

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

**ÖN BURULMALI FONKSİYONEL OLARAK DERECELENDİRİLMİŞ
ÇUBUKLARIN STATİK VE DİNAMİK DAVRANIŞLARININ
İNCELENMESİ**

DOKTORA TEZİ

Ömer Ekim GENEL

Makina Mühendisliği Anabilim Dalı

Makina Mühendisliği Programı

AĞUSTOS 2023

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

**ÖN BURULMALI FONKSİYONEL OLARAK DERECELENDİRİLMİŞ
ÇUBUKLARIN STATİK VE DİNAMİK DAVRANIŞLARININ
İNCELENMESİ**

DOKTORA TEZİ

**Ömer Ekim GENEL
(503182017)**

Makina Mühendisliği Anabilim Dalı

Makina Mühendisliği Programı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Ekrem TÜFEKÇİ

AĞUSTOS 2023

ISTANBUL TECHNICAL UNIVERSITY ★ GRADUATE SCHOOL

**INVESTIGATION OF STATIC AND DYNAMIC BEHAVIORS OF
FUNCTIONALLY GRADED PRETWISTED BEAMS**



Ph.D. THESIS

**Ömer Ekim GENEL
(503182017)**

Department of Mechanical Engineering

Mechanical Engineering Programme

Thesis Advisor: Prof. Dr. Ekrem TÜFEKÇİ

AUGUST 2023

İTÜ, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü'nün 503182017 numaralı Doktora Öğrencisi Ömer Ekim GENEL, ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı “ÖN BURULMALI FONKSİYONEL OLARAK DERECELENDİRİLMİŞ ÇUBUKLARIN STATİK VE DİNAMİK DAVRANIŞLARININ İNCELENMESİ” başlıklı tezini aşağıda imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

Tez Danışmanı : **Prof. Dr. Ekrem TÜFEKÇİ**
İstanbul Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri : **Doç. Dr. Adil YÜCEL**
İstanbul Teknik Üniversitesi

Doç. Dr. Armağan Fatih KARAMANLI
Yıldız Teknik Üniversitesi

Dr. Öğr. Üyesi Uğurcan EROĞLU
İstanbul Teknik Üniversitesi

Dr. Öğr. Üyesi Birgül AŞÇIOĞLU TEMİZTAŞ
Yıldız Teknik Üniversitesi

Teslim Tarihi : 13 Temmuz 2023
Savunma Tarihi : 22 Ağustos 2023





Anneme ve babama,



ÖNSÖZ

Önburulmalı yapılar, geometrilerinin sağladığı avantajlardan dolayı özellikle havacılık ve imalat endüstrilerinde sıklıkla kullanılan yapısal elemanlardır. İşletildikleri ortam gereği bu yapılar, genellikle yüksek sıcaklık, nem ve sürtünme gibi zorlu ortam etkilerine maruz kalabilmektedirler. Bu noktada, bu yapıların dayanımlarını kaybetmeksizin bahsedilen zorlu ortam etkilerine direnç gösterebilmelerini sağladıkları için özellikleri konuma bağlı olarak değişen malzemeler, bu yapıların imalatında kullanılan etkili bir malzeme grubu olarak öne çıkmaktadır. Bu bağlamda, bu çalışmada kapsamında, özellikleri konuma bağlı olarak değişen önburulmalı yapıların temel karakteristik davranışlarının bir boyutlu modeller kullanılarak incelenmesi amaçlanmıştır.

Öncelikle bu doktora tezinin oluşturulması sürecinde bana yol gösterici olan ve beni her zaman motive eden değerli danışmanım Prof.Dr. Ekrem TÜFEKÇİ'ye içtenlikle teşekkür ederim. Ayrıca, Tez İzleme Komitesi üyeleri olan kıymetli Doç.Dr. Adil YÜCEL hocama ve kıymetli Doç.Dr. Armağan Fatih KARAMANLI hocama, ve Tez İzleme Komitesi eski üyesi olan kıymetli Dr.Öğr.Üyesi Uğurcan EROĞLU hocama içtenlikle teşekkür ederim.

Ayrıca, TÜBİTAK 2211 Yurt İçi Lisansüstü Burs Programı içerisinde bulunan 2211-A Genel Yurt İçi Doktora Burs Programı kapsamında beni destekleyen Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu'na (TÜBİTAK) teşekkür ederim.

Son olarak, bu çalışmanın oluşturulması sürecinde karşılaştığım bütün sorunlar esnasında varlıklarıyla ve motivasyonlarıyla bana her zaman güç veren, sevgilerini eksik etmeyerek her zaman yanımda olan anneme ve babama ne kadar teşekkür etsem az olacaktır.

Temmuz 2023

Ömer Ekim GENEL
(Makina Yüksek Mühendisi)



İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ	ix
İÇİNDEKİLER	xi
KISALTMALAR	xiii
SEMBOLLER	xv
ÇİZELGE LİSTESİ	xxi
ŞEKİL LİSTESİ	xxiii
ÖZET	xxv
SUMMARY	xxix
1. GİRİŞ	1
1.1 Önburulmalı Yapılar ve Temel Uygulama Alanları	1
1.2 Tezin Amacı	4
1.3 Tezin Yapısı	4
2. ÖNBURULMALI VE FONKSİYONEL OLARAK DERECELENDİRİLMİŞ ÇUBUKLARIN TEMEL MEKANİK ÖZELLİKLERİ	7
2.1 Bir Boyutlu Modelleme Yaklaşımı Ve Temel Bağlılıklar	7
2.1.1 Eğilme-eğilme bağlantılılığına dair çalışmalar	11
2.1.2 Uzama-burulma bağlantılılığına dair çalışmalar	18
2.1.3 Homojen olmayan malzemeden imal edilmiş çubukların burulmasına dair çalışmalar	20
3. MALZEME ÖZELLİKLERİ KONUMA BAĞLI OLARAK DEĞİŞEN ÖNBURULMALI ÇUBUKLARIN MODELLENMESİ	23
3.1 Malzeme Dağılım Profiline Seçilmesi	23
3.2 Önburulmalı Çubuğun Geometrisi	31
3.3 Eğilme-eğilme Bağlılık Statik ve Dinamik Davranışlara Dair Matematiksel Modeller	33
3.3.1 Eğilme-eğilme bağlantılılık statik davranışa dair matematiksel modeller	33
3.3.1.1 Kinematik	33
3.3.1.2 Kullanılan malzeme dağılım fonksiyonu	36
3.3.1.3 Sabit koordinat sistemine göre yönetici denklemlerin elde edilmesi	38
3.3.1.4 Hareketli koordinat sistemine göre yönetici denklemlerin elde edilmesi	41
3.3.2 Eğilme-eğilme bağlantılılık dinamik davranışa dair matematiksel model	44
3.3.2.1 Kinematik	44
3.3.2.2 Kullanılan malzeme dağılım fonksiyonu	45
3.3.2.3 Yönetici diferansiyel denklemlerin elde edilmesi	46
3.4 Uzama-burulma Bağlılık Statik ve Dinamik Davranışlara Dair Matematiksel Modeller	50
3.4.1 Uzama-burulma bağlantılılık statik davranışa dair matematiksel model	50
3.4.1.1 Kinematik	50
3.4.1.2 Kullanılan malzeme dağılım fonksiyonu	51

3.4.1.3 Yönetici denklemler ve rijitlik katsayıları.....	52
3.4.2 Uzama-burulma bağlaşıklık dinamik davranışa dair matematiksel model....	56
3.4.2.1 Kinematik.....	58
3.4.2.2 Yönetici denklemler ve rijitlik katsayıları.....	59
4. MALZEME ÖZELLİKLERİ KONUMA BAĞLI OLARAK DEĞİŞEN ÖNBURULMALI ÇUBUKLARIN YÖNETİCİ DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ	65
4.1 Eğilme-eğilme Bağlaşıklık Statik Davranışa Ait Denklemlerin Çözümü	65
4.1.1 Sabit koordinat sistemine göre elde edilen yönetici denklemlerin çözümü	65
4.1.2 Hareketli koordinat sistemine göre elde edilen yönetici denklemlerin çözümü	66
4.2 Eğilme-eğilme Bağlaşıklık Dinamik Davranışa Ait Denklemlerin Çözümü	69
4.3 Uzama-burulma Bağlaşıklık Statik Davranışa Ait Denklemlerin Çözümü	73
4.4 Uzama-burulma Bağlaşıklık Dinamik Davranışa Ait Denklemlerin Çözümü	74
5. SAYISAL İNCELEMELER VE TARTIŞMA	81
5.1 Eğilme-eğilme Bağlaşıklık Statik Davranışa Ait Sayısal İncelemeler ve Tartışma	81
5.1.1 Ankastre-serbest sınır şartlarına sahip önburulmalı çubuğa ait bazı kesin analitik ifadeler.....	81
5.1.2 Yakınsama çalışması ve matematik modelin doğrulanması	81
5.1.3 Hacim oranı indisinin ve gözeneklilik oranının uç yer değiştirmeleri üzerindeki etkisi	86
5.2 Eğilme-eğilme Bağlaşıklık Dinamik Davranışa Ait Sayısal İncelemeler ve Tartışma	89
5.2.1 HDKY için yakınsama çalışması ve matematiksel modelin doğrulanması	89
5.2.2 Mod şekilleri	95
5.2.3 Malzeme parametresinin eğilme-eğilme bağlaşıklık doğal frekansları üzerindeki etkisi	96
5.3 Uzama-burulma Bağlaşıklık Statik Davranışa Ait Sayısal İncelemeler ve Tartışma.....	96
5.3.1 Çarpılma-kaynaklı rijitlik katsayılarının hesaplanmasına dair doğrulama çalışmaları	98
5.3.2 Galuppi ve Royer-Carfagni'nin çoklu malzemeli membran analojisi ve kayma gerilmelerinin ve rijitlik katsayılarının karşılaştırılması	101
5.3.3 Yapısal cevap üzerine yorumlar ve doğrulama	104
5.3.4 Malzeme parametresinin uzama-burulma bağlaşıklık statik davranış üzerindeki etkisi	107
5.4 Uzama-burulma Bağlaşıklık Dinamik Davranışa Ait Sayısal İncelemeler ve Tartışma.....	110
5.4.1 Kullanılan interpolasyon fonksiyonlarına dair yorumlar	110
5.4.2 Sonlu eleman modeline dair yakınsama çalışması	112
5.4.3 Bir boyutlu sonlu eleman modelinden elde edilen sonuçların üç boyutlu sonlu eleman modelinden elde edilen sonuçlarla karşılaştırılması	112
6. SONUÇ	121
KAYNAKLAR.....	129
EKLER	143
ÖZGEÇMİŞ.....	165

KISALTMALAR

DNA	: Deoksiribo Nükleik Asit
FDM	: Fonksiyonel Olarak Derecelendirilmiş Malzeme
HDKY	: Harmonik Diferansiyel Kuadratür Yöntemi
MEMS	: Mikroelektromekanik Sistemler
SEA	: Sonlu Eleman Analizi
SUS304	: Steel Use Stainless 304
Si₃N₄	: Silikon Nitrit
TDA	: Tekil Değer Ayırıştırması
1D	: Bir boyutlu
3D	: Üç boyutlu



SEMBOLLER

e	: Euler sayısı
π	: Pi sayısı
i	: $\sqrt{-1}$ 'e eşit olan imajiner sayı
ω	: Açısal frekans
λ	: Boyutsuz doğal frekans
t	: Zaman parametresi
$\hat{t}$	: Boyutsuz zaman parametresi
∇	: Nabla operatörü
∂	: Kısmi türev
δ	: Varyasyonel operatör
z	: Kesidin geometrik merkezinden geçen çubuk eksen parametresi
$\hat{z}$	: z değişkeninin boyutsuz hali
z'	: Kukla değişken
z_0	: Başlangıç değerlerinin tanımlandığı çubuk eksen konumu
z_i, z_{i+1}	: i . altbölgenin uçlarının konumları
z_K	: $(0, L)$ arasında çubuğa etkiyen tekil kuvvetin/momentin konumu
$\hat{z}_e, \hat{z}_{e+1}$	: Sonlu elemanın ardışık iki düğüm noktasının konumları
η, ξ	: Kesidin asal eksenleri, hareketli $\eta\xi z$ koordinat sisteminin bileşenleri
x, y	: Sabit xyz koordinat sisteminin bileşenleri
x_i, y_i	: Sonlu eleman modelinde i . düğümün şekil değişiminden önceki x ve y doğrultularındaki bileşenleri
b, h	: Kesidin genişliği ve kalınlığı
A	: Kesit alanı
$\bar{I}_{\eta\eta}, \bar{I}_{\xi\xi}$	: Kesidin η ve ξ eksenlerine göre alan atalet momentleri
I_p	: Kesidin polar atalet momenti
L	: Çubuğun boyu
C	: Kesidin geometrik merkezi
P	: Kesit üzerinde alınan keyfi bir nokta
S	: Kesidin kayma merkezi

O	: Kesidin üst ve sağ kenarlarının çakıştığı nokta
$\bar{\eta}, \bar{\xi}, \bar{z}$	: O noktasından geçen $\bar{\eta}\bar{\xi}\bar{z}$ koordinat sisteminin eksenleri
$\bar{\eta}_{sc}, \bar{\xi}_{sc}$	: Kayma merkezinin $\bar{\eta}\bar{\xi}$ koordinat sistemine göre konumu
φ	: Toplam önburulma açısı
β	: Birim önburulma şiddeti
$f(\eta, \xi)$	: η ve ξ 'ye bağlı keyfi bir fonksiyon
ϕ	: Çarpılma fonksiyonu
Ψ	: Prandtl gerilme fonksiyonu
ω_z	: Birim burulma açısı
e_η, e_ξ, e_z	: $\eta\xi z$ koordinat sisteminin birim vektörleri
$e_{\bar{\eta}}, e_{\bar{\xi}}, e_{\bar{z}}$	: $\bar{\eta}\bar{\xi}\bar{z}$ koordinat sisteminin birim vektörleri
u	: Yer değiştirme alanı
u_x, u_y, u_z	: Yer değiştirme alanının x, y ve z doğrultularındaki bileşenleri
u_η, u_ξ, u_z	: Yer değiştirme alanının η, ξ ve z doğrultularındaki bileşenleri
$u_{\bar{\eta}}, u_{\bar{\xi}}, u_{\bar{z}}$	: Yer değiştirme alanının $\bar{\eta}, \bar{\xi}$ ve $\bar{z}$ doğrultularındaki bileşenleri
u_x^{SEA}, u_y^{SEA}	: Sonlu eleman modelinde yer değiştirme alanının x ve y doğrultularındaki bileşenleri
u_z^{SEA}	: Sonlu eleman modelinde yer değiştirme alanının z doğrultusundaki bileşeni
u_o, v_o, w_o	: O noktasından geçen eksenin $\bar{\eta}, \bar{\xi}$ ve $\bar{z}$ doğrultularındaki ötelenmeleri
u^0, v^0, w^0	: Tarafsız eksenin x, y ve z doğrultularındaki ötelenmesi
$\bar{u}^0, \bar{v}^0$	: Yer değiştirme alanının η ve ξ doğrultularındaki ötelenmeleri
U_{SEA}^0, V_{SEA}^0	: Sonlu eleman modelinden elde edilen x ve y doğrultularındaki boyutsuz tarafsız eksen ötelenmeleri
U_I^0, V_I^0	: xyz koordinat sistemine göre formüle edilen Timoshenko çubuk modelinden elde edilen x ve y doğrultularındaki boyutsuz tarafsız eksen ötelenmeleri
U_{II}^0, V_{II}^0	: $\eta\xi z$ koordinat sistemine göre formüle edilen Timoshenko çubuk modelinden elde edilen x ve y doğrultularındaki boyutsuz tarafsız eksen ötelenmeleri
$\theta_x, \theta_y, \theta_z$	: Kesidin x, y ve z eksenleri etrafındaki rijit dönmesi
θ_η, θ_ξ	: Kesidin η ve ξ eksenleri etrafındaki rijit dönmesi
θ_z^{SEA}	: Sonlu eleman modelinde kesidin ortalama burulma açısı
$w^{0,SEA}$	: Sonlu eleman modelinde tarafsız eksenin z doğrultusundaki ötelenmesi

$\hat{u}^0, \hat{v}^0, \hat{\theta}_x, \hat{\theta}_y$	: u^0, v^0, θ_x ve θ_y değişkenlerinin boyutsuz halleri
$\hat{w}^0, \hat{\theta}_z$	: w^0 ve θ_z değişkenlerinin boyutsuz halleri
$\hat{W}^0, \hat{\Theta}_z$	: $\hat{w}^0$ ve $\hat{\theta}_z$ değişkenlerinin sadece konuma bağlı olan halleri
$\hat{X}$	: Boyutsuz yer değiştirme bileşenlerinin içeren vektör
r, R	: P noktasının şekil değiştirmeden önceki ve sonraki konumlarını ifade eden konum vektörleri
g_1, g_2, g_3	: Şekil değiştirmemiş duruma ait kovaryant baz vektörleri
G_1, G_2, G_3	: Şekil değiştirmiş duruma ait kovaryant baz vektörleri
$\varepsilon_{\bar{z}\bar{z}}$	: $\bar{\eta}\bar{\xi}\bar{z}$ koordinat sistemine göre yazılan sonsuz küçük birim şekil değiştirme tensörünün sıfırdan farklı bileşeni
$\varepsilon_{zz}, \varepsilon_{yz}, \varepsilon_{xz}$	: xyz koordinat sistemine göre yazılan sonsuz küçük birim şekil değiştirme tensörünün sıfırdan farklı bileşenleri
$\varepsilon_{zz}, \varepsilon_{\xi z}, \varepsilon_{\eta z}$	: $\eta\xi z$ koordinat sistemine göre yazılan sonsuz küçük birim şekil değiştirme tensörünün sıfırdan farklı bileşenleri
γ_{yz}, γ_{xz}	: xyz koordinat sistemine göre yazılan kayma açıları
$\gamma_{\xi z}, \gamma_{\eta z}$	: $\eta\xi z$ koordinat sistemine göre yazılan kayma açıları
ε_{z0}	: $\bar{\eta}\bar{\xi}\bar{z}$ koordinat sistemine göre tarafsız eksenin birim şekil değiştirmesi
$\kappa_{\bar{\eta}}, \kappa_{\bar{\xi}}$	: $\bar{\eta}$ ve $\bar{\xi}$ eksenleri etrafındaki eğrilik
$\sigma_{\bar{\eta}\bar{z}}, \sigma_{\bar{\xi}\bar{z}}, \sigma_{\bar{z}\bar{z}}$	: $\bar{\eta}\bar{\xi}\bar{z}$ koordinat sistemine göre yazılan gerilme tensörünün sıfırdan farklı bileşenleri
$F_{\bar{\eta}}, F_{\bar{\xi}}, F_{\bar{z}}$	: $\bar{\eta}, \bar{\xi}$ ve $\bar{z}$ eksenlerindeki kesme kuvvetleri
F_x, F_y	: x ve y doğrultularındaki kesme kuvvetleri
F_{η}, F_{ξ}	: η ve ξ doğrultularındaki kesme kuvvetleri
F_z	: z doğrultusundaki eksenel kuvvet
$\hat{F}_x, \hat{F}_y$	: F_x ve F_y değişkenlerinin boyutsuz halleri
$M_{\bar{\eta}}, M_{\bar{\xi}}$	: $\bar{\eta}$ ve $\bar{\xi}$ eksenleri etrafındaki eğilme momentleri
M_x, M_y	: x ve y eksenleri etrafındaki eğilme momentleri
M_{η}, M_{ξ}	: η ve ξ eksenleri etrafındaki eğilme momentleri
M_z	: z eksenini etrafındaki burulma momenti
$\hat{M}_x, \hat{M}_y$	: M_x ve M_y değişkenlerinin boyutsuz halleri
B	: Birim burulma açısıyla ilişkili kesit tesir
F_{z0}	: Tekil eksenel çekme kuvveti
M_{z0}	: Tekil pozitif burulma momenti

