



**T.C.
HARRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SOFT TOPOLOJİK HİPERYAPILAR

ABDÜLKADİR OLCAY

MATEMATİK

**Şanlıurfa
2024**



**T.C.
HARRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SOFT TOPOLOJİK HİPERYAPILAR

ABDÜLKADİR OLCAY

**MATEMATİK
Tez Danışmanı: Doç. Dr. GÜLAY OĞUZ**

**Şanlıurfa
2024**

TEŐEKKÖR

Bu çalıřmanın oluřmasında, deęerli bilgilerini, mesleki tecrűbesini benimle paylařan ve desteęini hiç esirgemeyen deęerli hocam Doç. Dr. Gűlay Oęuz'a sonsuz teőekkűrlerimi sunarım.

Ayrıca bu zorlu sűrete gűsterdikleri anlayıř ve verdikleri destekten dolayı bařta eřim Elif Olcay'a ve aileme teőekkűrű bir borç bilirim.



İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
ŞEKİLLER DİZİNİ	iii
ÇİZELGELER DİZİNİ	iv
1. GİRİŞ	1
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR	3
2.1. Soft Kümeler	3
2.2. Soft Gruplar	8
2.3. Soft Topolojik Gruplar	10
2.4. Hiperyapılar	14
2.5. Topolojik Hiperyapılar	15
2.6. Soft Topolojiler	25
2.6.1. Esnek Üst ve Alt Vietoris Topolojiler	25
2.6.2. Esnek Üst ve Alt Ko-Kompakt Topolojiler	28
2.6.3. Esnek Üst ve Alt Ko-Lindelöf Topolojiler	29
2.6.4. S Esnek Üst ve Alt Ko-Quasi H-Kapalı Topolojiler	30
2.6.5. Esnek Üst ve Alt D-Topolojiler	33
2.7. Soft Topolojik Hipergrupoidler	38
2.7.1. Soft Topolojik Althipergrupoidler	41
2.8. Soft Topolojik Hipergruplar	44
2.8.1. Soft Topolojik Althipergruplar	48
3. GEREÇ VE YÖNTEM	50
3.1. Gereç	50
3.2. Yöntem	50
4. BULGULAR	51
4.1. Karakterizasyon ve Karşılaştırma	52
5. TARTIŞMA	53
6. SONUÇLAR	54
7. ÖNERİLER	55
KAYNAKLAR	56
ÖZGEÇMİŞ	58

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SOFT TOPOLOJİK HİPERYAPILAR

ABDÜLKADİR OLCAY

HARRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK

Tez Danışman: Doç. Dr. GÜLAY OĞUZ

Yıl: 2024, Sayfa : 58

Beş bölümden meydana gelen bu tezin ilk bölümü giriş bölümü olarak ele alınmış ve literatür özeti yapılmıştır. Sonrasında temel kavramlara değinilmiş olup soft kümeler, soft gruplar, soft topolojik uzaylar, hiperyapılar ve topolojik hiperyapılar alt başlıkları sunulmuştur. Üçüncü bölümde bazı soft topolojiler verilmiştir. Dördüncü bölümde soft topolojik hipergrupidler incelenerek ilgili bazı tanımlar, örnekler ve teoremler verilmiştir. Beşinci bölümde soft topolojik hipergruplar çalışılarak bazı önemli karakterizasyonlar sunulmuştur. Ayrıca soft topolojik hipergrupoidler ile soft topolojik hipergruplar arasındaki ilişki incelenerek sonuç bölümü ile bu tez çalışması tamamlanmıştır.

ANAHTAR KELİMELEER: Soft küme, soft grup, soft topolojik hipergrupoid, soft topolojik hipergrup

ABSTRACT

MASTER THESIS

THE RELATIONS OF SOFT TOPOLOGICAL HYPERSTRUCTURES

ABDÜLKADİR OLCAY

HARRAN UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

MATHEMATICS

Thesis Supervisor: Assoc. Prof. Dr. GÜLAY OĞUZ

Year: 2024, Page : 58

The first part of this thesis, which consists of five chapters, is taken as the introduction and the literature is summarized. Afterwards, the basic concepts are mentioned and the subheadings of soft sets, soft groups, soft topological spaces, hyperstructures and topological hyperstructures are presented. In the third chapter, some soft topologies are given. In the fourth chapter, soft topological hypergroups are examined and some related definitions, examples and theorems are given. In the fifth chapter, soft topological hypergroups are studied and some important characterizations are presented. In addition, the relationship between soft topological hypergroupoids and soft topological hypergroups is examined and this thesis is completed with the conclusion chapter.

KEYWORDS: Soft sets, soft group, soft topological hypergroupoid, soft topological hypergroup

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. $H = \{1, 2, 3, 4\}$ çizelgesi	38
---	----



1. GİRİŞ

Tıp bilimi, çevre, sosyal bilimler, mühendislik, ekonomi ve farklı alanlardaki birçok kompleks problemler belirsiz veriler barındırır. Gündelik hayatta da karşı karşıya gelinen bu problemler, standart matematiksel metotlar ile çözülemez. Standart matematiğin içeriğinde bir nesnenin matematiksel modeli oluşturulduktan sonra, oluşturulan modelin kesin çözümüne ait kavramlar saptanır. Matematiksel modelin kompleks olmasından kaynaklı kesin çözüm üretilemez. Belirsizliği tanımlamak için birkaç iyi kuram mevcuttur. Bunlardan bazıları, kaba kümeler teorisi, kümeler teorisi ve diğer matematiksel araçlardır (Pawlak, 1982; Molodtsov, 1999). Fakat Molodtsov'un söylediği üzere her kuramın kendine has zorlukları mevcuttur (Molodtsov, 1999). Fuzzy küme teorisi (Zadeh, 1965, s.338 – 353) kaba küme teorisi (Pawlak, 1982, s.341-356), yakın küme teorisi (Peters, 1975, s.407-433) bu teorilerden bazılarıdır. Ancak, bu teorilerin de kendi içinde bazı zorlukları vardır. Bu bağlamda, Molodtsov (Molodtsov, 1999, s.19-31) bu zorluklardan bağımsız olarak yeni bir teori önermiştir. “Soft küme teorisi” olarak adlandırılan teori, belirsizlik durumlarında yeni bir bakış açısı sunmaktadır. Bu teori, uygulamada bazı avantajlar sağlamıştır. Molodtsov'dan sonra soft kümenin farklı alanlarda kullanımı artmıştır (Maji ve ark., 2002, s.1077-1083; Chen ve ark., 2005, s.757-763). Maji ve arkadaşları (Maji ve ark., 2003, s.555-562) soft küme üzerinde bazı operasyonları tanımlayarak önemli katkılarda bulunmuşlardır. Soft küme kavramına olarak soft grup Aktaş ve Çağman (Aktas ve Cagman, 2007, s.2726-2735) tarafından soft grup kavramı ve temel özellikleri verilmiştir. Shabir ve Ali (Shabir ve Ali, 2009, s.599-615) yarı grupları kullanarak soft yarı grup tanımını sunmuşlardır. Acar ve arkadaşları (Acar ve ark., 2010, s.3458-3465) ise soft halka kavramını ortaya atmışlardır. Atagün ve Sezgin (Atagün ve Sezgin, 2011, s.592-601) halkalar üzerinde soft alt halka, soft alt modül kavramlarını literatüre kazandırmışlardır. Sun ve arkadaşları (Sun ve ark., 2008, s.403-409) ise soft modül kavramını tanımlayarak bazı özelliklerini incelemişlerdir. Topoloji ve esnek kümenin birleşimi ise Nazmul ve Samanta (Nazmul ve Samanta, 2010, s.151-161) tarafından gerçekleştirilerek, soft topolojik grup tanımı verilmiştir. Ayrıca soft topolojik halka kavramı Shah ve Shaheen (Shah ve Shaheen, 2014, s.725-743) tarafından tanımlanmıştır. Soft grupların etkileri, soft grupoidler, soft topolojik kategoriler, soft halka grupoidleri Oğuz ve arkadaşları tarafından sunulmuştur. Ayrıca, Oğuz ve Bijen tarafından soft topolojik hipergrupoidler çalışılmıştır. Oğuz soft topolojik tranformasyon gruplar, soft topolojik poligruplar, soft topolojik hipergruplar ve soft topolojik grupoidler ile ilgili kapsamlı çalışmalar yapmıştır. Bu tezde ise soft topolojik hipergrupoidler ve soft topolojik hipergruplar detaylı çalışılarak bu kavramlar arasındaki ilişkiler

incelenmiştir.

Hiperyapı kuramı 1934 yılında Marty isimli matematikçi tarafından, İskandinav Matematikçilerinin 8. Kongresi esnasında tanıtılmıştır (Marty, 1934). Kuram birçok araştırmacı tarafınca standart saf matematiğin başka alanlarında da kullanılmıştır. 1934'lü yıllarda hipergrup, hipermodül, hipergrupoid ve hiperring ifadeleri üzerinde etraflı araştırmalar yapılmıştır (Corsini, 1993; Corsini ve Leoreanu, 2003; Davaz ve Leoreanu-Fotea, 2007; Vougiouklis, 1994). Hatta yeni çıkan bir geometri kitabı (Corsini ve Leoreanu, 2003), kafesler, ikili ilişkiler, hipergraflar, kaba ve bulanık kümeler, olasılık, yapay zeka, kodlar, kombinatorik ve kriptografi üzerinde çalışmalara yer vermektedir. Bir başka kitapta (Davaz ve Leoreanu-Fotea, 2007) spesifik olarak hiperleme kuramı ve çalışmaları üzerinde durulmuştur.

Genel biçimde standart cebirsel yapılarla olan ilişkilerini ve kaba kümeler kuramı, geometri, fuzzy, olasılık kuramı ve topoloji gibi alanlarda yapılan türlü uygulamaları araştırılmıştır (Corsini ve Leoreanu, 2003). Standart cebirsel yapılarda iki elemanın bir işlem altında oluşan görüntüsü bir elemanken, cebirsel hiperyapılarda iki elemanın bir hiper işlem altında oluşan görüntüsü bir kümeye denk düşer. Bu şekilde cebirsel yapılar ile cebirsel hiperyapıların genel açıklaması meydana gelmiştir.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Bu bölümde, tezin bütünlüğü için soft kümeler, soft gruplar, soft topolojik uzaylar, hiperyapılar ve topolojik hiperyapılar ile ilgili temel kavramlar sunulmuştur.

2.1. Soft Kümeler

Bu alt bölümde, soft küme teorisinin temel kavramları ve özellikleri verilecektir. Soft küme teorisi, Molodtsov tarafından ortaya atılmıştır (Molodtsov, 1999, s.55-562). Soft kümeler, parametreler kümesi E ile ilişkilendirilen U evrensel kümesinin altkümelerinden oluşur. Soft kümeler üzerindeki işlemler, Maji ve arkadaşları (Maji ve ark., 2002, s.1077-1083) tarafından tanıtılmıştır. Bu işlemler, soft kümelerin birleşimi, kesişimi, tümleyeni ve farkı gibi temel kavramları içermektedir.

Tanım 2.1.1. $A \subseteq E$ ve $F: A \rightarrow P(U)$ olarak tanımlanır ve (F,A) ikilisi U kümesinde bir soft küme oluşturur. Bu yüzden, bir U kümesindeki her (F,A) soft kümesi, U 'nun alt kümelerinin A parametresine bağlı bir ailesidir. Bu soft kümeyi (F,A,U) olarak da ifade edebiliriz (Molodtsov, 1999, s.55-562).

Örnek 2.1.1. U kümesi verilen kumaşları ve E parametreler kümesi de kumaşların türünü belirtsin. $E = \{ e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 \}$ ve $U = \{ h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6 \}$ ise, (F,E) soft kümesini şöyle tanımlayabiliriz.

$$F: E \rightarrow P(U),$$

$e_1 = \text{saten}$, $e_2 = \text{pahalı}$, $e_3 = \text{ipek}$, $e_4 = \text{pamuklu}$, $e_5 = \text{ucuz}$. Buna göre

$$F(e_1) = \{h_1, h_3, h_4\}$$

$$F(e_2) = \{h_1, h_2, h_3, h_4\}$$

$$F(e_3) = \{h_2\}$$

$$F(e_4) = \{h_5, h_6\}$$

$$F(e_5) = \emptyset \text{ ise}$$

$(F, E) = \{(saten\ kumaş, \{h_1, h_3, h_4\}), (pahalı\ kumaş, \{h_1, h_2, h_3, h_4\}), (ipek\ kumaş, \{h_2\}), (pamuklu\ kumaş, \{h_5, h_6\}), (ucuz\ kumaş, \emptyset)\}$

Bir soft kümedir.

Tanım 2.1.2. (F, A) ve (K, B) , U evrenselinde soft küme çiftleri olsun.

Aşağıdaki şartların sağlanması durumunda

i) $A \subset B$

ii) Her $x \in$ için $F(x) = K(x)$

(F, A) çifti, (K, B) çiftinin bir soft alt kümesi olarak adlandırılır. Bu durumda $(H, A) \subseteq (K, B)$ şeklinde gösterilir (Maji ve ark., 2002, s.1077-1083).

Örnek 2.1.2. E parametreler kümesi olmak üzere $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ olsun. $A = \{e_1, e_4, e_6\}$ ve $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ kümelerini göz önüne alınsın. Bu durumda A , B 'nin alt kümesidir.

$U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$ evrenselinde (F, A) ve (K, B) şeklinde iki soft küme aşağıdaki gibi tanımlansın.

$K: B \rightarrow P(E)$ dönüşümü için

$$K(e_1) = \{h_1, h_3\}$$

$$K(e_2) = \emptyset$$

$$K(e_3) = \{h_2, h_4, h_5\}$$

$$K(e_4) = \{h_5, h_6\}$$

$$K(e_5) = \{h_2\}$$

$$K(e_6) = \{h_1, h_4, h_6\}$$

$F: A \rightarrow P(E)$ dönüşümü için

$$F(e_1) = \{h_1, h_3\}$$

$$F(e_4) = \{h_5, h_6\}$$

$$F(e_6) = \{h_1, h_4, h_6\}$$

Buradan açıktır ki, (F, A) kümesi, (K, B) kümesinin soft alt kümesidir.

Tanım 2.1.3. (F, A) ve (K, B) , U evrensel kümesi üzerinde tanımlanmış iki soft küme olsun. Eğer (F, A) ve (K, B) kümelerinde her bir $x \in U$ için $A(x) \subseteq B(x)$ ve $B(x) \subseteq A(x)$ ise, bu durumda (F, A) ve (K, B) kümeleri soft eşittir denir (Maji ve ark., 2002, s.1077-1083).

Tanım 2.1.4. E kümesinin elemanları $E = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_n\}$ olsun. Hepsinin değil işlemi ile elde edilen yeni bir küme oluşturulabilir. Bu kümeye E kümesinin değili denir ve $\neg E$ ile gösterilir. $\neg E$ kümesinin elemanları E kümesinin elemanlarının değilleridir. Yani, $\neg E = \{\neg e_1, \neg e_2, \neg e_3, \dots, \neg e_n\}$ şeklinde yazılır. Burada $\neg e_i$, e_i 'nin değili anlamına gelir (Maji ve ark., 2002, s.1077-1083).

Örnek 2.1.3. (F, E) soft kümesini Örnek 2.1.1 deki gibi ele alalım. Bu durumda $\neg E = \{\text{saten değil, pahalı değil, ipek değil, pamuklu değil, ucuz değil}\}$ olarak tanımlanır (Maji ve ark. 2002, s.1077-1083).

Tanım 2.1.5. (F, A) soft kümesinin tümleyeni $(F, A)^c, (F^c, \neg A)$ şeklinde gösterilir. Burada $H^c : \neg A \rightarrow P(U)$ fonksiyonu, her $x \in \neg A$ için $F^c(x) = U - F(x)$ olarak tanımlanır (Maji ve ark., 2002, s.1077-1083).

Örnek 2.1.4. (F, E) soft kümesi Örnek 2.1.1 deki gibi tanımlansın.

$$(F, E)^c = (F^c, \neg E) = \left[\begin{array}{l} \text{saten olmayan kumaşlar} = \{h_2, h_5, h_6\} \\ \text{pahalı olmayan kumaşlar} = \{h_5, h_6\} \\ \text{ipek olmayan kumaşlar} = \{h_1, h_3, h_4, h_5, h_6\} \\ \text{pamuklu olmayan kumaşlar} = \{h_1, h_2, h_3, h_4\} \\ \text{ucuz olmayan kumaşlar} = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\} \end{array} \right]$$

olur.

Tanım 2.1.6. (H, A) bir soft küme olsun. Eğer A 'nın her elemanı için $H(e)$ boş küme ise, (H, A) boş soft küme olarak adlandırılır ve Φ sembolüyle ifade edilir (Maji ve ark., 2002, s.1077-1083).

Örnek 2.1.5. U mavi kumaşlardan oluşan bir küme, A pembe, beyaz ve siyah renklerden oluşan bir küme olsun. $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4\}$ ve $A = \{\text{pembe, beyaz, siyah}\}$ şeklinde tanımlansın.

(F, A) soft kümesi kumaşların rengine göre sınıflandırmak için,

$F(\text{pembe}) = \text{ pembe olan kumaşlar}$

$F(\text{beyaz}) = \text{ beyaz olan kumaşlar}$

$F(\text{siyah}) = \text{ siyah olan kumaşlar}$

olsun. Burada $(F, A) = \{\text{pembe olan kumaşlar} = \emptyset, \text{beyaz olan kumaşlar} = \emptyset, \text{siyah olan kumaşlar} = \emptyset\}$ olduğundan, (F, A) bir boş soft kümedir (Maji ve ark., 2002, s.1077-1083).

Aşağıda soft kümeler üzerinde bazı cebirsel işlemler tanımlanmıştır.

Tanım 2.1.7. (F, A) ve (K, B) birer soft küme olsun. Bu soft kümelerin birleşimi bir (G, C) soft kümesidir öyle ki $C = A \cup B$ ve her $\alpha \in C$ için bir (G, C) soft kümesidir:

$$G(\alpha) = \begin{pmatrix} H(\alpha), & \alpha \in A - B \\ K(\alpha), & \alpha \in B - A \\ H(\alpha) \cap K(\alpha), & \alpha \in A \cap B \end{pmatrix}$$

Bu durumda, $(H, A) \cup (K, B) = (G, C)$ şeklinde yazılabilir (Maji ve ark., 2002, s.1077-1083).

Tanım 2.1.8. U evrensel kümesi üzerinde tanımlanan (F, A) ve (K, B) soft kümelerinin kesişimi bir (G, C) soft kümesidir öyle ki her $\alpha \in C$ için $G(\alpha) = F(\alpha) \cap K(\alpha)$ dir. Bu kesişim $(F, A) \cap (K, B) = (G, C)$ şeklinde gösterilir (Maji ve ark., 2002, s.1077-1083).

