



T.C.
NİĞDE ÖMER HALİSDEMİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI



GENELLEŞTİRİLMİŞ KORTEWEG-DE VRIES (KdV) TİPLİ DENKLEMLER

ESMA KADER

EYLÜL 2024

T.C.
NİĞDE ÖMER HALİSDEMİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GENELLEŞTİRİLMİŞ KORTEWEG-DE VRIES (KdV) TİPLİ DENKLEMLER

ESMA KADER

Yüksek Lisans Tezi

Danışman

Prof. Dr. Durmuş DAĞHAN

Eylül 2024

Esma KADER tarafından **Prof. Dr. Durmuş DAĞHAN** danışmanlığında hazırlanan “**Genelleştirilmiş Korteweg-De Vries (KdV) Tipli Denklemler**” adlı bu çalışma jürimiz tarafından Niğde Ömer Halisdemir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik** Anabilim Dalı’nda Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Dağıstan ŞİMŞEK
Konya Teknik Üniversitesi

Üye : Prof. Dr. Durmuş DAĞHAN
Niğde Ömer Halisdemir Üniversitesi

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Güldem YILDIZ
Niğde Ömer Halisdemir Üniversitesi

ONAY:

Bu tez, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunca belirlenmiş olan yukarıdaki jüri üyeleri tarafından/...../20.... tarihinde uygun görülmüş ve Enstitü Yönetim Kurulu’nun/...../20.... tarih ve sayılı kararıyla kabul edilmiştir.

...../...../20...

Prof. Dr. Mustafa KARATEPE
MÜDÜR

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin bilimsel ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.



Esma KADER

ÖZET

GENELLEŞTİRİLMİŞ KORTEWEG-DE VRIES (KdV) TİPLİ DENKLEMLER

KADER, Esmâ

Niğde Ömer Halisdemir Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman

: Prof. Dr. Durmuş DAĞHAN

Eylül 2024, 56 sayfa

Bu tezde, lineer olmayan kısmi türevli KdV, Schamel, Schamel-KdV, Modifiye-Benjamin-Bona-Mahony ve Benjamin-Bona-Mahony gibi beş farklı denklemi içinde barındıran üçüncü mertebeden lineer olmayan integrallenebilen genel bir denklem verilmiştir. Verilen bu üçüncü merteben kısmi türevli lineer olmayan denklem basit bir dönüşüm yardımıyla yine üçüncü merteben lineer olmayan adi türevli bir denkleme dönüştürülmüştür. İki kez integre edilerek birinci merteben değişkenlerine ayrılabilen bir denkleme indirgenmiştir. Genel halde elde edilen bu değişkenlerine ayrılabilen denklemin integrasyonunda eliptik bir integrale ulaşılmış ancak genel durumda çözüm bilinen elemanter fonksiyonlar türünden elde edilememiştir. Elde edilen bu eliptik tip integral ise bazı özel durumlarda çözülmüş Schamel-KdV, Schamel, KdV, Modifiye-Benjamin-Bona-Mahony ve Benjamin-Bona-Mahony denkleminin tam çözümlerine yine eliptik tip integraller yardımıyla ulaşılmıştır. Elde edilen çözümlerden bazılarının farklı parametreler için ayrıntılı ve karşılaştırmalı grafikleri iki ve üç boyutta çizilmiştir.

Anahtar Sözcükler: Schamel-KdV denklemi, Schamel denklemi, KdV denklemi, Modifiye-Benjamin-Bona-Mahony denklemi, Benjamin-Bona-Mahony denklemi

SUMMARY

GENERALIZED KORTEWEG-DE VRIES (KdV) TYPE EQUATIONS

KADER, Esma

Nigde Omer Halisdemir University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor

: Prof. Dr. Durmus DAGHAN

September 2024, 56 pages

In this thesis, a third order integrable non-linear general equation is given, which includes five different equations such as non-linear partial differential KdV, Schamel, Schamel-KdV, Modified-Benjamin-Bona-Mahony and Benjamin-Bona-Mahony equation. By using a simple transformation, this given third order non-linear partial differential equation was transformed into a non-linear third order ordinary differential equation. It was reduced to an equation that can be integrated twice and separated into first order variables. An elliptic integral was achieved in the integration of the equation that can be separated into these variables obtained in the general case, but in the general case the solution could not be obtained from the known elementary functions. In some special cases the exact solutions of Schamel-KdV, Schamel, KdV, Modified-Benjamin-Bona-Mahony and Benjamin-Bona-Mahony equations were reached with the help of elliptic type integrals. Detailed and comparative graphs of some of the obtained solutions for different parameters were drawn in two and three dimensions.

Keywords: Schamel-KdV equation, Schamel equation, KdV equation, Modified-Benjamin-Bona-Mahony equation, Benjamin-Bona-Mahony equation

ÖN SÖZ

Lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemler farklı disiplinlerde bir çok uygulaması olan, analitik tam çözümleri son derece zor elde edilen, karmaşık bazen de anlaşılması güç denklemlerdir. Özellikle fiziksel bir çok olayın modellenmesinde kullanılan lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemleri gerek analitik gerek nümerik olarak çözen literatürde bir çok metod mevcuttur. Çözümlerde kullanılan metodların bir çoğu birbirine benzer olup, matematiksel olarak farklı tekniklerle farklı çözümler bulunmuş gibi görünse de aslında elde edilen çözümler fiziksel anlamda aynı çözümlerdir. Bir çok metodun birbirine geçişlerini inceleyen aralarındaki ilişkileri ortaya çıkaran literatürde epeyce bir çalışma vardır. Metodlar ve çözümler arasındaki bu ilişkileri bilim insanlarını farklı metodlar geliştirmeye yönlendirmiştir.

Bu tez kapsamında, hiçbir yeni metod kullanılmadan direkt integrasyon tekniği ile aynı veya benzer sonuçlara ve hatta yeni sonuçlara ulaşılma istenmiş ve bu amaç büyük ölçüde gerçekleştirilmiştir. Bunun için ise literatürde önemli bir yeri olan Korteweg-de Vries (KdV) denkleminde hareketle bir çok önemli lineer olmayan kısmi türevli denklemleri de barındıran genel bir denklem yazılmış ve direkt integrasyonlarla literatürdeki çözümlerle uyumlu, hatta yeni çözümlere de ulaşılmıştır. Direkt integrasyonlar sırasında ise eliptik tip integrallerle karşılaşmış ve bir çoğu bilinen elemanter fonksiyonlar türünde elde edilmiştir. Ayrıca elde edilen çözümlerin bazılarının iki ve üç boyutlu grafikleri çizilmiştir.

Yüksek lisans eğitimim süresince gerek ders gerek tez çalışmalarımda emeğini hiçbir zaman esirgemeyen saygı değer danışman hocam Prof. Dr. Durmuş DAĞHAN'a, beni yüksek lisans eğitimi almam için teşvik eden değerli hocam Prof. Dr. Atakan Tuğkan YAKUT'a, tezin yazım aşamasında yardımcı olan sevgili eşim Prof. Dr. Serkan KADER'e, bugüne kadar desteklerini benden esirgemeyen çocuklarım Veyis Efe, Salih Bahadır ve Ahmet Yağız'a ve dostlarıma teşekkürü borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	iv
SUMMARY.....	v
ÖN SÖZ.....	vi
İÇİNDEKİLER.....	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	viii
SİMGE VE KISALTMALAR.....	ix
BÖLÜM I.....	1
GİRİŞ.....	1
BÖLÜM II.....	3
TEMEL TANIMLAR VE KAVRAMLAR.....	3
2.1 Genel Tanımlar.....	3
2.2 Eliptik İntegraller.....	4
2.2.1 I. Tip Eliptik İntegral.....	5
2.2.2 II. Tip Eliptik İntegral.....	10
2.2.3 III. Tip Eliptik İntegral.....	13
2.2.4 Eliptik İntegraller İçin Jakobi Şekilleri.....	17
2.2.5 Jakobi Eliptik Fonksiyonları.....	17
BÖLÜM III.....	19
GENELLEŞTİRİLMİŞ İNTEGRALLENEBİLEN DENKLEM.....	19
3.1 Giriş.....	19
3.2 Schamel-KdV Denkleminin Tam Çözümü.....	22
3.3 Schamel Denkleminin Tam Çözümü.....	29
3.4 KdV Denkleminin Tam Çözümü.....	33
3.5 Modifiye-Benjamin-Bona-Mahony Denkleminin Tam Çözümü.....	35
3.6 Benjamin-Bona-Mahony Denkleminin Tam Çözümü.....	39
BÖLÜM IV.....	45
SONUÇLAR.....	45
KAYNAKLAR.....	46
ÖZ GEÇMİŞ.....	50

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3.1. $\eta_0 = 0, w = 0.1, a = 2, e = 1, d = 1$ için Schamel-KdV denkleminin (3.12) ile verilen çözümü.....	26
Şekil 3.2. $\eta_0 = 0, w = 0.1, a = 2, e = 1, d = 1$ için Schamel-KdV denkleminin (2.5) ile verilen çözümü.....	26
Şekil 3.3. $\eta_0 = 0, w = 0.1, a = 2, e = 1, d = 0$ için Schamel denkleminin (3.12) ile verilen çözümü.....	27
Şekil 3.4. $\eta_0 = 0, w = 0.1, a = 2, e = 0, d = 1$ için KdV denkleminin (2.5) ile verilen çözümü.....	28
Şekil 3.5. Schamel-KdV, Schamel ve KdV denklemlerinin (3.12) ile verilen pozitif işaret için çözümleri	28
Şekil 3.6. $a = -1, e = 1$ için Schamel denkleminin (3.21) ile verilen çözümü.....	31
Şekil 3.7. $a = -1, e = 1, w = 1$ için Schamel denkleminin (3.21) ile verilen çözümü	31
Şekil 3.8. $a = -1, e = 1, w = 1$ için (2.3) ile verilen Schamel denkleminin çözümü	32
Şekil 3.9. Schamel denkleminin (3.12) ve (3.21) ile verilen çözümleri.....	32
Şekil 3.10. $w = -0.1, a = 1, d = 1, \eta_0 = 0$ için KdV denkleminin (3.25) ile verilen çözümü	34
Şekil 3.11. KdV denkleminin (3.12) ve (3.25) ile verilen çözümleri.....	34
Şekil 3.12. $w = 1, c = 1, f = 0, k = -9, b = 1, \eta_0 = 0$ için MBBM denkleminin (3.30) ile verilen çözümü	37
Şekil 3.13. $w = 50, c = 1, f = -1, k = 30, b = 1, \eta_0 = 0$ için MBBM denkleminin (3.32) ile verilen çözümü	38
Şekil 3.14. $w = 50, c = 1, f = -1, k = 30, b = 1, \eta_0 = 0$ için (2.7) ile verilen MBBM denkleminin çözümü	39
Şekil 3.15. $w = 100, d = -1, f = 1, k = 10, b = 1, \eta_0 = 0$ için BBM denkleminin (3.39) ile verilen çözümü	42
Şekil 3.16 $w = 30, d = -1, f = -2, k = 20, b = -1, \eta_0 = 0$ için BBM denkleminin (3.42) ile verilen iki boyutlu çözümü	44
Şekil 3.17 $w = 30, d = -1, f = -2, k = 20, b = -1, \eta_0 = 0$ için BBM denkleminin (3.42) ile verilen üç boyutlu çözümü	44

SİMGE VE KISALTMALAR

Simgeler

Simgeler	Açıklama
c_i	İntegrasyon sabitleri
λ	Keyfi sabit
η	Geçiş değişkeni
u'	$\frac{du}{d\eta}$
$am u$	u nun genliği
$mod u$	u nun modülü
$K(k)$	Birinci tip tam eliptik integral
$E(k)$	İkinci tip tam eliptik integral
$F_1(k, x)$	Birinci tür eliptik integraller için Jakobi formu
$E_1(k, x)$	İkinci tür eliptik integraller için Jakobi formu
$\prod_1(k, n, x)$	Üçüncü tür eliptik integraller için Jakobi formu

Kısaltmalar

Kısaltmalar	Açıklama
KdV	Korteweg-de Vries Denklemi
Schamel-KdV	Schamel Korteweg-de Vries Denklemi
MBBM	Modifiye Benjamin-Bona-Mahony Denklemi
BBM	Benjamin-Bona-Mahony Denklemi

BÖLÜM I

GİRİŞ

Lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemler fizik, mühendislik gibi bir çok farklı disiplinlerde önemli bir uygulama alanı bulan, analitik tam çözümleri son derece zor elde edilen, karmaşık bazen de anlaşılması güç denklemlerdir (Davidson, 1972; Whitham, 1974). Farklı disiplinlerdeki bir çok olayın modellenmesinde kullanılan lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemleri gerek analitik gerek nümerik olarak çözen literatürde bir çok metod mevcuttur (Ablowitz ve Clarkson, 1991; Wang vd., 2008; Li ve Wang, 2009; Li vd., 2010; Yokuş, 2011, Hirota, 1971; Yan, 1996; El-Shahed, 2005; He, 2005). Çözümlerde kullanılan metodların bir çoğu birbirine benzer olup, matematiksel olarak farklı tekniklerle farklı çözümler bulunmuş gibi görünse de aslında elde edilen çözümler fiziksel anlamda aynı çözümlerdir. Bir çok metodun birbirine geçişlerini inceleyen, aralarındaki ilişkileri ortaya çıkaran literatürde önemli bir çalışma (Daghan vd., 2015) olarak verilebilir. Metodlar ve çözümler arasındaki bu ilişkiler bilim insanlarını farklı metodlar geliştirmeye yönlendirmiştir.

Lineer olmayan bu tarz zor denklemleri bazen de hiçbir metod kullanmadan, bazı özel durumlarda direkt integre edebilmekteyiz (Daghan ve Dönmez, 2016; Dönmez ve Daghan, 2017; Daghan ve Dönmez, 2018). İntegrallenebilen bu tip denklemlerin direkt integrasyon yolu ile çözümlerinde de kimi zaman eliptik tip gibi zor integraller karşımıza çıkmaktadır (Daghan ve Donmez, 2018). Elde edilen eliptik tip integrallar ise kimi zaman bilinen elemanter fonksiyonlar türünden çözülememektedir. Ancak, bazı durumlarda ise eliptik tip integrallerin çözümleri bilinen elamanter fonksiyonlar türünden ifade edilebilmekte ve dolayısıyla literatür açısından yeni, daha basit çözümlere ulaşılabilir (Dağhan ve Dönmez, 2018; Yıldız ve Daghan, 2020).

Lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlere örnek olarak verilebilecek literatürde çok sayıda uygulaması ve çözümü bulunan belkide en önemli denklemlerden biri Korteweg-de Vries (KdV) denklemidir (Daghan vd., 2010; Daghan ve Dönmez, 2015). Yine önemli bir uygulama alanına sahip bir başka örnek ise Schamel denklemidir (Schamel, 1972; Schamel, 1973). KdV ve Schamel denklemlerinin bir genellemesi ise Schamel-Korteweg-de Vries (Schamel-KdV) denklemidir (Tagare and Chakrabarti, 1974; Das vd., 1998; Hassan, 2010; Lee and Sakthivel, 2011; Dönmez ve Daghan, 2017).

KdV denkleminin alternatif bir modeli ise lineer olmayan Benjamin-Bona Mahony (BBM) denklemdir (Daghan vd., 2010). Benjamin-Bona-Mahony denkleminin modifiye versiyonu ise Modifiye-Benjamin-Bona-Mahony denklemdir (MBBM) (Daghan vd., 2010).

Bu tezde, KdV tipli denklemler için bir genelleme verilerek, Schamel-KdV, Schamel, KdV, MBBM ve BBM denklemlerinin analitik tam çözümleri direkt integrasyon kullanılarak elde edilecektir. Literatürde bu denklemlerin analitik tam çözümleri farklı teknikler kullanılarak elde edilmiştir (Dönmez ve Daghan, 2017; Esen, 2018; Daghan ve Esen, 2018; Yıldız ve Daghan, 2020).