$\sigma_{zz}, \sigma_{yz}, \sigma_{xz}$	: xyz koordinat sistemine göre yazılan gerilme tensörünün sıfırdan farklı bileşenleri
$\sigma_{\xi z}, \sigma_{\eta z}$	: $\eta\xi z$ koordinat sistemine göre yazılan kayma gerilmeleri
k_x, k_y	: x ve y doğrultularındaki kayma düzeltme faktörleri
k_η, k_ξ	: η ve ξ doğrultularındaki kayma düzeltme faktörleri
q_x, q_y, q_z	: x, y ve z doğrultularındaki yayılı dış kuvvetler
q_η, q_ξ	: η ve ξ eksenleri etrafındaki yayılı dış kuvvetler
q_{z0}	: Boyutsuzlaşma için kullanılan sabit yayılı dış kuvvet
m_x, m_y, m_z	: x, y ve z eksenleri etrafındaki yayılı dış momentler
m_η, m_ξ	: η ve ξ eksenleri etrafındaki yayılı dış momentler
$\mathcal{P}$	: Malzeme özellikleri
$\mathcal{P}_b$	: $z = 0$ konumundaki malzeme özelliği
$\mathcal{P}_m, \mathcal{P}_c$	: Metalik ve seramik malzeme özellikleri
V_m, V_c	: Metalik ve seramik malzemelerin hacim oranları
p	: Hacim oranı indisi, malzeme parametresi
$\mathcal{Y}$	: Gözeneklilik dağılım fonksiyonu
α	: Gözeneklilik katsayısı
ν	: Poisson oranı
E	: Elastisite modülü
G	: Kayma modülü
ρ	: Yoğunluk
E_i	: Kesit orta düzlemindeki ($\xi = 0$) elastisite modülü
E_o	: Kesitin alt ve üst yüzeylerindeki ($\xi = \pm h/2$) elastisite modülü
E_m	: Metalik bileşenin elastisite modülü
E_c	: Seramik bileşenin elastisite modülü
G_i	: Kesit orta düzlemindeki ($\xi = 0$) kayma modülü
E_b, G_b	: $z = 0$ konumundaki elastisite modülü ve kayma modülü
E_k, G_k	: k . katmana ait elastisite modülü ve kayma modülü
ρ_b	: $z = 0$ konumundaki yoğunluk
$\mathcal{U}$	: Birim şekil değiştirme enerjisi
$\mathcal{T}$	: Kinetik enerji
$\mathcal{W}$	: Bir potansiyelden türetilemeyen dış kuvvetlerin yaptığı işler
E^*	: Homojen olmayan kesite ait eksenel rijitlik
S^*	: Uzama-burulma arasındaki bağlantıyı sağlayan katsayı

K^*	: Önburulmalandırmanın burulma rijitliğine olan katkısı
J^*	: Önburulmasız ve homojen olmayan çubuğa ait Saint-Venant burulma rijitliği
J_ω^*	: Elastisite modülü ve sektörel atalet momentini içeren çarpılma-kaynaklı rijitlik katsayısı
$\overline{S^*}, \overline{K^*}, \overline{J^*}$	: Normalize edilmiş S^* , K^* ve J^* değerleri
D^*, R^*	: Homojen ve eliptik kesit üzerinde sıfır olan çarpılma-kaynaklı rijitlik katsayıları
S	: Homojen keside ait uzama-burulma arasındaki bağlantıyı sağlayan sabit
K	: Homojen kesitte önburulmalandırmanın burulma rijitliğine olan katkısını ifade eden sabit
J	: Önburulmasız ve homojen çubuğa ait Saint-Venant burulma sabiti
J_ω	: Sektörel atalet momenti
Ω	: Basit bağlantılı bölge
Ω_k	: k . katmana ait bölge
Γ	: Ω bölgesinin sınırı
$\bar{n}$	: Γ sınırına normal olan birim vektör
$\bar{n}_\eta, \bar{n}_\xi$	: $\bar{n}$ birim vektörünün η ve ξ doğrultularındaki bileşenleri
$y(z)$	: Değişkenler vektörü
y_1, y_2	: 1. ve 2. altbölgelelerin değişkenler vektörü
y_{10}, y_{2K}	: 1. ve 2. altbölgelelere ait başlangıç değerleri vektörü
$\hat{y}(\hat{z})$	: Değişkenler vektörünün boyutsuz hali
$f(z)$	: Yayılı dış kuvvet ve moment vektörü
$P(z)$	: Değişken elemanlardan oluşan sistem (katsayılar) matrisi
$\hat{P}(\hat{z})$	: Değişken elemanlardan oluşan sistem (katsayılar) matrisinin boyutsuz hali
$\mathcal{L}$	: Sabit elemanlardan oluşan sistem (katsayılar) matrisi
Y	: Kesin asal matris
$\tilde{Y}$	: Yaklaşık asal matris
$\bar{Y}$	: Önburulmasız çubuğa ait asal matris
n	: Altbölge sayısı
m	: Sayısal integrasyonda kullanılan bölüm sayısı
K	: z_K konumundaki kuvvet ve moment vektörü
$\hat{\beta}, \chi$	: Yardımcı boyutsuz ifadeler
N	: Çözüm ağındaki toplam düğüm noktası sayısı

N_k	: Toplam katman sayısı
N_d	: Sonlu eleman modelinde çubuğun uç kesidindeki düğüm sayısı
N_e	: Bir boyutlu sonlu eleman modelinde kullanılan toplam eleman sayısı
N_i	: i . interpolasyon fonksiyonu
a_{ij}	: $N \times N$ boyutundaki birinci türevin ağırlık katsayıları
$\mathcal{F}$	: Özdeğer probleminin katsayılar matrisi
$\hat{\mathbf{F}}$	: Boyutsuz kesit tesirleri içeren vektör
$\bar{\lambda}$	: Boyutsuz doğal frekansın kesin değeri
$\tilde{\lambda}$	: Boyutsuz doğal frekansın yaklaşık değeri
Σ	: Tekil değerleri içeren köşegen matris
U, V	: Sol ve sağ tekil vektörleri içeren matrisler
T_x, T_y	: İlgili modun x ve y doğrultularındaki bileşenleri
ℓ	: $\hat{z}_e$ ve $\hat{z}_{e+1}$ düğüm noktaları arasındaki uzaklık
q_i^e	: i . sonlu eleman için eleman düğüm yer değiştirme vektörü
Q_i	: i . serbestlik derecesine ait dinamik sınır şartı
K_i^e	: i . sonlu elemana ait rijitlik matrisi
M_i^e	: i . sonlu elemana ait kütle matrisi
$\lambda_i^{1D,SEA}$	: Bir boyutlu sonlu eleman modelinden elde edilen i . boyutsuz doğal frekans
$\lambda_i^{3D,SEA}$	: Üç boyutlu sonlu eleman modelinden elde edilen i . boyutsuz doğal frekans
p	: Şişirme basıncı
s	: Çekme durumu
w	: Membrana ait düzlem dışı yer değiştirme
ϑ	: Membrana analogisine ait birim burulma açısı

ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

Çizelge 5.1 : Önburulmalı fonksiyonel olarak derecelendirilmiş ve gözenekli bir ankastre-serbest çubuk için bir boyutlu modele dair yakınsama çalışması.	83
Çizelge 5.2 : Analitik ve sonlu eleman sonuçlarının karşılaştırılması ($p = 0.5$, $\alpha = 0.15$, düzensiz gözenek dağılımı, uzay-sabit düşey uç kuvveti).	84
Çizelge 5.3 : Analitik ve sonlu eleman sonuçlarının karşılaştırılması ($p = 0.5$, $\alpha = 0.15$, düzensiz gözenek dağılımı, cisim-sabit üniform yayılı kuvvet).	84
Çizelge 5.4 : Sayısal ve kesin analitik çözüm yöntemlerinin karşılaştırılması ($\varphi = 90^\circ$, $p = 0.5$, $\alpha = 0.15$, düzensiz gözenek dağılımı).	85
Çizelge 5.5 : Hacim oranı indisinin uç ötelenmeleri üzerindeki etkisi ($L/h = 15$, $h/b = 0.5$, $\alpha = 0.2$, uzay-sabit düşey uç kuvveti).	90
Çizelge 5.6 : Hacim oranı indisinin uç ötelenmeleri üzerindeki etkisi ($L/h = 15$, $h/b = 0.5$, $\alpha = 0.2$, cisim-sabit üniform yayılı kuvvet).	91
Çizelge 5.7 : HDKY için yakınsama çalışması ve sonuçların karşılaştırılması.	92
Çizelge 5.8 : Önburulmalı çubuğun bir boyutlu model kullanılarak hesaplanmış eğilme-eğilme bağlaşıklık boyutsuz doğal frekans değerleri ($p = 1$). ..	93
Çizelge 5.9 : Önburulmalı çubuğun bir boyutlu model kullanılarak hesaplanmış eğilme-eğilme bağlaşıklık boyutsuz doğal frekans değerlerinin sonlu eleman analizi sonuçlarıyla karşılaştırılması ($p = 1$).	94
Çizelge 5.10 : Sayısal ve analitik olarak hesaplanmış burulma sabitlerinin karşılaştırılması [m^4] ($h = 10$ mm, $p = 1$).	99
Çizelge 5.11 : İnce cidarlı dikdörtgen kesit için rijitlik katsayıları.	99
Çizelge 5.12 : Hesaplanan burulma rijitliklerinin J^* [Nm^2] ABAQUS'ten elde edilen burulma rijitliği değerleriyle karşılaştırılması.	101
Çizelge 5.13 : Uç çekme kuvveti senaryosu için hesaplanan sonuçların sonlu eleman sonuçlarıyla karşılaştırılması.	106
Çizelge 5.14 : Uç burulma momenti senaryosu için hesaplanan sonuçların sonlu eleman sonuçlarıyla karşılaştırılması.	107
Çizelge 5.15 : Farklı malzeme parametresi değerleri için rijitlik katsayıları.	108
Çizelge 5.16 : $L/h = 25$ için önburulmalı çubuğa ait yakınsama çalışması.	113
Çizelge 5.17 : $L/h = 50$ için önburulmalı çubuğa ait yakınsama çalışması.	114
Çizelge 5.18 : $L/h = 100$ için önburulmalı çubuğa ait yakınsama çalışması.	115
Çizelge 5.19 : Bir boyutlu sonlu eleman analizinden elde edilen sonuçların üç boyutlu sonlu eleman analizinden elde edilenlerle karşılaştırılması.	117
Çizelge 5.20 : Bir boyutlu sonlu eleman analizinden elde edilen sonuçların üç boyutlu sonlu eleman analizinden elde edilenlerle karşılaştırılması.	118
Çizelge C.1 : Önburulmalı fonksiyonel olarak derecelendirilmiş ve gözenekli bir ankastre-serbest çubuk için üç boyutlu modele dair yakınsama çalışması.	151

Çizelge C.2 : Eğilme-eğilme statik davranış için yakınsama çalışması ($L/h = 5$, uzay-sabit düşey uç kuvveti senaryosu).	152
Çizelge C.3 : Eğilme-eğilme statik davranış için yakınsama çalışması ($L/h = 15$, uzay-sabit düşey uç kuvveti senaryosu).	153
Çizelge C.4 : Eğilme-eğilme statik davranış için yakınsama çalışması ($L/h = 60$, uzay-sabit düşey uç kuvveti senaryosu).	154
Çizelge C.5 : Eğilme-eğilme statik davranış için yakınsama çalışması ($L/h = 5$, cisim-sabit uniform yayılı kuvveti senaryosu).	155
Çizelge C.6 : Eğilme-eğilme statik davranış için yakınsama çalışması ($L/h = 15$, cisim-sabit uniform yayılı kuvveti senaryosu).	156
Çizelge C.7 : Eğilme-eğilme statik davranış için yakınsama çalışması ($L/h = 60$, cisim-sabit uniform yayılı kuvveti senaryosu).	157
Çizelge C.8 : Üç boyutlu sonlu eleman modeline yönelik yakınsama çalışması. ...	158
Çizelge C.9 : Eğilme-eğilme dinamik davranış için yakınsama çalışması ($L/h = 5$).	158
Çizelge C.10 : Eğilme-eğilme dinamik davranış için yakınsama çalışması ($L/h = 15$).	159
Çizelge C.11 : Eğilme-eğilme dinamik davranış için yakınsama çalışması ($L/h = 60$).	160
Çizelge C.12 : Uç çekme kuvveti senaryosu için yakınsama çalışması ($p = 10$)..	161
Çizelge C.13 : Uç burulma momenti senaryosu için yakınsama çalışması ($p = 10$).....	161
Çizelge C.14 : Uzama-burulma dinamik davranış için yakınsama çalışması ($L/h = 25$).....	162
Çizelge C.15 : Uzama-burulma dinamik davranış için yakınsama çalışması ($L/h = 50$).....	163
Çizelge C.16 : Uzama-burulma dinamik davranış için yakınsama çalışması ($L/h = 100$).	164

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 3.1 : ξ doğrultusunda belirli bir fonksiyona göre değişen özelliklere sahip bir malzemeden imal edilen dikdörtgen kesit.	24
Şekil 3.2 : Önburulmalı bir çubuğun geometrisi.	32
Şekil 3.3 : Düzenli ve düzensiz gözenek dağılım modelleri.	37
Şekil 3.4 : Malzeme özelliklerinin çubuk eksen boyunca değişimi.	46
Şekil 3.5 : Elastisite modülünün kesit üzerindeki parabolik dağılımı.	53
Şekil 3.6 : Eliptik kesit.	59
Şekil 5.1 : Yükleme durumunu ve sınır şartlarını içeren sonlu eleman modeli.	83
Şekil 5.2 : Hacim oranı indisinin farklı toplam önburulma açılarındaki tarafsız eksenin uç ötelenmeleri üzerindeki etkisi ($L/h = 15$, $h/b = 0.5$, $\alpha = 0.1$, düzenli gözenek dağılımı. Cisim-sabit üniform yayılı kuvvet yükleme senaryosu).	86
Şekil 5.3 : Gözeneklilik katsayısının farklı toplam önburulma açılarındaki tarafsız eksenin uç ötelenmeleri üzerindeki etkisi ($L/h = 15$, $h/b = 0.5$, $p = 0.2$, düzenli gözenek dağılımı. Cisim-sabit üniform yayılı kuvvet yükleme senaryosu).	87
Şekil 5.4 : Gözeneklilik katsayısının tarafsız eksenin uç ötelenmeleri üzerindeki etkisi ($L/h = 15$, $h/b = 0.5$, $p = 0.2$. Uzay-sabit düşey uç kuvveti senaryosu. Kesikli çizgiler düzensiz gözenek dağılımını temsil etmektedir.).	88
Şekil 5.5 : Eksenel olarak homojen olmayan bir önburulmalı çubuğa ait sonlu eleman modeli.	95
Şekil 5.6 : Bir boyutlu model kullanılarak elde edilen mod şekilleriyle sonlu elemanlar analizinden elde edilen mod şekillerinin karşılaştırılması ($L/h = 15$, $h/b = 0.5$, $\varphi = 60^\circ$ ve $p = 0$).	95
Şekil 5.7 : Malzeme parametresinin ilk dört eğilme-eğilme bağlaşıklık mod şekilleri üzerindeki etkisi ($L/h = 15$, $h/b = 0.5$, $\varphi = 60^\circ$).	97
Şekil 5.8 : Farklı malzeme parametresi değerleri için ilk dört eğilme-eğilme bağlaşıklık doğal frekansı ($L/h = 30$, $h/b = 0.8$, $\varphi = 90^\circ$).	98
Şekil 5.9 : Prandtl gerilme fonksiyonunun homojen olmayan kesit üzerindeki dağılımı ($h/b = 0.4$ ve $p = 3$).	100
Şekil 5.10 : Önburulmasız homojen olmayan bir çubuktaki maksimum kayma gerilmelerinin karşılaştırılması.	103
Şekil 5.11 : Önburulmasız homojen olmayan bir çubukta kayma gerilmesi dağılımları.	104
Şekil 5.12 : Homojen olmayan yaklaşımdan ve katmanlı yaklaşımdan hesaplanan çarpılma-kaynaklı rijitlik katsayılarının karşılaştırılması.	104
Şekil 5.13 : Çarpılma-kaynaklı rijitlik katsayılarının malzeme parametresine bağlı değişimi.	108
Şekil 5.14 : Boyutsuz uç burulma açısının farklı toplam önburulma açıları için değişimi (Uç çekme kuvveti).	109

Şekil 5.15 : Boyutsuz uç tarafsız eksen ötelenmesinin farklı toplam önburulma açıları için değişimi (Uç burulma momenti).	109
Şekil 5.16 : Boyutsuz uç burulma açısı ve uç tarafsız eksen ötelenmesinin farklı malzeme parametresi değerleri için değişimi ($\varphi = 60^\circ$).	110
Şekil 5.17 : Önburulmalı bir çubukta ilk dört uzama-burulma bağlaşıklık moduna ait mod şekilleri ($L/h = 100$, $h/b = 0.5$, $\varphi = 60^\circ$).	119



ÖN BURULMALI FONKSİYONEL OLARAK DERECELENDİRİLMİŞ ÇUBUKLARIN STATİK VE DİNAMİK DAVRANIŞLARININ İNCELENMESİ

ÖZET

Önburulmalı yapılar, kapalı bir düzlemsel eğriye belirli bir referans eksenini boyunca derinlik kazandırılması esnasında, bu kapalı düzlemsel eğrinin referans eksenini etrafında döndürülmesiyle elde edilen üç boyutlu yapılardır. Genel olarak makina mühendisliğindeki birçok uygulamada karşılaşılabilen bu yapılar, özellikle yüksek sıcaklık, nem ve sürtünme gibi zorlu ortamlarda işletilen turbomakinalarda, havacılık elemanlarında ve delme makinelerinde önburulmalı geometrilerinden dolayı ana sistem bileşeni olarak tercih edilmekte ve bu sebeple bu zorlu ortamların etkilerine doğrudan maruz kalabilmektedir. Bu zorlu ortam etkilerine direnç gösterirken aynı zamanda dayanımın da korunması ihtiyacı doğrultusunda, tabakalar arası gerilmelerin yüksek olduğu geleneksel kompozit malzemelerin aksine sürekli bir malzeme dağılımına sahip olmalarından dolayı ve süperalaşımlara kıyasla da daha düşük maliyetli olmaları sebebiyle, genel olarak özellikleri konuma bağlı olarak değişen malzemeler (homojen olmayan malzemeler) grubu, özel olarak da bu grubun bir alt kümesi olarak değerlendirilebilen fonksiyonel olarak derecelendirilmiş malzemeler, zorlu ortamlarda bulunan önburulmalı yapıların dayanımlarını korurken ortam etkilerine de direnç gösterebilmelerine olanak sağlayan etkili bir malzeme grubu olarak öne çıkmaktadır.

