T.C
ERCİYES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ÖKLİD UZAYINDA BAZI ÖZEL EĞRİLER VE MANNHEİM EĞRİLERİ

Hazırlayan
Eda YILDIRIM

Danışman
Prof. Dr. Nural YÜKSEL

2. Danışman
Prof. Dr. Ferdağ KAHRAMAN AKSOYAK

Yüksek Lisans Tezi

Ağustos 2024
KAYSERİ

T.C
ERCİYES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ÖKLİD UZAYINDA BAZI ÖZEL EĞRİLER VE MANNHEİM EĞRİLERİ

(Yüksek Lisans Tezi)

Hazırlayan
Eda YILDIRIM

Danışman
Prof. Dr. Nural YÜKSEL

2. Danışman
Prof. Dr. Ferdağ KAHRAMAN AKSOYAK

Ağustos 2024
KAYSERİ

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK

Bu çalışmadaki tüm bilgilerim, akademik ve etik kurallara uygun bir şekilde elde edildiğini beyan ederim. Aynı zamanda bu kural ve davranışların gerektirdiği gibi, bu çalışmanın özünde olmayan tüm materyal ve sonuçları tam olarak aktardığımı ve referans gösterdiğimi belirtirim.

Eda YILDIRIM

YÖNERGEYE UYGUNLUK

“Öklid Uzayında Bazı Özel Eğriler Ve Mannheim Eğrileri” adlı Yüksek Lisans Tezi, Erciyes Üniversitesi Lisansüstü Tez Önerisi ve Tez Yazma Yönergesi’ne uygun olarak hazırlanmıştır.

Hazırlayan	**Danışman**
Eda YILDIRIM	Prof. Dr. Nural YÜKSEL

Matematik ABD Başkanı

Prof. Dr. Hikmet ÖZARSLAN

TEŞEKKÜR

Bu çalışmamın hazırlanmasında bilgilerini benimle paylaşan değerli zamanını ayıran her aşamasında benden yardımlarını esirgemeyen yakın ilgi ve önerileri ile beni yönlendiren danışman hocam Sayın Prof. Dr. Nural YÜKSEL’e minnet ve şükranlarımı sunarım.

Ayrıca çalışmalarım süresince birçok fedakârlıklar göstererek beni destekleyen ve çalışma süresince tüm zorlukları benimle göğüsleyen hayatımın her evresinde sabırla bana destek olan değerli anneme, babama ve eşim Gökhan YILDIRIM’a teşekkürlerimi sunarım.

ÖKLİD UZAYINDA BAZI ÖZEL EĞRİLER VE MANNHEİM EĞRİLERİ

Eda YILDIRIM

Erciyes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü
Yüksek Lisans Tezi, Ağustos 2024
Danışman: Prof. Dr. Nural YÜKSEL

ÖZET

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde Öklid Uzayında Eğriler teorisiyle ilgili temel tanım ve kavramlara yer verilmiştir.

İkinci bölümde özel eğrilerden olan bertrand eğrisi, involüt-evolüt eğrisi, helis (eğilim çizgisi) tanımlanarak konu ile ilgili örnek ve teoremlere yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde 3-boyutlu öklid uzayında Frenet çatısına göre Mannheim eğrilerinin ve Mannheim eğri çiftlerinin tanımları verilip, bu tip eğrilerin eğrilik ve torsiyonları yardımıyla çeşitli karakterizasyonlarına yer verilmiştir. Ayrıca bazı özel eğrilerin Mannheim eğri ve Mannheim eğri çifti olması durumları incelenmiştir.

Tezin son bölümünde sonuç ve önerilerinden oluşmuştur.

Anahtar kelimeler: Öklid uzayı, bazı özel eğriler, bertrand eğrisi, Mannheim eğrileri, Mannheim eğri çiftleri, Frenet çatısı, eğrilik fonksiyonları.

EUCLIDEAN SPACE, SOME SPECIAL CURVES AND MANNHEIM CURVES

Eda YILDIRIM

Erciyes University, Institute of Science
Master Thesis, August 2024
Advisor: Prof. Nural YÜKSEL

ABSTRACT

This thesis consists of four sections.

In the first section, fundamental names and concepts related to curves in Euclidean space are given.

In the second section, special curves such as Bertrand curve, involute-evolute curve and helices are described and examples and theorems related to them are presented.

In the third section, Mannheim curves and Mannheim curve pairs in 3 dimensional Euclidean space are defined according to Frenet formulat and various characterizations of these curves are given through curvature and torsion. Also, situations where some special curves are Mannheim curve pairs are examined.

In the final section, general evaluations and conclusions are presented.

Keywords: Euclidean space, some special curves, Bertrand curve, Mannheim curves, Frenet frame, curvature functions.

İÇİNDEKİLER

ÖKLİD UZAYINDA BAZI ÖZEL EĞRİLER VE MANNHEİM EĞRİLERİ

SİMGELER VE KISALTMALAR

R	: Reel sayılar kümesi
E^n	: n-boyutlu Öklid uzayı
E^3	: 3-boyutlu Öklid uzayı
$\lVert \ \rVert$	: Öklid uzayında norm
$\langle \, , \rangle$	: Öklid uzayında iç çarpım
x	: Öklid uzayında vektörel çarpım
κ	: Eğrinin eğriliği
τ	: Eğrinin torsiyonu

ŞEKİLLER LİSTESİ

GİRİŞ

Diferensiyel geometride, sık çalışılan konulardan biri de eğriler teorisidir. Eğriler teorisinde genellikle geodezikler, çemberler, genel helisler, rektifiyan eğriler gibi özel eğriler bulunmaktadır. Öklid uzayında en çok araştırılan problemlerden biri de regüler bir eğrinin karakterizasyonudur. Bu problemin çözümünde κ (eğrinin eğriliği) ve τ (eğrinin burulması) nın önemli bir rolü vardır.

Eğrilerin eğrilikleri ve burulması arasındaki ilişkilerden faydalanarak bazı özel eğriler kullanılır. Örneğin; $\kappa = \tau = 0$ ise eğri bir geodeziktir. Eğer κ sıfırdan farklı bir sabit ve $\tau = 0$ ise eğri bir çemberdir. Eğrilik ve burulmanın sıfırdan farklı sabit ise eğri bir dairesel helistir. Eğer κ ve τ eğrilikleri sabit değil fakat $\frac{\tau}{\kappa} = \text{sbt}$ ise eğri bir genel helistir. Eğer $\frac{\tau}{\kappa} = as + b$ şeklinde sabitten farklı ve yay parametresine bağlı lineer bir fonksiyon şeklinde yazılabiliyorsa eğri bir rektifiyan eğridir. Eğriliği sabit ve burulma fonksiyon, değişken olan eğriye Salkowski, eğriliği değişken ve burulması sabit olan eğriye ise anti-Salkowski eğri adı verilir. 3- boyutlu Öklid uzayında eğrilik ve burulma fonksiyonları yardımıyla bazı özel eğrilerin karakterizasyonları mevcuttur.

Eğriler teorisinde farklı yaklaşım da iki eğrinin Frenet vektörleri arasındaki bağlantıyı ele alarak eğrilerin karakterizasyonlarını belirlemektir. P eğrisinin asli normal doğrultusu R eğrisinin asli normal doğrultusu ile çakışır ise P eğrisine Bertrand eğri, R eğrisine ise P eğrisinin Bertrand eğri çifti denir. Eğer iki eğrinin teğetleri birbirine dik ise bu eğrilere involüte-evolüte eğri çifti denir. Eğer P eğrisinin asli normal doğrultusu R eğrisinin binormal doğrultusu ile çakışır ise P eğrisine Mannheim eğri, R eğrisine de P eğrisinin Mannheim eğri çifti denir. Bu tez çalışmasında, eğri çiftlerinin bir çeşidi olan Bertrand, involüt-evolüt, Mannheim eğrileri ve çiftleriyle ilgilidir.

Mannheim eğrileri 1878 yılında Mannheim tarafından bulunmuştur [1]. 1966 yılında 3-boyutlu Öklid uzayında Riccati denklemleri yardımıyla Mannheim eğrileri ile ilgili olarak farklı teoremler verilmiştir [2]. Son yıllarda Liu ve Wang tarafından 3-boyutlu Öklid uzayında Mannheim eğri çiftleri ve bu eğri çiftleriyle ilgili bağıntılar çalışıldı [3].

Bu tez çalışmasında başlangıç olarak [1] ve [3] nolu çalışmalarda yer alan 3 boyutlu Öklid uzayındaki Mannheim eğrilerinin ve Mannheim eğri çiftlerinin karakterizasyonları verilerek bazı özel eğrilerin Mannheim eğrisi ve Mannheim eğri çifti olması durumları göz önünde bulunulacaktır.

1. BÖLÜM

TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

Tanım 1.1.1 B boştan farklı bir cümle ve bir K cismi üzerindeki vektör uzayı V olsun. $f : B x B \to V$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa B ye V ile birleştirilmiş afin uzay adı verilir

i. $\forall P, Q, R \in B$ için $f(P,Q) + f(Q,R) = f(P,R)$

ii. $\forall P \in B$ ve $\alpha \in V$ için $f(P,Q) = \alpha$ şeklinde tek $Q \in B$ noktası vardır [4].

Tanım 1.1.2 V vektör uzayı ve $<,>: VxV \to R$ olmak üzere $u, v, w \in V$ ve $r, s \in R$ için;

i. $< u, v >=< v, u >$

ii. $< u, rv + sw >= r < u, v > +s < u, w >$

iii. $< u, u > \geq 0 \Leftrightarrow u = 0$

şartları sağlanıyor ise $<,>$'e iç çarpım ve $(V, <,>)$ ikilisine de iç çarpım uzayı denir [5].

