q(\mathbf{v}) = q \otimes_H \mathbf{v} \otimes_L q^{-1}$ dönüşümü 2ϕ açılı ve ξ_0 H-zaman benzeri eksenli bir dönme hareketi tanımlar .

(Özdemir ve Ergin, 2005; Özdemir ve Ergin, 2006).

2.4. Hiperbolik Bölünmüş Kuaterniyonlar

Bu bölümde 3-boyutlu Lorentz uzayında bir hiperboloid üzerindeki dönmeyi açıklayan hiperbolik bölünmüş kuaterniyonlar verilecektir.

$\{1, i, j, k\}$ aşağıdaki eşitlikleri sağlasın:

$$\begin{aligned} i^2 &= -a_1, & j^2 &= a_2, & k^2 &= a_3, \\ ij &= \frac{\Delta}{a_3}k = -ji, & jk &= \frac{-\Delta}{a_1}i = -kj, & ki &= \frac{\Delta}{a_2}j = -ik \end{aligned} \quad (2.43)$$

burada $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^+$ ve $\Delta = \sqrt{a_1 a_2 a_3}$. Tüm hiperbolik bölünmüş kuaterniyonların kümesi, yukarıda belirtilen dört temel öğeye sahip, değişmeli olmayan, bölümlü olmayan bir halkadır ve bu küme $\mathbb{H}_{a_1, a_2, a_3}$ ile gösterilir. Bir $q_H = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ hiperbolik bölünmüş kuaterniyonunun skaler ve vektörel kısımları sırasıyla $S_{q_H} = q_0$ ve $V_{q_H} = q_1 i + q_2 j + q_3 k$ şeklinde gösterilir. $p_H = p_0 + p_1 i + p_2 j + p_3 k$ ve $q_H = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ hiperbolik bölünmüş kuaterniyonlarının çarpımı aşağıdaki gibi verilir,

$$p_H \otimes_H q_H = p_0 q_0 + g(V_{p_H}, V_{q_H}) + p_0 V_{q_H} + q_0 V_{p_H} + (V_{p_H} \times_H V_{q_H})$$

burada sırasıyla g_H ve \times_H , hiperbolik iç çarpımı ve hiperbolik vektörel çarpımı göstermektedir. Hiperbolik bölünmüş kuaterniyon çarpımının matris formu ise aşağıdaki gibidir:

$$p_H \otimes_H q_H = \begin{bmatrix} p_0 & -a_1 p_1 & a_2 p_2 & a_3 p_3 \\ p_1 & p_0 & \frac{p_3 \Delta}{a_1} & \frac{-p_2 \Delta}{a_1} \\ p_2 & \frac{p_3 \Delta}{a_2} & p_0 & -\frac{p_1 \Delta}{a_2} \\ p_3 & -\frac{p_2 \Delta}{a_3} & \frac{p_1 \Delta}{a_3} & p_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}.$$

Bir $q_H = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ hiperbolik bölünmüş kuaterniyonunun eşleniği $\bar{q}_H = q_0 - q_1 i - q_2 j - q_3 k$ biçiminde tanımlıdır. Bir hiperbolik bölünmüş kuaterniyonun normu ve tersi sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$N_{q_H} = \sqrt{|q_H \otimes_H \bar{q}_H|} = \sqrt{|q_H \otimes_H q_H|} = \sqrt{|q_0^2 + a_1 q_1^2 - a_2 q_2^2 - a_3 q_3^2|}$$

$$q_H^{-1} = \frac{\bar{q}_H}{J_{q_H}}$$

burada $J_{q_H} = q_0^2 + a_1 q_1^2 - a_2 q_2^2 - a_3 q_3^2$ şeklindedir.

Bu uzaydaki metrik yapısından dolayı üç tip kuaterniyon tanımlanabilir. Bunlar H-uzay benzeri, H-zaman benzeri ve H-ışık benzeri kuaterniyonlardır ve sırasıyla $J_{q_H} < 0, J_{q_H} > 0$ veya $J_{q_H} = 0$ eşitliklerini sağlarlar. Herhangi bir H-uzay benzeri kuaterniyonun vektör kısmı uzay benzeri bir vektördür. H-zaman benzeri bir kuaterniyonun vektör kısmı ise uzay benzeri, zaman benzeri veya ışık benzeri olabilir.

Bir hiperbolik bölünmüş kuaterniyon kutupsal formda aşağıdaki gibi üç farklı şekilde ifade edilir:

i. Eğer q_H H-uzay benzeri bir kuaterniyon ise,

$$q_H = N_{q_H} (\sinh \phi + \xi_0 \cosh \phi)$$

burada $\sinh \phi = \frac{q_0}{N_{q_H}}$, $\cosh \phi = \frac{\sqrt{-a_1 q_1^2 + a_2 q_2^2 + a_3 q_3^2}}{N_{q_H}}$ biçiminde olup $\xi_0 = \frac{q_1 i + q_2 j + q_3 k}{\sqrt{-a_1 q_1^2 + a_2 q_2^2 + a_3 q_3^2}}$, $\mathbb{R}_{a_1 a_2 a_3}^{1,2}$ uzayında uzay benzeri birim bir vektördür.

ii. Eğer q_H H-zaman benzeri bir kuaterniyon ve vektör kısmı uzay benzeri ise

$$q_H = N_{q_H} (\cosh \phi + \xi_0 \sinh \phi)$$

şeklindedir. Burada $\cosh \phi = \frac{q_0}{N_{q_H}}$, $\sinh \phi = \frac{\sqrt{-a_1 q_1^2 + a_2 q_2^2 + a_3 q_3^2}}{N_{q_H}}$ şeklindedir. Burada $\xi_0 = \frac{q_1 i + q_2 j + q_3 k}{\sqrt{-a_1 q_1^2 + a_2 q_2^2 + a_3 q_3^2}}$, $\mathbb{R}_{a_1 a_2 a_3}^{1,2}$ uzayında uzay benzeri birim bir vektördür.

iii. Eğer q_H H-zaman benzeri bir kuaterniyon ve vektör kısmı zaman benzeri ise

$$q_H = N_{q_H} (\cos \phi + \xi_0 \sin \phi)$$

burada $\cos \phi = \frac{q_0}{N_{q_H}}$, $\sin \phi = \frac{\sqrt{a_1 q_1^2 - a_2 q_2^2 - a_3 q_3^2}}{N_{q_H}}$ şeklindedir, $\xi_0 = \frac{q_2 i + q_3 j + q_4 k}{\sqrt{a_1 q_1^2 - a_2 q_2^2 - a_3 q_3^2}}$, $\mathbb{R}_{a_1 a_2 a_3}^{1,2}$ uzayında zaman benzeri birim bir vektördür.

Burada ξ_0 hiperbolik dönme eksenidir. Ayrıca, H-zaman benzeri hiperbolik bölünmüş kuaterniyonlar kümesi, hiperbolik bölünmüş kuaterniyon çarpımı altında bir grup oluşturur ve aşağıdaki gibi gösterilir:

$$\mathbb{TH}_{a_1, a_2, a_3} = \{q_H = (q_1, q_2, q_3, q_4) : q_1, q_2, q_3, q_4 \in \mathbb{R}, J_q > 0\}$$

(Özdemir, 2020).

2.6 Teorem Genel bir hiperboloid üzerindeki hiperbolik dönme hareketleri, H-zaman benzeri birim bölünmüş kuaterniyonlar tarafından oluşturulabilir. H-zaman benzeri birim bölünmüş q kuaterniyonuna karşılık gelen hiperbolik dönme hareketinin matris formu aşağıdaki gibidir:

$$\mathbf{R}_{q_H} = \begin{bmatrix} q_0^2 + a_1 q_1^2 + a_2 q_2^2 + a_3 q_3^2 & 2 \frac{q_0 q_3 \Delta}{a_1} - 2 a_2 q_1 q_2 & -\frac{2 q_0 q_2 \Delta}{a_1} - 2 a_3 q_1 q_3 \\ 2 a_1 q_1 q_2 + 2 \frac{\Delta q_0 q_3}{a_2} & q_0^2 - a_1 q_1^2 - a_2 q_2^2 + a_3 q_3^2 & -\frac{2 q_0 q_1 \Delta}{a_2} - 2 a_3 q_2 q_3 \\ 2 a_1 q_1 q_3 - 2 \frac{\Delta q_0 q_2}{a_3} & 2 \frac{q_0 q_1 \Delta}{a_3} - 2 a_2 q_2 q_3 & q_0^2 - a_1 q_1^2 + a_2 q_2^2 - a_3 q_3^2 \end{bmatrix}$$

(Özdemir, 2020).

2.7 Teorem $\{\xi_0, \xi_1, \xi_2\}$ ortonormal kümesi aşağıdaki eşitliği sağlar:

$$\xi_0 \times_H \xi_1 = \xi_2, \quad \xi_2 \times_H \xi_0 = -\xi_1, \quad \xi_1 \times_H \xi_2 = \xi_0$$

burada ξ_1 H-zaman benzeri vektör, \mathbf{v} vektörü ξ_0 ve ξ_1 vektörlerinin gerdiği düzlemde yatan bir vektör olmak üzere aşağıdaki ifadeler gerçektir:

- i. Eğer $q_H = \cosh \phi + \xi_0 \sinh \phi$ uzay benzeri vektör kısmına sahip, birim H-zamana benzer hiperbolik bölünmüş kuaterniyon ise $\mathbf{R}_{q_H}(\mathbf{v}) = q_H \otimes_H \mathbf{v} \otimes_H q_H^{-1}$ dönüşümü 2ϕ hiperbolik açılı ve ξ_0 H-uzay benzeri eksenli bir hiperbolik dönme hareketi tanımlar.
- ii. Eğer $q_H = \cos \phi + \xi_0 \sin \phi$ zaman benzeri vektör kısmına sahip, birim H-zamana benzer hiperbolik bölünmüş kuaterniyon ise $\mathbf{R}_{q_H}(\mathbf{v}) = q_H \otimes_H \mathbf{v} \otimes_H q_H^{-1}$ dönüşümü 2ϕ hiperbolik açılı ve ξ_0 H-zaman benzeri eksenli bir hiperbolik dönme hareketi tanımlar.

(Özdemir, 2016).

2.8 Teorem \mathbf{u} ışık benzeri vektör parçasına sahip bir zaman benzeri kuaterniyon $q_H = 1 - \frac{\phi}{2}\mathbf{u}$ formunda ifade edilebilir. Bu durumda, bu kuaterniyon \mathbf{u} ışık benzeri eksen etrafında ϕ açılı bir dönme hareketi (parabolik) verir (Şimsek ve Özdemir, 2016).

2.9 Teorem p_H ve q_H aşağıdaki gibi verilen aynı \mathbf{u} ışık benzeri vektör parçasına sahip iki H -zaman benzeri hiperbolik bölünmüş kuaterniyon olsun,

$$p_H = 1 - \frac{\phi_1}{2}\mathbf{u}, \quad q_H = 1 + \frac{\phi_2}{2}\mathbf{u}$$

Bu durumda, $R_{p_H \otimes_H q_H}$ dönüşümü \mathbf{u} eksen etrafında $\phi_1 + \phi_2$ açılı bir dönme hareketi tanımlar (Şimsek ve Özdemir, 2016).

2.10 Teorem A , bir semi- g_H -anti simetrik matris ve u bir ışık benzeri vektör $u \in \text{span}(N)$, $N = (u_1, u_2, u_3)$ olsun. A matrisi aşağıda belirtilen eşitlik ile birlikte u ışık benzeri eksen etrafında g_H dönme matrisi belirtir.

$$R_{\phi}^{g_H, u} = e^{-A\phi} = I - \phi A + \frac{\phi^2}{2}A^2. \quad (2.44)$$

Burada A matrisi aşağıdaki formda verilir:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & u_3/a_1 & -u_2/a_1 \\ u_3/a_2 & 0 & -u_1/a_2 \\ -u_2/a_3 & u_1/a_3 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

$R_{\phi}^{g_H, u}$ matrisi, $a_1x^2 = a_2y^2 + a_3z^2$ ışık benzeri konisi üzerinde dönme hareketi yaptırır ve aşağıdaki gibi belirtilir:

$$R_{\phi}^{g_H, u} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\phi^2(a_2u_2^2 + a_3u_3^2) + 1 & -\frac{\phi}{a_1}u_3\Delta^* - \frac{1}{2}\phi^2a_2u_1u_2 & \frac{\phi}{a_1}u_2\Delta^* - \frac{1}{2}\phi^2a_2u_1u_2 \\ \frac{1}{2}\phi^2a_1u_1u_2 + a_3u_3^2 - \frac{\phi}{a_2}u_3\Delta^* & 1 - \frac{1}{2}\phi^2(a_1u_1^2 - a_3u_3^2) & \frac{\phi}{a_2}u_1\Delta^* - \frac{1}{2}\phi^2a_3u_2u_3 \\ \frac{\phi}{a_3}u_2\Delta^* + \frac{1}{2}\phi^2a_1u_1u_3 & -\frac{\phi}{a_3}u_1\Delta^* - \frac{1}{2}\phi^2a_2u_2u_3 & 1 - \frac{1}{2}\phi^2(a_1u_1^2 - a_2u_2^2) \end{bmatrix}. \quad (2.46)$$

2.5. Dual Sayılar ve Eliptik Dual Kuaterniyonlar

Dual sayılar, reel sayıların, $\varepsilon^2 = 0$, $\varepsilon \neq 0$ olacak şekilde bir eleman ile genişletilmesiyle oluşan bir sayı sistemidir. Dual sayılar cebiri, Clifford tarafından tanımlanmıştır.

2.14 Tanım Dual sayılar kümesi aşağıdaki gibi belirtilir:

$$\mathbb{D} = \{a + \varepsilon b : a, b \in \mathbb{R}, \varepsilon^2 = 0\} \quad (2.47)$$

(Clifford, 1871; Özdemir,2020).

2.15 Tanım Bileşenleri dual sayılardan oluşan kuaterniyonlara dual kuaterniyonlar denir. Yani, dual kuaterniyonlar kümesi de aşağıdaki gibi verilir:

$$\mathbb{H}(\mathbb{D})_E = \{a + bi + cj + dk : a, b, c, d \in \mathbb{D}, i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1\}. \quad (2.48)$$

Benzer şekilde bileşenleri dual sayılardan oluşan eliptik (hiperbolik bölünmüş) kuaterniyona eliptik (hiperbolik bölünmüş) dual kuaterniyon denir.

2.6. Eliptik Dual Kuaterniyon Operatörü

p_E, q_E kuaterniyonlarının dual kuaterniyon çarpımı aşağıdaki gibi belirtilir:

$$p_E \otimes_E q_E = -g_E(p_E, q_E) + p_E \times_E q = -\cos \Theta + N \sin \Theta, \quad (2.49)$$

burada $\Theta = \theta + \varepsilon \theta^*$, p_E ve q_E arasındaki dual açıyı belirtmektedir. Ayrıca N birim vektörü, $N = \frac{p_E \times_E q_E}{\|p_E \times_E q_E\|}$ şeklinde tanımlanır. Bununla birlikte, aşağıdaki gibi bir birim dual kuaterniyon alınsın,

$$Q_E = -q_E \otimes_E p_E = q_E^{-1} \otimes_E p_E = q_E \otimes_E p_E^{-1} \quad (2.50)$$

bu durumda $Q_E = \cos \Theta + N \sin \Theta$ dual kuaterniyon operatörü olarak adlandırılır. $Q_E = q_E \otimes_E p_E^{-1}$ denklemini kullanarak, $Q_E \otimes_E p_E = q_E$ elde edilir. Bu sayede, Q_E operatörünün p_E kuaterniyonunu N eksenini etrafında θ açısı kadar eliptik döndürüp aynı eksen yönünde θ^* kadar öteleme yaptığını söyleyebiliriz.

2.11 Teorem $q_E = q_1 + q_2i + q_3j + q_4k$ birim kuaterniyonu yardımıyla tanımlanan $Q_E = q_E + \frac{\varepsilon}{2}uq_E$ bir dual kuaterniyondur. P noktasının dual gösteriminin $1 + \varepsilon P$ olarak verildiğini varsayalım, aşağıdaki şekilde verilen dönüşüm, P noktasının n_E eksenini etrafında 2θ kadar

açı ile dönmesini ve u yönünde ötelemesini gösterir:

$$R_Q^T : \mathbb{H}(\mathbb{D}) \rightarrow \mathbb{H}(\mathbb{D}); P \rightarrow R_Q^T(P) = Q \otimes_E (1 + \varepsilon P) \otimes_E Q^*. \quad (2.51)$$

Bir eksen etrafında dönme ve aynı eksen boyunca ötelemenin birleşimi olan hareket vida hareketi olarak adlandırılır (Özdemir, 2020).

2.12 Teorem $\Theta = \theta + \varepsilon\theta^*$ bir dual açı ve $Q_E = \cos\Theta + N\sin\Theta$ bir birim dual kuaterniyon olsun. Aşağıdaki şekilde verilen dönüşüm:

$$L_V : \mathbb{H}(\mathbb{D}) \rightarrow \mathbb{H}(\mathbb{D}); Q_E \rightarrow L_V(Q_E) = V \otimes_E Q_E \quad (2.52)$$

olmak üzere, $\mathbb{R}_{a_1, a_2, a_3}$ uzayında, d_N etrafında, N esas alınarak, θ açısı kadar eliptik dönme ve d_N yönünde θ^* kadar ötelemeyi belirtir.