Tez kapsamında yapılan çalışmalar üç bölümde sunulmaktadır. Birinci bölüm tezin giriş kısmından oluşmaktadır. İkinci bölümde tezde kullanılacak denklemler ve genel kavramlar verilmiştir. Üçüncü bölümde ise geliştirilmiş integrallenebilen denklem hakkında bilgi verilerek Schamel-KdV denklemi, Schamel denklemi, KdV denklemi, MBBM denklemi ve BBM denkleminin analitik tam çözümleri direkt integrasyon tekniği kullanılarak elde edilmiştir. Elde edilen çözümlerin doğruluğu MATHEMATICA paket programı ile test edilmiştir. Ayrıca, bazı önemli çözümlerin iki ve üç boyutlu grafikleri MATLAB Paket programı yardımıyla çizilmiştir.

BÖLÜM II

TEMEL TANIMLAR VE KAVRAMLAR

2.1. Genel Tanımlar

Tanım 2.1: x bağımsız ve $y = f(x)$ bağımlı değişken olsun. $y = f(x)$ ' in x ' e göre çeşitli mertebeden türevleri $y', y'', y''', \dots, y^{(n)}$ olmak üzere kapalı formda adi türevli diferansiyel denklem

$$F(x, y, y', y'', y''', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (2.1)$$

şeklinde verilir (Esen, 2018).

Tanım 2.2: x, t bağımsız, $u = u(x, t)$ bağımlı değişken olsun. $u = u(x, t)$ ' nin x ve t bağımsız değişkenlerine göre farklı mertebelerden kısmi türevlerini içeren kısmi türevli diferansiyel denkleme kapalı formda

$$F(u, u_t, u_x, u_{tt}, u_{xt}, \dots) = 0 \quad (2.2)$$

ile verilir (Esen, 2018).

Tanım 2.3 (Schamel Denklemi):

a, e keyfi sabitler, $u = u(x, t)$ ile tanımlı bir fonksiyon olmak üzere Schamel denklemi

$$u_t + e u^{1/2} u_x + a u_{xxx} = 0 \quad (2.3)$$

ile verilir (Dönmez ve Dağhan, 2017).

Tanım 2.4 (KdV Denklemi):

d, a keyfi sabitler, olmak üzere $u = u(x, t)$ ile tanımlı bir fonksiyon olmak üzere KdV denklemi

$$u_t + d u u_x + a u_{xxx} = 0 \quad (2.4)$$

formunda ifade edilir (Dağhan ve Dönmez, 2015; Dönmez ve Dağhan, 2017).

Tanım 2.5 (Schamel-KdV Denklemi):

a, d, e keyfi sabitler, $u = u(x, t)$ ile tanımlı bir fonksiyon olmak üzere Schamel-KdV denklemi

$$u_t + eu^{1/2}u_x + duu_x + au_{xxx} = 0 \quad (2.5)$$

formunda ifade edilir (Dönmez ve Dağhan, 2017).

Tanım 2.6 (Benjamin-Bona-Mahony Denklemi (BBM)):

KdV denkleminin alternatif bir modeli olan lineer olmayan Benjamin-Bona Mahony denklemi f, d, b keyfi sabitler olmak üzere

$$u_t + fu_x + duu_x + bu_{xxt} = 0, u = u(x, t), x \in \mathbb{R}, t \geq 0 \quad (2.6)$$

formunda ifade edilir (Esen, 2018, Dağhan ve Esen 2018).

Tanım 2.7 (Modifiye-Benjamin-Bona-Mahony Denklemi (MBBM)):

Benjamin-Bona-Mahony denkleminin modifiye versiyonu olan Modifiye-Benjamin-Bona-Mahony denklemi f, c, b keyfi sabitler, $x \in \mathbb{R}, t \geq 0$ ve $u = u(x, t)$ olmak üzere

$$u_t + fu_x + cu^2u_x + bu_{xxt} = 0 \quad (2.7)$$

formunda verilir (Esen, 2018).

2.2. Eliptik İntegraller

Eliptik integraller elips eğrisinin hesaplanması ihtiyacı sonucunda tanımlanmıştır. t ve $y = \sqrt{P(t)}$ cinsinden iki polinomun bölümü $R(t, y)$ olsun. Buna göre $y = \sqrt{at + b}$ veya $y = \sqrt{at^2 + bt + c}$ için

$$\int R(t, y)dt = \int R(t, \sqrt{P(t)})dt \quad (2.8)$$

integrali elemanter fonksiyonlar (cebirsal, trigonometrik, üstel, vb.) cinsinden hesaplanabilir.

Eğer a, b, c, d, e verilen sabitler olmak üzere $y = \sqrt{at^3 + bt^2 + ct + d}$ veya $y = \sqrt{at^4 + bt^3 + ct^2 + dt + e}$ ise (2.8) integrali özel hallerde elemanter fonksiyonlar

cinsinden hesaplanabilir. Fakat her zaman bu mümkün olmayabilir. Bu durumda eliptik integrallerden faydalanılır. $P(t)$ nin derecesinin dörtten yüksek olduğu durumlarda (2.8) integrali hiper eliptik fonksiyonlar yardımıyla integrallenebilir (Kurt, 2003; Çiğdemdere, 2006).

Tanım 2.10: $P(t)$ derecesi 3 veya 4 olan, katlı kökü olmayan bir polinom ve $R(t, y)$ iki değişkenli rasyonel bir fonksiyon olmak üzere

$$\int R(t, \sqrt{P(t)}) dt$$

biçimindeki integrallere eliptik integraller denir. Üç tip eliptik integral vardır. I. tip eliptik integral, II. tip eliptik integral ve III. tip eliptik integral şeklinde ifade edilirler (Kurt, 2003; Çiğdemdere, 2006).

2.2.1. I. Tip eliptik integral

$0 < k < 1$ olmak üzere

$$u = F(k, \phi) = \int_0^{\phi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} \quad (2.9)$$

ile tanımlanan integrale birinci tip eliptik integralin legendre şekli denir. Burada ϕ ye u nun genliği denir ve $\phi = am u$ ile ifade edilir. k ya u nun modülü denir ve $k = \text{mod } u$ yazılır.

Eğer $\phi = \frac{\pi}{2}$ ise $F(k, \phi)$ integraline I. Tip Tam Eliptik İntegral denir ve $K(k)$ ile gösterilir (Kurt, 2003; Çiğdemdere, 2006).

Örnek 2.1: $0 < k < 1$ için

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 k^6 + \dots \right\}$$

olduğunu gösteriniz (Çiğdemdere, 2006).

Çözüm: $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n$ fonksiyonunun (a, b) aralığında n . mertebeden türevi mevcut olsun. Burada $a_i (i=0,1,2,\dots,n)$ sabitlerdir. $f(x)$ in n . mertebeye kadar türevleri alındığında

$$\begin{aligned}f'(x) &= a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + na_nx^{n-1} \\f''(x) &= 2a_2 + 3.2a_3x + \dots + n(n-1)a_nx^{n-2} \\f'''(x) &= 3.2a_3 + 4.3.2a_4x + \dots + n(n-1)(n-2)a_nx^{n-3} \\&\vdots \\f^{(n)}(x) &= n!a_n\end{aligned}$$

elde edilir. $x = 0$ için

$$\begin{aligned}f(0) &= a_0 \\f'(0) &= a_1 \\f''(0) &= 2a_2 \\f'''(0) &= 3.2a_3 \\&\vdots \\f^{(n)}(0) &= n!a_n\end{aligned}$$

bulunur. Burada a_i ler hesaplanırsa

$$\begin{aligned}a_0 &= f(0) \\a_1 &= f'(0) \\a_2 &= \frac{f''(0)}{2!} \\&\vdots \\a_n &= \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\end{aligned}$$

olur. $f(x)$ fonksiyonunda bunları yerine yazarsak

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0)$$

şeklinde Maclaurin Formülü elde edilir.

$f(x) = (1+x)^n$ fonksiyonu ele alınırsa

$$f(x) = (1+x)^n$$

$$f'(x) = n(1+x)^{n-1}$$

$$f''(x) = n(n-1)(1+x)^{n-2}$$

\vdots

$$f^{(n)}(x) = n!$$

dır. Burada $x = 0$ için

$$f(0) = 1$$

$$f'(0) = n$$

$$f''(0) = n(n-1)$$

\vdots

$$f^{(n)}(0) = n!$$

elde edilir. Bulunan bu değerler fonksiyonda yerine yazılırsa

$$f(x) = (1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \dots + (-1)^n x^n$$

$$f(x) = (1-x)^n = 1 - nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \dots + (-1)^n x^n$$

olup $n = -\frac{1}{2}$ alınır

$$(1-x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1.3}{2.4}x^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^3 + \dots$$

bulunur. Buradan

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-k^2 \sin^2 \theta)^{-\frac{1}{2}} d\theta$$

dır ve $x = k^2 \sin^2 \theta$ alınır

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 \sin^2 \theta + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 k^4 \sin^4 \theta + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 k^6 \sin^6 \theta + \dots \right] d\theta \\ &= \frac{\pi}{2} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 k^6 + \dots \right\} \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır.

Örnek 2.2: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\cos x}}$ integralini bir eliptik integrale dönüştürünüz.

Çözüm: $\cos x = \cos^2 y$ dönüşümü yapılırsa

$$-\sin x dx = -2 \sin y \cos y dy$$

ve

$$dx = \frac{2 \sin y \cos y dy}{\sin x} = \frac{2 \sin y \cos y dy}{\sqrt{1 - \cos^4 y}} = \frac{2 \cos y dy}{\sqrt{1 + \cos^2 y}}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\cos x}} &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos y}{\cos y \sqrt{1 + \cos^2 y}} dy = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dy}{\sqrt{1 + \cos^2 y}} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dy}{\sqrt{2 - \sin^2 y}} \\ &= \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dy}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 y}} = \sqrt{2} F \left(\sqrt{\frac{1}{2}}, \frac{\pi}{2} \right) = \sqrt{2} K \left(\sqrt{\frac{1}{2}} \right) \end{aligned}$$

I. tip tam eliptik integrali elde edilir.

Örnek 2.3: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2 \sin^2 x + 3 \cos^2 x}}$ integralini eliptik integraller cinsinden ifade ediniz.

Çözüm: Burada $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ eşitliğinden faydalanarak

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2 \sin^2 x + 3 \cos^2 x}} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2 \sin^2 x + 3(1 - \sin^2 x)}} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2 \sin^2 x + 3 - 3 \sin^2 x}} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{3 - \sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{1}{3} \sin^2 x}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} F \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

şeklinde I. tip eliptik integral elde edilir.

Örnek 2.4: $\int_0^{\sqrt{2}} \frac{dx}{\sqrt{(2-x^2)(3-x^2)}}$ integralini eliptik integraller cinsinden yazınız.

Çözüm: $x = \sqrt{2} \sin t$ dönüşümü uygulanırsa $dx = \sqrt{2} \cos t dt$ ve sınırlar sırasıyla $x = 0$ ve $x = \sqrt{2}$ için $t = 0$ ve $t = \frac{\pi}{2}$ olur. Bunları integralde yerine yazarsak,

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{2}} \frac{dx}{\sqrt{(2-x^2)(3-x^2)}} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{2} \cos t}{\sqrt{(2-2\sin^2 t)(3-2\sin^2 t)}} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{(3-2\sin^2 t)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{\left(1-\frac{2}{3}\sin^2 t\right)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} F\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

I. tip eliptik integrali elde edilir.

Örnek 2.5: $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{x^4+9x^2+8}}$ integralini eliptik integraller cinsinden ifade ediniz.

Çözüm: $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{x^4+9x^2+8}} = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(x^2+1)(x^2+8)}}$

olup $x = \tan t$ dönüşümü yaparsak $dx = \sec^2 t dt$ olur. Sınırlar $x = 1$ için $t = \frac{\pi}{4}$ ve $x = \sqrt{3}$

için $t = \frac{\pi}{3}$ bulunur. Buna göre integrali düzenlersek

$$\begin{aligned} \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(x^2+1)(x^2+8)}} &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sec^2 t}{\sqrt{(1+\tan^2 t)(8+\tan^2 t)}} dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dt}{\sqrt{8\cos^2 t + \sin^2 t}} \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dt}{\sqrt{8(1-\sin^2 t) + \sin^2 t}} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dt}{\sqrt{8-7\sin^2 t}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dt}{\sqrt{1-\frac{7}{8}\sin^2 t}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dt}{\sqrt{1-\frac{7}{8}\sin^2 t}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{\sqrt{1-\frac{7}{8}\sin^2 t}} \right) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[F\left(\sqrt{\frac{7}{8}}, \frac{\pi}{3}\right) - F\left(\sqrt{\frac{7}{8}}, \frac{\pi}{4}\right) \right]
\end{aligned}$$

şeklinde I. tip eliptik integrale dönüşür.

2.2.2. II. Tip eliptik integral

$0 < k < 1$ olmak üzere

$$E(k, \phi) = \int_0^{\phi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta \quad (2.10)$$

ile tanımlanır ve bu integrale ikinci tip eliptik integralin legendre şekli denir. $\phi = \frac{\pi}{2}$ ise

II. Tip Tam Eliptik İntegral denir ve $E(k)$ ile gösterilir (Çiğdemdere, 2006).

Örnek 2.6: $\int \sqrt{1-9\sin^2 u} du$ integralini tam olmayan eliptik integraller cinsinden ifade ediniz.

Çözüm: $\sqrt{9\sin^2 u} = 3\sin u = \sin t$ dönüşümü yapılırsa

$$3\cos u du = \cos t dt$$

ve buradan

$$du = \frac{\cos t dt}{3\cos u} = \frac{\cos t dt}{3\sqrt{1-\frac{1}{9}\sin^2 t}}$$

bulunur. İntegralde yerine yerleştirilirse

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1-9\sin^2 u} du &= -\frac{8}{3} \int \frac{dt}{\sqrt{1-\frac{1}{9}\sin^2 t}} + 3 \int \sqrt{1-\frac{1}{9}\sin^2 t} dt \\
&= -\frac{8}{3} F\left(\frac{1}{3}, t\right) + 3E\left(\frac{1}{3}, t\right)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek 2.7: $x = 3 \sin \varphi$, $y = 2 \cos \varphi$ elipsinin yay uzunluğunu eliptik integraller cinsinden yazınız.

Çözüm: Elipsin yay uzunluğu $= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$ dir. Buradan

$$x = 3 \sin \varphi \text{ için } dx = 3 \cos \varphi d\varphi,$$

$$y = 2 \cos \varphi \text{ için } dy = -2 \sin \varphi d\varphi$$

olur. Bunları integralde yerine yazarsak

$$\begin{aligned} 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9 \cos^2 \varphi d^2 \varphi + 4 \sin^2 \varphi d^2 \varphi} = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9 \cos^2 \varphi + 4 \sin^2 \varphi} d\varphi \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9(1 - \sin^2 \varphi) + 4 \sin^2 \varphi} d\varphi = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9 \left(1 - \frac{5}{9} \sin^2 \varphi\right)} d\varphi \\ &= 12 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{5}{9} \sin^2 \varphi} d\varphi \\ &= 12E \left(\frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

şeklinde elipsin yay uzunluğu II. tip eliptik integral olarak ifade edilir.

Örnek 2.8: $\int_0^1 \sqrt{\frac{5-x^2}{3-x^2}} dx$ integralini eliptik integraller cinsinden ifade ediniz.

Çözüm: $x = \sqrt{3} \sin t$ dersek $dx = \sqrt{3} \cos t dt$ olur. İntegralin sınırları $x = 0$ için $t = 0$ ve

$x = 1$ için $t = \frac{\pi}{2}$ bulunur. Bunlar integralde yerine yazıldığında

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\sqrt{5-x^2}}{\sqrt{3-x^2}} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t \sqrt{5-3 \sin^2 t}}{\sqrt{3-3 \sin^2 t}} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{5-3 \sin^2 t}}{\sqrt{3}} dt \\ &= \sqrt{\frac{5}{3}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{3}{5} \sin^2 t} dt \\ &= \sqrt{\frac{5}{3}} E \left(\sqrt{\frac{3}{5}}, \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

II. tip eliptik integrali elde edilir.

Örnek 2.9: $y = \cos x$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ eğrisinin yay uzunluğunu eliptik integraller cinsinden yazınız.

