

T.C.  
SÜLEYMAN DEMİREL ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÇATILANDIRILMIŞ DALDIRMALARIN PEDAL VE  
CONTRAPEDAL EĞRİLERİ

Engin TULGA

Danışman  
Doç. Dr. Gülşah AYDIN ŞEKERCİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI  
ISPARTA - 2024



© 2024 [Engin TULGA]

## **TAAHHÜTNAME**

Bu tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek tezde yer aldığını beyan ederim.

**Engin TULGA**

## İÇİNDEKİLER

	<b>Sayfa</b>
İÇİNDEKİLER.....	i
ÖZET .....	ii
ABSTRACT .....	iii
TEŞEKKÜR .....	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ .....	v
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ .....	vi
1. GİRİŞ .....	1
2. KAYNAK ÖZETLERİ .....	4
3. ÖN BİLGİLER .....	8
3.1. Temel Kavramlar .....	8
3.2. Minkowski Uzayı .....	11
3.3. Eğriler Hakkında Ön Bilgiler .....	12
4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA .....	16
4.1. n-Boyutlu Öklid Uzayında Çatılandırılmış Eğriler.....	16
4.2. 3-Boyutlu Öklid Uzayında Çatılandırılmış Eğriler.....	21
4.3. 3-Boyutlu Öklid Uzayında Çatılandırılmış Daldırmalar .....	22
4.4. Öklid 3-Uzayında Çatılandırılmış Daldırmaların Pedal ve Contrapedal Eğrileri .....	24
4.5. Minkowski 3-Uzayında Spacelike (Uzaybenzer) Çatılandırılmış Daldırmaların Pedal ve Contrapedal Eğrileri .....	31
5. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	45
KAYNAKLAR .....	47

# ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

## ÇATILANDIRILMIŞ DALDIRIMLARIN PEDAL VE CONTRAPEDAL EĞRİLERİ

Engin TULGA

Süleyman Demirel Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Gülşah AYDIN ŞEKERCİ

Günlük hayatta sıkça karşılaşılan eğrilerin çoğunun tekil noktalara sahip olması, tekillik teorisinin ve diferansiyel geometrinin, bu eğrileri anlamak için kullanılmasını teşvik etmiştir. Böylece 3-boyutta tekil noktaya sahip olan eğrileri anlamak için çatılandırılmış eğriler ve çatılandırılmış daldırmalar araştırmacılar tarafından ifade edilmiştir. Bu tez çalışması da, Minkowski 3-uzayında spacelike çatılandırılmış daldırmaların pedal ve contrapedal eğrilerinin incelenmesi üzerinedir. Çalışmada ilk olarak konunun tarihsel gelişimi, literatürdeki yeri ve konunun anlaşılmasını sağlayacak bazı temel kavramlar ele alınmıştır. Sonrasında, spacelike çatılandırılmış eğriler ile daldırmaların tanımları kullanılarak matematiksel özellikleri belirtilmiştir. Bu eğriler için özel çatı alanları belirlenerek ve bu alanlar için de Frenet tipi formüller türetilerek eğrilik fonksiyonları incelenmiştir. Öklid 3-uzayında regüler eğriler için kullanılan Serret-Frenet vektör alanları tarafından elde edilen eğrilik ve burulma fonksiyonlarından farklı olarak, spacelike çatılandırılmış eğriler için dört eğrilik fonksiyonu elde edilmiştir. Elde edilen bu formüller sayesinde spacelike çatılandırılmış eğrilerin spacelike çatılandırılmış daldırmalar olabilmesi için gereken şartlar belirlenmiştir. Bu bulgulara dayanarak, spacelike çatılandırılmış daldırmaların pedal (contrapedal) eğrileri, eğrinin oskülatör (normal) düzlemlerinde sabit bir noktanın dik izdüşümleri olarak tanımlanmıştır. Bu tanımlara göre, spacelike çatılandırılmış daldırmaların pedal veya contrapedal eğrilerinin spacelike olması gerekmediği elde edilmiş ve causal karakterlerinin belirlenmesi için gereken koşullar bulunmuştur. Ayrıca, spacelike çatılandırılmış daldırmanın pedal (contrapedal) eğrisinin bir çatılandırılmış taban eğri olması için gerekli ve yeterli koşullar ispatlanmıştır. Böylece bu çalışmadan elde edilen sonuçların, Minkowski 3-uzayındaki spacelike çatılandırılmış daldırmaların pedal ve contrapedal eğrilerinin, Öklid 3-uzayındaki regüler veya singüler eğrilerden farklı özelliklere sahip olduğu gösterilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Pedal eğri, contrapedal eğri, çatılandırılmış eğri, çatılandırılmış daldırma, Minkowski uzayı.

2024, 49 sayfa

## ABSTRACT

M.Sc. Thesis

### PEDAL AND CONTRAPEDAL CURVES OF FRAMED IMMERSIONS

Engin TULGA

Süleyman Demirel University  
Graduate School of Natural and Applied Sciences  
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Gülşah AYDIN ŞEKERCI

The fact that most of the curves frequently encountered in daily life have singular points has encouraged the use of singularity theory and differential geometry to understand these curves. Thus, in order to understand curves with singular points in 3-dimensions, framed curves and framed immersions have been expressed by researchers. This thesis is about examining the pedal and contrapedal curves of spacelike framed immersions in Minkowski 3-space. In the study, firstly, the historical development of the subject, its place in the literature and some basic concepts that will enable the subject to be understood have been discussed. Afterwards, mathematical properties have been specified using the definitions of spacelike framed curves and immersions. Curvature functions have been examined by determining special frame fields for these curves and deriving Frenet type formulas for these fields. Unlike the curvature and torsion functions obtained by Serret-Frenet vector fields used for regular curves in Euclidean 3-space, four curvature functions have been obtained for spacelike framed curves. Thanks to these obtained formulas, the necessary conditions for spacelike framed curves to be spacelike framed immersions have been determined. Based on these findings, the pedal (contrapedal) curves of spacelike framed immersions have been defined as orthogonal projections of a fixed point on the osculator (normal) planes of the curve. According to these definitions, it has been obtained that the pedal or contrapedal curves of spacelike framed immersions do not have to be spacelike, and the necessary conditions for determining their causal character have been found. Moreover, the necessary and sufficient conditions for the pedal (contrapedal) curve of the spacelike framed immersion to be a framed base curve have been proven. Thus, the results obtained from this study show that the pedal and contrapedal curves of spacelike framed immersions in Minkowski 3-space have different properties than the regular or singular curves in Euclidean 3-space.

**Keywords:** Pedal curve, contra-pedal curve, framed curve, framed immersion, Minkowski space.

2024, 49 pages

## TEŞEKKÜR

Bu araştırma için beni yönlendiren, karşılaştığım zorlukları bilgi ve tecrübesi ile aşmamda yardımcı olan değerli Danışman Hocam Doç.Dr.Gülşah AYDIN ŞEKERCİ'ye teőekkürlerimi sunarım.

Tezimin her aşamasında beni yalnız bırakmayan aileme sonsuz sevgi ve saygılarımı sunarım.

Engin TULGA  
ISPARTA, 2024



## ŞEKİLLER DİZİNİ

	<b>Sayfa</b>
Şekil 1.1. Pedal noktası odakta olan elips ve pedal eğrisi .....	2
Şekil 1.2. Düzlemde pedal ve contrapedal eğri .....	3
Şekil 4.1. Astroid eğrisinin pedal ve contrapedal eğrileri .....	26



## SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$B$	Binormal vektör alanı
$N$	Asli normal vektör alanı
$T$	Teğet vektör alanı
$\mathbb{R}^n$	Reel uzay
$\langle, \rangle$	İç çarpım
$\  \cdot \ $	Norm
$\wedge$	Vektörel çarpım
$\mathbb{R}_1^3$	Üç boyutlu Minkowski uzayı
$S^2$	Birim küre
$S_1^2$	Pseudo 2-küre
$H_0^2$	Hiperbolik 2-uzay
$(\gamma, \zeta_1, \zeta_2)$	Çatılandırılmış eğri
$(\gamma, \eta_1, \eta_2)$	Çatılandırılmış daldırma
$Pe_{\gamma,p}(t)$	Pedal eğri
$CPe_{\gamma,p}(t)$	Contrapedal eğri
$\kappa$	Eğrilik
$\tau$	Burulma

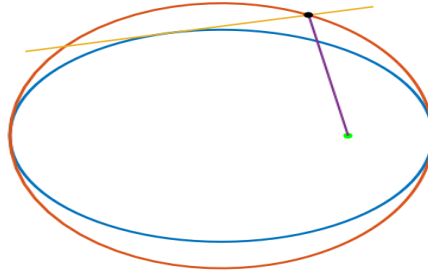
## 1. GİRİŞ

Diferansiyel geometride, eğrilerin incelenmesi önemli bir alandır. Bu alanda yapılan çalışmaların birçoğu regüler (düzenli) eğriler üzerinedir. Regüler eğriler, sürekli ve düzgün bir şekilde değişen sistemleri ifade eder. Ancak günlük hayatta karşılaşılan eğrilerin birçoğu singüler (tekil) eğrilerdir. Eğrinin türevinin sıfıra eşit olduğu noktalara singüler nokta denir ve singüler noktaya sahip eğriler de singüler eğriler olarak isimlendirilir. Günlük hayatta sıkça karşılaştığımız eğrilerin birçoğunun singüler noktalara sahip olması, singülerlik teorisi ile diferansiyel geometrinin birleştirilmesi düşüncesini ortaya çıkarmıştır. Özellikle singülerlik teorisinin diferansiyel geometri çalışmalarında kullanılması fikrinin öncüleri büyük ölçüde Arnold (1990) ve Thom (1956) 'dur. Onların öne sürdüğü fikirleri takip ederek diferansiyel geometrideki birçok konu için bu teori araştırılmıştır. Bu teori üzerine yapılan çalışmaların çoğu fizik ve matematik arasında bağlantı kurmaktadır. Günümüzde bu teori; diferansiyel geometri, topoloji, cebir gibi matematiğin farklı dallarındaki araştırmalar için kullanılmaktadır (Li ve Sun, 2019).

Hem regüler hem de singüler eğri problemlerini incelemek için iyi tanımlanmış ve uygun bir çatı seçmek önemlidir. Örneğin, Serret-Frenet çatısı, regüler eğrilerin özelliklerini analiz etmek için oldukça kullanışlıdır. Ancak bu çatı, bükülme noktalarında veya eğrilik sıfır olduğunda tanımsızdır. Bu çeşit eğrilerin incelenmesi için Serret-Frenet çatısı geçerli değildir. Bu problemi çözmek için Bishop (1975) eğrinin ikinci türevinin sıfır olduğu durumlarda bile iyi tanımlanmış bir çatı ortaya atarak alternatif bir yaklaşım sunmuştur. Ancak bu çatının da kullanımı sınırlı kalmıştır (Li vd., 2021). Böylece singüler noktaya sahip olan eğrilerde uygun çatıların tanımlanması için Legendre eğriler ve çatılandırılmış eğriler fikri ile bu problem büyük ölçüde çözülmüştür. Honda ve Takahashi (2020), Öklid uzayında çatılandırılmış eğrileri tanımlayarak Öklid 3-uzayındaki singüler eğriyi karakterize etmek için bu eğrileri kullanmışlardır. Çatılandırılmış eğriler hem Frenet eğrilerinin, hem de Legendre eğrilerinin bir genellemesi olmuştur. Ayrıca, çatılandırılmış bir eğriyle ilişkili eğrilik fonksiyonları da iyi tanımlıdır (Honda ve Takahashi, 2020).

Bunun yanında, eğrinin kendisi singüler noktalara sahip olabileceği gibi eğriler tarafından oluşturulan eğriler de genellikle singülerliğe sahip eğrilerdendir. Diferansiyel geometrinin klasik konularından biri olan pedal eğriler ve contrapedal eğriler de bu tür eğrilerdendir. Bu eğriler, klasik mekanik ve gök mekaniğindeki belirli türdeki kuvvet problemlerini çözmek için çok uygundur. Salyangoz, deniz kabuğu, güller gibi doğada bulunan pek çok nesnede bu eğrilerle karşılaşılabilir. Doğada mevcut olmasının yanında minyatür kamera merceği tasarımı gibi optik alanında da uygulamaları bulunmaktadır (Yan ve Sasian, 2017). Yaygın kullanım alanları da düşünüldüğünde pedal ve contrapedal eğriler araştırmacıların dikkatini çekmiştir.

İlk olarak Kepler, 1605'te gezegenlerin yörüngesinin güneş etrafında elips şeklinde olduğunu keşfetmiştir. Bu bilgi ışığında, Hamilton, elipsin odağındaki pedal noktası ile Kepler'in elipsinin hodografını keşfetmek için pedal eğrisini kullanmıştır. Buna göre elipsin pedal eğrisinin bir çember olduğunu elde etmiştir. Hamilton'un bu bulgusu Şekil (1.1) deki gibi gösterilebilir (Stavek, 2018).



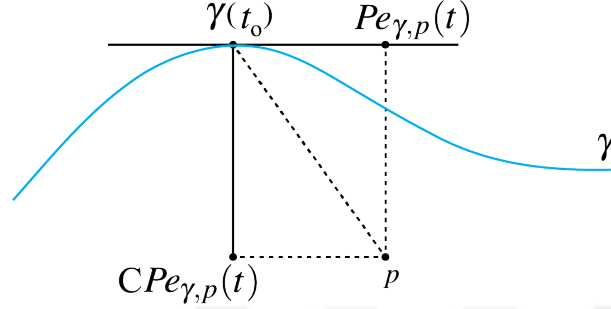
Şekil 1.1. Pedal noktası odakta olan elips (mavi) ve pedal eğrisi (kırmızı)(Yao vd., 2023).

Pedal eğri ismi ilk kez İskoç matematikçi Collin MacLaurin tarafından sabit bir nokta ve düzgün bir düzlem eğrisi verildiğinde, sabit noktadan eğrinin tüm teğet doğrularına dik izdüşümlerin yeri olarak ifade edilmiştir (Bruce ve Giblin, 1984; Bruneau, 2010). Bir eğrinin contrapedal eğrisi de sabit bir nokta ve düzgün düzlem eğrisi verildiğinde sabit noktadan eğrinin tüm normal doğrularına dik izdüşümlerin yeridir. Buna göre, bir  $I$  açık aralığı için  $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  regüler bir eğri ve  $p \in \mathbb{R}^2$  de sabit bir nokta olmak üzere  $\gamma$  eğrisinin pedal ve contrapedal eğrileri

$$Pe_{\gamma,p}(t) = \gamma(t) + \frac{\langle \gamma'(t), p - \gamma(t) \rangle}{\|\gamma'(t)\|^2} \gamma'(t)$$

$$CPe_{\gamma,p}(t) = p - \frac{\langle \gamma'(t), p - \gamma(t) \rangle}{\|\gamma'(t)\|^2} \gamma'(t)$$

biçiminde ifade edilir (Zwicker, 2005). Regüler bir düzlem eğrisinin pedal ve contrapedal eğrilerinin geometrisi Şekil (1.2) 'deki gibi verilir.



Şekil 1.2. Düzlemde pedal ve contrapedal eğri (Zwicker, 2005).

Bu pedal eğri tanımı göz önüne alındığında, eğri düzgün olsa bile bir eğrinin pedal eğrisi singüler noktalara sahip olabilir. Bu da singülerlik (tekillik) teorisi ile pedal eğri arasında ilişki kurmayı zorunlu kılar. Bu ilişki ve pedal eğrilerin yaygın kullanım alanına sahip olması sebebiyle pek çok bilim insanı bu konuyu inceler. Bir eğrinin pedal denklemini bilmek eğrilik gibi bazı özelliklerin hesaplanmasını basitleştirdiğinden diferansiyel geometri açısından da önemlidir.

Günlük hayatta regüler eğrilerden ziyade singüler eğrilerle karşılaşıldığından bu konudaki sorunların çözümü ilgi çekicidir. Bu durumlar düşünüldüğünde singüler eğriler ile pedal ve contrapedal eğrilerin birleştirilmesi fikri ortaya çıkmaktadır. Özellikle bu tez çalışmasında Minkowski uzayında singüler noktaya sahip spacelike (uzaybenzeri) daldırmalar için pedal ve contrapedal eğriler araştırılmıştır. Bunun için çatılandırılmış eğrilerin Frenet tipi formülleri kullanılarak spacelike çatılandırılmış daldırmalar için Frenet tipi formüller bulunmuştur. Daha sonra, bu formüller kullanılarak pedal ve contrapedal eğriler tanımlanmıştır. Bu konuda asıl problem çatılandırılmış daldırmalar için pedal ve contrapedal eğrilerin çatılandırılmış taban eğriler olmayabileceği sorunudur. Bu nedenle, çalışmada pedal ve contrapedal eğrilerin çatılandırılmış taban eğrileri olması için gerekli ve yeterli koşullar elde edilmiştir. Böylece spacelike çatılandırılmış daldırmalar için pedal ve contrapedal eğrilerin özellikleri ortaya koyulmuştur.

## 2. KAYNAK ÖZETLERİ

Çalışmamızın temelini çatılandırılmış daldırmaların pedal ve contrapedal eğrileri oluşturmaktadır. Bu konularda yapılmış pek çok çalışma bulunmaktadır. Bu bölümde sadece bu tez çalışmasının temeli olan yayınlardan bahsedilecektir. İlk olarak çatılandırılmış eğriler Honda ve Takahashi (2016) tarafından tanımlanmıştır. Yazarlar, lineer bağımsızlık koşulunu sağlayan regüler eğrilerin ve Legendre eğrilerin bir genelleştirmesi olarak Öklid uzayında çatılandırılmış eğrileri ifade etmişlerdir. Regüler bir eğrinin ve bir Legendre eğrisinin eğriliğine benzer olarak çatılandırılmış eğrilerin eğriliklerini elde etmişlerdir. Çatılandırılmış eğriler singüler noktalara sahip olabileceği için çatılandırılmış eğriler ve bunların singülerliklerini incelemek için tanımlanan bu eğrilikler oldukça kullanışlı olmuştur. Ayrıca, bu eğrilikleri kullanarak çatılandırılmış eğriler için varlık ve teklik teoremlerini ispatlamışlardır. Son olarak, çatılandırılmış uzay eğrilerinin izdüşümleri ve Legendre eğriler arasındaki ilişkiyi veren örneklerle sonuçlarını doğrulamışlardır (Honda ve Takahashi, 2016).

Honda ve Takahashi (2016)'yi destekleyecek şekilde Fukunaga ve Takahashi (2017) çatılandırılmış eğrilerin varlık koşulunu vermişlerdir. Çatılandırılmış taban eğrisinin görüntüsünün belirli bir koşul altında verilen düzgün eğrinin görüntüsüyle çakışacak şekilde çatılandırılmış bir eğri oluşturmuşlardır. Bu çalışmaların ışığında, Honda ve Takahashi (2020) Öklid uzayında singüler noktalı düzgün eğrileri kullanarak singüler noktalı uzay eğrisinin evolütünü ve odak yüzeyini incelemişlerdir. Bunları tanımlamak için, çatılandırılmış eğrilerin teorisinden faydalanmışlardır. Çatılandırılmış eğrilerin tanımlarını vererek, bazı koşullar altında çatılandırılmış daldırmanın evolütünü ve odak yüzeyini ifade etmişlerdir. Çatılandırılmış eğriler ve daldırmalar Frenet eğrisinin doğal genelleştirmesi olduğundan, buna göre temel özelliklerin değişimlerini araştırmışlardır. Dahası, düzgün dönüşümlerin singüler olma koşullarını kullanarak, evolütün ve odak yüzeyin singüler noktaları arasındaki ilişkiyi vermişlerdir. Destek fonksiyonlar ve paralel eğrilerin tanımlarını vererek, evolüt ve paralel eğrilerin evolütlerinin eş olduğunu göstermişlerdir. Evolüt de bir çatılandırılmış daldırma olduğu için çatılandırılmış daldırmanın k-nıncı evolütünü vermişlerdir. Böylece; evolüt, odak yüzey ve tekrarlı evolütlerin özelliklerini incelemişlerdir (Honda ve Takahashi, 2020).