Örnek 2.1.6. (F, A) soft kümesi kumaşların fiyat bilgilerini ve (K, B) soft kümesi kumaşların türlerini olarak tanımlasın.

$$U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7, h_8, h_9, h_{10}\}$$

$$A = \{\text{çok pahalı, pahalı, ucuz}\} \text{ ve}$$

$$B = \{\text{saten, ipek, pahalı}\} \text{ olsun. Burada}$$

$$F(\text{çok pahalı}) = \{h_5, h_7, h_8, h_9\} \quad K(\text{saten}) = \{h_1, h_2, h_5, h_6, h_7\}$$

$$F(\text{pahalı}) = \{h_1, h_2, h_3, h_4\} \quad K(\text{ipek}) = \{h_3, h_8, h_{10}\}$$

$$F(\text{ucuz}) = \emptyset \quad K(\text{pahalı}) = \{h_1, h_2, h_3, h_4\}$$

olarak tanımlasın. Buna göre;

$$(F, A) \tilde{\cup} (K, B) = (G, C) \text{ olmak üzere}$$

$$G(\text{çok pahalı, saten}) = \{h_1, h_2, h_5, h_6, h_7, h_8, h_9\}$$

$$G(\text{çok pahalı, ipek}) = \{h_3, h_5, h_7, h_8, h_{10}\}$$

$$G(\text{çok pahalı, pahalı}) = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_7, h_8, h_9\}$$

$$G(\text{pahalı, saten}) = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7\}$$

⋮

şeklinde olur.

$$(F, A) \tilde{\cap} (K, B) = (N, D) \text{ olmak üzere}$$

$$N(\text{çok pahalı, saten}) = \{h_5, h_7\}$$

$$N(\text{çok pahalı, ipek}) = \{h_8\}$$

$$N(\text{çok pahalı, pahalı}) = \emptyset$$

$$N(\text{pahalı, saten}) = \{h_1, h_2\}$$

⋮

şeklinde olur (Maji ve ark., 2002, s.1077-1083).

2.2. Soft Gruplar

Bu alt bölümde soft gruplarla ilgili bazı temel sonuçlar verilecektir. Aktas ve Cagman (Aktas ve Cagman, 2007, s.2726-2735) tarafından tanımlanan soft grup kavramının bazı özellikleri ve karakterizasyonları gösterilecektir. Bu bölümde G grubu evrensel küme, A da boştan farklı bir küme olarak alınacaktır.

Tanım 2.2.1. (F, A) çifti G üzerinde bir soft küme olarak tanımlansın. Bu durumda A 'nın her elemanı için $F(\alpha) \leq G$ ise (F, A) çiftine G üzerinde bir soft grup denir (Aktas ve Cagman, 2007, s.2726-2735).

(F, A) soft grubunu G grubunun alt gruplarının parametrelendirilmiş bir kümesi olarak da düşünülebilir. Ayrıca, G grubu üzerindeki (F, A) soft grubu (G, F, A) şeklinde de gösterilebilir.

Örnek 2.2.1. (F, A) çifti G abelyan grubu üzerinde soft grup olsun. Bu durumda her $\alpha \in A$ için $F(\alpha) \leq G$ abel grubu ve

$$\text{Hom}(F(\alpha)) = \{f \mid f : F(\alpha) \rightarrow F(\alpha) \text{ bir homomorfizm}\} \text{ bir grup olacaktır.}$$

Ayrıca her $\alpha \in A$ için $F'(\alpha) = \text{Hom}(F(\alpha))$ olarak tanımlanırsa

$(F', A), \text{Hom}(G)$ üzerinde bir soft abelyan grup olur.

Önerme 2.2.1. G üzerinde (F, A) ve (K, B) iki soft grubunun kesişimi de G üzerinde bir soft gruptur (Aktas ve Cagman, 2007, s.2726-2735).

Önerme 2.2.2. G üzerinde (F, A) ve (K, B) soft grupları için ve A ile B 'nin kesişimi boş küme ise, bunların birleşimi olan $(F, A) \cup (K, B)$ de G üzerinde bir soft gruptur (Aktas ve Cagman, 2007, s.2726-2735).

Tanım 2.2.2. G üzerinde (F, A) bir soft grup ve G 'nin birimi e olsun,

Eğer her $\alpha \in A$ için $F(\alpha) = \{e\}$ ise, (F, A) çiftine G üzerinde **birim soft grup** denir.

Eğer her $\alpha \in A$ için $F(\alpha) = G$ ise, (F, A) çiftine G üzerinde **mutlak soft grup** denir.

Önerme 2.2.3. G üzerinde (H, A) bir soft grup ve $f: G \rightarrow K$ bir homomorfizm olsun,

Eğer her $\alpha \in A$ için $H(\alpha) = \text{Ker } f$ ise, $(f(H), A)$ çifti K 'da bir **birim soft grup** oluşturur.

Eğer G üzerinde (H, A) bir mutlak soft grup ve $f: G \rightarrow K$ bir homomorfizm ise, $(f(H), A)$ çifti K 'da bir **mutlak soft grup** oluşturur.

Tanım 2.2.3. G üzerinde (H, A) ve (K, B) birer soft grup olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanır ise

i) $B \subset A$

ii) Her $\alpha \in B$ için $K(\alpha) \leq H(\alpha)$

(K, B) çiftine (H, A) soft grubunun **soft alt grubu** denir ve $(K, B) \lesssim (H, A)$ şeklinde ifade edilir.

Tanım 2.2.4. G üzerinde (F, A) bir soft grup ve $(H, B) \lesssim (F, A)$ ve her $\alpha \in B$ için $H(\alpha)$ grubu $F(\alpha)$ 'nın normal alt grubu, yani $H(\alpha) \trianglelefteq F(\alpha)$ ise, (H, B) çiftine (F, A) soft grubunun **normal soft alt grubu** denir ve $(H, B) \preccurlyeq (F, A)$ şeklinde gösterilir.

Önerme 2.2.4. G üzerinde (F, A) ve (H, B) birer soft grup, $(F, A) \lesssim (H, B)$ ve $f: G \rightarrow K$ bir homomorfizm olsun. Bu durumda $(f(F), A)$ ve $(f(H), B)$ çiftleri K üzerinde birer soft gruplar olup $(f(F), A) \lesssim (f(H), B)$ dir.

Tanım 2.2.5. G üzerinde (F, A) ve K üzerinde (H, B) birer soft grup, $f: G \rightarrow K$ bir örten homomorfizm, $g: A \rightarrow B$ bir örten fonksiyon ve her $\alpha \in A$ için $f(F(\alpha)) = H(g(\alpha))$ şartları sağlanıyorsa, (f, g) çiftine **soft homomorfizm** denir. Bu durumda,

(F,A) ve (H,B) çiftleri **soft homomorfik** olarak adlandırılır ve $(F,A) \sim (H,B)$ şeklinde gösterilir.

Ayrıca, f bir izomorfizm ve g birebir ve örten fonksiyon ise, (f,g) çiftine **soft izomorfizm** denir ve (F,A) ile (H,B) çiftleri **soft izomorfik** olarak alandırılarak $(F,A) \simeq (H,B)$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.2.6. G üzerinde (H,A) ve K üzerinde (N,B) birer soft grup olsun. (H,A) ve (N,B) soft gruplarının çarpımı $(H,A) \times (N,B) = (U, A \times B)$ öyle ki her $(\alpha, \beta) \in A \times B$ için $U(\alpha, \beta) = H(\alpha) \times N(\beta)$ şeklinde tanımlıdır.

Önerme 2.2.5. G üzerinde (H,A) ve K üzerinde (N,B) soft grup olmak üzere, bu soft grupların çarpımı olan $(H,A) \times (N,B)$ çifti de $G \times K$ üzerinde bir soft grup olur.

2.3. Soft Topolojik Gruplar

Bu alt bölümde, Nazmul ve Samanta (Nazmul & Samanta, 2010, s.151 – 161) tarafından ortaya konan soft grubun topolojik formu olan topolojik soft grup kavramını ele alacağız. Bu kısımda, G bir grup ve (G, τ) bir topolojik grup olarak kabul edilir.

Tanım 2.3.1. Bir topoloji olan τ , G grubu üzerinde tanımlanmıştır. (F,A) ise G üzerinde tanımlı ve boş olmayan bir soft küme olarak kabul edilir. Eğer (F,A,τ) üçlüsü aşağıdaki koşulları karşılıyorsa, bu üçlüye G üzerindeki soft topolojik grup denir:

- i) Her $a \in A$ için, $F(a)$ G 'nin bir alt grubunu oluşturur.
- ii) Her $a \in A$ için, $F(a) \times F(a)$ topolojik uzayının $F(a)$ üzerine olan $(x,y) \rightarrow x - y$ dönüşümü süreklidir.
- iii) Tanım 1.4.1'deki (ii) koşulu komşuluk terimleriyle ifade edilirse, herhangi bir $x,y \in F(a)$ için ve $x - y$ 'nin herhangi bir N komşuluğu için, x ve y elemanlarının sırasıyla N_1 ve N_2 komşulukları bulunur ve N_1, N_2 'nin her ikisi de N 'nin alt kümesidir (Shah ve Shaheen, 2014, s.725-743).

Teorem 2.3.1. Bir topolojik grup üzerinde tanımlanan her (indiskret) soft grup, bir soft topolojik grup oluşturur (Shah ve Shaheen, 2014, s.725-743).

Teorem 2.3.2. G üzerinde (F, A, τ) ve (K, B, τ) birer soft topolojik grup olsun. (Shah ve Shaheen, 2014, s.725-743).

(F, A, τ) ile (K, B, τ) arasındaki kesişim, G üzerinde boştan farklı bir topolojik grup oluşturur.

Ayrıca, (F, A, τ) ve (K, B, τ) arasındaki genişletilmiş kesişim de G 'de bir soft topolojik grup oluşturur.

Teorem 2.3.3. R üzerinde (F, A, τ) ve (K, B, τ) birer soft topolojik gruplar olsun. Burada τ , G üzerinde bir topoloji olarak kabul edilir ve aşağıdaki koşullar sağlanır (Shah ve Shaheen, 2014, s.725-743).

- i) Eğer (F, A, τ) ve (K, B, τ) kesişimi boştan farklıysa, bu kesişim G üzerinde bir soft topolojik gruptur.
- ii) A ve B 'nin ayrık olduğu durumda, (F, A, τ) ve (K, B, τ) birleşimi, G üzerinde bir topolojik gruptur.

Tanım 2.3.2. (F, A, τ) bir G soft topolojik grubu olsun. $F(a)$ kümesi boş küme veya G 'ye eşit ise, (F, A, τ) soft topolojik açık grup olarak adlandırılır (Shah ve Shaheen, 2014, s.725-743).

Tanım 2.3.3. (F, A, τ) G de bir soft topolojik grup olsun. (K, B, τ) ise (F, A, τ) 'nin bir normal bir soft topolojik alt grubu olsun. Bu durumda, aşağıdaki koşullar sağlanır:

- i) $B \subset A$ ve her $b \in \text{sup}(K, B)$ için $K(b) F(b)$ nin bir normal alt grubudur.
- ii) Her $b \in \text{sup}(K, B)$ için $(x, y) \rightarrow x - y$ fonksiyonu $K(b) \times K(b)$ topolojik uzayından $K(b)$ topolojik uzayına süreklidir.

Tanım 2.3.4. (F, A, τ) ve (K, B, τ') soft topolojik grupları sırasıyla G ve G' üzerinde düşünelim. τ ve τ' , G ve G' üzerindeki topolojilerdir. $f: G \rightarrow G'$ ve $g: A \rightarrow$

B iki dönüşüm olsun. Eğer aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa, (f,g) çiftine soft topolojik grup homomorfizması denir:

- i. f , bir grup epimorfizmi ve g örten bir fonksiyondur.
- ii. $f(F(a)) = K(g(a))$ eşitliği sağlanır.
- iii. f_a dönüşümü, $(F(a), \tau F(a))$ 'dan $(K(g(a)), \tau K(g(a)))$ 'ya sürekli bir dönüşümdür.

Bu durumda, (F, A, τ) soft topolojik olarak (K, B, τ') 'ye homomorfiktir ve $(F, A, \tau) \sim (K, B, \tau')$ şeklinde gösterilir.

Eğer f bir grup izomorfizmi, g birebir ve örten bir fonksiyon ve f_a sürekli ve açık bir dönüşüm ise, o zaman (f,g) çiftine soft topolojik grup izomorfizması denir. Bu durumda, (F, A, τ) ve (K, B, τ') soft topolojik olarak izomorfiktir ve $(F, A, \tau) \simeq (K, B, \tau')$ şeklinde ifade edilir.

Örnek 2.3.1. (F,A) ve (K,B) G ve G' deki iki soft homomorfik grup olsun. Bu durumda (F,A) (K,B) ye soft topolojik homomorfiktir ve (K,B) nin topolojisi diskret veya indiskret olabilir. Dolayısıyla her soft homomorfik grup, diskret veya indiskret topolojili soft topolojik gruplara eşdeğerdir.

Soft topolojik gruplar, soft gruplar olarak izomorf olabilirler, ancak soft topolojik gruplar olarak izomorf olmayabilirler (Shah &Shaheen, 2014, s.725 – 743).

Tanım 2.3.5. (F, A, τ) G üzerinde bir soft topolojik grup olsun. Bu durumda (F, A, τ) nun kapanışı $([F]G, A, \tau)$ soft kümesidir öyle ki her $a \in A$ için $[F]G(a) = [F(a)]G$ şeklinde tanımlanır.

Burada $[F(a)]G$, G üzerindeki topolojiye göre $F(a)$ nin kapanışdır (Shah ve Shaheen, 2014, s.725-743).

Teorem 2.3.4. (F, A, τ) , G üzerinde bir soft topolojik grup olduğunu varsayalım (Shah ve Shaheen, 2014, s.725-743).

- 1) Bu durumda $([F]G, A, \tau)$, G üzerinde bir soft topolojik gruptur.

2) $(F, A, \tau) \subset \sim ([F]G, A, \tau)$ dir.

3) Eğer (F, A, τ) ve (K, B, τ) , G üzerinde soft topolojik kümeler ise

$([F]G, A, \tau) \oplus \cup ([K]G, B, \tau) \subseteq \sim [(F, A, \tau) \oplus \cup (K, B, \tau)]G$ dir.

Tanım 2.3.6. (F, A, τ) G grubu üzerinde tanımlı bir soft topolojik grup olsun. Eğer her $a \in G$ için $[F]G(a) = G$ geçerli ise, (F, A, τ) bir kapalı soft topolojik grup olarak adlandırılır. Burada $([F]G, A, \tau)$ bir soft topolojik kümedir (Shah ve Shaheen, 2014, s.725-743).

Tanım 2.3.7. (F, A, τ) bir soft topolojik grup olmak üzere, her $a \in A$ için $[F]G(a) = G$ ise (F, A, τ) yoğun denir. Bu durumda $([F]G, A, \tau)$ bir soft topolojik kümedir (Shah ve Shaheen, 2014, s.725-743).

Teorem 2.3.5. (F, A) ve (K, B) , τ topolojisine sahip P üzerinde iki serbest topolojik çoklu grup olsun. Bu durumda (K, B) , (F, A) 'nın esnek bir topolojik alt-çok grubudur, eğer (K, B) , (F, A) 'nın esnek bir alt kümesidir.

İspat. (F, A) ve (K, B) 'nin P üzerinde τ topolojisine sahip iki esnek topolojik çoklu grup olduğunu varsayalım. O halde, boş olmayan $F(x)$ ve $K(x)$ kümeleri P 'nin topolojik alt-çok grubudur. Varsayıma göre, eğer (K, B) (F, A) 'nın esnek bir alt kümesiyse, o zaman $B \subseteq A$ ve $K(b) \subseteq F(b)$ tüm $b \in \text{Supp}(K, B)$ için. Dolayısıyla, $K(b)$, τ tarafından indüklenen topolojiye göre $F(b)$ 'nin topolojik bir alt-çok grubudur. Bu gerçekten yola çıkarak, (K, B) 'nin (F, A) 'nın τ topolojisine sahip esnek topolojik bir altçok grubu olduğu sonucuna varırız.

Teorem 2.3.6. (F, A) , P üzerinde τ topolojisine sahip bir esnek topolojik çoklu grup olsun ve (K, B) , (F, A) 'nın esnek topolojik bir alt-çok grubu olsun.

i. (F, A) ve (K, B) 'nin kısıtlı kesişimi, eğer boş değilse, (F, A) 'nın soft topolojik bir alt-çok grubudur.

ii. (F, A) ve (K, B) 'nin kısıtlı birleşimi, eğer boş değilse (F, A) 'nın esnek topolojik alt-çok grubudur.

İspat. (K,B) 'nin, (F,A) 'nın P üzerinde τ topolojisine sahip bir soft topolojik altçok grubu olduğunu varsayalım. Boş değilse, bundan $B \subseteq A$ ve $K(b)$, tüm $b \in \text{Supp}(K,B)$ için r tarafından indüklenen topolojiye göre $F(b)$ 'nin topolojik bir alt-çok grubu olduğu sonucu çıkar. Dolayısıyla, $A \cap B \subseteq A$ ve $K(b) \subseteq F(b)$ 'nin aynı zamanda tüm $b \in \text{Supp}(K,B)$ için τ tarafından indüklenen topolojiye göre $F(b)$ 'nin topolojik bir alt hipergrupoidi olduğunu görmek kolaydır. Bu nedenle, sınırlı kesişim $(F,A) \cap (K,B)$, τ topolojisine sahip (F,A) 'nın soft topolojik bir altçok grubudur.

ii. İspat i'ye benzer.

Teorem 2.3.7. $f: P \rightarrow P'$, sırasıyla τ ve τ' topolojilerine sahip topolojik çok-grupların iyi bir homomorfizmi olsun ve (F,A) ve (K,B) , P üzerinde iki soft topolojik çok-grup olsun. O zaman $(f(K),B)$, τ' topolojili $(f(F),A)$ 'nın P' üzerinde topolojik bir alt-çoklu grubudur, eğer (K,B) , τ topolojili (F,A) 'nın soft bir alt-çoklu grubudur.

İspat. Varsayalım ki (K,B) , r topolojili (F,A) 'nın P üzerindeki soft topolojik alt-çok grubu olsun. Eğer (K,B) , (F,A) 'nın soft topolojik bir alt-çok grubu ise, bundan $B \subseteq A$ ve $(K(b))$ 'nin, tüm $b \in \text{Supp}(K,B)$ için τ tarafından indüklenen topolojiye göre $F(b)$ 'nin bir topolojik alt-çok grubu olduğu sonucu çıkar $\text{Supp}(K,B)$.

2.4. Hiper yapılar

Bir hiper yapı, boştan farklı bir H kümesiyle birlikte : $H \times H \rightarrow P^*(H)$ “hiperişlem” şeklinde isimlendirilen bir yapıdır; burada $P^*(H)$, H 'nin tüm alt kümelerini temsil eder. Bir hiperişlem “ $\cdot$ ” ile donatılan H kümesine bir “hipergroupid” denir ve $(H, \cdot)$ şeklinde sembolize edilir.

Tanım 2.4.1 $(H, \cdot)$ bir hipergroupid ve K , H 'nin boştan farklı olan bir alt kümesi olsun. $(K, \cdot)$ bir hipergroupid ise K 'ya “alt hipergroupid” denir.