Çözüm: Yay uzunluğu $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$

dir. Ayrıca $y = \cos x$ için $dy = -\sin x dx$, yani $\frac{dy}{dx} = -\sin x$ olup, bunları yay uzunluğu formülünde yerine yazarsak

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \sin^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2 - \cos^2 x} dx$$

elde edilir. Burada $x = \frac{\pi}{2} - t$ dönüşümü yaparsak $dx = -dt$ olur. Sınırlar $x = 0$ için

$t = \frac{\pi}{2}$ ve $x = \frac{\pi}{2}$ için $t = 0$ bulunur. Bunları son integralde yerine yerleştirecek,

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2 - \cos^2 x} dx &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 -\sqrt{2 - \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - t\right)} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2 - \sin^2 t} dt \\ &= \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 t} dt = \sqrt{2} E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

II. tip eliptik integrali elde edilmiş olur.

Örnek 2.10: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ elipsinin yay uzunluğunu bulunuz.

Çözüm: Elipsin parametrik denklemleri

$$x = 5 \sin \varphi, \quad y = 4 \cos \varphi$$

dir. Buradan

$$dx = 5 \cos \varphi d\varphi, \quad dy = -4 \sin \varphi d\varphi$$

bulunur.

Elipsin yay uzunluğu $= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$ olup yukarıdaki ifadeleri yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{25 \cos^2 \varphi + 16 \sin^2 \varphi} d\varphi \\
&= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{25(1 - \sin^2 \varphi) + 16 \sin^2 \varphi} d\varphi \\
&= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{25 - 9 \sin^2 \varphi} d\varphi = 20 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{9}{25} \sin^2 \varphi} d\varphi \\
&= 20E\left(\frac{3}{5}, \frac{\pi}{2}\right)
\end{aligned}$$

şeklinde II. tip eliptik integralini elde ederiz.

2.2.3. III. Tip eliptik integral

$0 < k < 1$ ve $n \neq 0$ olmak üzere

$$\Pi(k, n, \phi) = \int_0^{\phi} \frac{d\theta}{(1 + n \sin^2 \theta) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} \quad (2.11)$$

şeklindedir. Ayrıca bu integrale üçüncü tip eliptik integralin legendre şekli denir. (2.11)

integrali $n = 0$ için (2.9) integraline indirgenmiş olur. Eğer $\phi = \frac{\pi}{2}$ ise (2.11) integraline

III. Tip Tam Eliptik İntegral denir (Çiğdemdere, 2006).

Örnek 2.11: $\int \frac{dx}{x \sqrt{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}}$ integralini eliptik integraller cinsinden

ifade ediniz (Çiğdemdere, 2006).

Çözüm: $x = \frac{at+b}{ct+d}$ lineer dönüşümü yapılırsa ve $x = 1, 2, 3$ değerleri için $t = 0, 1, \infty$

değerlerine karşılık gelen a, b, c, d için

$$x = 1 \text{ için } t = 0 \text{ durumunda } 1 = \frac{b}{d},$$

$$x = 2 \text{ için } t = 1 \text{ durumunda } 2 = \frac{a+b}{c+d},$$

$$x = 3 \text{ için } t = \infty \text{ durumunda } 1 = \frac{a}{c}$$

olur. Buradan $b = d$ ve $c = d$ bulunur. Böylece $x = \frac{3t+1}{t+1}$ elde edilir. Bu dönüşümü

kullanarak $dx = \frac{2dt}{(t+1)^2}$ bulunur. Bunlar integralde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x\sqrt{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}} &= \int \frac{2dt}{(t+1)^2 \left(\frac{3t+1}{t+1}\right) \sqrt{\left(\frac{2t}{t+1}\right)\left(\frac{t-1}{t+1}\right)\left(\frac{-2}{t+1}\right)\left(\frac{-t-3}{t+1}\right)}} \\ &= \int \frac{(t+1)}{(3t+1)\sqrt{t(t-1)(t+3)}} dt \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $t = u^2$ dönüşümü yapılırsa $dt = 2udu$ olur. Buna göre

$$\begin{aligned} \int \frac{(t+1)}{(3t+1)\sqrt{t(t-1)(t+3)}} dt &= \int \frac{2u(u^2+1)}{(3u^2+1)\sqrt{u^2(u^2-1)(u^2+3)}} du \\ &= 2 \int \frac{(u^2+1)}{(3u^2+1)\sqrt{(u^2-1)(u^2+3)}} du \\ &= \frac{2}{3} \int \frac{du}{\sqrt{(u^2-1)(u^2+3)}} + \frac{4}{3} \int \frac{du}{(3u^2+1)\sqrt{(u^2-1)(u^2+3)}} \end{aligned}$$

olup $u = \sec \varphi$ seçilirse $du = \sec \varphi \tan \varphi d\varphi$ bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} &\frac{2}{3} \int \frac{du}{\sqrt{(u^2-1)(u^2+3)}} + \frac{4}{3} \int \frac{du}{(3u^2+1)\sqrt{(u^2-1)(u^2+3)}} \\ &= \frac{2}{3} \int \frac{\sec \varphi \tan \varphi}{\sqrt{(\sec^2 \varphi - 1)(\sec^2 \varphi + 3)}} d\varphi + \frac{4}{3} \int \frac{\sec \varphi \tan \varphi}{(3\sec^2 \varphi + 1)\sqrt{(\sec^2 \varphi - 1)(\sec^2 \varphi + 3)}} d\varphi \\ &= \frac{2}{3} \int \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1+3\cos^2 \varphi}} d\varphi + \frac{4}{3} \int \frac{\cos^2 \varphi}{(3+\cos^2 \varphi)\sqrt{1+3\cos^2 \varphi}} d\varphi \\ &= \frac{2}{3} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{4-3\sin^2 \varphi}} + \frac{4}{3} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{4-3\sin^2 \varphi}} - 3 \int \frac{d\varphi}{(4-\sin^2 \varphi)\sqrt{4-3\sin^2 \varphi}} \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{3}{4}\sin^2 \varphi}} + \frac{2}{3} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{3}{4}\sin^2 \varphi}} - \frac{3}{8} \int \frac{d\varphi}{\left(1-\frac{1}{4}\sin^2 \varphi\right)\sqrt{1-\frac{3}{4}\sin^2 \varphi}} \\ &= \frac{1}{3} F\left(\sqrt{\frac{3}{4}}, \varphi\right) + \frac{2}{3} F\left(\sqrt{\frac{3}{4}}, \varphi\right) - \frac{3}{8} \Pi\left(\sqrt{\frac{3}{4}}, -\frac{1}{4}, \varphi\right) \end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek 2.12: $\int_1^{\infty} \frac{du}{(u^2+1)\sqrt{(u^2-1)(u^2+2)}}$ integralini eliptik integraller cinsinden gösteriniz.

Çözüm: $u = \sec x$ dersek $du = \sec x \tan x dx$ olur. Sınırlar sırasıyla $u = 1$ ve $u = \infty$ için $x = 0$ ve $x = \frac{\pi}{2}$ bulunur. İntegralde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
 \int_1^{\infty} \frac{du}{(u^2+1)\sqrt{(u^2-1)(u^2+2)}} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec x \tan x}{(\sec^2 x + 1)\sqrt{(\sec^2 x - 1)(\sec^2 x + 2)}} dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{(1 + \cos^2 x)\sqrt{1 + 2\cos^2 x}} dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1 + 2\cos^2 x}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(1 + \cos^2 x)\sqrt{1 + 2\cos^2 x}} \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{3 - 2\sin^2 x}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(2 - \sin^2 x)\sqrt{3 - 2\sin^2 x}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{2}{3}\sin^2 x}} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\left(1 - \frac{1}{2}\sin^2 x\right)\sqrt{1 - \frac{2}{3}\sin^2 x}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{3}} F\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2\sqrt{3}} \Pi\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2}\right)
 \end{aligned}$$

şeklinde I. tip ve III. tip eliptik integralleri elde edilir.

Örnek 2.13: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(2 - \cos^2 x)\sqrt{3 + 2\cos^2 x}}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ eşitliğinden faydalanarak

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(2 - \cos^2 x)\sqrt{3 + 2\cos^2 x}} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(1 + \sin^2 x)\sqrt{5 - 2\sin^2 x}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(1 + \sin^2 x)\sqrt{1 - \frac{2}{5}\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \Pi\left(\sqrt{\frac{2}{5}}, 1, \frac{\pi}{2}\right)
 \end{aligned}$$

III. tip eliptik integrali elde edilir.

Örnek 2.14: $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{(1-3t^2)\sqrt{(1-t^2)(5-3t^2)}}$ integralini eliptik integraller cinsinden ifade ediniz.

Çözüm: $t = \sin x$ dönüşümü yaparsak, $dt = \cos x dx$ olup, sınırlar $t=0$ için $x=0$ ve $t = \frac{1}{2}$ için $x = \frac{\pi}{6}$ bulunur. Buna göre

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{(1-3t^2)\sqrt{(1-t^2)(5-3t^2)}} &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x dx}{(1-3\sin^2 x)\sqrt{(1-\sin^2 x)(5-3\sin^2 x)}} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{(1-3\sin^2 x)\sqrt{(5-3\sin^2 x)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{(1-3\sin^2 x)\sqrt{\left(1-\frac{3}{5}\sin^2 x\right)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \Pi\left(\sqrt{\frac{3}{5}}, -3, \frac{\pi}{6}\right) \end{aligned}$$

şeklinde III. tip eliptik integral bulunur.

Örnek 2.15: $\int_1^{\infty} \frac{dx}{(4x^2+1)\sqrt{(x^4+4x^2+5)}}$ integralini eliptik integraller cinsinden yazınız.

Çözüm: $\int_1^{\infty} \frac{dx}{(4x^2+1)\sqrt{(x^4+4x^2+5)}} = \int_1^{\infty} \frac{dx}{(4x^2+1)\sqrt{(x^2-1)(x^2+5)}}$

olup $x = \sec u$ denilirse $dx = \sec u \tan u du$ olur. İntegralin sınırları sırasıyla $x=1$ ve $x = \infty$ için $u=0$ ve $u = \frac{\pi}{2}$ bulunur. Bunları integralde yerine yazarsak

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{dx}{(4x^2+1)\sqrt{(x^2-1)(x^2+5)}} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec u \tan u du}{(4\sec^2 u+1)\sqrt{(\sec^2 u-1)(\sec^2 u+5)}} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 u du}{(4+\cos^2 u)\sqrt{(1+5\cos^2 u)}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{(1+5\cos^2 u)}} - 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{(4+\cos^2 u)\sqrt{(1+5\cos^2 u)}} \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{(6-5\sin^2 u)}} - 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{(5-\sin^2 u)\sqrt{(6-5\sin^2 u)}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{6}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{\left(1-\frac{5}{6}\sin^2 u\right)}} - \frac{4}{5\sqrt{6}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\left(1-\frac{1}{5}\sin^2 u\right)\sqrt{\left(1-\frac{5}{6}\sin^2 u\right)}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{6}} F\left(\sqrt{\frac{5}{6}}, \frac{\pi}{2}\right) - \frac{4}{5\sqrt{6}} \Pi\left(\sqrt{\frac{5}{6}}, -\frac{1}{5}, \frac{\pi}{2}\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. İlki I. tip eliptik integral, ikincisi III. tip eliptik integraldir.

2.2.4. Eliptik integraller için Jakobi şekilleri

Eliptik integrallerin Legendre şekillerinde $v = \sin \theta$ alınırsa $t = \sin \phi$ olmak üzere

$$F_1(k, t) = \int_0^t \frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)(1-k^2v^2)}} \quad (2.12)$$

$$E_1(k, t) = \int_0^t \sqrt{\frac{1-k^2v^2}{1-v^2}} dv \quad (2.13)$$

$$\Pi(k, n, t) = \int_0^\phi \frac{dv}{(1+nv^2)\sqrt{(1-v^2)(1-k^2v^2)}} \quad (2.14)$$

integralleri elde edilir. (2.12), (2.13), (2.14) integrallerine sırasıyla birinci, ikinci, üçüncü tip eliptik integrallerin Jakobi şekilleri denir. $t = 1$ için tam integral bulunur (Çiğdemdere, 2006).

2.2.5. Jakobi eliptik fonksiyonları

Birinci tip eliptik integralin Legendre şeklindeki üst limit ϕ ile Jakobi şeklindeki üst limit t , birbirlerine $t = \sin \phi$ bağıntısıyla bağlıdır. $\phi = am u$ olduğundan $t = \sin(am u)$ dur. Böylece

$$t = \sin(am u) = sn u$$

$$\sqrt{1-t^2} = \cos(am u) = cn u$$

$$\sqrt{1-k^2 t^2} = \sqrt{1-k^2 sn^2 u} = dn u$$

$$\frac{t}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{sn u}{cn u} = tn u$$

şeklinde eliptik fonksiyonların tanımına ulaşılır. Bu fonksiyonlar trigonometrik fonksiyonların özelliklerine benzer özelliklere sahiptirler. $t = sn u$ ise $u = sn^{-1} t$ şeklinde ters eliptik fonksiyonlar da tanımlanabilir. Burada u, k ya bağımlıdır. Bu nedenle $u = sn^{-1}(t, k)$ veya $u = sn^{-1} t \bmod k$ yazılabilir (Çiğdemdere, 2006).

BÖLÜM III

GENELLEŞTİRİLMİŞ İNTEGRALLENEBİLEN DENKLEM

3.1. Giriş

a, b, c, d, e, f keyfi sabitler, x, t bağımsız değişkenler ve $u = u(x, t)$ bağımlı fonksiyon olmak üzere

$$u_t + au_{xxx} + bu_{xxt} + cu^2u_x + duu_x + eu^{1/2}u_x + fu_x = 0 \quad (3.1)$$

üçüncü mertebeden kısmi türevli lineer olmayan denklem aşağıda verilen beş farklı denklemi bir arada barındırmaktadır.

(3.1) denkleminde $b = 0, c = 0, f = 0$ katsayıları özel seçildiğinde denklem (2.5) ile verilen

$$u_t + au_{xxx} + duu_x + eu^{1/2}u_x = 0$$

Schamel-KdV denkleminde, (3.1) denkleminde $b = 0, c = 0, d = 0, f = 0$ seçildiğinde denklem (2.3) ile verilen

$$u_t + au_{xxx} + eu^{1/2}u_x = 0$$

Schamel denkleminde, (3.1) denkleminde $b = 0, c = 0, e = 0, f = 0$ seçildiğinde denklem (2.4) ile verilen

$$u_t + au_{xxx} + duu_x = 0$$

KdV denkleminde, (3.1) denkleminde $a = 0, d = 0, e = 0$ alındığında denklem (2.7) ile verilen

$$u_t + bu_{xxt} + cu^2u_x + fu_x = 0$$

Modifiye-Benjamin-Bona-Mahony (MBBM) denkleminde, (3.1) denkleminde $a = 0, c = 0, e = 0$ için denklem (2.6) ile verilen

$$u_t + bu_{xxt} + duu_x + fu_x = 0$$

Benjamin-Bona-Mahony (BBM) denkleminde indirgenmiş olur.