2.7. Dual Hiperbolik Bölünmüş Kuaterniyon Operatörü

$q_H = q_H + \varepsilon q_H^*$ hiperbolik dual bölünmüş kuaterniyonunu alalım. q_H kuaterniyonunun vektörel kısmı uzay benzeri bir vektör ise

$$Q_H = \cosh\Phi + \sinh\Phi N \quad (2.53)$$

biçimindedir. Burada $\Phi = \phi + \varepsilon\phi^*$ şeklinde tanımlıdır. Eğer q_H kuaterniyonunun vektörel kısmı zaman benzeri bir vektör ise,

$$Q_H = \cos\Theta + \sin\Theta N \quad (2.54)$$

formunda yazılabilir. Burada $\Theta = \theta + \varepsilon\theta^*$ biçimindedir. Eliptik dual kuaterniyon operatörüne benzer olarak yukarıda tanımlanan kuaterniyon operatörleri, $\mathbb{R}_{a_1, a_2, a_3}^{1,2}$ uzayında, d_N etrafında, N esas alınarak, ϕ (θ) açısı kadar hiperbolik (eliptik) dönme ve d_N yönünde ϕ^* (θ^*) kadar ötelemeyi belirtir.

3. ELİPTİK VE DAİRESEL POLARİZASYON

Dual kuaterniyonlar, kinematik alanında vida hareketinin cebirsel gösterimi için kullanılır. Bu çalışmada, vida hareketi yardımıyla dairesel ve eliptik polarizasyon formülize edilmiştir. Optik fiberde polarize edilmiş ışığın hareketini incelerken, bu hareketin vida hareketi ile dual kuaterniyonların vektörel ve skaler kısımları yardımıyla ilişkisi, ayrıca sonuçlardan elde edilen fiziksel ve matematiksel anlamı gösterilmiştir. Genel olarak, ışık dalgasını polarize etmek yönlendirmek anlamına gelir. Elektrik alan, manyetik alan ve ışığın polarizasyon yönü (yani optik fiber ile ilişkili eğrinin teğet vektörü) elektromanyetik dalgaları oluşturur. Bu dalgalar, genel olarak elektrik alan yönü boyuncadır. Elektromanyetik dalgalar, boşlukta (vakum), Maxwell denklemlerinin çözümleri olarak bulunur. Bu denklemler aşağıda belirtilmiştir:

$$g(\nabla, \mathbf{E}) = 0, \quad (3.1)$$

$$g(\nabla, \mathbf{B}) = 0, \quad (3.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (3.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (3.4)$$

Bu dört önemli denklemin aynı anda sağlanması için, dalgaların, yayılım yönüne çarpız olarak \mathbf{E} ve \mathbf{B} alanlarına sahip olmak gerekir. Polarize edilmiş ışığın dairesel ve eliptik hareketi, bir vidanın dönme hareketi yardımıyla gösterilebilir. Aynadaki yansıma hareketi ile birlikte, sağ yönlü dönme gösteren bir vida hareketi, sol yönlü dönme gösteren bir vida hareketine dönüşür. Bunun tersi de geçerlidir. Bu yüzden optik fiberde polarize edilmiş ışığın dairesel ve eliptik hareketini incelemek için vida hareketi oldukça kullanışlı bir yöntemdir. Her dual kuaterniyon, aşağıdaki formda dual vektör yardımı ile ifade edilebilir:

$$a + bi + cj + dk = u + \epsilon u^*. \quad (3.5)$$

Böylece, her uygun dual kuaterniyon, yönü u tarafından belirlenen u^* vektörüne dik düzlemdeki uzayda bir yönlü doğru parçasına karşılık gelir. Bunu kullanarak vida operatörü tanımlanmış ve vida operatörü yardımıyla dairesel ve eliptik polarizasyon ifade edilmiştir. Bir eksen etrafında dönme ve aynı ekseninde ötelemeyi ifade eden harekete vida hareketi denir. Bu hareketi yaptıran operatöre de vida operatörü denir.

3.1. Bir Optik Fiber Boyunca Polarize Işık Dalgasının Dairesel Polarizasyonu

Elektrik alanı $\mathbf{E} = (E_x, E_y)$ biçiminde ifade edelim. Burada E_x ve E_y büyüklükleri eşitse, bir optik fiber boyunca polarizasyon durumunda elektrik alan vektörünün uç noktaları polarizasyon düzleminde bir daire tanımlar ve dalganın dairesel polarize olduğu söylenir. Polari-

zasyon durumu \mathbf{E} elektrik alanı, eğer sağ vida hareketi yapıyorsa sağ dairesel polarizasyon, sol yönlü bir vida hareketi yapıyorsa, sol dairesel polarizasyon olarak adlandırılır.

Bir optik fiber ile ilişkili uzay eğrisi γ üzerindeki Frenet çatı elemanları $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ ve $q = \cos \theta + \mathbf{t} \sin \theta$ reel birim kuaterniyon olsun. Polarize ışık dalgasının yayılma yönünün optik fiber ile ilişkilendirilmiş eğrinin \mathbf{t} teğet vektörü boyunca olduğunu varsayalım. Bu durumda:

$$Q = q + \frac{\varepsilon}{2} \mathbf{t}_E \otimes q \quad (3.6)$$

biçiminde tanımlanan birim kuaterniyon ile optik fiber boyunca polarize ışık dalgasının dairesel polarizasyonu aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$R_Q^T = \mathbb{H}(\mathbb{D}) \rightarrow \mathbb{H}(\mathbb{D}); 1 + \varepsilon \mathbf{E} \rightarrow R_Q^T(1 + \varepsilon \mathbf{E}) = Q(1 + \varepsilon \mathbf{E})Q^*, \quad (3.7)$$

burada \mathbf{E} polarizasyon vektörü \mathbf{t}_E eksenini boyunca 2θ açısı kadar bir dönme ve \mathbf{t}_E eksenini yönünde öteleme hareketi yapar. Bu durumda aşağıdaki teorem verilebilir:

3.1 Teorem \mathbb{R}^3 uzayında bir optik fiber ile ilişkilendirilmiş γ eğrisinin Frenet çatı elemanları $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ olmak üzere \mathbf{t} teğet vektörü ile \mathbf{E} polarizasyon vektörü arasındaki açı dik açı olsun. Bu durumda $q = \cos \theta + \mathbf{t} \sin \theta$ birim kuaterniyonu ile elde edilen $Q = \cos \Theta + \mathbf{t} \sin \Theta$ birim dual kuaterniyonu aracılığıyla bir optik fiber boyunca polarize ışık dalgasının dairesel polarizasyonu aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\mathcal{L}_Q : \mathbb{H}(\mathbb{D}) \rightarrow \mathbb{H}(\mathbb{D}); \mathbf{E} \rightarrow \mathcal{L}_Q(\mathbf{E}) = Q \otimes \mathbf{E} \quad (3.8)$$

burada \mathbf{E} polarizasyon vektörü \mathbf{t} teğet vektörü etrafında θ açısı kadar sol yönlü vida hareketi yapar. Benzer şekilde,

$$\mathcal{R}_Q : \mathbb{H}(\mathbb{D}) \rightarrow \mathbb{H}(\mathbb{D}); \mathbf{E} \rightarrow \mathcal{R}_Q(\mathbf{E}) = \mathbf{E} \otimes Q \quad (3.9)$$

burada da \mathbf{E} polarizasyon vektörü \mathbf{t} teğet vektörü etrafında θ açısı kadar sağ yönlü bir vida hareketi yapar.

Kanıt $\mathbf{E}(s)$ ve $\mathbf{E}' = \mathbf{E}(s + \Delta s)$ has birim kuaterniyonik formda elektrik alanının iki gösterimi olsun. Bu durumda, \mathbf{E} ve \mathbf{E}' elektrik alanlarına karşılık gelen yönlü doğrular sırasıyla $d_{\mathbf{E}}$ ve $d_{\mathbf{E}'}$ olarak gösterilir. Bu iki doğru arasındaki dual açığı $\Theta = \theta + \varepsilon \theta^*$ ile gösterelim. \mathbf{t} vektörü polarizasyon düzlemine dik olduğundan aşağıdaki ifade yazılabilir:

$$\mathbf{E} \otimes_E \mathbf{E}' = -\cos \Theta + \mathbf{t} \sin \Theta, \quad (3.10)$$

$$\mathbf{E} \otimes \mathbf{E}'^{-1} = \mathbf{E}^{-1} \otimes \mathbf{E}' = \cos \Theta + \mathbf{t} \sin \Theta, \quad (3.11)$$

$$\mathbf{E} \otimes \mathbf{E}'^{-1} = \mathbf{E}^{-1} \otimes \mathbf{E}' = Q. \quad (3.12)$$

□

Bu nedenle aşağıdaki eşitlikler elde edilmiş olur:

$$\mathcal{L}_Q(\mathbf{E}) = Q \otimes \mathbf{E} = \mathbf{E}' \text{ ve } \mathbf{E}_Q(\mathbf{E}) = \mathbf{E} \otimes \mathbf{E}' = \mathbf{E}. \quad (3.13)$$

3.2 Teorem \mathbb{R}^3 uzayında bir optik fiber ile ilişkilendirilmiş γ eğrisi ve bu eğrinin Frenet çatı elemanları $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ öyle ki γ eğrisinin teğet vektörü \mathbf{t} ile polarizasyon vektörü \mathbf{E} arasındaki açı dik açı olsun. Bu durumda, optik fiber boyunca dairesel polarizasyon durumunda, polarizasyon vektörünün uç noktaları dairesel-Rytov eğrisi olarak adlandırılan bir eğri çizer ve bu eğri $q = \cos(k\pi s) + \mathbf{t} \sin(k\pi s)$ birim kuaterniyonu yardımıyla aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$D_R = \gamma + rq \otimes \mathbf{n} \quad (3.14)$$

burada k dairesel-Rytov eğrisinin yönünü ve adımını, r ise yarıçapını belirtir.

Kanıt \mathbb{R}^3 uzayında bir optik fiber ile ilişkilendirilmiş γ eğrisi, bu eğrinin Frenet çatı elemanları $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ öyle ki γ eğrisinin teğet vektörü \mathbf{t} ile polarizasyon vektörü \mathbf{E} birbirine dik olsun. Bu durumda \mathbf{E} polarizasyon vektörü, \mathbf{t} teğet vektörü etrafında döner ve teğet vektör boyunca ötelenir. Dolayısıyla, aşağıdaki eşitlik yazılabilir:

$$D_R = \gamma + r(\mathbf{n}_E \cos \theta + \mathbf{b}_E \sin \theta),$$

burada $\theta = k\pi s$ 'dir. Eğer $q = \cos(k\pi s) + \mathbf{t} \sin(k\pi s)$ birim kuaterniyonu ile \mathbf{n} has kuaterniyonu, kuaterniyon çarpımı yardımıyla işleme sokulursa, aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$q_E \otimes_E \mathbf{n}_E = \mathbf{n}_E \cos(k\pi s) + \mathbf{b}_E \sin(k\pi s),$$

Bu durumda aşağıdaki denklem sağlanır:

$$D_R = \gamma + rq_E \otimes_E \mathbf{n}_E,$$

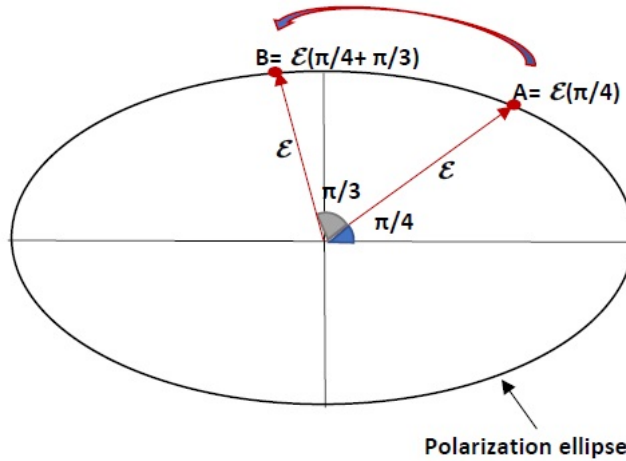
burada k katsayısı helis eğrisinin adımını ve yönünü belirtir. □

3.2. Bir Optik Fiber Boyunca Polarize Işık Dalgasının Eliptik Polarizasyonu

Elektrik alanı $\mathbf{E} = (E_x, E_y)$ biçiminde ifade edelim. E_x ve E_y bileşenlerinin büyüklükleri eşit değilse, bir optik fiber boyunca polarizasyon durumunda elektrik alan vektörünün uç noktaları polarizasyon düzleminde bir elips eğrisi çizer ve polarize ışık dalgasının yayılımının eliptik olarak polarize olduğu söylenir. Elektromanyetik dalgalar, elektrik alanının yayılma yönü boyunca dönmesine bağlı olarak eliptik (daireysel) sağ polarize veya eliptik (daireysel) sol polarize olabilir. Bu durumu bir örnekle açıklayalım: $\mathbf{E}(\theta) = (a \cos \theta, b \sin \theta)$ elipsi üzerindeki $A = \mathbf{E}(\frac{\pi}{4}) = (a\frac{\sqrt{2}}{2}, b\frac{\sqrt{2}}{2})$ ve $B = \mathbf{E}(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}) = (a\frac{\sqrt{2}}{4} - a\frac{\sqrt{6}}{4}, b\frac{\sqrt{2}}{4} + a\frac{\sqrt{6}}{4})$ noktalarını ele alalım, bu iki nokta optik fiber boyunca polarize ışık dalgasının yayılımı sırasında elektrik alanın uç noktalarının belirttiği iki noktadır. Yani, A uç noktasını $\frac{\pi}{3}$ açısı kadar eliptik olarak döndürürsek, B uç noktasını elde ederiz. Bu sonucu göstermek için $g(x,y) = \frac{x_1 y_1}{a^2} + \frac{x_2 y_2}{b^2}$ eliptik iç çarpımını ve aşağıda belirtilen eliptik ortogonal matrisi kullanırız:

$$M = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\frac{a \sin \theta}{b} \\ \frac{b \sin \theta}{a} & \cos \theta \end{bmatrix}, \quad \theta = \frac{\pi}{3}.$$

$MA = B$ eşitliğini elde ederiz.



Şekil 3.1 Elektrik alanın eliptik dönme modeli

Yukarıdaki örnekte, $a = b$ olarak alırsak, daireysel polarizasyon modeli elde ederiz. Bazı özel durumlarda eliptik polarizasyon, daireysel ve doğrusal polarizasyon gibi diğer polarizasyon biçimlerini de içerir.

Aşağıdaki bölümlerde kuaterniyon cebiri yardımıyla eliptik, daireysel ve doğrusal polarizasyon durumlarını açıklayacağız.

Bir optik fiberle ilişkili γ eğrisinin Frenet çatı elemanları $\{\mathbf{t}_E, \mathbf{n}_E, \mathbf{b}_E\}$ ve $q_E = \cos \theta + \mathbf{t}_E \sin \theta$ birim eliptik kuaterniyon olsun. Bu durumda optik fiber boyunca polarize ışık dalgasının eliptik polarizasyonu

$$Q_E = q_E + \frac{\varepsilon}{2} \mathbf{t}_E \otimes_E q_E \quad (3.15)$$

birim dual kuaterniyonu ile aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$R_{Q_E}^T = \mathbb{H}_{\mathbb{E}}(\mathbb{D}) \rightarrow \mathbb{H}_{\mathbb{E}}(\mathbb{D}); 1 + \varepsilon \mathbf{E} \rightarrow R_{Q_E}^T(1 + \varepsilon \mathbf{E}) = Q_E \otimes_E (1 + \varepsilon \mathbf{E}) \otimes_E Q_E^* \quad (3.16)$$

burada \mathbf{E} polarizasyon vektörü, \mathbf{t}_E eksenini etrafında 2θ açısı kadar eliptik bir dönüş ve \mathbf{t}_E yönünde bir öteleme hareketi yapar.

$Q_E = \cos \Theta + \mathbf{t}_E \sin \Theta$ birim dual eliptik kuaterniyonunu alalım, öyle ki $\Theta_E = \theta + \varepsilon \theta^*$ biçiminde tanımlansın. Bu durumda aşağıdaki karakterizasyonlar elde edilir:

- Eğer $a_i \neq 1$, $i = \{1, 2, 3\}$, $\theta \neq 0$ ve $\theta^* \neq 0$ ise $g_E(x, y) = a_1 x_1 y_1 + a_2 x_2 y_2 + a_3 x_3 y_3$ eliptik iç çarpımını kullanırsak, Q_E birim dual kuaterniyonu optik fiber boyunca eliptik polarizasyon durumunu oluşturur.
- Eğer $a_1 = a_2 = a_3 = 1$, $\theta \neq 0$ ve $\theta^* \neq 0$ ise g_E standart Öklid iç çarpımı olur ve bu durumda Q_E birim dual kuaterniyonu bir optik fiber boyunca dairesel polarizasyon durumunu oluşturur.
- Eğer $\theta = 0$ ve $\theta^* \neq 0$ ise Q_E birim dual kuaterniyonu lineer polarizasyon durumunu oluşturur.