Tanım 2.4.2 $\{(H_i, \cdot_i) \mid i \in \Lambda\}$ bir hipergroupid ailesi olsun. Kartezyen çarpım ile $\prod_{i \in \Lambda} H_i$ üzerinde hiperişlemi tanımlanır $(x_i) \cdot (y_i) = \{(p_i) \mid p_i \in x_i \cdot_i y_i, i \in \Lambda\}$ ve $(\prod_{i \in \Lambda} H_i, \cdot)$ hipergroupid meydana gelir

Tanım 2.4.3. $(H_1, \cdot)$ ve $(H_2, *)$ iki hipergroupid arasında $f: H_1 \rightarrow H_2$ dönüşümü tanımlansın. Bu durumda her $x, y \in H_1$ için

- i) $f(x \cdot y) = f(x) * f(y)$ ise f 'ye iyi homomorfi
- ii) $f(x \cdot y) \subseteq f(x) * f(y)$ ise f 'ye içerme homomorfizması denir.

2.5. Topolojik Hiperyapılar

Bu bölümde esnek olan küme aileleri üstünde tanımlanmakta olan hiper topolojiler tanımlanmakta ve topolojiler arasında bulunan ilişkilerden söz edilmektedir.

Tanım 2.5.1. $(H, \cdot)$ bir hipergroupoid ve (H, τ) bir topolojik uzay olsun. “.” bir hiperişlem olarak adlandırılır:

- i) Sözde sürekli veya kısaca p-sürekli, eğer her $O \in \tau$ için, $O^* = \{(x, y) \in H \times H : x \cdot y \subseteq O\}$ kümesi $H \times H$ 'de açıksa.
- ii) Kuvvetle sözde-sürekli veya kısa sp-sürekli, eğer her $O \in \tau$ için, $O^* = \{(x, y) \in H \times H : x \cdot y \approx O\}$ kümesi $H \times H$ de açıksa.

Sadece ve sadece herhangi bir $O \in \tau$ ve herhangi bir $(x, y) \in H \times H$ çifti için “.” hiperişleminin sp-sürekli olduğunu doğrulamak kolaydır, öyle ki $x \cdot y \subseteq O$ var $U, V \in \tau, x \in U, y \in V$ öyle ki herhangi bir $u \in U$ ve $v \in V$ için $u \cdot v \subseteq O$.

Benzer şekilde, “.” hiper işlemi sp-süreklidir, ancak ve ancak herhangi bir $O \in \tau$ ve herhangi bir $(x, y) \in H \times H$ çifti için $x \cdot y \approx O$ vardır. $U, V \in \tau, x \in U, y \in V$ öyle ki herhangi bir $u \in U$ ve $v \in V$ için $u \cdot v \approx O$ olur.

Hiperişlem “.” $H \times H$ 'den $P^*(H)$ 'ye bir dönüşüm olduğundan H ve $P^*(H)$ üzerinde topolojiler oluşturmak hakkında konuşabiliriz. Ne yazık ki, H üzerinde bir topoloji verilirse, $P^*(H)$ üzerinde bir topoloji oluşturmanın standart ve basit bir yolu yoktur. Bu, aşağıdaki tanıma yol açar.

Tanım 2.5.2. $(H, \cdot)$ bir hipergroupoid, (H, τ) bir topolojik uzay ve $\tau^*, P^*(H)$ üzerinde bir topoloji olsun.

Eğer dönüşümler: $H \times H \rightarrow P^*(H)$ ise, hiperişlem τ^* sürekli olarak adlandırılır ve $\tau \times \tau$ ve τ^* topolojileri süreklidir.

Tanım 2.5.3. $(H, \cdot)$ bir hipergrupoid, (H, τ) bir topolojik uzay ve τ^* , $P^*(H)$ üzerinde bir topoloji olsun.

Üçlü $(H, \cdot, \tau)$, " $\cdot$ " hiper işlemi ise, sözde topolojik veya güçlü sözde topolojik hipergrupoid olarak adlandırılır. Sırasıyla sözde sürekli veya güçlü bir şekilde sözde süreklidir.

Dörtlü $(H, \cdot, \tau, \tau^*)$, " $\cdot$ " hiper işlemi τ^* -sürekli ise, τ^* topolojik hipergrupoid olarak adlandırılır.

Şimdi, H üzerinde bir τ topolojisi verildiğinde, τ^* süreklilik anlamına gelecek şekilde bir τ^* topolojisi bulmanın mümkün olduğunu göstereceğiz. Sırasıyla sadece p -sürekliliği veya sp -sürekliliği.

İlk önce, bir topolojik uzayın (X, τ) bir B tabanını, yani herhangi bir $O \in \tau$ 'nin bir birleşimi olacak şekilde bir açık kümeler ailesini hatırlayalım.

B 'deki kümeler, aşağıdaki iki özelliğe sahiptir.

(B1) Herhangi bir $U_1, U_2 \in B$ ve her $x \in U_1 \cap U_2$ noktası için, $x \in U_3 \subset U_1 \cap U_2$ olacak şekilde bir $U_3 \in B$ vardır.

(B2) Her $x \in X$ için $x \in U_3$ olacak şekilde bir $U_3 \in B$ vardır.

Tersine, (B1) ve (B2)'yi sağlayan herhangi bir küme sistemi, X üzerinde benzersiz bir τ topolojisi belirler, öyle ki bu sistem bir τ tabanıdır.

Ayrıca, S açık kümelerinden oluşan bir B ailesine, eğer tüm sonlu kesişimlerin ailesi, bir topolojik uzayın (X, τ) alt tabanı olarak adlandırılır. $U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_k$, burada $U_i \in S$ için $i = 1, 2, \dots, k$, (X, τ) için bir tabandır. X 'in alt kümelerinin herhangi bir S ailesi, öyle ki tekliği X üzerinde benzersiz bir topolojinin alt tabanı olarak hizmet eder.

Lemma 2.5.1. (H, τ) bir topolojik uzay olsun. Daha sonra tüm kümelerden oluşan U ailesi

$$S_V = \{U \in P^*(H) : U \subseteq V\}, \quad V \in \tau,$$

$P^*(H)$ üzerinde bir τ_u topolojisinin tabanıdır.

İspat. S_{V_1} ve $S_{V_2} \in U$ olsun. $V_1, V_2 \in \tau$ alalım. Açıkça, $S_{V_1} \cap S_{V_2} = S_{V_1 \cap V_2}$ $V_1, V_2 \in \tau$ olacak. Böylece taban aksiyomu (B1) sağlanır. Ayrıca, $H \in \tau$ ve $S_H = P^*(H)$ yani tabanın (B2) aksiyomu da sağlanır.

Tanım 2.5.4. $P^*(H)$ üzerinde τ_u topolojisi önceki lemmadan, $P^*(H)$ üzerinde bir üst topoloji (upper topology) olarak adlandırılır. $P^*(H)$ tarafından indüklenen H üzerinde τ topolojisi.

Teorem 2.5.1. $(H, \cdot)$ bir hipergrupoid ve (H, τ) bir topolojik uzay olsun.

O halde üçlü $(H, \cdot, \tau)$ bir pseudotopological hipergrupoiddir, ancak ve ancak dörtlü $(H, \cdot, \tau, \tau_u)$ bir τ_u -topolojik hipergrupoid ise.

İspat. Kabul edelim ki $\phi : H \times H \rightarrow P^*(H)$ $x \cdot y$ nin sonucunu (x, y) çiftine atayan dönüşüm olsun. Açık bir küme için $V \in \tau$ sahibiz:

$$\begin{aligned} \phi^{-1}(S_V) &= \{(x, y) \in Y \times Y : x \cdot y \in S_V\} \\ &= \{(x, y) \in Y \times Y : x \cdot y \subseteq V\} = V_* \end{aligned}$$

Bu nedenle ϕ süreklidir, ancak ve ancak V_* herhangi bir $V \in \tau$ için açıksa, yani " $\cdot$ " p-sürekliliğinde.

Lemma 2.5.2. (H, τ) bir topolojik uzay olsun. Daha sonra tüm kümelerden oluşan L ailesi

$$I_V = \{U \in P^*(H) : U \approx V\}, \quad V \in \tau,$$

$P^*(H)$ üzerinde bir τ_L topolojisinin bir alt tabanıdır.

İspat. Bunu doğrulamak yeterlidir. $U \in \tau$ $I_V = P^*(H)$ $H \in \tau$ ve $I_H = P^*(H)$ olduğu açıktır.

Tanım 2.5.5. $P^*(H)$ üzerinde τ_L topolojisi önceki lemmadan, $P^*(H)$ üzerinde bir alt topoloji olarak adlandırılır. $P^*(H)$ tarafından indüklenen H üzerinde τ topolojisidir.

Teorem 2.5.2. $(H, \cdot)$ bir hipergrupoid ve (H, τ) bir topolojik uzay olsun. O halde üçlü $(H, \cdot, \tau)$ bir pseudotopological hipergrupoiddir ancak ve ancak dördü $(H, \cdot, \tau, \tau_L)$ ise τ_L güçlü bir pseudotopological- topolojik hipergrupoiddir.

İspat. Kabul edelim ki $\phi: H \times H \rightarrow P^*(H)$ dönüşümü $x \cdot y$ ürününü (x, y) çiftine atayan dönüştüren bir dönüşüm olsun. Bir açık küme $V \in \tau$ elemanına sahibiz.

$$\begin{aligned}\phi^{-1}(I_V) &= \{(x, y) \in H \times H : x \cdot y \in I_V\} \\ &= \{(x, y) \in H \times H : x \cdot y \approx V\} = V^*.\end{aligned}$$

Bu nedenle ϕ , ancak ve ancak V^* herhangi bir $V \in \tau$ için açıktır ise süreklidir yani " " sp-süreklidir olduğunda.

Aşağıdaki lemma bize $P^*(H)$ tarafından indüklenen $P^*(H)$ üzerinde bir τ topolojisi verir.

Lemma 2.5.3. $P^*(H)$ bir topolojik uzay olsun. Daha sonra oluşan tüm U aile setlerin

$$S_V = \{U \in P^*(H) : U \subseteq V, U \in \tau\}$$

$P^*(H)$ üzerinde bir topoloji için bir tabandır. Bu topoloji τ^* ile gösterilir.

(H, τ) bir topolojik uzay olsun. Daha sonra $H \times H$ ve topoloji τ^* üzerinde $P^*(H)$ ürün topolojisini dikkate alıyoruz.

Tanım 2.5.6. (H, o) bir hipergrup ve (H, τ) bir topolojik uzay olsun.

Daha sonra, (H, o, τ) sistemi aşağıdaki koşulları sağlıyor ise bu sisteme topolojik hipergrup denir:

- (1) $H \times H \rightarrow P^*(H)$ ye $(x, y) \rightarrow xoy$ eşlemesi süreklidir;
- (2) $H \times H \rightarrow P^*(H)$ ye $x y \rightarrow x/y$ eşlemesi süreklidir,

burada $x/y = \{z \in H : x \in zoy\}$.

H bir hipergrup ve A ve B , H 'nin boş olmayan altkümeleri olsun. Tanımdan

$$A/B = \cup \{ a/b : a \in A, b \in B \}$$

Lemma 2.5.4. (H, o) bir hipergrup ve τ H üzerinde bir topoloji olsun. O halde aşağıdaki iddialar geçerlidir:

- (1) $(x, y) \rightarrow xoy$ eşlemesi süreklidir, ancak ve ancak her $x, y \in H$ ve $U \in \tau$ için öyle ki $xoy \subseteq U$, $V, W \in \tau$ vardır, öyle ki $x \in V, y \in W$ ve $VoW \subseteq U$;
- (2) $(x, y) \rightarrow x/y$ eşlemesi süreklidir, ancak ve ancak her $x, y \in H$ ve $U \in \tau$ için $x/y \subseteq U$ olacak şekilde, $x \in V, y \in W$ ve $V/W \subseteq U$ olacak şekilde $V, W \in \tau$ vardır.

İspat. (1) ve (2)'nin ispatları benzerdir, dolayısıyla (1)'i ispatlıyoruz.

Diyelim ki hiperişlem $o: H \times H \rightarrow P^*(H)$ süreklidir ve $x, y \in H$ için $xoy \subseteq U$ ve $U \in \tau$.

O halde, $o^{-1}(S_u)$, $H \times H$ 'nin açık bir altkümesidir. Dolayısıyla, açık V altkümeleri vardır ve W nin H öyle ki $(x, y) \in V \times W \subseteq o^{-1}(S_u)$. Böylece, $o(V \times W) \subseteq o(o^{-1}(S_u)) \subseteq S_u$.

Bu nedenle, elimizde $VoW = \cup_{v \in V, w \in W} v o w = \cup_{v \in V, w \in W} o(v, w) \subseteq U$ vardır.

Tersine, $U \in \tau$ ve $(x, y) \in o^{-1}(S_u)$ olduğunu varsayalım. Sonra, (x, y) 'nin $o^{-1}(S_u)$ 'nin bir iç noktası olduğunu gösterelim. $xoy \subseteq U$ olduğundan, öyle bir $V, W \in \tau$ vardır ki $VoW \subseteq U$ burada $x \in V$ ve $y \in W$. Yani elimizde $(x, y) \in V \times W \subseteq o^{-1}$

(S_u) var. Böylece, $o^{-1}(S_u)$, H 'de açıktır. Şimdi, eğer $A \in \tau^*$ ise, o zaman $A = \bigcup_{u \in A} S_u$, τ üzerinde bir boş olmayan bir alt kümesidir. Böylece, $o^{-1}(A) = o^{-1}(\bigcup_{u \in A} S_u) = \bigcup_{u \in A} o^{-1}(S_u)$ olur. Dolayısıyla $o^{-1}(A)$, H üzerinde açıktır. Bu nedenle dönüşüm süreklidir.

Açıkçası, her topolojik grup bir topolojik hiper gruptur. Farklı örnekler de verebiliriz.

Örnek 2.5.1. Ayırık veya ayırık topolojiye sahip her hipergrup topolojik bir hipergruptur.

Örnek 2.5.2. Toplam hipergrup H (H herhangi iki elementin kombinasyonu) kümesi, her keyfi topoloji ile bir topolojik hipergruptur.

X 'in bir topolojik uzay olduğunu varsayalım. X 'te x ve y noktaları olsun. Bizim burada bahsettiğimiz X 'in açık U ve V alt kümeleri varsa, x ve y açık alt kümelerle ayrılabilir U ve V ayırık olacak şekilde sırasıyla x ve y içeren bir Hausdorff uzayı noktaların açık alt kümelerle ayrılabilirdiği topolojik bir uzaydır.

Örnek 2.5.3. (X, τ) bir Hausdorff topolojik uzayı olsun. Her $x, y \in X$ için $xoy = \{x, y\}$ tanımlayalım. O halde, (X, o, τ) bir topolojik hipergruptur.

Gerçekten, varsayalım ki $U \in \tau$. O zaman, $U o U = U$ bu ise orda sürekliliğin olduğu anlamına gelir. Şimdi $x, y \in X$ öyle ki $x/y \subseteq U$ olsun. X hausdorff olduğundan, sırasıyla x ve y içeren X 'in açık ayırık alt kümeleri V ve W vardır. Şimdi, elimizde $(V \cap U) / W = V \cap U \subseteq U$ olur. Yani $(x, y) \rightarrow x/y$ dönüşümü süreklidir.

Örnek 2.5.4. Örnek 2.5.3. ü düşünelim. Standart topoloji ile $X = \mathbb{R}$ olsun. O zaman, $(\mathbb{R}, o, \tau)$ bir topolojik hipergruptur. Burada $xoy = \{x, y\}$ dir. Şimdi $2o(0,1) = \{2\} \cup (0,1)$ $\mathbb{R}$ de açık değildir.

Şimdi bir topolojik hipergrubun temel grubunun bir topolojik grup olduğunu kanıtlayalım. İlk olarak, bir topolojik bölümün, bölüm uzayı kavramını hatırlayalım.

Tanım 2.5.7. X bir topolojik uzay ve $\sim$ üzerinde bir denklik bağıntısı olsun X . Her $x \in X$ için denklik sınıfını $[x]$ ile belirtelim. X 'in bölüm uzayı modul $\sim$, $X/\sim =$

$\{[x]\}$, $x \in X$ kümesi tarafından verilir. Projeksiyon dönüşüne sahibiz $X \rightarrow X/\sim$, $x \rightarrow [x]$ ve $X/\sim$ 'yi topoloji ile donatıyoruz: $U \subseteq X/\sim$ eğer ve yalnızca $p^{-1}(U)$, X 'in açık bir alt kümesiye.

A , X topolojik uzayının bir alt kümesi olsun ve $\sim$ X üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. O zaman, A 'nın $\sim$ 'ye göre doygunluğu $\hat{A} = \{x \in X : \exists a \in A, x \sim a\}$ kümesidir.

Eğer $\hat{A} = A$ ise, A 'ya doymuş denir.

(H, o, τ) bir topolojik hipergrup olsun ve β^* H üzerinde temel bağıntı olsun. O halde, $(H / \beta^*, \tau)$ bir topolojik uzaydır, burada bölüm topolojisi doğal dönüşüm ile indüklenen

$\pi : H \rightarrow H / \beta^*$ Yani $A \subseteq H / \beta^*$ H / β^* 'de açıktır ancak ve ancak $\pi^{-1}(A)$ H da açık ise.

Lemma 2.5.5. (H, o, τ) bir topolojik hiper grup olsun ve β^* H üzerinde temel olsun. O zaman, H 'nin her doymuş alt kümesi tam bir parçadır.

Tanım 2.5.8. Eğer (G, X_G, τ_G) ve (H, X_H, τ_H) topolojik gruplar ise $\phi : G \rightarrow H$ bir grup izomorfizmi, topolojik izomorfizm ve topolojik homeomorfizmadır diyebiliriz. Ayrıca bire bir ise ϕ ve ϕ^{-1} in her ikisi de süreklidir.

Tanım 2.5.9. G bir grup ve $\{A_g\}_{g \in G}$ ayrık ve boş olmayan kümelerin bir koleksiyonu olsun. $H = \bigcup_{g \in G} A_g$ ve her $x, y \in H$, $xoy = A_{gxgy}$ tanımlayalım, burada $x \in A_{gx}$ ve $y \in A_{gy}$ dir. O halde (H, o) bir hiper gruptur denir.

Lemma 2.5.6. $(G, \cdot, \tau)$ bir topolojik grup olsun ve $\{A_g\}_{g \in G}$ bir koleksiyon olsun. Ayrık ve boş olmayan kümeler ve $H = \bigcup_{g \in G} A_g$. O halde $(H, \cdot, \tau)$ bir topolojik hipergruptur. Burada (G, H) hipergrup ve $\tau_H = \{ \bigcup_{u \in U} A_u : U \in \tau \} \cup \{ \emptyset \}$

İspat. τ_H nin H üzerinde bir topoloji olduğunu göstermek kolaydır. Diyelim ki $A_u = \bigcup_{u \in U} A_u$ $x, y \in H$ için $xoy \subseteq A_u$ olacak şekilde H nin açık bir alt kümesi olsun. U , G 'de açık olduğundan ve $g_x g_y \in U$ sırasıyla ve g_x ve g_y içeren G 'nin V ve W açık

alt kümeleri vardır, öyle ki $VW \subseteq U$ dur. Böylece A_v ve A_w sırasıyla x ve y içeren H' de açıktır ve $A_v \cup A_w \subseteq A_u$ olur. Böylece $(x,y) \rightarrow x / y$ süreklidir.