Bu bölümde temel amacımız (3.1) denklemini ile verilen genelleştirilmiş lineer olmayan kısmi türevli denklemi analitik olarak direkt integrasyon tekniği ile çözmeye çalışmaktır. (3.1) ile verilen denklemde $\eta = kx + wt$ dönüşümü ile $\eta_x = k$, $\eta_t = w$ türevleri kullanılır ve u fonksiyonunun η ya göre kısmi türevleri alınırsa

$$u_x = u_\eta \eta_x \Rightarrow u_x = u_\eta k = k u_\eta$$

$$u_t = u_\eta \eta_t \Rightarrow u_t = u_\eta w = w u_\eta$$

$$u_{xx} = k^2 u_{\eta\eta}, \quad u_{xxx} = k^3 u_{\eta\eta\eta}, \quad u_{xxt} = k^2 w u_{\eta\eta\eta}$$

elde edilir. Burada basitlik için

$$u_\eta = u', \quad u_{\eta\eta} = u'' \quad \text{ve} \quad u_{\eta\eta\eta} = u'''$$

ile gösterilirse, bu durumda

$$u_x = k u'$$

$$u_t = w u'$$

$$u_{xxx} = k^3 u'''$$

$$u_{xxt} = k^2 w u'''$$

olur. Elde edilen bu türevler (3.1) denkleminde yerine yazıldığında

$$w u' + a k^3 u''' + b k^2 w u''' + c k u^2 u' + d k u u' + e k u^{1/2} u' + f k u' = 0$$

ile verilen adi türevli bir denkleme dönüşür. Bulunan bu denklem düzenlenirse

$$(a k^3 + b k^2 w) u''' + (w + f k) u' + c k u^2 u' + d k u u' + e k u^{1/2} u' = 0 \quad (3.2)$$

ile verilen üçüncü mertebeden adi türevli lineer olmayan tam diferansiyel bir denkleme dönüşür. (3.2) denklemini bir kez integre edilirse

$$(a k^3 + b k^2 w) u'' + (w + f k) u + \frac{c k}{3} u^3 + \frac{d k}{2} u^2 u' + \frac{2 e k}{3} u^{3/2} + c_1 = 0 \quad (3.3)$$

elde edilir. Burada c_1 keyfi bir integrasyon sabitidir. (3.3) denklemini u' ile çarpılırsa

$$(a k^3 + b k^2 w) u' u'' + (w + f k) u u' + \frac{c k}{3} u^3 u' + \frac{d k}{2} u^2 u'^2 + \frac{2 e k}{3} u^{3/2} u' + c_1 u' = 0 \quad (3.4)$$

şeklinde tam diferansiyel bir denkleme dönüşür. (3.4) denklemini düzenlenirse

$$(ak^3 + bk^2w) \left[\frac{(u')^2}{2} \right] + \frac{(w + fk)}{2} (u^2)' + \frac{ck}{3} \frac{1}{4} (u^4)' + \frac{dk}{2} \left(\frac{u^3}{3} \right)' + \frac{2ek}{3} \frac{2}{5} (u^{5/2})' + c_1 u' = 0 \quad (3.5)$$

şeklinde yazılabilir. (3.5) denklemini bir tam diferansiyel denklem olduğundan bir kez integre edildiğinde c_2 keyfi bir integrasyon sabiti olmak üzere

$$\frac{(ak^3 + bk^2w)}{2} \frac{(u')^2}{2} + \frac{(w + fk)}{2} u^2 + \frac{ck}{12} u^4 + \frac{dk}{6} u^3 + \frac{4ek}{15} u^{5/2} + c_1 u + c_2 = 0$$

şekilde elde edilir. Gerekli düzenleme yapılırsa

$$(u')^2 = \frac{2}{(ak^3 + bk^2w)} \left(-\frac{(w + fk)}{2} u^2 - \frac{ck}{12} u^4 - \frac{dk}{6} u^3 - \frac{4ek}{15} u^{5/2} - c_1 u - c_2 \right)$$

olup, bu ise

$$(u')^2 = -\frac{ck}{6(ak^3 + bk^2w)} u^4 - \frac{dk}{3(ak^3 + bk^2w)} u^3 - \frac{8ek}{15(ak^3 + bk^2w)} u^{5/2} - \frac{(w + fk)}{(ak^3 + bk^2w)} u^2 - \frac{2c_1}{(ak^3 + bk^2w)} u - \frac{2c_2}{(ak^3 + bk^2w)}$$

şeklinde yazılır. Her iki tarafın karekökü alınır

$$u' = \pm \sqrt{-\frac{ck}{6(ak^3 + bk^2w)} u^4 - \frac{dk}{3(ak^3 + bk^2w)} u^3 - \frac{8ek}{15(ak^3 + bk^2w)} u^{5/2} - \frac{(w + fk)}{(ak^3 + bk^2w)} u^2 - \frac{2c_1}{(ak^3 + bk^2w)} u - \frac{2c_2}{(ak^3 + bk^2w)}}$$

ile verilen değişkenlerine ayrılabilen birinci mertebeden bir denkleme indirgenmiş olur.

Değişkenlerine ayrılır

$$\frac{du}{\sqrt{-\frac{ck}{6(ak^3 + bk^2w)} u^4 - \frac{dk}{3(ak^3 + bk^2w)} u^3 - \frac{8ek}{15(ak^3 + bk^2w)} u^{5/2} - \frac{(w + fk)}{(ak^3 + bk^2w)} u^2 - \frac{2c_1}{(ak^3 + bk^2w)} u - \frac{2c_2}{(ak^3 + bk^2w)}}} = \pm d\eta \quad (3.6)$$

bulunur. (3.6) ile verilen denklemin her iki tarafı integre edilirse η_0 keyfi bir integrasyon sabiti olmak üzere

$$\pm \int \frac{du}{\sqrt{\frac{ck}{6(ak^3 + bk^2w)}u^4 - \frac{dk}{3(ak^3 + bk^2w)}u^3 - \frac{8ek}{15(ak^3 + bk^2w)}u^{5/2} - \frac{(w + fk)}{(ak^3 + bk^2w)}u^2 - \frac{2c_1}{(ak^3 + bk^2w)}u - \frac{2c_2}{(ak^3 + bk^2w)}}} = \eta + \eta_0 \quad (3.7)$$

denklemi elde edilir. Sol tarafın integralinin alınması durumunda (3.2) denklemi ile verilen adi türevli denklemin çözümüne ulaşılır. $\eta = kx + wt$ dönüşümü kullanılırsa da (3.1) denklemi ile tanımladığımız lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemin çözümü elde edilmiş olur. Aynı anda beş farklı denklemin de çözümüne ulaşılabilecek olması bu integrali son derece önemli kılmaktadır. Elde edilen bu integral eliptik bir integraldir. Ancak, bu integralin hesabı son derece zor olup, genel formda integre edilememiş ve dolayısıyla (3.1) ile verilen denklemin analitik çözümüne genel formda ulaşamamıştır. Ancak, bazı özel durumlarda integraller alınmış ve çözümlere ulaşılmıştır. Elde edilen bu çözümler bölümler halinde aşağıda sunulmuştur.

3.2. Schamel-KdV Denkleminin Tam Çözümü

(3.7) denklemi ile verilen integralde $b = 0, c = 0, f = 0$ alınır

$$\pm \int \frac{du}{\sqrt{-\frac{d}{3ak^2}u^3 - \frac{8e}{15ak^2}u^{5/2} - \frac{w}{ak^3}u^2 - \frac{2c_1}{ak^3}u - \frac{2c_2}{ak^3}}} = \eta + \eta_0 \quad (3.8)$$

integraline varılır. Aslında bu Schamel-KdV denkleminin indirgenmiş formundan başka bir şey değildir. (3.8) denklemde $u^{\frac{1}{2}} = \psi$ dönüşümü kullanılırsa denklem

$$\pm \int \frac{d\psi}{\sqrt{-\frac{d}{12ak^2}\psi^4 - \frac{2e}{15ak^2}\psi^3 - \frac{w}{4ak^3}\psi^2 - \frac{c_1}{2ak^3} - \frac{c_2}{2ak^3}\psi^{-2}}} = \eta + \eta_0 \quad (3.9)$$

şekline dönüşür. Burada $\eta = kx + wt$ dir. (3.9) ile verilen integral c_1 ve c_2 integrasyon sabitlerinin her durumunda bilinen elemanter fonksiyonlar türünden bulunamamaktadır (Dağhan ve Dönmez, 2018). Bu yüzden c_1 ve c_2 intgerasyon sabitlerinin bazı özel durumlarında çözümü elde edeceğiz. (3.9) denklemde literatürde elde edilen çözümlerle karşılaştırmak adına $k = 1, w = -w$ seçilmesi yerinde olacaktır (Dağhan ve Dönmez, 2018). (3.9) ile verilen Schamel-KdV denkleminin direkt integrasyonla

çözümü genel formda elde edilememiştir. Ancak bazı özel durumlarda literatürle uyumlu analitik çözümlere ulaşılmıştır. Bunun için (3.9) ile verilen integralde $c_1 = c_2 = 0$ olarak başlayalım. Buna göre (3.9) integrali düzenlenirse

$$\pm \int \frac{d\psi}{\sqrt{-\frac{d}{12a}\psi^4 - \frac{2e}{15a}\psi^3 + \frac{w}{4a}\psi^2}} = \eta + \eta_0$$

olup daha basit olarak

$$\pm \int \frac{d\psi}{\psi \sqrt{-\left(\frac{d}{12a}\right)\psi^2 - \left(\frac{2e}{15a}\right)\psi + \left(\frac{w}{4a}\right)}} = \eta + \eta_0$$

sonucuna ulaşılır. Burada $\psi > 0$ olarak seçilebilir ($\psi < 0$ için benzer hesaplama yapılabilir). $\psi = \frac{1}{S}$ dönüşümü yukarıdaki denklemde kullanılırsa

$$\mp \int \frac{dS}{S \sqrt{-\left(\frac{d}{12a}\right)\frac{1}{S^2} - \left(\frac{2e}{15a}\right)\frac{1}{S} + \left(\frac{w}{4a}\right)}} = \eta + \eta_0$$

yazılır. Burada gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\mp \sqrt{\frac{4a}{w}} \int \frac{dS}{\sqrt{S^2 - \left(\frac{8e}{15w}\right)S - \left(\frac{d}{3w}\right)}} = \eta + \eta_0$$

formunu alır. Yukarıdaki denklemde kök içerisindeki ifade tam kare haline getirilirse

$$\mp \sqrt{\frac{4a}{w}} \int \frac{dS}{\sqrt{\left(S - \frac{4e}{15w}\right)^2 - \left(\frac{4e}{15w}\right)^2 - \frac{d}{3w}}} = \eta + \eta_0$$

formu elde edilir. Gerekli düzenleme ile

$$\mp \sqrt{\frac{4a}{w}} \int \frac{dS}{\sqrt{\left(S - \frac{4e}{15w}\right)^2 - \left(\frac{16e^2 + 75wd}{225w^2}\right)}} = \eta + \eta_0$$

elde edilir ve integrali alınır

$$\mp \sqrt{\frac{4a}{w}} \ln \left(\left(S - \frac{4e}{15w} \right) + \sqrt{\left(S - \frac{4e}{15w} \right)^2 - \left(\frac{16e^2 + 75wd}{225w^2} \right)} \right) = \eta + \eta_0$$

sonucuna ulaşılır. Son denklem için gerekli işlemler ile

$$\mp \ln \left(\left(S - \frac{4e}{15w} \right) + \sqrt{\left(S - \frac{4e}{15w} \right)^2 - \left(\frac{16e^2 + 75wd}{225w^2} \right)} \right) = \sqrt{\frac{w}{4a}} (\eta + \eta_0),$$

$$\left(S - \frac{4e}{15w} \right) + \sqrt{\left(S - \frac{4e}{15w} \right)^2 - \left(\frac{16e^2 + 75wd}{225w^2} \right)} = e^{\mp \sqrt{\frac{w}{4a}} (\eta + \eta_0)},$$

$$\sqrt{\left(S - \frac{4e}{15w} \right)^2 - \left(\frac{16e^2 + 75wd}{225w^2} \right)} = e^{\mp \sqrt{\frac{w}{4a}} (\eta + \eta_0)} - \left(S - \frac{4e}{15w} \right)$$

şekline dönüşür. Her iki tarafın karesi alınır ve gerekli sadeleştirme işlemleri uygulanırsa

$$\left(\sqrt{\left(S - \frac{4e}{15w} \right)^2 - \left(\frac{16e^2 + 75wd}{225w^2} \right)} \right)^2 = \left(e^{\mp \sqrt{\frac{w}{4a}} (\eta + \eta_0)} - \left(S - \frac{4e}{15w} \right) \right)^2,$$

$$\left(e^{\mp \sqrt{\frac{w}{4a}} (\eta + \eta_0)} \right)^2 + \left(\frac{16e^2 + 75wd}{225w^2} \right) = 2 \left(e^{\mp \sqrt{\frac{w}{4a}} (\eta + \eta_0)} \right) \left(S - \frac{4e}{15w} \right)$$

formuna dönüşür. Buradan

$$\frac{\left(e^{\mp \sqrt{\frac{w}{4a}} (\eta + \eta_0)} \right) + \left(\frac{16e^2 + 75wd}{225w^2} \right) e^{\pm \sqrt{\frac{w}{4a}} (\eta + \eta_0)}}{2} = \left(S - \frac{4e}{15w} \right)$$

olup

$$S = \frac{\left(e^{\mp \sqrt{\frac{w}{4a}} (\eta + \eta_0)} \right) 225w^2 + (16e^2 + 75wd) e^{\pm \sqrt{\frac{w}{4a}} (\eta + \eta_0)}}{2(225w^2)} + \frac{4e}{15w}$$

şeklinde elde edilir ve $\psi = \frac{1}{S}$ dönüşümü altında

$$\psi = \frac{2(225w^2)}{\left(e^{\mp \sqrt{\frac{w}{4a}} (\eta + \eta_0)} \right) 225w^2 + (16e^2 + 75wd) e^{\pm \sqrt{\frac{w}{4a}} (\eta + \eta_0)} + 120ew}$$

bulunur. Daha basit formda

$$\psi = \frac{2A}{Ae^{\mp\sqrt{\frac{w}{4a}}(\eta+\eta_0)} + Be^{\pm\sqrt{\frac{w}{4a}}(\eta+\eta_0)} + C} \quad (3.10)$$

şeklinde yazılabilir. $u = \psi^2$ dönüşümü altında (2.5) denklemi ile verilen Schamel-KdV denkleminin analitik çözümü

$$u(\eta) = \left[\frac{2A}{Ae^{\mp\sqrt{\frac{w}{4a}}(\eta+\eta_0)} + Be^{\pm\sqrt{\frac{w}{4a}}(\eta+\eta_0)} + C} \right]^2 \quad (3.11)$$

olur. Burada $A = 225w^2$, $B = 16e^2 + 75wd$, $C = 120ew$ ve $\eta = x - wt$ olarak verilir (Dağhan ve Dönmez, 2018).

(3.11) ile verilen çözüm $\frac{w}{4a} > 0$ için hiperbolik fonksiyon olarak

$$u_1(\eta) = \left[\frac{2A}{(A+B)\cosh\sqrt{\frac{w}{4a}}(\eta+\eta_0) \pm (B-A)\sinh\sqrt{\frac{w}{4a}}(\eta+\eta_0) + C} \right]^2 \quad (3.12)$$

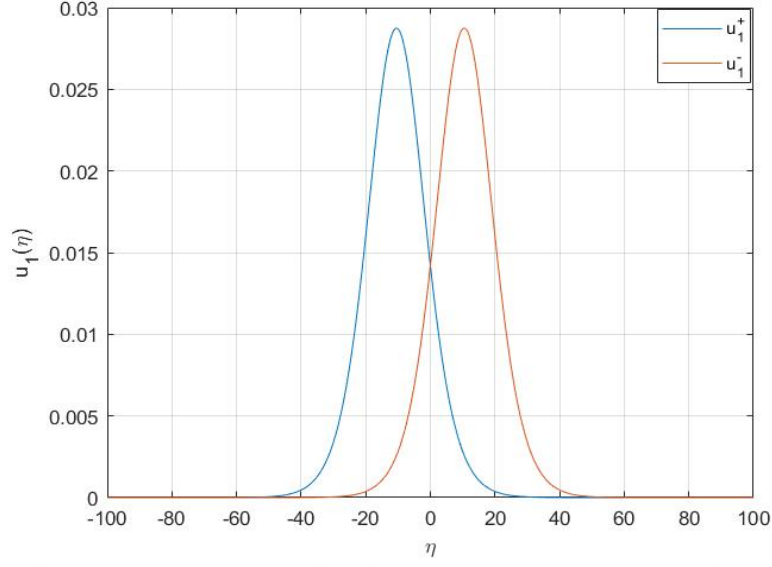
şeklinde ifade edilir.