Özellikleri konuma bağlı olarak değişen malzemelerden imal edilmiş bu önburulmalı yapılar genellikle, işlevleri nedeniyle, referans eksenini içeren boyutun (yani uzunluğun), derinlik kazandırılan kapalı düzlemsel eğrinin (yani kesitin) karakteristik boyutuna oranı yüksek bir değer sahip olacak şekilde tasarlanmaktadır. Bu sebeple, özellikle konuma bağlı malzeme özelliklerinin ifade edilebilmesi için detaylı bir model geliştirme süreci ve hassas bir analiz için fazla sayıda eleman kullanımına ihtiyaç duyan sonlu elemanlar yöntemi gibi bir yöntemden elde edilen üç boyutlu sayısal modellerin aksine, bir boyutlu mekanik modellerin geliştirilmesi bu yapıların mekanik davranışlarının analizinde daha verimli bir modelleme yaklaşımı olarak değerlendirilebilmektedir. Bir boyutlu modeller çerçevesinde bu yapılarda, geometrik olarak çift simetrik ve homojen malzemeye sahip bir kesit için bile önburulma sebebiyle eğilme davranışı üç boyutlu olarak meydana gelir ve eksenel uzama ile burulma arasında bağlaşıklık oluşur. Önburulmalı geometriden kaynaklanan bu iki karakteristik bağlaşıklığın, malzeme özelliklerinin konuma bağlı olarak değişmesinden nasıl ve ne ölçüde etkileneceği bu yapıların gelişmiş tasarımları için makina mühendisleri tarafından yanıtlanması gereken önemli sorulardandır. Bu bağlamda, bu çalışma kapsamında, konuma bağlı olarak değişen özelliklere sahip malzemeden imal edilen önburulmalı yapıların eğilme-eğilme bağlaşıklık statik, eğilme-eğilme bağlaşıklık dinamik ve uzama-burulma bağlaşıklık statik davranışları üzerinde, toplam önburulma açısı, malzeme dağılımı ve gözeneklilik gibi parametrelerin etkilerinin bir boyutlu mekanik modeller çerçevesinde incelenmesi amaçlanmıştır.

Ayrıca, literatürde homojen malzemeden imal edilen önburulmalı yapıların uzama-burulma bağlaşıp dinamik davranışını incelemeye yönelik geliştirilen bir boyutlu mekanik modelden hareketle bir sonlu eleman formülasyonu da geliştirilmiştir.

Bu doğrultuda, ilk olarak eğilme-eğilme bağlaşıp ve uzama-burulma bağlaşıp davranışlar, bu noktaya kadar ki geçmiş çalışmalara da değinilerek, temel olarak açıklanmıştır. Ayrıca malzeme özellikleri konuma bağı olarak değışen önburulmalı çubukların uzama-burulma davranışlarının incelenebilmesi için öncelikle genel olarak malzeme özellikleri konuma bağı olarak değışen önburulmasız çubukların burulmasına dair önbilgiye ihtiyaç duyulmaktadır. Bu bağlamda, malzeme özellikleri konuma bağı olarak değışen önburulmasız çubukların burulmasına dair çalışmalar da özetlenmiştir. Ardından malzeme özelliklerinin kesit üzerinde değışmesi durumunda üç boyutlu eğilme davranışını, uzama-burulma bağlaşıp davranışından ayırmak için kullanılması gereken malzeme dağılım profiline niteliğinin belirlenmesini amaçlayan bir araştırma yapılmıştır. Yapılan incelemeler sonucunda, kesit kalınlığı boyunca kesit orta düzlemine göre simetrik malzeme dağılımına sahip önburulmalı çubuklarda, eğilme davranışı ile uzama-burulma bağlaşıp davranışının birbirinden ayrı olarak incelenebileceği tespit edilmiştir.

Eğilme-eğilme bağlaşıp statik davranışa dair incelemeler özelinde, malzeme özelliklerinin kesit kalınlığı doğrultusunda simetrik ve üstel olarak değıştiğı varsayılmıştır. Ayrıca kesitin gözenek içerdığı varsayılarak, bu gözenekliliğın kesit üzerinde homojen olarak ve kesit kalınlığı doğrultusunda simetrik olarak değıştiğı iki ayrı senaryo ele alınmıştır. Bu kabuller altında, birinci merteye kayma şekil değışimi varsayımı yapılarak önburulmalı çubuğun yönetici denklemleri ilk olarak sabit koordinat sistemine göre; sonrasında da eğri eksenli koordinat sistemine göre, minimum toplam potansiyel enerji prensibi kullanılarak elde edilmiştir. Her iki durumda da yönetici denklemler, birinci mertebeden diferansiyel denklem sistemi olarak ifade edilmiştir ve başlangıç değeri yöntemi kullanılarak çözülmüştür. Bu bağlamda, sabit koordinat sistemine göre geliştirilen formülasyonda katsayılar matrisinin elemanlarının konuma bağı olarak değışen nitelikte olması sebebiyle, asal matris Volterra'nın çarpımsal integrali kullanılarak yaklaşık olarak hesaplanmıştır. Öte yandan, eğri eksenli koordinat sistemine göre geliştirilen formülasyonda ise katsayılar matrisinin sabitlerden oluşması sebebiyle asal matris, matris eksponansiyeli kullanılarak kesin analitik olarak hesaplanmıştır. Kesin analitik çözümü elde etmeye olarak veren ikinci formülasyon sayesinde, uzay-sabit düşey uç kuvveti ve cisim-sabit üniform yayılı kuvvet yükleme senaryoları için tarafsız eksenin ötelenmesine ait kesin analitik ifadeler sunulmuştur. Ayrıca bir boyutlu mekanik model yaklaşımının uygulanabilirlik sınırları tespit edilerek, her iki formülasyon yaklaşımından elde edilen sonuçların birbiriyle olan uyumu ve sonlu eleman analizinden elde edilen sonuçlarla tutarlılığı gösterilmiştir. Son olarak ise toplam önburulma açısının, hacim oranı indisinin, gözeneklilik oranının ve gözeneklilik dağılımının uç tarafsız eksen ötelenmeleri üzerindeki etkileri irdelenmiştir.

Eğilme-eğilme bağlaşıp dinamik davranışa dair incelemeler özelinde, önburulmalı çubuğun malzeme özelliklerinin çubuk eksenli doğrultusunda eksponansiyel olarak değıştiğı varsayılmıştır. Birinci merteye kayma şekil değışimi varsayımı yapılarak önburulmalı çubuğun serbest titreşimlerine ait yönetici denklemler, sabit koordinat sistemine göre Hamilton prensibi kullanılarak formüle edilmiştir ve birinci mertebeden diferansiyel denklem sistemi olarak ifade edilmiştir. Burada, hem sabit koordinat sistemine göre formülasyon neticesinde önburulmadan dolayı hem de çubuğun malzeme özelliklerinin çubuk ekseninin bir fonksiyonu olarak değışmesinden dolayı,

katsayılar matrisi konuma bağılı olarak değişmektedir. Bu sebeple çözüm, harmonik diferansiyel kuadratur yöntemi kullanılarak sayısal olarak elde edilmiştir. Bir boyutlu mekanik modelden elde edilen sonuçların, sonlu eleman analizinden elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmasının ve bir boyutlu mekanik modelin uygulanabilirlik sınırlarının belirlenmesinin ardından, ilk dört eğilme-eğilme bağlaşıklık moduna dair mod şekilleri sunulmuştur. Ardından, malzeme parametresinin ilk dört eğilme-eğilme bağlaşıklık doğal frekansı üzerindeki etkisi incelenmiştir.

Uzama-burulma bağlaşıklık statik davranışa dair incelemeler özelinde, malzeme özelliklerinin önburulmalı çubuk kesiti üzerinde kalınlık doğrultusunda simetrik ve parabolik olarak değiştiği varsayılmıştır. Poisson oranı sabit olarak alınmıştır. Uzama-burulma bağlaşıklığını modellemek için ise Saint-Venant burulma kabulü çerçevesinde çarpılma fonksiyonu temelli bir boyutlu mekanik model kullanılmıştır. Diferansiyel denklemler minimum toplam potansiyel enerji prensibi kullanılarak elde edilmiştir. Çarpılma-kaynaklı rijitlik katsayıları, çarpılma fonksiyonu yerine Prandtl gerilme fonksiyonu kullanılarak ifade edilmiştir. Böylece çarpılma-kaynaklı rijitlik katsayılarını hesaplamak için, malzeme özelliklerinin kalınlık boyunca değişmesi durumunda çözülmesi daha zor olan Neumann tipi sınır değer problemi yerine, Dirichlet tipi sınır değer probleminin kullanılması sağlanmıştır. Çarpılma-kaynaklı rijitlik katsayılarının hesaplanmasından sorumlu bilgisayar kodunun sınanması amacıyla gerçekleştirilen bir dizi doğrulama çalışmasının ardından, çalışma kapsamında kullanılan yaklaşım, literatürdeki çoklu malzemeli membran analojisi ile karşılaştırılmıştır. Ardından, uç çekme kuvveti ve uç burulma momenti yükleme senaryoları için, bir boyutlu mekanik modelin, uygulanabilirlik sınırları içerisinde, sonlu eleman analizinden elde edilen sonuçlarla uyumlu olan sonuçlar verdiği gösterilmiştir. Son olarak, toplam önburulma açısının ve malzeme parametresinin, uç burulma açısı ve uç tarafsız eksen ötelenmesi üzerindeki etkisi sırasıyla bu iki yükleme senaryosu için araştırılmıştır.

Uzama-burulma bağlaşıklık dinamik davranış özelinde, literatürde homojen malzemeden imal edilen önburulmalı çubuklar için geliştirilen uniform olmayan burulma kabulü temelli bir boyutlu mekanik modeli temel alarak bir boyutlu bir sonlu eleman modeli geliştirilmiştir. İnterpolasyon fonksiyonlarına yönelik kısa bir değerlendirmeden sonra, geliştirilen sonlu eleman modeline dair yakınsama çalışması farklı geometrik parametrelere sahip önburulmalı çubuklar için yapılmıştır. Ardından, geliştirilen sonlu eleman modelinden elde edilen ilk dört uzama-burulma bağlaşıklık moduna ait doğal frekanslar, üç boyutlu sonlu eleman modelinden elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır ve ilgili mod şekilleri sunulmuştur.

Yukarıda özetlenen incelemeler doğrultusunda, özellikleri konuma bağılı olarak değişen malzemeden imal edilmiş ve gerekli uygulanabilirlik sınırları içerisinde tasarlanmış önburulmalı yapıların, eğilme-eğilme bağlaşıklık statik, eğilme-eğilme bağlaşıklık dinamik ve uzama-burulma bağlaşıklık statik davranışları üzerinde, toplam önburulma açısı, malzeme dağılımı ve gözeneklilik gibi parametrelerin etkilerinin, bir boyutlu mekanik modeller kullanılarak incelenebileceği belirtilmiştir. Ayrıca, literatürde daha önceden sunulmuş olan bir boyutlu mekanik modelden hareketle, homojen malzemeden imal edilmiş önburulmalı yapıların uzama-burulma bağlaşıklık dinamik davranışının bir boyutlu sonlu eleman formülasyonu kullanılarak incelenebileceği belirtilmiştir.



INVESTIGATION OF STATIC AND DYNAMIC BEHAVIORS OF FUNCTIONALLY GRADED PRETWISTED BEAMS

SUMMARY

Pretwisted structures are three-dimensional structures in which a closed planar curve is rotated around a reference axis while extruding this curve along that reference axis. Although such structures can be found in various applications in mechanical engineering, they are especially utilized as the main system component in turbomachines, aerospace components, and drilling machines operating in harsh environments such as high temperature, humidity, and friction because of their initially-twisted geometry, so they can be directly exposed to the effects of these harsh environments.

In line with the need of resisting the harsh environmental effects while preserving structural strength simultaneously, materials that have position-dependent properties (inhomogeneous materials) in general and functionally graded materials (which can be considered as a subgroup of inhomogeneous materials group) in particular stand out as an effective group of materials that allows pretwisted structures operated in harsh environments to resist environmental effects while maintaining their strength due to providing continuous material distribution opposite to traditional composites and being inexpensive when compared to superalloys.

Because of their functions, pretwisted structures made of materials that have position-dependent properties are designed in such a way that the ratio of the characteristic dimension containing the reference axis (the length) to the characteristic dimension of the closed planar curve (the cross-section) to be extruded has a high value. In this regard, one-dimensional mechanical models are considered a more efficient modeling approach to analyzing the mechanical behaviors of these structures than the three-dimensional models obtained from the finite element method which needs a detailed preprocessing effort especially to introduce position-dependent material properties to the model and the large number of finite elements for an accurate analysis. In practice, to introduce position-dependent material properties to the model within the framework of the finite element method, three main methods are used, namely modeling the structure as a collocation of layers having different material properties, developing a user-defined routine, and expressing the material properties as a function of the temperature as is done in this study. However, it should also be noted that at this point the applicability of the third abovementioned finite element modeling technique (expressing the material properties as a function of the temperature) becomes controversial in the presence of real thermal effects. Within the framework of one-dimensional models, even for the beam which has a geometrically doubly symmetric cross-section made of the homogeneous material, bending takes place in three dimensions and the coupling occurs between the axial extension and the twisting, due to the nature of pretwisting. How and to what extent these two characteristic structural responses arise from the pretwisted geometry will be affected by the variation of the

position-dependent material properties are significant questions to be answered by mechanical engineers for the advanced designs of these structures.

Therefore, in this study, it is aimed to investigate the effects of parameters such as the total pretwist angle, the material distribution, and the porosity on the bending-bending coupled static behavior, the bending-bending coupled dynamic behavior, and the axial-torsional coupled static behavior of pretwisted structures which have position-dependent material properties within the framework of one-dimensional mechanical models. Additionally, a finite element formulation based on the one-dimensional mechanical model which exists in the literature is developed to analyze the axial-torsional coupled dynamic behavior of pretwisted structures made of homogeneous material.

On this basis, bending-bending and axial-torsional couplings are first explained basically by also mentioning previous studies. Furthermore, to study the axial-torsional coupled behavior of pretwisted beams having position-dependent material properties, it is needed to have preliminary knowledge on the torsion of initially-straight beams made of inhomogeneous materials. In this sense, previous studies on the torsion of initially-straight beams made of inhomogeneous materials are also addressed. Then, an investigation is conducted to determine the characteristic of the material distribution profile that should be used to analyze bendings and the axial-torsional coupled behavior separately from each other. As a result of this investigation, it is determined that bending behavior and the axial-torsional coupled behavior can be analyzed separately from each other in pretwisted beams that have a thickness-through symmetrical material distribution. Furthermore, for the pretwisted structures having axially varying material properties, the usage of a geometrically doubly symmetric cross-section becomes a sufficient criterion to separate the bendings and the axial-torsional coupled behavior from each other since the material properties in each cross-section are homogeneous along the beam axis in this case.

In the investigations on the bending-bending coupled static behavior, it is assumed that material properties change symmetrically and based on the power law in the thickness direction. Moreover, assuming that the cross-section contains porosity, two different porosity distribution scenarios in which the porosity disperses homogeneously over the cross-section and symmetrically in the thickness direction are discussed. Under these assumptions and considering the first-order shear deformation theory, governing equations of the pretwisted beam are obtained firstly in the fixed coordinate system and then in the curvilinear coordinate system by using the principle of minimum total potential energy. Governing equations are expressed as a first-order system of differential equations in both formulations and solved by using the initial values method. In this context, since the coefficient matrix varies depending on the position in the formulation developed in the fixed coordinate system, the fundamental matrix is computed approximately by using the multiplicative integral of Volterra. On the other hand, since the coefficient matrix consists of constant elements in the formulation developed in the curvilinear coordinate system, the fundamental matrix is calculated analytically by using the matrix exponential. By using the latter formulation approach which allows obtaining the exact analytical solution, exact analytical expressions of the neutral axis translations are presented for space-fixed vertical tip force and body-fixed uniform distributed force loading scenarios. Furthermore, the equivalency of the results obtained from both formulation approaches and the consistency of them with those obtained from finite element analyses are demonstrated by also determining the applicability limits of the one-dimensional mechanical model

approach. Finally, the effects of the total pretwist angle, the volume fraction index, the porosity coefficient, and the porosity distribution on tip neutral axis translations are discussed. As a result of this investigation, it is determined that the bending-bending coupled static behavior of pretwisted beams can be controlled by manipulating the total pretwist angle, the volume fraction index, the porosity coefficient, and the porosity distribution. Based on the mechanical model used, it is thought that the study can be considered as zeroth order solutions of kinematically richer mechanical models, and thus will constitute a reference for future studies.

In the investigations on the bending-bending coupled dynamic behavior, it is assumed that material properties vary exponentially along the beam axis. By utilizing the first-order shear deformation theory, the governing equations of the free vibration response of a pretwisted beam are formulated in the fixed coordinate system using Hamilton's Principle and expressed as a first-order system of differential equations. Here, the coefficient matrix appears as position-dependent because of not only the pretwist which is the result of formulating the problem in the fixed coordinate system but also axially varying material properties as well. In this sense, the solution is obtained numerically by using the harmonic differential quadrature method. After comparing results obtained from the one-dimensional mechanical model with those obtained from the finite element analyses and determining the applicability limits of the one-dimensional mechanical model, the mode shapes corresponding to the first four bending-bending coupled natural frequencies are presented. Then, the effects of the material parameter on the first four bending-bending coupled natural frequencies are discussed. Based on this investigation, it is determined that the bending-bending coupled free vibrations of the pretwisted beams can be controlled by manipulating the total pretwist angle and the material distribution in the axial direction.

In the investigations on the axial-torsional coupled static behavior, it is assumed that material properties change symmetrically and parabolically in thickness direction over the cross-section. The Poisson's ratio is taken as constant. To model the axial-torsional coupling, a warping-based one-dimensional mechanical model is used within the context of the Saint-Venant torsion assumption. Differential equations are obtained by using the principle of minimum total potential energy. Warping-related stiffness coefficients are expressed by using Prandtl's stress function instead of the warping function. Thus, to calculate warping-related stiffness coefficients, the Dirichlet-type boundary value problem is utilized instead of the Neumann-type boundary value problem, which is more difficult to solve in case of thickness-through varying material properties. After performing a series of validation studies to verify the computer code responsible for the computation of the warping-related stiffness coefficients, the approach adopted in this study is compared with the multi-material membrane analogy approach which exists in the literature. Next, for the tip tensile force and tip twisting moment loading scenarios, it is shown that the developed one-dimensional mechanical model can yield consistent results with those obtained from finite element analyses within the applicability limits of the one-dimensional mechanical model. Finally, the effects of the total pretwist angle and the material parameter on the tip twisting angle and the tip neutral axis translation are investigated for these two loading scenarios, respectively. Based on this investigation, it is determined that the axial-torsional coupled static behavior of pretwisted beams can be controlled by manipulating the total pretwist angle and the material distribution over the cross-section.