Tanım 2.5.10. $S(Y, K)$, Y üzerindeki bütün esnek kümelerin ailesi ve (U, K) , Y de bir esnek küme olsun. $(U, K)^*$ ve $(U, K)^{\sim}$ esnek küme ailelerini aşağıdaki şekilde tanımlayalım;

$$(U, K)^* = \{(T, K) \in S(Y, K): (T, K) <^{\sim} (U, K)\},$$

$$(U, K)^{\sim} = \{(T, K) \in S(Y, K): (T, K) \cap^{\sim} (U, K) \in \Phi\}.$$

Önerme 2.5.1. $S(Y, K)$ de boş esnek olmayan (G, K) ve (H, K) esnek kümeleri için aşağıdakiler doğrudur;

$$i) (G, K)^* \cap (H, K)^* = ((G, K) \cap^{\sim} (H, K))^*$$

$$ii) (G, K)^* \cup (H, K)^* < ((G, K) \cup^{\sim} (H, K))^*$$

$$iii) ((G, K) \cap^{\sim} (H, K))^{\sim} < (G, K)^{\sim} \cap (H, K)^{\sim}$$

$$iv) (G, K)^{\sim} \cup (H, K)^{\sim} = ((G, K) \cup^{\sim} (H, K))^{\sim}$$

$$v) (G, K) <^{\sim} (H, K) - (G, K)^* < (H, K)^*$$

$$vi) (G, K) <^{\sim} (H, K) - (G, K)^{\sim} < (H, K)^{\sim}$$

$$vii) (G, K) \cap^{\sim} (H, K) = \Phi - (G, K)^* \cap (H, K)^* = \emptyset$$

$$viii) (G, K)^{\sim} \cap (H, K)^{\sim} \in \Phi$$

İspat. i) $(T, K) \in (G, K)^* \cap (H, K)^*$ için $(T, K) \in (G, K)^*$ ve $(T, K) \in (H, K)^*$ olur. Bu durumda $(T, K) <^{\sim} (G, K)$ ve $(T, K) <^{\sim} (H, K)$ olup $(T, K) <^{\sim} (G, K) \cap^{\sim} (H, K)$ bulunur. O halde $(T, K) \in ((G, K) \cap^{\sim} (H, K))^*$ olur.

Tersine, $(T, K) \in ((G, K) \cap^{\sim} (H, K))^*$ olsun. Bu durumda $(T, K) <^{\sim} (G, K) \cap^{\sim} (H, K)$ olup $(T, K) <^{\sim} (G, K)$ ve $(T, K) <^{\sim} (H, K)$ olur. O halde $(T, K) \in (G, K)^*$ ve $(T, K) \in (H, K)^*$ dir. Böylece $(T, K) \in (G, K)^* \cap (H, K)^*$ olduğu elde edilir.

ii) $(T, K) \in (G, K)^* \cup (H, K)^*$ olsun. Bu durumda $(T, K) \in (G, K)^*$ veya $(T, K) \in (H, K)^*$ dir. O halde $(T, K) < (G, K)$ veya $(T, K) < (H, K)$ olur.

iii) $(T, K) \in ((G, K) \cap (H, K))^\sim$ alalım. Bu durumda $(T, K) \cap ((G, K) \cap (H, K)) \in G \Phi$ olup $(T, K) \cap (G, K) \in G \Phi$ ve $(T, K) \cap (H, K) \in G \Phi$ dir. O halde $(T, K) \in (G, K)^\sim$ ve $(T, K) \in (H, K)^\sim$ dir. Böylece $(T, K) \in (G, K)^\sim \cap (H, K)^\sim$ olduğu elde edilir.

iv) $(T, K) \in ((G, K) \cup (H, K))^\sim$ alalım. Bu durumda $(T, K) \cap ((G, K) \cup (H, K)) \in G \Phi$ olup $((T, K) \cap (G, K)) \cup ((T, K) \cap (H, K)) \in G \Phi$ dir. O halde $(T, K) \cap (G, K) \in G \Phi$ veya $(T, K) \cap (H, K) \in G \Phi$ olur. O halde $(T, K) \in (G, K)^\sim$ veya $(T, K) \in (H, K)^\sim$ dir. Böylece $(T, K) \in (G, K)^\sim \cup (H, K)^\sim$ olduğu elde edilir.

Tersine, $(T, K) \in (G, K)^\sim \cup (H, K)^\sim$ alalım. Bu durumda $(T, K) \in (G, K)^\sim$ veya $(T, K) \in (H, K)^\sim$ olur. O halde $(T, K) \cap (G, K) \in G \Phi$ veya $(T, K) \cap (H, K) \in G \Phi$ olduğu elde edilir. Böylece $((T, K) \cap (G, K)) \cup ((T, K) \cap (H, K)) \in G \Phi$ ve buradan da $(T, K) \cap ((G, K) \cup (H, K)) \in G \Phi$ dir. O halde $(T, K) \in ((G, K) \cup (H, K))^\sim$ olur.

v) $K_k^y \in (G, K)$ olsun. Bu durumda $K_k^y \in (G, K)^*$ dir. $(G, K)^* < (H, K)^*$ olduğundan $K_k^y \in (H, K)^*$ ve böylece $K_k^y \in (H, K)$ dir. Sonuç olarak, $(G, K) < (H, K)$ olur.

Tersine, $(T, K) \in (G, K)^*$ olsun. Bu durumda $(T, K) < (G, K)$ olup $(G, K) < (H, K)$ olduğundan $(T, K) < (H, K)$ ve böylece $(T, K) \in (H, K)^+$ olduğu elde edilir.

vi) $(T, K) \in (G, K)^\sim$ olsun. Bu durumda $(T, K) \cap (G, K) \in G \Phi$ olup $(G, K) < (H, K)$ olduğundan $(T, K) \cap (H, K) \in G \Phi$ olur. Böylece $(T, K) \in (H, K)^\sim$ ve dolayısıyla $(G, K)^\sim < (H, K)^\sim$ dir.

vii) $Y^\sim \cap (G, K) \in G \Phi$ olduğundan $Y^\sim \in (G, K)^\sim$ ve $Y^\sim \cap (H, K) \in G \Phi$ olduğundan $Y^\sim \in (H, K)^\sim$ olup $Y^\sim \in (G, K)^\sim \cap (H, K)^\sim$ dir. O halde $(G, K)^\sim \cap (H, K)^\sim \in G \Phi$ dir.

Önerme 2.5.2 $S(Y, K)$ bir esnek küme ailesi ve $(G, K) \in S(Y, K)$ olsun. Bu durumda $Y^\sim - (G, K)$ kümesi (G, K) nin esnek tümleyeni olmak üzere aşağıdakiler doğrudur;

$$i) S(Y, K) - (G, K)^+ = (Y^\sim - (G, K))^+$$

$$\text{ii) } S(Y, K) - (G, K)^- = (Y^- - (G, K)) -$$

İspat.

$$\text{i) } (B, K) \in S(Y, K) - (G, K)^+ - (B, K) \emptyset (G, K)^+ - (B, K) \# \sim (G, K) \rightarrow (B, K) \cap \sim (Y^- - (G, K)) \text{ G } \phi - (B, K) \in (Y^- - (G, K))$$

$$\text{ii) } (B, K) \in S(Y, K) - (G, K)^- - (B, K) \emptyset (G, K)^- - (B, K) \cap \sim (G, K) = \phi \rightarrow (B, K) < (Y^- - (G, K)) - (B, K) \in (Y^- - (G, K)) .$$

Lemma 2.5.7. $S(Y, K)$ bir esnek küme ailesi olsun. Bu durumda (C_1, K) ve (C_2, K) esnek kümeleri için aşağıdakiler doğrudur,

$$\text{i. } [S(Y, K) - (C_1, K)^-] \cap \sim [S(Y, K) - (C_2, K)^-] = S(Y, K) - [(C_1, K)^- \cup (C_2, K)^-]$$

$$\text{ii. } S(Y, K) - [(C_1, K)^+ \cup (C_2, K)^+] = [S(Y, K) - (C_1, K)^+] \cap \sim [S(Y, K) - (C_2, K)^+]$$

İspat.

$$\text{i) } (H, K) \in [S(Y, K) - (C_1, K)^-] \cap \sim [S(Y, K) - (C_2, K)^-]$$

$$- (H, K) \in S(Y, K) - (C_1, K)^- \text{ ve } (H, K) \in S(Y, K) - (C_2, K)^-$$

$$- (H, K) \emptyset (C_1, K)^- \text{ ve } (H, K) \emptyset (C_2, K)^-$$

$$- (H, K) \cap \sim (C_1, K) = \phi \text{ ve } (H, K) \cap \sim (C_2, K) = \phi$$

$$- (H, K) \cap \sim [(C_1, K) \cup (C_2, K)] = \phi$$

$$- (H, K) \emptyset [(C_1, K) \cup (C_2, K)]^-$$

$$- (H, K) \in S(Y, K) - [(C_1, K) \cup (C_2, K)]^-$$

$$- (H, K) \in S(Y, K) - [(C_1, K)^- \cup (C_2, K)^-].$$

$$\text{ii) } (H, K) \in S(Y, K) - [(C_1, K)^+ \cup (C_2, K)^+]$$

$$- (H, K) \emptyset [(C_1, K)^+ \cup (C_2, K)^+]$$

- $(H, K) \in (C_1, K)^+ \vee (H, K) \in (C_2, K)^+$
- $(H, K) \in S(Y, K) - (C_1, K)^+ \vee (H, K) \in S(Y, K) - (C_2, K)^+$
- $(H, K) \in [S(Y, K) - (C_1, K)^+] \cap [S(Y, K) - (C_2, K)^+]$.

2.6. Soft Topolojiler

2.6.1. Esnek Üst ve Alt Vietoris Topolojiler

Bu kısımda, esnek haldeki topolojik uzayının esnek olan açık alt kümelerinden faydalanılarak esnek küme aileleri üstünde üst Vietoris topolojiler ifade edilmektedir. Sonrasında ise esnek küme değerli olan bir dönüşümün üst Vietoris devamlılığı tanımlanarak bahsi geçen küme değerli olan dönüşümün devamlılığının buna karşılık olan tek değerli olan bir esnek fonksiyonunu devamlılığı türünden ifade verilmektedir. İlk olarak aşağıda bulunan esnek üst vietoris topolojiler tanımlanırken kullanılan bir teorem gösterilmektedir.

Teorem 2.6.1. (Y, t, K) bir esnek topolojik uzay olsun. Bu durumda

$$\beta_{sv}^+ = \{(U, K)^+ : (U, K) \text{ esnek açık küme}\}$$

$$\delta_{sv}^- = \{(U, K)^- : (U, K) \text{ esnek açık küme}\}$$

Esnek küme aileleri $S(Y, K)$ üstündeki çeşitli iki tür esnek topolojik uzay adına sırası ile bir taban ve alt tabandır.

İspat. $\bar{Y} \in \tau$ esnek kümesi adına $\bar{Y}^+ = S(Y, K) \subset \beta_{sv}^+ \vee S(Y, K) = U_{\bar{Y}}^+ \in \beta_{sv}^{+\bar{Y}^+}$ olur.

$(U_1, K)^+, (U_2, K)^+ \in \beta_{sv}^+$ olmak üzere $(G, K) \in (U_1, K)^+ \cap (U_2, K)^+ \cap (U_3, K)^+$ alalım. (U_1, K) ve (U_2, K) esnek açık kümeler olduğu için $(U_3, K) = (U_1, K) \tilde{\cap} (U_2, K)$ da esnek bir açık kümedir. Buna ek olarak $(U_1, K)^+ \cap (U_2, K)^+ = ((U_1, K) \tilde{\cap} (U_2, K))^+$ olduğundan.

$(G, K) \in (U_3, K)^+$ olup $(U_3, K)^+ \in \beta_{sv}^+ \vee (U_3, K)^+ \subset (U_1, K)^+ \cap (U_2, K)^+$ dır.

Bu nedenle $\beta_{sv} +$ esnek bir topolojik tabandır.

Tanım 2.6.1.

i) $S(Y, K)$ üstünde $\beta_{sv} +$ ailesini taban olarak kabul eden topolojiye esnek olan üst vietoris topoloji ismi verilir ve $\tau_{sv} +$ olarak gösterilir.

ii) $S(Y, K)$ üstünde $\delta_{sv} -$ ailesini alt taban olarak kabul eden topolojiye ise esnek alt vietoris topoloji denilmektedir ve $\tau_{sv} -$ ile gösterilir.

iii) $S(Y, K)$ üstünde $\beta_{sv} + \cup s_{sv} - = \{(U, K) +, (U, K) -: (U, K) \text{ esnek açık olan küme}\}$ ailesini alt taban şeklinde kabul etmekte olan topolojiye (ya da $\tau_{sv} -$ ailesini taban olarak kabul eden) esnek Vietoris topoloji denir ve bahsi geçen topoloji τ_{sv} ile gösterilmektedir.

Örnek 2.6.1. $Y = \{y_1, y_2\}$ evrensel kümesine ait parametre kümesi $K = \{k_1, k_2\}$ olsun.

$$(F_1, K) = \{(k_1, \{y_1\})\},$$

$$(F_2, K) = \{(k_1, \{y_2\})\},$$

$$(F_3, K) = \{(k_1, Y)\},$$

$$(F_4, K) = \{(k_2, \{y_1\})\},$$

$$(F_5, K) = \{(k_1, \{y_1\}), (k_2, \{y_1\})\},$$

$$(F_6, K) = \{(k_1, \{y_2\}), (k_2, \{y_1\})\},$$

$$(F_7, K) = \{(k_1, Y), (k_2, \{y_1\})\},$$

$$(F_8, K) = \{(k_2, \{y_2\})\},$$

$$(F_9, K) = \{(k_1, \{y_1\}), (k_2, \{y_2\})\},$$

$$(F_{10}, K) = \{(k_1, \{y_2\}), (k_2, \{y_2\})\},$$

$$(F_{11}, K) = \{(k_1, Y), (k_2, \{y_2\})\}, (F_{12}, K) = \{(k_2, Y)\},$$

$$(F_{13}, K) = \{(k_1, \{y_1\}), (k_2, Y)\},$$

$$(F_{14}, K) = \{(k_1, \{y_2\}), (k_2, Y)\}$$

esnek kümeler olmak üzere

$$S(Y, K) = \{ \emptyset, (F_1, K), (F_2, K), (F_3, K), (F_4, K), (F_5, K), (F_6, K), (F_7, K), (F_8, K), (F_9, K), (F_{10}, K), (F_{11}, K), (F_{12}, K), (F_{13}, K), (F_{14}, K), Y^+ \}$$

esnek küme ailesi ve

$$r^+ = \{ \emptyset, Y, (F_1, K), (F_8, K), (F_9, K) \}$$

esnek topolojisi verilsin. Bu durumda

$$(F_1, K)^+ = \{(F_1, K)\}$$

$$(F_8, K)^+ = \{(F_8, K)\}$$

$$(F_9, K)^+ = \{(F_1, K), (F_8, K), (F_9, K)\}$$

$$Y^+ = (Y, K) \text{ olur.}$$

O halde $\beta SV^+ = \{(F_1, K)^+, (F_8, K)^+, (F_9, K)^+, Y^+\}$ ailesi (Y, K) üzerinde bir esnek topoloji için tabandır. Çünkü,

$$Y^+ = (Y, K)$$

$$(F_1, K)^+ \cap (F_8, K)^+ = \emptyset,$$

$$(F_1, K)^+ \cap (F_9, K)^+ = (F_1, K)^+ \in \beta SV^+,$$

$$(F_1, K)^+ \cap Y^+ = (F_1, K)^+ \in \beta SV^+,$$

$$(F_8, K)^+ \cap (F_9, K)^+ = (F_8, K)^+ \in \beta SV^+,$$

$$(F_8, K)^+ \cap Y^+ = (F_8, K)^+ \in \beta SV^+,$$

$$(F_9, K)^+ \cap Y^+ = (F_9, K)^+ \in \beta SV^+ \text{ dir.}$$

Bu esnek topoloji (üst esnek Vietoris topoloji) de

$$\begin{aligned} rSV^+ &= \{(F_1, K)^+, (F_8, K)^+, (F_1, K)^+ \cup (F_8, K)^+, (F_9, K)^+, \sim Y^+, \emptyset\} \\ &= \{\{(F_1, K)\}, \{(F_8, K)\}, \{(F_1, K), (F_8, K)\}, \{(F_1, K), (F_8, K), (F_9, K)\}, (Y, K), \emptyset\} \text{ olur.} \end{aligned}$$

2.6.2. Esnek Üst ve Alt Ko-kompakt Topolojiler

Bu bölümde (Y, τ, K) esnek topolojik uzayının kompakt alt kümelerinden faydalanarak $S(Y, K)$ üstünde üst (alt) ko-kompakt topolojiler tanımlanmaktadır ve bu topolojiler üst (alt) esnek Vietoris topolojilerle karşılaştırılmıştır. Aşağıda $S(Y, K)$ üstünde esnek üst ve alt ko-kompakt topolojilerin tanımlarken kullanıldığı bir örnek yer almaktadır.

Önerme 2.6.2.1. (Y, τ, K) esnek bir topolojik uzay olarak kabul edilirse bu durumda:

$$\beta_{sc}^+ = \{S(Y, K) - (C, K) - : (C, K) \text{ esnek kompakt küme}\} \text{ ve}$$

$$S_{sc}^- = \{\emptyset\} \cup S(Y, K) - (C, K) - : (C, K) \text{ esnek kompakt küme esnek küme aileleri}$$

$S(Y, K)$ üstünde çeşitli iki esnek olan topoloji adına sırası ile esnek alt ve esnek tabandır.

İspat. $(C, K) = \emptyset$ esnek kompakt halde bir küme olarak $(C, K) - = \emptyset$ olduğu için $S(Y, K) - (C, K) - = S(Y, K) - \emptyset = S(Y, K) \in \beta_{sc}^+$ olur.

Böylelikle $S(Y, K) - (C_1, K) -$, $S(Y, K) - (C_2, K) -$ için

$$[S(Y, K) - (C_1, K) -] \cap [S(Y, K) - (C_2, K) -] = S(Y, K) - [(C_1, K) - \cup (C_2, K) -]$$

olduğu için $S(Y, K) - [(C_1, K) - \cup (C_2, K) -] \in \beta_{sc}^+$ tür. Bu durumda β_{sc}^+ esnek bir topolojik adına uzay tabanıdır. Benzer biçimde S_{sc}^- -ninde esnek bir topolojik uzay adına alt taban olduğu gösterilebilmektedir.

$$\text{Böylelikle } S(Y, K) = \bigcup_{S(Y, K)} \in \beta_{sc}^+ S(Y, K)' \text{ dir.}$$

$$S(Y, K) - (C_1, K) - S(Y, K) - (C_2, K) - \in \beta_{sc}^+ \text{ olarak}$$

$(H, K) \in [S(Y, K) - (C_1, K)] \cap [S(Y, K) - (C_2, K)]$ için

$[S(Y, K) - (C_1, K)] \cap [S(Y, K) - (C_2, K)] \cap [S(Y, K)] = S(Y, K) - [(C_1, K) \cup (C_2, K)]$ olduğu için $(H, K) \in S(Y, K) - [(C_1, K) \cup (C_2, K)]$ bulunmaktadır.