$\frac{w}{4a} < 0$ için trigonometrik fonksiyon olarak ise

$$u_2(\eta) = \left[\frac{2A}{(A+B)\cos\sqrt{\frac{w}{4a}}(\eta+\eta_0) \pm i(B-A)\sin\sqrt{\frac{w}{4a}}(\eta+\eta_0) + C} \right]^2 \quad (3.13)$$

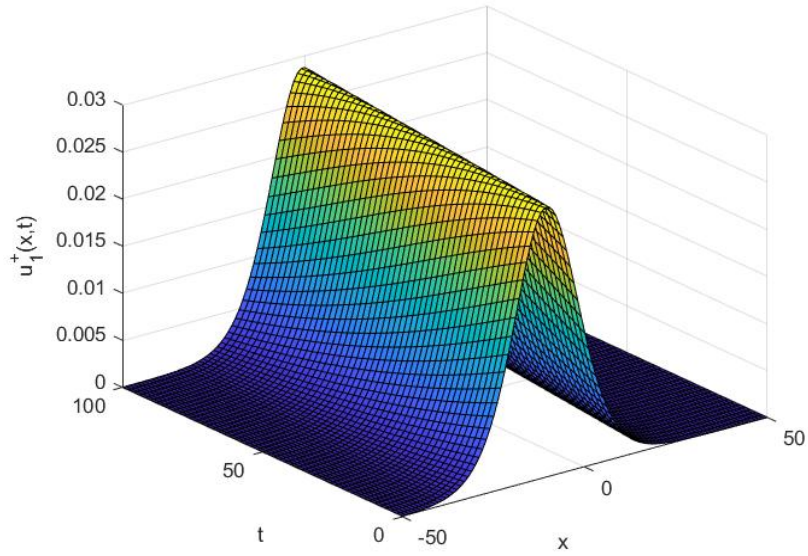
şeklinde ifade edilir.

(3.12) ile verilen çözüm fiziksel olarak anlamlı olup, detaylı olarak farklı parametreler için grafiği aşağıda verilmiştir.



Şekil 3.1. $\eta_0 = 0$, $w = 0.1$, $a = 2$, $e = 1$, $d = 1$ için Schamel-KdV denkleminin (3.12) ile verilen çözümü

(3.12) ile verilen Schamel-KdV denkleminin çözümünde $\eta = x - wt$ kullanılırsa (2.5) ile verilen Schamel-KdV kısmi türevli denkleminin çözümünün üç boyutlu grafiği pozitif işaret için Şekil 3.2 ile verilmiştir.

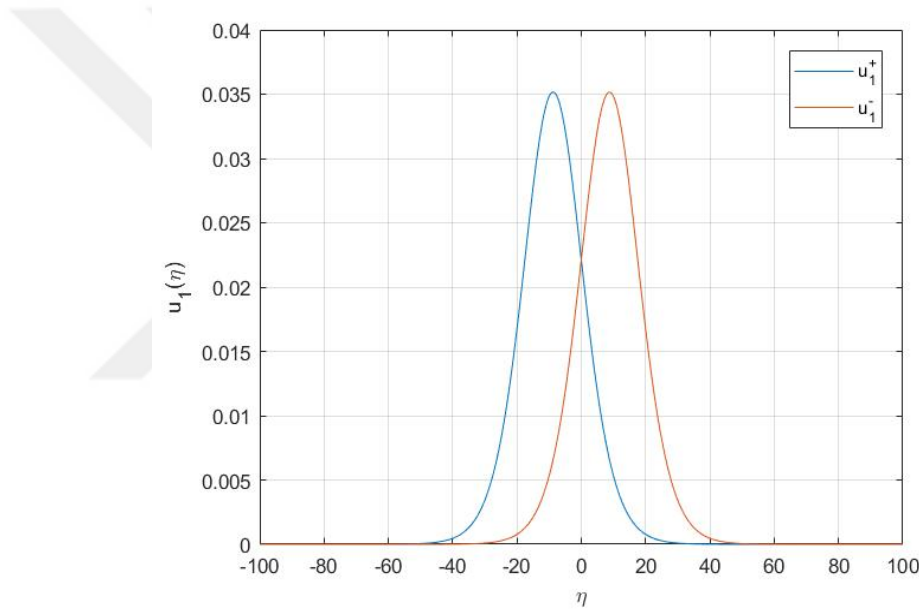


Şekil 3.2. $\eta_0 = 0$, $w = 0.1$, $a = 2$, $e = 1$, $d = 1$ için Schamel-KdV denkleminin (2.5) ile verilen çözümü

Eğer (3.11) çözümünde $d = 0$ seçilirse $A = 225w^2$, $D = 16e^2$, $C = 120ew$ olmak üzere

$$u(\eta) = \left[\frac{2A}{Ae^{\mp\sqrt{\frac{w}{4a}}(\eta+\eta_0)} + De^{\pm\sqrt{\frac{w}{4a}}(\eta+\eta_0)} + C} \right]^2 \quad (3.14)$$

bulunur. Bu çözüm ise (2.3) ile verilen Schamel denkleminin analitik bir çözümüdür. Bu ise $A = 225w^2$, $D = 16e^2$, $C = 120ew$ olmak üzere yine hiperbolik ve trigonometrik olarak yukarıda verilen (3.12) ve (3.13) denkleminin aynısıdır. Burada yine fiziksel olarak anlamlı olan hiperbolik çözümün farklı parametreler için grafiği aşağıda verilmiştir.

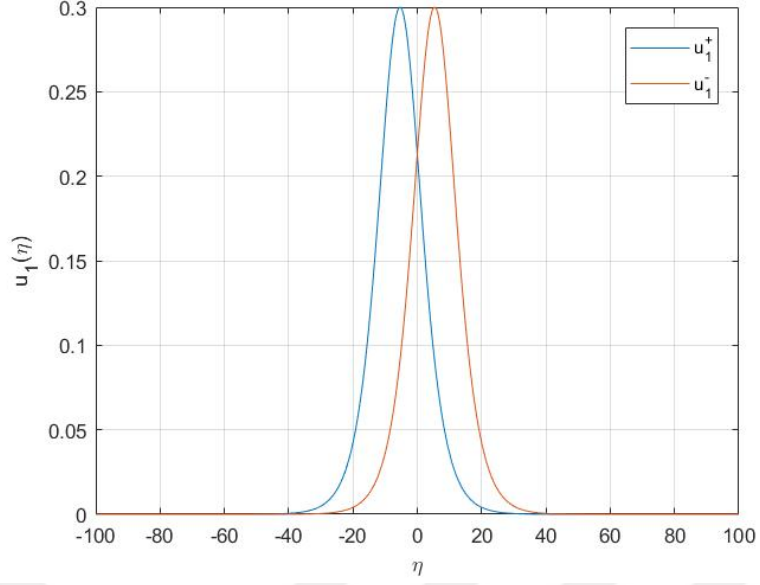


Şekil 3.3. $\eta_0 = 0$, $w = 0.1$, $a = 2$, $e = 1$, $d = 0$ için Schamel denkleminin (3.12) ile verilen çözümü

Son olarak, (3.11) ile verilen çözümde $e = 0$ alındığında

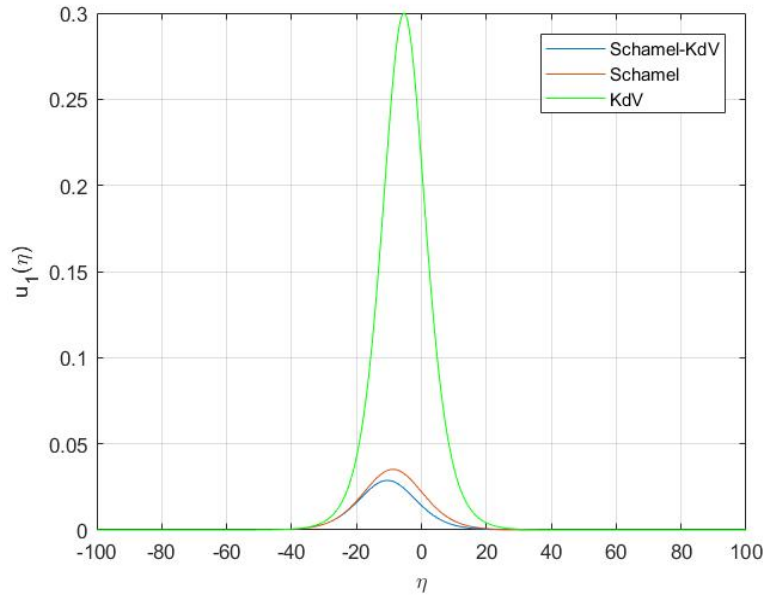
$$u(\eta) = \left[\frac{2A}{Ae^{\mp\sqrt{\frac{w}{4a}}(\eta+\eta_0)} + Ee^{\pm\sqrt{\frac{w}{4a}}(\eta+\eta_0)} + C} \right]^2 \quad (3.15)$$

sonucuna ulaşılır. Burada $A = 225w^2$, $E = 75ew$, $C = 0$ dir. (3.15) denklemini ile verilen çözüm ise (2.4) denklemini ile verilen KdV denkleminin bir çözümüdür. Burada da hiperbolik ve trigonometrik çözüm formu (3.12) ve (3.13) ile verilen çözümlerdir. Yine hiperbolik çözüm KdV denklemini için iki boyutta aşağıdaki grafikte verilmiştir.



Şekil 3.4. $\eta_0 = 0$, $w = 0.1$, $a = 2$, $e = 0$, $d = 1$ için KdV denkleminin (3.12) ile verilen çözümü

Schamel-KdV denkleminin (3.11) analitik çözümünden hareketle Schamel ve KdV denklemlerinin hiperbolik fonksiyonlar türünden verilen analitik çözümleri aynı grafikte aşağıdaki gibi görülebilir.



Şekil 3.5. Schamel-KdV, Schamel ve KdV denklemlerinin (3.12) ile verilen pozitif işaret için çözümleri

3.3. Schamel Denkleminin Tam Çözümü

(3.7) integralinde $b = 0, c = 0, d = 0, f = 0$ seçilirse

$$\pm \int \frac{du}{\sqrt{-\frac{8e}{15ak^2}u^{5/2} - \frac{w}{ak^3}u^2 - \frac{2c_1}{ak^3}u - \frac{2c_2}{ak^3}}} = \eta + \eta_0 \quad (3.16)$$

Schamel denkleminin indirgenmiş formu olan (3.16) integraline ulaşırız. (3.16)

denkleminde $u^{\frac{1}{2}} = \psi$ dönüşümü yapıldığında

$$\pm \int \frac{d\psi}{\sqrt{-\frac{2e}{15ak^2}\psi^3 - \frac{w}{4ak^3}\psi^2 - \frac{c_1}{2ak^3} - \frac{c_2}{2ak^3}\psi^{-2}}} = \eta + \eta_0 \quad (3.17)$$

elde edilir. (3.17) denkleminde benzer şekilde literatürle uyum için $k = 1, w = -w$ seçilirse

$$\pm \int \frac{d\psi}{\sqrt{-\frac{2e}{15a}\psi^3 + \frac{w}{4a}\psi^2 - \frac{c_1}{2a} - \frac{c_2}{2a}\psi^{-2}}} = \eta + \eta_0 \quad (3.18)$$

olur. (3.18) integralinde $c_1 = c_2 = 0$ iken çözüm mevcuttur ve bu çözüm zaten daha önce (3.14) denklemi ile verilmiştir. Biz burada c_1 ve c_2 intgerasyon sabitlerinin başka özel durumlarında çözümü elde edeceğiz.

(3.18) denkleminde $c_1 \neq 0, c_2 = 0$ ve $w < 0$ olarak seçilirse

$$\pm \int \frac{d\psi}{\sqrt{-\frac{2e}{15a}\psi^3 + \frac{w}{4a}\psi^2 - \frac{c_1}{2a}}} = \eta + \eta_0$$

elde edilir. Burada $\lambda = \frac{w}{4a}$ kabul edilir ve $S = \frac{2e}{15a\lambda}\psi$ dönüşümü uygulanırsa

$$d\psi = \frac{15a\lambda}{2e}dS \text{ den}$$

$$\pm \frac{15a\lambda}{2e} \int \frac{dS}{\sqrt{-\frac{c_1}{2a} - \frac{225a^2\lambda^3}{4e^2}S^3 + \frac{225a^2\lambda^3}{4e^2}S^2}} = \eta + \eta_0$$

formuna dönüşür (Dağhan ve Dönmez, 2018).

$$\pm \frac{15a\lambda}{2e} \int \frac{dS}{\sqrt{-\frac{c_1}{2a} - \frac{225a^2(-\lambda^3)}{(4e)^2}(S^2 - S^3)}} = \eta + \eta_0$$

denkleminde yeni çözüme ulaşmak için integrasyon sabitinin sıfır olmayan uygun değerlerini seçmeliyiz (Dağhan ve Dönmez, 2018). Bunun için

$$c_1 = -2a \left(\frac{225a^2(-\lambda^3)}{(4e)^2} \right) (S_0^2 - S_0^3)$$

kabul edilir ve yerine yazılırsa

$$\pm(-\lambda)^{-1/2} \int \frac{dS}{\sqrt{S^3 - S^2 + S_0^2 - S_0^3}} = \eta + \eta_0 \quad (3.19)$$

elde edilir ki bu integral birinci tip eliptik integraldir. Bu eliptik integral, S_0 'a bağlı olarak elemanter fonksiyonlar cinsinden ifade edilebilir. Eğer $S_0 = 0$ ve $S_0 = 1$ ise integrasyon sabiti c_1 sıfır olacaktır ki bu (3.14) ile verilen çözümden başka bir şey değildir.