Bu durumda aşağıdaki teorem elde edilir:

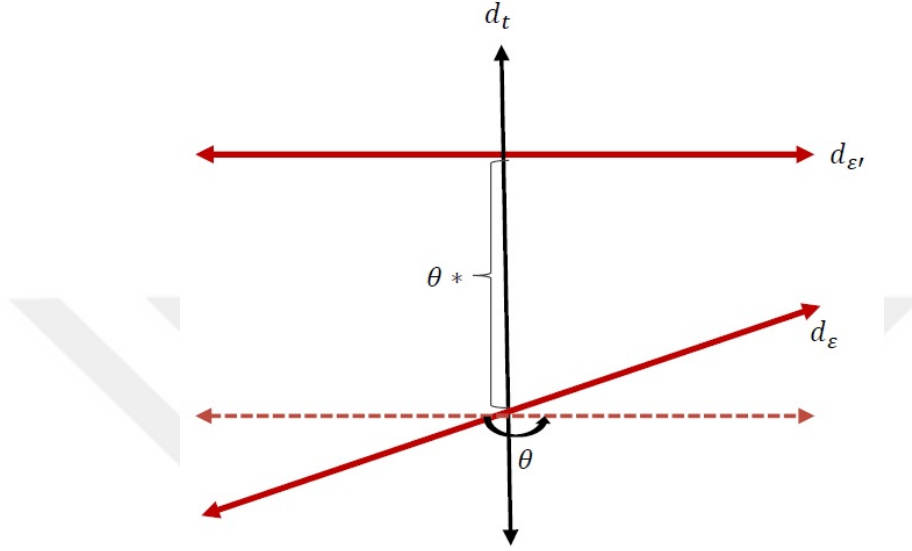
3.3 Teorem $\mathbb{R}_{a_1, a_2, a_3}^3$ uzayında bir optik fiber ile ilişkilendirilmiş γ eğrisinin Frenet çatı elemanları $\{\mathbf{t}_E, \mathbf{n}_E, \mathbf{b}_E\}$ olmak üzere \mathbf{t}_E teğet vektörü ile \mathbf{E} polarizasyon vektörü arasındaki açı dik açı olsun. Bu durumda $q_E = \cos \theta + \mathbf{t}_E \sin \theta$ birim eliptik kuaterniyonu ile elde edilen $Q_E = \cos \Theta + \mathbf{t}_E \sin \Theta$ birim dual eliptik kuaterniyonu aracılığıyla bir optik fiber boyunca polarize ışık dalgasının eliptik polarizasyonu aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\mathcal{L}_{Q_E} : \mathbb{H}_{\mathbb{E}}(\mathbb{D}) \rightarrow \mathbb{H}_{\mathbb{E}}(\mathbb{D}); \mathbf{E} \rightarrow \mathcal{L}_{Q_E}(\mathbf{E}) = Q_E \otimes_E \mathbf{E} \quad (3.17)$$

burada vida operatörü \mathbf{E} polarizasyon vektörüne \mathbf{t}_E teğet vektörü etrafında, sol eliptik polarize olarak vida hareketi yaptırır. Aynı şekilde;

$$\mathcal{R}_{Q_E} : \mathbb{H}_{\mathbb{E}}(\mathbb{D}) \rightarrow \mathbb{H}_{\mathbb{E}}(\mathbb{D}); \mathbf{E} \rightarrow \mathcal{R}_{Q_E}(\mathbf{E}) = \mathbf{E} \otimes_E Q_E \quad (3.18)$$

burada vida operatörü \mathbf{E} polarizasyon vektörüne \mathbf{t}_E teğet vektörü etrafında, sağ eliptik polarize olarak vida hareketi yaptırır.



Şekil 3.2 d_{t_E} ekseninde θ açısı kadar dönme ve aynı eksen yönünde θ^* kadar öteleme yaptıran bir vida hareketi modeli

Sonuç Eğer $\Theta_E = \theta_E + \varepsilon\theta_E^*$ dual açısı $\theta_E = 0$ için $\theta_E^* \neq 0$ ise, $q_E = \cos \Theta_E + \mathbf{t}_E \sin \Theta_E$ operatörü yalnızca öteleme hareketi yaptırır. Eğer $\Theta_E = \theta_E + \varepsilon\theta_E^*$ dual açısı $\theta_E \neq 0$ için $\theta^* = 0$ ise $q_E = \cos \Theta_E + \mathbf{t}_E \sin \Theta_E$ operatörü yalnızca dönme hareketi yaptırır. Bu durumda $q_E = \cos \Theta_E + \mathbf{t}_E \sin \Theta_E$ birim kuaterniyonu, $\Theta_E = \theta_E + \varepsilon\theta_E^*$ dual açısında $\theta_E = 0$ için $\theta_E^* \neq 0$ iken, optik fiberde lineer polarize ışık dalgası modeli belirtir.

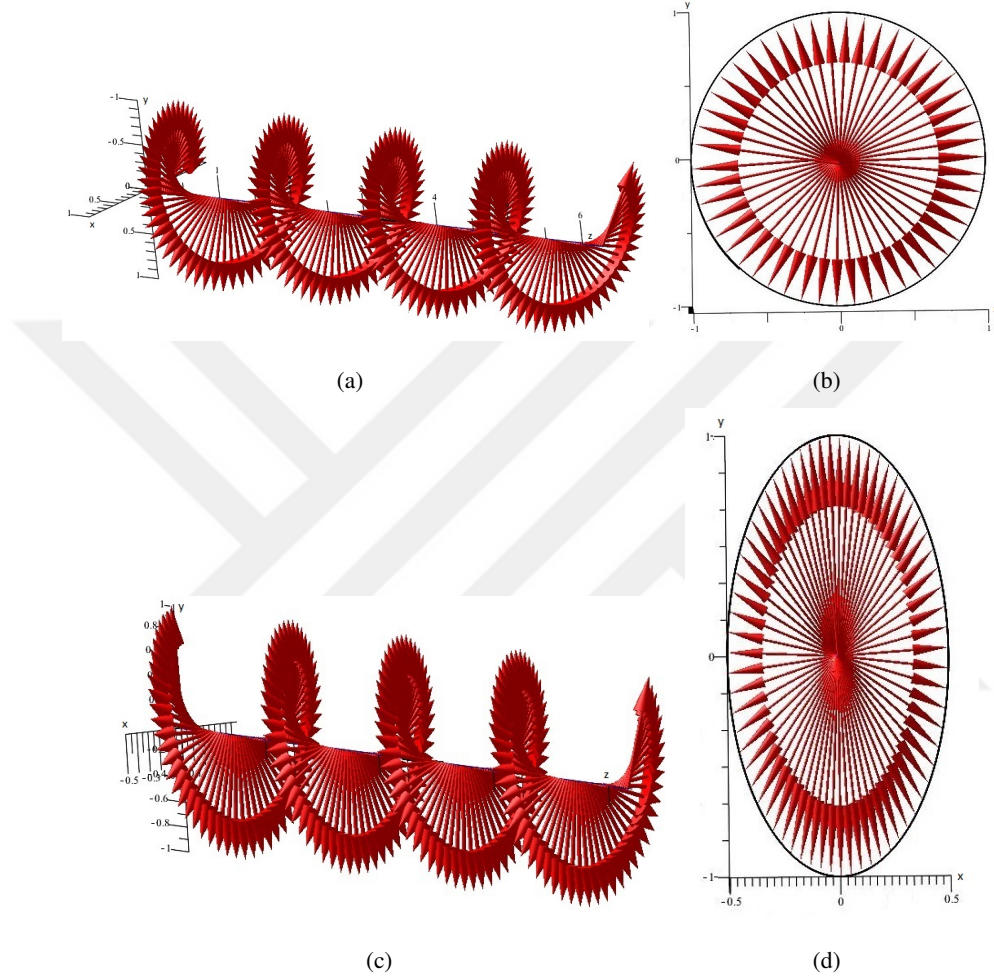
3.4 Teorem $\mathbb{R}_{a_1, a_2, a_3}^3$ uzayında bir optik fiber ile ilişkilendirilmiş γ eğrisi, bu eğrinin Frenet çatı elemanları $\{\mathbf{t}_E, \mathbf{n}_E, \mathbf{b}_E\}$ öyle ki eğrinin teğet vektörü \mathbf{t}_E ile polarizasyon vektörü \mathbf{E} birbirine dik olsun. Polarize edilmiş ışığın eliptik polarizasyon durumunda, polarizasyon vektörünün uç noktaları eliptik-Rytov eğrisi olarak adlandırılan bir eğri çizer ve bu eğri $q_E = \cos(k\pi s) + \mathbf{t}_E \sin(k\pi s)$ eliptik birim kuaterniyonu yardımıyla aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$E_R = \gamma + r q_E \otimes_E \mathbf{n}_E \quad (3.19)$$

burada k eliptik-Rytov eğrisinin adımını ve yönünü belirtirken r de yarıçapını belirtir.

Kanıt 3.2. Teorem' in ispatına benzer şekilde yapılabilir. □

Örnek Bir doğrusal optik fiber (z ekseni) boyunca sol dairesel ve sol eliptik polarizasyonlu elektromanyetik dalganın görünüşünün bir temsili Şekil 3.3’de verilmiştir.

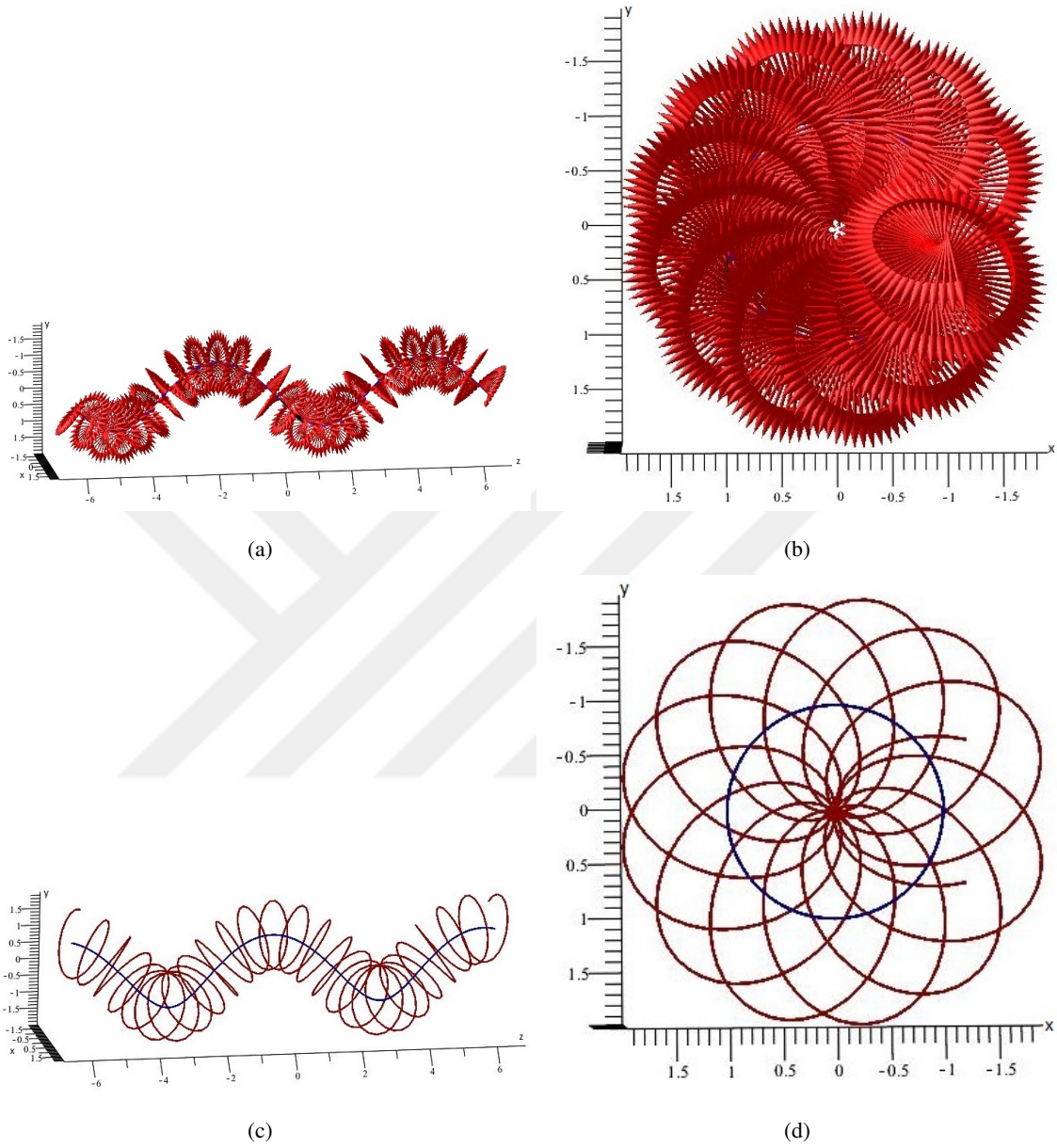


Şekil 3.3 (a) z -ekseni boyunca dairesel polarizasyonu (vida hareketi) ifade eden elektromanyetik dalga modeli ve (b) dairesel polarizasyonun polarizasyon düzlemindeki görünümü. (c) z -ekseni boyunca eliptik polarizasyonu (eliptik vida hareketi) ifade eden elektromanyetik dalga modeli ve (d) eliptik polarizasyonun polarizasyon düzlemindeki görünümü

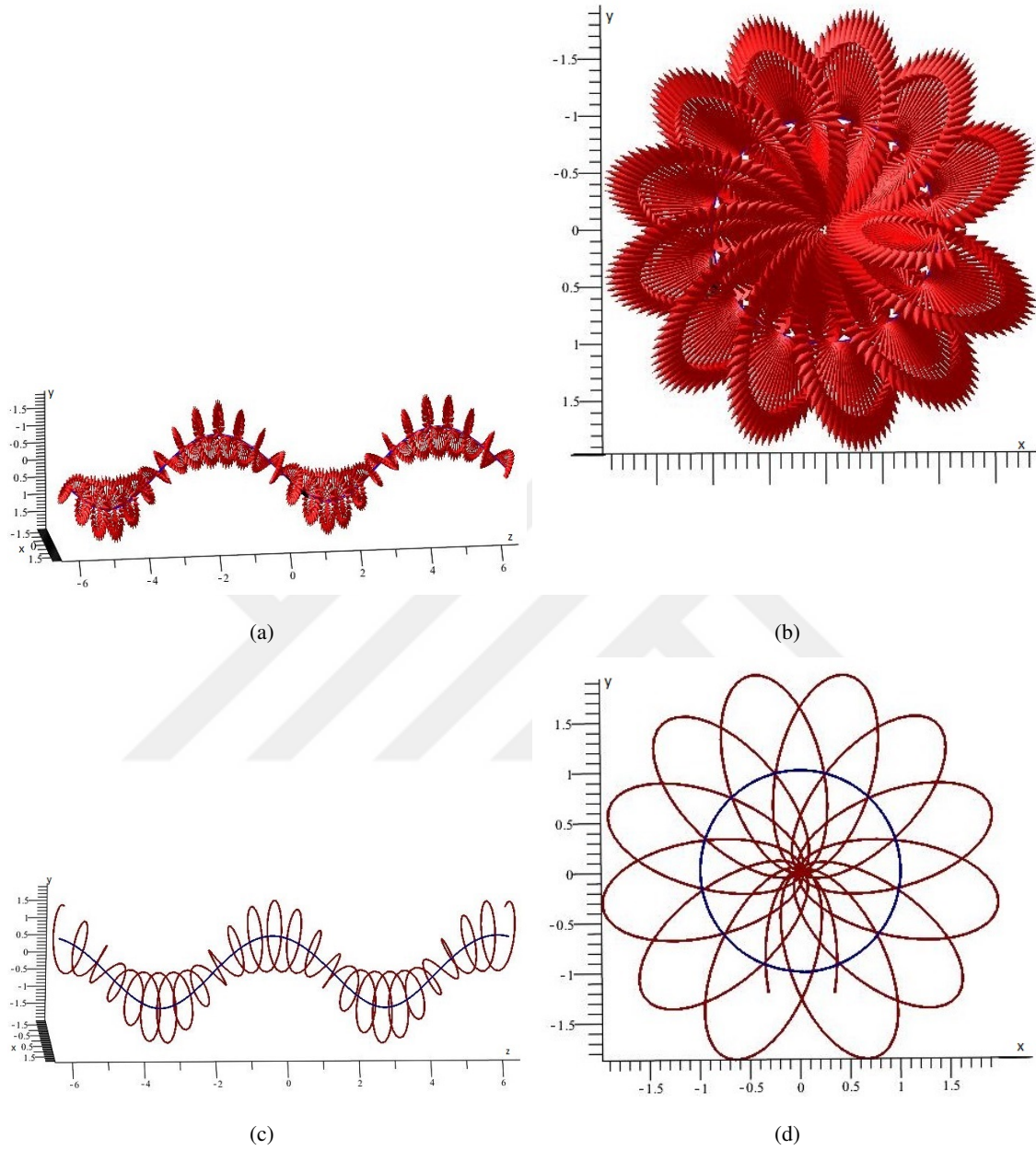
Örnek Bir optik fiber ile ilişkilendirilmiş helis eğrisi

$$\gamma(s) := [\cos s/\sqrt{2}, \sin s/\sqrt{2}, s/\sqrt{2}] \quad (3.20)$$

biçiminde verilsin. Bu durumda helisel bir optik fiber boyunca dairesel ve eliptik polarizasyon durumlarının birer temsili ve ilgili Rytov eğrileri, Şekil 3.4 ve Şekil 3.5’deki gibi görselleştirilebilir.