Buna ek olarak $(C_1, K) \cup (C_2, K) = ((C_1, K) \cup (C_2, K))$ 'dır, (C_2, K) esnek olan kompakt kümeler adına $(C_1, K) \tilde{U} (C_2, K)$ esnek olan kompakt küme olduğu için $S(Y, K) - [(C_1, K) \cup (C_2, K)] \in \beta_{sc} +$ 'dır. Bu durumda $\beta_{sc} +$ esnek bir topolojik uzay adına tabandır.

Benzer biçimde $s_{sc} -$ 'ninde esnek bir topolojik uzay adına taban olduğu söylenebilir.

2.6.3. Esnek Üst ve Alt Ko-Lindelöf Topolojiler

Bu alt bölümde (Y, τ, K) esnek olan topolojik uzayının Lindelöf alt kümelerinden faydalanarak $S(Y, K)$ üstünde üst ko-lindelöf topolojileri tanımlansa da sonrasında bahsi geçen topolojilerle üst esnek vietoris topolojileri karşılaştırılmıştır. İlk olarak aşağıda $S(Y, K)$ üstünde esnek olan üst ko-lindelöf topolojileri tanımlanırken kullanılan bir önerme gösterilmektedir.

Önerme 2.6.3.1. (Y, τ, K) esnek bir topolojik uzay olarak kabul edilirse bu durumda

$$\beta_{SL} + = \{S(Y, K) - (L, K) : (L, K) \text{ lindelöf esnek küme}\}$$

$$\beta_{SL} - = \{\emptyset\} \cup \{S(Y, K) - (L, K) : (L, K) \text{ Lindelöf esnek küme}\}$$

Esnek kümedeki aileler $S(Y, K)$ üstünde çeşitli olarak iki topoloji adına sırası ile taban ve alt tabandır.

İspat. $(L, K) = \emptyset$ esnek lindelöf bir küme olarak $(L, K) = \emptyset$ olduğu için $S(Y, K) - (L, K) = S(Y, K) \in \beta_{SL} +$ ve böylelikle $S(Y, K) = U / S(Y, K) \in \beta_{SL} + S(Y, K)$ tespit edilir.

Tanım 2.6.3.1.

i) $S(Y, K)$ üstünde $\beta_{SL}+$ ailesini taban olarak kabul etmekte olan topolojiye esnek bir üst ko-lindelöf topoloji ismi verilmektedir ve $\tau_{SL}+$ ile gösterilmektedir.

ii) $S(Y, K)$ üstünde $S_{SL}-$ ailesini alt taban olarak kabul etmekte olan topolojiye esnek alt ko-lindelöf topoloji ismi verilir ve $\tau_{SL}-$ ile gösterilmektedir.

2.6.4. Esnek Üst ve Alt Ko-quasi H-kapalı Topolojiler

Bu alt bölümde, (Y, τ, K) esnek topolojik uzayının esnek olan quasi H-kapalı alt kümelerinden faydalanılarak $S(Y, K)$ üstünde üst ko-quasi H-kapalı topolojiler tanımlanmaktadır.

Tanım 2.6.4.1 (Y, τ, K) esnek bir topolojik uzay ve (H, K) bu uzayda esnek bir küme olursa:

- i) (H, K) nin açık her örtüsünün esnek kapanışları (H, K) yı örtmekte olan sonlu alt bir örtüye sahipse yani (H, K) nin tüm $\{G_i, K\} | i \in \Lambda\}$ esnek açık örtüsünün $(H, K) \subset \bigcup_i^n = 1cl(G_{\lambda i}, K)$ koşulunu sağlayan bir $\{(G_{\lambda 1}, K), (G_{\lambda 2}, K), (G_{\lambda n}, K)\}$ sonlu esnek alt örtüsü bulunuyorsa (H, K) esnek kümesine quasi-H-kapalıdır denilmektedir.
- ii) $\bar{Y}$ nin tüm açık örtüsünün esnek olan kapanışları yine onu örten sonlu bir alt örtüsü bulunuyorsa, yani $\bar{Y}$ nin $\{G_i, K\} | i \in \Lambda\}$ esnek açık şartını sağlamakta olan $\{(G_{\lambda 1}, K), (G_{\lambda 2}, K), (G_{\lambda n}, K)\}$ sonlu bir alt örüntü bulunuyorsa topolojik uzayına quasi-H-kapalıdır denilmektedir
- iii) Esnek Hausdroff ve esnek olan quasi-Hkapalı topolojik uzasya esnek H-kapalı topoloji uzay ismi verilmektedir.
- iv) Y 'nin tüm esnek quasi H-kapalı kümesi esnek kapalıysa (Y, τ, K) 'ye esnek HC topolojik uzay ismi verilmektedir.
- v) X 'in tüm esnek kapalı kümesi esnek quasi H-kapalıysa (Y, τ, K) 'ye esnek C-kompakt topolojik uzay ismi verilmektedir.

Önerme 2.6.4.1. (Y, r, K) bir esnek topolojik uzay olsun. Bu durumda $S(Y, K)$ üzerindeki rSL^+ , rSL^- , rSC^+ , rSC^- , rSV^+ , rSV^- esnek topolojileri için aşağıdakiler doğrudur;

- i) (Y, r, K) Lindelöf kapalı esnek topolojik uzay ise $rSL^+ \leq rSV^+$ ve $rSL^- \leq rSV^-$ olur.
- ii) $rSC^+ \leq rSL^+$ ve $rSC^- \leq rSL^-$

İspat.

i) $S(Y, K) - (L, K)^- \in \beta SL^+$ olsun. (L, K) Lindelöf esnek küme olduğundan hipotezden (L, K) esnek kapalı kümedir. O halde $Y^* - (L, K)$ esnek açık küme olup $(Y^* - (L, K))^- \in rSV^+$ olur. Ayrıca $S(Y, K) - (L, K)^- = (Y^* - (L, K))^-$ olduğundan $S(Y, K) - (L, K)^- \in rSV^+$ bulunur. Böylece $rSL^+ \leq rSV^+$ olduğu elde edilir. Benzer şekilde $rSL^- \leq rSV^-$ olduğu gösterilebilir.

ii) Bir (Y, r, K) esnek topolojik uzayında, kompakt esnek kümeler Lindelöf olduğundan ispat açıktır.

Tanım 2.6.4.2. (X, σ, E) , (Y, r, K) iki esnek topolojik uzay, $E_{e^{x^0}}$ X de bir esnek nokta ve $F: (X, \sigma, E) \rightarrow (Y, r, K)$ da bir esnek küme değerli dönüşüm olsun.

$F(E_{e^{x^0}}) \cap^* (L, K) = \emptyset$ olan bir (L, K) esnek Lindelöf kümesi verilsin. $E_{e^x} \in (P, E)$ olduğunda $F(E_{e^x}) \cap^* (L, K) = \emptyset$ şartını sağlayan $E_{e^{x^0}}$ in bir (P, E) esnek açık komşuluğu varsa F ye $E_{e^{x^0}}$ da esnek üstten L yarı süreklidir denir.

Önerme 2.6.4.2. $F: (X, \sigma, E) \rightarrow (Y, r, K)$ bir küme değerli dönüşüm ve (Y, r, K) esnek Lindelöf kapalı topolojik uzay olsun. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur;

- i) F nin $E_{e^{x^0}}$ da esnek üstten L yarı sürekli olması için gerek ve yeter şart $Y^* - (V, K)$ esnek Lindelöf küme olmak üzere her (V, K) esnek açık kümesi için $F^+(V, K)$ nin esnek açık küme olmasıdır.

ii) F nin $E_{e^{x^0}}$ da esnek alttan L yarı sürekli olması için gerek ve yeter şart $Y^\sim - (V, K)$ esnek Lindelöf küme olmak üzere her (V, K) esnek açık kümesi için $F^-(V, K)$ nin esnek açık küme olmasıdır.

İspat.

i) $(\Rightarrow)$ $Y^\sim - (V, K)$ esnek Lindelöf küme olacak şekilde (V, K) esnek açık küme ve $E_{e^{x^0}} \in F^+(V, K)$ olsun. Bu durumda $F(E_{e^{x^0}}) \prec F(F^+(V, K)) \prec (V, K)$ dir ve böylece $F(E_{e^{x^0}}) \cap^\sim (Y^\sim - (V, K)) = \emptyset$ dir. $Y^\sim - (V, K)$ esnek Lindelöf küme ve $F, E_{e^{x^0}}$ da esnek üstten L yarı sürekli olduğundan $E_{e^{x^0}}$ ın bir (P, E) esnek açık komşuluğu vardır öyle ki $F(P, E) \cap^\sim (Y^\sim - (V, K)) = \emptyset$ dir. O halde $F(P, E) \prec (V, K)$ dir ve böylece $E_{e^{x^0}} \in (P, E) \prec F^+(V, K)$ dir. O halde $E_{e^{x^0}} \in^\sim \text{int}(F^+(V, K))$ dir. Dolayısıyla

$F^+(V, K) \prec \text{int}(F^+(V, K))$ bulunur ki buda $F^+(V, K)$ nin esnek açık bir küme olduğunu gösterir.

$(\Leftarrow)$ (L, K) bir esnek Lindelöf küme olmak üzere $F(E_{e^{x^0}}) \cap^\sim (L, K) = \emptyset$ olsun. Bu durumda $F(E_{e^{x^0}}) \prec Y^\sim - (L, K)$ dir. (Y, r, K) esnek Lindelöf kapalı topolojik uzay olduğundan, (L, K) esnek kapalı küme olup $Y^\sim - (L, K)$ esnek açık bir kümedir.

Hipotezden $F^+(Y^\sim - (L, K))$ bir esnek açık kümedir ve $E_{e^{x^0}} \in F^+(Y^\sim - (L, K))$ dir. $(P, E) = F^+(Y^\sim - (L, K))$ olarak alınırsa (P, E) esnek kümesi, $E_{e^{x^0}}$ ın bir esnek açık komşuluğudur. Buradan $F(E_{e^{x^0}}) \prec F(P, E) \prec (Y^\sim - (L, K))$ olduğu elde edilir. Ayrıca

$F(P, E) \cap^\sim (L, K) = \emptyset$ dir. Dolayısıyla $F, E_{e^{x^0}}$ da esnek üstten L yarı süreklidir

ii) $(\Rightarrow)$ $Y^\sim - (V, K)$ bir esnek Lindelöf küme olacak şekilde (V, K) esnek açık küme ve $E_{e^{x^0}} \in F^-(V, K)$ olsun. Bu durumda $F(E_{e^{x^0}}) \cap^\sim (V, K) \neq \emptyset$ dir. $Y^\sim - (V, K)$ esnek Lindelöf küme olup F dönüşümü $E_{e^{x^0}}$ da esnek alttan L yarı sürekli olduğundan $E_{e^{x^0}}$ ın bir (P, E) esnek açık komşuluğu vardır öyle ki $F(P, E) \cap^\sim (V, K) \neq \emptyset$ dir. Buradan

$E_{e^{x^0}} \in (P, E) <^\sim F^-(V, K)$ dir ve böylece $E_{e^{x^0}} \in \text{int}(F^-(V, K))$ dir. O halde $F^-(V, K) <^\sim \text{int}(F^-(V, K))$ ve $F^-(V, K)$ bir esnek açık kümedir.

($\Leftrightarrow$) $Y^\sim - (V, K)$ bir esnek Lindelöf küme ve $F(E_{e^{x^0}}) \cap^\sim (V, K) \neq \emptyset$ olsun. (Y, r, K) esnek Lindelöf kapalı topolojik uzay olduğundan $Y^\sim - (V, K)$ esnek kapalı ve (V, K) esnek açık bir kümedir. Hipotezden $F^-(V, K)$ esnek açık küme ve $E_{e^{x^0}} \in F^-(V, K)$ dir. $(P, E) = F^-(V, K)$ olarak alınırsa, (P, E) esnek kümesi, $E_{e^{x^0}}$ in bir esnek açık komşuluğudur. O halde $F(P, E) \cap^\sim (V, K) \neq \emptyset$ dir. Böylece F dönüşümü $E_{e^{x^0}}$ da esnek alttan L yarı süreklidir.

2.6.5. Esnek Üst ve Alt D Topolojiler

Bu bölümde (Y, τ, K) esnek topolojik uzayının esnek olan kapalı G_δ alt kümelerinden faydalanarak $S(Y, K)$ üstünde üst (alt) D topolojileri tanımlanmaktadır.

Tanım 2.6.5.1. (Y, τ, K) esnek olan bir uzay topolojisi ve (G, K) ise bahsi geçen uzayda esnek olan bir küme olsun.

(G, K) kümesi sayılabilir miktarda esnek kapalı kümelerin bir birleşimi şeklinde yazılabiliyor ise, yani F_j, K 'ler esnek olan kapalı kümeler olarak $(G, K) = U_i^\infty = 1 (F, K)$ olarak yazılabiliyor ise (G, K) 'ya esnek f_σ küme denilmektedir.

(G, K) kümesi sayılabilir düzeyde esnek açık kümenin bir kesişimi şeklinde yazılabiliyor ise yani (U_j, K) 'ler esnek bir açık küme olarak $(G, K) = U_i^\infty = 1 (U_j, K)$ olarak yazılabiliyor ise (G, K) 'ya G_δ esnek küme denilmektedir.

Y in her esnek quası H-kapalı kümesi esnek kapalı ise (Y, r, K) ye esnek HC topolojik uzay denir.

X in her esnek kapalı kümesi esnek quası H- kapalı ise (Y, r, K) ye esnek C-kompakt topolojik uzay denir.

Önerme 2.6.5.1. (Y, r, K) bir esnek topolojik uzay olsun. Bu durumda $\beta SH^+ = \{S(Y, K) - (H, K)^- : (H, K) \text{ esnek quası } H - \text{kapalı küme}\}$ $S_{SH}^- = \{\emptyset\} \cup \{S(Y, K) - (H, K)^+ : (H, K) \text{ esnek quası } H - \text{kapalı küme}\}$ esnek küme aileleri $S(Y, K)$ üzerinde iki farklı topoloji için sırasıyla bir taban ve alt tabandır.

İspat. $(G, K) \in S(Y, K) - (H_1, K)^-$ ve $(G, K) \in S(Y, K) - (H_2, K)^-$ olsun. Bu durumda

$(G, K) \in [S(Y, K) - (H_1, K)^-] \cap [S(Y, K) - (H_2, K)^-] = S(Y, K) - [(H_1, K)^- \cup (H_2, K)^-]$ dir. O halde βSH^+ bir esnek topolojik uzay için tabandır.

Benzer şekilde S_{SH}^- nin da bir esnek topolojik uzay için alt taban olduğu gösterilebilir.

Tanım 2.6.5.2.

i) $S(Y, K)$ üzerinde βSH^+ ailesini taban kabul eden topolojiye esnek üst ko-quasi H-kapalı topoloji denir ve rSH^+ ile gösterilir.

ii) $S(Y, K)$ üzerinde S_{SH}^- ailesini alt taban kabul eden topolojiye esnek alt ko-quasi H- kapalı topoloji denir ve r_{SH}^- ile gösterilir.

Önerme 2.6.5.2. $Y = \{y\}$ evrensel kümesine ait parametre kümesi $K = \{k, k\}$ olsun. $(G, K) = \{(k, \{y\})\}$ esnek küme olmak üzere $r^\sim = \{\Phi, Y^\sim, (G, K)\}$ esnek topolojisi verilsin. O halde $r^{\sim'} = \{\Phi, Y^\sim, (H, K)\}$ olup burada $(H, K) = \{(k, \{y\})\}$ dir. Bu durumda

$$\phi^- = \emptyset$$

$$(G, K)^- = \{(G, K), Y^\sim\}$$

$$(H, K)^- = \{(H, K), Y^\sim\}$$

$$Y^{\sim-} = S(Y, K) = \{(G, K), (H, K), Y^\sim\} \text{ olduğundan}$$

$$S(Y, K) - \phi^- = S(Y, K) = \{(G, K), (H, K), Y^\sim\}$$

$$S(Y, K) - (G, K)^- = \{(H, K)\}$$

$$S(Y, K) - (H, K)^- = \{(G, K)\}$$

$$S(Y, K) - Y^{\sim-} = \emptyset \text{ dir.}$$

O halde $\beta SH^+ = \{S(Y, K) - \phi^-, S(Y, K) - (G, K)^-, S(Y, K) - (H, K)^-, S(Y, K) - Y^-\} = \{(G, K), (H, K), Y^-\}$ ailesi $S(Y, K)$ üzerinde bir esnek topoloji için tabandır. Bu esnek topoloji (üst esnek ko-quasi H-kapalı topoloji), $rSH^+ = \{(G, K), (H, K), Y^-\}$ ailesi $S(Y, K)$ üzerinde bir esnek topoloji için tabandır. Bu esnek topoloji (üst esnek ko-quasi H-kapalı topoloji), $rSH^+ = \{(G, K), (H, K), Y^-\}$ ailesi $S(Y, K)$ üzerinde bir esnek topoloji için tabandır. Bu esnek topoloji (üst esnek ko-quasi H-kapalı topoloji), $rSH^+ = \{(G, K), (H, K), Y^-\}$ ailesi $S(Y, K)$ üzerinde bir esnek topoloji için tabandır.

Örnek 2.6.5.1. $Y = \{y\}$ evrensel kümesine ait parametre kümesi $K = \{k, k\}$ olsun. $(G, K) = \{(k, \{y\})\}$ esnek kümesi için $r^{\sim} = \{\Phi, Y^{\sim}, (G, K)\}$ esnek topolojisi verilsin. O halde $(H, K) = \{(k, \{y\})\}$ esnek küme olmak üzere $r^{\sim'} = \{\Phi, Y^{\sim}, (H, K)\}$ olur. Bu durumda

$$\phi^+ = \emptyset$$

$$(G, K)^+ = \{(G, K)\}$$

$$(H, K)^+ = \{(H, K)\}$$

$$Y^{+} = S(Y, K) \text{ olduğundan}$$

$$S(Y, K) - \phi^+ = S(Y, K) = \{(G, K), (H, K), Y^{\sim}\}$$

$$S(Y, K) - (G, K)^+ = \{(H, K), Y^{\sim}\}$$

$$S(Y, K) - (H, K)^+ = \{(G, K), Y^{\sim}\}$$

$$S(Y, K) - Y^{+} = \emptyset \text{ dir. O halde}$$

$$S_{SH}^- = \{S(Y, K) - \phi^+, S(Y, K) - (G, K)^+, S(Y, K) - (H, K)^+, S(Y, K) - Y^{+}\}$$

$$= \{(G, K), (H, K), Y^{\sim}\}, \{(H, K), Y^{\sim}\}, \{(G, K), Y^{\sim}\}, \emptyset \} \text{ ailesi } S(F, K)$$

üzerinde bir esnek topoloji için alt tabandır

Dolayısıyla $\beta_{SH}^- = \{(G, K), (H, K), Y^{\sim}\}, \{(H, K), Y^{\sim}\}, \{(G, K), Y^{\sim}\}, \{Y^{\sim}\}, \emptyset \}$ ailesi $S(Y, K)$ üzerinde bir esnek topoloji için tabandır.