Tanım 1. 1. 3 B gerçel afin uzayı ve V ise B ile birleşen vektör uzayı olsun. V de;

$<,>: VXV \to R$

$$(x, y) \to < x, y >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \begin{cases} x_i = (x_1, x_2, ..., x_n) \\ y_i = (y_1, y_2, ..., y_n) \end{cases}$$

bir nokta çarpım varsa, B afin uzayına Öklid uzayı denir. $B = R^n$ olarak seçilirse, B standart reel Öklid uzayı denir ve E^n ile ifade edilir [4].

Tanım 1. 1. 4

$$d : E^n x E^n \rightarrow R$$

$$(x,y) \rightarrow d(x,y) = \left\| \overrightarrow{xy} \right\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2}$$

şeklindeki $d(x,y)$ gerçel değerinede $x, y \in E^n$ noktalarındaki uzaklık denir [4].

Tanım 1. 1. 5

E^n de $\vec{y} \in E^n$ için y vektörünün normu

$$\|\vec{y}\| = \sqrt{< y, y \rangle}$$

tanımlanır [4].

Tanım 1. 1. 6 $I \subset R$ için (I, μ) haritası ile tanımı verilen $\mu : I \rightarrow E^n$ diferensiyellenebilen fonksiyona E^n de eğri adı verilir [4].

Tanım 1. 1. 7 E^n de bir P eğrisi (I, μ) ve (I, η) gibi iki haritası verilsin.

$$h = \mu^{-1} o \eta : J \rightarrow I$$

diferensiyellenebilir fonksiyonuna P'nin parametre değişim fonksiyonu denir [4].

Tanım 1. 1. 8 E^n de P eğrisi (I, μ) haritası olsun. $\mu : I \rightarrow E^n$ nin Öklid fonksiyonları $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n$ olmak üzere

$$\mu'(s) = \left(\frac{d\mu_1}{ds}, ..., \frac{d\mu_n}{ds} \right)$$

dır. $(\mu(s), \mu'(s)) \in T_{E^n}(s)$ teğet vektörüne P eğrisinin $s \in I$ ya karşılık gelen $\mu(s)$ de (I, μ) haritasına hız vektörü adı verilir [4].

Tanım 1. 1. 9 E^n de P eğrisi (I,μ) haritası olsun. $\|\vec{\mu}\|: I \to R$ fonksiyonunu P eğrisinin (I,μ) haritasına göre skalar hız fonksiyonuna ve $\|\mu'\|(s)$ gerçel değerine $\mu(s)$ deki skalar hızı adı verilir [4].

Tanım 1. 1. 10 $\|\mu'(s)\| = 1$ ve P eğrisine (I,μ) haritasına göre birim hızlı eğri, $s \in I$ ya da yay parametresi denir [4].

Tanım 1. 1. 11 P eğrisi (I,μ) haritası ile verilmiş olsun. $a, b \in I$ için a- dan b- ye P eğrisine, $\mu(a)$ ve $\mu(b)$ noktalarındaki uzunluğuna denk gelen

$$\int_b^a \|\mu'\| dt, t \in I$$

gerçel sayıya yay uzunluğu adı verilir [4].

Tanım 1. 1. 12 $\forall s \in I$ için $\mu^{'}(s) \neq 0$ ise μ ye regüler eğri adı verilir [4].

Tanım 1. 1. 13 E^n de P eğrisi (I,μ) haritası ile verilsin. O halde $\psi = \{\mu', \mu'', ..., \mu^{(n)}\}$ lineer bağımsız ve $\forall \mu^{(k)} \in Sp\{\psi\}, k > r$ için, $\mu^{(k)} \in Sp\{\psi\}$ de bulunan $\{V_1, V_2, ..., V_r\}$ sistemine, P eğrisinin Serret-Frenet r- ayaklı alanı ve $s \in P$ için $\{V_1(s), V_2(s), ..., V_r(s)\}$ ye ise $s \in P$ deki Serret-Frenet r- ayaklısı adı verilir [4].

Tanım 1. 1. 14 E^n de bir P eğrisi (I,μ) haritası olsun. $s \in I$ için $\mu(s)$ daki Serret-Frenet r-ayaklısı $\{V_1(s), V_2(s), ..., V_r(s)\}$ dir. Buna göre;

$$ki : I \to R, 1 \leq i < r$$

$$s \to k_i(s) = \langle V_i'(s), V_{i+1}(s) \rangle$$

olmak üzere $s \in I$ için $k_i(s)$ değerine de $\mu(s)$ deki P' nin i-yinci eğriliği adı verilir [4].

Teorem 1.1.1 E^n de P eğrisi (I,μ) haritası olsun. $s \in I$ için $\mu(s)$ deki P' nin i- yinci eğriliği ve Frenet r ayaklısı $\{V_1(s), V_2(s), ..., V_r(s)\}$ için

i. $V_1'(s)=k_1(s)V_2(s)$

ii. $V_i'(s)=-k_{i-1}(s)V_{i-1}(s)+k_i(s)V_{i+1}(s), \quad 1<i<r$

iii. $V_r'(s)=-k_{r-1}(s)V_{r-1}(s)$

dir [4].

$n=3$ de, E^3 $\mu(s)$ de P nin Frenet 3-ayaklısı,

$T=\mu'$,

$N=\dfrac{1}{\|\mu''\|}\mu''$,

$B=TxN$

yazılır. 1-inci eğrilik olan $k_1(s)=\kappa(s)$ ifadesine eğrilik, 2-nci eğrilik $k_2(s)=\tau(s)$ değerine de burulma denir. Frenet vektörleriyle türevleri arasındaki bağıntı

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

ile verilir [4].

Tanım 1. 1. 15 Eğrinin hız vektörü sabit bir doğrultu ile sabit açı yaparsa bu eğriye eğilim çizgisi denir. E^3 de eğrinin eğilim çizgisi olması için $\Leftrightarrow$ eğrinin torsiyonu ve eğriliği oranı $\left(\dfrac{\tau}{\kappa}\right)\neq 0$ dır [6].

Tanım 1. 1. 16 E^3 de herhangi rektifiyan eğri olması için $\Leftrightarrow$ $\kappa>0$ ve $\left(\dfrac{\tau}{\kappa}\right)$ oranının sabit olmayan lineer fonksiyona eşit olmasıdır [6].

Tanım 1. 1. 17 Eğrinin eğriliği $\kappa=$ sabit ve τ burulması sabit değilse eğriye Salkowski eğrisi denir [6].

Tanım 1. 1. 18 Eğrinin eğriliği κ sabit değilse ve torsiyonu $\tau =$sabitse bu eğriye anti Salkowski eğrisi adı verilir [7].

2. BÖLÜM

BERTRAND EĞRİ ÇİFTİ

Tanım 2.1.1 $P, R \in E^n$ eğrileri (I, μ) ve (I, η) koordinat komşulukları ile verilsin. $\forall s \in I$ için $\mu(s) \in P$, $\eta(s) \in R$, noktalarında P ve R nin Frenet r-ayaklıları $\{V_1(s), V_2(s), ..., V_r(s)\}, \{V_1^*(s), V_2^*, ..., V_r^*(s)\}$ olarak verildiğinde $\{V_2(s), V_2^*(s)\}$ lineer bağımlı ise; (P, R) ikilisine Bertrand partneri denir [9].

Teorem 2.1.1 (P, R) Bertrand partneri verilsin. P ve R $(I, \mu), (I, \mu)$ haritaları ile verildiğinde

$$\forall s \in I \text{ için } d(\mu(s), \eta(s)) = \text{sabit}$$

olur [4].

İspat (Şekil 2.2) yardımıyla $\eta(s) = \mu(s) + \lambda V_2(s)$ yazılabilir. Burada P ve R sırasıyla $\mu(s)$ ve $\eta(s)$ noktalarında Frenet r-ayaklıları

$$\{V_1(s), ..., V_2(s)\}, \{V_1^*(s), ..., V_r^*(s)\}$$

ile gösterilmiştir.

$$\frac{ds^*}{ds}.V_1^*(s) = [1 - \lambda(s) k_1(s)].V_1(s) + \lambda'(s) V_2(s) + \lambda(s) k_2(s) V_3(s)$$

dir. $\{V_2^*(s), V_2(s)\}$ lineer bağımlı olduğundan

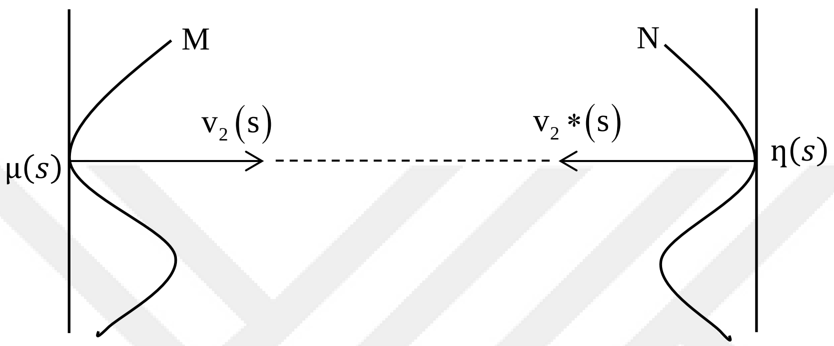
$$< V_1^*(s), V_2(s) >= 0 \Rightarrow \lambda'(s) = 0 \Rightarrow \lambda(s) = \text{sabit}, \quad \forall s \in I$$

bulunur. Halbuki

$$d(\mu(s),\eta(s)) = \|\eta(s)-\mu(s)\| = \|\lambda V_2(s)\| = |\lambda|, \qquad \forall s \in I$$

$$\Rightarrow d(\mu(s),\eta(s)) = \text{sabit}, \quad \forall s \in I$$

elde edilir.