Şekil 3.4 (a) Bir helis eğrisi ile ilişkili optik fiber boyunca dairesel polarizasyonu ifade eden elektromanyetik dalga modeli ve (b) dairesel polarizasyonun polarizasyon düzlemindeki görünümü. (c) Helis eğrisi boyunca polarizasyon durumu sonucu oluşan dönen ve bükülen dairesel-Rytov eğrisi ve (d) dairesel-Rytov eğrisinin polarizasyon düzlemindeki görünümü



Şekil 3.5 (a) Bir eliptik helis eğrisi ile ilişkili optik fiber boyunca eliptik polarizasyonu ifade eden elektromanyetik dalga modeli ve (b) eliptik polarizasyonun polarizasyon düzlemindeki görünümü. (c) Eliptik helis eğrisi boyunca polarizasyon durumu sonucu oluşan dönen ve bükülen eliptik-Rytov eğrisi ve (d) eliptik-Rytov eğrisinin polarizasyon düzlemindeki görünümü

3.3. Polarizasyon Durumlarının Stokes Parametreleri ve Matris Formları ile Yorumlanması

Polarizasyon bilgisi astrofizik ve biyoloji gibi birçok görüntüleme uygulaması için gereklidir. Son yıllarda geleneksel hiperspektral görüntüleme sistemleriyle birlikte polarizasyon bilgisi üzerine araştırmalar artmıştır. Spektropolarimetrik görüntüler, uzaysal, spektral ve polarizasyon farklılıklarını toplayan bir 3 boyutlu veri dizisi olarak temsil edilebilir. Bu tür görüntüleme tekniği, ışığın polarizasyon özelliklerini tanımlayan bir Stokes vektörünün elde edilmesini içerir. Stokes vektörü polarizasyon fiziği için çok önemli bir araçtır.

Kuaterniyonlar da polarize sinyaller durumuna genelleme yapan yeni bir araçtır. Polarizasyon bilgisinin kuaterniyonlar aracılığıyla cebirsel temsili, Stokes parametreleri ve polarizasyon genellemesi ile ilişkili fiziksel kavramların açıklanmasında basit ve hesaplama açısından verimli bir işlev sağlar (Flamant ve diğerleri, 2019; Kuntman ve diğerleri 2019).

Bu bölümde eliptik kuaterniyonların yardımıyla Stokes parametrelendirmeleri için yeni bir araç sunacağız. Bu yeni araç, eliptik polarizasyon durumunu (ayrıca dairesel ve doğrusal polarizasyonun özel durumları) matematiksel olarak açık ve fiziksel olarak anlamlı bir şekilde açıklamamıza olanak tanıyacaktır. Dört stokes parametresi aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\begin{aligned} S_0 &= E_{0x}^2 + E_{0y}^2, \\ S_1 &= \frac{E_{0x}^2 - E_{0y}^2}{\sqrt{a_2}}, \\ S_2 &= \frac{2}{\sqrt{a_3}} E_{0x} E_{0y} \cos(\theta), \\ S_3 &= \frac{2}{\sqrt{a_1}} E_{0x} E_{0y} \sin(\theta), \end{aligned}$$

burada (S_0, S_1, S_2, S_3) vektörü Stokes vektörü olarak adlandırılır (Berry ve diğ., 1977; Shepard, 2014). i. Doğrusal polarize: Doğrusal polarize bir ışık modeli için, $\phi = 0$ olduğunu varsayalım. \mathbf{E} uzaysal bir vektör olduğundan, $E_{0x} = a \cos \delta$, $E_{0y} = a \sin \delta$ biçiminde seçilebilir. Böylece, x -ekseniyle δ açısıyla yönlendirilmiş doğrusal polarize bir ışık dalgasının stokes vektörü aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$S_0 = a^2, S_1 = \frac{a^2}{\sqrt{a_2}} \cos 2\delta, S_2 = \frac{a^2}{\sqrt{a_3}} \sin 2\delta, S_3 = 0.$$

ii. Eliptik ve dairesel polarize: Bu durumlar için, $\phi = \frac{\pi}{2}$ ve $E_{0x} = E_{0y} = a$ biçiminde seçilirse

aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$$S_0 = 2a^2, S_1 = 0, S_2 = 0, S_3 = \frac{2a^2}{\sqrt{a_3}}.$$

Eğer $a_i = 1, i = \{1, 2, 3\}$ ise dairesel polarize ışık modeli elde edilir. Eğer $a_i = 1, i = \{1, 2, 3\}$ değerlerinden herhangi biri diğerlerinden farklıysa, o zaman eliptik polarizasyon elde edilir. Sonra, $X = \frac{S_1}{S_0}, Y = \frac{S_2}{S_0}$ ve $Z = \frac{S_3}{S_0}$ elde ederiz,

$$a_2X^2 + a_3Y^2 + a_1Z^2 = 1. \quad (3.21)$$

Böylece polarizasyon durumunun (X, Y, Z) parametreleri, durumun Kartezyen koordinatlarına aşağıdaki gibi karşılık gelir:

$$X = \frac{1}{\sqrt{a_2}} \cos(\psi) \cosh(\theta) \quad (3.22)$$

$$Y = \frac{1}{\sqrt{a_3}} \cos(\psi) \sinh(\theta) \quad (3.23)$$

$$Z = \frac{1}{\sqrt{a_1}} \sin(\psi) \quad (3.24)$$

Denklemi yukarıda elde edilen eliptin 2-küresi $\mathbb{S}_{a_1, a_2, a_3}$ üzerine çizilmiştir. Dolayısıyla bu küreye eliptik Poincaré küresi denilebilir ve polarizasyon durumları bu kürenin yardımıyla şu şekilde yorumlanabilir; Ekvatordaki noktalar doğrusal polarize ışığa karşılık gelir, kutuplardaki noktalar dairesel (eliptik) polarize ışığı temsil eder ve kürenin geri kalanındaki noktalar diğer eliptik polarizasyon durumlarını gösterir.

Bir Stokes vektörü geometrik olarak $q_E = (S_0 + S_3i + S_1j + S_2k) \in \mathbb{H}_E$ kuaterniyonuyla temsil edilebilir. Ayrıca aşağıdaki eşitlik yazılabilir:

$$q_E = S_0 + \sqrt{a_1S_3^2 + a_2S_1^2 + a_3S_2^2} \frac{S_3i + S_1j + S_2k}{\sqrt{a_1S_3^2 + a_2S_1^2 + a_3S_2^2}}.$$

Buradan $I = S_0 = \sqrt{a_1S_3^2 + a_2S_1^2 + a_3S_2^2}$ olmak üzere, $\mu = \frac{S_3i + S_1j + S_2k}{\sqrt{a_1S_3^2 + a_2S_1^2 + a_3S_2^2}}$ yazılırsa, aşağıdaki eşitlik bulunur:

$$q_E = I + I\Phi\mu,$$

burada I toplam yoğunluk ve $\Phi \in [0, 1]$ polarizasyon derecesidir. Ayrıca, μ polarizasyon eksenini olup $\mu^2 = -1$ eşitliğini sağlayan bir saf kuaterniyondur. $\Phi = 1$ ise ışığın tamamen polarize olduğu, $\Phi = 0$ ise ışığın polarize olmadığı ve $0 < \Phi < 1$ ise ışığın kısmen polarize olduğu söylenir. Diğer üç Stokes parametresi $\{S_1, S_2, S_3\}$ dalganın polarizasyon durumunu

aşağıdaki gibi tanımlar: S_1 ve S_2 doğrusal polarizasyon durumlarını ifade ederken S_3 dairesel polarizasyon durumlarını ifade eder. q_E kuaterniyonik formu kullanılırsa, Stokes parametreleri için aşağıdaki dual kuaterniyonu yazabiliriz:

$$Q_E = q_E + \frac{\varepsilon}{2} \mathbf{t}_E \otimes_E q_E. \quad (3.25)$$

Bu durumda elektrik alanının dikey ve yatay bileşenlerine ilişkin eliptik, dairesel ve doğrusal polarizasyon durumları modellenmiş olur. Ayrıca, Stokes vektörleri matris gösterimi ile aşağıdaki gibi temsil edilebilir:

$$\begin{bmatrix} S_0 & -a_1 S_3 & -a_3 S_1 & -a_3 S_2 \\ S_3 & S_0 & -S_2 \Delta / a_1 & S_1 \Delta / a_1 \\ S_1 & S_2 \Delta / a_2 & S_0 & -S_3 \Delta / a_2 \\ S_2 & -S_1 \Delta / a_3 & S_3 \Delta / a_3 & S_0 \end{bmatrix}.$$

3.5 Teorem $\mathbb{R}_{a_1, a_2, a_3}^3$ uzayında $q_E = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k = \cos \theta + \mathbf{n}_E \sin \theta$ bir birim kuaterniyon olsun, bu durumda q_E kuaterniyonu, $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3; \mathbf{u} \rightarrow F(\mathbf{u}) = q_E \mathbf{u} q_E^{-1}$ biçiminde lineer bir dönüşüm tanımlar. F dönüşümü $a_1 x^2 + a_2 y^2 + a_3 z^2 = 1$ elipsoidi üzerinde \mathbf{n}_E eksenini etrafında, 2θ açısı kadar eliptik bir dönüş oluşturur. F lineer bir dönüşüm olduğundan, aşağıdaki matris formuyla ifade edilebilir:

$$M_{\theta}^q = \begin{bmatrix} q_0^2 + a_1 q_1^2 - a_2 q_2^2 - a_3 q_3^2 & 2a_2 q_1 q_2 - 2\frac{\Delta}{a_1} q_0 q_3 & 2a_3 q_1 q_3 + 2\frac{\Delta}{a_1} q_0 q_2 \\ 2a_1 q_1 q_2 + 2\frac{\Delta}{a_2} q_0 q_3 & q_0^2 - a_1 q_1^2 + a_2 q_2^2 - a_3 q_3^2 & 2a_3 q_2 q_3 - 2\frac{\Delta}{a_2} q_0 q_1 \\ 2a_1 q_1 q_3 - 2\frac{\Delta}{a_3} q_0 q_2 & 2a_2 q_2 q_3 + 2\frac{\Delta}{a_3} q_0 q_1 & q_0^2 - a_1 q_1^2 - a_2 q_2^2 + a_3 q_3^2 \end{bmatrix}. \quad (3.26)$$

Eğer $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ alırsak M_{θ}^q matrisi $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ birim küre üzerinde \mathbf{n}_E eksenini doğrultusunda 2θ açısı kadar bir dairesel dönme hareketi belirtir. Stokes vektörünün $S = [S_0, S_1, S_2, S_3]$ vektör kısmını $V_S = [S_1, S_2, S_3]$ olarak gösterelim. Bu durumda M_{θ}^q matrisi $a_1 x^2 + a_2 y^2 + a_3 z^2 = 1$ elipsoidi üzerinde $V_S = [S_1, S_2, S_3]$ vektöründen $V_{S'} = [S'_1, S'_2, S'_3]$ vektörüne dönüşümünü ifade eder. $S'_0 = \sqrt{a_1 S'^2_3 + a_2 S'^2_1 + a_3 S'^2_2}$ olduğundan M_{θ}^q matrisinin S vektöründen S' vektörüne Stokes vektörlerinin dönüşümünü gerçekleştirdiği söylenebilir.

4. UZAY BENZERİ VE ZAMAN BENZERİ EĞRİLERLE İLİŞKİLİ BİR OPTİK FİBER BOYUNCA POLARİZASYON DURUMLARI

Bu bölümde $\mathbb{R}_{a_1, a_2, a_3}^{1,2}$ uzayında zaman benzeri ve uzay benzeri bir eğri ile ilişkili optik fiber boyunca polarizasyon durumları Rodrigues formülü, vida hareketi ve Stokes vektörleri aracılığıyla açıklanacaktır. Ayrıca, verilen teoriye ilişkin örnekler verilerek, matematik programları aracılığıyla görselleştirilecektir.

4.1. Polarizasyon Durumlarının Rodrigues Formülleri Aracılığı İle Yorumlanması

$\mathbb{R}_{a_1, a_2, a_3}^{1,2}$ uzayında, bir optik fiberle ilişkilendirilmiş γ eğrisi ve $q_H = S_{q_H} + V_{q_H}$ birim dual hiperbolik bölünmüş kuarterniyon olsun. Eğer V_{q_H} bir uzay benzeri vektör ise, $A_{(\Phi, \mathbf{t}_H)}$ Rodrigues formülü aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$A_{(\Phi, \mathbf{t}_H)} = I_3 + \sinh \Phi \mathbf{t}_H + (-1 + \cosh \Phi)(\mathbf{t}_H)^2 \quad (4.1)$$

burada $\Phi = \phi + \varepsilon \phi^*$ bir dual açı ve \mathbf{t}_H optik fiber ile ilişkili eğrinin birim teğet vektörüdür. Eğer V_{q_H} bir zaman benzeri vektör ise, $A_{(\Theta, \mathbf{t}_H)}$ Rodrigues formülü aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$A_{(\Theta, \mathbf{t}_H)} = I_3 + \sin \Theta \mathbf{t}_H + (1 - \cos \Theta)(\mathbf{t}_H)^2, \quad (4.2)$$

burada $\Theta = \theta + \varepsilon \theta^*$ bir dual açı ve \mathbf{t}_H vektörünün g_H anti-simetrik matrisi aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\mathbf{t}_H = \Delta \begin{bmatrix} 0 & t_3/a_1 & -t_2/a_1 \\ t_3/a_2 & 0 & -t_1/a_2 \\ -t_2/a_3 & t_1/a_3 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

burada $\Delta = \sqrt{a_1 a_2 a_3}$ biçimindedir. $A_{(\Phi, \mathbf{t}_H)}$ ve $A_{(\Theta, \mathbf{t}_H)}$ matrisleri \mathbf{t}_H eksenini doğrultusunda vida hareketi tanımlar. Böylece aşağıdaki teoremler ve sonuçlar elde edilir.

4.1 Teorem Bir optik fiberle ilişkilendirilmiş γ eğrisi üzerindeki frenet çatısı $\{\mathbf{t}_H, \mathbf{n}_H, \mathbf{b}_H\}$ biçiminde verilsin. Bu durumda polarizasyon durumları aşağıdaki gibi elde edilir:

i. Eğer γ uzay benzeri bir eğri ise $A_{(\Phi, \mathbf{t}_H)}$ matrisi \mathbf{E} polarizasyon vektörüne, \mathbf{t}_H etrafında hiperbolik vida hareketi yaptırır yani ϕ açısı kadar dönme ve aynı eksen boyunca ϕ^* kadar öteleme hareketi yaptırır. Sonuç olarak bu durumda zaman benzeri düzlemde eliptik polarizasyon durumu elde edilir.

ii. Eğer γ eğrisi zaman benzeri bir eğri ise $A_{(\Theta, \mathbf{t}_H)}$ matrisi \mathbf{E} polarizasyon vektörüne, \mathbf{t}_H etrafında eliptik vida hareketi yaptırır yani \mathbf{t}_H etrafında θ açısı kadar dönme ve \mathbf{t}_H boyunca θ^* kadar öteleme hareketi yaptırır. Sonuç olarak bu durumda uzay benzeri düzlemde eliptik polarizasyon durumu elde edilir.

Kanıt γ eğrisi ile ilişkili optik fiber boyunca polarize ışık dalgasını göz önüne alalım ve ilişkili Frenet çatası $\{\mathbf{t}_H, \mathbf{n}_H, \mathbf{b}_H\}$ olsun. Hiperbolik dönme açısı Φ , eliptik dönme açısı Θ ile gösterilsin. Bu durumda, $\mathbf{t}_H = t_{1H}i + t_{2H}j + t_{3H}k$, $\mathbf{E} = E_1i + E_2j + E_3k$ olmak üzere $A_{(\Theta, \mathbf{t}_H)}$ ve $A_{(\Phi, \mathbf{t}_H)}$ Rodrigues formülleri aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$A_{(\Phi, \mathbf{t}_H)} \mathbf{E} = \cosh \Phi \mathbf{E} + \sinh \Phi (\mathbf{t}_H \times_H \mathbf{E}) + (1 - \cosh \Phi) g_H(\mathbf{t}_H, \mathbf{E}) \mathbf{t}_H \quad (4.4)$$

ve

$$A_{(\Theta, \mathbf{t}_H)} \mathbf{E} = \cos \Theta \mathbf{E} + \sin \Theta (\mathbf{t}_H \times_H \mathbf{E}) + (1 - \cos \Theta) g_H(\mathbf{t}_H, \mathbf{E}) \mathbf{t}_H. \quad (4.5)$$

Eğer $g_H(\mathbf{t}_H, \mathbf{E}) = 0$ ise, aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$$A_{(\Phi, \mathbf{t}_H)} \mathbf{E} = \cosh \Phi \mathbf{E} + \sinh \Phi (\mathbf{t}_H \times_H \mathbf{E}), \quad (4.6)$$

$$A_{(\Theta, \mathbf{t}_H)} \mathbf{E} = \cos \Theta \mathbf{E} + \sin \Theta (\mathbf{t}_H \times_H \mathbf{E}). \quad (4.7)$$

Eğer $\phi^* = 0$ ise,

$$A_{(\phi, \mathbf{t}_H)} \mathbf{E} = \cosh \phi \mathbf{E} + \sinh \phi (\mathbf{t}_H \times_H \mathbf{E}) + (1 - \cosh \phi) g_H(\mathbf{t}_H, \mathbf{E}) \mathbf{t}_H \quad (4.8)$$

ve

$$A_{(\theta, \mathbf{t}_H)} \mathbf{E} = \cos \theta \mathbf{E} + \sin \theta (\mathbf{t}_H \times_H \mathbf{E}) + (1 - \cos \theta) g_H(\mathbf{t}_H, \mathbf{E}) \mathbf{t}_H \quad (4.9)$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitlikler sayesinde \mathbf{t}_H etrafında ϕ hiperbolik ve θ eliptik açısı kadar vida hareketi ile sırasıyla \mathbf{E} zaman benzeri düzlemde ve uzay benzeri düzlemde eliptik polarizasyonlarının elde edildiğini söyleyebiliriz. Eğer $\phi = 0$ ise, aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$$A_{(\phi^*, \mathbf{t}_H)} \mathbf{E} = \cosh v \phi^* \mathbf{E} + \sinh v \phi^* (\mathbf{t}_H \times_H \mathbf{E}) + (1 - \cosh v \phi^*) g_H(\mathbf{t}_H, \mathbf{E}) \mathbf{t}_H = I_3 + \varepsilon \phi^* \mathbf{t}_H \quad (4.10)$$

ve

$$A_{(\theta^*, \mathbf{t}_H)} \mathbf{E} = \cos v \theta^* \mathbf{E} + \sin v \theta^* (\mathbf{t}_H \times_H \mathbf{E}) + (1 - \cos v \theta^*) g_H(\mathbf{t}_H, \mathbf{E}) \mathbf{t}_H = I_3 + \varepsilon \theta^* \mathbf{t}_H. \quad (4.11)$$

Bu eşitlikler \mathbf{E} vektörünün optik fiber boyunca lineer polarizasyonunu gösterir. \square

Sonuç $\mathbb{R}_{a_1, a_2, a_3}^{1,2}$ uzayında

$$R_{(\phi, \mathbf{t}_H)} = I_3 + \sinh \phi \mathbf{t}_H + (-1 + \cosh \phi) (\mathbf{t}_H)^2 \quad (4.12)$$

ve

$$R_{(\theta, \mathbf{t}_H)} = I_3 + \sin \theta \mathbf{t}_H + (1 - \cos \theta) (\mathbf{t}_H)^2 \quad (4.13)$$

matrisleri optik fiber boyunca \mathbf{t}_H etrafında ϕ ve θ açıları kadar, sırasıyla zaman benzeri düzlemde ve uzay benzeri düzlemde eliptik polarizasyon durumlarını belirtir.