Diğer yandan $S_0 = -\frac{1}{3}$ durumunda, Schamel denkleminin $c_1 = \frac{25w^3}{96e^2}$ ile yeni analitik çözümünü verir (Dağhan ve Dönmez, 2018). (3.19) denkleminde $S_0 = -\frac{1}{3}$ olarak seçilirse çözüm

$$\pm(-\lambda)^{-\frac{1}{2}} \int \frac{dS}{\sqrt{S^3 - S^2 + \frac{4}{27}}} = \eta + \eta_0 \quad (3.20)$$

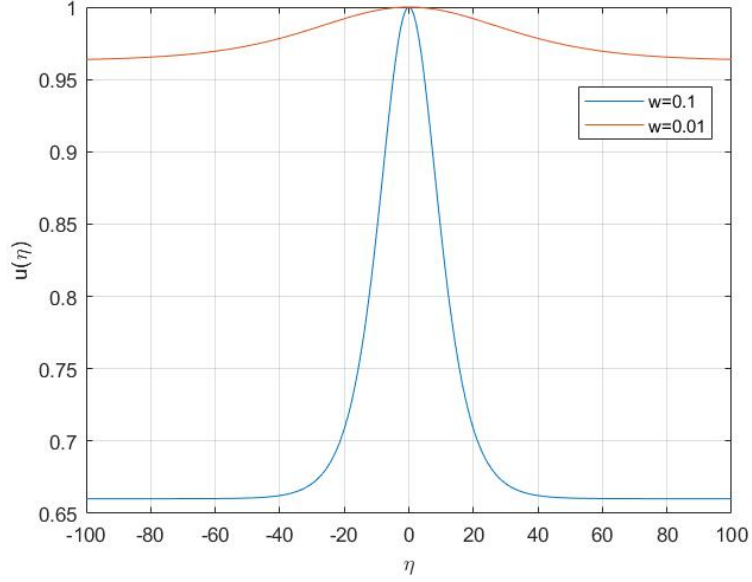
olur. (3.20) denklemini integre edilirse

$$\pm \frac{2}{\sqrt{-\lambda}} \operatorname{arctanh} \sqrt{S + \frac{1}{3}} = \eta + \eta_0$$

olup, düzenlenir ve $S = \frac{2e}{15a\lambda} \psi$, $u = \psi^2$ kullanılırsa $\sqrt{u(\eta)} > 0$ için Schamel denkleminin çözümü

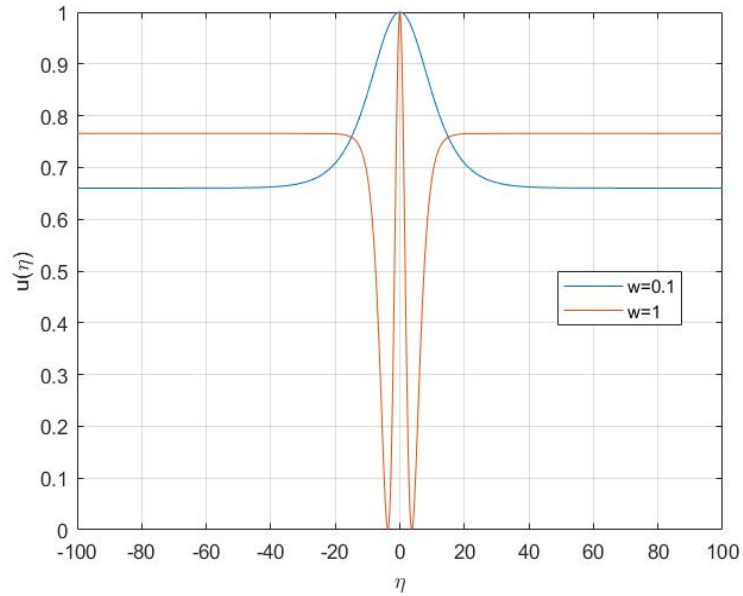
$$u(\eta) = \left[\frac{5a\lambda}{2e} \left(3 \tanh^2 \left(\pm \sqrt{\frac{\lambda}{4}} (\eta + \eta_0) \right) - 1 \right) \right]^2 \quad (3.21)$$

olarak elde edilir. Burada $\lambda = \frac{w}{4a}$ ve $\eta = x - wt$ olarak tanımlanır (Dağhan ve Dönmez, 2018). (3.21) ile verilen Schamel denkleminin analitik çözümü farklı parametreler için aşağıdaki grafikte verilmiştir.



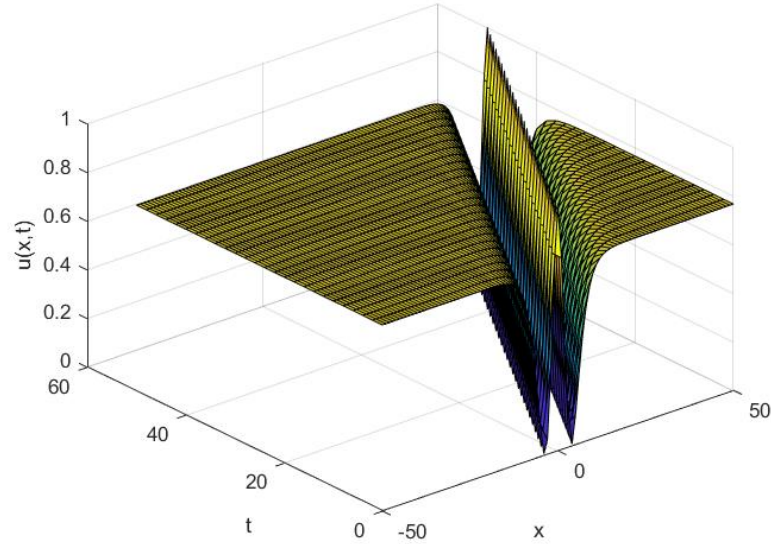
Şekil 3.6. $a = -1$, $e = 1$ için Schamel denkleminin (3.21) ile verilen çözümü

Schamel denklemini için elde edilen (3.21) çözümünün grafiği w nın farklı değerleri için aşağıdaki Şekil 3.7 de verilmiştir.



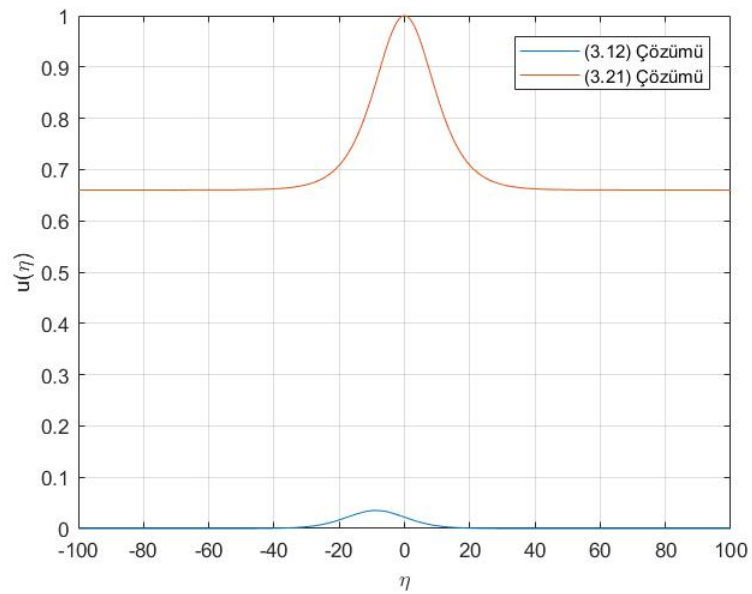
Şekil 3.7. $a = -1$, $e = 1$, $w = 1$ için Schamel denkleminin (3.21) ile verilen çözümü

$a = -1, e = 1, w = 1$ değerleri için (2.3) ile verilen Schamel denkleminin (3.21) ile verilen çözümünden hareketle $\eta = x - wt$ için elde edilen çözümün üç boyutlu grafiği aşağıda verilmiştir.



Şekil 3.8. $a = -1, e = 1, w = 1$ için (2.3) ile verilen Schamel denkleminin çözümü

(3.12) de verilen çözümde parametreler $\eta_0 = 0, w = 0.1, a = 2, e = 1, d = 0$ ve (3.21) ile verilen çözümde ise parametreler $a = -1, e = 1, w = 0.1$ şeklinde alınarak çözümler grafiksel olarak aşağıdaki Şekil 3.9 da birlikte verilmiştir.



Şekil 3.9. Schamel denkleminin (3.12) ve (3.21) ile verilen çözümleri

3.4. KdV Denkleminin Tam Çözümü

(3.7) integralinde $b=0, c=0, e=0, f=0$ alındığında

$$\pm \int \frac{du}{\sqrt{-\frac{d}{3ak^2}u^3 - \frac{w}{ak^3}u^2 - \frac{2c_1}{ak^3}u - \frac{2c_2}{ak^3}}} = \eta + \eta_0 \quad (3.22)$$

elde edilir ki bu denklem KdV denkleminin düzenlenmiş halidir. (3.22) denkleminde $u^{\frac{1}{2}} = \psi$ dönüşümü yapılır ve yine literatürle uyum için $k=1, w=-w$ seçilirse

$$\pm \int \frac{d\psi}{\sqrt{-\frac{d}{12a}\psi^4 + \frac{w}{4a}\psi^2 - \frac{c_1}{2a} - \frac{c_2}{2a}\psi^{-2}}} = \eta + \eta_0 \quad (3.23)$$

integrali elde edilir. (3.23) ile verilen integralin c_1 ve c_2 integrasyon sabitlerinin her durumunda çözümü bulunamamaktadır (Dağhan ve Dönmez, 2018). Bu yüzden c_1 ve c_2 integrasyon sabitlerinin bazı özel durumlarında çözümü arayacağız. (3.23) denkleminde benzer şekilde $c_1 = c_2 = 0$ alındığında çözüm vardır ve bu çözüm daha önce (3.15) denklemi ile verilmiştir. Diğer taraftan (3.23) denkleminde $c_1 \neq 0, c_2 = 0$ olarak seçilirse

$$\pm \int \frac{d\psi}{\sqrt{-\frac{d}{12a}\psi^4 + \frac{w}{4a}\psi^2 - \frac{c_1}{2a}}} = \eta + \eta_0 \quad (3.24)$$

elde edilir. (3.24) ile verilen integral birinci tip bir eliptik integral olup, burada $c_1 = \frac{3w^2}{8d}$ özel olarak kabul edilir ve (3.24) denkleminde yerine yazılırsa

$$\pm \int \frac{1}{\sqrt{-\frac{d}{12a}\psi^4 + \frac{w}{4a}\psi^2 - \frac{3w^2}{16ad}}} = \eta + \eta_0$$

elde edilir. Bu denklem integre edilebilen denklem olup bir kez integre edildiğinde

$$\pm \sqrt{-\frac{8a}{w}} \operatorname{arctanh} \left[\sqrt{\frac{2d}{3w}} \psi \right] = \eta + \eta_0$$

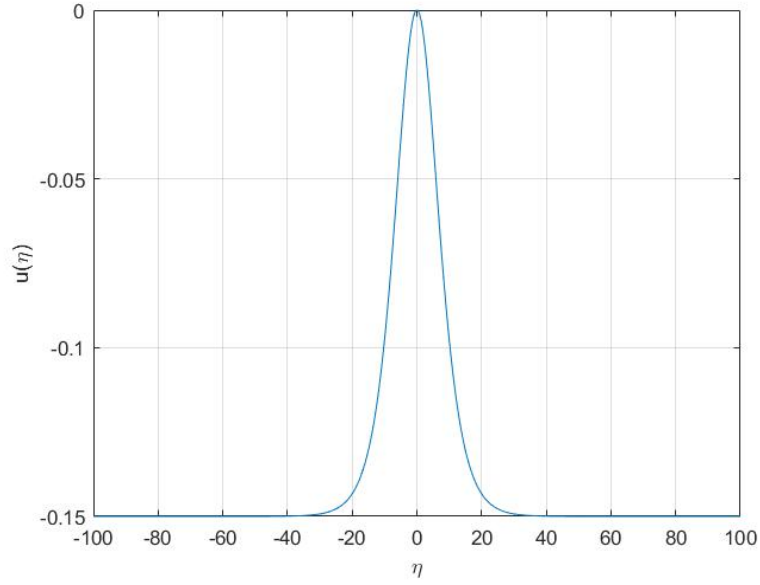
denklem yukardaki formuna dönüşür. Gerekli düzenlemeler yapıp ψ çözümlerse

$$\psi = \sqrt{\frac{3w}{2d}} \tanh \left[\pm \sqrt{-\frac{w}{8a}} (\eta + \eta_0) \right]$$

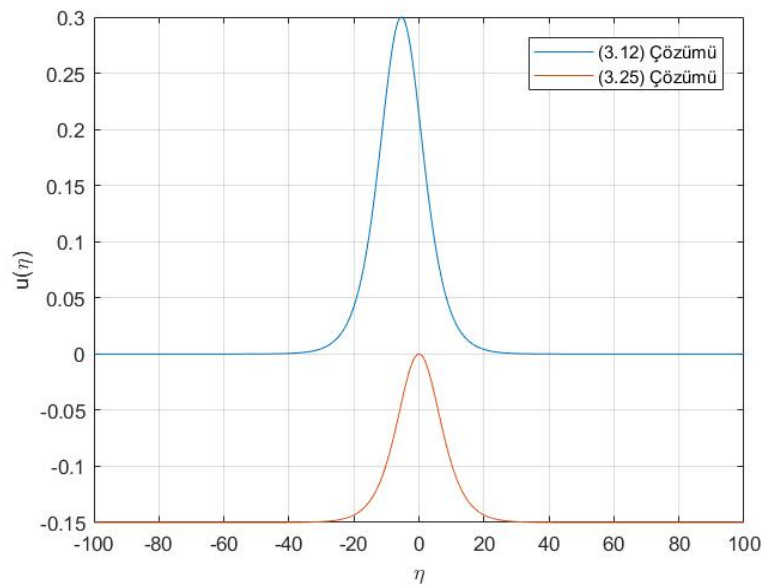
elde edilir. $u = \psi^2$ kullanılarak KdV denkleminin çözümü

$$u(\eta) = \left[\sqrt{\frac{3w}{2d}} \tanh\left(\pm \sqrt{-\frac{w}{8d}}(\eta + \eta_0)\right) \right]^2 \quad (3.25)$$

olarak elde edilir ki burada $c_1 = \frac{3w^2}{8d}$ ve $\eta = x - wt$ olarak tanımlanır. (3.25) ile verilen çözüm literatür için yeni bir çözümdür. (3.25) ile verilen çözümün grafiği Şekil 3.10 da, (3.12) denklemi ile verilen çözüm ile (3.25) denklemi ile verilen KdV denkleminin çözümlerinin grafiği ise Şekil 3.11 de aşağıdaki gibi verilmiştir.



Şekil 3.10. $w = -0.1$, $a = 1$, $d = 1$, $\eta_0 = 0$ için KdV denkleminin (3.25) ile verilen çözümü



Şekil 3.11. KdV denkleminin (3.12) ve (3.25) ile verilen çözümleri

3.5. Modifiye-Benjamin-Bona-Mahony Denklemine Tam Çözümü

(3.7) ile verilen denklemde $a = 0$, $d = 0$, $e = 0$ seçilirse

$$\pm \int \frac{du}{\sqrt{-\left(\frac{ck}{6bk^2w}\right)u^4 - \left(\frac{w+fk}{bk^2w}\right)u^2 - \left(\frac{2c_1}{bk^2w}\right)u - \left(\frac{2c_2}{bk^2w}\right)}} = \eta + \eta_0 \quad (3.26)$$

sonucuna ulaşılır. Elde ettiğimiz son denklem aslında MBBM Denklemidir. (3.26) denklemine literatürle uyumlu olması açısından $b = -b$ seçilip denklem düzenlenirse

$$\pm k\sqrt{bw} \int \frac{du}{\sqrt{\left(\frac{ck}{6}\right)u^4 + (w+fk)u^2 + 2c_1u + 2c_2}} = \eta + \eta_0 \quad (3.27)$$

bulunur. Burada $\eta = kx + wt$ ve η_0 integrasyon sabitidir (Doğan, 2014; Esen, 2018).

Durum I: (3.27) denklemine $c_1 = c_2 = 0$, $w + fk = 0$ seçilirse

$$\pm k\sqrt{bw} \int \frac{du}{\sqrt{\left(\frac{ck}{6}\right)u^4}} = \eta + \eta_0$$

elde edilir ve $w = -fk$ kullanılır ve denklem integre edilirse

$$u(\eta) = \pm k \left(\sqrt{\frac{-6bf}{c}} \right) \left(\frac{1}{\eta + \eta_0} \right) \quad (3.28)$$

sonucuna varılır. Burada $\eta = kx + wt$ olarak tanımlanır (Doğan, 2014; Esen, 2018).