Bu esnek topoloji (alt esnek ko-quasi H-kapalı topoloji) de

$$r_{SH}^- = \{(G, K), (H, K), Y^{\sim}\}, \{(H, K), Y^{\sim}\}, \{(G, K), Y^{\sim}\}, \{Y^{\sim}\}, \emptyset \} \text{ olur.}$$

Önerme 2.6.5.3. (Y, r, K) bir esnek topolojik uzay olsun. Bu durumda $S(Y, K)$ üzerinde tanımlı rSH^+ , rSH^- , rSV^+ , rSV^- topolojileri için aşağıdakiler doğrudur;

i) (Y, r, K) HC esnek topolojik uzay ise $rSH^+ \leq rSV^+$ ve $rSH^- \leq rSV^-$ dir.

ii) (Y, r, K) HC ve C-kompakt esnek topolojik uzay ise $rSH^+ = rSV^+$ ve $rSH^- = rSV^-$ dir.

İspat.

i) $S(Y, K) - (H, K)^- \in \beta SH^+$ olsun. (H, K) quasi H-kapalı ve (Y, r, K) HC esnek topolojik uzay olduğundan (H, K) esnek kapalı dolayısıyla $Y^\sim - (H, K)$ esnek açık bir kümedir. O halde $(Y^\sim - (H, K))^+ \in rSV^+$ dir. $S(Y, K) - (H, K)^- = (Y^\sim - (H, K))^+$ olduğundan $S(Y, K) - (H, K)^- \in rSV^+$ ve dolayısıyla $rSH^+ \leq rSV^+$ dir. Benzer şekilde $S(Y, K) - (H, K)^+ = (Y^\sim - (H, K))^-$ eşitliği kullanılarak $rSH^- \leq rSV^-$ olduğu gösterilebilir. Bir HC ve C-kompakt esnek topolojik uzayda esnek quasi H-kapalı kümeler ve esnek kapalı kümeler çakışık olduğundan $rSH^+ = rSV^+$ ve $rSH^- = rSV^-$ eşitlikleri elde edilir.

Tanım 2.6.5.3. (X, σ, E) , (Y, r, K) iki esnek topolojik uzay, Ee^{x^0} , X te bir esnek nokta ve

$F: (X, \sigma, E) \rightarrow (Y, r, K)$ esnek küme değerli dönüşüm olsun.

i) $F(Ee^{x^0}) \cap^\sim (V, K) = \emptyset$ ve $Y^\sim - (V, K)$ esnek quasi H-kapalı olan bir (V, K) esnek kümesi için $Ee^x \in (P, E)$ olduğunda $F(Ee^x) \cap^\sim (V, K) = \emptyset$ şartını sağlayan Ee^{x^0} in bir (P, E) esnek açık komşuluğu varsa F ye Ee^{x^0} da esnek üstten H yarı süreklidir denir.

ii) $F(Ee^{x^0}) \cap^\sim (V, K) \neq \emptyset$ ve $Y^\sim - (V, K)$ esnek quasi H-kapalı olan bir (V, K) esnek kümesi için $Ee^x \in (P, E)$ olduğunda $F(Ee^x) \cap^\sim (V, K) \neq \emptyset$ şartını sağlayan Ee^{x^0} in bir (P, E) esnek açık komşuluğu varsa F ye Ee^{x^0} da esnek alttan H yarı süreklidir denir.

iii) F dönüşümü X in her Ee^{x^0} esnek noktasında esnek üstten (alttan) H yarı sürekli ise F ye X üzerinde esnek üstten (alttan) H yarı süreklidir denir.

Önerme 2.6.5.4. $(X, \sigma, E), (Y, r, K)$ esnek topolojik uzaylar ve $F: (X, \sigma, E) \rightarrow (Y, r, K)$ esnek küme değerli dönüşüm olsun. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur;

i) F nin $E_{e^{x^0}}$ da esnek üstten H yarı sürekli olması için gerek ve yeter şart

$f: (X, \sigma, E) \rightarrow (S(Y, K), r_{SH^+}, K)$ esnek fonksiyonunun $E_{e^{x^0}}$ da sürekli olmasıdır.

ii) F nin $E_{e^{x^0}}$ da esnek alttan H yarı sürekli olması için gerek ve yeter şart

$f: (X, \sigma, E) \rightarrow (S(Y, K), r_{SH^-}, K)$ esnek fonksiyonunun $E_{e^{x^0}}$ da sürekli olmasıdır.

İspat. i) $F(E_{e^{x^0}}) \cap^{\sim} (H, K) = \emptyset$ dir. $F, E_{e^{x^0}}$ da esnek üstten H yarı sürekli olduğundan $E_{e^{x^0}}$ ın bir (P, E) esnek açık komşuluğu vardır öyle ki $E_{e^x} \in (P, E)$ olduğunda $F(E_{e^x}) \cap^{\sim} (P, E) = \emptyset$ dir. Böylece $F(E_{e^x}) = f(E_{e^x}) \cap (H, K)^-$ olup $f(E_{e^x}) \in S(Y, K) - (H, K)^-$ dir. Dolayısıyla $f: (X, \sigma, E) \rightarrow (S(Y, K), r_{SH^+}, K)$ esnek fonksiyonu $E_{e^{x^0}}$ da esnek sürekli dir. $(\Leftarrow)$ $(H, K), F(E_{e^{x^0}}) \cap^{\sim} (H, K) = \emptyset$ şartını sağlayan bir esnek quasi H -kapalı küme olsun. Bu durumda $f(E_{e^x}) \cap (H, K)^-$ ve böylece $f(E_{e^{x^0}}) \in S(Y, K) - (H, K)^- \in \beta_{SH^+}$ dir. $f: (X, \sigma, E) \rightarrow (S(Y, K), r_{SH^+}, K)$ fonksiyonu $E_{e^{x^0}}$ da esnek sürekli olduğundan $E_{e^{x^0}}$ ın bir (P, E) esnek açık komşuluğu vardır öyle ki $f(P, E) \in S(Y, K) - (H, K)^-$ dir. O halde her $E_{e^x} \in (P, E)$ için $f(E_{e^x}) \in S(Y, K) - (H, K)^-$ dir. Böylece $F(E_{e^x}) \cap^{\sim} (H, K) = \emptyset$ dir. Dolayısıyla $F, E_{e^{x^0}}$ da esnek üstten H yarı sürekli dir.

ii) Benzer şekilde ispat edilebilir.

2.7. Soft Topolojik Hipergrupoidler

Soft topolojik hiper groupids konusuna öncelikle tanımlardan başlıyoruz. Bilinen ve kullanışlı bazı tanım ve gösterimler aşağıda verilmektedir. Tanımlar (Corsini, 2003; Wall, 1934; De Salvo ve Freni, 1980; Corsini, 1993) kaynaklarında bulunmaktadır.

Tanım 2.7.1. (F, A) H üzerinde alt bir soft küme olsun. Eğer $F(x)$ her $x \in \text{Supp}(F, A)$ için H 'ın althipergroupid'i ise (F, A) H üzerinde bir soft hipergroupid şeklinde isimlendirilir. Bu tanımlamayı aşağıda verilen örnek ile açıklayalım.

Örnek 2.7.1. $H = \{1, 2, 3, 4\}$ aşağıda verilen çizelge gibi bir “.” hiperişlemine sahip bir küme olsun:

·	1	2	3	4
1	{1, 2, 3}	{1, 2}	{1, 3}	{1, 3}
2	{1, 2}	{1, 2, 3}	{2, 3}	{1, 3}
3	{1, 3}	{2, 3}	{1, 2, 3}	{1, 2, 3}
4	{1, 3}	{2, 3}	{1, 2, 3}	{1, 2, 3}

Şekil 2.1. $H = \{1, 2, 3, 4\}$ çizelgesi

Öyleyse $(H, \cdot)$ bir hiper groupid'dir. Bir soft küme $F: \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{P}^*(H)$ tarafından

$$F(n) = \begin{cases} \{1, 2, 3\} & \text{eğer } 2|n \\ H & \text{eğer } 2 \nmid n \end{cases}$$

Öyleyse $(F, \mathbb{Z})$ H üzerinde bir soft hiper groupid'dir.

Örnek 2.7.2. $\mathbb{Z}$ üzerinde “.” hiperişlemi $a \cdot b = \{an + bm \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$ ve $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$ olmak üzere tam kafes $L = \{0, \alpha, \beta, 1\}$ olsun. $F: L \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{Z})$ ile tanımlanan küme, $F(0) = 7 \cdot \mathbb{Z}$, $F(1) = 3 \cdot \mathbb{Z}$, $F(\alpha) = 2 \cdot \mathbb{Z}$, $F(\beta) = 5 \cdot \mathbb{Z}$ değerli bir fonksiyon olsun. Öyleyse;

(F, L) , $\mathbb{Z}$ üzerinde soft bir hiper groupid'dir.

Teorem 2.7.1. $\{(F_i, A_i) \mid i \in \Lambda\}$ H üzerinde bir soft hiper groupid ailesi olsun.

(1) $\bigcap_{i \in \Lambda} A_i \neq \emptyset$ ile $\{(F_i, A_i) \mid i \in \Lambda\}$ ailesinin sınırlı kesişimi boş değilse H üzerinde bir soft hiper groupid'dir.

(2) Tüm $i, j \in \Lambda$, $x \in \bigcap_{i \in \Lambda} A_i$ için $F_i(x) \subseteq F_j(x)$ veya $F_j(x) \subseteq F_i(x)$ ise $\{(F_i, A_i) \mid i \in \Lambda\}$ ailesinin genişletilmiş birleşimi H üzerinde bir soft hiper groupid'dir.

(3) $\{(F_i, A_i) \mid i \in \Lambda\}$ ailesinin genişletilmiş kesişimi boş değilse H üzerinde bir soft hiper groupid'dir.

(4) Eğer $F_i(x) \subseteq F_j(x)$ veya $F_j(x) \subseteq F_i(x)$ ise tüm $i, j \in \Lambda$, $x \in \bigcap_{i \in \Lambda} A_i$ için $\bigcap_{i \in \Lambda} A_i \neq \emptyset$ ise $\{(F_i, A_i) \mid i \in \Lambda\}$ ailesinin sınırlı birleşimi H üzerinde bir soft hiper groupid'dir.

İspat. (1) $\bigcap_{i \in \Lambda} (F_i, A_i) = (F, A)$ yazabiliriz, burada $A = \bigcap_{i \in \Lambda} A_i$ ve $\forall_i(x) \in F(x) = \bigcap_{i \in \Lambda} F_i(x)$ 'tir. $x \in \text{Supp}(F, A)$ olsun. Ardından $\bigcap_{i \in \Lambda} F_i(x) \neq \emptyset$ ve bu şekilde tüm $i \in \Lambda$ için $F_i(x) \neq \emptyset$ olur. Çünkü $\{(F_i, A_i) \mid i \in \Lambda\}$ H üzerinde dolu olan bir soft hiper groupid ailesidir, yani $F_i(x)$ tüm $i \in \Lambda$ için H 'nin bir subhipergroupid'idir, yani $F(x) = \bigcap_{i \in \Lambda} F_i(x)$ H 'ın bir subhipergroupid'idir.

(2) $\bigcup_{i \in \Lambda} (F_i, A_i) = (F, B)$ biçiminde yazabiliriz. Ardından $B = \bigcup_{i \in \Lambda} A_i$ ve tüm $x \in B$ için, $F(x) = \bigcup_{i \in \Lambda(x)} F_i(x)$. Öncelikle (F, B) 'nin boş olmadığına dikkat etmek gerek çünkü $\text{Supp}(F, B) = \bigcup_{i \in \Lambda} (F_i, A_i) \neq \emptyset$. $x \in \text{Supp}(F, B)$ olsun. O halde $F(x) = \bigcup_{i \in \Lambda(x)} F_i(x) \neq \emptyset$ ve bazı $i_0 \in \Lambda(x)$ için $F_{i_0}(x) \neq \emptyset$ mevcuttur. Fakat teorem gereği, bütün $i, j \in \Lambda(x)$, $x \in \bigcap_{i \in \Lambda} A_i$ için $F_i(x) \subseteq F_j(x)$ veya $F_j(x) \subseteq F_i(x)$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla $\bigcup_{i \in \Lambda(x)} F_i(x)$, H 'nin bir subhipergroupid'idir. Dolayısıyla genişletilmiş birlik $\bigcup_{i \in \Lambda} (F_i, A_i)$, H üzerinde soft bir subhipergroupid'idir.

Sonuç: $\{(F_i, A_i) \mid i \in \Lambda\}$ H üzerinde dolu olan bir soft hiper groupid ailesi olsun. Bütün $i, j \in \Lambda$ için $A_i \cap A_j = \emptyset$ ise, $\{(F_i, A_i) \mid i \in \Lambda\}$ ailesinin genişletilmiş birleşimi H üzerinde bir soft hiper groupid'dir.

İspat. Tüm $i, j \in \Lambda$ için $A_i \cap A_j = \emptyset$ olduğundan, $\Lambda(x) = \{i \mid x \in A_i\}$ kümesi tüm $x \in \bigcup_{i \in \Lambda} A_i$ için sadece tek elemanı vardır. Dolayısıyla $i \in \Lambda(F_i, A_i)$ H üzerinde bir soft hiper groupid'dir.

Teorem 2.7.2. $\{(F_i, A_i) \mid i \in \Lambda\}$ H üzerinde dolu olan bir soft hiper groupid ailesi olsun.

i) $\wedge$ -kesişim $\bigwedge_{i \in \Lambda} (F_i, A_i)$ boş değilse H üzerinde bir soft hiper groupid'dir

ii)Tüm $i, j \in \Lambda$, $a_i \in A_i$ için $F_i(a_i) \subseteq F_j(a_j)$ ya da $F_j(a_j) \subseteq F_i(a_i)$ ise, o halde $\vee$ -union $i \in \Lambda(F_i, A_i)$ H üzerinde bir soft hipergroupid'dir

İspat. (ii) $\bigvee_{i \in \Lambda} (F_i, A_i) = (F, B)$ biçiminde yazılabilir. $(x_i)_{i \in \Lambda} \in \text{Supp}(F, B)$ olsun. Ardından $F((x_i)_{i \in \Lambda}) = \bigcup_{i \in \Lambda} F_i(x_i) \neq \emptyset$ ve bu şekilde bazı $i_0 \in \Lambda$ $F_{i_0}(x_{i_0}) \neq \emptyset$ olur. Fakat kuramdan dolayı, bütün $i, j \in \Lambda$ $x_i \in A_i$ ve H 'nin $F_i(x_i)$ subhipergroupid'i için $F_i(x_i) \subseteq F_j(x_j)$ ya da $F_j(x_j) \subseteq F_i(x_i)$ olduğunu biliyoruz, $\bigcup_{i \in \Lambda} F_i(x_i)$ 'nin H 'nin bir subhiper groupid'i olduğunu tespit ederiz. Dolayısıyla $\vee$ -union $i \in \Lambda (F_i, A_i)$ H üzerinde bir soft hiper groupid'dir.

Teorem 2.7.3. $i \in \Lambda$ için (F_i, A_i) H_i üzerinde soft hiper groupids olsun. Öyleyse $\{(F_i, A_i) \mid i \in \Lambda\}$ ailesinin Kartezyen çarpımı $\prod_{i \in \Lambda} H_i$ üzerinde bir soft hipergroupid'dir.

İspat. $\prod_{i \in \Lambda} (F_i, A_i) = (F, B)$ biçiminde yazılabilir. $(x_i)_{i \in \Lambda} \in \text{Supp}(F, B)$ olsun. Ardından $F((x_i)_{i \in \Lambda}) = \prod_{i \in \Lambda} F_i(x_i) \neq \emptyset$ ve bu şekilde bütün $i \in \Lambda$ için $F_i(x_i) \neq \emptyset$ olur. $F_i(x_i)$ H_i 'nin bir subhipergroupid'i olduğundan dolayı, $\prod_{i \in \Lambda} F_i(x_i)$ 'nin $\prod_{i \in \Lambda} H_i$ 'nin bir subhipergroupid'i olduğunu tespit ederiz. Dolayısıyla $\prod_{i \in \Lambda} (F_i, A_i)$ $\prod_{i \in \Lambda} H_i$ üzerinde bir soft hiper groupid'dir.

Tanım 2.7.2. (F, A) ve (G, B) sırasıyla H_1 ve H_2 üzerinde dolu olan iki soft hipergroupid olsun. (f, g) , (F, A) 'dan (G, B) 'ye soft bir fonksiyon olsun. Eğer f , H_1 'den H_2 'ye bir iyi homomorfizmi ise, o halde (f, g) , “hipergroupids'in soft iyi homomorfizmi” şeklinde isimlendirilir.

Teorem 2.7.4. (f, g) (F, A) 'dan (G, B) 'ye soft iyi bir homomorfizma ve $g : A \rightarrow B$ injektif bir eşleme olsun. O zaman $(f(F), B)$ H_2 üzerinde bir soft hipergroupid'dir.

İspat. $\text{Supp}(f(F), B) = g(\text{Supp}(F, A))$ olduğunu görmek oldukça basittir. $y \in \text{Supp}(f(F), B)$ olsun. Öyleyse, $y = g(x)$ olacak biçimde $x \in \text{Supp}(F, A)$ mevcuttur. Dolayısıyla $F(x) \neq \emptyset$ olur. Bu şekilde, dolu olan $F(x)$ kümesi H_1 'in bir subhipergroupid'idir. f iyi bir homomorfizma olduğundan,

$f(F(x))$ H_2 'nin bir subhipergroupid'idir. Dolayısıyla $(f(F), B)$ H_2 üzerinde bir soft hipergroupid'dir.

Teorem 2.7.5. (f, g) (F, A) 'dan (G, B) 'ye bir soft iyi homomorfizması olsun. O halde $(f^{-1}(G), A)$ eğer boş değilse H_1 üzerinde bir soft hipergroupid'dir.

İspat. Bunu görmek oldukça basittir. $Supp(f^{-1}(G), A) \subseteq g^{-1} Supp(G, B)$.

$x \in Supp(f^{-1}(G), A)$ olsun. O halde $g(x) \in Supp(G, B)$ olur. (G, B) soft hipergroupid'ini kullanarak, $G(g(x))$ H_2 'nin bir subhipergroupid'idir. f bir iyi homomorfizmi olduğundan, $(f^{-1}(G(g(x)))) = f^{-1}(G)(x)$ H_1 'in bir subhipergroupid'idir. Dolayısıyla $(f^{-1}(G), A)$ H_1 üzerinde bir soft hipergroupid'dir.

Teorem 2.7.6. $(F, A), (G, B)$ ve (H, C) sırasıyla H_1, H_2 ve H_3 üzerinde soft hipergroupid, $(f, g) : (F, A) \rightarrow (G, B)$ ve $(f', g') : (G, B) \rightarrow (H, C)$ iki soft içermeye (iyi) homomorfizması olsun. O halde $(f' \circ f, g' \circ g) : (F, A) \rightarrow (H, C)$ bir soft iyi homomorfizmidir.

İspat. Bu oldukça açıktır.