Sonuç

$$T_{(\phi^*, \mathbf{t}_H)} = I_3 + \varepsilon \phi^* \mathbf{t}_H \quad (4.14)$$

ve

$$T_{(\theta^*, \mathbf{t}_H)} = I_3 + \varepsilon \theta^* \mathbf{t}_H \quad (4.15)$$

matrisleri optik fiber boyunca \mathbf{t}_H etrafında lineer polarizasyon durumunu belirtir.

4.2 Teorem Bir optik fiber ile ilişkili γ eğrisi üzerindeki Frenet çatı elemanları $\{\mathbf{t}_H, \mathbf{n}_H, \mathbf{b}_H\}$ ile gösterilsin. Bu durumda, optik fiber boyunca elde edilen polarizasyon durumlarıyla ilişkili Rytov eğrileri aşağıdaki gibi belirlenir:

γ uzay benzeri bir eğri ise,

$$H_R = \gamma + rR_{(2k\pi i, \mathbf{t}_H)} \mathbf{E}, \quad (4.16)$$

γ zaman benzeri bir eğri ise,

$$E_R = \gamma + rR_{(2k\pi, \mathbf{t}_H)} \mathbf{E} \quad (4.17)$$

biçimindedir.

Kanıt Eğer polarizasyon vektörü $\mathbf{E} = E_1 i + E_2 j + E_3 k$ şeklinde yazılırsa, $A_{(\Theta, \mathbf{t}_H)}$ ve $A_{(\phi, \mathbf{t}_H)}$ matrisleri aşağıdaki gibi verilebilir:

$$A_{(\phi, \mathbf{t}_H)} \mathbf{E} = \cosh \phi \mathbf{E} + \sinh \phi (\mathbf{t}_H \times_H \mathbf{E}) + (1 - \cosh \phi) g_H(\mathbf{t}_H, \mathbf{E}) \mathbf{t}_H, \quad (4.18)$$

$$A_{(\theta, \mathbf{t}_H)} \mathbf{E} = \cos \theta \mathbf{E} + \sin \theta (\mathbf{t}_H \times_H \mathbf{E}) + (1 - \cos \theta) g_H(\mathbf{t}_H, \mathbf{E}) \mathbf{t}_H. \quad (4.19)$$

Burada $g_H(\mathbf{t}_H, \mathbf{E}) = 0$ olduğu göz önüne alınırsa aşağıdaki eşitliklere ulaşılır:

$$A_{(\phi, \mathbf{t}_H)} \mathbf{E} = \cosh \phi \mathbf{E} + \sinh \phi (\mathbf{t}_H \times_H \mathbf{E}), \quad (4.20)$$

$$A_{(\theta, \mathbf{t}_H)} \mathbf{E} = \cos \theta \mathbf{E} + \sin \theta (\mathbf{t}_H \times_H \mathbf{E}) \quad (4.21)$$

Eğer γ uzay benzeri bir eğri ise $A_{(\theta, \mathbf{t}_H)} = R_{(2k\pi i, \mathbf{t}_H)}$ matrisi, eğer γ zaman benzeri bir eğri ise $A_{(\theta, \mathbf{t}_H)} = R_{(2k\pi, \mathbf{t}_H)}$ matrisi elde edilir. Bu eşitlikler sayesinde Rytov eğrileri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$H_R = \gamma + rR_{(2k\pi i, \mathbf{t}_H)} \mathbf{E}, \quad (4.22)$$

$$E_R = \gamma + rR_{(2k\pi, \mathbf{t}_H)} \mathbf{E}. \quad (4.23)$$

□

4.2. Polarizasyon Durumlarının Hiperbolik Bölünmüş Kuaterniyonlar Aracılığıyla Yorumlanması

4.3 Teorem q_H kuaterniyonu birim zaman benzeri hiperbolik bölünmüş kuaterniyon ve \mathbf{E} vektörü de polarizasyon vektörünü gösterebilir. $R_{q_H} : \mathbb{TH} \rightarrow \mathbb{TH}$; $R_{q_H}(\mathbf{E}) = q_H \mathbf{E} q_H^{-1}$ lineer dönüşümü ile birlikte hiperbolik polarizasyon durumunu belirtir. Yani, R_{q_H} dönüşümü, optik fiber ile ilişkilendirilmiş γ eğrisi boyunca polarize ışık dalgasının \mathbf{E} polarizasyon vektörünün 2θ hiperbolik açısı kadar dönme hareketi yaptığını ifade eder.

4.4 Teorem $q_H = q_H + \varepsilon q_H^*$ hiperbolik dual bölünmüş kuaterniyonunu alalım. q_H kuaterniyonunun vektörel kısmı uzay benzeri bir vektör ise

$$q_H = \cosh \frac{\Phi}{2} + \sinh \frac{\Phi}{2} \mathbf{t}_H \quad (4.24)$$

biçiminde zaman benzeri bir vektör ise,

$$q_H = \cos \frac{\Theta}{2} + \sin \frac{\Theta}{2} \mathbf{t}_H \quad (4.25)$$

formunda yazılabilir. Burada, $\Phi_H = \phi_H + \varepsilon \phi_H^*$ ve $\Theta_E = \theta_E + \varepsilon \theta_E^*$ dual açıları gösterir. Burada q_H hiperbolik dual bölünmüş kuaterniyonu vida hareketi yardımıyla aşağıdaki polarizasyon durumlarını sağlar:

Eğer $\phi \neq 0$ (sırasıyla $\theta \neq 0$) için $\phi^* = 0$ (sırasıyla $\theta^* = 0$) ise, $q_H = \cos \Theta + \mathbf{t}_H \sin \Theta$ ve $q_H = \cos \Phi + \mathbf{t}_H \sin \Phi$ operatörleri yalnızca dönme hareketi belirtir. Böylelikle, optik fiber boyunca sırasıyla, zaman benzeri düzlemde ve uzay benzeri düzlemde eliptik polarize ışık dalgası modeli oluşturur.

Eğer $\phi^* \neq 0$ (sırasıyla $\theta^* \neq 0$) için $\phi = 0$ (sırasıyla $\theta = 0$) ise, $q_H = \cos \Theta + \mathbf{t}_H \sin \Theta$ ve $q_H = \cos \Phi + \mathbf{t}_H \sin \Phi$ operatörleri yalnızca öteleme hareketi belirtir. Böylelikle, optik fiber boyunca lineer polarize ışık dalgası modeli oluşturur.

4.5 Teorem Bir optik fiber ile ilişkilendirilmiş γ eğrisi boyunca Frenet çatı elemanları $\{\mathbf{t}_H, \mathbf{n}_H, \mathbf{b}_H\}$ ile gösterilsin. Optik fiber boyunca polarizasyon durumları gerçekleşirken, polarizasyon vektörünün uç noktalarının çizdiği Rytov eğrilerinin kuaterniyonik formu aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

Eğer γ eğrisi bir uzay benzeri eğri ise, $q_H = \cosh(k\pi is) + \mathbf{t}_H \sinh(k\pi is)$ ve

$$H_R = \gamma + r q_H \otimes_H \mathbf{E} \quad (4.26)$$

olarak elde edilir. Eğer γ bir zaman benzeri eğri ise $q_H = \cos(k\pi s) + \mathbf{t}_H \sin(k\pi s)$ ve

$$E_R = \gamma + r q_H \otimes_H \mathbf{E}, \quad (4.27)$$

olarak elde edilir. Burada, r Rytov eğrisinin yarıçapını, k ise eğrinin yönünü belirtir.

Kanıt Bu teoremi zaman benzeri eğriler için ispatlayacağız. Aynı hesaplamalar ile birlikte uzay benzeri eğri için de ispat gösterilebilir. $\mathbb{R}_{a_1, a_2, a_3}^{1,2}$ uzayında bir optik fiber ile ilişkilendirilmiş γ eğrisi boyunca çatı elemanları $\{\mathbf{t}_H, \mathbf{n}_H, \mathbf{b}_H\}$ ile gösterilsin, öyle ki $g_H(\mathbf{t}_H, \mathbf{E}) = 0$ olsun. Bu durumda, optik fiber boyunca \mathbf{E} polarizasyon vektörü \mathbf{t}_H teğet vektörü etrafında dönme ve \mathbf{t}_H boyunca öteleme hareketi belirtir. Böylelikle aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$C_R = \gamma + r(\mathbf{E} \cos \theta + \mathbf{t}_H \times_H \mathbf{E} \sin \theta),$$

burada $\theta = k\pi s$ biçimindedir. Eğer kuaterniyon çarpımı yardımıyla $q_H = \cos(k\pi s) + \mathbf{t}_H \sin(k\pi s)$ kuaterniyonu ile \mathbf{E} saf kuaterniyonunu çarparsak, aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$q_H \otimes_H \mathbf{E} = \mathbf{E} \cos(k\pi s) + C_R = \gamma + r(\mathbf{E} \cos \theta + \mathbf{t}_H \times_H \mathbf{E} \sin \theta) \sin(k\pi s).$$

Bunun sonucunda aşağıdaki denklem elde edilir:

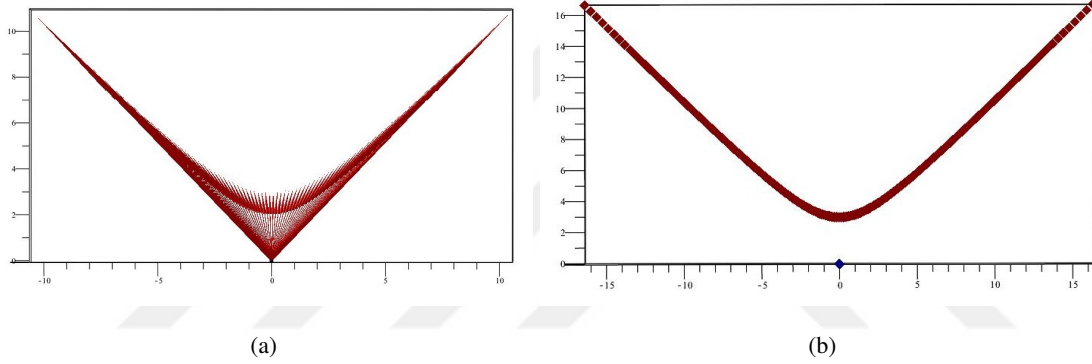
$$E_R = \gamma + r q_H \otimes_H \mathbf{E}.$$

burada r eliptik-Rytov eğrilerinin yarıçapını ve k bu eğrilerin yönünü belirtir.

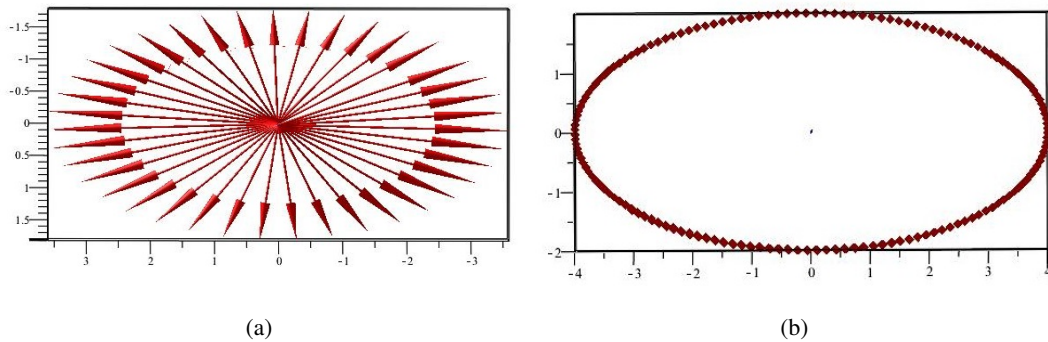
□

Elektrik alanının bileşen vektörleri buldukları uzaya göre değişen, sabit bir boyut ve açı ile karakterize edilir. $\mathbb{R}_{a_1, a_2, a_3}^{1,2}$ uzayında, polarize ışık dalgasının optik fiber boyunca yayılımı esnasında, yayılım yönüne dik konumda olan elektrik alan ve manyetik alan tarafından gerilen düzleme polarizasyon düzlemi denir. Uzay benzeri ve zaman benzeri bir eğri ile ilişkilendirilmiş bir optik fiber boyunca polarizasyon durumları elektrik alanının uç noktaları tarafından çizilen eğrilerin bu düzlem üzerindeki görünümü ile, dairesel polarizasyon, eliptik polarizasyon ve lineer polarizasyon şeklinde üç tipe sınıflandırılabilir. Ayrıca Lorentz uzayında bulunduğu düzleme göre polarizasyon durumları birbirlerinden farklı şekillerde görünüm sergilemektedirler. Bu da Lorentz uzayının metrik yapısından kaynaklanmaktadır. Lorentz uzayında farklı düzlemlerde belirlenen polarizasyon durumunu araştırmak bu tezin başlıca amacıdır. Bu nedenden dolayı Lorentz uzayında tanımlanan hiperbolik bölünmüş kuaterniyonlardan yararlanmaktayız.

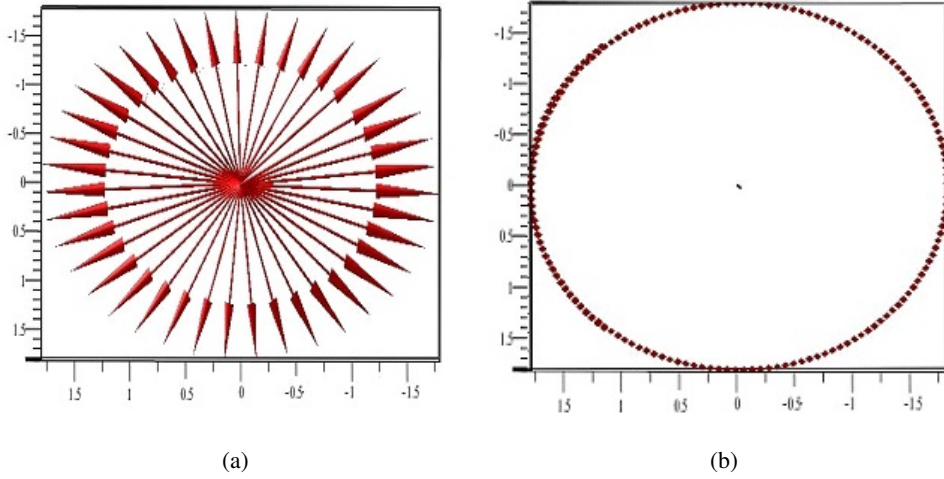
Öncelikle üç tip polarizasyon durumunu ve polarizasyon düzleminde görüntülenen eğri modellerinin görünümünü vereceğiz. Eğer bir optik fiberle ilişkilendirilmiş uzay benzeri bir eğriyi göz önüne alırsak: Bu durumda optik fiber boyunca polarizasyon vektörü hiperbolik bir hareket belirtir. Diğer bir deyişle, ışık dalgasının hareketi boyunca zaman benzeri polarizasyon düzleminde elektrik alan vektörünün uç noktaları hiperbol eğrisi çizer (bakınız Şekil 4.1). Eğer bir optik fiberle ilişkilendirilmiş zaman benzeri bir eğriyi göz önüne alırsak. Bu durumda optik fiber boyunca polarizasyon vektörü eliptik veya dairesel bir hareket belirtir. Diğer bir deyişle, ışık dalgasının hareketi boyunca uzay benzeri polarizasyon düzleminde elektrik alan vektörünün uç noktaları elips veya çember eğrisi çizer (bakınız Şekil 4.2-4.3). Yukarıdaki polarizasyon durumlarının özel durumlarında elde edilen doğrusal polarizasyon durumunda ise elektrik alanın görünümü Şekil 4.4' teki gibidir ve bir optik fiber boyunca doğrusal polarizasyon durumunda elektrik alanının uç noktaları bir doğru çizer.