Durum II: (3.27) denklemine $c_1 = c_2 = 0$, $w + fk \neq 0$, $u > 0$ seçilirse

$$\pm k\sqrt{bw} \int \frac{du}{\sqrt{\left(\frac{ck}{6}\right)u^4 + (w+fk)u^2}} = \eta + \eta_0$$

denklemi elde edilir. Bu denklemde gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\pm k\sqrt{\frac{6bw}{ck}} \int \frac{du}{\sqrt{u^4 + 6\left(\frac{w+fk}{ck}\right)u^2}} = \eta + \eta_0$$

olup buradan

$$\pm k \sqrt{\frac{6bw}{ck}} \int \frac{du}{u \sqrt{u^2 + 6 \left(\frac{w+fk}{ck} \right)}} = \eta + \eta_0$$

bulunur. $u = \frac{1}{t}$ dönüşümü ile denklem aşağıdaki formatta yazılır (Doğan, 2014; Esen, 2018; Daghan vd., İncelemede)

$$\pm k \sqrt{\frac{bw}{w+fk}} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + \frac{ck}{6(w+fk)}}} = \eta + \eta_0.$$

Bu ifadenin integrali alınırsa

$$\pm k \sqrt{\frac{bw}{w+fk}} \ln \left(t + \sqrt{t^2 + \frac{ck}{6(w+fk)}} \right) = \eta + \eta_0$$

sonucuna varılır. $u = \frac{1}{t}$ dönüşümü için çözüm

$$u(\eta) = \frac{2}{e^{\pm \frac{1}{k} \sqrt{\frac{w+fk}{bw}} (\eta + \eta_0)} + \delta e^{\mp \frac{1}{k} \sqrt{\frac{w+fk}{bw}} (\eta + \eta_0)}} \quad (3.29)$$

olarak elde edilir (Doğan, 2014; Esen, 2018; Daghan vd., İncelemede). Burada

$\delta = -\frac{ck}{6(w+fk)}$ ve $\eta = kx + wt$ olarak tanımlanır. (3.29) denklemi ile verilen çözüm

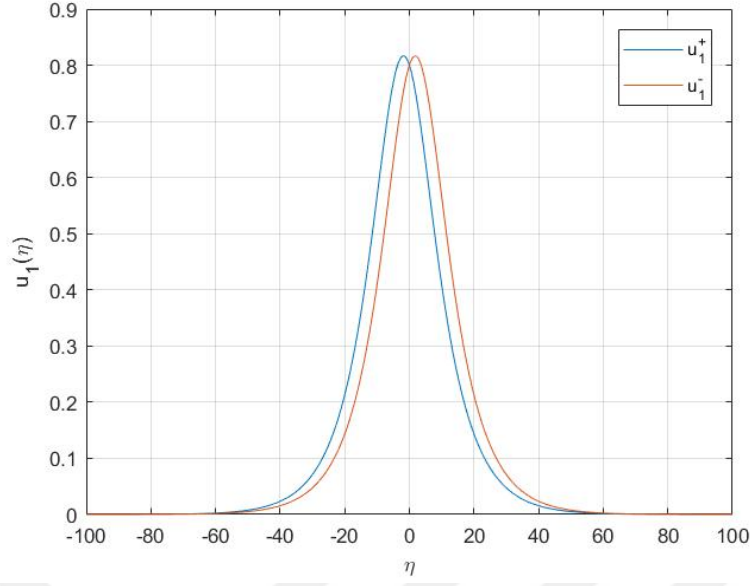
$\frac{w+fk}{bw} > 0$ için

$$u_1(\eta) = \frac{2}{(1+\delta) \cosh \frac{1}{k} \sqrt{\frac{w+fk}{bw}} (\eta + \eta_0) \pm (1-\delta) \sinh \frac{1}{k} \sqrt{\frac{w+fk}{bw}} (\eta + \eta_0)} \quad (3.30)$$

ve $\frac{w+fk}{bw} < 0$ için

$$u_2(\eta) = \frac{2}{(1+\delta) \cos \frac{1}{k} \sqrt{-\frac{w+fk}{bw}} (\eta + \eta_0) \pm (1-\delta) \sin \frac{1}{k} \sqrt{-\frac{w+fk}{bw}} (\eta + \eta_0)} \quad (3.31)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\eta = kx + wt$ olarak verilmektedir. (3.30) ile verilen MBBM denkleminin çözümü farklı parametre değerleri için aşağıdaki grafikte verilmiştir.



Şekil 3.12. $w=1, c=1, f=0, k=-9, b=1, \eta_0=0$ için MBBM denkleminin (3.30) ile verilen çözümü

Durum III: (3.27) denkleminde $c_1=0, c_2 \neq 0, w+f k \neq 0$ kabul edilir ve denklemde yerine yazılırsa

$$\pm k \sqrt{bw} \int \frac{du}{\sqrt{\left(\frac{ck}{6}\right)u^4 + (w+f k)u^2 + 2c_2}} = \eta + \eta_0$$

olup, bu integral birinci tip eliptik integral olup özel olarak $c_2 = \frac{3(w+f k)^2}{4ck}$ kabul edilip denklemde yerine yazılırsa

$$\pm k \sqrt{bw} \int \frac{du}{\sqrt{\left(\frac{ck}{6}\right)u^4 + (w+f k)u^2 + \frac{3(w+f k)^2}{2ck}}} = \eta + \eta_0$$

şekline dönüşür. Gerekli düzenlemeler ile

$$\pm k \sqrt{\frac{6bw}{ck}} \int \frac{du}{\sqrt{u^4 + \frac{6(w+f k)}{ck}u^2 + \frac{9(w+f k)^2}{(ck)^2}}} = \eta + \eta_0$$

olur ve tam kare yapılırsa

$$\pm k \sqrt{\frac{6bw}{ck}} \int \frac{du}{\sqrt{\left(u^2 + \frac{3(w+fk)}{ck}\right)^2}} = \eta + \eta_0$$

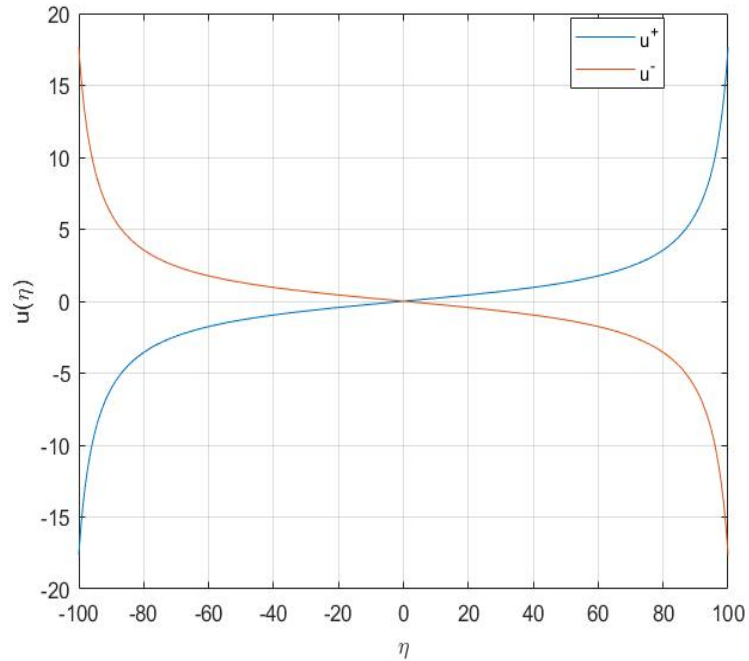
elde edilir ve kök dışına alınırsa

$$\pm k \sqrt{\frac{6bw}{ck}} \int \frac{du}{u^2 + \frac{3(w+fk)}{ck}} = \eta + \eta_0$$

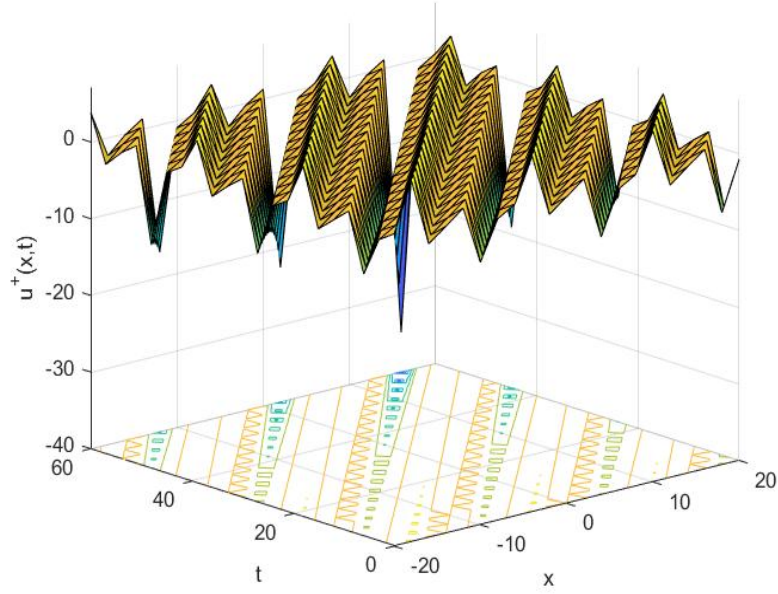
formuna ulaşılır. Son denklem integrale edilirse $\eta = kx + wt$ olmak üzere

$$u(\eta) = \sqrt{\frac{3(w+fk)}{ck}} \tan \left[\pm \frac{1}{k} \sqrt{\frac{w+fk}{2bw}} (\eta + \eta_0) \right] \quad (3.32)$$

şeklinde (2.7) denklemi ile verilen MBBM denkleminin tam çözümü elde edilir. (3.32) ile verilen çözüm MBBM denkleminin literatürde yeni bir çözümüdür. Çözümün iki ve üç boyutlu grafikleri aşağıda verilmiştir.



Şekil 3.13. $w = 50, c = 1, f = -1, k = 30, b = 1, \eta_0 = 0$ için MBBM denkleminin (3.32) ile verilen çözümü



Şekil 3.14. $w = 50$, $c = 1$, $f = -1$, $k = 30$, $b = 1$, $\eta_0 = 0$ için (2.7) ile verilen MBBM denkleminin çözümü

3.6. Benjamin-Bona-Mahony Denkleminin Tam Çözümü

(3.7) ile verilen denklemde $a = 0$, $c = 0$, $e = 0$ alındığında

$$\pm \int \frac{du}{\sqrt{-\frac{dk}{3(bk^2w)}u^3 - \frac{(w+fk)}{(bk^2w)}u^2 - \frac{2c_1}{(bk^2w)}u - \frac{2c_2}{(bk^2w)}}} = \eta + \eta_0 \quad (3.33)$$

integraline ulaşılır ki bu denklem BBM denkleminin düzenlenmiş versiyonudur. Burada $\eta = kx + wt$ olarak tanımlanmıştır. (3.33) denkleminde yine literatür açısından uyumlu olması için $b = -b$ seçilip denklem düzenlenirse

$$\pm k\sqrt{bw} \int \frac{du}{\sqrt{\left(\frac{dk}{3}\right)u^3 + (w+fk)u^2 + 2c_1u + 2c_2}} = \eta + \eta_0 \quad (3.34)$$

sonucuna varılır.

(3.34) ile verilen denklem birinci tip eliptik integral olduğundan her durumda çözümü bulunmamaktadır. Bu nedenle bazı özel hallerde çözüm arayacağız.

Durum I: (3.34) denkleminde $c_1 = c_2 = 0$, $w + f k = 0$ seçilirse

$$\pm k \sqrt{bw} \int \frac{du}{\sqrt{\left(\frac{dk}{3}\right)u^3}} = \eta + \eta_0$$

elde edilir ve denklem integre edilirse

$$\mp 2k \sqrt{\frac{3bw}{dk}} \frac{1}{\sqrt{u}} = \eta + \eta_0 \quad (3.35)$$

bulunur. (3.35) denkleminde $w = -f k$ yazılır ve düzenleme yapılırsa

$$\sqrt{u} = \mp \left(2k \sqrt{\frac{-3f k b}{dk}} \right) \left(\frac{1}{\eta + \eta_0} \right)$$

elde edilir. Burada $\eta = kx + wt$ olmak üzere (2.6) denklemi ile verilen BBM denkleminin çözümü

$$u(\eta) = 12k^2 \frac{f b}{d} \left[\frac{1}{\eta + \eta_0} \right]^2 \quad (3.36)$$

olarak bulunur.

Durum II: (3.34) denkleminde $c_1 = c_2 = 0$, $w + f k \neq 0$, $u > 0$ seçilirse

$$\pm k \sqrt{bw} \int \frac{du}{\sqrt{\left(\frac{dk}{3}\right)u^3 + (w + f k)u^2}} = \eta + \eta_0 \quad (3.37)$$

denklemi elde edilir. (3.37) ile verilen denklem düzenlenirse

$$\pm k \sqrt{\frac{3bw}{dk}} \int \frac{du}{u \sqrt{u + \frac{3(w + f k)}{dk}}} = \eta + \eta_0 \quad (3.38)$$

denklemine ulaşılır. (3.38) denkleminde $u + \frac{3(w + f k)}{dk} = t^2$ dönüşümü yapılırsa

$$\pm k \sqrt{\frac{3bw}{dk}} \int \frac{2t dt}{\left(t^2 - \frac{3(w + f k)}{dk}\right)t} = \eta + \eta_0$$

olur ve buradan

$$\pm k \sqrt{\frac{3bw}{dk}} \int \frac{2dt}{t^2 - \frac{3(w+fk)}{dk}} = \eta + \eta_0$$

elde edilir. Bu denklem düzenlenirse

$$\pm k \sqrt{\frac{3bw}{dk}} \frac{2}{\sqrt{\frac{3(w+fk)}{dk}}} \int \left(\frac{1}{t - \sqrt{\frac{3(w+fk)}{dk}}} - \frac{1}{t + \sqrt{\frac{3(w+fk)}{dk}}} \right) dt = \eta + \eta_0$$

dan

$$\pm 2k \sqrt{\frac{bw}{w+fk}} \left[\int \frac{dt}{t - \sqrt{\frac{3(w+fk)}{dk}}} - \int \frac{dt}{t + \sqrt{\frac{3(w+fk)}{dk}}} \right] = \eta + \eta_0$$

olup bu integrale edilirse

$$\pm 2k \sqrt{\frac{bw}{w+fk}} \left[\ln \left| \frac{\frac{t}{\sqrt{\frac{3(w+fk)}{dk}}} - 1}{\frac{t}{\sqrt{\frac{3(w+fk)}{dk}}} + 1} \right| \right] = \eta + \eta_0$$

bulunur. Bu denklem düzenlenirse

$$\mp 2k \sqrt{\frac{bw}{w+fk}} \operatorname{arctanh} \frac{t}{\sqrt{\frac{3(w+fk)}{dk}}} = \eta + \eta_0$$

dir. $u + \frac{3(w+fk)}{dk} = t^2$ dönüşümünden

$$\mp 2k \sqrt{\frac{bw}{w+fk}} \operatorname{arctanh} \sqrt{\frac{u + \frac{3(w+fk)}{dk}}{\frac{3(w+fk)}{dk}}} = \eta + \eta_0$$

sonucuna varılır. Son denklemde gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\operatorname{arctanh} \sqrt{\frac{u + \frac{3(w+fk)}{dk}}{\frac{3(w+fk)}{dk}}} = \mp \left(\frac{1}{2k} \right) \sqrt{\frac{w+fk}{bw}} (\eta + \eta_0),$$

yani

$$\sqrt{\frac{u + \frac{3(w+fk)}{dk}}{\frac{3(w+fk)}{dk}}} = \tanh \left(\mp \frac{1}{2k} \sqrt{\frac{w+fk}{bw}} (\eta + \eta_0) \right)$$

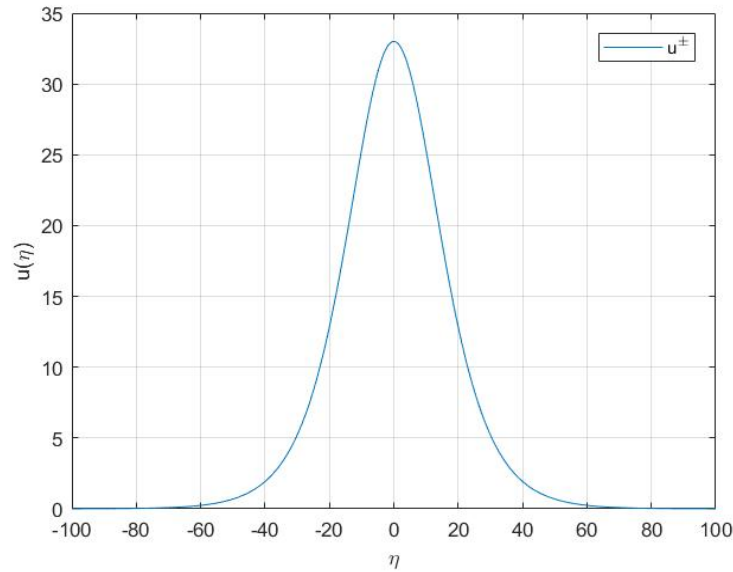
bulunur. Burada hiperbolik tanjant fonksiyonu tek fonksiyon olduğundan

$$\sqrt{\frac{u + \frac{3(w+fk)}{dk}}{\frac{3(w+fk)}{dk}}} = -\tanh \left(\pm \frac{1}{2k} \sqrt{\frac{w+fk}{bw}} (\eta + \eta_0) \right)$$

olur. Burada u çözülrse

$$u(\eta) = \frac{3(w+fk)}{dk} \left[-1 + \tanh^2 \left(\pm \frac{1}{2k} \sqrt{\frac{w+fk}{bw}} (\eta + \eta_0) \right) \right] \quad (3.39)$$

çözümü elde edilir. Burada $\eta = kx + wt$ olmak üzere (3.39) ile verilen denklem BBM denkleminin bir tam çözümüdür. BBM denkleminin (3.39) ile verilen çözümünün grafiği aşağıda verilmiştir.