Daha önceki çalışmaları geliştiren Li vd. (2021), lineer bağımsızlık koşulunu sağlayan regüler eğrilerin teğet açılabilir yüzeylerini ele almışlardır. Bu yüzeyleri çatılandırılmış eğrilerin teğet açılabilir yüzeylerine genelleştirmişlerdir ve Öklid 3-uzayında teğet açılabilir yüzeylerin singülerliğini araştırmışlardır. Singüler noktaya veya lineer bağımlılık koşuluna sahip eğrileri analiz etmek için etkili bir araç olan çatılandırılmış eğriler ile ilişkili çatıyı kullanarak, çatılandırılmış eğrilerin teğet açılabilir yüzeylerinin singülerlik tipleri ve eğrilik fonksiyonları arasındaki bağlantıyı kurmuşlardır. Buna ek olarak, Darboux açılabilir yüzeyin singülerliğinin bazı tiplerini, teğet açılabilir yüzeylerin sonuçlarını kullanarak sınıflandırmışlardır (Li vd., 2021). Çatılandırılmış eğrilerin sağladığı bu kullanışlılık sayesinde bu eğrilerin evolüsyonu da ifade edilmiştir (Yıldız, 2022). Daha sonra, konum vektörü rektifiyan düzlemde bulunan eğriler olarak bilinen rektifiyan eğriler ile çatılandırılmış eğri kavramı Wang vd. (2019) tarafından birleştirilmiştir. Böylece, Wang hem regüler hem de regüler olmayan rektifiyan eğrileri içeren çatılandırılmış rektifiyan tanımını oluşturmuştur. Ayrıca, regüler eğrilere benzer olarak, çatılandırılmış küresel eğrilerin genişletilmesi ile ortaya çıkan çatılandırılmış rektifiyan eğrileri elde etmiştir. Deshmukh vd. (2018), bu genişletmenin regüler eğriler için her zaman bir rektifiyan eğri olamayacağını açıklamıştır. Bu durumdan yararlanarak, çatılandırılmış eğrilerin genişlemesi için Doğan Yazıcı vd. (2022b) bazı sınıflandırmalar vermişlerdir. Hem regüler, hem de regüler olmayan rektifiyan eğrilerde kullanılabilen bu sınıflandırmalar için bazı koşullar elde etmişlerdir. Böylece çatılandırılmış eğri kavramının tanımlanması yüzeyler üzerinde de bazı çalışmaların yapılmasına öncülük etmiştir. Bunun yanında, Doğan Yazıcı vd. (2022a) Öklid uzayında çatılandırılmış eğriler için uzaklık kare fonksiyonunu kullanarak eğriliklerle verilen bir diferansiyel denklem elde etmişlerdir. Bu diferansiyel denklem yardımıyla çatılandırılmış helislerin yeni bir denklemini ortaya koymuşlardır. Aynı yazarlar çatılandırılmış eğrilerin yardımıyla, çatılandırılmış Tzitzeica eğrileri tanıtmışlardır. İlk olarak, Tzitzeica denklemini regüler çatılandırılmış eğriler için elde etmişler ve bu denklemi regüler eğrilerin Bishop çatısı ile Frenet çatısını kullanarak, literatür ile uyumlu hale getirmişlerdir. Daha sonra, Tzitzeica denklemini regüler olmayan eğriler için Frenet tipi çatılandırılmış eğrileri kullanarak vermişlerdir. Çatılandırılmış rektifiyan eğri, çatılandırılmış küresel eğri gibi özel singüler eğrilerin çatılandırılmış Tzitzeica olması için gerekli koşulları elde etmişlerdir. Bunlarla ilişkili diferansiyel denklemleri

oluşturarak bu diferansiyel denklemlerin çözümlerini incelemişlerdir. Sonuç olarak, Tzitzeica denklemlerini çatılandırılmış eğrinin genel konum vektörü için vermişlerdir.

Öklid uzayında yapılan bütün bu çalışmaların ışığında, çalışmayı farklı bir uzay olan Minkowski uzayında Li ve Pei (2021) ele almışlardır. Minkowski uzayındaki nesnelere incelenmesi, özellikle matematik ve fizik ile ilgili çalışmalarda büyük önem taşımaktadır. Bu yazarlar çalışmalarında spacelike bir eğri üzerindeki noktalardan yayılan ışık ışınlarının oluşturduğu null-koni frontları incelemişlerdir. Ancak, spacelike eğri singüler ise bu incelemeleri yapmak için klasik metotlar kullanışlı değildir ve bu problemi çözmek için yazarlar, spacelike çatılandırılmış eğrileri tanımlamışlardır. Bu eğrilerin eğriliklerini kullanarak null-koni frontların singülerliklerini karakterize etmişlerdir.

Çatılandırılmış eğriler ve çatılandırılmış daldırmalar ile ilgili bu çalışmalar göz önünde bulundurularak bu tez çalışmasının diğer bir kısmını oluşturan pedal eğriler de pek çok araştırmacı tarafından incelenmiştir. Uzun bir geçmişi olan pedal eğrilerin fizik alanında uygulamaları bulunmasına rağmen diferansiyel geometri açısından ele alınması daha yakın tarihte olmuştur. Buna rağmen kullanım alanlarının çeşitliliği sebebiyle hızla gelişmiştir. Bu alanda yapılan çalışmalardan biri Li ve Pei (2018) tarafından gerçekleştirilmiştir. Yazarlar Öklid düzlemindeki frontların pedal eğrilerini oluşturmuşlardır. Gerekli temel kavramları vererek Öklid düzleminde bir frontun pedal eğrisini tanımlamışlar ve bu pedal eğrinin de frontal olduğunu göstermişlerdir. Pedal eğrilerin singüler noktaları ve frontların bükülme noktaları arasındaki bağlantıları açıklamışlardır. Daha sonra, Tuncer vd. (2018) çalışmalarında Li ve Pei (2018)'nin fikrine benzer olarak Öklid düzleminde Legendre Frenet çatısını kullanarak frontların pedal ve contrapedal eğrilerini oluşturmuşlardır. Frontun pedal ve contrapedal eğrisi ile regüler eğrinin pedal ve contrapedal eğrisinin uyumlu olduğunu göstermişlerdir. Ayrıca, bir frontun pedal veya contrapedal eğrisinin, front veya frontal olmak zorunda olmadığını elde etmişlerdir. Ancak, bazı koşullar altında frontun pedal veya contrapedal eğrisinin frontal olabileceğini ispatlamışlardır. Dahası, frontların pedal ve contrapedal eğrilerinin singülerliklerini incelemişlerdir.

Yapılan bu çalışmaları genişletmek için, Aydın Şekerci ve Izumiya (2021) Minkowski düzleminde regüler eğrilerin pedallarını ve evolütlerini kullanarak eğri ailelerini ele almıştır. Evolutoidler ve pedaloidler olarak adlandırılan bu eğri aileleri arasındaki ilişkileri incelemişlerdir. Daha sonra, singüler noktalı eğriler için evolutoid ve pedaloid kavramlarını tanımlamışlardır. Bu çalışmayı destekleyecek şekilde Aydın Şekerci (2021), Minkowski 3-uzayında spacelike bir yüzey üzerindeki spacelike bir eğrinin evolutoidlerini ve pedaloidlerini tanımlamıştır. Çemberi göz önünde bulundurarak ve eğrinin hareketli çatısını kullanarak spacelike yüzeydeki spacelike eğrilerin evolutoidlerini regle yüzeylerle ifade etmiştir. Buna ek olarak Li vd. (2022), Minkowski 3-uzayda lightlike olmayan regüler eğrilerin pedal eğrilerini, contrapedal eğrilerini ve B-Gauss dönüşümlerini çalışmışlardır. Evolütler, pedal eğriler ve contrapedal eğriler arasındaki ilişkileri kurarak singülerliklerini incelemişlerdir. Bunun yanında aynı yazarlar Frenet tipi çatılandırılmış baz (Ft**b**) eğrinin, noktasal 1-tip Gauss dönüşümüne sahip regle yüzeyleri 3-boyutlu Öklid uzayında oluşturmuşlardır. Çalışmalarında singüler noktalı teğet açılabilir yüzeyleri, odak açılabilir yüzeyleri ve rektifiyan açılabilir yüzeyleri göz önüne alarak, bu yüzeylerin Gauss dönüşümünün noktasal 1-tip olması için gerekli koşulları ayrı ayrı elde etmişlerdir (Li vd., 2023).

Elde edilen bu çalışmaları destekleyecek şekilde Yao vd. (2023), Öklid 3-uzayında singülerliğe sahip olan çatılandırılmış daldırmaların pedal ve contrapedal eğrilerini tanımlayarak, bunların çatılandırılmış taban eğriler olması için gerekli koşulları araştırmışlardır. Ayrıca, çatılandırılmış daldırmaların pedal eğrileri, contrapedal eğrileri, evolütleri ve involütleri arasındaki ilişkileri vermişlerdir.

Mevcut literatür göz önünde bulunduğunda hem pedal ve contrapedal eğriler hem de çatılandırılmış eğriler ve çatılandırılmış daldırmalar ile ilgili problemlerin, mevcut literatürün ışığında etkin olarak araştırmacılar tarafından çalışılmaya devam etmekte olduğu görülür. Bu tez çalışması da literatürdeki boşluğu tamamlayarak katkı sağlayacaktır.

### 3. ÖN BİLGİLER

#### 3.1. Temel Kavramlar

**Tanım 3.1.** A bir reel afin uzay ve V de A afin uzayı ile ilişkili vektör uzayı olsun.

$u = (u_1, u_2, u_3)$ ,  $v = (v_1, v_2, v_3) \in V$  olmak üzere, V vektör uzayı üzerinde

$$\langle, \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(u, v) \mapsto \langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^3 u_i v_i$$

biçiminde tanımlanan iç çarpıma Öklid iç çarpımı, V vektör uzayına da 3-boyutlu Öklid uzayı denir (Hacısalihoglu, 1998).

**Tanım 3.2.**  $\mathbb{R}^3$  vektör uzayı üzerinde Öklid iç çarpımı tanımlansın.

$$d : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(u, v) \mapsto d(u, v) = \|\vec{uv}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (v_i - u_i)^2}$$

biçiminde Öklid uzayında ifade edilen d fonksiyonu uzaklık fonksiyonu olarak isimlendirilir ve u ile v vektörleri arasındaki uzaklığı hesaplar (Hacısalihoglu, 1998).

**Tanım 3.3.** Öklid uzayında ifade edilen uzaklık fonksiyonu Öklid metriği olarak isimlendirilir (Hacısalihoglu, 1998).

**Tanım 3.4.**  $\mathbb{R}^3$  uzayındaki birim küre

$$S^2 = \{u = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3 \mid u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1\}$$

şeklinde tanımlanır (Hacısalihoglu, 2000).

**Tanım 3.5.**  $\mathbb{R}^n$ , n boyutlu reel sayı uzayı ve  $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ ,  $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  olmak üzere,

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^n u_i v_i$$

iç çarpımı tanımlanırsa bu uzaya n-boyutlu Öklid uzayı denir (Honda ve Takahashi, 2016).

**Tanım 3.6.**  $u_i = (u_{i1}, u_{i2}, \dots, u_{in})$  olmak üzere,  $u_1, u_2, \dots, u_{n-1} \in \mathbb{R}^n$  ve  $e_1, \dots, e_n; \mathbb{R}^n$  uzayının doğal baz vektörleri olsun.

$$u_1 \wedge \dots \wedge u_{n-1} = \det \begin{bmatrix} u_{11} & \dots & u_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{(n-1)1} & \dots & u_{(n-1)n} \\ e_1 & \dots & e_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n \det(u_1, \dots, u_{n-1}, e_i) e_i$$

biçiminde tanımlanan çarpıma  $u_1, u_2, \dots, u_{n-1}$  vektörlerinin vektörel çarpımı denir.

$n = 3$  durumunda vektörel çarpım

$$u_1 \wedge u_2 = \det \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ e_1 & e_2 & e_3 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \end{bmatrix}$$

biçimindedir (Honda ve Takahashi, 2016).

**Tanım 3.7.** X boştan farklı bir küme ve  $\tau$ , X kümesinin  $P(X)$  kuvvet kümesinin bir alt kümesi olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan  $\tau$  ailesine X üzerinde bir topoloji (veya topolojik yapı) denir.

i)  $\emptyset, X \in \tau$ ,

ii)  $\tau$  kümesine ait sonlu sayıdaki elemanların arakesiti yine  $\tau$  kümesine aittir,

iii)  $\tau$  kümesine ait keyfi sayıdaki elemanların birleşimi yine  $\tau$  kümesine aittir.

Buna göre  $\tau$  kümesinin elemanlarına X kümesinin açık alt kümeleri,  $(X, \tau)$  çiftine topolojik uzay denir (Yıldız, 2005).

**Tanım 3.8.**  $(X, \tau)$  bir topolojik uzay olsun.  $X$  kümesinin farklı her  $p$  ve  $q$  elemanlarının ayrık komşulukları varsa, yani her  $p, q \in X, p \neq q$  için  $\exists N_1 \in N(p)$  ve  $\exists N_2 \in N(q)$  var öyleki  $N_1 \cap N_2 = \emptyset$  ise,  $X$  uzayına  $T_2$ -uzay (veya Hausdorff) denir (Yıldız, 2005).

**Tanım 3.9.**  $(X, \tau)$  bir topolojik uzay olsun.  $(X, \tau)$  uzayının bir  $U$  açık alt kümesinden  $\mathbb{R}^n$  n-boyutlu Öklid uzayının  $\xi(U)$  açık alt kümesine tanımlanan  $\xi$  homeomorfizmi var ise buna bir koordinat sistemi veya harita denir (O'Neill, 1983).

**Tanım 3.10.**  $\mathcal{A}$  haritaların bir koleksiyonu olmak üzere,  $\xi$  ve  $\phi$  fonksiyonları  $\mathcal{A}$ 'nın iki haritası ve bu haritaların tanım kümelerinin kesişimi boştan farklı olsun. Koordinatların değişimi olan  $\phi \circ \xi^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  diffeomorfizm ise  $\mathcal{A}$  ya  $C^\infty$  atlas denir (Brickell ve Clark, 1970).

**Tanım 3.11.** Bir  $X$  kümesinin  $C^\infty$  atlası,  $X$  kümesinin bir başka  $C^\infty$  atlasını içermezse bu atlas tam (complete) denir. Yani en büyük  $C^\infty$  atlas tam atlas denir (Brickell ve Clark, 1970).

**Tanım 3.12.** Tam atlas ile verilen Hausdorff uzayına bir düzgün manifold denir (O'Neill, 1983).

**Tanım 3.13.**  $\mathbb{R}^n$  n-boyutlu Öklid uzayı ve reel değerli bir  $\phi$  fonksiyonu  $\mathbb{R}^n$  uzayının bir  $U$  açık alt kümesi üzerinde tanımlansın.  $U$  açık alt kümesinin her bir noktasında  $\phi$  fonksiyonunun her mertebeden kısmi türevleri var ve sürekli ise  $\phi$  fonksiyonuna düzgün fonksiyon veya Öklid düzgün fonksiyon denir (O'Neill, 1983).

**Tanım 3.14.**  $X$ , m-boyutlu ve  $Y$ , n-boyutlu manifoldlar olsun.  $X$  manifoldunun koordinat sistemi  $\xi$  ve  $Y$  manifoldunun koordinat sistemi  $\phi$  olsun.  $\phi : X \rightarrow Y$  biçiminde tanımlanan bir dönüşüm olmak üzere  $\phi \circ \phi \circ \xi^{-1}$  ifadesi Öklid düzgün fonksiyonu ise  $\phi$  dönüşümüne düzgün dönüşüm denir (O'Neill, 1983).

**Tanım 3.15.**  $X$  ve  $Y$  düzgün manifoldlar olmak üzere  $\phi : X \rightarrow Y$  biçiminde bir düzgün dönüşüm tanımlansın. Her  $p \in X$  noktası için  $\phi$  dönüşümünün  $d\phi_p$  diferansiyeli birebir ise  $\phi$  fonksiyonuna bir daldırma denir (O'Neill, 1983).

### 3.2. Minkowski Uzayı

**Tanım 3.16.**  $V$  bir reel vektör uzayı olmak üzere,  $\langle, \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}$ -bilineer dönüşümüne  $V$  vektör uzayı üzerinde bilinear form denir. Her  $u, v \in V$  için  $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$  ise bu bilinear form simetrik bilinear form olarak isimlendirilir (O'Neill, 1983).

**Tanım 3.17.**  $V$  vektör uzayında  $\langle, \rangle$  simetrik bilinear formu için  $V$  vektör uzayının herhangi bir  $W$  alt uzayına kısıtlaması olan  $\langle, \rangle|_{W \times W}$  yine simetrik bilinear form olup  $V \neq 0$  olmak üzere  $\langle V, V \rangle < 0$  ise simetrik bilinear forma negatif tanımlı denir. Böyle negatif tanımlı olarak oluşturulan en büyük boyutlu altuzayın boyutu indeks olarak isimlendirilir ve  $indV = q$  ile gösterilir (O'Neill, 1983).

**Tanım 3.18.**  $V$  reel vektör uzayı için  $\langle, \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  simetrik bilinear dönüşüm olsun.  $V$  uzayının  $u \neq 0$  vektörü için her  $v \in V$  de  $\langle u, v \rangle = 0$  oluyor ise simetrik bilinear dönüşüme dejeneredir denir. Aksi takdirde simetrik bilinear dönüşüme nondejenere olarak isimlendirilir (Duggal ve Bejancu, 1996).

$V$  vektör uzayı üzerinde  $\langle, \rangle$  nondejenere, simetrik bilinear form olmak üzere  $\langle, \rangle$  bir skalar çarpım ise semi-Öklidyen metrik olarak isimlendirilir ve  $\langle, \rangle$  ile verilen  $V$  vektör uzayı da semi-Öklidyen uzay olur (Duggal ve Bejancu, 1996).

**Tanım 3.19.**  $V$  bir reel vektör uzayı olmak üzere  $u \in V$  için,

i)  $\langle u, u \rangle > 0$  veya  $u=0$  ise  $u$  vektörüne spacelike (uzaybenzer) dir,

ii)  $\langle u, u \rangle < 0$  ise  $u$  vektörüne timelike (zamanbenzer) dir,

iii)  $u \neq 0$  olmak üzere  $\langle u, u \rangle = 0$  ise  $u$  vektörüne lightlike (null, ışıkbenzer)dir denir.

Bir vektörün içinde bulunduğu türe vektörün causal karakteri denir (O'Neill, 1983).

**Tanım 3.20.**  $V$  vektör uzayı üzerinde nondejenere, simetrik bilinear formu için  $q$  indeksi 1 olur ise bu form Lorentz (Minkowski) metrik ve  $V$  bir Lorentz (Minkowski) uzay olarak isimlendirilir (Duggal ve Bejancu, 1996).

**Tanım 3.21.**  $u = (u_1, u_2, u_3)$ ,  $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$  olmak üzere,

$$\langle u, v \rangle = -u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$$

biçiminde tanımlanan skalar çarpımla birlikte  $\mathbb{R}^3$  Öklid uzayına Minkowski uzayı denir ve  $\mathbb{R}_1^3$  ile gösterilir (O'Neill, 1983).

**Tanım 3.22.**  $\mathbb{R}_1^3$  Minkowski 3-uzayında  $u \in \mathbb{R}_1^3$  olmak üzere,

$$\|u\| = \sqrt{|\langle u, u \rangle|}$$

biçiminde verilen ifadeye  $u$  vektörünün normu denir (O'Neill, 1983).

Norm tanımı kullanılarak Minkowski 3-uzayında  $S_1^2 = \{u \in \mathbb{R}_1^3 | \langle u, u \rangle = 1\}$  ifadesine pseudo 2-küre,  $H_0^2 = \{u \in \mathbb{R}_1^3 | \langle u, u \rangle = -1\}$  ifadesine de hiperbolik 2-uzay denir (Li ve Pei, 2021).

### 3.3. Eğriler Hakkında Ön Bilgiler

**Tanım 3.23.** Bir  $\mathbb{R}$  reel sayı doğrusunun  $I = (a, b)$  açık aralığında tanımlanan  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  diferansiyellenebilir dönüşüme parametrelenmiş diferansiyellenebilir eğri denir (Do Carmo, 1976).

**Tanım 3.24.** Reel sayılarda  $I = (a, b)$  bir açık aralık olmak üzere,  $t \in I$  noktasında  $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))$  biçiminde verilsin.  $\gamma_1(t)$  eğrisinin türevi  $\gamma_1'(t)$  olmak üzere,  $\gamma_2$  ve  $\gamma_3$  için benzer gösterimler kullanılırsa  $\gamma'(t) = (\gamma_1'(t), \gamma_2'(t), \gamma_3'(t)) \in \mathbb{R}^3$  vektörüne  $t$  noktasında  $\gamma$  eğrisinin teğet vektörü veya hız vektörü denir (Do Carmo, 1976).

**Tanım 3.25.**  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  bir diferansiyellenebilir eğri olsun. Her  $t \in I$  için  $\gamma'(t) \neq 0$  ise  $\gamma$  eğrisine regülerdir denir (Do Carmo, 1976).

**Tanım 3.26.**  $t_0$  noktasından başlayan bir  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  regüler parametrelendirilmiş eğrinin

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\gamma'(t)\| dt$$

ifadesine eğrinin yay uzunluğu denir (Do Carmo, 1976).