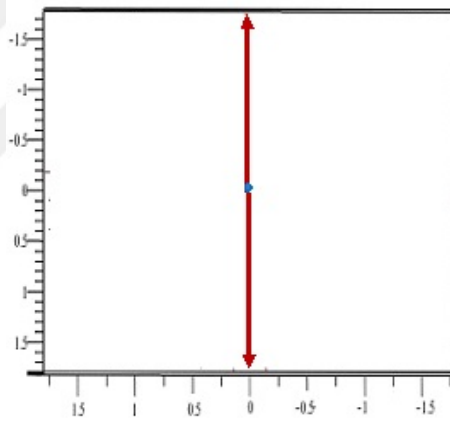
Şekil 4.1 (a) x -ekseni ile ilişkilendirilmiş bir optik fiber boyunca zaman benzeri düzleminde eliptik polarizasyon durumunun görünümü ve (b) polarize ışık dalgasının yayılımı esnasında polarizasyon vektörünün uç noktalarının çizdiği zaman benzeri düzlemindeki çember eğrisinin (hiperbol) görünümü



Şekil 4.2 (a) x -ekseni ile ilişkilendirilmiş bir optik fiber boyunca uzay benzeri düzlemde eliptik polarizasyon durumunun görünümü ve (b) polarize ışık dalgasının yayılımı esnasında polarizasyon vektörünün uç noktalarının çizdiği uzay benzeri düzlemindeki çember eğrisinin (elips) görünümü

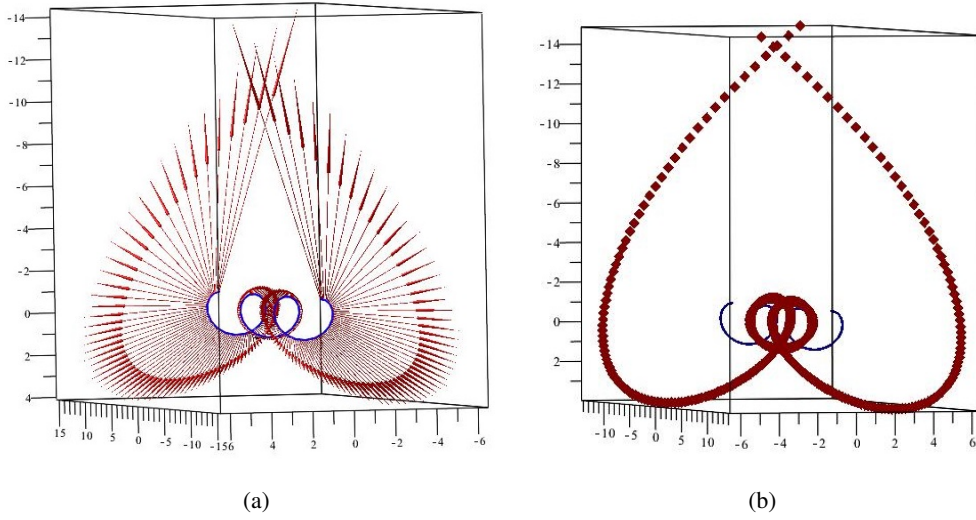


Şekil 4.3 (a) x -ekseni ile ilişkilendirilmiş bir optik fiber boyunca uzay benzeri düzlemdeki dairesel polarizasyon durumunun görünümü ve (b) polarize ışık dalgasının yayılımı esnasında polarizasyon vektörünün uç noktalarının çizdiği uzay düzlemdeki çember eğrisinin görünümü



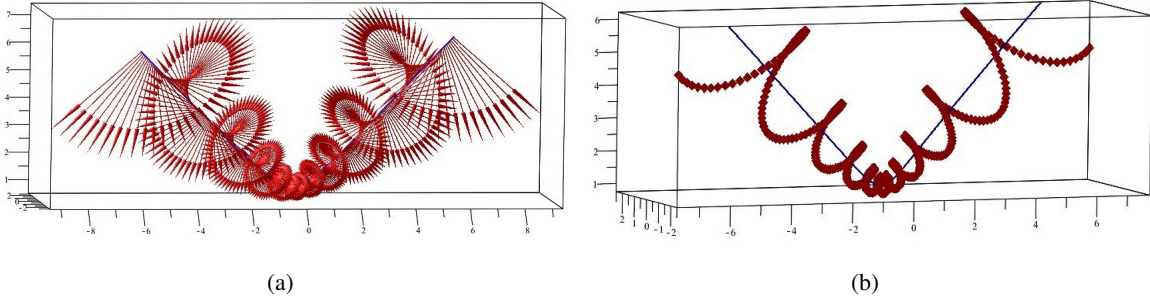
Şekil 4.4 (a) x -ekseni ile ilişkilendirilmiş bir optik fiber boyunca doğrusal polarizasyon durumunda polarizasyon düzlemindeki görünüm

Örnek Bir optik fiber ile ilişkilendirilmiş $\gamma(s) = [\frac{s}{\sqrt{2}}, \cos \frac{s}{\sqrt{2}}, 2 \sin \frac{s}{\sqrt{2}}]$ uzay benzeri eğrisi boyunca frenet çatı elemanları $\{\mathbf{t}_H, \mathbf{n}_H, \mathbf{b}_H\}$ olmak üzere $q_H = \cosh \frac{\Phi}{2} + \sinh \frac{\Phi}{2} \mathbf{t}_H$ birim zaman benzeri dual kuaterniyonunu alalım. Bu durumda optik fiber boyunca elde edilen zaman benzeri düzlemde eliptik polarizasyon durumu Şekil 4.5'deki gibi görselleştirilir.



Şekil 4.5 (a) Uzay benzeri bir γ eğrisi ile ilişkili bir optik fiber boyunca polarize ışık dalgasının zaman benzeri düzlemde eliptik polarizasyonunu gösteren elektromanyetik dalga modeli ve (b) ilgili Rytov eğrisi

Örnek Bir optik fiberle ilişkilendirilmiş $\gamma(s) = [2 \cosh \frac{s}{\sqrt{2}}, \sinh \frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{s}{\sqrt{2}}]$ zaman benzeri eğrisi boyunca Frenet vektör alanları $\{\mathbf{t}_H, \mathbf{n}_H, \mathbf{b}_H\}$ olmak üzere $q_H = \cos \frac{\Phi}{2} + \sin \frac{\Phi}{2} \mathbf{t}_H$ dual kuaterniyonu yardımıyla elde edilen optik fiber boyunca uzay benzeri düzlemde eliptik polarizasyon modeli Şekil 4.6'daki gibi gösterilmiştir.



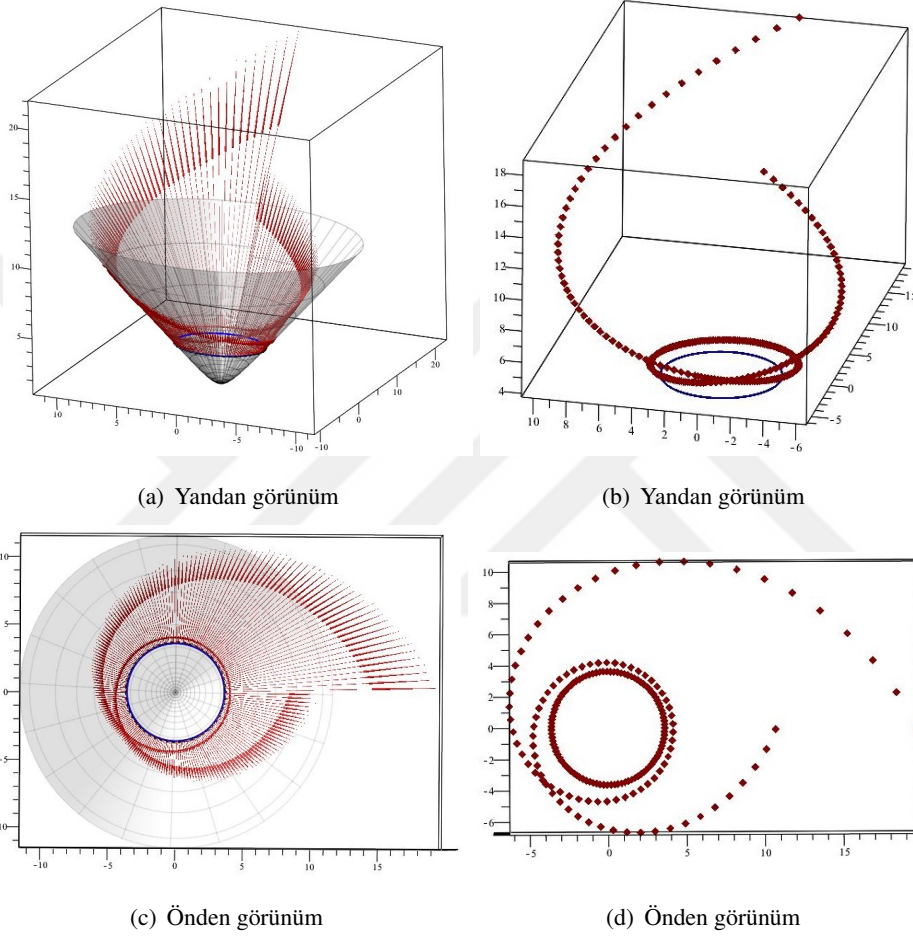
Şekil 4.6 (a) Zaman benzeri bir γ eğrisi ile ilişkili bir optik fiber boyunca polarize ışık dalgasının uzay benzeri düzlemde eliptik (dairese) polarizasyonunu gösteren elektromanyetik dalga modeli ve (b) ilgili eliptik (dairese) Rytov eğrisi

Bu kısımda Lorentz küreleri üzerindeki polarize ışık dalgasının polarizasyon durumlarını uzay benzeri ve zaman benzeri olarak iki karakteri içeren eğri ile ilişkilendirilmiş bir optik fiber boyunca ifade eden örnekler verilmiştir. Şekil 4.7'de uzay benzeri bir eğri ile ilişkilendirilmiş bir optik fiber boyunca polarize ışık dalgasının zaman benzeri düzlemde eliptik polarizasyonunu bulunduğu küre ile birlikte görselleştirdik. Zaman benzeri bir eğri ile ilişkilendirilmiş bir optik fiber boyunca ışık dalgasının hareketi ise Şekil 4.8'de görselleştirilmiştir.

Örnek $\mathbb{H}^{1,2}$ Lorentz küresinde, bir optik fiber ile ilişkilendirilmiş

$$\gamma(s) = [\cosh(2), \cos(t) \sinh(2), \sin(t) \sinh(2)]$$

eğrisi boyunca zaman benzeri düzlemde eliptik polarizasyon durumu Şekil 4.7 'de görselleştirilmiştir.

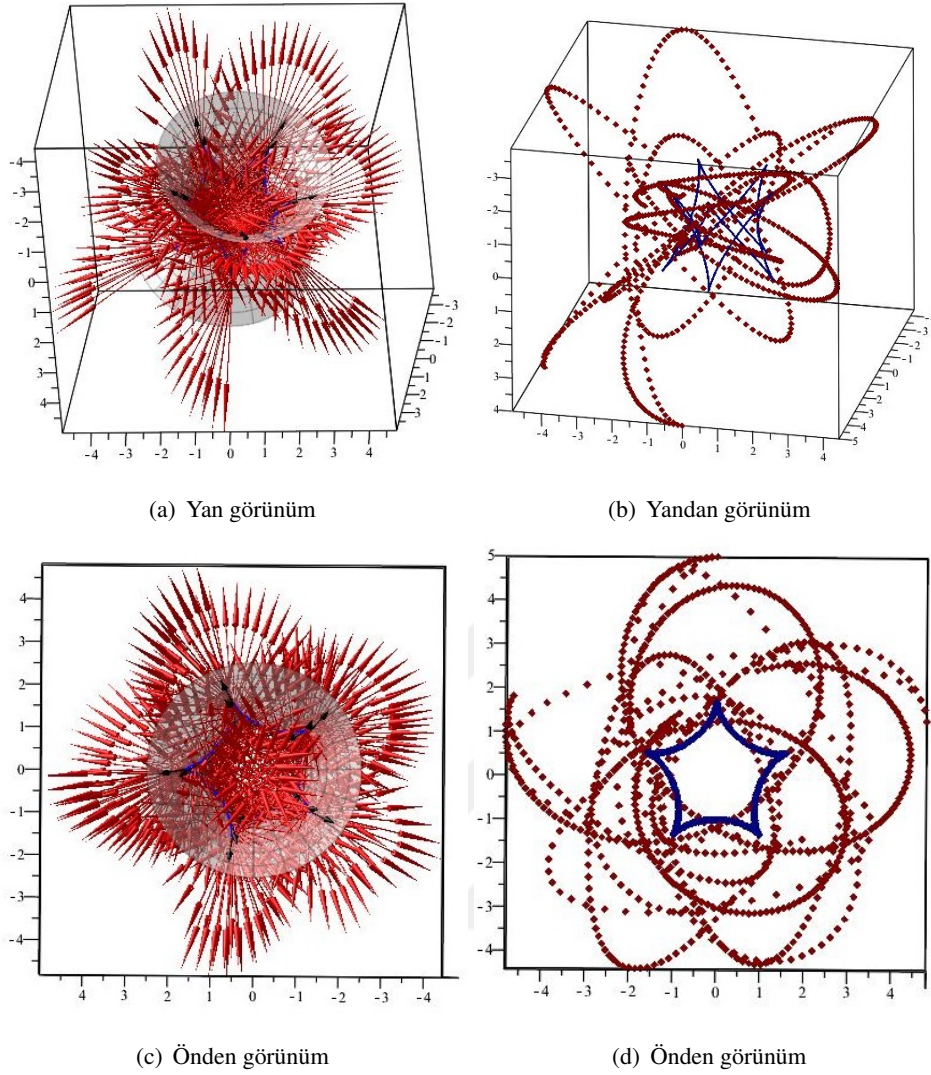


Şekil 4.7 ((a),(c)) $\mathbb{H}^{1,2}$ Lorentz küresi üzerindeki uzay benzeri bir γ eğrisi ile ilişkili bir optik fiber boyunca zaman benzeri düzlemde eliptik polarizasyon durumunu veren elektromanyetik dalg modelleri ve ((b),(d)) ilgili Rytov eğrileri

Örnek $\mathbb{S}^{1,2}$ Lorentz küresinde, bir optik fiber ile ilişkilendirilmiş zaman benzeri

$$\gamma(s) = \left[\frac{4}{3} \cos(5s), \frac{1}{3} \sin(8s) - \frac{4}{3} \sin(2s), \frac{1}{3} \cos(8s) + \frac{4}{3} \cos(2s) \right]$$

eğrisi boyunca ışık dalgasının dairesel polarizasyon durumu Şekil 4.8 'de gösterilmiştir.



Şekil 4.8 ((a),(c)) $\mathbb{S}^{1,2}$ Lorentz küresi üzerindeki zaman benzeri bir γ eğrisi ile ilişkili bir optik fiber boyunca dairesel polarizasyon durumunu ifade eden elektromanyetik dalga modelleri ve ((b),(d)) ilgili Rytov eğrileri

4.3. Polarizasyon Durumlarının Vida ve Plücker Koordinatları Aracılığıyla Yorumlanması

Bir α eğrisi ile ilişkilendirilmiş polarize ışık dalgasının Frenet çatısı $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ olmak üzere polarizasyon vektörü $\mathbf{E} = (E_1, E_2, E_3)$ biçiminde yazılsın ve α eğrisinin teğet vektörü $\mathbf{t} = (t_1, t_2, t_3)$ bir U matrisi ile ilişkili olsun. Bu durumda $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ herhangi bir vektör olmak üzere polarize ışık dalgası için, altı boyutlu $\Omega = (\mathbf{t}, \mathbf{v})$ vektörü vidayı göstermektedir. $\mathbf{t}' = U\mathbf{t}$, $\mathbf{v}' = n \times \mathcal{H} U\mathbf{t} + U\mathbf{v}$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $\Omega = (\mathbf{t}, \mathbf{v})$ vidasına dönüşür, böylece bu dönüşüm aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t}' \\ \mathbf{v}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U & 0 \\ TU & U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix}, \quad (4.28)$$

burada n vektörü $g_{\mathcal{H}}$ -anti simetrik T matrisi ile ilişkilidir. Referans çatısı değiştiğinde vidadanın nasıl değiştiği bu denklemle açıklanmaktadır. $\Omega = (\mathbf{t}, \mathbf{v})$ vidası \mathbf{t} yönüne dik ve paralel olacak şekilde iki bileşene ayrılabilir. ρ paralel bileşeni $\rho = \frac{g_{\mathcal{H}}(\mathbf{v}, \mathbf{t})}{g_{\mathcal{H}}(\mathbf{t}, \mathbf{t})}$ şeklinde hesaplanır. Dik bileşen ise $\mathbf{E} = \mathbf{v} - \rho \mathbf{t}$ biçiminde hesaplanır. Bu durumda, polarizasyon durumunun vida eksenini üzerinde $p \times_{\mathcal{H}} \mathbf{t} = \mathbf{v} - \rho \mathbf{t}$ olacak şekilde bir p noktası denklemi kullanılarak bulunabilir. Bu denklemin çözümü $p = \frac{\mathbf{t} \times_{\mathcal{H}} \mathbf{v}}{g_{\mathcal{H}}(\mathbf{t}, \mathbf{t})}$ şeklindedir. Vida hareketi $d = p + t\mathbf{t}$ doğrusu etrafında gerçekleşir, bu doğru aynı zamanda $\mathbb{R}_{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3}^{1,2}$ uzayındaki anlık vida eksenini olarak da bilinir. Genel vida $\Omega = (\mathbf{t}, \mathbf{v})$, $\mathbf{v} = p \times_{\mathcal{H}} \mathbf{t} + \rho \mathbf{t}$ denklemini kullanarak standart formda aşağıdaki gibi hesaplanabilir: $\Omega = (\mathbf{t}, p \times_{\mathcal{H}} \mathbf{t} + \rho \mathbf{t})$. Burada $d = p + t\mathbf{t}$ doğrusu vidadanın eksenini ve ρ eksenini sabiti vidadanın adıdır.