2.7.1 Soft Topolojik Althipergroupoidler

Bu bölümde, H üzerinde olan soft alt groupoids'i tanıtır ve bazı açıklayıcı örnekler vereceğiz.

Tanım 2.7.1.1. (F, A) ve (G, B) H üzerinde iki soft hipergroupid olsun. O halde (F, A) 'ya “soft hipergroupoid” denir, şayet (G, B) , aşağıda verilen şartları karşılıyorsa $(F, A) \leq_s (G, B)$ ile gösterilir:

$$(1) A \subseteq B,$$

$$(2) F(x), \text{ bütün } x \in Supp(F, A) \text{ için } G(x) \text{ 'in bir subhipergroupoid'dir.}$$

Örnek 2.7.1.1. Z üzerinde “.” hiperişlemi $a \cdot b = \{0, a, b\}$ ve $(F, Z), (G, Z)$ Z üzerinde şu şekilde tanımlanan soft kümeler olsun:

$$F(n) = \begin{cases} 2 \cdot \mathbb{Z} & \text{eğer } 3|n \\ \mathbb{Z} & \text{eğer } 3|n+1 \\ \emptyset & \text{eğer } 3|n+2 \end{cases}, G(n) = \begin{cases} 2 \cdot \mathbb{Z} & \text{eğer } 3|n \\ \mathbb{Z} & \text{eğer } 3 \nmid n \end{cases}$$

O halde $(F, Z), (G, Z)$ 'nin soft bir subhipergrupoid'dir.

Örnek 2.7.1.2. (F, A) H üzerinde bir soft hipergrupoid ve $B \subseteq A$ olsun. O halde $(F|_B, B), (F, A)$ 'nın soft bir subhipergrupoid'dir.

Teorem 2.7.1.1. (F, A) ve (G, B) H üzerinde iki soft hipergrupoid ve $(F, A) \subseteq (G, B)$ olsun. Öyleyse $(F, A) \leq_s (G, B)$ olur.

İspat: Bu oldukça kolaydır.

Teorem 2.7.1.2. (F, A) H üzerinde bir soft hipergrupoid olsun ve $(F_i, A_i) \mid i \in \Lambda$ (F, A) 'nın soft subhipergrupoids'inin bir ailesi olsun.

- (1) $\cap_{i \in \Lambda} A_i = \emptyset$ olan $\{(F_i, A_i) \mid i \in \Lambda\}$ ailesinin sınırlı kesişimi, doluyse (F, A) 'nın soft bir subhipergrupoid'idir.
- (2) Eğer bütün $i, j \in \Lambda(x)$, $x \in \cup_{i \in \Lambda} A_i$ için $F_i(x) \subseteq F_j(x)$ ya da $F_j(x) \subseteq F_i(x)$ ise, $\{(F_i, A_i) \mid i \in \Lambda\}$ ailesinin genişletilmiş birleşimi (F, A) 'nın soft bir subhipergrupoid'idir.
- (3) $\{(F_i, A_i) \mid i \in \Lambda\}$ ailesinin genişletilmiş kesişimi doluyse (F, A) 'nın soft bir subhipergrupoid'idir.
- (4) Eğer bütün $i, j \in \Lambda$, $x \in \cap_{i \in \Lambda} A_i$ için $F_i(x) \subseteq F_j(x)$ ya da $F_j(x) \subseteq F_i(x)$ ise, $\{(F_i, A_i) \mid i \in \Lambda\}$ ailesinin $\cap_{i \in \Lambda} A_i = \emptyset$ ile sınırlı birleşimi (F, A) 'nın soft bir subhipergrupoid'idir.

Teorem 2.7.1.3. $\{(F_i, A_i) \mid i \in \Lambda\}$ H üzerinde dolu olan bir soft hipergrupoid ailesi olsun. $(G_i, B_i), (F_i, A_i) (i \in \Lambda)$ 'nin soft bir subhipergrupoid olsun.

- (1) $\wedge$ -kesişim $i \in \Lambda(G_i, B_i)$, doluyse $(i \in \Lambda) (F_i, A_i)$ 'nin soft bir subhipergrupoid'idir.

(2) Bütün $i, j \in \Lambda$, $a_i \in B_i$ için $G_i(a_i) \subseteq G_j(a_j)$ veya $G_j(a_j) \subseteq G_i(a_i)$ ise, $\vee$ -union $\bigvee_{i \in \Lambda} (G_i, B_i)$, $i \in \Lambda(F_i, A_i)$ 'nin soft bir subhipergrupoid'idir.

Teorem 2.7.1.4. $f : H_1 \rightarrow H_2$ hipergrupoids'in iyi bir homomorfizması ve (F, A) ve (G, B) H_1 üzerinde iki soft hipergrupoid olsun. Eğer $(F, A) \leq_s (G, B)$ ise, o zaman $(f(F), A) \leq_s (f(G), B)$ olur.

İspat. $(F, A) \leq_s (G, B)$ olduğunu varsayalım. $x \in \text{Supp}(f(F), A)$ olsun. O halde $A \subseteq B$ ve $F(x)$ tüm $x \in \text{Supp}(F, A)$ için $G(x)$ 'in bir subhipergrupoid'idir. f iyi bir homomorfizma olduğundan, $f(F)(x) = f(F(x))$, $f(G(x)) = f(G)(x)$ 'in bir subhipergrupoid'idir ve bu yüzden $(f(F), A) \leq_s (f(G), B)$ olur.

Teorem 2.7.1.5. $f : H_1 \rightarrow H_2$ bir hipergrupoid homomorfizması ve (F, A) ve (G, B) H_2 üzerinde iki soft hipergrupoid olsun. Eğer $(F, A) \leq_s (G, B)$ ise, o halde $(f^{-1}(F), A) \leq_s (f^{-1}(G), B)$ olur.

İspat. $(F, A) \leq_s (G, B)$ olduğunu varsayalım. $y \in \text{Supp}(f^{-1}(F), A)$ olsun. O zaman $A \subseteq B$ ve $F(y)$ bütün $y \in (F, A)$ için $G(y)$ 'nin bir subhipergrupoid'idir. f bir homomorfizma olduğundan, $f^{-1}(F)(y) = f^{-1}(F(y))$, $f^{-1}(G(y)) = f^{-1}(G)(y)$ 'nin bir subhipergrupoid'idir ve dolayısıyla $(f^{-1}(F), A) \leq_s (f^{-1}(G), B)$ olur.

Teorem 2.7.1.6. H hiper grubu üzerinde bir topoloji olsun. $F: A \rightarrow P(H)$ bir eşleme olsun; burada $P(H)$, H 'nin tüm alt hiper gruplarının kümesidir ve A , parametreler kümesidir.

Aşağıdaki aksiyomlar geçerliyse, A , τ 'nin H üzerinde bir soft topolojik hipergrup olduğu söylenir:

i. $F(\epsilon)$, tüm $\epsilon \in \text{Supp}(F, A)$ için H 'nin bir alt grubudur;

ii. Hiperoperasyon: $F(E) \times F(E) \rightarrow P(H)$ ve $(x, y) \mapsto x/y$ ile tanımlanan $F(E) \times F(E) \rightarrow P^*(F(E))$ eşlemesi, tüm $\epsilon \in \text{Supp}(F, A)$ için $\tau x \tau$ ve τ^* tarafından indüklenen topolojiler.

Eğer H bir topolojik hipergrup ise, (F, A) çiftini soft topolojik hipergrup olarak adlandırmak için yukarıda belirtilen tanımın yalnızca ilk aksiyomunun geçerli olmasının yeterli olduğuna dikkat edin. Genel olarak, soft topolojik hiper grup (F, A) , topolojik hiper grup H 'nin alt hiper gruplarının parametrelili bir ailesi olarak kabul edilebilir.

Teorem 2.7.1.7. Bir topolojik hiper gruptaki her esnek hiper grup, esnek bir hiper gruptur.

İspat. H 'nin τ topolojisine sahip bir topolojik hipergrup olduğunu ve (F, A) 'nın H üzerinde soft bir hipergrup olduğunu varsayalım. Bu durumda, $F(e)$, herkes için τ ve τ^* tarafından indüklenen topolojilere göre H 'nin bir topolojik alt hiper grubudur. $e \in A$. Dolayısıyla (F, A, τ) aynı zamanda H üzerinde esnek bir topolojik hipergrupoidir.

Ayrıca bunu görmek çok basittir.

Açıklama: Her bir H hiper grubu, hem H hem de $P^*(H)$ 'nin ayrık veya ayrık olmayan topolojiyle donatılmasıyla soft bir topolojik hiper gruba dönüştürülebilir.

Teorem 2.7.1.8. Ailenin kartezyen çarpımı $\{(F_a, A_a, \tau_a) \mid a \in I\}$ $\prod_{a \in I} H_a$ üzerinde esnek bir topolojik hiper gruptur.

İspat. (F_a, A_a, τ_a) 'nın tüm $a \in I$ için H_a üzerinde bir soft topolojik hiper grubu olduğunu varsayalım. Bu durumda $F_a(e) = 0$ ve $F_a(e_a)$ tüm (e_a) için H_a 'nin topolojik bir alt hiper grubudur $e \in \text{Supp}(F_a, A_a)$. Ayrıca $\prod_{a \in I}$ çarpım topolojisine sahip $(e_a) \in \prod_{a \in I} (E_a) = 0$ ve $(E_a)a \in \prod_{a \in I} (E_a)$ topolojik alt hiper grubudur. Dolayısıyla $\prod_{a \in I} (F_a, A_a, \tau_a)$, $\prod_{a \in I} H_a$ üzerinde esnek bir topolojik hiper gruptur. Bu ispatı tamamlar.

2.8. Soft Topolojik Hipergruplar

Bu bölümde esnek kümeleri ve hiper grupları topolojik bir bakış açısıyla birleştirerek esnek topolojik hiper grup kavramını tanıtağız. (H, τ) 'nin bir hiper grup olduğunu ve $P^*(H)$ 'nin H 'nin kuvvet kümesini gösterdiğini varsayalım.

Tanım 2.8.1. τ , H hiper grubu üzerinde bir topoloji olsun. $F: A \rightarrow P(H)$ bir eşleme olsun; burada $P(H)$, H 'nin tüm alt hipergruplarının kümesidir ve parametreler kümesidir. Aşağıdaki aksiyomlar geçerliyse, (F, A, τ) üçlünün H üzerinde esnek bir topolojik hipergrup olduğu söylenir:

i) $F(\epsilon)$, tüm $\epsilon \in \text{Supp}(F, A)$ için H 'nin bir alt hiper grubudur;

ii) Hiperoperasyon: $F(\epsilon) \times F(\epsilon) \rightarrow P^*(F(\epsilon))$ ve (x, y) ile tanımlanan $F(\epsilon) \times F(\epsilon) \rightarrow P^*(F(\epsilon))$ eşlemesi – x/y , tüm $\epsilon \in \text{Supp}(F, A)$ için $\tau \times \tau$ ve τ^* tarafından indüklenen topolojilere göre süreklidir.

Eğer H bir topolojik hipergrup ise, (F, A) çiftini esnek bir hipergrup olarak adlandırmak için yukarıdaki tanımın yalnızca ilk aksiyomunun geçerli olmasının yeterli olduğuna dikkat edin. Genel olarak soft topolojik hiper grup (F, A) , topolojik hiper grup H 'nin alt hiper gruplarının parametrelili bir ailesi olarak kabul edilebilir.

Teorem 2.8.1. Bir topolojik hiper gruptaki her esnek hiper grup, bir esnek topolojik hiper gruptur.

İspat. H 'nin τ topolojisine sahip bir topolojik hiper grup olduğunu ve (F, A) 'nın H üzerinde soft hiper grup olduğunu varsayalım. Bu durumda, $F(\epsilon)$, tüm $\epsilon \in \text{Supp}(F, A)$ için τ^* tarafından indüklenen topolojilere göre H 'nin bir alt hiper grubudur. Dolayısıyla (F, A, τ) aynı zamanda H üzerinde esnek bir topolojik hipergrupoiddir.

Ayrıca bunu görmek çok basittir.

Açıklama: Her soft hiper grup H , hem H hem de $P^*(H)$ ayrık veya ayrık olmayan topolojiyle donatılarak bir soft topolojik hiper gruba dönüştürülebilir. Bununla birlikte, bir hiper grup üzerindeki her esnek hiper grup, esnek bir topolojik hiper grup değildir.

Teorem 2.8.2. $\{(F_a, A_a, \tau_a) \mid a \in I\}$, H üzerinde esnek topolojik hiper grubun boş olmayan bir ailesi olsun.

i. $\{(F_a, A_a, \tau_a) \mid a \in I\}$ ailesinin $\bigcap_{a \in I} A_a \neq \emptyset$ ile kısıtlanmış kesişimi, eğer boş değilse, H üzerinde esnek bir topolojik hiper gruptur.

ii. $\{(F_a, A_a, \tau_a) \mid a \in I\}$ ailesinin genişletilmiş kesişimi, eğer boş değilse, H üzerinde esnek bir topolojik hiper gruptur.

İspat. (i) $\{(F_a, A_a, \tau_a) \mid a \in I\}$ ailesinin $\cap_a \in I A_a(\varepsilon)$ ile sınırlı kesişimi, $\cap_a \in I (F_a, A_a, \tau) = (F, A, \tau)$ esnek kümesi olarak tanımlanır, öyle ki $\cap_a \in I$ Tüm $\varepsilon \in \varepsilon A$ için $F_a(\varepsilon)$.

$\varepsilon \in \text{Supp}(F, A)$ seçeneği seçildiğinde. Tüm $a \in I$ 'ler için $F_a(\varepsilon) \neq \emptyset$ olacağını varsayalım $\cap_a \in I F_a(\varepsilon) \neq \emptyset$.

$\{(F_a, A_a, \tau_a) \mid a \in I\}$, H üzerindeki soft topolojik hiper grupların boş olmayan bir ailesi olduğundan, $F_a(\varepsilon)$, tüm $\varepsilon \in I$ için H 'nin topolojik bir alt hiper grubudur. Bu durumda $\cap_a \in I F_a(\varepsilon)$, H 'nin bir topolojik alt hiper grubudur. Dolayısıyla, (F, A, τ) , H üzerinde soft bir topolojik hiper gruptur.

(ii) İspat i'ye benzer.

Teorem 2.8.3. $\{(F_a, A_a, \tau_a) \mid a \in I\}$ H üzerinde esnek topolojik hipergrupların boş olmayan bir ailesi olsun.

i: $\{(F_a, A_a, \tau_a) \mid a \in I\}$ ailesinin genişletilmiş birleşimi, $F_\alpha(\varepsilon) \subseteq F_\beta(\varepsilon)$ ile tüm $F_\alpha(\varepsilon) \subseteq F_\beta(\varepsilon)$ için $\alpha, \beta \in I, \varepsilon \in \cap_{a \in I} A_a$ veya $\cap_a \in I A_a \neq \emptyset$ ise H üzerinde bir soft topolojik hiper gruptur.

ii: $\{(F_a, A_a, \tau_a) \mid a \in I\}$ ailesinin kısıtlı birleşimi, $F_\alpha(\varepsilon) \subseteq F_\beta(\varepsilon)$ ile $F_\beta(\varepsilon) \subseteq F_\alpha(\varepsilon)$ için $\alpha, \beta \in I, \varepsilon \in \cap_{a \in I} A_a$ veya $\cap_a \in I A_a \neq \emptyset$ ise H üzerinde soft bir topolojik hiper gruptur.

İspat. i) $(F, A, \tau) = \cup_a \in I (F_a, A_a, \tau)$ 'in, $\{(F_a, A_a, \tau_a) \mid a \in I\}$ ailesinin X veya $F_\beta(\varepsilon) \subseteq F_\alpha(\varepsilon)$ ile genişletilmiş birleşimi olduğunu, $\cap_a \in I A_a \neq \emptyset$ 'in tüm $\alpha, \beta \in I, \varepsilon \in \cap_{a \in I} A_a$ için olduğunu varsayalım. Her (F_a, A_a) H üzerinde sıfır olmayan esnek küme olduğundan, bu durumda $\cup_a \in I (F_a, A_a)$ aynı zamanda tüm $\alpha \in I$ için H üzerinde sıfır olmayan bir esnek kümedir.

Hipoteze göre, $F_\alpha(\epsilon) \subseteq F_\beta(\epsilon)$ ile $F_\beta(\epsilon) \subseteq F_\alpha(\epsilon)$ 'nin tümü $\alpha, \beta \in I, \epsilon \in \bigcap_{a \in I} A_\alpha$ için $\bigcap_{a \in I} A_\alpha \neq \emptyset$ ile, böylece $F_a(\epsilon)$ ve $F_B(\epsilon)$ H'nin topolojik alt hipergruplarıdır ve bu nedenle bunların birleşimi non-olmalıdır. çok da boş. Bu nedenle $F(E)$, H'nin topolojik bir alt hiper grubudur.

Böylece, (F, A, τ) 'ın H üzerinde esnek bir topolojik hiper grup olduğu sonucuna varabiliriz.

ii) Benzer şekilde kanıtlanabilir.

Önceki önermeyle birlikte aşağıdaki sonuç basittir.

Sonuç: $\{(F_a, A_a, \tau_a) \mid a \in I\}$ H üzerinde esnek topolojik hipergrupların boş olmayan bir ailesi olsun. O halde ailenin genişletilmiş birleşimi $\{(F_a, A_a, \tau_a) \mid a \in I\}$, tüm $\alpha, \beta \in I, i \neq j$ için H ise $A_\alpha \cap A_\beta \neq \emptyset$ üzerinde soft bir topolojik hipergruptur.

Teorem 2.8.4. $\{(F_a, A_a, \tau_a) \mid a \in I\}$ ailesinin kartezyen çarpımı, $\prod_{a \in I} H_a$ üzerinde esnek bir topolojik hiper gruptur.

İspat. (F_a, A_a, τ_a) 'nın tüm $\alpha \in I$ ler için H_a üzerinde esnek bir topolojik hiper grup olduğunu varsayalım. Bu durumda, $F_a(\epsilon) \neq \emptyset$ ve $F_a(\epsilon_a) H_a$ 'nin tümü $(\epsilon\alpha)\alpha \in I \in \text{Supp}(F_a, A_a)$ için topolojik bir alt hiper grubudur. Bu ispatı tamamlar.

Tanım 2.8.2. (F, A, τ) üzerinde esnek bir topolojik hiper grup olsun

H. O halde, (K, B, τ) 'nin esnek topolojik bir alt hipergrup olduğu söylenir.

(F, A, τ) eğer aşağıdaki aksiyomlar geçerliyse:

i: $B \subseteq A$

ii: $K(b)$, tüm $b \in \text{Supp}(K, B)$ için $F(b)$ 'nin bir alt hiper grubudur;

İspat. (F, A, τ) 'nin H üzerinde esnek bir topolojik hiper grup olduğunu varsayalım. O halde $(F|B, B, \tau)$, olduğunda $B \subseteq A$ 'nin soft topolojik alt hiper grubudur.

Yukarıdaki tanımdan bunu kolaylıkla çıkarabiliriz.

Teorem 2.8.5. Eğer (K, B, τ) , (F, A, τ) 'ın esnek topolojik alt hiper grubu ise ve (N, C, τ) , (K, B, τ) 'nin esnek topolojik alt hiper grubu ise, o zaman (N, C, τ) , (F, A, τ) 'ın esnek topolojik alt hiper grubudur.