**Tanım 3.27.**  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $t$  parametrelili bir eğri olsun.  $I$  ve  $J$  açık aralıklar olmak üzere,  $h: J \rightarrow I$  dönüşümü tanımlansın.  $\beta = \gamma \circ h: J \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\beta(s) = \gamma(h(s))$  ile verilen  $\beta$  eğrisine  $\gamma$  eğrisinin yeniden parametrizasyonu denir (Do Carmo, 1976).

**Tanım 3.28.**  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $s \in I$  yay parametresi ile parametrelendirilmiş bir eğri olsun.  $\|\gamma''(s)\| = \kappa(s)$  sayısına  $s$  de  $\gamma$  eğrisinin eğriliği denir (Do Carmo, 1976).

**Tanım 3.29.**  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $s \in I$  yay parametresi ile parametrelendirilmiş bir eğri olsun.  $\gamma'(s)$  birim vektörüne  $\gamma$  eğrisinin teğet vektör alanı denir ve  $T(s)$  ile gösterilir.  $\gamma'(s)$  vektörüne dik olan  $\gamma''(s)$  doğrultusunda tanımlanan birim vektöre asli normal vektör alanı denir ve  $N(s)$  ile gösterilir.  $\wedge$  vektörel çarpım olmak üzere  $T(s) \wedge N(s)$  ile verilen birim vektör alanına binormal vektör alanı denir ve  $B(s)$  ile gösterilir.  $T(s)$ ,  $N(s)$ ,  $B(s)$  ortonormal vektörleri ile oluşturulan üçlüye Frenet üçlüsü denir (Do Carmo, 1976).

**Tanım 3.30.**  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $s \in I$  yay parametresi ile parametrelendirilmiş  $\gamma''(s) \neq 0$  olan bir eğri olsun.  $B'(s) = \tau(s)N(s)$  ile tanımlanan  $\tau(s)$  fonksiyonuna  $\gamma$  eğrisinin burulması denir (Do Carmo, 1976).

**Tanım 3.31.** Eğrinin teğet ve asli normal vektör alanları ile belirlenen düzleme oskütatör düzlem denir. Teğet ve binormal vektör alanları ile belirlenen düzleme rektifiyan düzlem denir. Asli normal ve binormal vektör alanları ile belirlenen düzleme normal düzlem denir (Do Carmo, 1976).

**Tanım 3.32.**  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  biçiminde verilen  $\gamma(s)$  yay parametrelili eğrisinin teğet vektör alanı  $T$ , asli normal vektör alanı  $N$ , binormal vektör alanı  $B$  olmak üzere,

$$T'(s) = \kappa(s)N(s)$$

$$N'(s) = -\kappa(s)T(s) - \tau(s)B(s)$$

$$B'(s) = \tau(s)N(s)$$

denklemlerine Frenet formülleri denir (Do Carmo, 1976).

**Teorem 3.33.**  $\gamma$ ,  $t$  keyfi parametrelili  $\mathbb{R}^3$  Öklid uzayında bir eğri olsun. Buna göre,  $\gamma$  eğrisinin Frenet elemanları aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} i) T(t) &= \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}, \\ ii) B(t) &= \frac{\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)}{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|}, \\ iii) N(t) &= B(t) \wedge T(t), \\ vi) \kappa(t) &= \frac{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3}, \\ v) \tau(t) &= -\frac{\langle \gamma'(t) \wedge \gamma''(t), \gamma'''(t) \rangle}{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|^2} \end{aligned}$$

(Do Carmo, 1976).

Minkowski uzayında eğriler ise üç türde verilir.

**Tanım 3.34.**  $\gamma$ ,  $\mathbb{R}_1^3$  uzayında bir eğri ve  $I$  reel sayı doğrusunda bir açık aralık olmak üzere,  $t$  noktasında  $\gamma'(t)$  spacelike (timelike, lightlike) vektör ise  $\gamma$  eğrisine  $t$  noktasında spacelike (timelike, lightlike) denir. Her  $t \in I$  için  $\gamma$  eğrisi spacelike (timelike, lightlike) ise  $\gamma$  eğrisine spacelike (timelike, lightlike) eğri denir (López, 2014).

$\gamma$ ,  $\mathbb{R}_1^3$  uzayında bir spacelike eğri ve  $\gamma$  eğrisi  $s$  yay parametresi ile verildiğinde teğet vektörü  $T(s) = \gamma'(s)$  olsun.  $T'(s)$ ,  $T(s)$  spacelike vektörüne dik olduğu için  $T'(s)$  spacelike, timelike, lightlike olabilir. Bu durumlar aşağıdaki gibi analiz edilir:

(1)  $T'(s)$  spacelike olsun. Bu durumda,  $\kappa(s) = \|T'(s)\|$ ,  $N(s) = \frac{T'(s)}{\kappa(s)}$  ve  $B(s) = T(s) \wedge N(s)$  yazılır. Böylece  $B(s)$  timelike vektördür. Buna göre Frenet formülleri aşağıdaki gibi verilir:

$$\begin{bmatrix} T'(s) \\ N'(s) \\ B'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & \tau(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{bmatrix}$$

$\det(T, N, B) = \langle T \wedge N, B \rangle = \langle B, B \rangle = -1 < 0$  olduğundan  $\{T, N, B\}$  bazı negatif yönlendirilmiştir.

- (2)  $T'(s)$  timelike olsun. Bu durumda  $\kappa(s) = \sqrt{-\langle T'(s), T'(s) \rangle}$  ve normal vektör  $N(s) = \frac{T'(s)}{\kappa(s)}$  ile verilir. Binormal vektör  $B(s) = T(s) \wedge N(s)$  olmak üzere spacelike bir vektördür. Buna göre Frenet formülleri aşağıdaki gibi verilir:

$$\begin{bmatrix} T'(s) \\ N'(s) \\ B'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ \kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & \tau(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{bmatrix}$$

$\{T, N, B\}$  Frenet bazı pozitif yönlendirilmiştir.

- (3)  $T'(s)$  lightlike olsun.  $T(s)$  ile lineer bağımsız olacak şekilde  $N(s)$  normal vektörü  $N(s) = T'(s)$  biçiminde tanımlansın.  $B(s)$ ,  $T(s)$  ye dik ve  $\langle N(s), B(s) \rangle = -1$  şartlarını sağlayan bir tek lightlike vektör olsun. Buna göre Frenet formülleri aşağıdaki gibi verilir:

$$\begin{bmatrix} T'(s) \\ N'(s) \\ B'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \tau(s) & 0 \\ 1 & 0 & -\tau(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{bmatrix}$$

Burada  $\tau$  fonksiyonu  $\gamma$  eğrisinin yarı burulması olarak isimlendirilir.  $\gamma$  eğrisinin eğriliğinin tanımı yoktur. Ayrıca, normal ve binormal vektör alanları lightlike olduğu için  $\{T, N, B\}$  bir ortonormal baz değildir (López, 2014).

## 4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA

Regüler eğriler ile çalışmak için Serret-Frenet çatısı kullanılırken, lineer bağımsızlık koşuluna sahip regüler eğriler ve singüler noktaya sahip olan eğriler için bu çatı yetersiz kalmıştır. Hem düzlemde singüler noktaya sahip eğrilerin hem de lineer bağımsızlık koşuluna sahip olan regüler eğrilerin bir genelleştirmesi olarak çatılandırılmış eğriler Honda ve Takahashi (2016) tarafından tanımlanmıştır. Bu tanıma göre Öklid uzayında bir çatılandırılmış eğri hareketli bir çatıya sahiptir. Ayrıca regüler eğrilerin ve Legendre eğrilerin eğriliğine benzer olarak çatılandırılmış eğrilerin eğrilikleri düzgün fonksiyonlarla ifade edilir. Çatılandırılmış eğrileri ve onların singülerliklerini incelemek için bu eğrilik tanımları oldukça kullanışlıdır. Bu bölümde, çatılandırılmış eğrilerin temel kavramlarından ve elde edilen sonuçlardan bahsedilecektir. Ayrıca ulaşılan sonuçların literatürdekilerle genel değerlendirmesi yapılacaktır.

### 4.1. n-Boyutlu Öklid Uzayında Çatılandırılmış Eğriler

$\mathbb{R}^n$  n-boyutlu Öklid uzayı ve  $\vec{\nabla}$  gradiyent olmak üzere, r yarıçaplı (n-1) küre

$$S_r^{n-1} = \{v = (v_1, \dots, v_n) \mid f(v) = \sum_{i=1}^n v_i^2 = r^2, \|\vec{\nabla} f\| \neq 0, r \in \mathbb{R}, r \text{ sabit}\}$$

biçiminde verilsin (Hacısalıhoğlu, 2000).

$$\Delta_{n-1} = \{\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_{n-1}) \in \mathbb{S}^{n-1} \times \dots \times \mathbb{S}^{n-1} \mid \langle \zeta_i, \zeta_j \rangle = 0, i \neq j, i, j = 1, \dots, n\}$$

kümesi  $\frac{n(n-1)}{2}$  boyutlu düzgün manifold olsun.  $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_{n-1}) \in \Delta_{n-1}$  olmak üzere,  $\mu = \zeta_1 \wedge \dots \wedge \zeta_{n-1} \in \mathbb{R}^n$  olacak şekilde bir birim eleman tanımlanabilir. Böylece,  $(\zeta, \mu) \in \Delta_n$  ve  $\det(\zeta, \mu) = 1$  biçimindedir. Buna göre, çatılandırılmış eğri aşağıdaki gibi verilir (Honda ve Takahashi, 2016).

**Tanım 4.1.**  $(\gamma, \zeta) : I \rightarrow \mathbb{R}^n \times \Delta_{n-1}$  olmak üzere, her  $t \in I$  ve  $i = 1, \dots, n-1$  için  $\langle \gamma'(t), \zeta_i(t) \rangle = 0$  ise,  $(\gamma, \zeta)$  ifadesine çatılandırılmış eğri denir.  $\zeta : I \rightarrow \Delta_{n-1}$  olmak üzere,  $(\gamma, \zeta)$  çatılandırılmış eğrisi var ise,  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  eğrisine çatılandırılmış taban eğri denir (Honda ve Takahashi, 2016).

Regüler eğrinin ve Legendre eğrinin eğriliğine benzer olarak çatılandırılmış eğriler için eğrilik olarak ifade edilebilecek düzgün fonksiyonlar tanımlanabilir.

$(\gamma, \zeta) : I \rightarrow \mathbb{R}^n \times \Delta_{n-1}$  bir çatılandırılmış eğri olsun.  $\mu : I \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$  olmak üzere,  $\mu(t) = \zeta_1(t) \wedge \cdots \wedge \zeta_{n-1}(t)$  ile tanımlansın. Buna göre, her  $t \in I$  için  $(\zeta(t), \mu(t)) \in \Delta_n$  olup  $\{\zeta(t), \mu(t)\}$ ;  $\gamma(t)$  çatılandırılmış taban eğrisi boyunca bir hareketli çatıdır. Bu durumda, Serret-Frenet tipi formüller,

$$\begin{bmatrix} \zeta'(t) \\ \mu'(t) \end{bmatrix} = C(t) \begin{bmatrix} \zeta(t) \\ \mu(t) \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

biçiminde verilir. Burada,  $i, j = 1, \dots, n$  için  $C(t) = (c_{ij}(t)) \in o(n)$  olup  $o(n)$ , ters simetrik matrislerin kümesidir. Ayrıca,  $\gamma'(t) = \alpha(t)\mu(t)$  olacak biçimde  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$  düzgün dönüşümü vardır (Honda ve Takahashi, 2016).

**Tanım 4.2.** (4.1) denklemleri ile verilen  $C(t) = (c_{ij}(t))$  ve  $\gamma'(t) = \alpha(t)\mu(t)$  koşulunu sağlayan düzgün fonksiyonlar  $\alpha(t)$  olmak üzere,  $(c_{ij}(t), \alpha(t))$  fonksiyonlarına çatılandırılmış eğrinin eğrilikleri denir (Honda ve Takahashi, 2016).

Çatılandırılmış eğrinin eğriliği, çatılandırılmış eğrileri ve singülerliklerini analiz etmek için oldukça kullanışlıdır. Ayrıca  $t_0$ ,  $\gamma$  eğrisinin singüler noktasıdır gerek ve yeter koşul  $\alpha(t_0) = 0$  şartını sağlar.

**Tanım 4.3.**  $(\gamma, \zeta) : I \rightarrow \mathbb{R}^n \times \Delta_{n-1}$  ve  $(\tilde{\gamma}, \tilde{\zeta}) : I \rightarrow \mathbb{R}^n \times \Delta_{n-1}$  çatılandırılmış eğriler olsun. Özel ortogonal matrislerin kümesi  $SO(n)$  olmak üzere,  $D \in SO(n)$  ve  $d \in \mathbb{R}^n$  sabit bir vektör olarak verilsin.  $\tilde{\gamma}(t) = D(\gamma(t)) + d$ ,  $\tilde{\zeta}(t) = D(\zeta(t))$  ise,  $(\gamma, \zeta)$  ve  $(\tilde{\gamma}, \tilde{\zeta})$  çatılandırılmış eğrilerine kongruent (denk) denir (Honda ve Takahashi, 2016).

**Teorem 4.4.** (Varlık Teoremi)  $(c_{ij}, \alpha) : I \rightarrow o(n) \times \mathbb{R}$  düzgün dönüşüm olsun.  $(c_{ij}, \alpha)$  eğrilikli  $(\gamma, \zeta) : I \rightarrow \mathbb{R}^n \times \Delta_{n-1}$  çatılandırılmış eğrisi vardır (Honda ve Takahashi, 2016).

*İspat.* Bu teoremin ispatında lineer diferansiyel denklem sistemlerinin varlık ve teklik teoremleri kullanılır.  $t = t_0$  olsun.  $M(n)$ ,  $n \times n$  matrislerin kümesi ve  $I_n$  birim matris

olmak üzere,  $H(t) \in M(n)$ ,  $C(t) = (c_{ij}(t)) \in o(n)$  için  $\frac{d}{dt}H(t) = C(t)H(t)$ ,  $H(t_0) = I_n$  biçimindeki başlangıç değer problemi göz önüne alınsın. Lineer diferansiyel denklem sistemlerinin çözümünün varlığı ve tekliği ile bir  $H(t)$  çözümü vardır.  $C(t) \in o(n)$  olduğundan,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (H^T(t)H(t)) &= \left( \frac{d}{dt} H^T(t) \right) H(t) + H^T(t) \left( \frac{d}{dt} H(t) \right) \\ &= H^T(t) [C^T(t) + C(t)] H(t) \\ &= 0. \end{aligned}$$

O halde,  $H^T(t)H(t)$  sabittir. Böylece,  $H^T(t_0)H(t_0) = I_n = H^T(t)H(t)$  olur ve  $H(t)$  ortogonaldir.

$H(t) = (\zeta_1(t), \dots, \zeta_{n-1}(t), \mu(t))^T$  olsun. Burada  $\frac{d}{dt}(\det H(t)) = 0$  olduğundan,  $\det H(t) = \det H(t_0) = \det I_n = 1$  bulunur. Bu durumda,  $\mu(t) = \zeta_1(t) \wedge \dots \wedge \zeta_{n-1}(t)$  yazılır.  $\gamma'(t) = \alpha(t)\mu(t)$ ,  $\gamma(t_0) = d$  başlangıç değer problemi göz önüne alınsın. Buna göre lineer diferansiyel denklem sisteminin çözümünün varlığı ve tekliği ile  $\gamma(t)$  çözümü vardır. Böylece,  $(\gamma, \zeta) : I \rightarrow \mathbb{R}^n \times \Delta_{n-1}$  olmak üzere,  $(c_{ij}, \alpha)$  eğrilikli  $(\gamma, \zeta)$  çatılandırılmış eğrisi vardır.  $\square$

Teklik teoreminin ispatı için aşağıdaki iki yardımcı teorem kullanılır.

**Yardımcı Teorem 4.5.**  $(\gamma, \zeta)$  ve  $(\tilde{\gamma}, \tilde{\zeta})$  çatılandırılmış eğrileri kongruent olsun. Bu eğrilerin eğrilikleri de eşittir (Honda ve Takahashi, 2016).

*İspat.*  $(\gamma, \zeta)$  ve  $(\tilde{\gamma}, \tilde{\zeta})$  çatılandırılmış eğrileri kongruent olduğundan,  $\tilde{\gamma}(t) = D(\gamma(t)) + d$ ,  $\tilde{\zeta}(t) = D(\zeta(t))$  olacak şekilde  $D \in SO(n)$  matrisi ve  $d \in \mathbb{R}^n$  sabit vektörü vardır.  $\mu$  vektörünün tanımından  $\tilde{\mu}(t) = D(\mu(t))$  eşitliği yazılır. Doğrudan hesaplamayla,

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{ij}(t) &= \langle \tilde{\zeta}'_i(t), \tilde{\zeta}_j(t) \rangle \\ &= \langle D(\zeta'_i(t)), D(\zeta_j(t)) \rangle \\ &= \langle \zeta'_i(t), \zeta_j(t) \rangle \\ &= c_{ij}(t) \end{aligned}$$

bulunur.  $d$  sabit vektör olduğundan,

$$\tilde{\gamma}'(t) = D(\gamma'(t)) = D(\alpha(t)\mu(t)) = \alpha(t)D(\mu(t)) = \alpha(t)\tilde{\mu}(t)$$

yazılır. Böylece,  $c_{ij}(t) = \tilde{c}_{ij}(t)$  ve  $\alpha(t) = \tilde{\alpha}(t)$  elde edilir.  $\square$

**Yardımcı Teorem 4.6.**  $(\gamma, \zeta) : I \rightarrow \mathbb{R}^n \times \Delta_{n-1}$  ve  $(\tilde{\gamma}, \tilde{\zeta}) : I \rightarrow \mathbb{R}^n \times \Delta_{n-1}$  aynı eğriliklere sahip çatılandırılmış eğriler olsun.  $(\gamma(t_0), \zeta(t_0)) = (\tilde{\gamma}(t_0), \tilde{\zeta}(t_0))$  olacak şekilde  $t = t_0$  parametresi varsa  $(\gamma, \zeta)$  ve  $(\tilde{\gamma}, \tilde{\zeta})$  eştir (Honda ve Takahashi, 2016).

*İspat.*  $\zeta_n(t) = \mu(t)$  olduğu varsayalım.

$$\begin{aligned} \phi : I &\rightarrow \mathbb{R}, \\ t &\mapsto \phi(t) = \sum_{i=1}^n \langle \zeta_i(t), \tilde{\zeta}_i(t) \rangle \end{aligned}$$

olacak şekilde bir düzgün fonksiyon tanımlansın.  $c_{ij}(t) = \tilde{c}_{ij}(t)$  ve  $c_{ij}(t) = -c_{ji}(t)$  olduğundan,

$$\begin{aligned} \phi'(t) &= \sum_{i=1}^n \left( \langle \zeta_i'(t), \tilde{\zeta}_i(t) \rangle + \langle \zeta_i(t), \tilde{\zeta}_i'(t) \rangle \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left\{ \left\langle \sum_{j=1}^n c_{ij}(t) \zeta_j(t), \tilde{\zeta}_i(t) \right\rangle + \left\langle \zeta_i(t), \sum_{j=1}^n \tilde{c}_{ij}(t) \tilde{\zeta}_j(t) \right\rangle \right\} \\ &= \sum_{i=1}^n \left\{ c_{i1}(t) \langle \zeta_1(t), \tilde{\zeta}_i(t) \rangle + c_{i2}(t) \langle \zeta_2(t), \tilde{\zeta}_i(t) \rangle + \cdots + c_{in}(t) \langle \zeta_n(t), \tilde{\zeta}_i(t) \rangle \right\} \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \left\{ c_{i1}(t) \langle \zeta_i(t), \tilde{\zeta}_1(t) \rangle + c_{i2}(t) \langle \zeta_i(t), \tilde{\zeta}_2(t) \rangle + \cdots + c_{in}(t) \langle \zeta_i(t), \tilde{\zeta}_n(t) \rangle \right\} \\ &= c_{11}(t) \langle \zeta_1(t), \tilde{\zeta}_1(t) \rangle + c_{21}(t) \langle \zeta_1(t), \tilde{\zeta}_2(t) \rangle + \cdots + c_{n1}(t) \langle \zeta_1(t), \tilde{\zeta}_n(t) \rangle \\ &\quad + c_{12}(t) \langle \zeta_2(t), \tilde{\zeta}_1(t) \rangle + c_{22}(t) \langle \zeta_2(t), \tilde{\zeta}_2(t) \rangle + \cdots + c_{n2}(t) \langle \zeta_2(t), \tilde{\zeta}_n(t) \rangle \\ &\quad \vdots \\ &\quad + c_{1n}(t) \langle \zeta_n(t), \tilde{\zeta}_1(t) \rangle + c_{2n}(t) \langle \zeta_n(t), \tilde{\zeta}_2(t) \rangle + \cdots + c_{nn}(t) \langle \zeta_n(t), \tilde{\zeta}_n(t) \rangle \\ &\quad + c_{11}(t) \langle \zeta_1(t), \tilde{\zeta}_1(t) \rangle + c_{21}(t) \langle \zeta_2(t), \tilde{\zeta}_1(t) \rangle + \cdots + c_{n1}(t) \langle \zeta_n(t), \tilde{\zeta}_1(t) \rangle \\ &\quad + c_{12}(t) \langle \zeta_1(t), \tilde{\zeta}_2(t) \rangle + c_{22}(t) \langle \zeta_2(t), \tilde{\zeta}_2(t) \rangle + \cdots + c_{n2}(t) \langle \zeta_n(t), \tilde{\zeta}_2(t) \rangle \\ &\quad \vdots \\ &\quad + c_{1n}(t) \langle \zeta_1(t), \tilde{\zeta}_n(t) \rangle + c_{2n}(t) \langle \zeta_2(t), \tilde{\zeta}_n(t) \rangle + \cdots + c_{nn}(t) \langle \zeta_n(t), \tilde{\zeta}_n(t) \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi'(t) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (c_{ij}(t) + c_{ji}(t)) \langle \zeta_i(t), \tilde{\zeta}_j(t) \rangle \\ &= 0.\end{aligned}$$

Böylece,  $\phi$  fonksiyonu sabittir.  $\zeta(t_0) = \tilde{\zeta}(t_0)$  olduğundan,  $\mu(t_0) = \tilde{\mu}(t_0)$  bulunur. Buna göre,  $\phi(t_0) = n$  ve  $\phi$  fonksiyonu  $n$  değerli sabit fonksiyondur.