Ayrıca, ışığın polarizasyonu ile ilişkili vida koordinat dönüşümlerini basitleştirmek için matris çarpımı ve dual sayı özellikleri kullanılabilir. $\Omega = (\mathbf{t}, \mathbf{v})$ ve $\Omega' = (\mathbf{t}', \mathbf{v}')$ sırasıyla dual vektörler $\tilde{\gamma} = \mathbf{t} + \varepsilon \mathbf{v}$ ve $\tilde{\gamma}' = \mathbf{t}' + \varepsilon \mathbf{v}'$ ile ilişkili vidalar olsun. Bu durumda, vida dönüşümü $\tilde{\gamma}' = \tilde{U} \tilde{\gamma}$ olarak hesaplanabilir, burada $\tilde{U} = U + \varepsilon T U$ ve T g-antisimetrik bir matristir. \tilde{U} g-ortogonal dual matristir. Yani, $\tilde{U}^T \mathbf{v} \tilde{U} = \mathbf{v}$. $U(t)$ t ile parametrelendirilmiş bir g-ortogonal dual matris olsun, o zaman $\tilde{U}^T \mathbf{v} \tilde{U} = \mathbf{v}$ elde edilir. Her iki tarafın türevi alınırsa $\dot{\tilde{U}} = \tilde{U} \mathbf{v}^{-1} \tilde{U}^T \mathbf{v} \dot{\tilde{U}}$ elde edilir. Böylece, polarizasyon durumu için \mathbf{v} vektörü teğet vektörüne paralel ve dik olacak şekilde iki bileşene ayrılabilir ve aşağıdaki gibi yazılabilir: $\mathbf{v} = k \times_{\mathcal{H}} \mathbf{t} + \rho \mathbf{t}$.

$$k = \frac{\mathbf{t} \times_{\mathcal{H}} \mathbf{v}}{g_{\mathcal{H}}(\mathbf{t}, \mathbf{t})} \text{ ve } \rho = \frac{g_{\mathcal{H}}(\mathbf{t}, \mathbf{v})}{g_{\mathcal{H}}(\mathbf{t}, \mathbf{t})}. \quad (4.29)$$

Buradan dual vektör $\tilde{\gamma}$ aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$\tilde{\gamma} = \mathbf{t} + \mathbf{v}(k \times_{\mathcal{H}} \mathbf{t} + \rho \mathbf{t}) = (1 + \mathbf{v}\rho)(\mathbf{t} + \mathbf{v}k \times_{\mathcal{H}} \mathbf{t}) \quad (4.30)$$

burada $1 + \mathbf{v}\rho$ bir dual skalerdir. Dual vektör $\mathbf{t} + \mathbf{v}k \times_{\mathcal{H}} \mathbf{t}$ anlık vida eksenini tanımlar ve ρ vida hareketinin adıdır. Bir vidadanın önemli bir özel durumu $\rho = 0$ olduğunda elde edilir. Yani, hız vektörü yoktur ve vida $S = (\mathbf{t}, p \times_{\mathcal{H}} \mathbf{t})$ biçimine sahiptir. $L = p + t\mathbf{t}$ doğrusuna göre cismin açısal hızı vardır ancak doğrusal hızı yoktur. Bu durumda vida L doğrusunu tanımlar ve bileşenlerine doğrunun Plücker koordinatları adı verilir. Vidadanın lineer vida haline dönüştüğü bir başka durum, vida $S = (0, \mathbf{v})$ olduğunda gerçekleşir. Bu durum cismin açısal hızının olmadığı, yalnızca ötelemeyle ilişkilendirilen doğrusal hızın olduğu bir harekete karşılık gelir. Yani bu doğrusal polarize bir ışık modeli verir.

4.4. Polarizasyon Durumlarının Stokes Vektörleri ve Matris Formu ile Yorumlanması

Hiperbolik bölünmüş kuaterniyonlar teorisine ilişkin ek ayrıntılar için (Özdemir, 2020) ayrıntılı olarak incelenebilir. Astrofizik ve biyoloji de dahil olmak üzere görüntülemeyle ilgili

çok sayıda uygulamada polarizasyon bilgisi çok önemlidir. Geleneksel hiperspektral görüntüleme ekipmanlarının ortaya çıkmasıyla birlikte, polarizasyon bilgisi son yıllarda daha fazla araştırmaya konu olmuştur. Spektrofolarimetrik resimler, üç boyutlu olarak görselleştirilebilen, uzaysal, spektral ve polarizasyon farkını toplayan veri dizileridir. Bu tür görüntüleme yaklaşımını kullanmak için ışık polarizasyonunun özelliklerini tanımlayan Stokes vektörünün elde edilmesi gerekir. Polarizasyon fiziğindeki en önemli araçlardan biri Stokes vektörüdür. Polarize sinyaller durumunda işe yarayan yeni bir teknik kuaterniyonlardır. Stokes parametreleri ve polarizasyon genellemesi ile ilgili fiziksel fikirleri açıklamaya yönelik basit ve hesaplama açısından etkili bir fonksiyon, kuaterniyonlar kullanılarak polarizasyon bilgisinin cebirsel temsili ile sağlanır (Flamant ve diğerleri, 2019; Kuntman ve diğerleri, 2019). Bu bölümde Stokes parametreleştirmelerine yardımcı olmak için hiperbolik bölünmüş kuaterniyonları kullanan yeni bir araç tanıtacağız. Bu yeni tanımlamanın yardımıyla, polarizasyon durumları için matematiksel olarak güzel ve fiziksel olarak anlamlı bir açıklamanın yanı sıra dairesel ve doğrusal polarizasyonun özel örneklerini sunabileceğiz.

Hiperbolik bölünmüş kuaterniyonlar Stokes vektörlerini aşağıdaki gibi ifade etmemizi sağlar;

$$q_H = S_0 + S_3i + S_1j + S_2k \quad (4.31)$$

Ayrıca, sırasıyla uzay benzeri vektör kısmına ve zaman benzeri vektör kısmına sahip zaman benzeri hiperbolik bölünmüş kuaterniyonların farklı temsillere sahip olduğunu belirtiyoruz. Böylece, hiperbolik bölünmüş kuaterniyonları kullanarak Stokes vektörlerini tanımlamak için iki duruma bağımsız olarak baktık.

İlk olarak Stokes vektörlerinin kullanılmasıyla, her q_H zaman benzeri hiperbolik bölünmüş kuaterniyonun uzay benzeri vektörlere sahip kısmı aşağıdaki gibi temsil edilebilir:

$$q_H = S_0 + \sqrt{-a_1S_3^2 + a_2S_1^2 + a_3S_2^2} \frac{S_3i + S_1j + S_2k}{\sqrt{-a_1S_3^2 + a_2S_1^2 + a_3S_2^2}}. \quad (4.32)$$

Burada $S_0^2 + a_1S_3^2 - a_2S_1^2 - a_3S_2^2 > 0$ 'dır. Anlatımı kolaylaştırmak için yukarıda adı geçen terimlere aşağıdaki isimleri verelim. Varsayalım ki $J = S_0 = \sqrt{-a_1S_3^2 + a_2S_1^2 + a_3S_2^2}$ ve $\xi = \frac{S_3i + S_1j + S_2k}{\sqrt{-a_1S_3^2 + a_2S_1^2 + a_3S_2^2}}$ olsun. Böylece zaman benzeri hiperbolik bölünmüş kuaterniyon şu şekilde temsil edilebilir:

$$q_{\mathcal{H}} = J + J\Phi\xi \quad (4.33)$$

Aynı zamanda, uzay benzeri vektörlere sahip zaman benzeri hiperbolik bölünmüş kuaterniyonlar için kutupsal form ve elektrik alan bileşenlerinin kullanılmasıyla, dört Stokes para-

metresini aynı anda aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\begin{aligned} S_0 &= E_{0x}^2 + E_{0y}^2, \\ S_1 &= \frac{E_{0x}^2 - E_{0y}^2}{\sqrt{a_2}}, \\ S_2 &= \frac{2}{\sqrt{a_3}} E_{0x} E_{0y} \cosh(\phi), \\ S_3 &= \frac{2}{\sqrt{a_1}} E_{0x} E_{0y} \sinh(\phi), \end{aligned}$$

burada J toplam yoğunluk ve $\Phi \in [0, 1]$ polarizasyon derecesidir. $\Phi = 1$ ise ışığın tamamen polarize olduğu, $\Phi = 0$ ise ışığın polarize olmadığı ve $0 < \Phi < 1$ ise ışığın kısmen polarize olduğu söylenir. $\{S_1, S_2, S_3\}$ Stokes vektörleri ile dalganın polarizasyon durumunu aşağıdaki gibi tanımlar: S_1 ve S_2 doğrusal polarizasyon durumlarını ifade ederken S_3 hiperbolik polarizasyon durumlarını ifade eder.

i. Doğrusal polarize: Doğrusal polarize bir ışık modeli için, $\phi = 0$ olduğunu varsayın. Eğer \mathbf{E} zaman benzeri bir vektör ise $E_{0x} = a \cosh \delta$, $E_{0y} = a \sinh \delta$ biçiminde seçilebilir. Eğer E uzay benzeri bir vektör ise $E_{0x} = a \cos \delta$, $E_{0y} = a \sin \delta$ biçiminde seçilebilir. Böylece, zaman benzeri ve uzay benzeri durumlar için x -eksenine sahip δ açısıyla yönlendirilmiş doğrusal polarize bir ışık dalgasının stokes vektörü aşağıdaki gibi hesaplanır;

$$S_0 = \cosh 2\delta, S_1 = \frac{a^2}{\sqrt{a_1}}, S_2 = \frac{a^2}{\sqrt{a_2}} \sinh 2\delta, S_3 = 0.$$

ve

$$S_0 = a^2, S_1 = \frac{a^2}{\sqrt{a_2}} \cos 2\delta, S_2 = \frac{a^2}{\sqrt{a_3}} \sin 2\delta, S_3 = 0.$$

ii. Eliptik ve dairesel polarize: Bu durumlar için, $\phi \neq 0$ ve $E_{0x} = E_{0y} = a$ seçilirse aşağıdaki hesaplamalar elde edilir:

$$S_0 = 2a^2, S_1 = 0, S_2 = \frac{2a^2}{\sqrt{a_3}} \cosh \phi, S_3 = \frac{2a^2}{\sqrt{a_1}} \sinh \phi.$$

Eğer $a_i = 1$, $i = \{1, 2, 3\}$ ise dairesel polarize ışık modeli elde edilir. $a_i = 1$, $i = \{1, 2, 3\}$ değerlerinden herhangi biri diğerlerinden farklıysa, eliptik polarize ışık dalgası modeli elde edilir. Daha sonra, $X = \frac{S_1}{S_0}$, $Y = \frac{S_2}{S_0}$ ve $Z = \frac{S_3}{S_0}$ yazalım, şunu elde ederiz:

$$-a_2 X^2 + a_3 Y^2 + a_1 Z^2 = 1. \quad (4.34)$$

Böylece polarizasyon durumunun (X, Y, Z) parametreleri, durumun Kartezyen koordinatla-

rına aşağıdaki şekilde karşılık gelir:

$$X = \frac{1}{\sqrt{a_2}} \sin(\psi) \sinh(\theta) \quad (4.35)$$

$$Y = \frac{1}{\sqrt{a_3}} \sin(\psi) \cosh(\theta) \quad (4.36)$$

$$Z = \frac{1}{\sqrt{a_1}} \cos(\psi) \quad (4.37)$$

Öklid 3-uzayında, polarizasyon durumları, dünya küresi üzerindeki noktaları konumlandırmak için kullanılan enlem ve boylam sistemine benzer bir yaklaşım kullanılarak Poincaré küresine eşlenir. Poincaré küresinin iki açısal değeri (azimut ve elipslik), polarizasyon durumlarının parametreleriyle yorumlanmasına olanak tanır. Benzer şekilde, burada, denklemi yukarıda elde edilen Lorentz küresi $\mathbb{S}_{a_1, a_2, a_3}^{1,2}$ üzerine çizilmiştir. Dolayısıyla, bu küre Lorentz Poincaré küresi olarak adlandırılabilir ve polarizasyon durumları bu kürenin yardımıyla şu şekilde yorumlanabilir; Ekvatordaki noktalar doğrusal polarize ışığa karşılık gelir, kutuplardaki noktalar zaman benzeri düzlemde yatan eliptik ($a_1 = a_2 = a_3 = 1$ ise dairesel polarizasyona karşılık gelir) polarize ışığı temsil eder ve kürenin geri kalanındaki noktalar eliptik polarizasyon durumlarını gösterir.

q_E kuaterniyonik formu kullanılırsa, Stokes parametreleri için aşağıdaki dual kuaterniyonu yazılabilir:

$$q_H = S_0 + \sqrt{a_1 S_3^2 - a_2 S_1^2 - a_3 S_2^2} \frac{S_3 i + S_1 j + S_2 k}{\sqrt{a_1 S_3^2 - a_2 S_1^2 - a_3 S_2^2}}. \quad (4.38)$$

Burada $S_0^2 + a_1 S_3^2 - a_2 S_1^2 - a_3 S_2^2 > 0$ 'dır. Anlatımı kolaylaştırmak için yukarıda adı geçen terimlere aşağıdaki isimleri verelim. Varsayalım ki $J = S_0 = \sqrt{a_1 S_3^2 - a_2 S_1^2 - a_3 S_2^2}$ ve $\xi = \frac{S_3 i + S_1 j + S_2 k}{\sqrt{a_1 S_3^2 - a_2 S_1^2 - a_3 S_2^2}}$ olsun. Böylece, zaman benzeri hiperbolik bölünmüş kuaterniyon şu şekilde temsil edilebilir:

$$q_H = J + J\Theta\xi \quad (4.39)$$

$\Theta \in [0, 1]$ olmak üzere $\Theta = 1$ ise ışığın tamamen polarize olduğu, $\Theta = 0$ ise ışığın polarize olmadığı ve $0 < \Theta < 1$ ise ışığın kısmen polarize olduğu söylenir. $\{S_1, S_2, S_3\}$ Stokes vektörleri ile dalgaın polarizasyon durumunu aşağıdaki gibi tanımlanır: S_1 ve S_2 doğrusal polarizasyon durumlarını ifade ederken S_3 dairesel polarizasyon durumlarını ifade eder. Aynı zamanda, zaman benzeri hiperbolik kuaterniyonlar için kutupsal form ve elektrik alan bile-

şenlerinin kullanılmasıyla, dört Stokes parametresini aynı anda aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\begin{aligned} S_0 &= E_{0x}^2 + E_{0y}^2, \\ S_1 &= \frac{E_{0x}^2 - E_{0y}^2}{\sqrt{a_2}}, \\ S_2 &= \frac{2}{\sqrt{a_3}} E_{0x} E_{0y} \cos(\theta), \\ S_3 &= \frac{2}{\sqrt{a_1}} E_{0x} E_{0y} \sin(\theta), \end{aligned}$$

i. Doğrusal polarize: Doğrusal polarize bir ışık modeli için, $\phi = 0$ olduğunu varsayalım. \mathbf{E} uzaysal bir vektör olduğundan, $E_{0x} = a \cos \delta$, $E_{0y} = a \sin \delta$ biçiminde seçilebilir. Böylece, x -ekseniyle δ açısıyla yönlendirilmiş doğrusal polarize bir ışık dalgasının stokes vektörü aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$S_0 = a^2, S_1 = \frac{a^2}{\sqrt{a_2}} \cos 2\delta, S_2 = \frac{a^2}{\sqrt{a_3}} \sin 2\delta, S_3 = 0.$$

ii. Eliptik ve dairesel polarize: Bu durumlar için, $\phi = \frac{\pi}{2}$ ve $E_{0x} = E_{0y} = a$ biçiminde seçilirse aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$$S_0 = 2a^2, S_1 = 0, S_2 = 0, S_3 = \frac{2a^2}{\sqrt{a_3}}.$$

Eğer $a_i = 1$, $i = \{1, 2, 3\}$ ise dairesel polarize ışık modeli elde edilir. Eğer $a_i = 1$, $i = \{1, 2, 3\}$ değerlerinden herhangi biri diğerlerinden farklıysa, o zaman eliptik polarizasyon elde edilir. Sonra, $X = \frac{S_1}{S_0}$, $Y = \frac{S_2}{S_0}$ ve $Z = \frac{S_3}{S_0}$ elde ederiz,

$$a_2 X^2 - a_3 Y^2 - a_1 Z^2 = 1. \quad (4.40)$$

Böylece polarizasyon durumunun (X, Y, Z) parametreleri, durumun Kartezyen koordinatlarına aşağıdaki gibi karşılık gelir:

$$X = \frac{1}{\sqrt{a_2}} \cosh(\psi) \cosh(\theta) \quad (4.41)$$

$$Y = \frac{1}{\sqrt{a_3}} \cosh(\psi) \sinh(\theta) \quad (4.42)$$

$$Z = \frac{1}{\sqrt{a_1}} \sinh(\psi) \quad (4.43)$$

Benzer şekilde, burada, denklemi yukarıda elde edilen Lorentz küresi $\mathbb{H}_{a_1, a_2, a_3}^{1,2}$ üzerine çizilmiştir. Dolayısıyla bu küreye Lorentz Poincaré küresi denilebilir ve polarizasyon durumları bu kürenin yardımıyla şu şekilde yorumlanabilir; Ekvatordaki noktalar doğrusal polarize

ışığa karşılık gelir, kutuplardaki noktalar dairesel polarize ışığı temsil eder ve kürenin geri kalanındaki noktalar diğer eliptik polarizasyon durumlarını gösterir.