Şekil 2.1. (Bertrand eğri çifti)

Teorem 2. 1. 2

$P, R \subset E^3$eğrileri (I,μ) ve (I,η) haritalarıyla verilsin. P nin eğrilikleri k_1, k_2 ise (P, R) Bertrand çiftidir $\Leftrightarrow \exists a, b \in R$ için $ak_1 + bk_2 = 1$ dir [4].

İspat. $(\Rightarrow)$: $\mu(s)$ ve $\eta(s)$ noktalarında P ve R nin Frenet 3-ayakları sırasıyla $\{V_1(s), V_2(s), V_3(s)\}$, $\{V^*_1(s), V^*_2(s),.V^*_3(s)\}$ olsun.

Buna göre $V_1^*(s)$ ve $V_1(s)$ arasındaki açı θ olmak üzere

$$V_1^*(s) = \cos\theta V_1(s) + \sin\theta V_3(s)$$

yazılır. Türev alarak bu eşitlik

$$\frac{ds^*}{ds}.k_1^*(s)V_2^*(s) = \left[k_1(s)\cos\theta - k_2(s)\sin\theta\right]V_2(s) + \frac{d(\cos\theta)}{ds}V_1(s) + \frac{d(\sin\theta)}{ds}.V_3(s)$$

dir. $\{V_2^*(s), V_2(s)\}$ paralel olduğundan $\theta = \text{sabit}$ olur ki

$$V_1^*(s) = \cos\theta V_1(s) + \sin\theta V_3(s)$$

ve

$$\eta'(s) = \frac{ds^*}{ds}.V_1^*(s) = (1 - ak_1(s))V_1(s) + ak_2(s)V_3(s)$$

eşitliklerinden

$$\frac{1 - ak_1(s)}{\cos\theta} = \frac{ak_2(s)}{\sin\theta}$$

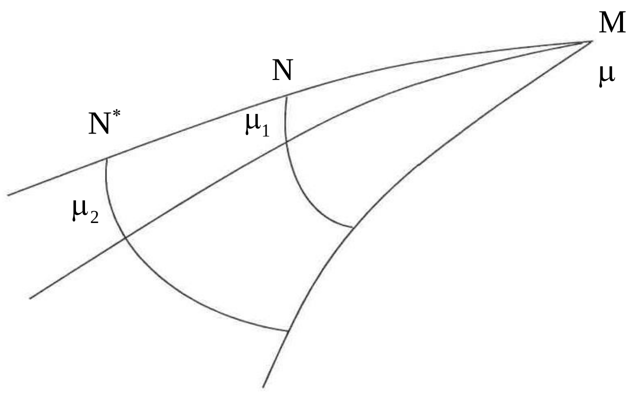
elde edilir.

Buradan,

$$ak_1 + bk_2 = 1$$

dır.

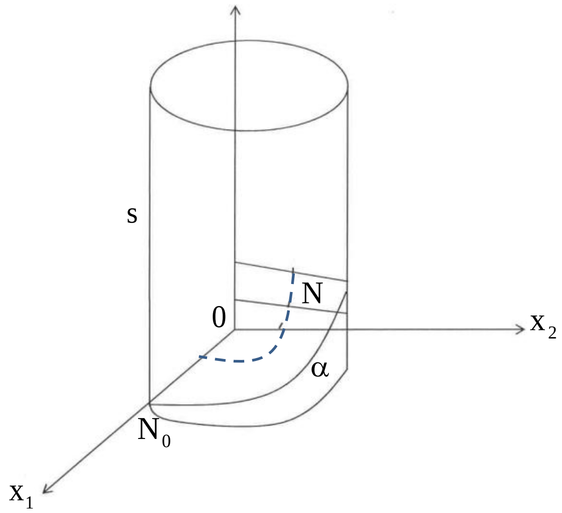
Örnek 2. 1. 1 μ düzlem eğrisinin tanjantlarına normal sonsuz eğriden μ_1, μ_2 (Şekil 2.2) de görüldüğü gibi ikisinin normalleri bu eğriler boyunca beraberdir.



Şekil 2.2. (μ_1, μ_2) Bertrand eğri çifti

Örnek 2. 1. 2 Dairesel eğilim çizgisinde bulunan dönel silindirin ekseni bir Bertrand partneri oluşturur. (Bakınız Şekil 2.3)

x_3



Şekil 2.3. (Döner silindir ekseni bertrand eğri çifti)

Örnek 2. 1. 3 κ eğriliği sabit olan eğri ile bunun eğrilik merkezlerinin geometrik yerinin normalleri paraleldir. Böylece Bertrand partneri meydana getirirler

2.1. İnvolüt ve Evolüt

Tanım 2. 2. 1 $P, R \subset E^n$ eğrileri sırası ile (I,μ) ve (I,η) haritaları olsun. $\forall s \in I$ için

$\mu(s) \in P$, $\eta(s) \in R$ noktalarındaki Frenet r-ayaklıları

P eğrisi için $\{V_1(s), V_2(s), ..., V_r(s)\}$

R eğrisi için $\{V_1^*(s), V_2^*(s), ..., V_r^*(s)\}$ için

$$< V_1(s), V_1^*(s) >= 0$$

oluyorsa R ye P nin involütü, P ye de R nin evolütü adı verilir[4].

Teorem 2. 2. 1 $P, R \subset E^n$ eğrileri (I,μ) ve (I,η) haritaları olsun. Eğer $\forall s \in I$ için R, P nin involütü ise

$$d(\mu(s), \eta(s)) = |c - s|, \ c = sbt$$

olur [11].

İspat (Şekil 2. 2. 1) yardımıyla $\eta(s)=\mu(s)+\lambda V_1(s)$ yazılır.

Böylece $s\in I$ nin μ eğrisi için yay parametresi olduğu kabul edilirse,

$$\left.\frac{d\eta}{ds}\right|_s = s_p\left\{V_1^*(s)\right\}$$

dan

$$< V_1^*(s), V_1(s) >= 0$$

bulunur. Böylece

$$1+\lambda'(s)=0 \Rightarrow \lambda'(s)=-1 \Rightarrow \lambda=-s+c$$

veya

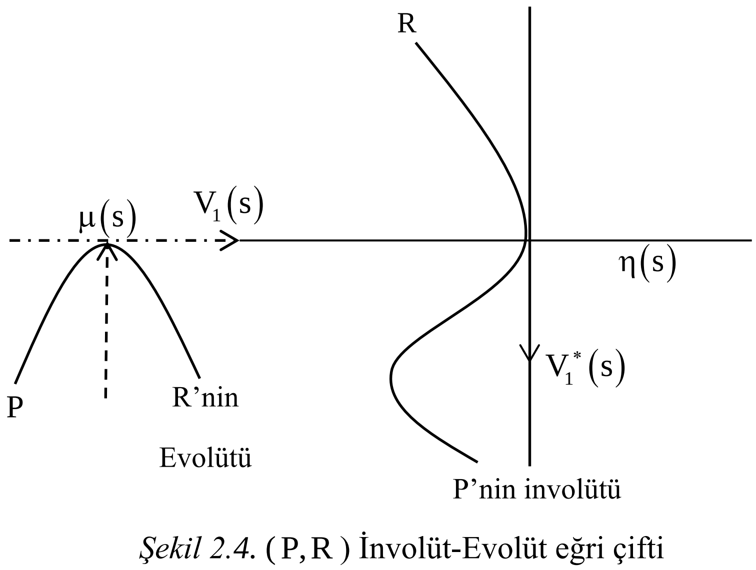
$$\lambda=|c-s|, \forall c=\text{sabit}$$

elde edilir. Buradan

$$d(\mu(s),\eta(s))=\|\eta(s)-\mu(s)\|=\|\lambda V_1(s)\|$$

$$\Rightarrow d(\mu(s),\eta(s))=|c-s|$$

bulunur.



Şekil 2.4. (P, R) İnvolüt-Evolüt eğri çifti

Teorem 2. 2. 2 $P, R \subset E^n$ eğrileri birbirinin involütü ve evolütü olsun. $\mu(s)$ ve $\eta(s)$ noktalarındaki Frenet r-ayaklıları

P eğrisi için $\{V_1(s), V_2(s), ..., V_r(s)\}$

R eğrisi için $\{V_1^*(s), V_2^*(s), ..., V_r^*(s)\}$ olsun.

P nin eğrilikleri $k_2(s), \quad 1 \leq i < r$

R nin eğrilikleri $k_2^*(s), \quad 1 \leq i < r$ olmak üzere

$$k_1^{*2}(s) = \frac{k_1^2(s) + k_2^2(s)}{(c-s)^2 + k_1^2(s)}$$

dir [4].