In the investigations on the axial-torsional coupled dynamic behavior, the nonuniform torsion assumption based one-dimensional mechanical model which is previously

published in the literature is taken as the starting point and a finite element formulation is developed to analyze the axial-torsional coupled dynamic behavior of pretwisted beams made of homogeneous material. After a brief discussion on the interpolation functions used, the convergence study of the developed finite element formulation is performed for pretwisted beams having different geometric parameters. Next, the natural frequencies of the first four axial-torsional coupled free vibration modes obtained from the developed finite element model are compared with the results obtained from the three-dimensional finite element model, and corresponding mode shapes are presented.

In line with investigations summarized above, it can be stated that the effects of the total pretwist angle, the material distribution and the porosity on the bending-bending coupled static, the bending-bending coupled dynamic and the axial-torsional coupled static behaviors of the inhomogeneous pretwisted structures designed in certain limits can be analyzed by using one-dimensional mechanical models. In addition, it is stated that, starting from a one-dimensional mechanical model previously presented in the literature, the axial-torsional coupled dynamic behaviour of pretwisted structures made of homogeneous material can be investigated by using a one-dimensional finite element formulation.

1. GİRİŞ

1.1 Önburulmalı Yapılar ve Temel Uygulama Alanları

Önburulmalı bir yapı temelde, kapalı bir düzlemsel eğriye belirli bir referans eksenini boyunca derinlik kazandırılırken, bu referans eksenini etrafında bu kapalı düzlemsel eğrinin döndürülmesi sonucunda elde edilen üç boyutlu katı cisim olarak tanımlanabilir. Burada “burulma” kelimesinin önüne getirilen “ön” eki, yapıda henüz bir gerilmenin olmadığı durumda var olan bu geometrik özelliği, yükleme kaynaklı oluşan burulma cevabından ayırt etmek için kullanılmaktadır (Abid ve diğ., 2008; Rosen, 1991). İngilizce kaynaklarda, yapının bu geometrik özelliğini ifade etmek için “pretwisted” veya “initially twisted” sıfatları kullanılmaktadır (Rosen, 1991; Valliappan ve diğ., 2014).

Önburulmalı yapılardan, uçak mühendisliğinden köprülerin inşasına kadar geniş bir mühendislik yelpazesinde uzun zamandır yararlanılmaktadır. Turbomakine ve havacılık-uzay sektöründe, türbin kanatları, helikopter tahrik sistemi elemanları, uydu kolları, fanlar, kompresörler ve pervaneler; imalat teknolojilerinde, matkap uçları ve parmak freze uçları; son yıllarda gelişme gösteren mikro elektromekanik sistemlerde (MEMS) kullanılan mikrotürbin ve mikropompalar; inşaat mühendisliğindeki bazı köprü tipi yapılar önburulmalı yapıların kullanım alanlarına verilebilecek en bilinen örneklerdir (Bhattacharya ve Das, 2020; Carnegie, 1957, 1959; W.-R. Chen, 2007; Ghorbani Shenass, Malekzadeh ve diğ., 2017; Hu ve diğ., 2020; Librescu ve diğ., 2005; Magrab ve Gilsinn, 1984; Malta ve diğ., 2019; Murthy, 1976; Sabuncu ve Evran, 2006; Soler, 1972; Şakar ve Sabuncu, 2008). Ayrıca, insan geninin aktarımında temel rolü üstlenen deoksiribo nükleik asit (DNA)’teki şeker-fosfat iskeleti ve bazı bitkilerin yaprakları, doğada karşılaşılan önburulmalı yapılara örnek olarak verilebilir (Giannakopoulos ve diğ., 2013; Zhao ve diğ., 2014).

Uygulama alanlarından da görülebileceği üzere mühendislik tasarımında, önburulmalı bir yapıya ana olarak türbin kanatlarında ve helikopter bileşenlerinde aerodinamik ihtiyaçlar doğrultusunda, ve kesici takım uçlarında talaş kaldırmaya uygun geometrisi

sebebiyle ihtiyaç duyulmaktadır. Ayrıca belirtilmelidir ki, yukarıda bahsedilen tasarım esnasında bilinçli olarak oluşturulan önburulmaya ek olarak, önburulma, (tıpkı imalat kusurlarından dolayı doğru eksenli olarak tasarlanan bir yapının eğri eksenli olarak imal edilmesi gibi) önburulmasız bir yapı elde etmeyi amaçlayan bir imalat sürecinde ortaya çıkabilecek olan bir kusur olarak da ele alınabilmektedir (Vielsack, 2000).

Ana olarak yukarıda değinilen uygulama alanları için tasarlanan önburulmalı yapıların, metal gibi geleneksel malzemelerden imal edilmesi durumunda ihtiyaç duyulan yapısal dayanım sağlansa bile işletildikleri zorlu ortamlardan kaynaklanan etkiler, bu yapıların servis ömrünün kısılmasına ve dahil oldukları sistemlerin verimlerinin sınırlandırılmasına sebep olabilmektedir. Örneğin, gaz türbinlerinde, aerodinamik ihtiyaçlardan dolayı önburulmalı olarak tasarlanan türbin kanatları, yüksek işletme sıcaklıklarına maruz kalabilmektedir (Álvarez Tejedor, 2011). Benzer şekilde, talaş kaldırmak amacıyla önburulmalı bir şekilde tasarlanmış kesici takım uçları, sürtünmeden dolayı oluşan yüksek sıcaklığa ek olarak aşınmaya da maruz kalabilmektedir. Dolayısıyla, bu ve benzeri ortamlarda görevlerini yerine getirmek için tasarlanan önburulmalı yapıların mekanik tasarımlarında, malzeme seçimi oldukça hassas bir konu başlığı haline gelmektedir.

Bu bağlamda, yüksek tokluk ve dayanım özellikleri korunurken, yapının aynı zamanda yüksek sıcaklık ve aşınmaya karşı dirençli hale gelmesine de olanak tanıyan yenilikçi bir malzeme olan fonksiyonel olarak derecelendirilmiş malzemeler (FDM), zorlu ortamlarda çalışan önburulmalı yapılarda karşılan yukarıda değinilen problemlerin aşılması noktasında bir alternatif olarak değerlendirilmektedir (Librescu ve diğ., 2005; Saleh ve diğ., 2020). İlk olarak 1980’lerde Japon bilimadamları tarafından uzay ve havacılık alanında kullanılmak üzere önerilmiş olan bu özel grup kompozit malzemelerde, bileşimi oluşturan malzemelerin hacim oranları istenilen doğrultuda belirli bir fonksiyona göre sürekli olarak değiştirilmekte ve üstün özelliklere sahip yeni bir malzeme imal edilebilmektedir (Birman ve Byrd, 2007; Ebrahimi ve Barati, 2017; Koizumi ve Niino, 1995). Malzeme özelliklerinin konuma bağlı olarak değişmesinden dolayı homojen olmayan malzeme sınıfının bir alt grubu olarak değerlendirilebilen bu malzemelere dair yapılan incelemelerin ve temel yorumların köklerinin, homojen olmayan malzemelere dair yapılan araştırmalara dayandığı da belirtilmesi gereken bir başka önemli noktadır. Fonksiyonel olarak derecelendirilmiş malzemelerde, malzeme dağılımının sürekli karakterde olması gerilme dağılımının da sürekli bir karakterde

olmasını sağlamakta ve bu durum tabakalar arasında oluşan yüksek gerilmelerin hasara yol açtığı geleneksel kompozitlere kıyasla önemli bir avantaj olarak değerlendirilmektedir (Jha ve diğ., 2013). Ayrıca, maliyet bakımından da fonksiyonel olarak derecelendirilmiş malzemelerin süperalaşımlara göre daha uygun bir alternatif olduğu da belirtilmelidir (Y. Oh ve Yoo, 2016).

Bileşimlerine göre metal-metal, metal-seramik, seramik-seramik, seramik-polimer şeklinde sınıflandırılabilen bu malzemelerin en bilinen uygulama alanlarından birisi, yüksek sıcaklığa direncin ve mekanik dayanımın önemi sebebiyle metal-seramik bileşiminin kullanıldığı türbin kanatlarıdır (Li ve diğ., 2014; Y. Oh ve Yoo, 2016; Saleh ve diğ., 2020) Burada, seramik bileşim sayesinde, yapıya yüksek sıcaklığa karşı direnç yeteneği kazandırılırken; metal bileşim sayesinde de yüksek dayanım yeteneği kazandırılmaktadır (S. Y. Oh, Librescu ve diğ., 2003). Benzer şekilde, kesici takım uçlarında da aşınma direncini arttırmak için fonksiyonel olarak derecelendirilmiş malzemelerden yararlanılmaktadır (Fang ve diğ., 2016; Konyashin ve diğ., 2017; Lengauer ve Dreyer, 2002). Bahsedilen üstün özelliklerinin yanında, fonksiyonel olarak derecelendirilmiş malzemelerin imalat süreçlerinde karşılaşılan bir takım problemler, bu malzemelerden imal edilmiş yapıların gözenekler içermesine ve bu sebeple de gerçekte mekanik davranışın öngörülenden bir miktar daha farklı olmasına yol açmaktadır. Gözeneklilik, hafiflik ve yüksek enerji yutumu gibi önemli mühendislik ihtiyaçlarına yanıt verebilme yeteneğinden dolayı yeri geldiğinde malzeme seçiminde arzulanan bir durum olarak değerlendirilebilir (D. Chen ve diğ., 2018; García-Moreno, 2016). Ancak, bu gözenekler fonksiyonel olarak derecelendirilmiş yapının sinterleme sürecinde meydana gelen istenmeyen büzüşmelerden kaynaklı olarak da oluşabilmekte ve böylece yapının mekanik özelliklerini olumsuz olarak etkileyen bir kusur olarak da değerlendirilebilmektedir (J. Zhu ve diğ., 2001). Bu gözenekler, bütün kesit üzerine homojen olarak dağılabileceği gibi, infiltrasyon işleminin homojen bir şekilde gerçekleşmemesinden dolayı kesitin orta bölümünde de kümelenebilmektedir (Wattanasakulpong ve diğ., 2012; Wattanasakulpong ve Chaikittiratana, 2015). Dolayısıyla ele alınan yapının mekanik davranışının gerçeğe uygun olarak öngörülebilmesi için gözenekliliğin geliştirilen mekanik modele dahil edilmesinin önem arzettiği söylenebilir.

Yukarıda değinilen sebeplerden ötürü zorlu ortamlarda kullanılmak üzere üstün özelliklere sahip malzemelerden imal edilmiş önburulmalı yapıların mekanik

davranışlarının incelenmesi gerek bilimsel gerekse de endüstriyel açıdan önem arz etmektedir.

1.2 Tezin Amacı

Sunulan tez çalışmasında, konuma bağlı olarak değişen özelliklere sahip malzemeden imal edilen önburulmalı yapıların eğilme-eğilme bağlaşık statik, eğilme-eğilme bağlaşık dinamik ve uzama-burulma bağlaşık statik davranışları üzerinde, toplam önburulma açısı, malzeme dağılımı ve gözeneklilik gibi parametrelerin etkilerinin bir boyutlu mekanik modeller çerçevesinde incelenmesi amaçlanmıştır. Ayrıca, homojen malzemeden imal edilmiş önburulmalı yapıların uzama-burulma bağlaşık dinamik davranışlarını incelemek amacıyla, literatürde daha önceden sunulmuş olan bir boyutlu mekanik modelden hareketle bir boyutlu bir sonlu eleman formülasyonu geliştirilmesi hedeflenmiştir.

1.3 Tezin Yapısı

Sunulan tez çalışması altı (6) bölümden oluşmaktadır. Bölüm 1’de, önburulmalı yapının tanımı yapılmış ve bu yapıların makine mühendisliğindeki temel uygulama alanlarına ve önemine, malzeme özelliklerindeki iyileştirmelere olan ihtiyaç vurgulanarak değinilmiştir. Ardından sırasıyla, tezin amacı ve genel yapısı açıklanmıştır. Bölüm 2’de, önburulmalı yapıların bir boyutlu modellemesinin önemine değinilerek, bu yapılarda ortaya çıkan karakteristik bağlaşıklıklar temel olarak açıklanmıştır. Sonrasında, önburulmalı yapıların mekanik davranışlarını bir boyutlu modeller kullanarak inceleyen geçmiş çalışmalar ve özellikleri konuma bağlı olarak değişen (homojen olmayan) malzemeden imal edilmiş yapıların burulmasını inceleyen geçmiş çalışmalar özetlenmiştir. Bölüm 3’te, öncelikle önburulmalı yapılarda ortaya çıkan iki ana davranış olan eğilme ile uzama-burulma bağlaşık davranışlarını, çubuğun homojen olmayan malzemeden imal edilmesi durumunda, birbirinden ayrı olarak inceleyebilmek için gerekli olan malzeme dağılım profilinin yapısı araştırılmıştır. Ardından sırasıyla, eğilme-eğilme bağlaşık statik, eğilme-eğilme bağlaşık dinamik, uzama-burulma bağlaşık statik ve uzama-burulma bağlaşık dinamik davranışlara dair matematiksel modeller geliştirilmiştir. Bu bölümde elde edilen yönetici denklemlerin çözümü ise Bölüm 4’te gerçekleştirilmiştir. Bölüm 5’te, önburulmalı ve homojen olmayan malzemeden imal edilmiş yapının ilgili davranışı üzerinde, toplam

önburulma açısı, malzeme dağılımı ve gözeneklilik gibi parametrelerin etkileri, ilgili bir boyutlu mekanik modelin uygulanabilirlik aralığı gözönünde bulundurularak incelenmiştir. Ayrıca, uzama-burulma bağlaşıp dinamik davranış özelinde geliştirilen sonlu eleman modeline dair bulgular ve tartışmalar da bu bölümde sunulmuştur. Bölüm 6’da ise çalışmanın genel bir değerdendirilmesi yapılmış ve çalışmanın önemi vurgulanmıştır.





2. ÖNBURULMALI VE FONKSİYONEL OLARAK DERECELENDİRİLMİŞ ÇUBUKLARIN TEMEL MEKANİK ÖZELLİKLERİ

2.1 Bir Boyutlu Modelleme Yaklaşımı Ve Temel Bağlılıklar

Bütün katı cisimler maruz kaldıkları yüklemelerden dolayı gerçekte bir miktar şekil değiştirir. Ancak, içindeki herhangi iki nokta arasındaki mesafenin çok az değiştiğine karar verilen durumlarda bu cisimlerin genellikle rijit cisim olarak modellenmesi tercih edilir. Mühendislikte kullanılan birçok malzemenin gerçekte homojen olmayan ve anizotrop karakterde olduğu ve mekanik cevaplarının da ideal lineer ve elastik malzeme davranışlarıyla birebir bir uyum göstermediği söylenebilir. Buna karşılık bu malzemelerin, belirli şartlar altında, lineer, elastik, homojen ve izotrop özelliğe sahip olduğu, mekanik özelliklerinin sıcaklıktan etkilenmediği vb. kabulleri yapılarak modellenmesi uygun görülebilir. Eğer yapılan bu varsayımlar neticesinde elde edilen sonuçların, deney sonuçlarıyla uyumlu olduğuna karar verilirse, bu modelin gerçek durumu kabul edilebilir sınırlar içerisinde yeterli bir şekilde temsil ettiği söylenebilir. Ancak, elde edilen sonuçlar, deney sonuçlarıyla uyumlu değilse, yapılan varsayımlardan dolayı mevcut modelin gerçek durumu yansıtmadığı ve modelin güncellenmesine dair bir gereklilik olduğu söylenebilir.

Yukarıda örnek verilen durumlara benzer şekilde, bütün yapılar da gerçekte üç boyutlu katı cisimlerdir ve mekanik davranışları, sürekli ortamlar mekaniğinin temel prensipleriyle geliştirilen üç boyutlu mekanik modeller aracılığıyla incelenebilir. Fakat bu üç boyutlu mekanik modeller kullanılarak modellenmiş problemlerin çözümünün elde edilmesi genelde zor olabilmektedir. Böyle durumlarda, belirli şartlar altında, bir takım varsayımlar neticesinde problemin bağımlı olduğu değişken sayısı azaltılarak, deney sonuçlarıyla kabul edilebilir seviyede uyumlu sonuçlar verebilen, bir ve iki boyutlu mekanik modellerin geliştirilmesi literatürde sıklıkla başvurulmuş bir yaklaşım olarak ön plana çıkmaktadır.

Genel olarak söylenebilirdi, yapının bir boyutunun diğer iki boyutuna kıyasla daha büyük olarak yorumlandığı durumlarda, yapının bir boyutlu mekanik modeller

kullanılarak modellenmesi literatürde sıklıkla başvuru alan bir yaklaşımdır. Yapının karakteristik uzunluğunu oluşturan boyu haricindeki diğer iki boyutunun bir kesit oluşturduğu önyorumuyla (bu kesit boyutlarının karakteristik uzunluk boyunca ilerledikçe ani değişimler geçirmediği varsayılmaktadır.) beraber yönetici diferansiyel denklemlerin ifadesinde tek bir konum değişkeni kullanılması, bir boyutlu mekanik modellerin temel özelliklerinden biridir. Yukarıda verilen örneklere benzer şekilde, bir boyutlu modellerde de yapılan varsayımların, deney sonuçlarıyla kabul edilebilir sınırlar dahilinde uyumlu sonuçlar vermesi halinde bu bir boyutlu modelin yapının mekanik cevabını ifade etmeye yeterli olduğu, aksi durumda ise kullanılan modelin geliştirilmesine dair bir gereklilik olduğu söylenebilir. Örneğin, literatürde sıklıkla başvuru alan bir boyutlu mekanik modellerin başında gelen Euler-Bernoulli çubuk modeli, varsayımları sebebiyle narin yani çubuk boyunun kesit kalınlığına kıyasla çok büyük olarak yorumlandığı yapılarda deney sonuçları ile iyi bir uyum göstermektedir. Ancak, incelenen yapının kısılması ve kalınlaşmasıyla beraber, temel aldığı varsayımları sebebiyle Euler-Bernoulli çubuk modelinin göz ardı ettiği kayma şekil değişimi etkileri artık baskın hale gelmekte ve bu durum da, Euler-Bernoulli çubuk modelinin deney sonuçlarıyla uyumlu sonuçlar vermemesine ve güvenilir bir inceleme için yetersiz kalmasına yol açmaktadır. Buna karşılık Timoshenko çubuk modeli, temel aldığı varsayımlar neticesinde, kayma şekil değişimi etkilerini gözönünde bulundurabilmekte ve deney sonuçlarıyla kabul edilebilir sınırlar içinde uyumlu sonuçlar verebildiği için literatürde kısa ve kalın çubuk tipi yapıların incelenmesinde sıklıkla kullanılan bir boyutlu mekanik modellerin başında gelmektedir.