Ayrıca, elektrik alanının yatay ve dikey bileşenleriyle ilişkili eliptik, dairesel ve doğrusal polarizasyon durumları modellenilebilir. Ek olarak Stokes vektörlerini ifade etmek için aşağıdaki matris formu kullanılabilir:

$$\begin{bmatrix} S_0 & -a_1 S_3 & -a_3 S_1 & -a_3 S_2 \\ S_3 & S_0 & -S_2 \Delta / a_1 & S_1 \Delta / a_1 \\ S_1 & S_2 \Delta / a_2 & S_0 & -S_3 \Delta / a_2 \\ S_2 & -S_1 \Delta / a_3 & S_3 \Delta / a_3 & S_0 \end{bmatrix}.$$

4.6 Teorem $\mathbb{R}_{a_1, a_2, a_3}^3$ uzayında, Stokes vektörleriyle ilişkilendirilmiş, $q_H = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k = S_0 + S_3 i + S_1 j + S_2 k$ kuaterniyonu, birim zaman benzeri hiperbolik bölünmüş kuaterniyon olsun. Bu durumda q_H kuaterniyonu ile bir lineer dönüşüm olan $F : \mathbb{R}_{a_1, a_2, a_3}^3 \rightarrow \mathbb{R}_{a_1, a_2, a_3}^3$, $F_\theta(\mathbf{u}) = q_H \mathbf{u} q_H^{-1} = \mathbf{S} \mathbf{u} \mathbf{S}^{-1}$ şeklinde tanımlanır, burada $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ 'dir. F Lorentz uzayında \mathbf{t}_H eksenine doğrultusunda 2ϕ açılık bir dönme yaptırır. Ayrıca, F lineer dönüşümü, aşağıdaki şekilde matris formuyla gösterilir:

$$F_\phi^S = \begin{bmatrix} S_0^2 + a_1 S_3^2 - a_2 S_1^2 - a_3 S_2^2 & 2a_2 S_3 S_1 - 2\frac{\Delta}{a_1} S_0 S_2 & 2a_3 S_3 S_2 + 2\frac{\Delta}{a_1} S_0 S_1 \\ 2a_1 S_3 S_1 + 2\frac{\Delta}{a_2} S_0 S_2 & S_0^2 - a_1 S_3^2 + a_2 S_1^2 - a_3 S_2^2 & 2a_3 S_1 S_2 - 2\frac{\Delta}{a_2} S_0 S_3 \\ 2a_1 S_3 S_2 - 2\frac{\Delta}{a_3} S_0 S_1 & 2a_2 S_1 S_2 + 2\frac{\Delta}{a_3} S_0 S_3 & S_0^2 - a_1 S_3^2 - a_2 S_1^2 + a_3 S_2^2 \end{bmatrix}. \quad (4.44)$$

Bu durumda F_ϕ^S matrisi hiperboloid üzerinde $V_S = [S_1, S_2, S_3]$ vektöründen $V_{S'} = [S'_1, S'_2, S'_3]$ vektörüne dönüşümünü ifade eder. $S'_0 = \sqrt{a_1 S_3'^2 - a_2 S_1'^2 - a_3 S_2'^2}$ olduğundan F_ϕ^S matrisinin S vektöründen S' vektörüne Stokes vektörlerinin dönüşümünü gerçekleştirdiği söylenebilir.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde, üçüncü bölümde verilen optik fiber boyunca polarize ışık dalgasının eliptik ve dairesel polarizasyonunun araştırıldığı temel yayın motivasyon olarak alınarak (bakınız, Özdemir, 2022), $\mathbb{R}_{a_1, a_2, a_3}^{1,2}$ uzayındaki bir eğri ile ilişkilendirilmiş optik fiber boyunca polarizasyon durumları incelenmiştir. Bu polarizasyon durumlarının incelenebilmesi için uygun kuaterniyonlar, Rodrigues formülleri ve vida operatörlerinden yararlanılmıştır. Ayrıca, Stokes vektörleri ve matris formları aracılığıyla da polarizasyon durumları yorumlanmıştır. Dahası polarizasyon durumlarında elektrik alanın uç noktaları tarafından çizilen Rytov eğrileri elde edilerek ilgili elektromanyetik dalga modeli ile birlikte matematik programları aracılığıyla görselleştirilmiştir.

Dördüncü bölümde, ışık dalgalarının yayılımını ve polarizasyon durumlarını geometrik ve fiziksel açıdan yorumlamak için Rodrigues formülleri, hiperbolik bölünmüş kuaterniyonlar, dual bölünmüş kuaterniyonlar, vida operatörü, Plücker koordinatları, Stokes vektörleri ve matris formları kullanılmıştır. Bu bölümde, kuaterniyonların kutupsal form temsili kullanılarak, uzay ve zaman benzeri bir eğri ile ilişkilendirilmiş bir optik fiber boyunca polarizasyon durumlarını ve ilgili Rytov eğrilerini açıklamak için önemli teoremler verilmiştir. Bu bölümün literatüre en önemli katkısı, kullanılan teknik ve elde edilen teorem ve sonuçlarla birlikte üç tip (lineer, dairesel, eliptik) polarizasyon türünü de kapsayan genel bir bakış açısı sunulmasıdır.

Sonuç olarak, bu tez çalışması ile $\mathbb{R}_{a_1, a_2, a_3}^{1,2}$ uzayındaki tüm polarizasyon durumları fiziksel ve matematiksel açıdan yorumlanmış ve ilgili örnekler verilerek görselleştirilmiştir.

Bu tez çalışması aracılığıyla yapılacak bazı öneriler aşağıdaki gibi verilebilir: Üçüncü bölümde elde edilen sonuçlara ek olarak $g_E(\mathbf{E}, \mathbf{n}_E) = 0$ ve $g_E(\mathbf{E}, \mathbf{b}_E) = 0$ durumları ayrı ayrı düşünülerek eliptik ve dairesel polarizasyon durumları modellenebilir. Bu durumlar için eliptik (dairese) polarizasyon durumları sırasıyla $Q_E = q_E + \frac{\epsilon}{2} \mathbf{n}_E \otimes_E q_E$ ve $Q_E = q_E + \frac{\epsilon}{2} \mathbf{b}_E \otimes_E q_E$ kuaterniyonları yardımıyla elde edilebilir. Bu kuaterniyonlar vida operatörü yardımı ile \mathbf{E} polarizasyon vektörüne sırasıyla \mathbf{n}_E ve \mathbf{b}_E etrafında θ açısı kadar dönme ve yine aynı eksenler boyunca θ^* kadar öteleme hareketi yaptırır. Böylelikle, eliptik (dairese)-Rytov eğrileri sırasıyla $q_E = \cos(k\pi s) + \mathbf{n}_E \sin(k\pi s)$ ve $q_E = \cos(k\pi s) + \mathbf{b}_E \sin(k\pi s)$ birim kuaterniyonları yardımıyla belirlenebilir. Ayrıca, ışık benzeri ve yarı-ışık benzeri eğriler için de polarizasyon durumları da gelecekteki çalışmalarda incelenecektir.

KAYNAKLAR

- Adorno, B. V. (2017). Robot Kinematic Modeling and Control Based on Dual Quaternion Algebra—Part I: Fundamentals.
- Alexeyev, C., Lapin, B., Milione, G. and Yavorsky, M. (2015). Optical Activity in Multihelicoidal Optical Fibers. *Physical Review A*, 92(3), 033809.
- Alexeyev, C. N. and Yavorsky, M. A. (2008). Generation and Conversion of Optical Vortices in Long-Period Helical Core Optical Fibers. *Physical Review A—Atomic, Molecular and Optical Physics*, 78(4), 043828.
- Ata, E. and Yayli, Y. (2008). Dual Unitary Matrices and Unit Dual Quaternions. *Differential Geometry-Dynamical Systems*.
- Ball, R. S. (1876). The Theory of Screws: A Study in the Dynamics of a Rigid Body. *Mathematische Annalen*, 9(4), 541–553.
- Berry, H. G., Gabrielse, G. and Livingston, A. (1977). Measurement of the Stokes Parameters of Light. *Applied Optics*, 16(12), 3200–3205.
- Birch, R. (1987). Fabrication and Characterization of Circularly Birefringent Helical Fibers. *Electronic Letter*, 23, 50–52.
- Bottema, O. and Roth, B. (1990). *Theoretical Kinematics* (C. 24). Courier Corporation.
- Clifford. (1871). Preliminary Sketch of Biquaternions. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 1(1), 381–395.
- Cockle, J. (1849). LII. On Systems of Algebra Involving more than One Imaginary; and on Equations of the Fifth Degree. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 35(238), 434–437.
- Dimentberg, F. (1969). *The Screw Calculus and Its Applications in Mechanics*. Foreign Technology Division.
- Euler, L. (1775). Nova Methodus Motum Corporum Rigidorum Degerminandi. *Novi Commentari Academiae Scientiarum Petropolitanae*, 208–238.
- Flamant, J., Miron, S. and Brie, D. (2019). Quaternion Non-Negative Matrix Factorization: a New Tool for Spectropolarimetric Imaging. *2019 IEEE 8th International Workshop 69 on Computational Advances in Multi-Sensor Adaptive Processing (CAMSAP)*, 336–340.
- Funda, J. and Paul, R. P. (1990). A Computational Analysis of Screw Transformations in Robotics. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 6(3), 348–356.
- Goldstein, D. H. (2003). *Polarized Light*. Marcel Dekker, Inc.
- Gouasmi, M. (2012). Robot Kinematics, Using Dual Quaternions. *IAES International Journal of Robotics and Automation*, 1(1), 13.
- Gu, Y.-L. and Luh, J. (1987). Dual-Number Transformation and Its Applications to Robotics. *IEEE Journal on Robotics and Automation*, 3(6), 615–623.

- Hacısalıhoğlu, H. H. (1980). *Yüksek Diferansiyel Geometriye Giriş*. Fırat Üniversitesi.
- Hamilton, W. R. (1844). LXXVIII. On Quaternions; or on a New System of Imaginaries in Algebra: to the Editors of the Philosophical Magazine and Journal. *The London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 25(169), 489–495.
- Han, D.-P., Wei, Q. and Li, Z.-X. (2008). Kinematic Control of Free Rigid Bodies Using Dual Quaternions. *International Journal of Automation and Computing*, 5, 319–324.
- Kahveci, D., Gök, İ. and Yaylı, Y. (2016). Stokes Parameters as a Minkowskian Four-Vector. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 13(10), 1650116.
- Kompfner, R. (1947). The Traveling-Wave Tube as Amplifier at Microwaves. *Proceedings of the IRE*, 35(2), 124–127.
- Kompfner, R. (1976). The Invention of Traveling Wave Tubes. *IEEE Transactions on Electron Devices*, 23(7), 730–738.
- Kula, L. and Yaylı, Y. (2007). Split Quaternions and Rotations in Semi Euclidean Space E_2^4 . *Journal of the Korean Mathematical Society*, 44(6), 1313–1327.
- Kuntman, E., Kuntman, M. A., Canillas, A. and Arteaga, O. (2019). Quaternion Algebra for Stokes–Mueller Formalism. *JOSA A*, 36(4), 492–497.
- Laming, R. I. and Payne, D. N. (1989). Electric Current Sensors Employing Spun Highly Birefringent Optical Fibers. *Journal of Lightwave Technology*, 7(12), 2084–2094.
- Leclercq, G., Lefèvre, P. and Blohm, G. (2013). 3D Kinematics Using Dual Quaternions: Theory and Applications in Neuroscience. *Frontiers in Behavioral Neuroscience*, 7, 7.
- Lewin, L. (1955). Propagation in Curved and Twisted Waveguides of Rectangular Cross-Section. *Proceedings of the IEE-Part B: Radio and Electronic Engineering*, 102(1), 75–80.
- López, R. (2014). Differential Geometry of Curves and Surfaces in Lorentz-Minkowski Space. *International Electronic Journal of Geometry*, 7(1), 44–107.
- McAulay, A. (1898). *Octonions: A Development of Clifford's Bi-Quaternions*. University Press.
- McCarthy, J. M. (1986). Dual Orthogonal Matrices in Manipulator Kinematics. *The International Journal of Robotics Research*, 5(2), 45–51.
- Menyuk, C. R. and Wai, P. K. A. (1994). Elimination of Nonlinear Polarization Rotation in Twisted Fibers. *JOSA B*, 11(7), 1305–1309.
- Nicolet, A., Zolla, F., Ould Agha, Y. and Guenneau, S. (2008). Geometrical Transformations and Equivalent Materials in Computational Electromagnetism. *COMPEL-The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering*, 27(4), 806–819.
- Özdemir, M. and Ergin, A. (2005). Some Geometric Applications of Timelike Quaternions. *International Conference of Jangjeon Mathematical Society*, 16, 108–115.

- Özdemir, M. and Ergin, A. (2006). Rotations with Unit Timelike Quaternions in Minkowski 3-Space. *Journal of Geometry and Physics*, 56(2), 322–336.
- Özdemir, M. (2009). The Roots of a Split Quaternion. *Applied Mathematics Letters*, 22(2), 258–263.
- Özdemir, M. (2016). An Alternative Approach to Elliptical Motion. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 26, 279–304.
- Özdemir, M. (2020). *Kuaterniyonlar ve Geometri*. Altın Nokta Yayınevi.
- Özdemir, Z. (2022). Kinematical Modeling of Circular and Elliptical Polarization of the Polarized Light Via Screw Transformation. *Physica Scripta*, 97(2), 025502.
- Pennock, G. and Yang, A. (1985). Application of Dual-Number Matrices to the Inverse Kinematics Problem of Robot Manipulators.
- Pontin, D. I. and Priest, E. R. (2022). Magnetic Reconnection: MHD Theory and Modelling. *Living Reviews in Solar Physics*, 19(1), 1.
- Qian, J. and Hussey, C. (1986). Circular Birefringence in Helical-Core Fibre. *Electronics Letters*, 22, 515–517.
- Rashleigh, S. and Ulrich, R. (1979). Magneto-Optic Current Sensing with Birefringent Fibers. *Applied Physics Letters*, 34(11), 768–770.
- Rodrigues, O. (1840). Des Lois Géométriques Qui Régissent Les Déplacements D'un Système Solide Dans L'espace, Et De La Variation Des Coordonnées Provenant De Ces Déplacements Considérés Indépendamment Des Causes Qui Peuvent Les Produire. *Journal De Mathématiques Pures Et Appliquées*, 5, 380–440.
- Ross, J. (1984). The Rotation of the Polarization in Low Birefringence Monomode Optical Fibres Due to Geometric Effects. *Optical and Quantum electronics*, 16, 455–461.
- Sarıyıldız, E. and Temeltas, H. (2011). A Singularity Free Trajectory Tracking Method for the Cooperative Working of Multi-Arm Robots Using Screw Theory. *2011 IEEE International Conference on Mechatronics*, 451–456.
- Sheppard, C. J. (2014). Jones and Stokes Parameters for Polarization in Three Dimensions. *Physical Review A*, 90(2), 023809.
- Stenflo, J. (2019). Stokes Vectors and Minkowski Spacetime: Structural Parallels. *arXiv preprint arXiv:1912.08614*.
- Stokes, G. G. (1852). On the Composition and Resolution of Streams of Polarized Light from Multiple Sources. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, 9, 399–416.
- Şimsek, H. and Özdemir, M. (2016). Generating Hyperbolical Rotation Matrix for a Given Hyperboloid. *Linear Algebra and Its Applications*, 496, 221–245.
- Waldron, R. (1958). A Helical Coordinate System and Its Applications in Electromagnetic Theory. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 11(4), 438–461.
- Ward, J. (1997). Quaternions and Cayley Numbers: Algebra and Applications—Dordrecht. *Netherlands: Kluwer Academic Publishers*.

Yang, A. (1974). Calculus of Screws in Basic Questions of Design Theory. Spillers, W.R. (Ed.). *Basic Questions of Design Theory*, 266–281.

Yüca, G. and Yaylı, Y. (2021). Dual Transformations and Quaternions. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 44(14), 10957–10971



ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı-Soyadı : Şirin Gonca Perçin

Eğitim Derecesi	Okul/Program	Mezuniyet Yılı
Lisans	Amasya Üniversitesi/İlköğretim Matematik Ö.	2012

Yabancı Dil

İngilizce

Bilimsel Faaliyetler (Yayınlar, Bildiriler, Katıldığı Projeler)

Yayınlar

1. Özdemir Z., Perçin Ş. G., Ceyhan H., Propagation of the polarized light along an optical fiber via Rodrigues formula and Lorentzian screw motion, (under review).

Bildiriler

2. Perçin Ş. G., Ceyhan H., Özdemir Z., Examination of Growth Dependent to the Ellipsoid Surface, Asia Pacific 8th International Modern Sciences Congress, 2023, 91-96.