İspat $P, R \subset E^n$ eğrileri birbirinin involütü ve evolütü olduğundan $\mu(s)$, $\eta(s)$ noktaları için

$$\eta(s) = \mu(s) + (c-s).V_1(s) \qquad (2.\ 2.\ 2)$$

bağıntısı yazılır. P nin yay parametresi s, R nin parametresi s^* olsun. (2. 2. 2) nin türevi alınır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\frac{d\eta}{ds^*}\frac{ds^*}{ds} = \alpha' + \left(-V_1(s) + (c-s)V_1^1\right)$$

$$= V_1(s) - V_1(s) + (c-s)k_1V_2(s)$$

$$V_1^*(s)\frac{ds^*}{ds} = (c-s)k_1V_2$$

$$\Rightarrow \frac{ds^*}{ds} = (c-s)k_1$$

$$V_1^*(s) = V_2(s), \qquad \frac{dv_1^*}{ds^*}\frac{ds^*}{ds} = V_2^*(s)$$

$$V_1^*(s)\frac{ds^*}{ds} = -k_1V_1 + k_2V_3$$

$$k_1^*(s)V_2^*(s)\frac{ds^*}{ds} = -k_1V_1 + k_2V_3$$

bulunur. Buradan

$$= \frac{k_1^2(s) + k_2^2(s)}{(c-s)^2 + k_1^2(s)}$$

elde edilir.

Örnek 2. 2. 1 Bir eğilim çizgisinin involütlerinden her biri birer düzlem eğrisidir.

μ nün involütlerinden biri η ve η nın ikinci eğriliği $k_2^*(s)$ olsun.

$$k_2^* = \frac{k_1k_2' - k_1'k_2}{k_1\left(k_1^2 + k_2^2\right)(c-s)}$$

olur. μ bir eğilim çizgisi olduğundan

$$\frac{k_2}{k_1} = \text{sabit} \Rightarrow \left(\frac{k_2}{k_1}\right)' = 0 \text{ olacağından}$$

$$k_2^* = 0$$

bulunur. Böylece η bir düzlem eğridir.

Örnek 2. 2. 2 Parametrik ifadesi

$$x_1 = \frac{2t+1}{t-1}$$

$$x_2 = \frac{t^2}{t-1}$$

$$x_3 = t+2$$

olan bir eğrinin eğrilik merkezlerinin geometrik yerinin, eğrinin evolütlerinden biridir.

$$\alpha(t)=\left(\frac{2t+1}{t-1},\frac{t^2}{t-1},t+2\right)$$

parametrik ifadesi ile verilen eğrinin eğrilik merkezlerinin geometrik yerleri,

$$\alpha(t)=\left(2+\frac{3}{t-1},t+1+\frac{1}{t-1},t+2\right)$$

$$\alpha'(t)=\left(-\frac{3}{(t-1)^2},1-\frac{1}{(t-1)^2},1\right)$$

$$\alpha''(t)=\left(\frac{6}{(t-1)^3},\frac{2}{(t-1)^3},0\right)$$

$$\alpha'''(t)=\left(-\frac{18}{(t-1)^4},-\frac{6}{(t-1)^4},0\right)$$

olur,

$$\alpha'''(t)=-3\alpha''(t)$$

ve dolayısıyla

$$\det\left(\alpha'(t),\alpha''(t),\alpha'''(t)\right)=0$$

ve bunun sonucu olarak

$$k_2(t)=0$$

dır.

α nın $\alpha(t)$ ye karşılık gelen noktasındaki eğrilik merkezi $c(t)$ ise α nın $\alpha(t)$ ye karşılık gelen noktasındaki eğrilik merkezi yay parametresi s olmak üzere;

$$k_2=0$$

olduğu da göz önüne alınarak;

$$\alpha(t)=c(t)\frac{1}{k_1(t)}V_2(t)$$

$$\Rightarrow c(t)=\alpha(t)-\frac{1}{k_1(t)}V_2(t)$$

$$c'(t)=\left[V_1(t)-\frac{k_1'(t)}{\left(k_1(t)\right)^2}V_2(t)-\frac{1}{k_1(t)}\left(-k_1(t)V_1(t)\right)\right]\frac{ds}{dt}$$

$$=-\frac{k_1'(t)}{\left(k_1(t)\right)^2}V_2(t)\frac{ds}{dt},$$

bulunur. Bu da $\{c'(t),V_2(t)\}$ lineer bağımlı olduğunu gösterir. Buna göre; $V_1^*=c'(t)/\|c'(t)\|$ ile V_1 dik olduğundan α, c nin bir evolütüdür.

2.2. Helis (Eğilim Çizgileri) Eğrisi

Tanım 2. 3. 1 $P\subset E^n$ eğrisi (I,μ) haritası olsun. $\forall s\in I$ için $\mu'(s)$ vektörü, bir U sabit vektörü ile sabit açı yapıyorsa, P ye eğilim çizgisi ve $Sp\{U\}$ ya ise P helis eğilim ekseni adı verilir [4].

Tanım 2. 3. 2 , $P\subset E^n$ (I,μ) haritası olsun. $\forall s\in I$ ya için $\mu(s)\in P$ de P nin 1. ve 2. eğrilikleri $k_1(s)$ ve $k_2(s)$ ise

$$H_1: I\to R$$

$$H_1(s)=\frac{k_1(s)}{k_2(s)}$$

şeklinde tanımlı H_1 fonksiyonuna, P nin 1.inci harmonik eğriliği denir [4].

Teorem 2. 3. 1 $P\subset E^3$ eğrisi, (I,μ) haritası ile verilsin.

P bir helis eğrisidir $\Leftrightarrow \forall s\in I$ için $H_1(s)=$ sabittir [4].

İspat $(\Rightarrow)$: P bir helis olsun. P nin eğilim ekseni $Sp\{u\}$ ile gösterelim. Tanım 2. 3. 1 den,

$< \mu'(s), u >= \cos\varphi =$ sabit

dir.

$\mu(s)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı $\{V_1(s), V_2(s), V_3(s)\}$ ise

$$< V_1(s), u >= \cos\varphi$$

yazılabilir. Buna göre,

$$< k_1(s)V_2(s), u >= 0 \Rightarrow < V_2(s), u >= 0 \qquad (2.\ 3.\ 1)$$

yazılabilir. O halde,

$$u \in Sp\{V_1(s), V_3(s)\}$$

dır. Bu ise,

$$u = \cos\varphi V_1(s) + \sin\varphi V_3(s)$$

demektir. (2. 3.1) eşitliğinden,

$$< -k_1(s)V_1(s) + k_2(s)V_3(s), u >= 0$$

$$\Rightarrow -k_1(s) < V_1(s), u > +k_2(s) < V_3(s), u >= 0$$

$$\Rightarrow -k_1(s)\cos\varphi + k_2(s)\sin\varphi = 0$$

$$\Rightarrow H_1 = tg\varphi \Rightarrow H_1 = \text{sabit}$$

elde edilir.

$(\Leftarrow)$: $\forall s \in I$ için $H_1(s) = \lambda =$ sabit olsun. $\lambda = tg\varphi$ olmak üzere

$$u = \cos\varphi V_1(s) + \sin\varphi V_3(s),$$

vektörünü tanımlayalım.

u sabit bir vektördür. Çünkü,

$$\nabla_\alpha .u = \cos\varphi\left(k_1(s)V_2(s) + \sin\varphi\left(-k_2(s)V_2(s)\right)\right)$$

$$\nabla_\alpha .u = \left(k_1(s)\cos\varphi - \sin\varphi k_2(s)\right)V_2(s)$$

dir. $H_1(s) = \lambda = tg\varphi$ yazılırsa

$$k_1(s)\cos\varphi - \sin\varphi k_2(s) = 0$$

yazılır.

$$\nabla_\alpha .u = 0 \Rightarrow u = \text{sabit}$$

dir.

P, eğilim ekseni $Sp\{u\}$ helis (eğilim çizgisi) eğrisidir.

Çünkü,

$$< \alpha'(s), u > = < V_1(s), \cos\varphi V_1(s) + \sin\varphi V_3(s) >$$

$$= \cos\varphi < V_1(s), V_1(s) > + \sin\varphi < V_1(s), V_3(s) >$$

$$\Rightarrow < \alpha'(s), u > = \cos\varphi = \text{sabit}$$

Örnek 2. 3. 1 Parametrik ifadesi

$$x_1 = t, \quad x_2 = \frac{1}{2}t^2, \quad x_3 = \frac{1}{6}t^3$$

olan eğrinin bir helis (eğilim çizgisi) dir. Gerçekten,

$$X = (x_1, x_2, x_3) = \left(t, \frac{1}{2}t^2, \frac{1}{6}t^3\right)$$

$$\Rightarrow X' = \left(1, t, \frac{1}{2}t^2\right)$$

$$\Rightarrow X'' = (0,1,t)$$

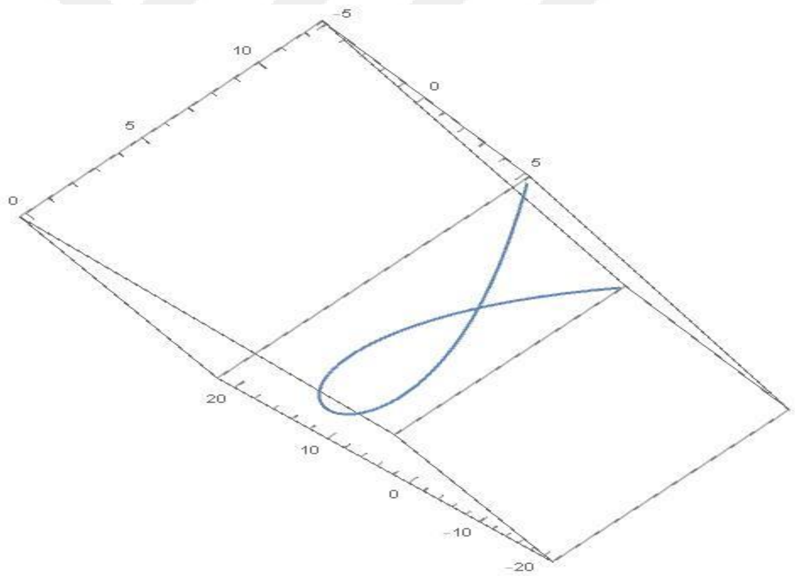
$$\Rightarrow X''' = (0,0,1)$$

$$\Rightarrow X^{IV} = (0,0,0)$$

olup,

$$\det\left(X'', X''', X^{IV}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

dır. X bir helis eğrisidir.