Şekil 3.15. $w = 100$, $d = -1$, $f = 1$, $k = 10$, $b = 1$, $\eta_0 = 0$ için BBM denkleminin (3.39) ile verilen çözümü

Durum III: (3.34) denkleminde $c_1 \neq 0$, $c_2 = 0$, $w + f k \neq 0$, $u > 0$ kabul edilirse

$$\pm k \sqrt{bw} \int \frac{du}{\sqrt{\left(\frac{dk}{3}\right)u^3 + (w + f k)u^2 + 2c_1 u}} = \eta + \eta_0 \quad (3.40)$$

denklemine ulaşılır. (3.40) integrali birinci tip eliptik integraldir. Bu nedenle özel olarak

$$c_1 = \frac{3(w + f k)^2}{8dk} \text{ seçilir ve denklemde yerine yazılırsa}$$

$$\pm k \sqrt{bw} \int \frac{du}{\sqrt{\left(\frac{dk}{3}\right)u^3 + (w + f k)u^2 + \frac{3(w + f k)^2}{4dk}u}} = \eta + \eta_0$$

bulunur. Burada gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\pm k \sqrt{\frac{3bw}{dk}} \int \frac{du}{\sqrt{u \left(u + \frac{3(w + f k)}{2dk} \right)}} = \eta + \eta_0 \quad (3.41)$$

sonucuna varılır. (3.41) denkleminde $u = t^2$ dönüşümü kullanılırsa

$$\pm k \sqrt{\frac{3bw}{dk}} \int \frac{2tdt}{t \left(t^2 + \frac{3(w + f k)}{2dk} \right)} = \eta + \eta_0$$

bulunur ve denklem düzenlenirse

$$\pm k \sqrt{\frac{3bw}{dk}} \int \frac{2dt}{t^2 + \frac{3(w + f k)}{2dk}} = \eta + \eta_0$$

olup denklem integre edilirse

$$\pm 2k \sqrt{\frac{3bw}{dk}} \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{3(w + f k)}{2dk}}} \arctan \frac{t}{\sqrt{\frac{3(w + f k)}{2dk}}} \right) = \eta + \eta_0$$

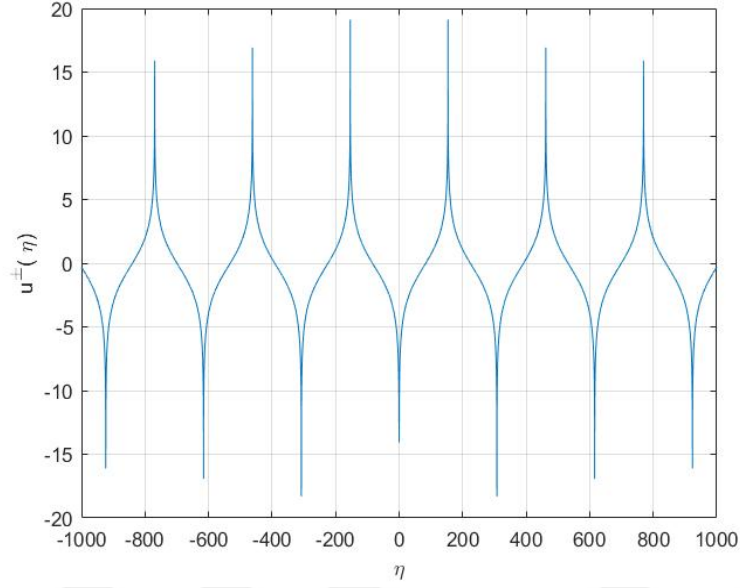
elde edilir. Elde ettiğimiz bu denklemde gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\sqrt{\frac{2dk}{3(w + f k)}} \sqrt{u} = \tan \left(\pm \frac{1}{2k} \sqrt{\frac{(w + f k)}{2wb}} (\eta + \eta_0) \right)$$

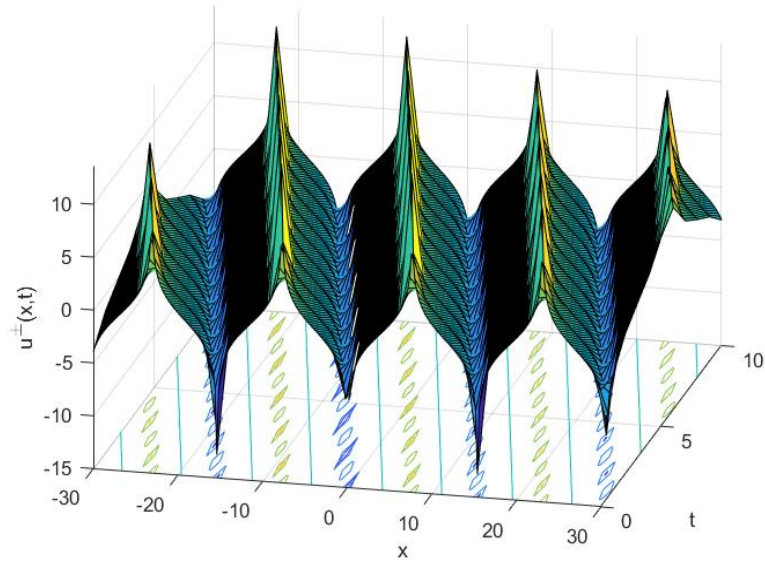
sonucuna varılır. Burada $\eta = kx + wt$ olmak üzere $u = t^2$ için çözüm

$$u(\eta) = \frac{3(w+fk)}{2dk} \left[\tan^2 \left(\pm \frac{1}{2\sqrt{2}k} \sqrt{\frac{w+fk}{wb}} (\eta + \eta_0) \right) \right] \quad (3.42)$$

bulunur ki bu çözüm BBM denkleminin bir tam çözümüdür. BBM denkleminde (3.36), (3.39) ve (3.42) ile verilen özel çözümler literatür için yeni çözümlerdir. (3.42) denkleminin verilen çözümün logaritmik ölçekteki iki ve üç boyutlu grafikleri aşağıda Şekil 3.16 ve Şekil 3.17 de verilmiştir.



Şekil 3.16. $w = 30$, $d = -1$, $f = -2$, $k = 20$, $b = -1$, $\eta_0 = 0$ için BBM denkleminin (3.42) ile verilen iki boyutlu çözümü



Şekil 3.17. $w = 30$, $d = -1$, $f = -2$, $k = 20$, $b = -1$, $\eta_0 = 0$ için BBM denkleminin (3.42) ile verilen üç boyutlu çözümü

BÖLÜM IV

SONUÇLAR

Bu tezde aynı anda beş farklı lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemi içinde barındıran ve ismine genelleştirilmiş integrallenebilen KdV tipli denklem dediğimiz (3.1) ile verilen denklem ele alınmıştır. Genelleştirilmiş integrallenebilen denklemin özel hallerde Schamel denklemine, KdV denklemine, Schamel-KdV denklemine, MBBM denklemine ve BBM denklemine hangi koşullar altında inildiği açıkça gösterilmiştir.

$\eta = kx + wt$ dönüşümü altında (3.1) ile verilen denklem bir adi türevli denkleme indirgenmiş ve çözümü elde edilmek istenmiştir. Bunun için elde edilen üçüncü mertebeden adi türevli lineer olmayan denklem peş peşe iki kez indirgenerek birinci merteben bir denkleme dönüştürülmüştür. Son elde edilen birinci merteben değişkenlerine ayrılabilen denklemin çözümü için her iki tarafın integrali alındığında ise (3.7) denklemi ile verilen integrale ulaşılmıştır. Aynı anda beş farklı denklemin de çözümüne ulaşılabilecek olması bu integrali son derece önemli kılmaktadır. Ancak, bu integralin hesabı son derece zor olup, genel formda integre edilememiş ve dolayısıyla (3.1) ile verilen denklemin analitik çözümüne genel formda ulaşılammıştır. Kendisi de eliptik bir integral olan genel integralin özel çözümlerinde de yine karşımıza bir çok eliptik integral çıkmıştır. Ancak, bazı özel durumlarda (3.7) ile verilen integralin çözümleri elde edilmiştir ki bu çözümler aynı zamanda Schamel-KdV denklemi, Schamel denklemi, KdV denklemi, MBBM denklemi ve BBM denkleminin tam çözümleri olduğu görülmüştür.

Bu çözümler; Schamel-KdV denklemi için (3.11), (3.12), (3.13) ile verilen çözümler, Schamel denklemi için (3.14) ve (3.21) ile verilen çözümler, KdV denklemi için (3.15) ve (3.25) ile verilen çözümler, MBBM denklemi için (3.28), (3.30), (3.31) ve (3.32) ile verilen çözümler ve BBM denklemi için ise (3.36), (3.39) ve (3.42) ile verilen çözümlerdir. Elde edilen çözümlerin doğruluğu MATHEMATICA paket programı ile test edilmiştir. Ayrıca, çözümlerden bazılarının ayrıntılı iki ve üç boyutlu grafik incelemeleri MATLAB Paket Programı kullanılarak yine tez kapsamında yapılmıştır.

KAYNAKLAR

Ablowitz, M.J. and Clarkson, P.A., “Soliton, Non-Linear Evolution Equations and Inverse Scattering”, *Cambridge University Pres*, Newyork, 1991.

Çiğdemdere, A., “Eliptik İntegraller ve Uygulamaları”, Yüksek lisans tezi, *İstanbul Kültür Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, İstanbul, 1-25, 2006.

Daghan, D., Doğan, G. and Toros S., “Different Approaches Solving The Modified Benjamin-Bona-Mahony Equation”, İncelemede.

Daghan, D. and Dönmez, O., “Exact Solutions of the Gardner Equation and their Applications to the Different Physical Plasmas”, *Braz J Phys*, 46, 321–333, 2016.

Daghan, D. and Dönmez, O., “Analytical Solutions and Parametric Studies of the Schamel Equation for Two Different Ion-Acoustic Waves in Plasmas”, *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, Vol. 59, No. 3, 389–396, 2018.

Daghan, D., Dönmez, O. and Tuna, A., “Explicit Solutions of The Nonlinear Partial Differential Equations”, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, Vol. 11, No. 3, 2152–2163, 2010.

Daghan, D. and Esen, R.K., “Exact Solutions for Two Different Non-Linear Partial Differential Equations”, *New Trends in Mathematical Sciences*, Vol. 6, No. 3, 83-93, 2018.

Daghan, D., Yıldız, Ö. and Toros S., “Comparison of the $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -Methods for finding exact solutions of the Drinfeld-Sokolov System”, *Mathematica Slovaca*, Vol. 65, No. 3, 607-632, 2015.

Das, G.C., Tagare, S.G. and Sarma, J., “Quasipotential analysis for ion-acoustic solitary wave and double layers in plasmas”, *Planet. Space Sci.*, 46(4), 417, 1998.

Davidson, R.C., “Methods in Nonlinear Plasma Theory”, *Academic Press*, New York, NY, USA., 1972.

Doğan, G., “Lineer Olmayan Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemler: Tam ve Yaklaşık Çözümler”, Yüksek Lisans Tezi, *Niğde Ömer Halisdemir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Niğde,40-44, 2014.

Dönmez, O. and Daghan, D., “Investigating the Effect of Integration Constants and Various Plasma Parameters on the Dynamics of the Soliton in Different Physical Plasmas”, *Physics of Plasmas*, 22, 072114, 2015.

Dönmez, O. and Daghan, D., “Analytic Solutions of the Schamel-KdV Equation by Using Different Methods: Application to a Dusty Space Plasma”, *Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, Cilt 21, Sayı 1, 208-215, 2017.

El-Shahed, M., “Application of He's Homotopy Perturbation Method to Volterra's Integro-differential Equation”, *Int. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 6 (2), 163-168, 2005.

Esen, R.K., “Lineer Olmayan Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemlerin Beş Farklı Teknikle Tam Çözümleri”, Yüksek Lisans Tezi, *Niğde Ömer Halisdemir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Niğde, 3-4,34-37, 2018.

Hassan, M.M., “New Exact Solutions of Two Nonlinear Physical Models”, *Communications in Theoretical Physics*, (Beijing, China), 53(4), 596-604, 2010.

He, J.H., “Homotopy Perturbation Method for Bifurcation of Nonlinear Problems”, *Int. J. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 6(2), 207-208, 2005.

Hirota, R., “Exact Solution of the Korteweg—de Vries Equation for Multiple collisions of Solitons”, *Phys. Rev. Lett.*, 27 (18), 1192-1194, 1971.

Lee, J. and Sakthivel, R., “Exact Traveling Wave Solutions of the Schamel-Korteweg-de Vries Equation”, *Reports on Mathematical Physics*, 68(2), 153-161, 2011.

Li, L.X. and Wang, M.L., “The $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -Expansion Method and Travelling Wave Solutions for a Higher-Order Non-Linear Schrödinger Equation”, *Applied Mathematics and Computation* 208, 440, 2009.

Li, L.X., Li, E.Q. and Wang, M.L., “The $\left(\frac{G'}{G}, \frac{1}{G}\right)$ -Expansion Method and Its Application to Travelling Wave Solutions of the Zakharov Equations”, *Appl. Math. A J. Chin. Univ.*, 25, 454-462, 2010.

Kurt, N., “Dirichlet Probleminin Eliptik Fonksiyonlar Cinsinden Çözümü”, Doktora tezi, *Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü*, 17-19, İzmir, 2003.

Schamel, H., “Stationary Solitary, Snoidal and Sinusoidal Ion-acoustic Waves”, *Plasma Physics*, 14, 905-924, 1972.

Schamel, H., A Modified Korteweg-de Vries Equation for Ion-acoustic Waves Due to Resonant Electrons, *Journal of Plasma Physics*, 9(3), 377-387, 1973.

Tagare, S.G. and Chakrabarti, A., “Solution of a Generalized Korteweg-de Vries Equation”, *Physics of Fluids*, 17(6), 1331-1332, 1974.

Yan, C., “A Simple Transformation for Nonlinear Waves”, *Physics Letters A*, 224, 77-84, 1996.

Yıldız, G. and Daghan, D., “New exact solutions of a nonlinear integrable equation”, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, Vol. 43, No. 11, 6761-6770, 2020.

Yokuş, A., “Bazı Özel Lineer Olmayan Diferensiyel Denklemlerin Çözümlerinin Elde Edilmesi ve Bu Çözümlerin Karşılaştırılması”, Doktora tezi, *Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Elazığ, 2011.

Wang, M. L., Li, X. J. and Zhang J., “The $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -Expansion Method and Travelling Wave Solutions of Non-Linear Evolution Equations in Mathematical Physics”, *Physics Letters A*, 372, 417, 2008.

Whitham, G.B., “Linear and Nonlinear Waves, Pure and Applied Mathematics”, *John Wiley & Sons*, New York, NY, USA, 1974.



ÖZ GEÇMİŞ

tarihinde
 yılında girdiği
 'da mezun oldu.
 Bilimleri Estitüsü
 sürdürmektedir.

doğdu. İlk ve orta öğrenimini
 Üniversitesi
 yılından bu yana Niğde Ömer Halisdemir Üniversitesi Fen
 Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans çalışmalarını

tamamladı.

Bölümü'nden