İspat. Kanıt ortadadır. Bunu görmek de çok basittir.

Teorem 2.8.6. (F, A, τ) ve (K, B, τ) , H üzerinde iki esnek topolojik hiper grup olsun. Bu durumda (K, B, τ) , (KB) , (F, A) 'nın esnek bir alt kümesi ise, (F, A, τ) 'nin esnek topolojik alt hiper grubudur.

İspat. (F, A, τ) ve (K, B, τ) 'nin H üzerinde iki esnek topolojik hiper grup olduğunu varsayalım. Bu durumda (KB) , $(F; A)$ 'nın esnek bir alt kümesi ise, tümü için $b \in \text{Supp}(K, B)$ $B \subseteq A$ ve $K(b) \subseteq F(b)$ elimizde olur.

Dolayısıyla (K, B, τ) tarafından indüklenen topolojiye göre $F(b)$ 'nin topolojik bir alt hiper grubudur. Açıkçası, (K, B, τ) , (F, A, τ) 'ın soft topolojik bir alt hiper grubudur.

2.8.1. Soft Topolojik Althipergruplar

Şimdi soft topolojik alt hipergrupların genelleştirilmiş karakterizasyonlarını belirtilmekte ve kanıtlanmaktadır.

Teorem 2.8.1.1. (F, A, τ) H üzerinde bir esnek topolojik hipergrup olsun ve $\{(F_a, A_a, \tau_a) \mid a \in I\}$ (F, A, τ) 'ın esnek topolojik alt hipergruplarının boş olmayan bir ailesi olsun.

i. $\{(F_a, A_a, \tau_a) \mid a \in I\}$ ailesinin $\cap_a \in I A_a \neq \emptyset$ ile sınırlı kesişimi olan T , (F, A, τ) olduğunda $\cap_a \in I (F_a, A_a, \tau) \neq \emptyset$ 'nın esnek topolojik bir alt hiper grubudur.

ii: $\{(F_a, A_a, \tau_a) \mid a \in I\}$ Ailesinin genişletilmiş kesişimi, (F, A, τ) $(\cap \varepsilon) a \in I \neq \emptyset$ 'nin soft topolojik alt hiper grubudur.

İspat. i) Ailenin $\{(F_\alpha, A_\alpha, \tau_\alpha) \mid \alpha \in I\}$ $\cap_\alpha \in I A_\alpha \neq \emptyset$ ile kısıtlı kesişimi, tümü için $\varepsilon \in A$, $F(\varepsilon) = \cap_\alpha \in I F_\alpha(\varepsilon)$ olacak şekilde esnek küme $\cap_\alpha \in I (F_\alpha, A_\alpha, \tau_\alpha) = (F, A, \tau)$ tarafından verilmektedir.

$\cap_\alpha \in I F_\alpha(\varepsilon) \neq \emptyset$ varsayalım ki, tüm $\alpha \in I$ için $F_\alpha(\varepsilon) \neq \emptyset$ olsun

$\{(F_\alpha, A_\alpha, \tau_\alpha) \mid \alpha \in I\}$, (F, A, τ) 'ın soft topolojik alt hiper gruplarının boş olmayan bir ailesi olduğundan, bu, tüm $\alpha \in I$ için r tarafından indüklenen topolojiye göre $A_\alpha \subseteq A$ ve $F_\alpha(\varepsilon)$ 'nin topolojik bir alt hiper grubu olduğu anlamına gelir.

Dolayısıyla $\cap_\alpha \in I A_\alpha \subseteq A$ ve $\cap_\alpha \in I F_\alpha(\varepsilon)$, $F_\alpha(\varepsilon)$ 'nin topolojik bir alt hiper grubudur.

Yani, aile $\{(F_\alpha, A_\alpha, \tau_\alpha) \mid \alpha \in I\}$, (F, A, τ) 'ın soft topolojik bir alt hiper grubudur.

İkinci iddia da benzer şekilde kanıtlanabilir.

Teorem 2.8.1.2. $\{(F_\alpha, A_\alpha, \tau_\alpha) \mid \alpha \in I\}$, H üzerindeki bir esnek topolojik hipergrubun (F, A, τ) esnek topolojik alt hiper gruplarının boş olmayan bir ailesi olsun. Ailenin genişletilmiş birliği $\{(F_\alpha, A_\alpha, \tau_\alpha) \mid \alpha \in I\}$, $\cap_\alpha \in I A_\alpha \neq \emptyset$ ile tüm $\alpha \in I$ $\varepsilon \in \cap_\alpha \in I A_\alpha$ için (F, A, τ) , $f_\alpha(\varepsilon) \subseteq f_\beta(\varepsilon)$ ya da $f_\beta(\varepsilon) \subseteq f_\alpha(\varepsilon)$ 'nin soft topolojik alt hiper grubudur.

3. GEREÇ VE YÖNTEM

3.1. Gereç

Bu tez hazırlanırken soft topolojik hiper yapılar konusu ile ilişkili literatür taraması yapılmış ilgili kitap, makale ve tez çalışmaları incelenmiştir. Konu ile alakalı önceki çalışmalar ayrıntılı bir şekilde analiz edilmiştir.

Teorik gereç olarak soft topolojik yapıların temeli için gerekli olan klasik topoloji, soft topolojik yapıların anlaşılması ve derinlemesine incelenmesine olanak tanıyan hiper yapılar teorisi ve soft kümelerin özelliklerini anlamaya yardımcı olacak soft topoloji kullanılmıştır.

Soft topolojik yapıların cebirsel özelliklerini incelemek ve yapısal özelliklerini anlamak için cebirsel yapılar, soft topolojik yapıların analizi için küme teorisi matematiksel gereçler olarak kullanılmıştır.

3.2. Yöntem

Çalışmada soft topolojik hipergruplar için gerekli ön tanımlamalar ve soft topolojik hiperyapılar ile temel kavramlardan faydalanarak soft kümeler kuramı hipergrupoid şeklinde isimlendirilen bir hiper yapıya uygulanması araştırılmıştır.

Soft topolojik yapıların tanımları, temel özellikleri ve ilişkileri üzerine derinlemesine çalışma yapılarak tanım ve özellikler incelenmiştir. Bu aşama, yapıların matematiksel çerçevesinin oluşturulmasında kritik öneme sahiptir.

Karşılaştırmalı analiz ile soft topolojik hiper yapıları, klasik topoloji ve hiper yapı teorileri ile karşılaştırarak farklılıklar ve benzerlikler ortaya konmuştur.

4. BULGULAR

Soft kümeler kavramı matematiksel problemlerdeki bazı belirsizliklere çözüm getirmek amacı ile tanımlanmış yeni bir matematiksel araçtır. Soft kümeler, klasik kümelerin bir genellemesidir ve belirsizlik içeren verileri modellemek için kullanılır. Bir soft küme, bir evrensel küme üzerinde tanımlanır ve her elemanın bir üyelik fonksiyonu ile belirli bir dereceye kadar soft kümeye ait olup olmadığını gösterir.

Soft topolojik uzaylar, soft kümeler üzerinde tanımlanan topolojik yapılar olup, klasik topolojik uzayların birçok özelliğini taşır. Bu yapılar, soft kümelerle birlikte çalışarak topolojik özelliklerin belirsizlik içeren durumlarda incelenmesini sağlar.

Geleneksel kümelerin kesin sınırları yerine esnek ve belirsiz sınırların kullanıldığı küme soft küme teorisi ise kümelerin ötesinde ilişkileri, alt kümeleri ve yapıları inceleyen hiper yapılar teorisini matematiksel yapıların esneklik ve genellemeler açısından nasıl bir araya getirebileceğimizi analiz etmeye çalıştık. Eğer bu iki önemli teoriyi topolojik olarak birleştirecek, elde edilen uzay bu belirsizlik alanlarını daha kapsamlı bir şekilde ele alabilir. Birleşim sonucu oluşan bu yeni uzayda hem soft özellikleri hem de hiper özellikleri içeren elemanlar bulunabilir. Bu topolojik birleşim matematiksel modelleme açısından güçlü bir araç olabilir ve belirsizlikle başa çıkmak için daha geniş bir perspektif sunabilir. Ancak bu konuda daha fazla araştırma yapmak ve detaylı sonuçlar elde etmek gerekir.

Soft topolojik hiper grupoidler ve soft topolojik hiper gruplar arasındaki benzerlik ve farklılıklar, bu iki yapının özelliklerini ve aralarındaki ilişkileri anlamlandırabilmek açısından oldukça önemlidir.

Soft topolojik hiper gruplar, soft kümeler ve topolojik uzaylar kullanılarak tanımlanan hiper gruplardır. Bu gruplar, klasik hiper grupların genişletilmiş versiyonlarıdır ve soft topoloji ile uyumlu olacak şekilde tanımlanır. Soft topolojik hiper gruplar, birleştirici (associative), ters eleman (inverse element) ve birim eleman (identity element) gibi klasik grup özelliklerine sahiptir. Ancak, bu özellikler soft kümeler ve topolojik yapılar bağlamında yeniden tanımlanır.

Soft topolojik hiper grupoidler, soft kümeler ve hiper yapılar kullanılarak tanımlanan grupoidlerdir. Grupoidler, grupların daha genel bir formudur ve her elemanın tersinin olması gerekmez. Soft topolojik hiper grupoidler, daha esnek ve

genel yapılar olup, soft topolojik hiper grupların özel bir durumu olarak görülebilir. Grupoidler, genellikle birleştirici olmayan işlemler ve daha karmaşık yapıların incelenmesi için kullanılır.

Soft topolojik hiper grupların, klasik grup yapılarıyla karşılaştırıldığında daha fazla esneklik sunduğu gözlemlenmiştir.

Soft topolojik hiper grupoidlerin, karmaşık sistemlerin analizinde faydalı olduğu belirlenmiştir. Bu yapılar, çoklu ilişkileri ve belirsizlikleri daha etkili bir şekilde temsil edebilir.

4.1. Karakterizasyon ve Karşılaştırma

Soft topolojik hiper grupoidler ve soft topolojik hiper gruplar arasındaki karakterizasyon, bu iki yapının özelliklerini ve aralarındaki ilişkileri anlamak için önemlidir.

Genellik: Soft topolojik hiper grupoidler, soft topolojik hiper gruplardan daha genel yapılardır. Her soft topolojik hiper grup, bir soft topolojik hiper grupoid olabilir, ancak her soft topolojik hiper grupoid bir soft topolojik hiper grup değildir.

Cebirsel Yapı: Soft topolojik hiper gruplar, klasik grup özelliklerine (birleştirici, ters eleman, birim eleman) sahiptir. Soft topolojik hiper grupoidler ise bu özelliklerin bazılarını taşımayabilir ve daha esnek yapılar sunar.

Kullanım Alanları: Soft topolojik hiper gruplar, daha belirgin ve yapılandırılmış sistemlerin incelenmesinde kullanılırken, soft topolojik hiper grupoidler daha genel ve esnek sistemlerin incelenmesinde kullanılır. Bu farklar, her iki yapının matematiksel ve uygulamalı bağlamlarda nasıl kullanıldığını anlamak için önemlidir.

5. TARTIŞMA

Soft topolojik hiper yapılar, soft küme teorisinin bir uzantısı olarak incelenen bir konudur. Soft kümeler, belirsizlik ve esneklik içeren durumları modellemek için kullanılır ve bu teorisinin birçok uygulama alanı vardır. Soft topolojik uzaylar, soft kümeler üzerinde tanımlanan topolojik yapılar olup, bu yapıların çeşitli özellikleri ve kavramları araştırılmıştır.

Soft topolojik hiper yapılar, belirsizlik ve esneklik içeren durumları modellemek için kullanıldığından, çeşitli alanlarda uygulanabilir. Bu alanlardan bazıları: veri analizi, yapay zeka ve makine eğitimi, optimizasyon problemleri, biyoinformatik ve genetik, ekonomi ve finans. Bu alanlar dışında da birçok uygulama alanı bulunabilir. Soft topolojik hiper yapıların esnekliği ve belirsizlikle başa çıkma yeteneği, onları geniş bir yelpazede kullanışlı kılar.

Soft topolojik hiper gruplar ve grupoidler, çeşitli alanlarda önemli bir potansiyele sahip olsada, belirli sınırlılıklar taşımaktadır. Teorik karmaşıklıklar, matematiksel zorluklar ve pratik uygulama sorunları, bu yapıların etkinliğini ve uygulanabilirliğini etkileyebilir. Gelecek araştırmalar, bu sınırlamaları aşmaya yönelik yeni yöntemler ve yaklaşımlar geliştirmeye odaklanmalıdır.

6. SONUÇLAR

Soft kümeler belirsizliklere çözüm getirmek amacı ile tanımlanmış yeni bir matematiksel araçtır. Molodtsov soft küme kuramı ifadesini ortaya çıkarmış ve farklı alanlarda türlü uygulamalar yapmıştır (Molodtsov, 1999, s.19-21). Soft kümeler kuramını hipergroupoid şeklinde isimlendiren bir hiperyapıya uyguladık. Soft hipergroupoids, soft althipergroupoid ve soft hipergroupoids'in homomorfizmi ifadelerini anlattık. Soft hipergroupoids ailesinin genişletilmiş birleşim, sınırlı birleşim, genişletilmiş kesişim, sınırlı kesişim, birleşim ve kesişim ile alakalı birçok niteliği de incelemeye alınmıştır. Bu çalışmayı genişletmek için, hipergroupoidler ve diğer alanlar gibi başka cebirsel yapılarda soft kümelerin niteliklerinde inceleme yapılabilir.



7. ÖNERİLER

Soft topolojik yapılar, belirsiz ve eksik verilerin analizinde kullanılabilir. Bu, özellikle büyük veri kümelerinde ve karmaşık veri yapılarında faydalıdır. Yapay zeka algoritmalarının geliştirilmesinde ve iyileştirilmesinde kullanılabilir. Özellikle, belirsizlik içeren durumların modellenmesi ve çözülmesinde etkilidir. Kriterli karar verme ve optimizasyon problemlerinde kullanılabilir ki bu özellikle endüstriyel ve mühendislik uygulamalarında önemlidir. Biyolojik verilerin analizi ve genetik araştırmalarda kullanılabilir. Bu, özellikle genetik ağların ve biyolojik süreçlerin modellenmesinde faydalıdır ayrıca belirsizlik ve risk analizi gerektiren ekonomik ve finansal modellerde soft topolojik yapılar kullanılabilir. Bu, özellikle piyasa analizleri ve yatırım stratejilerinde önemlidir. Bu çalışma alanlarını genişletmek ve yeni alanlar yaratmak için soft topolojik hiper yapılar konusu daha da çok çalışılmalıdır.

KAYNAKLAR

- Acar, U., Koyuncu, F. ve Tanay, B. (2010). Soft sets and soft rings. *Computers and Mathematics With Applications*, 59(11), 3458-3463.
- Aktas, H. ve Cagman N. (2007). Soft sets and soft groups. *Information Sciences*, 177(13), 2726-2735.
- Ameri R. ve Zahedi M. M. (1999). Hyperalgebraic system. *Italian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 21-32.
- Anderson, F. W. (1992). Rings and categories of modules. *Graduate Texts in Mathematics/Springer-Verlag*, 13.
- Atagun, A. O. ve Sezgin, A. (2011). Soft substructures of rings, fields and modules. *Computers and Mathematics With Applications*, 61(3), 592-601.
- Chen, D., Tsang, E. C. C., Yeung, D. S. ve Wang, X. (2005). The parameterization reduction of soft sets and with applications. *Computers and Mathematics With Applications*, 49(5-6), 757-763.
- Corsini, P. (1994). Join spaces, power sets, fuzzy sets, in: Proceedings of the fifth int. Congress of algebraic hyperstructures and apply. Hadronic Press Asi.
- Corsini, P. (1993). Prolegomena of hypergroup theory. *Avain editore*, 216.
- Corsini, P. ve Leoreanu V. (2013). Applications of hyperstructures theory (5), *Springer Science & Business Media*.
- Davvaz, B. (1999). Fuzzy HV-groups. *Fuzzy sets and systems*. 101(1), 191-195.
- Davvaz, B. ve Leoreanu, V. (2007). Hyperring theory and applications, Int.
- De Salvo, M. ve Freni, D. (1980). Sugli ipergruppi ciclici e completi. *Matematiche (Catania)*, 35, 211-226.
- Freni, D. (1995). Una nota su gli ipergruppoidi ciclici. *Ratio Mathematica*. 9(1), 101-111.
- Maji, P. K., Biswas, R. ve Roy, A. R. (2003). Soft set theory, *Computers and Mathematics With Applications*, 45(4-5), 555-562.
- Maji, P. K., Roy, A. R. ve Biswas, R. (2002). An application of soft sets in a decision making problem. *Computers and Mathematics With Applications*, 44(8-9), 1077-1083.
- Marty, F. (1934). Sur une generalization de la notion de groups. In *8th congress Mathematics Scandinaves Stockholm*, (1934).
- Molodtsov, D. (1999). Soft set theory - first results. *Computers and Mathematics With Applications*, 37(4-5), 19-31.
- Nazmul, S. ve Samanta, S.K. (2010). Soft topological groups. *Kochi Journal of Mathematics*, 151-161.
- Oguz, G., Icen, I. ve Gursoy, M. H. (2018). Lie rough groups. <https://doi.org/10.2298/FIL1816735O>

- Pawlak, Z. (1982). Rough sets. *International journal of computer & information sciences*, 11, 341–356.
- Peters, J. F. (2007). Near sets. Special theory about nearness of objects. *Fundamenta Informaticae*, 75(1-4), 407-433.
- Robinson, D. J. (2012). A course in the theory of groups (Vol. 80). *Springer Science & Business Media*.
- Shabir, M. ve Ali, M. I. (2009). Soft ideals and generalized fuzzy ideals in semigroups. *New Mathematics and Natural Computation*, 5(3), 599-615.
- Shah, T. ve Shanan, S. (2014). Soft topological groups and rings. *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, 7(5), 725-743.
- Sun, Q. M., Zhang, Z. L. ve Liu, J. (2008). Soft sets and soft modules. In Rough Sets and Knowledge Technology: Third International Conference, RSKT 2008, Chengde, China, may 17-19, 2008. Proceedings 3 (pp. 403-409) Springer Berlin Heidelberg.
- Tasbozan, H., Icen, I., Bagırmaz, N. ve Ozcan, A. F. (2017). Soft sets and soft topology on nearness approximation spaces. <https://doi.org/10.2298/FIL1713117T>
- Vougiouklis, T. (1994). Hyperstructures and their representations, (Vol. 115). *Hadronic Press, Inc*.
- Wall, H. S. (1937). Hypergroups. *American Journal of Mathematics*, 59(1), 77-98.
- Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. *Information and control* 8(3), 338-353. [https://doi.org/10.1016/S0019-9958\(65\)90241-X](https://doi.org/10.1016/S0019-9958(65)90241-X)
- Zahedi, M.M., Bolurian, M. ve Hasankhani A. (1995). On polygroups and fuzzy subpolygroups and fuzzy subpolygroups. *J. Fuzzy Math*, 3(1), 1-15.