Şekil 2.5. (Helis eğrisi)

Örnek 2. 3. 2 Parametrik ifadesi $x_1 = 6t, x_2 = 3t^2, x_3 = t^3$ olan eğrinin

a) Bir eğilim çizgisidir ve

$$X = (x_1, x_2, x_3) = (6t, 3t^2, t^3)$$

$$X' = (6, 6t, 3t^2), \|x'\| = 1$$

dir.

$$X'' = (0,6,6t),$$

$$X''' = (0,0,6),$$

$$X^{IV} = (0,0,0),$$

$$\det\left(X'', X''', X^{IV}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 6t \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

olup, X bir helis eğrisidir.

b) Bu helis (eğilim çizgisi) eğrisinin sabit açı yaptığı u sabit doğrultusu ve sabit açıyı da aşağıdaki şekilde hesaplarız.

$$X' \wedge X'' = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 6 & 6t & 3t^2 \\ 0 & 6 & 6t \end{bmatrix} = 18\left(t^2, -2t, 2\right)$$

olup

$$\|X' \wedge X''\| = 18\left(t^2 + 2\right),$$

$$\|X'\| = 3\left(t^2 + 2\right),$$

$$\left\|\|X'\|^3\right\| = 3^3\left(t^2 + 2\right)^3$$

ve dolayısıyla

$$k_1 = \frac{18\left(t^2+2\right)}{27\left(t^2+2\right).\left(t^2+2\right)^2} = \frac{2}{3\left(t^2+2\right)^2}$$

ve

$$k_2 = \frac{\det\left(X', X'', X'''\right)}{\|X' \wedge X''\|^2} = \frac{6.6.6}{18.18.\left(t^2+2\right)^2} = \frac{2}{3\left(t^2+2\right)^2}$$

dir.

$$\tan\theta = \frac{k_1}{k_2} = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

olup

$$T = \frac{X'}{\|X'\|} = \frac{\left(6, 6t, 3t^2\right)}{\sqrt{36 + 36t^2 + 9t^4}},$$

$$= \frac{\left(2, 2t, t^2\right)}{t^2 + 2}$$

ve

$$B = \frac{X' \wedge X''}{\|X' \wedge X''\|} = \frac{18\left(t^2, -2t, 2\right)}{18\left(t^2 + 2\right)} = \frac{\left(t^2, -2t, 2\right)}{\left(t^2 + 2\right)}$$

eşitliğinden, eğilim ekseninin doğrultusu $\vec{U}$

$$\vec{U} = \cos\theta T + \cos\varphi B, \quad \theta = \varphi + \frac{\pi}{2},$$

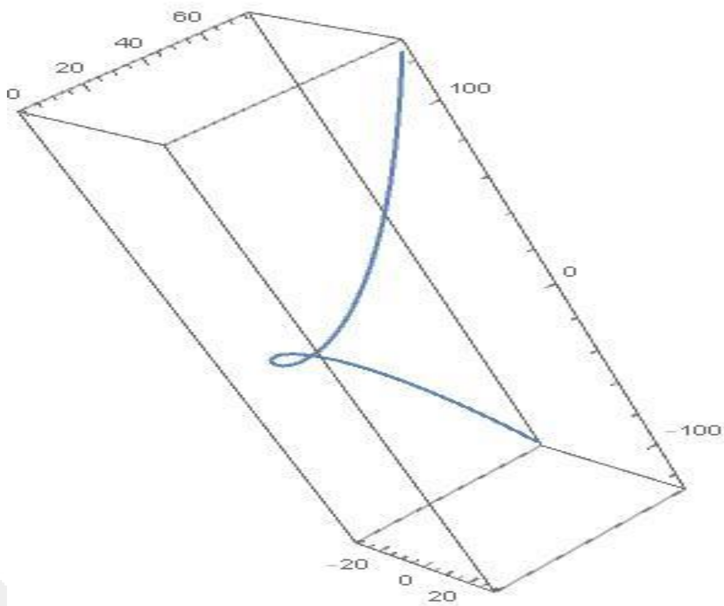
$$= \cos\theta T + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) B,$$

$$= \cos\theta T + \sin\theta B,$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\left(2, 2t, t^2\right)}{t^2 + 2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\left(t^2, -2t, 2\right)}{\left(t^2 + 2\right)}\right),$$

$$= \frac{\left(2\sqrt{2} + \sqrt{2}t^2, 0, 2\sqrt{2} + \sqrt{2}t^2\right)}{t^2 + 2}$$

dir.



Şekil 2.6. (Helis eğrisi)

3. BÖLÜM

3- BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA MANNHEİM EĞRİLERİ VE MANNHEİM EĞRİ ÇİFTLERİ

Tanım 3. 1. 1 E^3, normal iç çarpım ile tanımlı Öklidyen uzayı olsun. P ve R eğrilerinin karşılıklı noktalarında, P eğrisinin asli normal doğrultusu ile R eğrisinin binormal doğrultusu paralelse, P eğrisine bir Mannheim eğri, R eğrisine ise P eğrisinin Mannheim eğri çifti denir. $\{P, R\}$ ikilisine de Mannheim partneri denir [3].

$P: x(s)$, bir Mannheim eğrisi olsun. $P: x(s)$ eğrisinin Frenet çatısı $\{T(s), N(s), B(s)\}$ olmak üzere $P: x(s)$, Mannheim eğrisinin eğrilik fonksiyonu $\kappa(s)$, torsiyon fonksiyonu $\tau(s)$ dir [3].

$R: x_1(s_1)$, s_1 yay parametresine bağlı P Mannheim eğrisinin çifti varsayalım. $R: x_1(s_1)$, eğrisinin Frenet çatısı $\{T_1(s_1), N_1(s_1), B_1(s_1)\}$ şeklinde verilsin [3].

3.1. 3-Boyutlu Öklid Uzayında Mannheim Eğrileri

1878 yılında Mannheim tarafından bulunan Mannheim eğrisinin karakterizasyonuna yer verilecek [1,11,12,13,14] ve bazı özel eğrilerin Mannheim eğri olması durumları incelenecektir.

Teorem 3. 2. 1 Bir eğrinin Mannheim eğrisi olması için λ sıfırdan farklı sabit olacak şekilde eğrinin eğriliği κ ve torsiyonu τ için

$$\kappa = \lambda\left(\kappa^2 + \tau^2\right) \qquad (3.\ 2)$$

dir [1].

İspat $x(s)$ eğrisi Mannheim eğri, $x_1(s)$ eğrisi Mannheim partneri olsun.

Tanım 3. 1. 1. den $x_1(s)$ eğrisi

$$x_1(s) = x(s) + \lambda(s)N(s) \qquad (3.\ 3)$$

dir.

(3. 3) eşitliğinde gerekli işlemler yapılarak Frenet formülleri kullanılırsa,

$$\frac{dx_1(s)}{ds} = \big(1-\lambda(s)\kappa(s)\big)T(s) + \lambda'(s)N(s) + \lambda(s)\tau(s)B(s) \qquad (3.\ 4)$$

bulunur. (3. 4) eşitliği $N(s)$ ile iç çarpım yapılırsa,

$$< \frac{dx_1(s)}{ds}, N(s) >= \lambda'(s)$$

bulunur. $N(s)$ ile $B_1(s)$ paralel olduğundan $\lambda'(s) = 0$ bulunur. Bu ise λ nın sıfırdan farklı, sabit olduğu anlamındadır. Bu durumda (3. 4) denklemi

$$\frac{dx_1(s)}{ds} = \big(1-\lambda\kappa(s)\big)T(s) + \lambda\tau(s)B(s)$$

şeklinde yeniden yazılır. Buradan

$$T_1 = \frac{dx_1}{ds}\frac{ds}{ds_1} = \Big(\big(1-\lambda\kappa(s)\big)T(s) + \lambda\tau(s)B(s)\Big)\frac{ds}{ds_1} \qquad (3.\ 5)$$

yazılır. (3. 5) eşitliğinin s_1 ’e göre türevi alınır ve Frenet formülleri kullanılırsa,

$$\frac{dT_1}{ds}\frac{ds}{ds_1} = \big(-\lambda\kappa'(s)T(s) + (\kappa(s)-\lambda\kappa(s))^2 - \lambda\big(\tau(s)\big)^2\big)N(s)$$

$$+\lambda\tau'(s)B(s)\frac{ds}{ds_1}$$

$$+\Big(\big(1-\lambda\kappa(s)\big)T(s) + \lambda\tau(s)B(s)\Big)\frac{d^2s}{ds_1{}^2} \qquad (3.\ 6)$$

(3, 6) eşitliği $N(s)$ ile çarpılırsa,

$$<\frac{dT_1}{ds}\frac{ds}{ds_1}, N(s)>=<\left(\kappa-\kappa^2\lambda-\tau^2\lambda\right)N(s)\frac{ds}{ds_1}, N(s)>=0$$

$$\kappa=\lambda\left(\kappa^2+\tau^2\right)$$

bulunur.