Cauchy-Schwarz eşitsizliği ile,

$$\langle \zeta_i(t), \tilde{\zeta}_i(t) \rangle \leq \| \zeta_i(t) \| \cdot \| \tilde{\zeta}_i(t) \| = 1$$

elde edilir. Bu eşitsizliklerden bir tanesi bile 1 den küçük olursa,  $\phi(t)$  fonksiyonunun değeri  $n$  sayısından daha küçük olur. Böylece,  $\phi(t_0) = n$  olması için  $\langle \zeta_i(t), \tilde{\zeta}_i(t) \rangle = 1$  olmalıdır. Bu durumda,

$$\begin{aligned}\| \zeta_i(t) - \tilde{\zeta}_i(t) \|^2 &= \langle \zeta_i(t) - \tilde{\zeta}_i(t), \zeta_i(t) - \tilde{\zeta}_i(t) \rangle \\ &= \langle \zeta_i(t), \zeta_i(t) \rangle - 2\langle \zeta_i(t), \tilde{\zeta}_i(t) \rangle + \langle \tilde{\zeta}_i(t), \tilde{\zeta}_i(t) \rangle \\ &= 0\end{aligned}$$

bulunur. Böylece,  $\zeta_i(t) = \tilde{\zeta}_i(t)$  yazılır. Ayrıca,  $\gamma'(t) = \alpha(t)\mu(t)$ ,  $\tilde{\gamma}'(t) = \tilde{\alpha}(t)\tilde{\mu}(t)$  olduğundan ve  $\alpha(t) = \tilde{\alpha}(t)$  eşitliğinden,  $\frac{d}{dt}(\gamma(t) - \tilde{\gamma}(t)) = 0$  olup  $\gamma(t) - \tilde{\gamma}(t)$  sabittir. Bu durumda,  $\gamma(t_0) = \tilde{\gamma}(t_0)$  olması ve  $\gamma(t) - \tilde{\gamma}(t)$  ifadesinin sabit olması her  $t \in I$  için  $\gamma(t) = \tilde{\gamma}(t)$  ile mümkündür.  $\square$

**Teorem 4.7.** (Teklik Teoremi)  $(\gamma, \zeta) : I \rightarrow \mathbb{R}^n \times \Delta_{n-1}$  ve  $(\tilde{\gamma}, \tilde{\zeta}) : I \rightarrow \mathbb{R}^n \times \Delta_{n-1}$  çatılandırılmış eğrileri aynı eğriliklere sahip olsun.  $(\gamma, \zeta)$  ve  $(\tilde{\gamma}, \tilde{\zeta})$  eğrileri kongruenttir (Honda ve Takahashi, 2016).

*İspat.*  $t = t_0$  için  $D \in SO(n)$  matris ve  $d \in \mathbb{R}^n$  sabit vektör olmak üzere,  $\tilde{\gamma}(t_0) = D(\gamma(t_0)) + d$  ve  $\tilde{\zeta}(t_0) = D(\zeta(t_0))$  olduğu varsayalım. Yardımcı Teorem 4.5 göz önüne alındığında,  $(\gamma(t), \zeta(t))$  ve  $(D(\gamma(t)) + d, D(\zeta(t)))$  çatılandırılmış eğrilerin eğrilikleri eşittir. Yardımcı Teorem 4.6 kullanıldığında,  $\tilde{\gamma}(t) = D(\gamma(t)) + d$  ve  $\tilde{\zeta}(t) = D(\zeta(t))$  bulunur. Böylece,  $(\gamma, \zeta)$  ve  $(\tilde{\gamma}, \tilde{\zeta})$  eğrileri kongruenttir.  $\square$

## 4.2. 3-Boyutlu Öklid Uzayında Çatılandırılmış Eğriler

$\mathbb{R}^3$  Öklid 3-uzayında birim küre  $\mathbb{S}^2 = \{v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3 \mid v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 1\}$  olmak üzere  $\Delta_2 = \{(u, v) \in \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2 \mid \langle u, v \rangle = 0\}$  ile verilsin.

**Tanım 4.8.**  $(\gamma, \zeta_1, \zeta_2) : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta_2$  olmak üzere, her  $t \in I$  için,

$$\langle \gamma'(t), \zeta_1(t) \rangle = \langle \gamma'(t), \zeta_2(t) \rangle = 0$$

eşitliği varsa  $(\gamma, \zeta_1, \zeta_2)$  ifadesine 3-boyutlu Öklid uzayında çatılandırılmış eğri denir. Burada  $\gamma'(t)$ ,  $\gamma$  eğrisinin  $t$  parametresine göre türevini gösterir.  $(\gamma, \zeta_1, \zeta_2)$  bir daldırma ise  $(\gamma, \zeta_1, \zeta_2)$  ifadesine çatılandırılmış daldırma denir.  $(\gamma, \zeta_1, \zeta_2)$  ifadesini çatılandırılmış eğri yapacak şekilde  $(\zeta_1, \zeta_2) : I \rightarrow \Delta_2$  varsa, o zaman  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  eğrisine çatılandırılmış taban eğri denir (Honda ve Takahashi, 2016).

$(\gamma, \zeta_1, \zeta_2)$  bir çatılandırılmış eğri ve  $\mu(t) = \zeta_1(t) \wedge \zeta_2(t)$  olsun. Bu durumda  $\{\zeta_1(t), \zeta_2(t), \mu(t)\}$ ,  $\gamma(t)$  boyunca hareketli bir çatı olur ve Serret-Frenet formülleri aşağıdaki gibi verilir:

$$\begin{bmatrix} \zeta_1'(t) \\ \zeta_2'(t) \\ \mu'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \ell_1(t) & \ell_2(t) \\ -\ell_1(t) & 0 & \ell_3(t) \\ -\ell_2(t) & -\ell_3(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_1(t) \\ \zeta_2(t) \\ \mu(t) \end{bmatrix}.$$

Buna göre,

$$\ell_1(t) = \langle \zeta_1'(t), \zeta_2(t) \rangle,$$

$$\ell_2(t) = \langle \zeta_1'(t), \mu(t) \rangle,$$

$$\ell_3(t) = \langle \zeta_2'(t), \mu(t) \rangle,$$

$$\alpha(t) = \mu(t)\gamma'(t)$$

olup  $(\ell_1, \ell_2, \ell_3, \alpha) : I \rightarrow \mathbb{R}^4$  düzgün dönüşümü  $(\gamma, \zeta_1, \zeta_2)$  çatılandırılmış eğrisinin eğriliği olarak isimlendirilir.  $t_0$  noktası,  $(\gamma, \zeta_1, \zeta_2)$  çatılandırılmış eğrinin singüler noktasıdır gerek ve yeter koşul  $\alpha(t_0) = 0$  biçimindedir.

**Örnek 4.9.** Çatılandırılmış eğrilerin en temel örneği, lineer bağımsızlık koşulunu sağlayan regüler eğilerdir.  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  lineer bağımsızlık koşulunu sağlayan (yani  $\gamma'(t)$  ve  $\gamma''(t)$  lineer bağımsız vektörler) bir regüler eğri olsun.  $\zeta_1(t) = N(t)$ ,  $\zeta_2(t) = B(t)$  olarak alınırsa,  $(\gamma, \zeta_1, \zeta_2) : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta_2$  çatılandırılmış eğri ve  $\mu(t) = \zeta_1(t) \wedge \zeta_2(t) = T(t)$  biçiminde yazılır. Burada; T teğet vektör, N normal vektör, B binormal vektör alanlar olmak üzere Teorem 3.33 deki birim hızlı olmayan eğrilerdeki gibi tanımlanırlar (Honda ve Takahashi, 2016).

### 4.3. 3-Boyutlu Öklid Uzayında Çatılandırılmış Daldırmalar

$(\gamma, \zeta_1, \zeta_2) : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta_2$  ve  $(\tilde{\gamma}, \tilde{\zeta}_1, \tilde{\zeta}_2) : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta_2$  çatılandırılmış eğriler,  $(\ell_1, \ell_2, \ell_3, \alpha)$  ve  $(\tilde{\ell}_1, \tilde{\ell}_2, \tilde{\ell}_3, \tilde{\alpha})$  eğrilikler olsun.  $s : \tilde{I} \rightarrow I$  her noktada pozitif türeve sahip örten ve düzgün bir fonksiyon olmak üzere böyle bir s parametre değişimi vardır. Buna göre,  $(\ell_1, \ell_2, \ell_3, \alpha)$  ve  $(\tilde{\ell}_1, \tilde{\ell}_2, \tilde{\ell}_3, \tilde{\alpha})$  eğrilikleri  $s : \tilde{I} \rightarrow I$  parametre değişimine göre parametrik olarak kongruent eğriler olsun. Bu durumda, her  $t \in \tilde{I}$  için  $(\tilde{\gamma}(t), \tilde{\zeta}_1(t), \tilde{\zeta}_2(t)) = (\gamma(s(t)), \zeta_1(s(t)), \zeta_2(s(t)))$  yazılır. Kongruent eğrilerin eğrilikleri de eşit olduğundan

$$\tilde{\ell}_1(t) = \ell_1(s(t)),$$

$$\tilde{\ell}_2(t) = \ell_2(s(t)),$$

$$\tilde{\ell}_3(t) = \ell_3(s(t)),$$

$$\tilde{\alpha}(t) = \alpha(s(t))$$

eşitlikleri vardır. Eğriliklerin her iki tarafının türevi alındığında,

$$\tilde{\ell}'_1(t) = \ell_1(s(t))s'(t),$$

$$\tilde{\ell}'_2(t) = \ell_2(s(t))s'(t),$$

$$\tilde{\ell}'_3(t) = \ell_3(s(t))s'(t),$$

$$\tilde{\alpha}'(t) = \alpha(s(t))s'(t)$$

bulunur. Böylece eğriliğin parametrizasyona bağlı olduğu görülür. Buna göre, her  $t \in I$  için,  $(\ell_1(t), \ell_2(t), \ell_3(t), \alpha(t)) \neq (0, 0, 0, 0)$  gerek ve yeter koşul  $(\gamma, \zeta_1, \zeta_2)$  çatılandırılmış daldırmadır.

Genelde,  $\gamma$  singüler noktalara sahip bir çatılandırılmış taban eğri olduğundan yay parametrelili olmadığı düşünülür. Ancak  $(\gamma, \zeta_1, \zeta_2)$  bir daldırma olursa,  $(\gamma, \zeta_1, \zeta_2)$  çatılandırılmış daldırması için yay parametresi oluşturulabilir.

$t$  parametresinde çatılandırılmış daldırmanın  $s(t)$  hızı,  $t$  parametresinde teğet vektörün uzunluğu olarak tanımlanır. Yani,

$$s(t) = \|(\gamma'(t), \zeta_1'(t), \zeta_2'(t))\| = \sqrt{\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle + \langle \zeta_1'(t), \zeta_1'(t) \rangle + \langle \zeta_2'(t), \zeta_2'(t) \rangle}$$

biçiminde ifade edilir. Buna göre a,b skaler sayıları için  $t_0, t_1 \in I$  olmak üzere  $t = t_0$  dan  $t = t_1$  e yay uzunluğu

$$L(\gamma, \zeta) = \int_{t_0}^{t_1} s(t) dt$$

şeklindedir.

$$\begin{aligned} \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle &= \alpha^2(t), \\ \langle \zeta_1'(t), \zeta_1'(t) \rangle &= \ell_1^2(t) + \ell_2^2(t), \\ \langle \zeta_2'(t), \zeta_2'(t) \rangle &= \ell_1^2(t) + \ell_3^2(t) \end{aligned}$$

olmak üzere,  $s(t) = \sqrt{\alpha^2(t) + \ell_1^2(t) + \ell_2^2(t) + \ell_1^2(t) + \ell_3^2(t)}$  biçimindedir. Bunlardan biri sıfırdan farklı olursa,  $s(t) \neq 0$  olur ve yay uzunluğu sıfırdan farklı olur. Böylece,  $(\ell_1(t), \ell_2(t), \ell_3(t), \alpha(t)) \neq (0, 0, 0, 0)$  ise  $(\gamma, \zeta_1, \zeta_2)$  çatılandırılmış eğri çatılandırılmış daldırmadır. Bu durumda eğrinin birim hızlı olmasından söz edilebilir. Buna göre aşağıdaki önerme verilir.

**Önerme 4.10.**  $(\gamma, \zeta_1, \zeta_2)$  daldırması bir çatılandırılmış daldırma ve  $t_0 \in I$  olsun.  $t(0) = t_0$  ve  $t'(s) > 0$  olmak üzere parametre değişimi altında  $(\gamma, \zeta_1, \zeta_2)$  daldırması  $(\tilde{\gamma}, \tilde{\zeta}_1, \tilde{\zeta}_2) : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta_2$  birim hızlı eğrisine parametrik olarak denktir (Honda ve Takahashi, 2016).

$(\gamma, \zeta_1, \zeta_2)$  çatılandırılmış eğrisi için,  $\zeta_1(t)$  ve  $\zeta_2(t)$  tarafından gerilen düzlem  $\gamma(t)$  noktasında  $\gamma$  eğrisinin normal düzlemidir. Dolayısıyla, bu vektörleri döndürerek başka çatılar elde edilebilir. Böylece çatılandırılmış eğriler kullanılarak çatılandırılmış

daldırmalar bulunabilir. Her  $t \in I$  için  $\ell_2^2(t) + \ell_3^2(t) \neq 0$  olmak üzere,

$$\begin{bmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\ell_2^2(t) + \ell_3^2(t)}} \begin{bmatrix} \ell_2(t) & \ell_3(t) \\ -\ell_3(t) & \ell_2(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_1(t) \\ \zeta_2(t) \end{bmatrix}$$

tanımlandığında  $(\gamma, \eta_1, \eta_2) : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta_2$  bir çatılandırılmış daldırma'dır. Burada  $\mu(t) = \eta_1(t) \wedge \eta_2(t)$  ile verilir. Buna göre  $(\gamma, \eta_1, \eta_2)$  çatılandırılmış daldırmanın Serret-Frenet formülleri aşağıdaki gibi yazılır:

$$\begin{bmatrix} \eta_1'(t) \\ \eta_2'(t) \\ \mu'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & R(t) & S(t) \\ -R(t) & 0 & 0 \\ -S(t) & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \\ \mu(t) \end{bmatrix}, \quad \gamma'(t) = \alpha(t)\mu(t).$$

Burada,

$$R(t) = \frac{\ell_2(t)\ell_3'(t) - \ell_2'(t)\ell_3(t) + \ell_1(t)(\ell_2^2(t) + \ell_3^2(t))}{\ell_2^2(t) + \ell_3^2(t)}, \quad S(t) = \sqrt{\ell_2^2(t) + \ell_3^2(t)}$$

biçimindedir.  $(R, S, 0, \alpha) : I \rightarrow \mathbb{R}^4$  dönüşümü  $(\gamma, \eta_1, \eta_2)$  çatılandırılmış daldırmasının eğriliğidir.

**Örnek 4.11.** Regüler bir eğrinin birim asli normal vektörü ve birim binormal vektörü  $\zeta_1(t)$  ve  $\zeta_2(t)$  olarak alındığında regüler bir eğri çatılandırılmış taban eğri olur. Döndürme ile  $\eta_1(t) = -\zeta_1(t)$ ,  $\eta_2(t) = -\zeta_2(t)$  biçiminde yazılır. Böylece,  $\{\eta_1(t), \eta_2(t), \mu(t)\}$ ;  $\gamma(t)$  boyunca Frenet tipi çatı olarak isimlendirilir. Buna göre  $\gamma(t)$  noktasında  $\mu(t)$  ve  $\eta_1(t)$  tarafından gerilen düzlem oskütatör düzlem,  $\eta_1(t)$  ve  $\eta_2(t)$  tarafından gerilen düzlem normal düzlem olarak ifade edilir.

#### 4.4. Öklid 3-Uzayında Çatılandırılmış Daldırmaların Pedal ve Contrapedal Eğrileri

$(\gamma, \eta_1, \eta_2) : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta_2$  bir çatılandırılmış daldırma ve  $p \in \mathbb{R}^3$  sabit bir nokta olsun.  $\gamma$  çatılandırılmış taban eğrisinin her bir oskütatör düzlemi için, düzlem üzerinde  $p$  noktasının ortogonal izdüşüm noktası verildiğinde bir eğri oluşur. Benzer şekilde,

oskulator düzlem yerine normal düzlemi alındığında da başka bir eğri oluşur. Buna göre aşağıdaki tanım verilir.

**Tanım 4.12.**  $(\gamma, \eta_1, \eta_2) : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta_2$  bir çatılandırılmış daldırma ve  $p \in \mathbb{R}^3$  sabit bir nokta olsun.

1)  $(\gamma, \eta_1, \eta_2)$  çatılandırılmış daldırmanın  $Pe_{\gamma,p} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  pedal eğrisi,

$$Pe_{\gamma,p}(t) = p - \langle p - \gamma(t), \eta_2(t) \rangle \eta_2(t) \quad (4.2)$$

2)  $(\gamma, \eta_1, \eta_2)$  çatılandırılmış daldırmanın  $CPe_{\gamma,p} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  contrapedal eğrisi,

$$CPe_{\gamma,p}(t) = p - \langle p - \gamma(t), \mu(t) \rangle \mu(t) \quad (4.3)$$

biçimindedir (Yao vd., 2023).

**Not 4.13.**  $(\gamma, \zeta_1, \zeta_2)$  çatılandırılmış eğrisi için de contrapedal eğri, (4.3) denklemindeki gibi tanımlanır.

**Not 4.14.**  $Pe_{\gamma,p}(t)$  ve  $CPe_{\gamma,p}(t)$  parametre değişimi altında invaryant olup  $\gamma$  eğrisinin çatısının seçiminden bağımsızdır.

**Örnek 4.15.**  $(\gamma, \eta_1, \eta_2) : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta_2$  çatılandırılmış daldırma ve  $p \in \mathbb{R}^3$  sabit bir nokta olsun. Buna göre

$$\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t, \cos 2t),$$

$$\eta_1(t) = (-\sin t, -\cos t, 0),$$

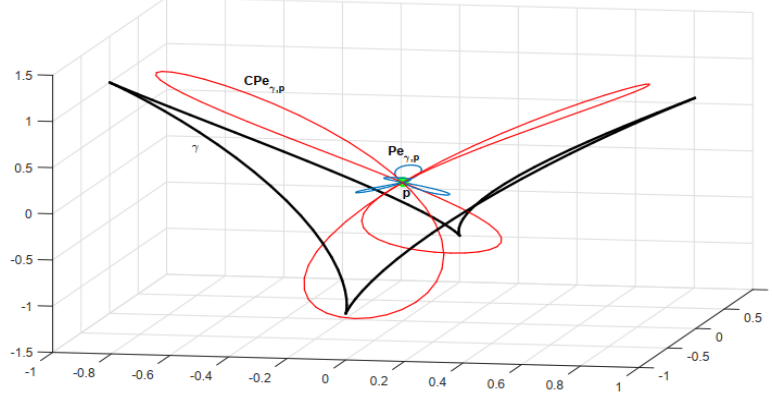
$$\eta_2(t) = \frac{1}{5}(-4\cos t, 4\sin t, 3),$$

olmak üzere  $(\gamma, \eta_1, \eta_2)$  çatılandırılmış daldırmasında  $\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 0, 5\sin t \cos t\right)$  eğriliği gösterebilir.  $p \in \mathbb{R}^3$  sabit noktası için  $(\gamma, \eta_1, \eta_2)$  çatılandırılmış daldırmasının pedal ve contrapedal eğrileri

$$Pe_{\gamma,p}(t) = -\frac{1}{25}\cos 2t(-4\cos t, 4\sin t, 3),$$

$$CPe_{\gamma,p} = -\frac{7}{25}\cos 2t(-3\cos t, 3\sin t, 4)$$

biçiminde Şekil 4.1 deki gibi verilir (Yao vd., 2023).