Yukarıda kavramsal olarak değinilen noktaların, önburulmaya sahip yapılar için de geçerli olduğu söylenebilir. Boyutlarından birinin diğer ikisine kıyasla daha büyük olduğu ve kesitin ani değişimler içermediği, homojen malzemeden imal edilmiş bir önburulmalı yapının mekanik davranışları, üç boyutlu mekanik modeller kullanılarak ifade edilebilir ve çözüm, sonlu elemanlar yöntemi gibi güçlü sayısal çözüm yöntemleri kullanılarak incelenebilir. Ancak bu durumda, önburulmalı çubuğun bazı karakteristik özelliklerinin incelenmesi için yüksek eleman sayısı kullanımına ihtiyaç duyulmaktadır. Ayrıca, önburulmaya ek olarak yapının malzeme özelliklerinin konuma bağlı olarak değişmesi durumunda sonlu elemanlar yöntemi çerçevesinde model geliştirilmesi daha da detaylı bir süreç haline gelmektedir. Bu noktada, önburulmasız fakat homojen olmayan bir malzemeden imal edilmiş bir yapı için bile

yöntemin verimliliğinin sorgulanabilir bir hale geldiği söylenebilir. Buna karşılık, yapının bir boyutlu yaklaşımla modellenmesi durumunda, konuma bağlı olarak değişen malzeme özellikleri modele kolaylıkla dahil edilebilmekte ve yapının mekanik davranışı, belirli sınırlar çerçevesinde deney sonuçlarıyla tutarlı bir şekilde öngörülebilmektedir. Bu sebeple sunulan çalışmada, önburulmalı ve malzeme özellikleri konuma bağlı olarak değişen yapıların statik ve dinamik davranışlarının, bir boyutlu mekanik modeller kullanılarak incelenmesi tercih edilmiştir. Bu noktadan sonra, bir boyutlu mekanik modeller kullanılarak modellenmiş bir önburulmalı yapıyı ifade etmek için “önburulmalı çubuk” kelime grubu kullanılacaktır.

Bilindiği üzere, izotropik ve homojen malzemeden imal edilmiş, geometrik olarak çift simetrik keside sahip, doğru eksenli önburulmasız bir çubukta, uzama, burulma ve her iki asal eksen etrafındaki eğilmeler birbirinden bağımsız olarak incelenebilmektedir (İnan, 1966). Ancak önburulmalı çubuklarda kesitin doğru eksen boyunca döndürülmesinden dolayı, kesitin çift simetrik olması durumunda bile ortaya çıkan çarpım atalet momenti, eğilme davranışının üç boyutlu (yani düzlem-içi ve düzlem-dışı bağlaşıklık) olarak ortaya çıkmasına yol açmaktadır ve bu davranış literatürde “eğilme-eğilme bağlaşıklığı” olarak adlandırılmaktadır (Carnegie ve Thomas, 1972; Dawson, 1968; S. Y. Oh, Song ve diğ., 2003; Rosen, 1991; Subrahmanyam ve diğ., 1981).

Doğru eksenli önburulmalı çubuklarda karakteristik olarak gözlemlenen bir diğer bağlaşıklık ise “uzama-burulma bağlaşıklığı”dır. Eğilme-eğilme bağlaşıklığının aksine temel çubuk modelleri kullanılarak doğrudan modellenememesinden dolayı (Rosen, 1991), bu bağlaşıklığı açıklamak için literatürde temelde helisel multifilament yaklaşımı, elastisite teorisi yaklaşımı ve çarpılma fonksiyonu temelli yaklaşımlar olmak üzere üç ana yaklaşım önerilmiştir.

Uzama-burulma bağlaşıklık davranışının matematiksel olarak modellenmesine dair ilk incelemeler, önburulmasız bir çubukta eksenel kuvvetinin varlığının burulma rijitliğinde bir artışa yol açtığını gösteren Wagner ve Pretschner’den başladığı söylenebilir (Wagner ve Pretschner, 1936). Daha sonrasında Chu, önburulma açısının burulma rijitliği üzerindeki etkisini, bu yaklaşımı kullanarak ele almış ve bu etkinin yanında uzama-burulma bağlaşıklığını inceleyen Houbolt ve Brooks ile beraber literatürde sıklıkla uygulanan helisel multifilament yaklaşımının temellerini oluşturmuştur (Chu, 1951; Houbolt ve Brooks, 1958; Kaza ve Kielb, 1984; Librescu

ve diğ., 2008; McGee, 1992a, 1992b). Ancak helisel multifilament yaklaşımı, önburulmalandırmanın anlamını yitirdiği içi dolu dairesel kesite sahip bir çubuk için bile uzama ile burulma arasında bir bağışıklık ve burulma rijitliğinde bir artış tahmin etmesi sebebiyle fiziksel olarak tutarsız sonuçlar vermekte ve uygulanabilirliği ince cidarlı önburulmalı çubuklarla sınırlı kalmaktadır (K. C. Liu ve diğ., 2009; Rosen, 1980).

Üç boyutlu elastisite teorisini temel alan yaklaşımlar çerçevesinde Biot, eksenel yük ile burulma rijitliği arasındaki ilişkiyi incelemiştir (Biot, 1939). Bu çalışmayı sonrasında önburulmalı çubukları eğri eksenli koordinatlar kullanarak inceleyen Shorr ve Washizu takip etmiştir (Shorr, 1980; Washizu, 1964). Özellikle Washizu'nun çalışmalarından ilerleyen yıllarda önburulmalı çubukların mekanik davranışlarını inceleyen diğ. çalışmalarda da faydalanılmıştır (Bauchau ve Hong, 1987; Hodges, 1980; Librescu ve diğ., 2005). Ayrıca Krenk, önburulmalı çubuklardaki uzama-burulma bağışıklığını asimptotik analiz ile incelemiştir (Krenk, 1983).

Yukarıda değinilen iki yaklaşımdan başka, uzama-burulma bağışıklığını açıklamaya yönelik 1980'lerden başlayarak halen günümüzde kullanılmakta olan çarpılma fonksiyonu temelli yaklaşımlar önerilmiştir. Bu yaklaşımda, çarpılma fonksiyonunun burulma rijitliğindeki artıştan ve uzama-burulma bağışıklığından sorumlu olduğu varsayılmıştır (Rosen, 1980). Ayrıca, helisel multifilament yaklaşımının aksine içi dolu dairesel kesit için fiziksel olarak doğru sonuçların elde edildiği ve yöntemin ince cidarlı olmayan kesitlere de uygulanabileceği ifade edilmiştir (Rosen, 1980).

Bu noktada belirtmekte fayda vardır ki, doğru eksenli bir önburulmalı çubukta eğilme-eğilme ve uzama-burulma bağışıklarının birbirinden ayrı olarak incelenebilmesi için kesidin geometrik merkezinin, kayma merkezinin ve önburulmalandırma merkezinin çakışık olması gerekmektedir (Balhaddad ve Onipede, 1998; K. C. Liu ve diğ., 2009; Rosen, 1983). Burada, geometrik merkezin ve kayma merkezinin çakışık olması kriterinin, kesidin izotropik ve homojen malzemeden imal edilmesi durumunda, geometrik olarak çift simetrik bir kesit tarafından sağlandığı belirtilmelidir. Homojen malzeme kullanımı çerçevesinde ve geometrik olarak çift simetrik kesit kullanımı durumunda birbirinden ayrı olarak incelenebilen bu iki bağışıklık, kesidin geometrik olarak asimetric olması durumunda geometrik merkez ile kayma merkezinin çakışmamasından dolayı birleşerek "eğilme-eğilme-uzama-burulma" bağışıklığı halini almaktadır (Filiz ve diğ., 2014; Rosen, 1983). Ayrıca, asimetric bir kesit için,

dönme esnasında eksenel yönde oluşan santrifüj atalet kuvvetinin asimetrik kesite sahip önburulmalı çubukta bağlaşıklıkların birleşmesine sebep olacağını da belirtmiştir (Y. Oh ve Yoo, 2018).

Önburulmalı çubukların mekanik davranışlarına dair incelemeler statik, dinamik ve stabilite çalışmaları olarak sınıflandırılabilir ve bunların her birini eğilme-eğilme ve uzama-burulma bağlaşıklıkları açısından ayrı ayrı ele almak mümkündür.

2.1.1 Eğilme-eğilme bağlaşıklığına dair çalışmalar

Literatür incelendiğinde eğilme-eğilme bağlaşıklık statik davranışa dair incelemelerin eğilme-eğilme bağlaşıklık dinamik davranışa dair çalışmalardan daha az olduğu söylenebilir. Bu durumun sebeplerinden bir tanesinin, türbin kanadı ve matkap ucu gibi yapıların işletme koşulları nedeniyle dinamik performanslarının incelenmesine olan ihtiyaç olduğu söylenebilir. Ancak buna karşın, özellikle uzay-havacılık ve mikro elektromekanik sistemlerdeki (MEMS) kullanım potansiyelleri, önburulmalı çubukların statik davranışlarının incelenmesini değerli ve gerekli kılmaktadır.

Tarihsel olarak eğilme-eğilme bağlaşıklığına ilişkin ciddi çalışmalar 1950'lerin ikinci yarısı ve 1970'lerin ilk yarısı arasında gerçekleştirilmiştir. Pratik uygulama alanı olarak türbin kanatlarının ele alındığı çalışmalarda, önburulmalı çubukların statik ve dinamik davranışları, analitik, sayısal ve deneysel yöntemlerle incelenerek önburulmanın ve konikliğin mekanik cevap üzerindeki etkisi araştırılmıştır (Carnegie, 1957, 1959, 1962, 1964; Carnegie ve diğ., 1965; Carnegie ve Thomas, 1972; Dawson, 1968; Dawson ve diğ., 1971; Dawson ve Carnegie, 1969; Dokumaci ve diğ., 1967).

Carnegie, tekil ve yayılı kuvvet durumu için türbin kanatlarının eğilme-eğilme bağlaşıklık statik davranışlarını, hem simetrik hem de asimetrik kesit için Euler-Bernoulli çubuk modelini kullanarak incelemiştir (Carnegie, 1957). Küçük önburulma açısına sahip Euler-Bernoulli çubukların eğilme-eğilme bağlaşıklık statik davranışları, Vielsack tarafından sonlu elemanlar yöntemiyle incelenmiştir (Vielsack, 2000). Lin ve diğerleri, elastik sınır şartlarına ve değişken önburulmaya sahip Timoshenko çubukların eğilme-eğilme bağlaşıklık statik davranışlarına ilişkin çözümün integral ifadelerini sunmuştur (Lin ve diğ., 2001). Chen, sonlu elemanlar yöntemini kullanarak enine ve eksenel yüklemeye maruz önburulmalı Timoshenko çubukların eğilme-eğilme statik davranışına ilişkin detaylı bir parametrik çalışma sunmuştur (W.-R. Chen, 2012). Çalışmada önburulma açısının, en-boy oranının, narinlik oranının, yükleme tipinin ve

sınır şartlarının yer değiştirmeler üzerindeki etkileri incelenmiştir. Zhao ve diğerleri, doğada bulunan periyodik olarak yayılı yüke maruz önburulmalı yapıları Timoshenko ubuk modeli kullanarak modellemiş ve eğilme-eğilme statik davranışlarını Fourier serileri kullanarak incelemiştir (Zhao ve diğ., 2014). Migliaccio ve Ruta, büyük yer değiştirme yapan değişken kesitli önburulmalı yapıların statik davranışlarını incelemek için üç boyutlu çubuk-tipi bir mekanik model geliştirmiştir (Migliaccio ve Ruta, 2021).

Yukarıda da bahsedildiği üzere önburulmalı çubukların dinamik davranışlarına dair literatürde çok sayıda inceleme mevcuttur. Bu incelemeler kendi aralarında, önburulmalı çubukların duran durumdaki; -matkap ucu gibi- kendi çubuk eksenini etrafındaki dönüşü sırasındaki ve -türbini kanadı gibi- çubuk eksenini dışındaki bir eksen etrafındaki dönüşü sırasındaki dinamik davranışlarını inceleyen çalışmalar olarak üç alt gruba ayrılabilir.

nburulmanın eğilme-eğilme bağlaşık doğal frekansları üzerindeki etkisi, Carnegie tarafından Euler-Bernoulli ubuk modeli ve Rayleigh yöntemi kullanılarak duran önburulmalı çubuk için hem simetrik hem de asimetrik kesit durumları için incelenmiştir (Carnegie, 1959). Bu çalışmada hareket denklemlerine dahil edilmeyen boyuna liflerin eğilme etkileri, Carnegie tarafından daha sonraki çalışmasında hareket denklemlerine dahil edilmiştir (Carnegie, 1962). Duran nburulmalı çubukların titreşimlerinin Timoshenko ubuk modeli kullanarak incelemesi yine ilk defa Carnegie tarafından gerçekleştirilmiştir (Carnegie, 1964). Her iki asal ekseninde konikleşen önburulmalı çubukların titreşimleri hem simetrik hem de asimetrik kesit için Euler-Bernoulli ubuk modeli ve sonlu farklar yöntemi kullanılarak Carnegie ve diğerleri tarafından incelenmiştir (Carnegie ve diğ., 1965). Dokumaci ve diğerleri, sonlu eleman yöntemine benzerlikleriyle anılan “matris yer değiştirme analizi” yöntemini kullanarak önburulmalı çubukların eğilme-eğilme bağlaşık titreşimlerini incelemiştir (Cheng ve Yan, 2012; Dokumaci ve diğ., 1967). Dawson, Euler-Bernoulli ubuk modeli ve Rayleigh-Ritz zm yöntemini kullanarak önburulmalı çubukların eğilme-eğilme bağlaşık titreşimlerini incelemiş ve mod şekillerini sunmuştur (Dawson, 1968). Aynı ubuk modeli kullanılarak, Dawson ve Carnegie hareket denklemlerini Runge-Kutta zm yöntemiyle doğrudan çözülmüştür (Dawson ve Carnegie, 1969) ve ardından Dawson ve diğerleri, bu çözüm yöntemini nburulmalı Timoshenko ubukların eğilme-eğilme bağlaşık titreşimlerini incelemek için uygulamıştır (Dawson

ve diğ., 1971). Carnegie ve Thomas, kare kesitli bir önburulmalı çubuk kullanarak her iki asal ekseninde aynı eğilme rijitliğini oluşturmuş ve bu sayede sadece konikliğin eğilme-eğilme bağlaşık titreşimleri üzerindeki etkisini incelemiştir (Carnegie ve Thomas, 1972). Gupta ve Rao, Timoshenko çubuk modeline dayalı bir sonlu eleman geliştirerek, önburulmalı konik çubukların eğilme-eğilme bağlaşık titreşimlerini incelemiştir (Gupta ve Rao, 1978). Subrahmanyam ve diğerleri, önburulmalı bir Timoshenko çubuğu için Reissner yönteminin toplam potansiyel enerji yaklaşımına kıyasla daha hızlı yakınsadığını ve daha iyi mod şekilleri verdiğini belirtmiştir (Subrahmanyam ve diğ., 1981). Magrab ve Gilsinn, kesici ve delici takım uçlarını Euler-Bernoulli çubuk modeli kullanarak önburulmalı olarak modelledikleri çalışmasında ankastre-ankastre mesnetli, eksenel yüke maruz önburulmalı çubuğun doğal frekanslarını incelemiştir (Magrab ve Gilsinn, 1984). Üniform olmayan önburulmaya sahip çubukların eğilme-eğilme bağlaşık titreşimlerini Timoshenko çubuk modeli kullanarak inceleyen Celep ve Turhan, çubuğun belirli bir bölümünün önburulmalandırılmasıyla titreşimlerin kontrol edilebileceğini belirtmişlerdir (Celep ve Turhan, 1986). Steinman ve diğerleri, eksenel olarak yüklenmiş, simetrik keside sahip bir önburulmalı Euler-Bernoulli çubuğunun doğal frekanslarını ankastre-serbest ve ankastre-ankastre sınır şartları için analitik olarak elde etmiştir (Steinman ve diğ., 1995). Elastik sınır şartlarına sahip, üniform olmayan önburulmaya sahip çubukların eğilme-eğilme bağlaşık titreşimleri Lin tarafından Euler-Bernoulli çubuk modeli ve transfer matrisi yöntemi kullanılarak incelenmiştir (Lin, 1997). Zamana bağlı elastik sınır şartlarına sahip, değişken kesitli ve önburulmalı bir Euler-Bernoulli çubuğunun eğilme-eğilme bağlaşık titreşimleri Lin tarafından incelenmiş ve çözüm Mindlin ve Goodman tarafından sunulan yöntem ve değiştirilmiş transfer matrisi metodu kullanılarak elde edilmiştir (Lin, 1998; Mindlin ve Goodman, 1950). Önburulmayı, doğru eksenli bir çubukta bulunan bir kusur olarak değerlendiren Vielsack, küçük önburulma açılarının eğilme-eğilme bağlaşık titreşimleri üzerindeki etkilerini Euler-Bernoulli çubuk modeli ve sonlu elemanlar yöntemi kullanarak incelemiştir (Vielsack, 2000). Banerjee, simetrik kesitli, önburulmalı bir Euler-Bernoulli çubuğunun eğilme-eğilme titreşimlerini dinamik rijitlik matrisi yöntemi kullanarak incelemiştir (Banerjee, 2001). Elastik sınır şartlarına ve üniform olmayan önburulmaya sahip olan bir Timoshenko çubuğunun eğilme-eğilme bağlaşık zorlanmış titreşimleri, Lin ve diğerleri tarafından değiştirilmiş transfer matrisi yöntemi kullanılarak incelenmiştir (Lin ve diğ., 2001). Yardımoğlu ve Yıldırım, sabit simetrik keside sahip önburulmalı

bir Timoshenko çubuğunun eğilme-eğilme bağlaşık titreşimlerini incelemek için yer değiştirme alanını bağlaşık olarak ifade etmiş ve çözüm için sonlu elemanlar yöntemini kullanmıştır (Yardimoglu ve Yildirim, 2004). Abid ve diğerleri, simetrik keside sahip önburulmalı çubukların yapısal analizi için Timoshenko çubuk modelini kullanarak karma-hibrid bir sonlu eleman formülasyonu geliştirmiştir (Abid ve diğ., 2008). Belirli bir bölgesinde Kelvin-Voigt modelinde sönüm içeren önburulmalı Timoshenko çubukların doğal frekansları, Chen tarafından sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak incelenmiştir (W.-R. Chen, 2014). Lee ve Lee, önburulmalı Euler-Bernoulli çubuklarının eğilme-eğilme bağlaşık titreşimlerinin doğal frekanslarını transfer matrisi yöntemini kullanarak kesin olarak hesaplamıştır (J. W. Lee ve Lee, 2016).

Kendi eksenini etrafında dönen çubukların titreşimlerine dair incelemeler, ana olarak matkap uçlarının delme işlemi sırasındaki performanslarını gözönünde bulunduran çalışmaları içermektedir. Kritik hız gibi, delme işleminin kalitesini etkileyecek faktörler, dönüş ekseninde etkiyen eksenel tepki kuvvetinin varlığı altında incelenmiştir.