3.2. 3-Boyutlu Öklid Uzayında Bazı Özel Eğriler ve Mannheim Eğrileri

Teorem 3. 3. 1 Eğer x Mannheim eğrisi bir eğilim çizgisi ise x bir dairesel helistir ve eğriliği, burulması

$$\kappa=\frac{1}{\lambda\left(1+c^2\right)},$$

$$\tau=\frac{c}{\lambda\left(1+c^2\right)}$$

dir.

İspat x bir genel helis olsun. O halde x in eğriliği κ ve burulması τ olmak üzere Tanım 1. 1. 15 den

$$\frac{\tau}{\kappa}=c \qquad (3.\ 7)$$

eşitliği karşılar. (3. 7) eşitliği

$$\tau=c\kappa \qquad (3.\ 8)$$

yazılır. x eğrisi bir Mannheim eğrisi de olup (3. 2) denklemi karşılar. (3. 8) denklemi (3. 2) eşitliğinde yerine yazılıp düzenlenirse,

$$\kappa=\frac{1}{\lambda\left(1+c^2\right)},$$

$$\tau=\frac{c}{\lambda\left(1+c^2\right)}$$

bulunur. κ ve τ sabit olduğu için x bir dairesel helis olur.

Teorem 3. 3. 2 Eğer x Mannheim eğrisi bir rektifiyan eğri ise o zaman x in eğriliği ve torsiyonu

$$\kappa = \frac{1}{\lambda\left(1+(as+b)^2\right)},$$

$$\tau = \frac{as+b}{\lambda\left(1+(as+b)^2\right)}$$

dir.

İspat x bir rektifiyan eğri olsun. O halde Tanım 1. 1. 17 den

$$\frac{\tau}{\kappa} = as+b \tag{3. 9}$$

eşitliği bulunur. (3. 9) eşitliği

$$\tau = \kappa(as+b) \tag{3. 10}$$

kullanılıp (3. 2) eşitliğinde yazılırsa,

$$\kappa = \frac{1}{\lambda\left(1+(as+b)^2\right)}$$

bulunur. (3. 10) dan

$$\tau = \frac{as+b}{\lambda\left(1+(as+b)^2\right)}$$

dir.

Teorem 3. 3. 3 Mannheim Salkowski eğrisi yoktur [11].

İspat x bir Salkowski eğrisi olsun. O halde Tanım 1. 1. 17 den

$$\kappa = sbt = c, \qquad \tau = \tau(s) \tag{3. 11}$$

dir. (3. 11) ve (3. 2) kullanılarak x in burulması sabit bulunur. Bu bir çelişki olup ispatı sunar.

Teorem 3. 3. 4 Mannheim anti-Salkowski eğrisi yoktur [10].

İspat x anti-Salkowski eğrisi olsun. O halde Tanım 1. 1. 18 den

$$\kappa = \kappa(s), \qquad \tau = \text{sbt} = c \tag{3. 12}$$

dir. (3. 12) ve (3. 2) kullanılarak x in eğrilik fonksiyonu sabit bulunur.

x Mannheim eğrisi ise x in eğrilik fonksiyonlarının ya her ikisi sabittir ya da her ikisi değişkendir. Yoksa Teorem 3. 3. 3 ve Teorem 3. 3. 4 de görüldüğü gibi birinin sabit diğerinin değişken olması durumunda Mannheim eğrisi bulunmaz [10].

3.3. 3- Boyutlu Öklid Uzayında Mannheim Eğri Çiftleri

Teorem 3. 4. 1 $P : x(s)$, bir Mannheim eğri olsun.

$R : x_1(s_1)$ eğrisinin P eğrisinin Mannheim çifti olması $\Leftrightarrow$ Sıfırdan farklı herhangi bir λ reel sabiti için R eğrisinin eğriliği κ, ve burulması τ, fonksiyonları için aşağıdaki eşitlik doğrudur [3].

$$\dot{\tau}_1 = \frac{d\tau_1}{ds_1} = \frac{\kappa_1}{\lambda}\left(1 + \lambda^2\tau^2\right) \tag{3. 13}$$

İspat Kabul edelim ki $P : x(s)$ Mannheim eğrisi olsun. Tanım 3. 2. den $x(s_1)$ eğrisi

$$x(s_1) = x_1(s_1) + \lambda(s_1)B_1(s_1) \tag{3. 14}$$

dir.

(3. 14) eşitliğinin türevi alınıp ve Frenet kuralları kullanılırsa,

$$T\frac{ds}{ds_1} = T_1 - \lambda\tau N_1 + \lambda B_1 \tag{3. 15}$$

bulunur. (3. 15) eşitliği $B_1(s)$ vektörü ile çarpılırsa,

$$< T, \frac{ds}{ds_1}, B_1 >=< T_1 - \lambda\tau_1 N_1 + \dot{\lambda} B_1, B_1 >= \dot{\lambda}$$

bulunur. $N(s)$ ve $B_1(s)$ paralel olduğundan $\dot{\lambda}=0$ olarak elde edilir. Bu ise λ nın sıfırdan farklı sabit olduğu anlamına gelir. (3. 15) eşitliğinden

$$T\frac{ds}{ds_1} = T_1 - \lambda\tau_1 N_1 \qquad (3.\ 16)$$

elde edilir. Tanım 3. 2. den, $x(s)$ eğrisinin $Sp\{T, B\}$ düzlemi ile $x_1(s_1)$ eğrisinin $Sp\{T_1, N_1\}$ düzlemleri de karşılık bulabilir. Bu yüzden

$$T = \cos\theta T_1 + \sin\theta N_1 \qquad (3.\ 17)$$

şeklinde ifade edilir. Burada θ, P ve R eğrilerinin T ve T_1 teğet vektörleri arasındaki açıdır. (3. 17) eşitliğinin türevi alınırsa

$$\kappa N\frac{ds}{ds_1} = -\left(\kappa_1 + \dot{\theta}\right)\sin\theta T_1 + \left(\kappa_1 + \dot{\theta}\right)\cos\theta N_1 + \tau_1 \sin\theta B_1 \qquad (3.\ 18)$$

elde edilir. $N(s)$ ile $B_1(s)$ aynı doğrultuda olduğu için (3. 18) denkleminden

$$< \kappa N\frac{ds}{ds_1}, T_1 >= -\left(\kappa_1 + \dot{\theta}\right)\sin\theta,$$

$$< \kappa N(s)\frac{ds}{ds_1}, N_1(s) >= \left(\kappa_1 + \dot{\theta}\right)\cos\theta$$

ve

$$\begin{cases} \left(\kappa_1 + \dot{\theta}\right)\sin\theta = 0 \\ \left(\kappa_1 + \dot{\theta}\right)\cos\theta = 0 \end{cases}$$

elde edilir. Buradan

$$\dot{\theta} = -\kappa_1 \qquad (3.\ 19)$$

bulunur. (3. 17) denklemi (3. 16) da yerine yazılırsa,

$$T_1 = \left(\cos\theta \frac{ds}{ds_1} - 1\right) + N_1 \left(\sin\theta \frac{ds}{ds_1} + \lambda\tau_1\right) = 0$$

elde edilir.

T_1 ve $N_1(s)$ lineer bağımsız olduğu için

$$\cos\theta \frac{ds}{ds_1} - 1 = 0,$$

$$\sin\theta \frac{ds}{ds_1} + \lambda\tau_1 = 0,$$

$$\frac{ds}{ds_1} = \frac{1}{\cos\theta} = -\frac{\lambda\tau_1}{\sin\theta}.$$

Buradan

$$\lambda\tau_1 = -\tan\theta \qquad (3.\ 20)$$

bulunur.

(3. 20) eşitliğinin türevi alınıp (3.19) kullanılırsa,

$\dot{\tau}_1 = \frac{\kappa_1}{\lambda}\left(1 + \lambda^2\tau^2\right)$ elde edilir.

Tersine n eğrisine eğriliği κ_1 ve torsiyonu τ_1 0'dan farklı herhangi bir λ değeri için

$$\dot{\tau}_1 = \frac{\kappa_1}{\lambda}\left(1 + \lambda^2\tau_1^{\,2}\right)$$

eşitliği olsun. O halde (3. 14) eşitliğindeki P eğrisinin bir Mannheim eğri ve R eğrisinin de P nin Mannheim partneri olduğu gösterilecektir.

(3. 14) ün türevi alınıp gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$T \frac{ds}{ds_1} = T_1 - \lambda\tau_1 N_1(s), \qquad (3.\ 21)$$

$$\kappa N(s)\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2 + T\frac{d^2s}{ds_1{}^2} = \lambda\kappa_1\tau_1 T_1 + \left(\kappa_1 - \lambda\dot{\tau}_1\right)N_1 - \lambda\tau_1{}^2 B_1 \qquad (3.\ 22)$$

denklemleri elde edilir.

(3. 21) ve (3. 22) den,

$$\kappa B\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3 = \lambda^2\tau_1{}^3 T_1 + \lambda\tau_1{}^2 N_1 + \left(\kappa_1 - \lambda\dot{\tau}_1 + \lambda^2\tau_1\kappa_1\right)B_1 \qquad (3.\ 23)$$

bulunur.