Şekil 4.1. Astroid eğrisi(siyah), astroid eğrisinin pedal eğrisi(mavi) ve astroid eğrisinin contrapedal eğrisi (kırmızı) (Yao vd., 2023).

Çatılandırılmış daldırma ve sabit nokta için verilen pedal ve contrapedal eğrinin çatılandırılmış taban eğri olup olmaması sabit noktanın geometrik yerine bağlıdır.

**Teorem 4.16.**  $(\gamma, \eta_1, \eta_2) : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta_2$  bir çatılandırılmış daldırma ve  $(R, S, 0, \alpha)$ ,  $(\gamma, \eta_1, \eta_2)$  çatılandırılmış daldırmanın eğrilikleri olsun.  $p \in \mathbb{R}^3$  sabit noktası için,  
1)  $(\rho, \rho_1, \rho_2) : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  düzgün fonksiyonlar olmak üzere,

$$\langle (p - \gamma(t)), \eta_1(t) \rangle = \rho(t)\rho_1(t),$$

$$\langle (p - \gamma(t)), \eta_2(t) \rangle = \rho(t)\rho_2(t),$$

$$\rho_1^2(t) + \rho_2^2(t) \neq 0$$

koşulları sağlanıyorsa,  $Pe_{\gamma,p}$  pedal eğrisi bir çatılandırılmış taban eğridir.

2)  $(\lambda, \lambda_1, \lambda_2) : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  düzgün fonksiyonlar olmak üzere,

$$S(t)\langle (p - \gamma(t)), \mu(t) \rangle = \lambda(t)\lambda_1(t),$$

$$\alpha(t) + S(t)\langle (p - \gamma(t)), \eta_1(t) \rangle = \lambda(t)\lambda_2(t),$$

$$\lambda_1^2(t) + \lambda_2^2(t) \neq 0$$

koşulları sağlanıyorsa,  $CPe_{\gamma,p}$  contrapedal eğrisi bir çatılandırılmış taban eğridir (Yao vd., 2023).

*İspat.*

1) Pedal eğri tanımından (4.2) denkleminin türevi alınırsa,

$$\begin{aligned}
Pe'_{\gamma,p}(t) &= [p - \langle p - \gamma(t), \eta_2(t) \rangle \eta_2(t)]' \\
&= - \langle -\gamma'(t), \eta_2(t) \rangle \eta_2(t) - \langle p - \gamma(t), \eta_2'(t) \rangle \eta_2(t) - \langle p - \gamma(t), \eta_2(t) \rangle \eta_2'(t) \\
&= \langle \alpha(t)\mu(t), \eta_2(t) \rangle \eta_2(t) - \langle p - \gamma(t), -R(t)\eta_1(t) \rangle \eta_2(t) \\
&\quad - \langle p - \gamma(t), \eta_2(t) \rangle (-R(t)\eta_1(t)) \\
&= \langle p - \gamma(t), R(t)\eta_1(t) \rangle \eta_2(t) + \langle p - \gamma(t), \eta_2(t) \rangle R(t)\eta_1(t) \\
&= R(t) [\langle p - \gamma(t), \eta_1(t) \rangle \eta_2(t) + \langle p - \gamma(t), \eta_2(t) \rangle \eta_1(t)] \\
&= R(t)\rho(t) [\rho_2(t)\eta_1(t) + \rho_1(t)\eta_2(t)]
\end{aligned}$$

bulunur.  $Pe_{\gamma,p}(t)$  pedal eğrisinin çatılandırılmış taban eğri olması için,  $(Pe_{\gamma,p}, \widehat{\zeta}_1, \widehat{\zeta}_2)$  çatılandırılmış eğri olmalıdır. Bunun için,

$$\left\langle (Pe_{\gamma,p}(t))', \widehat{\zeta}_1(t) \right\rangle = \left\langle (Pe_{\gamma,p}(t))', \widehat{\zeta}_2(t) \right\rangle = 0$$

olacak şekilde,  $Pe_{\gamma,p}(t)$  pedal eğrisi için  $\widehat{\zeta}_1(t)$  ve  $\widehat{\zeta}_2(t)$  bulunmalıdır.  $\rho_1^2(t) + \rho_2^2(t) \neq 0$  olduğundan,

$$\begin{aligned}
\widehat{\zeta}_1(t) &= \mu(t), \\
\widehat{\zeta}_2(t) &= \frac{\rho_1(t)\eta_1(t) - \rho_2(t)\eta_2(t)}{\sqrt{\rho_1^2(t) + \rho_2^2(t)}}
\end{aligned}$$

biçiminde alındığında  $(Pe_{\gamma,p}, \widehat{\zeta}_1, \widehat{\zeta}_2) : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta_2$  çatılandırılmış eğridir.

2) (1) in ispatına benzer olarak,

$$\begin{aligned}
\overline{\zeta}_1(t) &= \eta_2(t), \\
\overline{\zeta}_2(t) &= \frac{\lambda_1(t)\zeta(t) - \lambda_2(t)\eta_1(t)}{\sqrt{\lambda_1^2(t) + \lambda_2^2(t)}}
\end{aligned}$$

biçiminde alındığında  $(CPe_{\gamma,p}, \overline{\zeta}_1, \overline{\zeta}_2) : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta_2$  çatılandırılmış eğridir. □

Teorem (4.16) de elde edilen pedal eğrinin ve contrapedal eğrinin çatıları kullanılarak  $(Pe_{\gamma,p}, \widehat{\zeta}_1, \widehat{\zeta}_2)$  pedal eğrisinin ve  $(CPe_{\gamma,p}, \overline{\zeta}_1, \overline{\zeta}_2)$  contrapedal eğrisinin eğrilikleri aşağıdaki önerme ile verilir.

**Önerme 4.17.**  $(\gamma, \eta_1, \eta_2) : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta_2$  çatılandırılmış daldırma olsun.  $(\gamma, \eta_1, \eta_2)$  çatılandırılmış daldırmanın eğriliği  $(R, S, 0, \alpha)$  ve sabit bir  $p \in \mathbb{R}^3$  noktası verilsin.  $\widehat{\zeta}_1, \widehat{\zeta}_2, \overline{\zeta}_1, \overline{\zeta}_2$  Teorem (4.16) de ifade edildiği gibi olsun.

1)  $(Pe_{\gamma,p}, \widehat{\zeta}_1, \widehat{\zeta}_2)$  pedal eğrisinin eğriliği  $(\ell_1^p, \ell_2^p, \ell_3^p, \alpha^p)$  biçimindedir. Burada,

$$\begin{aligned}\ell_1^p(t) &= -\frac{S(t)\rho_1(t)}{\sqrt{\rho_1^2(t) + \rho_2^2(t)}}, \\ \ell_2^p(t) &= -\frac{S(t)\rho_2(t)}{\sqrt{\rho_1^2(t) + \rho_2^2(t)}}, \\ \ell_3^p(t) &= R(t) + \frac{\rho_1'(t)\rho_2(t) - \rho_1(t)\rho_2'(t)}{\rho_1^2(t) + \rho_2^2(t)}, \\ \alpha^p(t) &= R(t)\rho(t)\sqrt{\rho_1^2(t) + \rho_2^2(t)}.\end{aligned}$$

2)  $(CPe_{\gamma,p}, \overline{\zeta}_1, \overline{\zeta}_2)$  contrapedal eğrisinin eğriliği  $(\ell_1^c, \ell_2^c, \ell_3^c, \alpha^c)$  biçimindedir. Burada,

$$\begin{aligned}\ell_1^c(t) &= \frac{R(t)\lambda_2(t)}{\sqrt{\lambda_1^2(t) + \lambda_2^2(t)}}, \\ \ell_2^c(t) &= -\frac{R(t)\lambda_1(t)}{\sqrt{\lambda_1^2(t) + \lambda_2^2(t)}}, \\ \ell_3^c(t) &= -S(t) + \frac{\lambda_1'(t)\lambda_2(t) - \lambda_1(t)\lambda_2'(t)}{\lambda_1^2(t) + \lambda_2^2(t)}, \\ \alpha^c(t) &= \lambda(t)\sqrt{\lambda_1^2(t) + \lambda_2^2(t)}.\end{aligned}$$

(Yao vd., 2023)

*İspat.*

1)  $(Pe_{\gamma,p}, \widehat{\zeta}_1, \widehat{\zeta}_2)$  pedal eğrisinin çatı alanı  $\{\widehat{\zeta}_1, \widehat{\zeta}_2, \widehat{\mu}\}$  olmak üzere,  $\ell_1^p$  eğriliği  $\ell_1^p(t) = \langle \widehat{\zeta}_1'(t), \widehat{\zeta}_2(t) \rangle$  biçiminde tanımlanır. Buna göre,  $\widehat{\zeta}_1'(t) = \mu'(t) = -S(t)\eta_1(t)$

olduğundan

$$\begin{aligned}\ell_1^p(t) &= \left\langle -S(t)\eta_1(t), \frac{\rho_1(t)}{\sqrt{\rho_1^2(t) + \rho_2^2(t)}}\eta_1(t) - \frac{\rho_2(t)}{\sqrt{\rho_1^2(t) + \rho_2^2(t)}}\eta_2(t) \right\rangle \\ \ell_1^p(t) &= -\frac{S(t)\rho_1(t)}{\sqrt{\rho_1^2(t) + \rho_2^2(t)}}\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Buna göre

$$\begin{aligned}\widehat{\mu}(t) &= \widehat{\zeta}_1(t) \wedge \widehat{\zeta}_2(t) \\ &= \mu(t) \wedge \left( \frac{\rho_1(t)}{\sqrt{\rho_1^2(t) + \rho_2^2(t)}}\eta_1(t) - \frac{\rho_2(t)}{\sqrt{\rho_1^2(t) + \rho_2^2(t)}}\eta_2(t) \right) \\ &= \frac{\rho_1(t)}{\sqrt{\rho_1^2(t) + \rho_2^2(t)}}\eta_2(t) + \frac{\rho_2(t)}{\sqrt{\rho_1^2(t) + \rho_2^2(t)}}\eta_1(t)\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\ell_2^p(t) &= \left\langle \widehat{\zeta}_1'(t), \widehat{\mu}(t) \right\rangle \\ &= \left\langle -S(t)\eta_1(t), \frac{\rho_1(t)}{\sqrt{\rho_1^2(t) + \rho_2^2(t)}}\eta_2(t) + \frac{\rho_2(t)}{\sqrt{\rho_1^2(t) + \rho_2^2(t)}}\eta_1(t) \right\rangle \\ &= -\frac{S(t)\rho_2(t)}{\sqrt{\rho_1^2(t) + \rho_2^2(t)}}\end{aligned}$$

elde edilir.  $(Pe_{\gamma,p}, \widehat{\zeta}_1, \widehat{\zeta}_2)$  pedal eğrisinin  $\ell_3^p$  eğriliği  $\ell_3^p(t) = \left\langle \widehat{\zeta}_2'(t), \widehat{\mu}(t) \right\rangle$  biçiminde tanımlanır. Buna göre  $\widehat{\zeta}_2(t)$  vektör alanının türevi alınırsa,

$$\begin{aligned}\widehat{\zeta}_2'(t) &= \left( \frac{\rho_1(t)}{\sqrt{\rho_1^2(t) + \rho_2^2(t)}} \right)' \eta_1(t) + \left( \frac{\rho_1(t)}{\sqrt{\rho_1^2(t) + \rho_2^2(t)}} \right) \eta_1'(t) \\ &\quad - \left( \frac{\rho_2(t)}{\sqrt{\rho_1^2(t) + \rho_2^2(t)}} \right)' \eta_2(t) - \left( \frac{\rho_2(t)}{\sqrt{\rho_1^2(t) + \rho_2^2(t)}} \right) \eta_2'(t) \\ &= \left[ \frac{\rho_1'(t)\sqrt{\rho_1^2(t) + \rho_2^2(t)} - \rho_1(t)\frac{\rho_1(t)\rho_1'(t) + \rho_2(t)\rho_2'(t)}{\sqrt{\rho_1^2(t) + \rho_2^2(t)}}}{\rho_1^2(t) + \rho_2^2(t)} \right] \eta_1(t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\rho_1(t)}{\sqrt{\rho_1^2(t) + \rho_2^2(t)}} [R(t)\eta_2(t) + S(t)\mu(t)] \\
& - \left[ \frac{\rho_2'(t)\sqrt{\rho_1^2(t) + \rho_2^2(t)} - \rho_2(t)\frac{\rho_1(t)\rho_1'(t) + \rho_2(t)\rho_2'(t)}{\sqrt{\rho_1^2(t) + \rho_2^2(t)}}}{\rho_1^2(t) + \rho_2^2(t)} \right] \eta_2(t) \\
& - \frac{\rho_2(t)}{\sqrt{\rho_1^2(t) + \rho_2^2(t)}} [-R(t)\eta_1(t)] \\
\widehat{\zeta}_2'(t) = & \left[ \frac{\rho_1'(t)\rho_1^2(t) + \rho_1'(t)\rho_2^2(t) - \rho_1^2(t)\rho_1'(t) - \rho_1(t)\rho_2(t)\rho_2'(t)}{(\rho_1^2(t) + \rho_2^2(t))^{3/2}} \right] \eta_1(t) \\
& + \left[ \frac{R(t)\rho_2(t)}{\sqrt{\rho_1^2(t) + \rho_2^2(t)}} \right] \eta_1(t) + \left[ \frac{R(t)\rho_1(t)}{\sqrt{\rho_1^2(t) + \rho_2^2(t)}} \right] \eta_2(t) \\
& - \left[ \frac{\rho_2'(t)\rho_1^2(t) + \rho_2'(t)\rho_2^2(t) - \rho_2(t)\rho_1(t)\rho_1'(t) - \rho_2^2(t)\rho_2'(t)}{(\rho_1^2(t) + \rho_2^2(t))^{3/2}} \right] \eta_2(t) \\
& + \frac{\rho_1(t)S(t)}{\sqrt{\rho_1^2(t) + \rho_2^2(t)}} \mu(t) \\
= & \left[ \frac{\rho_1'(t)\rho_2^2(t) - \rho_1(t)\rho_2(t)\rho_2'(t)}{(\rho_1^2(t) + \rho_2^2(t))^{3/2}} + \frac{R(t)\rho_2(t)}{\sqrt{\rho_1^2(t) + \rho_2^2(t)}} \right] \eta_1(t) \\
& + \left[ \frac{R(t)\rho_1(t)}{\sqrt{\rho_1^2(t) + \rho_2^2(t)}} - \frac{\rho_2'(t)\rho_1^2(t) - \rho_2(t)\rho_1(t)\rho_1'(t)}{(\rho_1^2(t) + \rho_2^2(t))^{3/2}} \right] \eta_2(t) \\
& + \frac{\rho_1(t)S(t)}{\sqrt{\rho_1^2(t) + \rho_2^2(t)}} \mu(t)
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$\begin{aligned}
\ell_3^p(t) & = \langle \widehat{\zeta}_2'(t), \widehat{\mu}(t) \rangle \\
& = \frac{\rho_1(t)}{\sqrt{\rho_1^2(t) + \rho_2^2(t)}} \left[ \frac{R(t)\rho_1(t)}{\sqrt{\rho_1^2(t) + \rho_2^2(t)}} - \frac{\rho_2'(t)\rho_1^2(t) - \rho_2(t)\rho_1(t)\rho_1'(t)}{(\rho_1^2(t) + \rho_2^2(t))^{3/2}} \right] \\
& + \frac{\rho_2(t)}{\sqrt{\rho_1^2(t) + \rho_2^2(t)}} \left[ \frac{\rho_1'(t)\rho_2^2(t) - \rho_1(t)\rho_2(t)\rho_2'(t)}{(\rho_1^2(t) + \rho_2^2(t))^{3/2}} + \frac{R(t)\rho_2(t)}{\sqrt{\rho_1^2(t) + \rho_2^2(t)}} \right] \\
& = \frac{R(t)\rho_1^2(t)}{\rho_1^2(t) + \rho_2^2(t)} - \frac{\rho_1^3(t)\rho_2'(t) - \rho_2(t)\rho_1^2(t)\rho_1'(t)}{(\rho_1^2(t) + \rho_2^2(t))^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\rho_2(t)\rho_1'(t)\rho_2^2(t) - \rho_1(t)\rho_2^2(t)\rho_2'(t)}{(\rho_1^2(t) + \rho_2^2(t))^2} + \frac{R(t)\rho_2^2(t)}{\rho_1^2(t) + \rho_2^2(t)} \\
\ell_3^p(t) & = R(t) + \frac{\rho_1'(t)\rho_2(t)(\rho_1^2(t) + \rho_2^2(t))}{(\rho_1^2(t) + \rho_2^2(t))^2} - \frac{\rho_1(t)\rho_2'(t)(\rho_1^2(t) + \rho_2^2(t))}{(\rho_1^2(t) + \rho_2^2(t))^2} \\
& = R(t) + \frac{\rho_1'(t)\rho_2(t) - \rho_1(t)\rho_2'(t)}{\rho_1^2(t) + \rho_2^2(t)}
\end{aligned}$$

biçiminde elde edilir. Son olarak  $\alpha^p(t)$  eğriliği de

$$\begin{aligned}
\alpha^p(t) & = \left\langle \widehat{\mu}(t), Pe'_{\gamma,p}(t) \right\rangle \\
& = \left\langle \frac{\rho_1(t)}{\sqrt{\rho_1^2(t) + \rho_2^2(t)}} \eta_2(t), R(t)\rho(t) [\rho_2(t)\eta_1(t) + \rho_1(t)\eta_2(t)] \right\rangle \\
& \quad + \left\langle \frac{\rho_2(t)}{\sqrt{\rho_1^2(t) + \rho_2^2(t)}} \eta_1(t), R(t)\rho(t) [\rho_2(t)\eta_1(t) + \rho_1(t)\eta_2(t)] \right\rangle \\
& = \frac{R(t)\rho(t)\rho_2^2(t)}{\sqrt{\rho_1^2(t) + \rho_2^2(t)}} + \frac{R(t)\rho(t)\rho_1^2(t)}{\sqrt{\rho_1^2(t) + \rho_2^2(t)}} \\
& = R(t)\rho(t)\sqrt{\rho_1^2(t) + \rho_2^2(t)}
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

2)  $(CPe_{\gamma,p}, \bar{\zeta}_1, \bar{\zeta}_2)$  contrapedal eğrisinin  $(\ell_1^c, \ell_2^c, \ell_3^c, \alpha^c)$  eğriliği için de benzer ispat yapılarak istenilen sonuç elde edilir.  $\square$

#### 4.5. Minkowski 3-Uzayında Spacelike (Uzaybenzer) Çatılandırılmış Daldırmaların Pedal ve Contrapedal Eğrileri

Bu bölümde spacelike çatılandırılmış daldırmalar ve özellikleri ele alınacaktır.

**Tanım 4.18.**  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  bir spacelike eğri olsun.  $(\gamma, \zeta_1, \zeta_2): I \rightarrow \mathbb{R}_1^3 \times \Delta_2$  olmak üzere, her  $t \in I$  için  $\langle \gamma'(t), \zeta_1(t) \rangle = 0$  ve  $\langle \gamma'(t), \zeta_2(t) \rangle = 0$  ise  $(\gamma, \zeta_1, \zeta_2)$  dönüşümüne spacelike çatılandırılmış eğri denir. Burada,  $\Delta_2 = \{(\zeta_1, \zeta_2) \in S_1^2 \times H_0^2 \mid \langle \zeta_1(t), \zeta_2(t) \rangle = 0\}$  veya  $\Delta_2 = \{(\zeta_1, \zeta_2) \in H_0^2 \times S_1^2 \mid \langle \zeta_1(t), \zeta_2(t) \rangle = 0\}$  biçimindedir (Li ve Pei, 2021).

**Tanım 4.19.**  $\gamma(t)$  eğrisine, spacelike çatılandırılmış taban eğri veya orjinal eğri denir (Li ve Pei, 2021).

$\mu(t)$  vektör alanı  $\mu(t) = \zeta_1(t) \wedge \zeta_2(t)$  biçiminde tanımlanan spacelike vektör alan olsun. Bu durumda,  $\gamma'(t) = \alpha(t)\mu(t)$  olacak şekilde düzgün bir fonksiyon bulunabilir. Ayrıca,  $t_0$  noktasında  $\gamma(t)$  spacelike çatılandırılmış taban eğrisi taban eğrisi singülerdir gerek ve yeter koşul  $\alpha(t_0) = 0$  biçimindedir.