Liao ve Dang, Euler-Bernoulli ve Timoshenko çubuk modellerinin ikisini de kullanarak kendi ekseninde dönen önburulmalı bir çubuğun eğilme-eğilme bağlaşık titreşimlerini sonlu eleman yöntemi kullanarak incelemiştir (Liao ve Dang, 1992). Huang, matkap ucunu hareketli sınır şartlarına sahip ve zamana bağlı olarak değişen eksenel kuvvete maruz önburulmalı bir Euler-Bernoulli çubuğu olarak modellemiştir ve delme işleminin doğal frekanslar üzerinde yaptığı etkileri incelenmiştir (Huang, 2004). Eksenel yüke maruz matkap uçlarının eğilme-eğilme bağlaşık titreşimleri ve burkulma davranışları, Chen tarafından Timoshenko çubuk modelini temel alan bir sonlu eleman formülasyonu geliştirilerek incelenmiştir (W.-R. Chen, 2007, 2010).

Çubuk eksenini dışında bir eksen etrafında dönen önburulmalı çubuklara dair incelemeler, ana olarak türbin kanadı özelinde gelişmiş olup, ankastre-serbest sınır şartlarına sahip bir önburulmalı çubuğa eksenel yönde etkidiği varsayılan santrifüj atalet kuvvetlerin varlığını temelde kabul etmektedir. Murthy, dönen önburulmalı çubuklarının eğilme-eğilme-burkulma bağlaşık titreşimlerini transfer matrisi metodu kullanarak incelemiştir (Murthy, 1976). Rao ve Gupta simetrik keside sahip, konik, dönen ve önburulmalı bir çubuğun eğilme-eğilme bağlaşık doğal frekanslarını Timoshenko çubuk modelini ve sonlu elemanlar yöntemini kullanarak incelemiştir

(Rao ve Gupta, 2001). Keyfi önburulmalı, değişken kesitli, bir ucu elastik mesnetli diğer ucunda noktasal kütle bulunan dönen bir Euler-Bernoulli çubuğunun eğilme-eğilme-uzama bağlaşık titreşimleri, Lin ve diğerleri tarafından modal açılım yöntemi ile analitik olarak incelenmiştir (Lin ve diğ., 2003). Aynı kapsam Lee ve diğerleri tarafından, yarı analitik transfer matrisi yöntemi kullanılarak incelenmiştir (S. Y. Lee ve diğ., 2004). Lin ve diğerleri, keyfi önburulmaya sahip, dönen, bir ucu elastik mesnetli, simetrik ve değişken kesitli bir çubuğun, eğilme-eğilme bağlaşık sönümlü titreşimlerini yarı analitik transfer matrisi kullanarak incelemiştir (Lin ve diğ., 2006). Zhu, hibrid şekil değiştirme değişkenlerini kullanarak, önburulmalı, dönen bir Timoshenko çubuğunun eğilme-eğilme bağlaşık titreşimlerini, Rayleigh-Ritz yöntemi kullanarak incelemiştir (T. L. Zhu, 2011). Oh ve Yoo, uçak kanadı profiline sahip, önburulmalı bir dönen Timoshenko çubuğunun eğilme-burulma-uzama bağlaşık titreşimlerini ve mod şekillerini incelemiştir (Y. Oh ve Yoo, 2018).

Statik ve dinamik incelemelere ek olarak, literatürde önburulmalı yapıların statik ve dinamik stabilite davranışlarını inceleyen çalışmalar da bulunmaktadır (Kar ve Sujata, 1992; Karimi-Nobandegani ve diğ., 2018; Liao ve Dang, 1992; Magrab ve Gilsinn, 1984; Sabuncu ve Evran, 2006; Şakar ve Sabuncu, 2008; Tan ve diğ., 1998; T. H. Young, 1991; Zhao ve diğ., 2014).

Bu noktaya kadar sunulan çalışmaların hepsindeT, ele alınan önburulmalı çubuğun malzemesi izotropik ve homojen olarak modellenmiştir. Tarihsel olarak bakıldığında bu çalışmaların içeriğinin, zamanla anizotropik ve homojen olmayan malzemeleri de içerecek şekilde genişlediği gözlenmiştir.

Anizotropik veya homojen olmayan malzemeden imal edilen önburulmalı çubukların eğilme-eğilme bağlaşık statik davranışını inceleyen çalışmaların, bu malzemelerden imal edilmiş önburulmalı çubukların eğilme-eğilme bağlaşık dinamik davranışlarına dair incelemelerine kıyasla sınırlı sayıda olduğu tespit edilmiştir. Farsadi, fonksiyonel olarak derecelendirilmiş ve gözenek içeren malzemeden imal edilmiş, önburulmalı ince cidarlı ve değişken kesitli çubukların statik davranışını incelemiştir (Farsadi, 2022).

Anizotropik veya homojen olmayan malzemelerden imal edilmiş önburulmalı çubukların eğilme-eğilme bağlaşık dinamik davranışlarına dair incelemeler aşağıda özetlenmiştir.

Eğri eksenli, önburulmalı kompozit Timoshenko çubukların titreşimlerine dair yönetici diferansiyel denklemler Yıldırım tarafından sunulmuştur (Yıldırım, 1999). Song ve diğerleri, kendi ekseninde dönen ince cidarlı kompozit önburulmalı çubukların eğilme-eğilme bağlaşıklık titreşimleri üzerinde dönüş hızının ve eksenel basma kuvvetinin etkisini analitik olarak incelemiştir (Song ve diğ., 2000). Keyfi kesitli, kendi eksenini dışındaki bir eksen etrafında dönen, ince cidarlı, adaptif, kompozit ve önburulmalı çubukların eğilme-eğilme bağlaşıklık titreşimleri, Song ve diğerleri tarafından Genişletilmiş Galerkin yöntemi kullanılarak araştırılmıştır (Song ve diğ., 2001b). Song ve diğerleri, termal ortam içerisinde kendi eksenini dışındaki bir eksen etrafında dönen, ince cidarlı önburulmalı kompozit çubuklarda sıcaklık değişiminin ve lif açısının, eğilme-eğilme bağlaşıklık titreşimleri üzerindeki etkisini aynı yöntemi kullanarak incelemiştir (Song ve diğ., 2001a). Malzeme dağılımının kalınlık boyunca üstel olarak değiştirildiği, ince cidarlı, kendi eksenini dışındaki bir eksen etrafında dönen ve önburulmalı bir çubuğun eğilme-eğilme bağlaşıklık titreşimleri üzerinde hacim oranının, önkonum ve önburulma açılarının, sıcaklık gradyeninin, dönüş hızının ve dönüş eksenine olan uzaklığın etkileri Oh ve diğerleri tarafından araştırılmıştır (S. Y. Oh, Librescu ve diğ., 2003). Oh ve diğerleri, ince cidarlı, önburulmalı, kendi eksenini dışındaki bir eksen etrafında dönen ve kompozit malzemeden imal edilmiş bir çubukta, önburulma ve önkonum açısının eğilme bağlaşıklık titreşimleri üzerindeki etkisini incelemiştir (S. Y. Oh, Song ve diğ., 2003). Chandiramani ve diğerleri, kendi eksenini dışındaki bir eksen etrafında dönen, ince cidarlı ve kompozit önburulmalı çubukların eğilme-eğilme bağlaşıklık titreşimlerinde kayma deformasyonlarının önemine dikkat çekmiş ve yüksek mertebe kayma deformasyonu teorisini temel alarak bu çubukların serbest ve zorlanmış bağlaşıklık titreşimlerini araştırarak bir çalışma sunmuştur (Chandiramani ve diğ., 2003). Kendi ekseninde dönen, ince cidarlı, malzeme dağılımının kalınlık boyunca üstel olarak değiştiği, ısı ortamı içinde bulunan önburulmalı çubukların eğilme-eğilme bağlaşıklık titreşimleri ve stabiliteeleri hacim oranının, sıcaklık gradyeninin, kesit genişlik-kalınlık oranının, önburulma açısının ve eksenel kuvvetin, titreşim ve stabilite davranışları üzerindeki etkilerini inceleyen bir çalışma, Librescu ve diğerleri tarafından sunulmuştur (Librescu ve diğ., 2004). Aeroelastik yüklemeler altında, kendi eksenini dışındaki bir eksen etrafında dönen, önburulmalı, ince cidarlı ve malzeme dağılımının kesit kalınlığı boyunca üstel olarak değiştiği çubukların eğilme-eğilme bağlaşıklık titreşimleri üzerinde Mach sayısının, dönüş hızının, önburulma açısının ve hacim oranının etkisi, Fazlzadeh ve diğerleri

tarafından diferansiyel kuadratür yöntemi kullanılarak incelenmiştir (Fazelzadeh ve diğ., 2007). Choi ve diğerleri, kendi ekseni dışındaki bir eksen etrafında dönen, ince cidarlı, önburulmalı kompozit çubukların eğilme-eğilme bağlaşık titreşimlerinin sönüm davranışını iyileştirmek için piezoelektrik lifleri kullanan bir titreşim kontrol çalışması sunmuştur ve dönüş hızının, önburulma açısının, önkonum açısının, lif açısının, sensör-eyleyici çiftinin kapladığı alanın ve konumun, doğal frekanslar ve sönüm oranı üzerindeki etkilerini araştırmıştır (Choi ve diğ., 2007). Malzeme dağılımının kesit kalınlığı boyunca üstel olarak değiştiği, kendi ekseni dışındaki bir eksen etrafında dönen, önburulmalı bir Euler-Bernoulli çubuğunun eğilme-eğilme bağlaşık titreşimleri üzerinde önburulma açısının, üstel indisin, çubuğun dönme merkezine olan uzaklığının ve dönüş hızının doğal frekanslar üzerindeki etkisi Ramesh ve Mohan Rao tarafından Lagrange denklemleri ve Rayleigh-Ritz yöntemi kullanılarak incelenmiştir (Ramesh ve Mohan Rao, 2013). Değişken kesitli, kendi ekseni dışındaki bir eksen etrafında dönen, malzeme dağılımı kesit kalınlığı boyunca üstel olarak değiştiği, önburulmalı Euler-Bernoulli çubuklarının eğilme-eğilme bağlaşık titreşimleri üzerinde hacim oranı indisinin, elastisite modüllerinin oranının, dönüş eksenine olan uzaklığın, önburulma açısının, koniklik oranının, genişlik-kalınlık oranının ve dönüş hızının etkilerini incelemek için Oh ve Yoo, hareketten kaynaklanan rijitlik etkilerini daha hassas bir şekilde hesaba katan yeni bir yapısal model geliştirmiş ve çözümü Rayleigh-Ritz varsayılan mod yöntemi kullanarak elde etmiştir (Y. Oh ve Yoo, 2016). Shenasa ve diğerleri, termal ortam içindeki, önburulmalı, malzeme dağılımının kesit kalınlığı boyunca değiştiği Timoshenko mikroçubuklarının büyük genlikli titreşimlerini, Değiştirilmiş Şekil Değiştirme Gradyeni Teorisi kullanılarak incelemiştir (Ghorbani Shenasa, Ziaee ve diğ., 2017). Türbin kanadını idealize etmek için önburulmalı, malzeme dağılımının kesit kalınlığı boyunca gözenekli ve eksponansiyel olarak değiştiği varsayılan bir konik kabuk yapı kullanarak, düşük hızdaki tekli ve çoklu darbelerin yapıda oluşturduğu geçici zaman cevabını sonlu elemanlar yöntemi kullanarak inceleyen Das ve diğerleri, çarpan cisimin hızı ve kütlesi, yapının önburulma açısı ve gözeneklilik oranı gibi parametrelerin, çarpışma kuvveti, süresi ve yer değiştirme üzerindeki etkilerini irdelenmiştir (Das ve diğ., 2019). Bhattacharya ve Das, değişken kesitli, kendi ekseni dışındaki bir eksen etrafında dönen, önburulmalı ve iki doğrultuda fonksiyonel olarak derecelendirilmiş malzemeden imal edilmiş bir Timoshenko mikroçubuğunun eğilme-eğilme bağlaşık titreşimleri üzerinde dönüş kaynaklı yumuşamanın, Coriolis ivmesinin, önburulma

açısının, boyut parametresinin, genişlik-kalınlık oranının, hacim oranı indislerinin, işletme sıcaklığının, konikliğin ve narinlik oranının etkisini Değiştirilmiş Gerilme Çifti Teorisi ve Ritz yöntemi yardımıyla araştırmıştır (Bhattacharya ve Das, 2020). Zhang ve diğerleri, değişken kesitli, kendi eksenini dışındaki bir eksen etrafında dönen, kompozit, grafen katman kaplamalı ve önburulmalı türbin kanatlarını, silindirik bir panel olarak modellemiş ve grafen levha geometrisinin, ağırlık oranının, konikliğin, narinlik oranının, önburulma açısının, önkonum açısının ve dönüş hızının doğal frekanslar üzerindeki etkilerini incelemek için yeni bir dinamik model önermiştir (W. Zhang ve diğ., 2019). Fonksiyonel olarak derecelendirilmiş ve gözenek içeren malzemeden imal edilmiş, kendi eksenini dışındaki bir eksen etrafında dönen, önburulmalı ince cidarlı ve değişken kesitli çubukların dinamik davranışı Farsadi tarafından incelenmiştir (Farsadi, 2022).

2.1.2 Uzama-burulma bağışıklığına dair çalışmalar

Yukarıda da bahsedildiği gibi klasik modeller çerçevesinde elde edilemeyen uzama-burulma bağışıklığına dair çalışmaların, eğilme-eğilme bağışıklığına kıyasla literatürde daha sınırlı sayıda bulunduğu söylenebilir. Ayrıca, eğilme-eğilme bağışıklığının aksine, uzama-burulma bağışıklığının statik davranışını inceleyen çalışmaların literatürde, dinamik davranışını inceleyen araştırmalara kıyasla daha fazla sayıda bulunduğu gözlemlenmiştir.

Rosen, önburulmanın burulma rijitliği üzerindeki etkisini, küçük şekil değiştirme kabülüyle ve Saint-Venant burulma varsayımı çerçevesinde inceleyen bir boyutlu, çarpılma fonksiyonu temelli bir yaklaşım önermiştir (Rosen, 1980). Daha sonrasında sunulan bu yaklaşım, büyük dönme kabülü çerçevesinde yine Rosen tarafından uç çekme kuvvetine ve uç burulma momentine maruz önburulmalı bir çubuğun statik cevabını incelemek için kullanılmıştır (Rosen, 1983). Hodges, ayrı bir çarpılma parametresi tanımlayarak ve eğri eksenli koordinatları kullanarak eksenel yüke maruz önburulmalı çubukların burulma davranışını araştırmıştır (Hodges, 1980). Giannakopoulos ve diğerleri, birim şekil değiştirme gradyeni temelli elastisite yaklaşımı ve üniform olmayan burulma modelini kullanarak ince cidarlı ve önburulmalı çubukların statik davranışını incelemiştir (Giannakopoulos ve diğ., 2013). Üniform olmayan burulma modelini kullanan Kordelemis ve diğerleri, uzama-burulma bağışıklığı ile bir boyutlu iki kutuplu elastisite modeli arasında bir analogi kurmuş ve

önburulmalı liflerden üretilmiş tekstil iplikleri için bir mikromekanik model önermiştir (Kordolemis ve diğ., 2015). Isıl yüklemelere maruz önburulmalı bir çubuğun uzama-burulma statik davranışı, Kordolemis ve diğerleri tarafından üniform olmayan burulma modeli kullanılarak ve bir boyutlu gradyen termoelastisite modeli ile analoji kurularak incelenmiştir (Kordolemis ve diğ., 2017). Aravas ve Papadioti, kare, elips ve ince cidarlı kesitlere sahip önburulmalı çubukların uzama-burulma bağlaşıklık statik davranışlarını, üniform olmayan burulma modeli kullanarak detaylı olarak ele almıştır (Aravas ve Papadioti, 2022).

Dinamik davranış kapsamında uzama-burulma davranışını incelemeye yönelik, Subrahmanyam ve Kaza, önburulmalı çubukların burulma titreşimlerini hem duran hem de dönen durum için sonlu farklar yöntemi kullanarak incelemiştir (Subrahmanyam ve Kaza, 1985). McGee, uzama-burulma bağlaşıklığının, ince cidarlı açık profilli ve önburulmalı çubukların burulma titreşimleri üzerindeki etkilerini incelemiştir (McGee, 1992a, 1992b). İnce cidarlı, I-profilli önburulmalı çubukların burulma titreşimleri McGee ve diğerleri tarafından, McGee (1992a, 1992b)'nin de kullandığı multifilament model ile incelemiştir (Mcgee ve diğ., 1993). K.C. Liu ve diğerleri, üniform olmayan burulma modelini ve çarpılma fonksiyonu temelli yaklaşımı kullanarak önburulmalı çubukların burulma-uzama bağlaşıklık titreşimlerini incelemiştir (K. C. Liu ve diğ., 2009).

Bu noktaya kadar uzama-burulma bağlaşıklığına dair özetlenen çalışmaların hepsinde önburulmalı çubuğun izotropik ve homojen malzemeden imal edildiği varsayılmıştır. Ancak literatürde anizotropik veya homojen olmayan malzemeden imal edilen önburulmalı çubukların uzama-burulma bağlaşıklığını inceleyen çalışmalar da bulunmaktadır.

Oh ve Librescu, kendi eksenini dışındaki bir eksen etrafında dönen, ince cidarlı, kompozit malzemeden imal edilmiş önburulmalı çubukların uzama-burulma bağlaşıklık titreşimleri üzerinde önburulma açısının, takviye açısının, kesit en-boy oranının, dönüş hızının ve narinlik oranının etkisini üniform olmayan burulma modeli kullanarak incelemiştir (S. Y. Oh ve diğ., 2005). Kendi eksenini dışındaki bir eksen etrafında dönen, ince cidarlı, malzeme dağılımının kesit kalınlığı boyunca üstel olarak değiştiği, önburulmalı çubukların uzama-burulma bağlaşıklık titreşimleri üzerinde hacim oranı indisinin, ısıl etkinin, dönüş hızının, önburulma açısının etkisi, Librescu ve diğerleri tarafından üniform olmayan burulma modeli kullanılarak araştırılmıştır (Librescu ve

diğ., 2008). Sina ve Haddadpour, kendi eksenini dışındaki bir eksen etrafında dönen, ince cidarlı, önburulmalı kompozit çubukların uzama-burulma bağlaşıklık titreşimleri üzerinde, önburulmadan ve santrifüj kuvvetten kaynaklanan statik momentin, hücum açısının, önburulma açısının ve lif açısının etkilerini Genişletilmiş Galerkin Yöntemi kullanarak incelemiştir (Sina ve Haddadpour, 2014). Migliaccio, homojen olmayan malzemeden imal edilmiş üniform olmayan keside sahip, önburulmalı ve büyük şekil değişimi yapan çubuk tipi yapılarda gerilmeleri ve birim şekil değiştirmeleri analitik olarak incelemiştir (Migliaccio, 2022).