$\kappa_1 - \lambda\dot{\tau}_1 = -\lambda^2\ \tau_1{}^2\ \kappa_1$

eşitliği (3.23) de kullanılırsa,

$$\kappa B\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3 = \lambda^2\tau_1{}^3 T_1 + \lambda\tau_1{}^2 N_1 \qquad (3.\ 24)$$

bulunur.

(3. 24) eşitliğinin (3. 21) eşitliği ile çarpımı yapılır ise,

$$\kappa N(s)\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^4 = -\lambda\tau_1{}^2\left(1+\lambda^2\ \tau_1{}^2\right)B_1$$

bulunur.

Bu ise $P: x(s)$ eğrisinin asli normal doğrultusu $N(s)$ ile $R: x_1(s_1)$ in binormali ile B_1 in paralel olduğunu söyleyebiliriz. Buradan $P: x(s)$ bir Mannheim eğri ve $R: x_1(s_1)$ de bir Mannheim partneri olur.

$\lambda\tau_1 = u$ ile (3. 13) ifadesi birlikte düşünülürse,

$$\frac{du}{1+u^2} = \kappa_1 ds_1 \qquad (3.\ 25)$$

bulunur. (3. 25) eşitliğin den

$$\int \frac{du}{1+u^2} = \int \kappa_1 ds_1,$$

$$\arctan u = \left(\int \kappa_1 ds_1 + c_0\right)$$

bulunur. Buradan

$$\tau_1 = \frac{1}{\lambda}\tan\left(\int K_1 ds_1 + c_0\right)$$

bulunur [3].

Her bir Mannheim eğrisi için, bir tek Mannheim eğri çifti vardır.

Teorem 3. 4. 2 $P : x(s)$, Mannheim eğri ve $R : x_1(s_1)$ Mannheim partneri olsun. Eğer $P : x(s)$ bir eğilim çizgisi ise $R : x_1(s_1)$ doğrudur [3].

İspat. Tanım 1. 1. 15 den $x(s)$ eğrisinin teğet vektörü T, sabit birim bir doğrultu p ile sabit açı yapar. Yani

$$< T, p >= \cos\theta \tag{3. 26}$$

yazılır. (3. 26) denklemin türevi alınırsa,

$$< N(s), p >= 0 \tag{3. 27}$$

bulunur. Tanım 3. 2. den, sabit bir p vektörü için (3. 27) den

$$< B_1, p >= 0 \tag{3. 28}$$

yazılır. (3. 28) den p sabit vektörünün B_1 e dik olduğu görülür. Buradan p vektörü T_1 ve $N_1(s)$ vektörlerinin gerdiği düzlemdedir. Böylece p vektörü,

$$\vec{p} = \cos\xi T_1 + \sin\xi N_1 \tag{3. 29}$$

yazılır. (3. 29) dan türevi alınır ve gerekli işlemler yapılırsa,

$$0 = -\sin\xi(\kappa_1 + \xi')T_1 + \cos\xi(\kappa_1 + \xi')N_1 + (\sin\xi\tau_1)B_1 \tag{3. 30}$$

elde edilir. (3. 30) denkleminde T_1, N_1, B_1 vektör alanları lineer bağımsız olduğu için

$$\cos\xi(\kappa_1+\xi')=0, \tag{3. 31}$$

$$\sin\xi(\kappa_1+\xi')=0, \tag{3. 32}$$

$$\sin\xi\tau_1=0 \tag{3. 33}$$

elde edilir. (3. 31) ve (3. 32) denkleminden

$$\kappa_1+\xi'=0, \qquad \kappa_1=-\xi' \tag{3. 34}$$

dır. Diğer taraftan (3. 33) denkleminden $\sin\xi=0$ veya $\tau_1=0$ elde edilir.

Eğer

$$\xi=0 \text{ ise } \xi=\pi k=\text{sbt}$$

tir. (3. 34) den $\kappa_1=0$ olduğu söylenir ve R doğru olur. Eğer $\tau_1=0$ ise (3. 13) den $\kappa_1=0$ bulunur ve R eğrisi bir doğru olur.

Teorem 3. 4. 3 $P: x(s)$ eğrisi için, eğrinin Mannheim eğri çifti bir helis ise sıfırdan farklı c_1 ve c_2 sabitleri için $x(s)$ eğrisinin eğriliği ve torsiyonu arasındaki bağıntı aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$\frac{\tau}{\kappa}=\frac{c_2}{2}e^{c_1 s}-\frac{1}{2c_2}e^{-c_1 s}$$

Buradan $c_1=c_2=1$ alınırsa

$$\frac{\tau}{\kappa}=\frac{e^{s}-e^{-s}}{2}=\sinh s$$

dir [3].

İspat T, N,B; $x(s)$ eğrisinin Frenet vektör alanları olmak üzere. Tanım 1. 1. 15 den

$$< T_1, p >= \cos\mu \tag{3. 35}$$

yazılır. (3. 35) eşitliğinin türevi alınırsa,

$$< N_1, p >= 0 \tag{3. 36}$$

elde edilir. (3.36) denkleminde p nin N_1 e dik olduğu anlaşılır. Bu sebepten p vektörü T_1 ve B_1 in gerdiği düzlemde bulunmaktadır. p sabit vektörü,

$$\vec{p} = T_1 \cos\mu + B_1 \sin\mu \tag{3. 37}$$

ifade edilir. (3. 37) eşitliği B_1 ile çarpılırsa,

$$< B_1, p >= \sin\mu \tag{3. 38}$$

bulunur. Tanım 3. 1. 1 den

$$< B_1, p >=< N_1, p >= \sin\mu \tag{3. 39}$$

olur. θ_0 gibi sabit bir açı için (3. 39) denklemi

$$< N(s), p >= \cos\theta_0 \tag{3. 40}$$

şeklinde yazılır. Teorem 3. 4. 2. den biliyoruz ki $x(s)$ bir helis ise $x_1(s_1)$ bir doğrudur. Diğer yandan $x_1(s_1)$ bir doğru değilse $x(s)$ bir helis değildir. $x(s)$ doğru seçilmediği için helis seçildiği için $\cos\theta_0 \neq 0$ ve $\frac{\tau}{\kappa} \neq \text{sbt}$ dir. (3. 40) denkleminin s'ye göre iki kez türevi alınırsa,

$$-\kappa < T_1 p > +\tau < B_1 p >= 0 \tag{3. 41}$$

$$-\kappa' < T_1, p > +\tau < B_1, p >= (\kappa_2 + \tau)\cos\theta_0 \tag{3. 42}$$

denklemleri elde edilir. (3. 2) denklemi ve (3. 41) denklemleri (3. 42) denkleminde yerine yazılırsa,

$$<T_1 p> = \frac{\tau}{\lambda\kappa \dfrac{d(\tau/\kappa)}{ds}} \cos\theta_0 , \tag{3. 43}$$

$$<B_1 p> = \frac{1}{\lambda \dfrac{d(\tau/\kappa)}{ds}} \cos\theta_0 \tag{3. 44}$$

ifade edilir. (3. 43) ve (3. 44) denklemlerinin türevi kullanılırsa,

$$K = \frac{1}{\lambda}\left(1 - \frac{\tau \dfrac{d^2(\tau/\kappa)}{ds^2}}{K\left(\dfrac{d(\tau/\kappa)}{ds}\right)^2}\right), \tag{3. 45}$$

$$\tau = \frac{\dfrac{d^2(\tau/\kappa)}{ds^2}}{\lambda\left(\dfrac{d(\tau/\kappa)}{ds}\right)^2} \tag{3. 46}$$

bulunur. (3. 45) ve (3. 46) denklemleri ile verilen τ ve κ oranlanırsa,

$$\frac{\tau}{\kappa} = \frac{\dfrac{d^2(\tau/\kappa)}{ds^2}}{\left(\dfrac{d(\tau/\kappa)}{ds}\right)^2 - \dfrac{\tau}{\kappa}\dfrac{d^2(\tau/\kappa)}{ds^2}} \tag{3. 47}$$

bulunur.

(3. 47) denkleminde $\tau/\kappa = y(s)$ ifadesi yerine kullanılırsa,

$$(1+y^2)\frac{d^2 y}{ds^2} - y\left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 0$$

bulunur. Bu ikinci mertebeden bir diferansiyel denklemdir. $y' = p$ dönüşümü yapılırsa,

$$\frac{dp}{p} = \frac{y}{1+y^2} dy \tag{3. 48}$$

bulunur. (3. 48) eşitliğinden,

$$\int \frac{dp}{p} = \int \frac{y}{1+y^2} dy$$

$$\ln(p/c) = \ln\sqrt{1+y^2} \tag{3. 49}$$

bulunur. (3. 49) denkleminden

$$\frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} = c_1 ds \tag{3. 50}$$

diferensiyel denklemi bulunur. (3. 50) eşitliğinden ,

$$\sinh^{-1} y = c_1 s + c_2 \tag{3. 51}$$

bulunur. (3. 51) denkleminden

$$y(s) = c_0$$

$$y(s) = \frac{c_2}{2} e^{c_1 s} - \frac{1}{2c_2} e^{-c_1 s}$$

olarak bulunur.

3.4. 3-Boyutlu Öklid Uzayda Bazı Özel Eğrilerde Mannheim Eğrilerin Karakterizasyonları

Bu başlıkta bazı özel eğrilerin Mannheim eğri çifti olması durumları göz önünde bulundurularak eğrilerin eğrilikleri ve torsiyonları karakterize edilecektir.