**Not 4.20.** Çatı alanı oluşturan vektör alanlarının causal karakterine göre bir spacelike eğrinin üç çeşit çatı alanı vardır (Walrave, 2002). Ancak çalışmamızda sadece iki çeşit çatı alanı ele alınacaktır.

$\zeta_1(t)$  ve  $\zeta_2(t)$ , Tanım 4.18 deki özelliklere sahip vektör alanlar olsun.  $\zeta_1(t)$  vektör alanının işareti  $\langle \zeta_1(t), \zeta_1(t) \rangle = \text{sign}(\zeta_1(t)) = \delta$ ,  $\zeta_2(t)$  vektör alanının işareti  $\langle \zeta_2(t), \zeta_2(t) \rangle = -\text{sign}(\zeta_2(t)) = -\delta$  ile verilsin. Buna göre, spacelike çatılandırılmış eğriler için Frenet tipi formüller aşağıdaki gibi verilir:

$$\begin{bmatrix} \zeta_1'(t) \\ \zeta_2'(t) \\ \mu'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\delta l_1(t) & -l_2(t) \\ -\delta l_1(t) & 0 & l_3(t) \\ \delta l_2(t) & \delta l_3(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_1(t) \\ \zeta_2(t) \\ \mu(t) \end{bmatrix}$$

Burada

$$l_1(t) = \langle \zeta_1'(t), \zeta_2(t) \rangle,$$

$$l_2(t) = \langle \mu'(t), \zeta_1(t) \rangle,$$

$$l_3(t) = \langle \zeta_2'(t), \mu(t) \rangle,$$

$$\alpha(t) = \langle \gamma'(t), \mu(t) \rangle$$

biçiminde olup,  $(l_1(t), l_2(t), l_3(t), \alpha(t))$  fonksiyonlarına spacelike çatılandırılmış eğrinin eğrilikleri adı verilir. Buna göre spacelike çatılandırılmış eğriler için varlık ve teklik teoremleri aşağıdaki gibidir:

**Teorem 4.21.** (Varlık Teoremi)  $(l_1, l_2, l_3, \alpha) : I \rightarrow \mathbb{R}^4$  bir düzgün dönüşüm olsun. Eğriliği  $(l_1, l_2, l_3, \alpha)$  olacak şekilde bir  $(\gamma, \zeta_1, \zeta_2) : I \rightarrow \mathbb{R}_1^3 \times \Delta_2$  spacelike çatılandırılmış eğrisi vardır (Li ve Pei, 2021).

**Tanım 4.22.**  $(\gamma, \zeta_1, \zeta_2) : I \longrightarrow \mathbb{R}_1^3 \times \Delta_2$  ve  $(\tilde{\gamma}, \tilde{\zeta}_1, \tilde{\zeta}_2) : I \longrightarrow \mathbb{R}_1^3 \times \Delta_2$  biçiminde tanımlanan spacelike çatılandırılmış eğriler olsun. Bir D matrisi

$$D^T G D = G, \quad \det D = 1, \quad G = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

koşullarını sağlayan bir matris ve  $d \in \mathbb{R}_1^3$  sabit bir vektör olsun. Her  $t \in I$  ve  $i = 1, 2$  için  $\tilde{\gamma}(t) = D(\gamma(t)) + d$  ve  $\tilde{\zeta}_i(t) = D(\zeta_i(t))$  oluyorsa  $(\gamma, \zeta_1, \zeta_2)$  ve  $(\tilde{\gamma}, \tilde{\zeta}_1, \tilde{\zeta}_2)$ , Lorentz hareketi boyunca spacelike çatılandırılmış eğriler olarak kongruenttir denir (Li ve Pei, 2021).

**Teorem 4.23.** (Teklik Teoremi)  $(\gamma, \zeta_1, \zeta_2) : I \rightarrow \mathbb{R}_1^3 \times \Delta_2$ ,  $(\ell_1(t), \ell_2(t), \ell_3(t), \alpha(t))$  eğrilikli bir spacelike çatılandırılmış eğri ve  $(\tilde{\gamma}, \tilde{\zeta}_1, \tilde{\zeta}_2) : I \rightarrow \mathbb{R}_1^3 \times \Delta_2$ ,  $(\tilde{\ell}_1(t), \tilde{\ell}_2(t), \tilde{\ell}_3(t), \tilde{\alpha}(t))$  eğrilikli bir spacelike çatılandırılmış eğri olsun.  $(\gamma, \zeta_1, \zeta_2)$  ve  $(\tilde{\gamma}, \tilde{\zeta}_1, \tilde{\zeta}_2)$  eğrileri eş eğriler olsun. Bu durumda  $(\gamma, \zeta_1, \zeta_2)$  ve  $(\tilde{\gamma}, \tilde{\zeta}_1, \tilde{\zeta}_2)$ , Lorentz hareketi boyunca spacelike çatılandırılmış eğriler olarak kongruenttir (Li ve Pei, 2021).

Lorentz hareketine göre  $(\gamma, \zeta_1, \zeta_2)$  spacelike çatılandırılmış eğri, spacelike çatılandırılmış daldırma ise  $(\gamma, \zeta_1, \zeta_2)$  çatılandırılmış daldırma için yay-parametresi oluşturulmalıdır. Buna göre t parametresinde spacelike çatılandırılmış daldırmanın s(t) hızı, t deki teğet vektörün uzunluğu olarak tanımlanır. Yani,

$$s(t) = \| (\gamma'(t), \zeta_1'(t), \zeta_2'(t)) \| = \sqrt{|\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle + \langle \zeta_1'(t), \zeta_1'(t) \rangle + \langle \zeta_2'(t), \zeta_2'(t) \rangle|}$$

olduğundan

$$\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle = \langle \alpha(t)\mu(t), \alpha(t)\mu(t) \rangle = \alpha^2(t),$$

$$\langle \zeta_1'(t), \zeta_1'(t) \rangle = \langle -\delta\ell_1(t)\zeta_2(t) - \ell_2(t)\mu(t), -\delta\ell_1(t)\zeta_2(t) - \ell_2(t)\mu(t) \rangle = -\delta\ell_1^2(t) + \ell_2^2(t),$$

$$\langle \zeta_2'(t), \zeta_2'(t) \rangle = \langle -\delta\ell_1(t)\zeta_1(t) - \ell_3(t)\mu(t), -\delta\ell_1(t)\zeta_1(t) - \ell_3(t)\mu(t) \rangle = -\delta\ell_1^2(t) + \ell_3^2(t)$$

ifadeleri kullanılırsa

$$s(t) = \sqrt{|\alpha^2(t) - \delta\ell_1^2(t) + \ell_2^2(t) + \delta\ell_1^2(t) + \ell_3^2(t)|} = \sqrt{\alpha^2(t) + \ell_2^2(t) + \ell_3^2(t)}$$

biçiminde bulunur. Böylece,  $(\gamma, \zeta_1, \zeta_2)$  spacelike çatılandırılmış daldırmadır gerek ve yeter koşul her  $t \in I$  için  $(\alpha(t), \ell_2(t), \ell_3(t)) \neq (0, 0, 0)$  biçimindedir. Bu durumda,  $(\gamma, \zeta_1, \zeta_2) : I \rightarrow \mathbb{R}_1^3 \times \Delta_2$  spacelike çatılandırılmış eğri olmak üzere  $\zeta_1(t)$  ve  $\zeta_2(t)$  vektör alanları kullanılarak bir spacelike çatılandırılmış daldırma elde edilir. Bunun için,  $\gamma$  eğrisinin normal düzlemi olan  $\zeta_1(t)$  ve  $\zeta_2(t)$  tarafından gerilen düzlem ile Lorentz hareketi kullanılır. Her  $t \in I$  için  $\ell_2^2(t) - \ell_3^2(t) \neq 0$  ise,

$$\begin{bmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{|\ell_2^2(t) - \ell_3^2(t)|}} \begin{bmatrix} \ell_2(t) & \ell_3(t) \\ \ell_3(t) & \ell_2(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_1(t) \\ \zeta_2(t) \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

tanımlanır. Bu durumda,  $(\gamma, \zeta_1, \zeta_2) : I \rightarrow \mathbb{R}_1^3 \times \Delta_2$  bir çatılandırılmış daldırmadır. (4.4) denkleminde  $\eta_1(t)$  vektör alanının causal karakteri,

$$\langle \eta_1(t), \eta_1(t) \rangle = \frac{\delta \ell_2^2(t) - \delta \ell_3^2(t)}{\ell_2^2(t) - \ell_3^2(t)} = \delta$$

olup  $\eta_1(t)$  ve  $\zeta_1(t)$  aynı causala sahiptir. Benzer şekilde, (4.4) denkleminde  $\eta_2(t)$  vektör alanının causal karakteri,

$$\langle \eta_2(t), \eta_2(t) \rangle = \frac{\delta \ell_3^2(t) - \delta \ell_2^2(t)}{\ell_2^2(t) - \ell_3^2(t)} = -\delta$$

olup  $\eta_2(t)$  ve  $\zeta_2(t)$  aynı causala sahiptir. Ayrıca,

$$\begin{aligned} \eta_1(t) \wedge \eta_2(t) &= \left( \frac{\ell_2^2(t)}{\ell_2^2(t) - \ell_3^2(t)} \right) (\zeta_1(t) \wedge \zeta_2(t)) - \left( \frac{\ell_3^2(t)}{\ell_2^2(t) - \ell_3^2(t)} \right) (\zeta_1(t) \wedge \zeta_2(t)) \\ &= \zeta_1(t) \wedge \zeta_2(t) \\ &= \mu(t) \end{aligned}$$

biçimindedir. (4.4) denklemini göz önüne alınarak  $(\gamma, \eta_1, \eta_2)$  spacelike çatılandırılmış daldırmanın Frenet tipi formülleri bulunabilir. Bunun için,  $\ell_2^2(t) - \ell_3^2(t)$  ifadesinin işareti,  $\varepsilon = \text{sign}(\ell_2^2(t) - \ell_3^2(t))$  ile verilsin. İlk olarak  $\zeta_1(t)$  ve  $\zeta_2(t)$  vektör alanlarının  $\eta_1(t)$  ve  $\eta_2(t)$  vektör alanları cinsinden ifadesi bulunmalıdır. (4.4) denkleminde göre

$\eta_1(t)$  ifadesi  $\ell_3(t)$  ile,  $\eta_2(t)$  ifadesi  $\ell_2(t)$  ile çarpılırsa,

$$\begin{aligned}\ell_3(t)\eta_1(t) &= \frac{\ell_2(t)\ell_3(t)}{\sqrt{|\ell_2^2(t) - \ell_3^2(t)|}}\zeta_1(t) + \frac{\ell_3^2(t)}{\sqrt{|\ell_2^2(t) - \ell_3^2(t)|}}\zeta_2(t), \\ -\ell_2(t)\eta_2(t) &= \frac{-\ell_2(t)\ell_3(t)}{\sqrt{|\ell_2^2(t) - \ell_3^2(t)|}}\zeta_1(t) - \frac{\ell_2^2(t)}{\sqrt{|\ell_2^2(t) - \ell_3^2(t)|}}\zeta_2(t)\end{aligned}$$

elde edilir. Taraf tarafa toplandığında,

$$\ell_3(t)\eta_1(t) - \ell_2(t)\eta_2(t) = \frac{\ell_3^2(t) - \ell_2^2(t)}{\sqrt{|\ell_2^2(t) - \ell_3^2(t)|}}\zeta_2(t)$$

bulunur. Böylece,

$$\zeta_2(t) = \frac{\varepsilon(\ell_2(t)\eta_2(t) - \ell_3(t)\eta_1(t))}{\sqrt{|\ell_2^2(t) - \ell_3^2(t)|}} \quad (4.5)$$

biçiminde yazılır. (4.5) denklemini  $\eta_1(t)$  ifadesinde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}\eta_1(t) &= \frac{\ell_2(t)}{\sqrt{|\ell_2^2(t) - \ell_3^2(t)|}}\zeta_1(t) + \frac{\ell_3(t)}{\sqrt{|\ell_2^2(t) - \ell_3^2(t)|}} \frac{\varepsilon(\ell_2(t)\eta_2(t) - \ell_3(t)\eta_1(t))}{\sqrt{|\ell_2^2(t) - \ell_3^2(t)|}} \\ &= \frac{\ell_2(t)}{\sqrt{|\ell_2^2(t) - \ell_3^2(t)|}}\zeta_1(t) + \frac{\ell_3(t)}{\ell_2^2(t) - \ell_3^2(t)}(\ell_2(t)\eta_2(t) - \ell_3(t)\eta_1(t))\end{aligned}$$

bulunur. Böylece  $\zeta_1(t)$  vektör alanı

$$\begin{aligned}\eta_1(t) - \frac{\ell_2(t)\ell_3(t)}{\ell_2^2(t) - \ell_3^2(t)}\eta_2(t) + \frac{\ell_3^2(t)}{\ell_2^2(t) - \ell_3^2(t)}\eta_1(t) &= \frac{\ell_2(t)}{\sqrt{|\ell_2^2(t) - \ell_3^2(t)|}}\zeta_1(t) \\ \frac{\ell_2^2(t)}{\ell_2^2(t) - \ell_3^2(t)}\eta_1(t) - \frac{\ell_2(t)\ell_3(t)}{\ell_2^2(t) - \ell_3^2(t)}\eta_2(t) &= \frac{\ell_2(t)}{\sqrt{|\ell_2^2(t) - \ell_3^2(t)|}}\zeta_1(t) \\ \frac{\ell_2(t)\sqrt{|\ell_2^2(t) - \ell_3^2(t)|}}{\ell_2^2(t) - \ell_3^2(t)}\eta_1(t) - \frac{\ell_3(t)\sqrt{|\ell_2^2(t) - \ell_3^2(t)|}}{\ell_2^2(t) - \ell_3^2(t)}\eta_2(t) &= \zeta_1(t)\end{aligned}$$

olduğundan

$$\zeta_1(t) = \frac{\varepsilon(\ell_2(t)\eta_1(t) - \ell_3(t)\eta_2(t))}{\sqrt{|\ell_2^2(t) - \ell_3^2(t)|}} \quad (4.6)$$

şeklinde elde edilir. Daha sonra, spacelike çatılandırılmış daldırmanın Frenet tipi formülleri için  $\eta'_1(t), \eta'_2(t), \mu'(t)$  türevleri bulunmalıdır. Bunun için  $\eta'_1(t)$ , (4.4) denkleminde  $\eta_1(t)$  ifadesinden aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned}
\eta'_1(t) &= \left[ \frac{\ell'_2(t) \sqrt{|\ell_2^2(t) - \ell_3^2(t)|} - \ell_2(t) \varepsilon \left( \frac{\ell_2(t) \ell'_2(t) - \ell_3(t) \ell'_3(t)}{\sqrt{|\ell_2^2(t) - \ell_3^2(t)|}} \right)}{\varepsilon (\ell_2^2(t) - \ell_3^2(t))} \right] \zeta_1(t) \\
&+ \frac{\ell_2(t)}{\sqrt{|\ell_2^2(t) - \ell_3^2(t)|}} \zeta'_1(t) \\
&+ \left[ \frac{\ell'_3(t) \sqrt{|\ell_2^2(t) - \ell_3^2(t)|} - \ell_3(t) \varepsilon \left( \frac{\ell_2(t) \ell'_2(t) - \ell_3(t) \ell'_3(t)}{\sqrt{|\ell_2^2(t) - \ell_3^2(t)|}} \right)}{\varepsilon (\ell_2^2(t) - \ell_3^2(t))} \right] \zeta_2(t) \\
&+ \frac{\ell_3(t)}{\sqrt{|\ell_2^2(t) - \ell_3^2(t)|}} \zeta'_2(t) \\
&= \left[ \frac{\varepsilon \ell'_2(t) (\ell_2^2(t) - \ell_3^2(t)) - \varepsilon \ell_2(t) (\ell_2(t) \ell'_2(t) - \ell_3(t) \ell'_3(t))}{(|\ell_2^2(t) - \ell_3^2(t)|)^{3/2}} \right] \zeta_1(t) \\
&+ \frac{\ell_2(t)}{\sqrt{|\ell_2^2(t) - \ell_3^2(t)|}} (-\delta \ell_1(t) \zeta_2(t) - \ell_2(t) \mu(t)) \\
&+ \left[ \frac{\varepsilon \ell'_3(t) (\ell_2^2(t) - \ell_3^2(t)) - \varepsilon \ell_3(t) (\ell_2(t) \ell'_2(t) - \ell_3(t) \ell'_3(t))}{(|\ell_2^2(t) - \ell_3^2(t)|)^{3/2}} \right] \zeta_2(t) \\
&+ \frac{\ell_3(t)}{\sqrt{|\ell_2^2(t) - \ell_3^2(t)|}} (-\delta \ell_1(t) \zeta_1(t) - \ell_3(t) \mu(t)) \\
&= \left[ \frac{\varepsilon \ell'_2(t) \ell_2^2(t) - \varepsilon \ell'_2(t) \ell_3^2(t) - \varepsilon \ell_2(t) \ell'_2(t) + \varepsilon \ell_2(t) \ell_3(t) \ell'_3(t)}{(|\ell_2^2(t) - \ell_3^2(t)|)^{3/2}} \right] \zeta_1(t) \\
&- \left[ \frac{\delta \ell_1(t) \ell_3(t)}{\sqrt{|\ell_2^2(t) - \ell_3^2(t)|}} \right] \zeta_1(t) \\
&+ \left[ \frac{\varepsilon \ell'_3(t) \ell_2^2(t) - \varepsilon \ell'_3(t) \ell_3^2(t) - \varepsilon \ell_3(t) \ell_2(t) \ell'_2(t) + \varepsilon \ell_3^2(t) \ell'_3(t)}{(|\ell_2^2(t) - \ell_3^2(t)|)^{3/2}} \right] \zeta_2(t) \\
&- \left[ \frac{\delta \ell_1(t) \ell_2(t)}{\sqrt{|\ell_2^2(t) - \ell_3^2(t)|}} \right] \zeta_2(t) + \left[ \frac{\ell_3^2(t) - \ell_2^2(t)}{\sqrt{|\ell_2^2(t) - \ell_3^2(t)|}} \right] \mu(t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\eta'_1(t) &= \left[ \frac{\varepsilon \ell_2(t) \ell_3(t) \ell'_3(t) - \varepsilon \ell'_2(t) \ell_3^2(t)}{(|\ell_2^2(t) - \ell_3^2(t)|)^{3/2}} - \frac{\delta \ell_1(t) \ell_3(t)}{\sqrt{|\ell_2^2(t) - \ell_3^2(t)|}} \right] \zeta_1(t) \\
&+ \left[ \frac{\varepsilon \ell'_3(t) \ell_2^2(t) - \varepsilon \ell_3(t) \ell_2(t) \ell'_2(t)}{(|\ell_2^2(t) - \ell_3^2(t)|)^{3/2}} - \frac{\delta \ell_1(t) \ell_2(t)}{\sqrt{|\ell_2^2(t) - \ell_3^2(t)|}} \right] \zeta_2(t) \\
&+ \left[ -\frac{\ell_2^2(t) - \ell_3^2(t)}{\sqrt{|\ell_2^2(t) - \ell_3^2(t)|}} \right] \mu(t) \\
&= \left[ \frac{\varepsilon \ell_2(t) \ell_3(t) \ell'_3(t) - \varepsilon \ell'_2(t) \ell_3^2(t)}{(|\ell_2^2(t) - \ell_3^2(t)|)^{3/2}} - \frac{\delta \ell_1(t) \ell_3(t)}{\sqrt{|\ell_2^2(t) - \ell_3^2(t)|}} \right] \zeta_1(t) \\
&+ \left[ \frac{\varepsilon \ell'_3(t) \ell_2^2(t) - \varepsilon \ell_3(t) \ell_2(t) \ell'_2(t)}{(|\ell_2^2(t) - \ell_3^2(t)|)^{3/2}} - \frac{\delta \ell_1(t) \ell_2(t)}{\sqrt{|\ell_2^2(t) - \ell_3^2(t)|}} \right] \zeta_2(t) \\
&- \varepsilon \sqrt{|\ell_2^2(t) - \ell_3^2(t)|} \mu(t)
\end{aligned}$$