2.1.3 Homojen olmayan malzemeden imal edilmiş çubukların burulmasına dair çalışmalar

Fonksiyonel olarak derecelendirilmiş malzemeler, malzeme özelliklerinin konum değişkenlerinin bir fonksiyonu olarak tanımlanması sebebiyle homojen olmayan malzemeler sınıfına dahil edilmektedirler (Sadd, 2009). Dolayısıyla fonksiyonel olarak derecelendirilmiş malzemelerden imal edilen yapılara ilişkin araştırmalar ile homojen olmayan malzemelerden imal edilen yapılara dair çalışmalar arasında gerek yöntemsel gerek de tarihsel olarak genel bir süreklilik olduğu söylenebilir. Bu bağlamda, malzeme özellikleri konum değişkenlerinin bir fonksiyonu şeklinde değişen önburulmalı çubukların uzama-burulma bağlaşıklığını araştırmak için öncelikle homojen olmayan malzemeden imal edilmiş önburulmasız çubukların burulmasına dair yapılan ana çalışmalar incelenmelidir.

Bu ana çalışmalar, burulma davranışını formüle etmek için kullandıkları sınır değer probleminin yapısına göre Dirichlet tipi ve Neumann tipi olmak üzere iki ana grupta incelenebilir.

Burulma davranışının Dirichlet tipi sınır değer problemi ifadesinde, diferansiyel denklemler Prandtl gerilme fonksiyonu cinsinden ifade edilirken, sınır şartları ise ilgili probleme adını veren Dirichlet tipi sınır koşullarından (yani bağımlı bilinmeyen kendisinden) oluşmaktadır (Sadd, 2009). Tarihsel olarak, homojen olmayan malzemeden imal edilmiş çubukların burulmasında Dirichlet tipi sınır değer probleminden yararlanan çalışmaların başında Lekhnitskii, Kolchin ve Lomakin'in incelemeleri bulunmaktadır (Kolchin, 1971; Lekhnitskii, 1971; Lomakin, 1976). Bu çalışmalarda, Saint-Venant burulma modeli ve Prandtl gerilme fonksiyonu kullanılarak bazı özel durumlar için kapalı çözümler sunulmuştur. Rooney ve Ferrari,

radyal ve açısai olarak fonksiyonel olarak derecelendirilmiş dairesel çubukların burulmasını incelemiştir (Rooney ve Ferrari, 1995). Radyal doğrultuda fonksiyonel olarak derecelendirilmiş çubuklarda oluşan gerilme dağılımı Horgan ve Chan tarafından araştırılmıştır (Horgan ve Chan, 1998). Ortotropik ve homojen olmayan malzemeden imal edilmiş dikdörtgen keside sahip çubukların burulma rijitliğini ve gerilmelerini hesaplamak için Eishinskii ve diğerleri, Prandtl gerilme fonksiyonunu Fourier serileri kullanarak hesaplamıştır (Eishinskii ve diğ., 1999). Batra, dairesel keside sahip eksenel doğrultuda fonksiyonel olarak derecelendirilmiş çubukların burulma davranışlarına dair analitik çözümleri elde etmiştir (Batra, 2006). İnce cidarlı, malzeme özelliklerinin kalınlık boyunca değiştiği çubukların burulma davranışlarını incelemek için Arghavan ve Hematiyan bir analitik formülasyon önermiştir (Arghavan ve Hematiyan, 2009). Ecsedi, kayma modülünün Prandtl gerilme fonksiyonunun bir fonksiyonu olarak ifade edilmesi durumunda çeşit kesitler için Saint-Venant burulma modeli çerçevesinde burulma rijitliği ve kayma gerilmelerine dair analitik çözümlerin elde edilebileceğini göstermiştir (Ecsedi, 2009). Radyal doğrultuda homojen olmayan, piezoelektrik ve ortotropik malzemeden imal edilmiş çubukların burulma davranışları Ecsedi ve Baksa tarafından incelenmiştir (Ecsedi ve Baksa, 2020). Nikmehr ve Lashkarbolok, fonksiyonel olarak derecelendirilmiş malzemeden imal edilmiş çubukların burulmasını incelemek için Dirichlet tipi sınır değer probleminin diferansiyel denklemini en küçük kareler temelli ağırsız yöntem kullanarak çözmüştür (Nikmehr ve Lashkarbolok, 2019). Galuppi ve Royer-Carfagni, Saint-Venant burulma modeli çerçevesinde Prandtl'in membrane analogisini birden çok malzemeden oluşan kesitlere genişletmiştir (Galuppi ve Royer-Carfagni, 2019).

İkinci grup çalışmalarda, diferansiyel denklem çarpılma fonksiyonu kullanılarak ifade edilirken, sınır şartları ise ilgili probleme adını veren Neumann tipi sınır koşullarından, (yani bağımlı bilinmeyen türevlerinden) oluşmaktadır (Sadd, 2009). Katsikadelis ve Tsiatas, anizotropik ve homojen olmayan malzemeden imal edilen çubukların burulmasını Saint-Venant burulma modeli çerçevesinde analog denklem yöntemi kullanarak incelemiştir (Katsikadelis ve Tsiatas, 1999, 2016). Elastoplastik ve fonksiyonel olarak derecelendirilmiş malzemeden imal edilmiş çubukların burulma davranışı, Tsiatas ve Babouskos tarafından yeni bir integral denklem çözümü önerilerek incelenmiştir (Tsiatas ve Babouskos, 2017). Rongqiao ve diğerleri, ortotropik ve homojen olmayan malzemeden imal edilen dikdörtgen keside sahip

Çubuklara ait kesin çarpılma fonksiyonunu Saint-Venant burulma modeli çerçevesinde elde etmiştir (Rongqiao ve diğ., 2010). Fonksiyonel olarak derecelendirilmiş malzemeden imal edilmiş çubukların çarpılma fonksiyonunu hesaplamak için bir varyasyonel formölasyon Yoon ve diğ.eri tarafından geliştirilmiştir (Yoon ve diğ., 2015). Kugler ve diğ.eri, fonksiyonel olarak derecelendirilmiş çubukların üniform olmayan burulmasını araştırmak için üç boyutlu elastisite teorisi temelli bir yaklaşım geliştirmiştir (Kugler ve diğ., 2019).



3. MALZEME ÖZELLİKLERİ KONUMA BAĞLI OLARAK DEĞİŞEN ÖNBURULMALI ÇUBUKLARIN MODELLENMESİ

Bu bölümde, malzeme özellikleri konuma bağlı olarak değişen önburulmalı çubukların eğilme-eğilme bağlaşıklık statik ve dinamik, ve uzama-burulma bağlaşıklık statik davranışlarını incelemek için kullanılacak olan matematiksel modeller geliştirilmiştir.

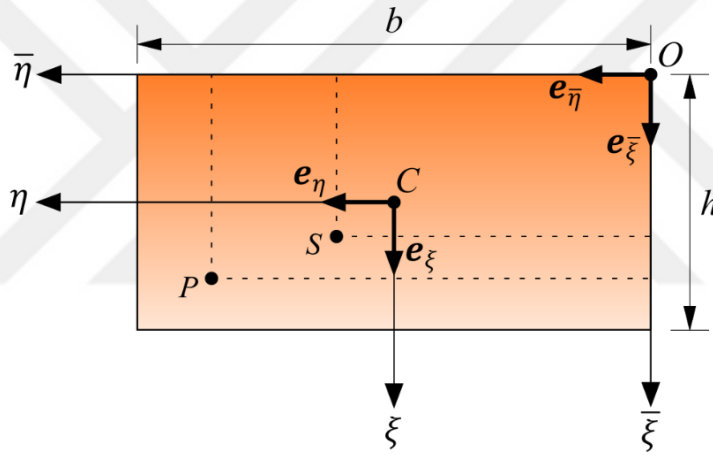
3.1 Malzeme Dağılım Profiline Seçilmesi

İzotropik ve homojen malzemeden imal edilmiş bir kesit için, kesit geometrisinin çift simetrik olması,

- uzama ile eğilme davranışlarının birbirinden ayrı olarak incelenmesine olanak sağlayan kesidin eğilme merkezinin, kesidin simetri eksenlerinin kesişiminde, yani kesidin geometrik merkezinde konumlanmasına,
- kesidin simetri eksenlerinin kesidin asal eksenlerine karşılık gelmesini sağlayarak, kesidin simetri eksenleri etrafında oluşan eğilme şekil değiştirmelerinin birbirinden ayrı olarak incelenebilmesine,
- eğilme ile burulma davranışlarının birbirinden ayrı olarak incelenebilmesine olanak sağlayan kesidin kayma merkezinin, eğilme merkeziyle çakışmasına

olanak sağlamaktadır. Dolayısıyla, izotrop ve homojen malzemeden imal edilen geometrik olarak çift simetrik bir keside sahip, önburulma ekseninin kesidin geometrik merkezinden geçtiği varsayılan bir önburulmalı çubuk için sadece kesidin geometrik özelliklerini gözönünde bulundurmak uzama-burulma bağlaşıklık davranışını eğilme davranışlarından bağımsız olarak inceleyebilmek için yeterli bir kriter olarak değerlendirilmektedir (Balhaddad ve Onipede, 1998; K. C. Liu ve diğ., 2009; Rosen, 1983). Ancak, kesit geometrisinin çift simetrik olmasına rağmen, kesidin homojen olmayan bir malzemeden imal edilmesi durumunda, eğilme ve kayma merkezlerinin konumları geometrik merkez dışındaki bir noktada da oluşabilmektedir. Dolayısıyla, malzeme özelliklerinin kesit kalınlığı boyunca değiştiği önburulmalı çubukların mekanik özelliklerini incelemekten önce, bu çubuklarda eğilme ve uzama-burulma

bağlaşık davranışlarını birbirinden bağımsız olarak incelemeye olanak verecek malzeme dağılım profilinin karakterine karar verilmesi önem arz etmektedir. Bu bağlamda, aşağıda kesit kalınlığı boyunca malzeme özelliklerinin değiştiği varsayılan geometrik olarak çift simetrik bir kesidin eğilme merkezinin ve kayma merkezinin konumları temel olarak incelenmiştir. Şekil 3.1’de izotrop ve mekanik özellikleri ξ doğrultusunda belirli bir fonksiyona göre değişen malzemeden imal edilmiş dikdörtgen bir kesitin temsili gösterilmiştir. Burada b ve h sırasıyla sırasıyla kesidin genişliğini ve kalınlığını ifade etmektedir. O noktası, sırasıyla kesidin üst ve sağ kenarlarıyla çakıştığı varsayılan $\mathbf{e}_{\bar{\eta}}$, $\mathbf{e}_{\bar{\xi}}$ ve $\mathbf{e}_{\bar{z}} (= \mathbf{e}_{\bar{\eta}} \times \mathbf{e}_{\bar{\xi}})$ birim vektörlerine sahip $\bar{\eta}\bar{\xi}\bar{z}$ koordinat sisteminin; C noktası ise bu birim vektörlere paralel olan $\mathbf{e}_{\eta}$, $\mathbf{e}_{\xi}$ ve $\mathbf{e}_z (= \mathbf{e}_{\eta} \times \mathbf{e}_{\xi})$ birim vektörlerine sahip $\eta\xi z$ koordinat sisteminin orjinlerine karşılık gelmektedir.



Şekil 3.1 : ξ doğrultusunda belirli bir fonksiyona göre değişen özelliklere sahip bir malzemeden imal edilen dikdörtgen kesit.

Ayrıca, kesit geometrisinin çift simetrik olması sebebiyle, C noktası kesidin geometrik merkezine; η ve ξ eksenleri ise kesidin simetri eksenlerine karşılık gelmektedir. $P(\bar{\eta}, \bar{\xi})$ noktası kesit üzerinde alınan keyfî bir noktayı ve $S(\bar{\eta}_{sc}, \bar{\xi}_{sc})$ noktası ise kesidin kayma merkezini temsil etmektedir. Çubuğun geometrisi bu kesidi taban alan L uzunluğuna sahip dikdörtgenler prizması olarak tanımlanmıştır ve çubuk eksen parametresi $\mathbf{e}_{\bar{z}}$ yönünde $\bar{z}$ ile ifade edilmiştir, $\bar{z} \in [0, L]$.

Malzeme özellikleri simetrik olmayan bir dağılım profiline göre kesit kalınlığı boyunca değişen bir kesitte, eğilme merkezi geometrik merkezden farklı bir noktada oluşmaktadır (Abrate, 2008; Bousahla ve diğ., 2014; Eltaher ve diğ., 2013; Larbi ve diğ., 2013; Morimoto ve diğ., 2006; D. G. Zhang ve Zhou, 2008; Ziou ve diğ., 2016).

Bu bağlamda, yukarıda değinilen kesit ve simetrik olmayan malzeme dağılım profili varsayımı özelinde eğilme merkezinin konumu aşağıdaki gibi belirlenebilir (Eltaher ve diğ., 2013; Sankar, 2001):

İlk olarak, çubuğun $\bar{\xi}\bar{z}$ düzleminde şekil değiştirdiği varsayımından hareketle, Euler-Bernoulli çubuk modeli kullanılarak kesit üzerindeki keyfi bir P noktasının yer değiştirme alanı aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$u_{\bar{\eta}} = 0 \quad (3.1)$$

$$u_{\bar{\xi}} = v_o(\bar{z}) \quad (3.2)$$

$$u_{\bar{z}} = w_o(\bar{z}) - \bar{\xi} \frac{dv_o(\bar{z})}{d\bar{z}} \quad (3.3)$$

Burada, $u_{\bar{\eta}}$, $u_{\bar{\xi}}$ ve $u_{\bar{z}}$ sırasıyla yer değiştirme alanının $\bar{\eta}$, $\bar{\xi}$ ve $\bar{z}$ doğrultularındaki bileşenlerini; w_o ve v_o , sırasıyla O noktasından geçen eksenin $\bar{z}$ ve $\bar{\xi}$ doğrultularındaki ötelenmesini temsil etmektedir. Böylece, şekil değiştirme alanının sıfırdan farklı bileşeni, $\varepsilon_{\bar{z}O} = dw_o/d\bar{z}$ ve $\kappa_{\bar{\eta}} = -d^2v_o/d\bar{z}^2$ olarak tanımlanmak üzere aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\varepsilon_{\bar{z}\bar{z}} = \varepsilon_{\bar{z}O} + \bar{\xi}\kappa_{\bar{\eta}} \quad (3.4)$$

$E(\bar{\xi})$, $\bar{\xi}$ doğrultusunda değişen elastisite modülünü ifade etmek üzere,

$$\sigma_{\bar{z}\bar{z}} = E(\bar{\xi})\varepsilon_{\bar{z}O} + E(\bar{\xi})\bar{\xi}\kappa_{\bar{\eta}} \quad (3.5)$$

olarak tanımlanan aksenal gerilme ifadesinden hareketle, aksenal kuvvet $F_{\bar{z}}$ ve $\bar{\eta}$ eksenini etrafındaki eğilme momenti $M_{\bar{\eta}}$ aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$F_{\bar{z}} = \int_A \sigma_{\bar{z}\bar{z}} dA = A_{11}\varepsilon_{\bar{z}O} + A_{12}\kappa_{\bar{\eta}} \quad (3.6)$$

$$M_{\bar{\eta}} = \int_A \sigma_{\bar{z}\bar{z}} \bar{\xi} dA = A_{12}\varepsilon_{\bar{z}O} + A_{22}\kappa_{\bar{\eta}} \quad (3.7)$$

Burada A_{11} , A_{12} ve A_{22} sabitleri aşağıdaki gibi tanımlanmak üzere,

$$[A_{11}, A_{12}, A_{22}] = \int_A E(\bar{\xi}) [1, \bar{\xi}, \bar{\xi}^2] dA \quad (3.8)$$

$\varepsilon_{\bar{z}O}$ ve $\kappa_{\bar{\eta}}$ ifadeleri, $\Delta_1 = A_{11}A_{22} - A_{12}^2$ olarak tanımlanmak üzere

$$\varepsilon_{\bar{z}O} = \frac{1}{\Delta_1} [A_{22}F_{\bar{z}} - A_{12}M_{\bar{\eta}}] \quad (3.9)$$

$$\kappa_{\bar{\eta}} = \frac{1}{\Delta_1} [-A_{12}F_{\bar{z}} + A_{11}M_{\bar{\eta}}] \quad (3.10)$$

olarak elde edilir ve denklem 3.5'te verilen aksenal gerilme ifadesine koyulursa

$$\sigma_{\bar{z}\bar{z}} = F_{\bar{z}} \frac{E(\bar{\xi})}{\Delta_1} [A_{22} - \bar{\xi}A_{12}] + M_{\bar{\eta}} \frac{E(\bar{\xi})}{\Delta_1} [-A_{12} + \bar{\xi}A_{11}] \quad (3.11)$$

ve aksenal kuvvetin etkisi ihmal edilirse, son durumda aksenal gerilme ifadesi

$$\sigma_{\bar{z}\bar{z}} = M_{\bar{\eta}} \frac{E(\bar{\xi})}{\Delta_1} [-A_{12} + \bar{\xi}A_{11}] \quad (3.12)$$

haline sadeleşir. Eğilme merkezi üzerinde aksenal gerilme olmayacağından dolayı, parantez içini sıfır yapacak olan $\bar{\xi}$ değeri, eğilme merkezinin $\bar{\xi}$ doğrultusundaki konumunu verecektir:

$$-A_{12} + \bar{\xi}A_{11} = 0 \rightarrow \bar{\xi} = \frac{A_{12}}{A_{11}} = \frac{\int_A E(\bar{\xi}) \bar{\xi} dA}{\int_A E(\bar{\xi}) dA} = \frac{\int_0^h E(\bar{\xi}) \bar{\xi} d\bar{\xi}}{\int_0^h E(\bar{\xi}) d\bar{\xi}} \quad (3.13)$$

$F_{\bar{\xi}} = dM_{\bar{\eta}}/d\bar{z}$ olduğu hatırlanırsa, $\bar{\xi} = \bar{\xi}^*$ noktasındaki kayma gerilmesi $\sigma_{\bar{\xi}\bar{z}}$, diferansiyel denge denkleminde aşağıdaki gibi elde edilebilir (Sankar, 2001):

$$\sigma_{\bar{\xi}\bar{z}} = - \int_0^{\bar{\xi}^*} \frac{\partial \sigma_{\bar{z}\bar{z}}}{\partial \bar{z}} d\bar{\xi} = \frac{F_{\bar{\xi}}}{\Delta_1} \int_0^{\bar{\xi}^*} E(\bar{\xi}) [A_{12} - \bar{\xi}A_{11}] d\bar{\xi} \quad (3.14)$$

$\bar{\xi}\bar{z}$ düzlemi için yapılan incelemeye benzer şekilde, $\bar{\eta}\bar{z}$ düzleminde şekil değiştirdiği varsayılan bir Euler-Bernoulli çubuğunun kesiti üzerindeki keyfi bir P noktasının yer değiştirme alanı aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$u_{\bar{\eta}} = u_O(\bar{z}) \quad (3.15)$$

$$u_{\bar{\xi}} = 0 \quad (3.16)$$

$$u_{\bar{z}} = w_O(\bar{z}) - \bar{\eta} \frac{du_O(\bar{z})}{d\bar{z}} \quad (3.17)$$