Teorem 3. 5. 1 x_1 Mannheim eğri çifti bir genel helis ise eğrilik ve torsiyonları

$$\kappa_1 = \frac{e^{\frac{s_1}{\lambda c}}}{\sqrt{-e^{\frac{2s_1}{\lambda c}} \lambda^2 c^2 + d}},$$

$$\tau_1 = \frac{c\ e^{\frac{s_1}{\lambda c}}}{\sqrt{-e^{\frac{2s_1}{\lambda c}} \lambda^2 c^2 + d}}$$

dir. c, d sabitlerdir [10].

İspat x_1 eğilim çizgisi olduğunu varsayalım. O halde x_1 in eğriliği κ_1 ve burulması τ_1 olarak alınıp Tanım 1. 1. 15 den

$$\frac{\tau_1}{\kappa_1}=c \tag{3. 52}$$

eşitliği sağlar. (3. 52) denklemi

$$\tau_1=c\kappa_1 \tag{3. 53}$$

şeklinde ifade edilir. x_1 eğrisi aynı zamanda bir Mannheim eğrisi çifti de olduğundan (3. 13) denklemini sağlar. (3. 53) eşitliği (3. 13) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\dot{\kappa}_1=\frac{\kappa_1}{c\lambda}+\lambda c{\kappa_1}^3$$

diferansiyel denklemi bulunur. Bulunan denklem bir Bernoulli diferensiyel denklemidir. $z={\kappa_1}^{-2}$ değişken değiştirmesi yapılırsa,

$$\dot{z}+\frac{2z}{\lambda c}=-2\lambda c$$

diferensiyel denklemi bulunur. Bulunan denklem çözülürse,

$$\kappa_1=\frac{e^{\frac{s_1}{\lambda c}}}{\sqrt{-e^{\frac{2s_1}{\lambda c}}\lambda^2c^2+d}}$$

ifade edilir. (3. 53) denkleminden

$$\tau_1=\frac{ce^{\frac{s_1}{\lambda c}}}{\sqrt{-e^{\frac{2s_1}{\lambda c}}\lambda^2c^2+d}}$$

elde edilir.

Teorem 3. 5. 2 x_1 Mannheim eğri çifti bir rektifiyan eğri ise eğrilik ve torsiyonları

$$\kappa_1 = \frac{1}{\sqrt{-\lambda^2\left(as_1+b\right)^2 + \dfrac{d}{\left(as_1+b\right)\left(\dfrac{2}{\lambda a}-2\right)}}},$$

$$\tau_1 = \frac{\left(as_1+b\right)}{\sqrt{-\lambda^2\left(as_1+b\right)^2 + \dfrac{d}{\left(as_1+b\right)^{\left(\frac{2}{\lambda a}-2\right)}}}}$$

dir. Burada d sabittir [10].

İspat x_1 rektifiyan eğri olsun. x_1 in eğriliği κ_1 ve burulması τ_1 olmak üzere Tanım 1. 1. 16 dan

$$\frac{\tau_1}{\kappa_1} = as_1 + b \qquad (3.\ 54)$$

eşitliğini sağlar. (3. 54) denklemi

$$\tau_1 = \kappa_1\left(as_1+b\right) \qquad (3.\ 55)$$

şeklinde ifade edilir. x_1 eğrisi aynı zamanda bir Mannheim eğri çifti de olduğundan (3. 13) denklemini sağlar. (3. 55) eşitliği(3. 13) denkleminde yerine yazılacak olur ise;

$$\dot{\kappa}_1 = \kappa_1\left(\frac{1}{\lambda\left(as_1+b\right)} - \frac{a}{\left(as_1+b\right)}\right) + \lambda\left(as_1+b\right)\kappa_1^{\ 3}$$

diferensiyel denklemi bulunur. Bu bir Bernoulli denklemidir. $z = K_1^{-2}$ dönüşümü yapılırsa,

$$\dot{z} + \left(\frac{2}{\lambda\left(as_1+b\right)} - \frac{2a}{\left(as_1+b\right)}\right)z = -2\lambda\left(as_1+b\right)$$

denklemi bulunur. Denklemin çözümü yapılırsa,

$$\kappa_1 = \frac{1}{\sqrt{-\lambda^2 \left(as_1+b\right)^2 + \dfrac{d}{\left(as_1+b\right)^{\left(\frac{2}{\lambda a}-2\right)}}}}$$

olur. (3. 55) den

$$\tau_1 = \frac{\left(as_1+b\right)}{\sqrt{-\lambda^2 \left(as_1+b\right)^2 + \dfrac{d}{\left(as_1+b\right)^{\left(\frac{2}{\lambda a}-2\right)}}}}$$

elde edilir.

Teorem 3. 5. 3 x_1, Mannheim eğri çifti bir Salkowski eğri ise burulma fonksiyonu

$$\tau_1 = \frac{\tan\left(cs_1 + \dfrac{d}{\lambda}\right)}{\lambda}$$

olarak elde edilir. Burada $c_1 d$ integral sabitleridir [10].

İspat x_1 eğrisi bir Salkowski eğrisi olsun. Bu durumda x_1 in eğriliği κ_1 ve torsiyonu τ_1 olmak üzere Tanım 1. 1. 17

$$\kappa_1 = c \quad \text{ve} \quad \tau_1 = \tau_1\left(s_1\right) \tag{3. 56}$$

eşitliğini sağlar. x_1 eğrisi aynı zamanda bir Mannheim eğri çifti de olduğundan (3. 13) denklemini sağlar. (3. 56) eşitliği (3. 13) denklemleri birlikte ele alınırsa,

$$\dot{\tau}_1 = \frac{c}{\lambda} + c\lambda\,\tau_1^{\,2}$$

diferensiyel denklemi elde edilmiş olur. Bu diferensiyel denklemde değişkenlerine ayırma metodu uygulanırsa

$$\tau_1 = \frac{\tan\left(cs_1 + \dfrac{d}{\lambda}\right)}{\lambda}$$

bulunur.

Teorem 3. 5. 4 Anti-Slakowski Mannheim eğri çifti yoktur [10].

İspat Kabul edelim ki x_1 eğrisi bir anti-Salkowski eğrisi olsun. Bu durumda Tanım 1. 1. 18 gereğince

$$\kappa_1 = \kappa_1(s_1), \quad \tau_1 = c \tag{3. 57}$$

dir. (3. 57) ve (3. 13) birlikte ele alınırsa x_1 in eğrilik fonksiyonu sabit olarak bulunur. Bu ise bir çelişki olup, ispatı tamamlar.

4. BÖLÜM

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada [10] nolu çalışmada yer alan 3-boyutlu Öklid uzayında bazı özel eğriler ve Mannheim eğriler arasındaki karakterizasyonlar incelenmiştir.

Bir Mannheim eğrisinin genel helis olması durumunda ve reftifiyan eğri olmasına göre eğrinin eğrilik ve torsiyonları bulunmuştur. Ayrıca eğrinin Salkowski ve anti-Salkowski olması durumunda Mannheim eğrisi oluşturması ile ilgili sonuçlar elde edilmiştir.

Bu tez, n-boyutlu uzaylarda farklı çatılara göre gelecekte yapılacak olan çalışmalara katkı sağlayacaktır.

KAYNAKLAR

1. Mannheim, A.; Paris C.R. 1878, 86, 1254-1256.

2. Blum, R. 1966. A remarkable class of Mannheim-curves. **Canadian Mathematical Bulletin, 9**(2), 223-228.

3. Liu, H., & Wang, F. 2008. Mannheim partner curves in 3-space. **Journal of Geometry, 88**(1-2), 120-126.

4. Hacısalihoğlu, H. H. 1998. Diferensiyel geometri (1. cilt). Ankara Fen Fakültesi, 1998.

5. Hacısalihoğlu, H. H. 2003. Diferensiyel geometri. Hacısalihoğlu Eğtim Hizmetleri Firması.

6. Chen, B. Y. 2003. When does the position vector of a space curve always lie in its rectifying plane?. **The American mathematical monthly, 110**(2), 147-152.

7. Salkowski, E. 1909. Zur transformation von raumkurven. **Mathematische Annalen, 66**(4), 517-557.

8. Monterde, J. 2009. Salkowski curves revisited: A family of curves with constant curvature and non-constant torsion. **Computer Aided Geometric Design, 26**(3), 271-278.

9. Hacısalioğlu H. H., 1980. “Yüksek Diferensiyel Geometriye Giriş”, Fırat Üniversitesi.

10. Kaymaz, F., 2016. Öklid Uzayında Mannheim Eğrileri Üzerine, Yüksek Lisans Tezi, Kırşehir.

11. Eisenhart, L.P.A 1960. Treatise on the Differential Geometry of Curves and Surfaces, Dover Publication, New York.

12. Hsiung, C.C.A 1997. First Course in Differential Geometry, International Press, Massachusetts.

13. Otsuki, T. 1961. Differential Geometry (Japanese), Asakura Shoten.

14. Sasaki, S. 1965. Elementary Differential Geometry (Japonese), Hirokawa Shoten, Tokyo.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı: Eda YILDIRIM

Uyruğu: T.C.

Doğum Tarihi ve Yeri:

Medeni Durum:

e-mail:

Yazışma Adresi:

EĞİTİM

Derece	**Kurum**
Lisans	Nevşehir Üniversitesi
Lise	Kayseri İstikbal Lisesi

YABANCI DİL

İngilizce

Yayınlar

YÜKSEL, N., YILDIRIM E. Öklid Uzayında Bazı Özel Eğriler ve Mannheim Eğrileri, ICSAS Ist International Conference on Mathematics July 26-28, 2024-Eskişehir