yazılır.  $S(t) = \varepsilon \sqrt{|\ell_2^2(t) - \ell_3^2(t)|}$  ve  $R(t) = \left[ -\delta \ell_1(t) + \frac{\ell_2(t) \ell'_3(t) - \ell'_2(t) \ell_3(t)}{\ell_2^2(t) - \ell_3^2(t)} \right]$  olmak üzere  $\zeta_1(t)$  ve  $\zeta_2(t)$  vektör alanlarının yerine  $\eta_1(t)$  ve  $\eta_2(t)$  cinsinden eşiti olan (4.5) ve (4.6) denklemleri yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\eta'_1(t) &= \left[ \frac{\varepsilon \ell_2(t) \ell_3(t) \ell'_3(t) - \varepsilon \ell'_2(t) \ell_3^2(t)}{(|\ell_2^2(t) - \ell_3^2(t)|)^{3/2}} - \frac{\delta \ell_1(t) \ell_3(t)}{\sqrt{|\ell_2^2(t) - \ell_3^2(t)|}} \right] \left[ \frac{\varepsilon \ell_2(t) \eta_1(t)}{\sqrt{|\ell_2^2(t) - \ell_3^2(t)|}} \right] \\
&- \left[ \frac{\varepsilon \ell_2(t) \ell_3(t) \ell'_3(t) - \varepsilon \ell'_2(t) \ell_3^2(t)}{(|\ell_2^2(t) - \ell_3^2(t)|)^{3/2}} - \frac{\delta \ell_1(t) \ell_3(t)}{\sqrt{|\ell_2^2(t) - \ell_3^2(t)|}} \right] \left[ \frac{\varepsilon \ell_3(t) \eta_2(t)}{\sqrt{|\ell_2^2(t) - \ell_3^2(t)|}} \right] \\
&+ \left[ \frac{\varepsilon \ell'_3(t) \ell_2^2(t) - \varepsilon \ell_3(t) \ell_2(t) \ell'_2(t)}{(|\ell_2^2(t) - \ell_3^2(t)|)^{3/2}} - \frac{\delta \ell_1(t) \ell_2(t)}{\sqrt{|\ell_2^2(t) - \ell_3^2(t)|}} \right] \left[ \frac{\varepsilon \ell_2(t) \eta_2(t)}{\sqrt{|\ell_2^2(t) - \ell_3^2(t)|}} \right] \\
&- \left[ \frac{\varepsilon \ell'_3(t) \ell_2^2(t) - \varepsilon \ell_3(t) \ell_2(t) \ell'_2(t)}{(|\ell_2^2(t) - \ell_3^2(t)|)^{3/2}} - \frac{\delta \ell_1(t) \ell_2(t)}{\sqrt{|\ell_2^2(t) - \ell_3^2(t)|}} \right] \left[ \frac{\varepsilon \ell_3(t) \eta_1(t)}{\sqrt{|\ell_2^2(t) - \ell_3^2(t)|}} \right] \\
&- S(t) \mu(t) \\
&= \frac{\ell_2^2(t) \ell_3(t) \ell'_3(t)}{(\ell_2^2(t) - \ell_3^2(t))^2} \eta_1(t) - \frac{\ell_2(t) \ell'_2(t) \ell_3^2(t)}{(\ell_2^2(t) - \ell_3^2(t))^2} \eta_1(t) - \frac{\delta \varepsilon \ell_1(t) \ell_2(t) \ell_3(t)}{\varepsilon (\ell_2^2(t) - \ell_3^2(t))} \eta_1(t) \\
&- \frac{\ell_2(t) \ell_3^2(t) \ell'_3(t)}{(\ell_2^2(t) - \ell_3^2(t))^2} \eta_2(t) + \frac{\ell'_2(t) \ell_3^3(t)}{(\ell_2^2(t) - \ell_3^2(t))^2} \eta_2(t) + \frac{\delta \ell_1(t) \ell_3^2(t)}{\ell_2^2(t) - \ell_3^2(t)} \eta_2(t) \\
&+ \frac{\ell_2^3(t) \ell'_3(t)}{(\ell_2^2(t) - \ell_3^2(t))^2} \eta_2(t) - \frac{\ell_2^2(t) \ell'_2(t) \ell_3(t)}{(\ell_2^2(t) - \ell_3^2(t))^2} \eta_2(t) - \frac{\delta \ell_1(t) \ell_2^2(t)}{\ell_2^2(t) - \ell_3^2(t)} \eta_2(t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\ell_2^2(t)\ell_3(t)\ell_3'(t)}{(\ell_2^2(t)-\ell_3^2(t))^2}\eta_1(t) + \frac{\ell_2(t)\ell_2'(t)\ell_3^2(t)}{(\ell_2^2(t)-\ell_3^2(t))^2}\eta_1(t) + \frac{\delta\varepsilon\ell_1(t)\ell_2(t)\ell_3(t)}{\varepsilon(\ell_2^2(t)-\ell_3^2(t))}\eta_1(t) \\
& -\varepsilon S(t)\mu(t) \\
\eta_1'(t) &= \left[ \frac{-\delta\ell_1(t)(\ell_2^2(t)-\ell_3^2(t))}{\ell_2^2(t)-\ell_3^2(t)} \right] \eta_2(t) \\
& + \left[ \frac{\ell_2^2(t)(\ell_2(t)\ell_3'(t)-\ell_2'(t)\ell_3(t)) + \ell_3^2(t)(\ell_2'(t)\ell_3(t)-\ell_2(t)\ell_3'(t))}{(\ell_2^2(t)-\ell_3^2(t))^2} \right] \eta_2(t) \\
& -S(t)\mu(t) \\
&= \left[ -\delta\ell_1(t) + \frac{(\ell_2^2(t)-\ell_3^2(t))(\ell_2(t)\ell_3'(t)-\ell_2'(t)\ell_3(t))}{(\ell_2^2(t)-\ell_3^2(t))^2} \right] \eta_2(t) - S(t)\mu(t) \\
&= \left[ -\delta\ell_1(t) + \frac{\ell_2(t)\ell_3'(t)-\ell_2'(t)\ell_3(t)}{\ell_2^2(t)-\ell_3^2(t)} \right] \eta_2(t) - S(t)\mu(t) \\
&= R(t)\eta_2(t) - S(t)\mu(t)
\end{aligned}$$

biçiminde elde edilir. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}
\eta_2'(t) &= \left[ \frac{\ell_3'(t)\sqrt{|\ell_2^2(t)-\ell_3^2(t)|} - \ell_3(t)\varepsilon \left( \frac{\ell_2(t)\ell_2'(t) - \ell_3(t)\ell_3'(t)}{\sqrt{|\ell_2^2(t)-\ell_3^2(t)|}} \right)}{\varepsilon(\ell_2^2(t)-\ell_3^2(t))} \right] \zeta_1(t) \\
& + \frac{\ell_3(t)}{\sqrt{|\ell_2^2(t)-\ell_3^2(t)|}} \zeta_1'(t) \\
& + \left[ \frac{\ell_2'(t)\sqrt{|\ell_2^2(t)-\ell_3^2(t)|} - \ell_2(t)\varepsilon \left( \frac{\ell_2(t)\ell_2'(t) - \ell_3(t)\ell_3'(t)}{\sqrt{|\ell_2^2(t)-\ell_3^2(t)|}} \right)}{\varepsilon(\ell_2^2(t)-\ell_3^2(t))} \right] \zeta_2(t) \\
& + \frac{\ell_2(t)}{\sqrt{|\ell_2^2(t)-\ell_3^2(t)|}} \zeta_2'(t) \\
&= \left[ \frac{\varepsilon\ell_3'(t)(\ell_2^2(t)-\ell_3^2(t)) - \varepsilon\ell_3(t)(\ell_2(t)\ell_2'(t) - \ell_3(t)\ell_3'(t))}{(|\ell_2^2(t)-\ell_3^2(t)|)^{3/2}} \right] \zeta_1(t) \\
& + \frac{\ell_3(t)}{\sqrt{|\ell_2^2(t)-\ell_3^2(t)|}} (-\delta\ell_1(t)\zeta_2(t) - \ell_2(t)\mu(t))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[ \frac{\varepsilon \ell_2'(t)(\ell_2^2(t) - \ell_3^2(t)) - \varepsilon \ell_2(t)(\ell_2(t)\ell_2'(t) - \ell_3(t)\ell_3'(t))}{(|\ell_2^2(t) - \ell_3^2(t)|)^{3/2}} \right] \zeta_2(t) \\
& + \frac{\ell_2(t)}{\sqrt{|\ell_2^2(t) - \ell_3^2(t)|}} (-\delta \ell_1(t)\zeta_1(t) - \ell_3(t)\mu(t)) \\
\eta_2'(t) = & \left[ \frac{\varepsilon \ell_3'(t)\ell_2^2(t) - \varepsilon \ell_3(t)\ell_2(t)\ell_2'(t)}{(|\ell_2^2(t) - \ell_3^2(t)|)^{3/2}} - \frac{\delta \ell_1(t)\ell_2(t)}{\sqrt{|\ell_2^2(t) - \ell_3^2(t)|}} \right] \zeta_1(t) \\
& + \left[ \frac{\varepsilon \ell_2(t)\ell_3(t)\ell_3'(t) - \varepsilon \ell_2'(t)\ell_3^2(t)}{(|\ell_2^2(t) - \ell_3^2(t)|)^{3/2}} - \frac{\delta \ell_1(t)\ell_3(t)}{\sqrt{|\ell_2^2(t) - \ell_3^2(t)|}} \right] \zeta_2(t) \\
& + \left[ \frac{-\ell_2(t)\ell_3(t) + \ell_2(t)\ell_3(t)}{\sqrt{|\ell_2^2(t) - \ell_3^2(t)|}} \right] \mu(t)
\end{aligned}$$

bulunur.  $\zeta_1(t)$  ve  $\zeta_2(t)$  vektör alanlarının yerine  $\eta_1(t)$  ve  $\eta_2(t)$  cinsinden eşiti olan (4.5) ve (4.6) denklemleri yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\eta_2'(t) = & \left[ \frac{\varepsilon \ell_3'(t)\ell_2^2(t) - \varepsilon \ell_3(t)\ell_2(t)\ell_2'(t)}{(|\ell_2^2(t) - \ell_3^2(t)|)^{3/2}} - \frac{\delta \ell_1(t)\ell_2(t)}{\sqrt{|\ell_2^2(t) - \ell_3^2(t)|}} \right] \left[ \frac{\varepsilon \ell_2(t)\eta_1(t)}{\sqrt{|\ell_2^2(t) - \ell_3^2(t)|}} \right] \\
& - \left[ \frac{\varepsilon \ell_3'(t)\ell_2^2(t) - \varepsilon \ell_3(t)\ell_2(t)\ell_2'(t)}{(|\ell_2^2(t) - \ell_3^2(t)|)^{3/2}} - \frac{\delta \ell_1(t)\ell_2(t)}{\sqrt{|\ell_2^2(t) - \ell_3^2(t)|}} \right] \left[ \frac{\varepsilon \ell_3(t)\eta_2(t)}{\sqrt{|\ell_2^2(t) - \ell_3^2(t)|}} \right] \\
& + \left[ \frac{\varepsilon \ell_2(t)\ell_3(t)\ell_3'(t) - \varepsilon \ell_2'(t)\ell_3^2(t)}{(|\ell_2^2(t) - \ell_3^2(t)|)^{3/2}} - \frac{\delta \ell_1(t)\ell_3(t)}{\sqrt{|\ell_2^2(t) - \ell_3^2(t)|}} \right] \left[ \frac{\varepsilon \ell_2(t)\eta_2(t)}{\sqrt{|\ell_2^2(t) - \ell_3^2(t)|}} \right] \\
& - \left[ \frac{\varepsilon \ell_2(t)\ell_3(t)\ell_3'(t) - \varepsilon \ell_2'(t)\ell_3^2(t)}{(|\ell_2^2(t) - \ell_3^2(t)|)^{3/2}} - \frac{\delta \ell_1(t)\ell_3(t)}{\sqrt{|\ell_2^2(t) - \ell_3^2(t)|}} \right] \left[ \frac{\varepsilon \ell_3(t)\eta_1(t)}{\sqrt{|\ell_2^2(t) - \ell_3^2(t)|}} \right] \\
= & \frac{\ell_3'(t)\ell_2^2(t) - \ell_3(t)\ell_2^2(t)\ell_2'(t)}{(\ell_2^2(t) - \ell_3^2(t))^2} \eta_1(t) - \frac{\delta \ell_1(t)\ell_2^2(t)}{\ell_2^2(t) - \ell_3^2(t)} \eta_1(t) \\
& - \frac{\ell_3(t)\ell_3'(t)\ell_2^2(t) - \ell_3^2(t)\ell_2(t)\ell_2'(t)}{(\ell_2^2(t) - \ell_3^2(t))^2} \eta_2(t) + \frac{\delta \ell_1(t)\ell_2(t)\ell_3(t)}{\ell_2^2(t) - \ell_3^2(t)} \eta_2(t) \\
& + \frac{\ell_2^2(t)\ell_3(t)\ell_3'(t) - \ell_2(t)\ell_2'(t)\ell_3^2(t)}{(\ell_2^2(t) - \ell_3^2(t))^2} \eta_2(t) - \frac{\delta \ell_1(t)\ell_2(t)\ell_3(t)}{\ell_2^2(t) - \ell_3^2(t)} \eta_2(t) \\
& + \frac{\ell_3^2(t)\ell_2(t)\ell_3'(t) - \ell_2'(t)\ell_3^3(t)}{(\ell_2^2(t) - \ell_3^2(t))^2} \eta_1(t) + \frac{\delta \ell_1(t)\ell_3^2(t)}{\ell_2^2(t) - \ell_3^2(t)} \eta_1(t) \\
= & \left[ \frac{-\delta \ell_1(t)(\ell_2^2(t) - \ell_3^2(t))}{\ell_2^2(t) - \ell_3^2(t)} \right] \eta_1(t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[ \frac{\ell_2^2(t)(\ell_2(t)\ell_3'(t) - \ell_2'(t)\ell_3(t)) - \ell_3^2(t)(\ell_2(t)\ell_3'(t) - \ell_2'(t)\ell_3(t))}{(\ell_2^2(t) - \ell_3^2(t))^2} \right] \eta_1(t) \\
\eta_2'(t) & = \left[ -\delta\ell_1(t) + \frac{\ell_2(t)\ell_3'(t) - \ell_2'(t)\ell_3(t)}{\ell_2^2(t) - \ell_3^2(t)} \right] \eta_1(t) \\
& = R(t)\eta_1(t)
\end{aligned}$$

bulunur. Son olarak  $\mu(t) = \eta_1(t) \wedge \eta_2(t)$  olduğundan

$$\begin{aligned}
\mu'(t) & = \eta_1'(t) \wedge \eta_2(t) + \eta_1(t) \wedge \eta_2'(t) \\
& = (R(t)\eta_2(t) - S(t)\mu(t)) \wedge \eta_2(t) + \eta_1(t) \wedge (R(t)\eta_1(t)) \\
& = -S(t)\mu(t) \wedge \eta_2(t) \\
& = \delta S(t)\eta_1(t)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece spacelike çatılandırılmış daldırma için Frenet tipi formüller aşağıdaki gibidir:

$$\begin{bmatrix} \eta_1'(t) \\ \eta_2'(t) \\ \mu'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & R(t) & -S(t) \\ R(t) & 0 & 0 \\ \delta S(t) & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \\ \mu(t) \end{bmatrix}$$

Bu durumda  $(R, S, 0, \alpha) : I \rightarrow \mathbb{R}^4$  dönüşümü  $(\gamma, \eta_1, \eta_2)$  spacelike çatılandırılmış daldırmanın eğriliğidir. Ayrıca  $\mu(t)$  ve  $\eta_1(t)$  vektör alanları tarafından gerilen düzlem  $\gamma$  eğrisinin oskülütör düzlemi olarak isimlendirilirken,  $\eta_1(t)$  ve  $\eta_2(t)$  vektör alanı tarafından gerilen düzlem  $\gamma$  eğrisinin normal düzlemi olarak isimlendirilir. Böylece  $\{\eta_1(t), \eta_2(t), \mu(t)\}$  çatısına Frenet tipi çatı denir.

$(\gamma, \eta_1, \eta_2) : I \rightarrow \mathbb{R}_1^3 \times \Delta_2$  bir spacelike çatılandırılmış daldırma ve  $p \in \mathbb{R}_1^3$  sabit bir nokta olsun.  $\gamma$  eğrisinin her bir oskülütör düzlemi üzerine  $p$  noktasının ortogonal izdüşümü alındığında bir eğri oluşur. Benzer şekilde, oskülütör düzlem yerine normal düzlemi alındığında da başka bir eğri oluşur. Bu özel eğriler aşağıdaki tanım ile verilir:

**Tanım 4.24.**  $(\gamma, \eta_1, \eta_2) : I \rightarrow \mathbb{R}_1^3 \times \Delta_2$  bir spacelike çatılandırılmış daldırma ve  $p \in \mathbb{R}_1^3$  sabit bir nokta olsun.

1)  $(\gamma, \eta_1, \eta_2)$  spacelike çatılandırılmış daldırmanın  $p$  noktasına göre  $Pe_{\gamma,p} : I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  ile

verilen pedal eğrisi,

$$Pe_{\gamma,p}(t) = p + \delta \langle p - \gamma(t), \eta_2(t) \rangle \eta_2(t) \quad (4.7)$$

biçimindedir. Burada  $p$ , pedal nokta olarak isimlendirilir.

2)  $(\gamma, \eta_1, \eta_2)$  spacelike çatılandırılmış daldırmanın  $p$  noktasına göre  $CPe_{\gamma,p} : I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  ile verilen contrapedal eğrisi,

$$CPe_{\gamma,p}(t) = p - \langle p - \gamma(t), \mu(t) \rangle \mu(t) \quad (4.8)$$

biçimindedir. Burada  $p$ , contrapedal nokta olarak isimlendirilir.

**Teorem 4.25.**  $(\gamma, \eta_1, \eta_2)$  spacelike çatılandırılmış daldırma ve  $p \in \mathbb{R}_1^3$  sabit bir nokta olsun.  $(\rho, \rho_1, \rho_2) : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  fonksiyonu

$$\langle p - \gamma(t), \eta_1(t) \rangle = \rho(t)\rho_1(t),$$

$$\langle p - \gamma(t), \eta_2(t) \rangle = \rho(t)\rho_2(t),$$

$$\rho_1^2(t) - \rho_2^2(t) \neq 0$$

koşullarını sağlayacak şekilde düzgün fonksiyonlar olsun. Buna göre  $(\gamma, \eta_1, \eta_2)$  spacelike çatılandırılmış daldırmanın pedal eğrisi aşağıdaki causal karakterlere sahiptir:

i)  $\rho_2^2(t) - \rho_1^2(t) > 0$  ve  $\eta_1(t)$  spacelike (timelike) ise, pedal eğri spacelike (timelike) eğridir.

ii)  $\rho_2^2(t) - \rho_1^2(t) < 0$  ve  $\eta_1(t)$  spacelike (timelike) ise, pedal eğri timelike (spacelike) eğridir.

*İspat.* (4.7) denklemleri ile verilen  $Pe_{\gamma,p}(t)$  pedal eğrisinin türevi alınırsa,

$$\begin{aligned} Pe'_{\gamma,p}(t) &= [p + \delta \langle p - \gamma(t), \eta_2(t) \rangle \eta_2(t)]' \\ &= -\delta \langle \gamma'(t), \eta_2(t) \rangle \eta_2(t) + \delta \langle p - \gamma(t), \eta_2'(t) \rangle \eta_2(t) + \delta \langle p - \gamma(t), \eta_2(t) \rangle \eta_2'(t) \\ &= -\delta \langle \alpha(t)\mu(t), \eta_2(t) \rangle \eta_2(t) + \delta \langle p - \gamma(t), R(t)\eta_1(t) \rangle \eta_2(t) \\ &\quad + \delta \langle p - \gamma(t), \eta_2(t) \rangle (R(t)\eta_1(t)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Pe'_{\gamma,p}(t) &= \delta \langle p - \gamma(t), R(t)\eta_1(t) \rangle \eta_2(t) + \delta \langle p - \gamma(t), \eta_2(t) \rangle R(t)\eta_1(t) \\
&= \delta R(t) [\langle p - \gamma(t), \eta_1(t) \rangle \eta_2(t) + \langle p - \gamma(t), \eta_2(t) \rangle \eta_1(t)] \\
&= \delta R(t)\rho(t) [\rho_2(t)\eta_1(t) + \rho_1(t)\eta_2(t)]
\end{aligned}$$

elde edilir.  $Pe'_{\gamma,p}(t)$  vektör alanının işareti incelenirse

$$\begin{aligned}
\langle Pe'_{\gamma,p}(t), Pe'_{\gamma,p}(t) \rangle &= \langle \delta R(t)\rho(t)(\rho_2(t)\eta_1(t) + \rho_1(t)\eta_2(t)), \delta R(t)\rho(t)\rho_2(t)\eta_1(t) \rangle \\
&\quad + \langle \delta R(t)\rho(t)(\rho_2(t)\eta_1(t) + \rho_1(t)\eta_2(t)), \rho_1(t)\eta_2(t) \rangle \\
&= \delta^2 R^2(t)\rho^2(t)(\delta\rho_2^2(t) - \delta\rho_1^2(t)) \\
&= \delta R^2(t)\rho^2(t)(\rho_2^2(t) - \rho_1^2(t))
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır. □

**Teorem 4.26.**  $(\gamma, \eta_1, \eta_2) : I \rightarrow \mathbb{R}_1^3 \times \Delta_2$  bir spacelike çatılandırılmış daldırma,  $(R, S, 0, \alpha)$  eğrilikler ve  $p \in \mathbb{R}_1^3$  sabit bir nokta olsun.

$$\begin{aligned}
\langle p - \gamma(t), \eta_1(t) \rangle &= \rho(t)\rho_1(t), \\
\langle p - \gamma(t), \eta_2(t) \rangle &= \rho(t)\rho_2(t), \\
\rho_1^2(t) - \rho_2^2(t) &\neq 0
\end{aligned}$$

olacak şekilde,  $(\rho, \rho_1, \rho_2) : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  düzgün fonksiyonu var ise,  $Pe_{\gamma,p}$  pedal eğrisi bir çatılandırılmış taban eğridir.

*İspat.* Teorem (4.25) ispatına göre,  $Pe'_{\gamma,p}(t) = \delta R(t)\rho(t) [\rho_2(t)\eta_1(t) + \rho_1(t)\eta_2(t)]$  ile verilir.  $Pe_{\gamma,p}(t)$  pedal eğrisi ile ilişkili  $\Delta_2$  ye ait olan vektör alanları  $\widehat{\zeta}_1, \widehat{\zeta}_2$  olsun.  $Pe_{\gamma,p}(t)$  pedal eğrisinin çatılandırılmış taban eğri olması için,  $(Pe_{\gamma,p}(t), \widehat{\zeta}_1, \widehat{\zeta}_2)$  çatılandırılmış eğri olmalıdır. Bunun için,  $\langle Pe'_{\gamma,p}(t), \widehat{\zeta}_1(t) \rangle = \langle Pe'_{\gamma,p}(t), \widehat{\zeta}_2(t) \rangle = 0$  olacak biçimde  $\widehat{\zeta}_1, \widehat{\zeta}_2 \in \Delta_2$  vektör alanları bulunmalıdır.  $\gamma$  eğrisi spacelike olduğunda pedal eğri timelike veya spacelike olabilir. Buna göre,  $\widehat{\zeta}_1$  ve  $\widehat{\zeta}_2$  de timelike veya spacelike olabilir. Bu causal karakterler göz önünde bulundurularak,

$$\widehat{\zeta}_1 = \mu(t), \quad \widehat{\zeta}_2 = \frac{\rho_1(t)\eta_1(t) + \rho_2(t)\eta_2(t)}{\sqrt{|\rho_2^2(t) - \rho_1^2(t)|}}$$

veya

$$\widehat{\xi}_1 = \frac{\rho_1(t)\eta_1(t) + \rho_2(t)\eta_2(t)}{\sqrt{|\rho_2^2(t) - \rho_1^2(t)|}}, \quad \widehat{\xi}_2 = \mu(t)$$

biçiminde seçildiğinde,  $(Pe_{\gamma,p}, \widehat{\xi}_1, \widehat{\xi}_2) : I \rightarrow \mathbb{R}_1^3 \times \Delta_2$  çatılandırılmış eğri olur.  $\square$

**Teorem 4.27.**  $(\gamma, \eta_1, \eta_2)$  spacelike çatılandırılmış daldırma ve  $p \in \mathbb{R}_1^3$  sabit bir nokta olsun.  $(\lambda, \lambda_1, \lambda_2) : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  fonksiyonu

$$\begin{aligned} \alpha(t) - \delta S(t) \langle p - \gamma(t), \eta_1(t) \rangle &= \lambda(t)\lambda_2(t), \\ -\delta S(t) \langle p - \gamma(t), \mu(t) \rangle &= \lambda(t)\lambda_1(t), \\ \lambda_2^2(t) + \delta\lambda_1^2(t) &\neq 0. \end{aligned}$$

koşullarını sağlayacak şekilde düzgün fonksiyonlar olsun. Buna göre  $(\gamma, \eta_1, \eta_2)$  spacelike çatılandırılmış daldırmanın contrapedal eğrisi aşağıdaki causal karakterlere sahiptir:

- i)  $\eta_1$  spacelike (timelike) ise, contrapedal eğri spacelike (timelike) egridir.
- ii)  $\lambda_2^2(t) - \lambda_1^2(t) > 0$  ( $\lambda_2^2(t) - \lambda_1^2(t) < 0$ ) ve  $\eta_1$  timelike ise contrapedal eğri spacelike (timelike) egridir.

*İspat.* (4.8) denklemi ile verilen  $CPe_{\gamma,p}(t)$  contrapedal eğrisinin türevi alınırsa,

$$\begin{aligned} CPe'_{\gamma,p}(t) &= [p - \langle p - \gamma(t), \mu(t) \rangle \mu(t)]' \\ &= -\langle -\gamma'(t), \mu(t) \rangle \mu(t) - \langle p - \gamma(t), \mu'(t) \rangle \mu(t) - \langle p - \gamma(t), \mu(t) \rangle \mu'(t) \\ &= \langle \alpha(t)\mu(t), \mu(t) \rangle \mu(t) - \langle p - \gamma(t), \delta S(t)\eta_1(t) \rangle \mu(t) \\ &\quad - \langle p - \gamma(t), \mu(t) \rangle (\delta S(t)\eta_1(t)) \\ &= \alpha(t)\mu(t) - \delta S(t) \langle p - \gamma(t), \eta_1(t) \rangle \mu(t) - \delta S(t) \langle p - \gamma(t), \mu(t) \rangle \eta_1(t) \\ &= \alpha(t)\mu(t) - \delta S(t) [\langle p - \gamma(t), \eta_1(t) \rangle \mu(t) + \langle p - \gamma(t), \mu(t) \rangle \eta_1(t)] \\ &= [\alpha(t) - \delta S(t) \langle p - \gamma(t), \eta_1(t) \rangle] \mu(t) - \delta S(t) \langle p - \gamma(t), \mu(t) \rangle \eta_1(t) \end{aligned}$$

bulunur. Buna göre  $CPe'_{\gamma,p}(t)$  vektör alanının causal karakteri

$$\langle CPe'_{\gamma,p}(t), CPe'_{\gamma,p}(t) \rangle = \lambda^2(t)\lambda_2^2(t) + \delta\lambda^2(t)\lambda_1^2(t)$$

$$\langle CPe'_{\gamma,p}(t), CPe'_{\gamma,p}(t) \rangle = \lambda^2(t) [\lambda_2^2(t) + \delta\lambda_1^2(t)]$$

biçiminde elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.  $\square$

**Teorem 4.28.**  $(\gamma, \eta_1, \eta_2) : I \rightarrow \mathbb{R}_1^3 \times \Delta_2$  spacelike çatılandırılmış daldırma,  $(R, S, 0, \alpha)$  eğrilikler ve  $p \in \mathbb{R}_1^3$  sabit bir nokta olsun.  $(\lambda, \lambda_1, \lambda_2) : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  olacak şekilde,

$$\begin{aligned} \alpha(t) - \delta S(t) \langle p - \gamma(t), \eta_1(t) \rangle &= \lambda(t) \lambda_2(t), \\ -\delta S(t) \langle p - \gamma(t), \mu(t) \rangle &= \lambda(t) \lambda_1(t), \\ \lambda_2^2(t) + \delta\lambda_1^2(t) &\neq 0 \end{aligned}$$

koşullarını sağlayan düzgün fonksiyonlar var ise,  $CPe_{\gamma,p}$  contrapedal eğrisi bir çatılandırılmış taban eğridir.

*İspat.* Teorem (4.27) nin ispatına göre,  $CPe'_{\gamma,p}(t) = \lambda(t) [\lambda_2(t)\mu(t) + \lambda_1(t)\eta_1(t)]$  ile verilir.  $CPe_{\gamma,p}(t)$  contrapedal eğrisi ile ilişkili  $\Delta_2$  ye ait olan vektör alanları  $\bar{\zeta}_1, \bar{\zeta}_2$  olsun.  $CPe_{\gamma,p}(t)$  contrapedal eğrisinin çatılandırılmış taban eğri olması için,  $(CPe_{\gamma,p}(t), \bar{\zeta}_1, \bar{\zeta}_2)$  çatılandırılmış eğri olmalıdır. Bunun için,  $\langle CPe'_{\gamma,p}(t), \bar{\zeta}_1(t) \rangle = \langle CPe'_{\gamma,p}(t), \bar{\zeta}_2(t) \rangle = 0$  olacak biçimde  $\bar{\zeta}_1, \bar{\zeta}_2 \in \Delta_2$  vektör alanları bulunmalıdır.  $\gamma$  eğrisi spacelike olduğunda contrapedal eğri timelike veya spacelike olabilir. Buna göre,  $\bar{\zeta}_1$  ve  $\bar{\zeta}_2$  de timelike veya spacelike olabilir. Bu causal karakterler göz önünde bulundurularak,

$$\bar{\zeta}_1 = \eta_2(t), \quad \bar{\zeta}_2 = \frac{-\delta\lambda_1(t)\mu(t) + \lambda_2(t)\eta_1(t)}{\sqrt{|\lambda_2^2(t) + \delta\lambda_1^2(t)|}}$$

veya

$$\bar{\zeta}_1 = \frac{-\delta\lambda_1(t)\mu(t) + \lambda_2(t)\eta_1(t)}{\sqrt{|\lambda_2^2(t) + \delta\lambda_1^2(t)|}}, \quad \bar{\zeta}_2 = \eta_2(t)$$

biçiminde seçildiğinde,  $(CPe_{\gamma,p}, \bar{\zeta}_1, \bar{\zeta}_2) : I \rightarrow \mathbb{R}_1^3 \times \Delta_2$  çatılandırılmış eğri olur.  $\square$

## 5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada Minkowski 3-uzayındaki spacelike çatılandırılmış daldırmaların pedal ve contrapedal eğrileri incelenmiştir.

Günlük hayatta karşımıza çıkan eğrilerin birçoğunun singüler noktalara sahip olması singülerlik teorisi ile diferansiyel geometrinin birleştirilmesini ve böylece singüler eğrilerin geometriciler tarafından çalışılmasını sağlamıştır. Honda ve Takahashi (2016) tarafından ilk kez Öklid uzayı için Legendre eğrilerin bir genelleştirmesi olarak çatılandırılmış eğriler tanımlanmıştır. Bu tez çalışmasında da Honda ve Takahashi (2016) tarafından yapılan tanımlamalar doğrultusunda sonuçlar elde edilmiştir.

İlk olarak, spacelike çatılandırılmış eğriler ile spacelike çatılandırılmış daldırmalar ifade edilmiş ve özellikleri belirtilmiştir. Singüler eğriler için verilen ve regüler eğriler için de doğru olan bu özellikler kullanılarak bu spacelike çatılandırılmış eğriler için önce bir çatı alanı oluşturulmuş ve sonrasında Frenet tipi formüller bu eğriler için elde edilmiştir. Daha sonra ise bu eğriler için eğrilik fonksiyonları bulunmuştur. Öklid 3-uzayındaki regüler bir eğri için Serret-Frenet vektör alanları kullanılarak iki tane eğrilik fonksiyonu (eğrilik ve burulma) bulunurken bu çatılandırılmış eğriler için dört tane eğrilik fonksiyonu elde edilmiştir. Ayrıca eğri singüler olsa bile bu durum çatı alanlarının oluşmasına engel teşkil etmediğinden çatılandırılmış eğriler oldukça kullanışlıdır.

Spacelike çatılandırılmış eğriler keyfi parametreliliğiyle eğriler olarak düşünülebilir. Bu eğrinin parametresi yay parametresi olduğunda spacelike çatılandırılmış eğri spacelike çatılandırılmış daldırma olacaktır. Bu da eğri ile işlem yapma kolaylığı sağlayacaktır. Bu sebepten spacelike çatılandırılmış eğrinin spacelike çatılandırılmış daldırma olması için gerekli ve yeterli koşullar elde edilmiştir. Böylece spacelike çatılandırılmış eğrinin çatı alanı kullanılarak spacelike çatılandırılmış daldırma için yeni bir çatı alanı oluşturulmuştur. Minkowski 3-uzayında spacelike, timelike ve lightlike olmak üzere üç tipte vektörler bulunduğundan, oluşan yeni çatı alanındaki vektörlerin hangi tipte olduğu belirlenmiştir. Bu yeni çatı alanı kullanılarak spacelike çatılandırılmış daldırma için Frenet tipi formüller elde edilmiştir.

Daha sonra spacelike çatılandırılmış daldırmanın pedal ve contrapedal eğrileri tanımlanmıştır. Bunun için spacelike çatılandırılmış daldırmanın her bir oskülötör düzlemine sabit bir noktanın dik izdüşümü alınarak oluşan eğri pedal eğri olarak ifade edilmiştir. Benzer şekilde oskülötör düzlem yerine normal düzlem alınarak oluşan eğri de contrapedal eğri biçiminde ifade edilmiştir. Bu tanımlar göz önünde bulundurularak, spacelike çatılandırılmış daldırmanın pedal veya contrapedal eğrilerinin spacelike olması gerektiği gösterilmiştir. Ayrıca spacelike çatılandırılmış daldırmanın pedal veya contrapedal eğrilerinin causal karakterinin timelike ve spacelike olması için sağlaması gereken koşullar elde edilmiştir. Dahası spacelike çatılandırılmış daldırmanın pedal eğrisinin bir çatılandırılmış taban eğri olması için gerekli ve yeterli koşullar ispatlanmıştır. Bütün bu elde edilen sonuçlar ile spacelike çatılandırılmış daldırmalar için pedal ve contrapedal eğriler tanımlanarak özellikleri ile ilgili elde edilen bulgular ortaya koyulmuştur. Bu sayede Minkowski 3- uzayındaki spacelike çatılandırılmış daldırmanın pedal ve contrapedal eğrisinin, Öklid 3-uzayındaki bir regüler eğriden veya singüler eğriden farklılığı gösterilmiştir.

Çatılandırılmış eğriler ile ilgili ilk tanımlamanın Öklid uzayı için 2016 yılında Honda ve Takahashi (2016) tarafından yakın tarihte yapılması sebebiyle bu konu oldukça güncel olup literatürde çok az çalışma bulunmaktadır. Ayrıca görelilik teorisinin temelini oluşturan ve Öklid 3-uzay ile zamanın bir kombinasyonu olan Minkowski uzayında bu çatılandırılmış eğriler ve çatılandırılmış daldırmalar için yapılmış olan çalışmalar da kısıtlıdır. Dolayısıyla bu tez çalışmasında elde edilen sonuçlar yeni bilimsel çalışmalara öncülük etme niteliğine sahiptir. Ayrıca Minkowski uzayında farklı tipe sahip çatılandırılmış eğriler ve çatılandırılmış daldırmalar için de pedal ve contrapedal eğriler ele alınabilir. Özellikle eğrinin türevinin sıfır olması durumunda oluşan problemlerin çözümünde kullanılan bu çatılandırılmış daldırmalar başka disiplinlerdeki problemlerin çözümünde de kullanılabilir.

## KAYNAKLAR

- Arnold, V.I., 1990. *Singularities of Caustics and Wave Fronts*. Springer, 259p. Dordrecht.
- Aydın Şekerci, G., 2021. On evolutooids and pedaloids in Minkowski 3-space. *Journal of Geometry and Physics*, 168, 104313.
- Aydın Şekerci, G., Izumiya, S., 2021. Evolutooids and pedaloids of Minkowski plane curves. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, 44, 2813–2834.
- Bishop, R., 1975. There is more than one way to frame a curve. *American Mathematical Monthly*, 82(3), 246–251.
- Brickell, F., Clark, R.S., 1970. *Differentiable Manifolds: An Introduction*. Van Nostrand Reinhold, 289p. London.
- Bruce, J.W., Giblin, P.J., 1984. *Curves and Singularities: A Geometrical Introduction to Singularity Theory*. Cambridge University Press, 222p. New York.
- Bruneau, O., 2010. ICT and history of mathematics: the case of the pedal curves from 17th-century to 19th-century. 6th European Summer University on the History and Epistemology in Mathematics Education. (pp. 363–370).
- Deshmukh, S., Chen, B.Y., Alshammari, S.H., 2018. On rectifying curves in Euclidean 3-space. *Turkish Journal of Mathematics*, 42(2), 609–620.
- Do Carmo, M.P., 1976. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice-Hall, 503p. New Jersey.
- Doğan Yazıcı, B., Özkaldı Karakuş, S., Tosun, M., 2022a. Framed curves and their applications based on a new differential equation. *International Electronic Journal of Geometry*, 15(1), 47–56.
- Doğan Yazıcı, B., Özkaldı Karakuş, S., Tosun, M., 2022b. On the classification of framed rectifying curves in Euclidean space. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 45(18), 12089–12098.
- Duggal, K.L., Bejancu, A., 1996. *Lightlike Submanifolds of Semi-Riemannian Manifolds and Applications*. Springer, 303p. Dordrecht.
- Fukunaga, T., Takahashi, M., 2017. Existence conditions of framed curves for smooth curves. *Journal of Geometry*, 108, 763–774.
- Hacısalıhoğlu, H.H., 1998. *İki ve Üç Boyutlu Uzaylarda Dönüşümler ve Geometrilere*. Hacısalıhoğlu Yayıncılık, 326s. Ankara.
- Hacısalıhoğlu, H.H., 2000. *Diferensiyel Geometri I. Cilt*. Hacısalıhoğlu Yayıncılık, 269s. Ankara.

- Honda, S., Takahashi, M., 2016. Framed curves in the Euclidean space. *Advances in Geometry*, 16(3), 265–276.
- Honda, S., Takahashi, M., 2020. Evolutes and focal surfaces of framed immersions in the Euclidean space. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, 150, 497–516.
- Li, M., Yao, K., Li, P., Pei, D., 2022. Pedal curves of non-lightlike curves in Minkowski 3-space. *Symmetry*, 14(1), 59.
- Li, P., Pei, D., 2021. Nullcone fronts of spacelike framed curves in Minkowski 3-space. *Mathematics*, 9(22), 2939.
- Li, Y., Eren, K., Ayvaci, K.H., Ersoy, S., 2023. The developable surfaces with pointwise 1-type Gauss map of Frenet type framed base curves in Euclidean 3-space. *AIMS Mathematics*, 8(1), 2226–2239.
- Li, Y., Liu, S., Wang, Z., 2021. Tangent developables and Darboux developables of framed curves. *Topology and its Applications*, 301, 107526.
- Li, Y., Pei, D., 2018. Pedal curves of frontals in the Euclidean plane. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 41(5), 1988–1997.
- Li, Y., Sun, Q.Y., 2019. Evolutes of fronts in the Minkowski plane. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 42, 5416–5426.
- López, R., 2014. Differential geometry of curves and surfaces in Lorentz-Minkowski space. *International Electronic Journal of Geometry*, 7(1), 44–107.
- O’Neill, B., 1983. *Semi-Riemannian Geometry With Applications to Relativity*. Academic Press, 488p. New York.
- Stavek, J., 2018. Kepler’s ellipse observed from Newton’s evolute (1687), Horrebow’s circle (1717), Hamilton’s pedal curve (1847), and two contrapedal curves. *Applied Physics Research*, 10(6), 90–101.
- Thom, R., 1956. Les singularities des applications différentiables. *Annales de l’Institut Fourier*, 6, 43–87.
- Tuncer, O.O., Ceyhan, H., Gök, İ., Ekmekci, F.N., 2018. Notes on pedal and contrapedal curves of fronts in the Euclidean plane. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 41(13), 5096–5111.
- Walrave, J., 2002. *Curves and Surfaces in Minkowski Space*. Katholieke Universiteit, Ph.D. Thesis, 138p, Leuven.
- Wang, Y., Pei, D., Gao, R., 2019. Generic properties of framed rectifying curves. *Mathematics*, 7(1), 37.

- Yan, Y., Sasian, J., 2017. Miniature camera lens design with a freeform surface. International Optical Design Conference (IODC).
- Yao, K., Li, M., Li, E., Pei, D., 2023. Pedal and contrapedal curves of framed immersions in the Euclidean 3-space. Mediterranean Journal of Mathematics, 20, 204.
- Yıldız, C., 2005. Genel Topoloji. Gazi Kitabevi, 336s. Ankara.
- Yıldız, Ö.G., 2022. On the evolution of framed curves in Euclidean 3-space. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 45(18), 12158–12166.
- Zwicker, C., 2005. The Advanced Geometry of Plane Curves and Their Applications. Dover Publications, 320p. New York.