Burada u_O , O noktasından geçen eksenin $\bar{\eta}$ doğrultusundaki ötelenmesini temsil etmektedir. Bu durumda $\varepsilon_{\bar{z}O} = dw_O/d\bar{z}$ ve $\kappa_{\bar{\xi}} = d^2u_O/d\bar{z}^2$ kısaltmaları kullanılarak, şekil değiştirme alanının sıfırdan farklı bileşeni

$$\varepsilon_{\bar{z}\bar{z}} = \varepsilon_{\bar{z}O} - \bar{\eta}\kappa_{\bar{\xi}} \quad (3.18)$$

olarak yazılabilir. Bu durumda aksenal gerilme ifadesi

$$\sigma_{\bar{z}\bar{z}} = E(\bar{\xi})\varepsilon_{\bar{z}O} - E(\bar{\xi})\bar{\eta}\kappa_{\bar{\xi}} \quad (3.19)$$

şeklinde olup, aksenal kuvvet $F_{\bar{z}}$ ve $\bar{\xi}$ etrafında oluşan eğilme momenti $M_{\bar{\xi}}$

$$F_{\bar{z}} = \int_A \sigma_{\bar{z}\bar{z}} dA = B_{11}\varepsilon_{\bar{z}O} - B_{12}\kappa_{\bar{\xi}} \quad (3.20)$$

$$M_{\bar{\xi}} = - \int_A \sigma_{\bar{z}\bar{z}} \bar{\eta} dA = -B_{12}\varepsilon_{\bar{z}O} + B_{22}\kappa_{\bar{\xi}} \quad (3.21)$$

olarak yazılabilir. Burada,

$$[B_{11}, B_{12}, B_{22}] = \int_A E(\bar{\xi}) [1, \bar{\eta}, \bar{\eta}^2] dA \quad (3.22)$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Böylece, $\Delta_2 = B_{11}B_{22} + B_{12}^2$ şeklinde tanımlanmak üzere, denklem 3.20 ve 3.21'in oluşturduğu denklem sisteminden, $\varepsilon_{\bar{z}O}$ ve $\kappa_{\bar{\xi}}$ aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\varepsilon_{\bar{z}O} = \frac{1}{\Delta_2} (B_{22}F_{\bar{z}} + B_{12}M_{\bar{\xi}}) \quad (3.23)$$

$$\kappa_{\bar{\xi}} = \frac{1}{\Delta_2} (B_{12}F_{\bar{z}} + B_{11}M_{\bar{\xi}}) \quad (3.24)$$

Bu ifadeler, denklem 3.19’da verilen eksenel gerilme ifadesine koyulursa

$$\sigma_{\bar{z}\bar{z}} = F_{\bar{z}} \frac{E(\bar{\xi})}{\Delta_2} [B_{22} - \bar{\eta}B_{12}] + M_{\bar{\xi}} \frac{E(\bar{\xi})}{\Delta_2} [B_{12} - \bar{\eta}B_{11}] \quad (3.25)$$

ve eksenel kuvvetin etkisi ihmal edilirse, eksenel gerilme son durumda

$$\sigma_{\bar{z}\bar{z}} = M_{\bar{\xi}} \frac{E(\bar{\xi})}{\Delta_2} [B_{12} - \bar{\eta}B_{11}] \quad (3.26)$$

haline sadeleşir. Eğilme merkezi üzerinde eksenel gerilme olmayacağından hareketle, parantez içini sıfır yapacak olan $\bar{\eta}$ değeri, eğilme merkezinin $\bar{\eta}$ doğrultusundaki konumunu verecektir:

$$B_{12} - \bar{\eta}B_{11} = 0 \rightarrow \bar{\eta} = \frac{B_{12}}{B_{11}} = \frac{\int_A E(\bar{\xi})\bar{\eta}dA}{\int_A E(\bar{\xi})dA} = \frac{b}{2} \quad (3.27)$$

$F_{\bar{\eta}} = -dM_{\bar{\xi}}/d\bar{z}$ olduğu hatırlanırsa, $\bar{\eta} = \bar{\eta}^*$ noktasındaki kayma gerilmesi $\sigma_{\bar{\eta}\bar{z}}$, diferansiyel denge denkleminde aşağıdaki gibi elde edilebilir (Sankar, 2001):

$$\sigma_{\bar{\eta}\bar{z}} = - \int_0^{\bar{\eta}^*} \frac{\partial \sigma_{\bar{z}\bar{z}}}{\partial \bar{z}} d\bar{\eta} = \frac{F_{\bar{\eta}}}{\Delta_2} E(\bar{\xi}) \int_0^{\bar{\eta}^*} [B_{12} - \bar{\eta}B_{11}] d\bar{\eta} \quad (3.28)$$

Yukarıda elde edilen sonuçlar özetlenirse, ele alınan geometrik olarak çift simetrik ve malzeme özelliklerinin $\bar{\xi}$ doğrultusunda değiştiği bir kesit üzerindeki eğilme merkezi, $\bar{\eta}$ doğrultusunda sabit ($b/2$) kalırken; malzeme dağılım profilinin karakterine bağlı olarak $\bar{\xi}$ doğrultusunda $\bar{\xi} = h/2$ noktası dışındaki bir noktaya karşılık gelebilmektedir. Burada eğilme kaynaklı oluşan kayma gerilmeleri, $\sigma_{\bar{\xi}\bar{z}}$ ve $\sigma_{\bar{\eta}\bar{z}}$ aşağıdaki biçimde ifade edilmiştir:

$$\sigma_{\bar{\xi}\bar{z}} = \frac{F_{\bar{\xi}}}{\Delta_1} \int_0^{\bar{\xi}^*} E(\bar{\xi}) [A_{12} - \bar{\xi}A_{11}] d\bar{\xi} \quad (3.29)$$

$$\sigma_{\bar{\eta}\bar{z}} = \frac{F_{\bar{\eta}}}{\Delta_2} E(\bar{\xi}) \int_0^{\bar{\eta}^*} [B_{12} - \bar{\eta} B_{11}] d\bar{\eta} \quad (3.30)$$

Eğilme ve burulma davranışlarının birbirinden bağımsız olarak ele alınmasını sağlayan kayma merkezinin konumu $S(\bar{\eta}_{sc}, \bar{\xi}_{sc})$, sırasıyla $F_{\bar{\xi}}$ ve $F_{\bar{\eta}}$ kesme kuvvetleri neticesinde oluşan ve denklem 3.29 ve denklem 3.30 ile ifade edilen $\sigma_{\bar{\xi}\bar{z}}$ ve $\sigma_{\bar{\eta}\bar{z}}$ eğilme kaynaklı kayma gerilmeleri kullanılarak

$$\int_A \sigma_{\bar{\xi}\bar{z}} \bar{\eta} dA - \bar{\eta}_{sc} \int_A \sigma_{\bar{\xi}\bar{z}} dA = 0 \quad (3.31)$$

$$- \int_A \sigma_{\bar{\eta}\bar{z}} \bar{\xi} dA + \bar{\xi}_{sc} \int_A \sigma_{\bar{\eta}\bar{z}} dA = 0 \quad (3.32)$$

eşitlikleri yardımıyla bulunabilir. Bu durumda denklem 3.29 ve 3.31'dan

$$\begin{aligned} \frac{F_{\bar{\xi}}}{\Delta_1} \int_A \left(\int_0^{\bar{\xi}} E(\bar{\xi}) [A_{12} - \bar{\xi} A_{11}] d\bar{\xi} \right) \bar{\eta} dA \\ - \bar{\eta}_{sc} \frac{F_{\bar{\xi}}}{\Delta_1} \int_A \left(\int_0^{\bar{\xi}} E(\bar{\xi}) [A_{12} - \bar{\xi} A_{11}] d\bar{\xi} \right) dA = 0 \end{aligned} \quad (3.33)$$

şeklinde elde edilen denklemden,

$$\bar{\eta}_{sc} = \frac{b}{2} \quad (3.34)$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde, denklem 3.30 ve 3.32'den

$$\begin{aligned} - \frac{F_{\bar{\eta}}}{\Delta_2} \int_A \left(E(\bar{\xi}) \int_0^{\bar{\eta}} [B_{12} - \bar{\eta} B_{11}] d\bar{\eta} \right) \bar{\xi} dA \\ + \bar{\xi}_{sc} \frac{F_{\bar{\eta}}}{\Delta_2} \int_A \left(E(\bar{\xi}) \int_0^{\bar{\eta}} [B_{12} - \bar{\eta} B_{11}] d\bar{\eta} \right) dA = 0 \end{aligned} \quad (3.35)$$

şeklinde elde edilen denklemden, kayma merkezinin $\bar{\xi}$ doğrultusundaki konumu

$$\bar{\xi}_{sc} = \frac{\int_0^h E(\bar{\xi}) \bar{\xi} d\bar{\xi}}{\int_0^h E(\bar{\xi}) d\bar{\xi}} \quad (3.36)$$

olarak hesaplanır. Kayma merkezinin denklem 3.34 ve 3.36 ile ifade edilen konumu,

$$\bar{\eta} = \eta + \frac{b}{2} \quad (3.37)$$

$$\bar{\xi} = \xi + \frac{h}{2} \quad (3.38)$$

koordinat dönüşümleri kullanılarak kesidin geometrik merkezinden geçen $\eta\xi$ koordinat sisteminde,

$$\eta_{sc} = 0 \quad (3.39)$$

$$\xi_{sc} = \frac{\int_{-h/2}^{h/2} E(\xi) \xi d\xi}{\int_{-h/2}^{h/2} E(\xi) d\xi} \quad (3.40)$$

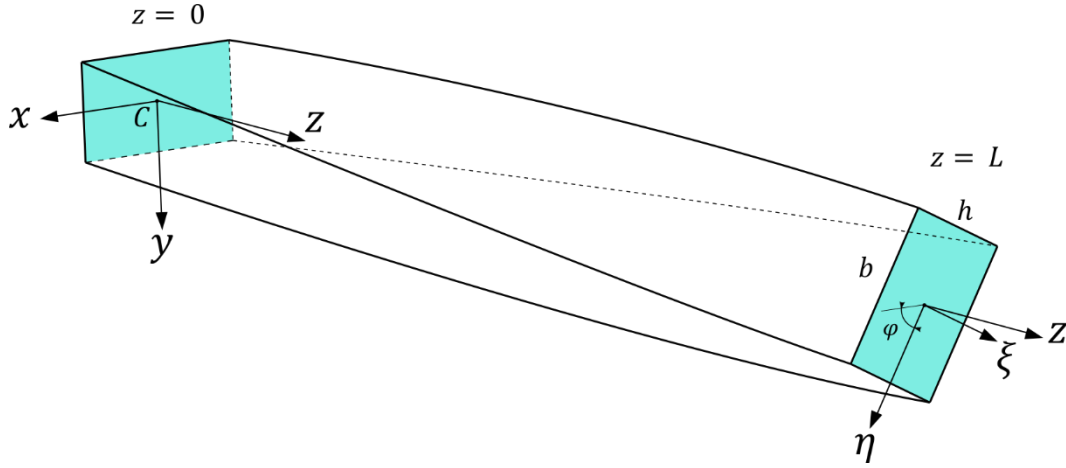
olarak da ifade edilebilir. Burada belirtmek gerekir ki, kayma merkezinin konumunun $\eta = 0$ doğrusu üzerinde bulunacağı hiçbir ek gösterime gerek kalmadan da görülebilen bir durumdur, çünkü $c \in [-b/2, b/2]$ olmak üzere, her $\eta = c$ doğrusu üzerinde malzeme özellikleri aynı dağılım karakterindedir. Ancak denklem 3.40'tan görüleceği üzere, malzeme özelliklerinin değişim doğrultusu olan ξ doğrultusunda, kayma merkezinin konumu, malzeme dağılım fonksiyonunun karakterine bağlı olarak değişmektedir. Kayma merkezinin $\bar{\eta}\bar{\xi}$ eksenine göre konumunu ifade eden denklem 3.34 ve denklem 3.36 ile eğilme merkezinin $\bar{\eta}\bar{\xi}$ eksenine göre konumunu ifade eden denklem 3.13 ve denklem 3.27 karşılaştırıldığında, bu kesit özelinde, kayma merkezinin eğilme merkezi ile çakıştığı belirtilmelidir. Denklem 3.40'tan da görülebileceği üzere, elastisite modülünün sabit olması durumunda, eşitliğin sağ tarafındaki kesirin payındaki integralin integrandı tek fonksiyon olmaktadır. Bu durumda, paya ait integral sıfır olmakta ki bu durum da kayma merkezinin kesidin geometrik merkeziyle çakışması anlamına gelen $\xi_{sc} = 0$ sonucunu vermektedir. Böyle bir durumda, önburulma eksenin de geometrik merkezden geçtiği hal için daha önce de belirtildiği gibi, önburulmalı bir çubukta eğilme davranışı, uzama-burulma bağılaşıklığından ayrılabilmekteydi. Böyle bir durumun aslında, elastisite modülünün

ξ doğrultusunda çift fonksiyon olarak değiştiği durumlar için de geçerli olduğu belirtilmelidir. Başka bir ifadeyle malzeme dağılım profilinin, kesit kalınlığı boyunca $\xi = 0$ eksenine göre simetrik olarak değiştiği durumlarda kayma merkezi, kesitin geometrik merkeziyle çakışmakta ve bu sayede malzeme özellikleri kesit üzerinde konuma bağlı olarak değişen önburulmalı bir çubukta eğilme davranışı ile uzama-burulma bağılıklığı birbirinden ayrı olarak incelenebilmektedir. Bu bağlamda, bu çalışma kapsamındaki kesit üzerinde konuma bağlı olarak değişen malzeme özelliklerine (elastisite modülü vb.) sahip bir dikdörtgen kesitin kullanıldığı incelemelerde, malzeme özelliklerinin kalınlık boyunca, ξ doğrultusunda $\xi = 0$ eksenine göre simetrik olarak değiştiği varsayılmıştır.

Ayrıca, böyle bir malzeme dağılım profili kullanımının, literatür ile büyük oranda uyumlu olduğu da belirtilmesi gereken bir diğer noktadır. Literatürde, içi dolu kesitli önburulmalı ve fonksiyonel olarak derecelendirilmiş çubukların dinamik davranışlarının incelendiği çalışmaların birçoğunda doğrudan simetrik dağılım profili kullanılmışken, ince cidarlı kutu profil için cidar kalınlığı boyunca normal doğrultuda asimetric (ancak bütün kapalı kesit için düşünüldüğünde simetrik hale karşılık gelen) malzeme dağılım profilleri kullanılmıştır (Bahaadini ve Saidi, 2018; Bhattacharya ve Das, 2020; Librescu ve diğ., 2004, 2008; L. T. Liu ve diğ., 2018; Y. Oh ve Yoo, 2016; Ramesh ve Mohan Rao, 2013). Son olarak değinilmesi gereken bir diğer nokta, malzeme özelliklerinin çubuk eksen boyuna değiştiği durumlarda malzeme özellikleri (elastisite modülü ve yoğunluk vb.), her kesitte η ve ξ koordinatlarından bağımsız olacağı için kesit geometrisinin çift simetrik olması, -geometrik merkez ile kayma merkezini çakıştırarak- eğilme ile uzama-burulma bağılıklığını birbirinden ayırmak için yeterli şart haline gelmektedir.

3.2 Önburulmalı Çubuğun Geometrisi

Şekil 3.2, doğru eksenli, genişliği b ve kalınlığı h olan üniform dikdörtgen keside sahip, L boyundaki önburulmalı bir çubuğu temsil etmektedir. Burada, C noktası kesidin geometrik merkezini; z koordinatı ise çubuk eksen parametresini ifade etmektedir. xyz koordinat sistemi, orjini C noktası olan sabit kartezyen koordinat sistemidir. $\eta\xi z$ koordinat sistemi ise çubuk boyunca hareket eden ve kesitle beraber dönen eğri eksenli koordinat sistemi olup, her konumda η ve ξ eksenleri kesidin asal eksenlerini temsil etmektedir.



Şekil 3.2 : Önburulmalı bir çubuğun geometrisi.

φ açısı ise $z = L$ konumundaki kesidin, $z = 0$ konumundaki keside göre z eksenine etrafındaki dönme açısını temsil eden toplam önburulma açısıdır. Çubuğun önburulmalandırmasının lineer olduğu varsayımıyla, keyfi bir z konumundaki kesidin z eksenine etrafındaki dönme açısı

$$\bar{\varphi}(z) = \beta z \quad (3.41)$$

şeklinde yazılabilir. Burada, β birim önburulma şiddeti olup, $\beta = d\bar{\varphi}/dz = \varphi/L$ şeklinde ifade edilir.

Böylece, çubuğun keyfi bir z konumundaki kesidi için xyz ve $\eta\xi z$ koordinat sistemleri

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta z & -\sin \beta z & 0 \\ \sin \beta z & \cos \beta z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta \\ \xi \\ z \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

dönüşüm ilişkisi kullanılarak birbiriyle ilişkilendirilebilir. Bu durumda, $f(\eta, \xi)$ keyfi bir fonksiyonu temsil etmek üzere aşağıdaki ilişkiler yazılabilir (Kordolemis ve diğ., 2017):

$$\frac{\partial \eta}{\partial z} = \beta \xi \quad (3.43)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial z} = -\beta \eta \quad (3.44)$$

$$\frac{\partial f(\eta, \xi)}{\partial z} = \beta \left(\xi \frac{\partial f}{\partial \eta} - \eta \frac{\partial f}{\partial \xi} \right) \quad (3.45)$$

3.3 Eğilme-eğilme Bağlaşık Statik ve Dinamik Davranışlara Dair Matematiksel Modeller

3.3.1 Eğilme-eğilme bağlaşık statik davranışa dair matematiksel modeller

3.3.1.1 Kinematik

Bir önceki bölümde, önburulmalı bir çubukta, biri sabit ve kartezyen xyz , diğeri de hareketli ve eğri eksenli $\eta\xi z$ olmak üzere iki koordinat sistemi tanımlanabileceği belirtilmişti. Her iki koordinat sistemi de çubuğun şekil değişiminin geometrisini incelemek için kullanılabilir. Bu bağlamda, çubuğun şekil değişimi aşağıda ilk olarak xyz koordinat sisteminde, sonrasında da $\eta\xi z$ koordinat sisteminde ifade edilmiştir.

Doğru eksenli ve önburulmalı bir çubuğun keyfi bir z konumundaki kesidi üzerinde bulunan keyfi bir P noktasına ait yer değiştirme alanı, birinci mertebeden kayma şekil değiştirme teorisini temel alarak ve küçük yer değiştirme kabülü yapılarak xyz koordinat sisteminde

$$u_x = u^0(z) \quad (3.46)$$

$$u_y = v^0(z) \quad (3.47)$$

$$u_z = y\theta_x(z) - x\theta_y(z) \quad (3.48)$$

şeklinde yazılabilir. Burada, u_x , u_y ve u_z sırasıyla yer değiştirme alanının x , y ve z doğrultularındaki bileşenlerini; u^0 ve v^0 sırasıyla, tarafsız eksenin ilgili kesitteki x ve y doğrultularındaki ötelenmelerini; θ_x ve θ_y ise sırasıyla, ilgili kesidin x ve y eksenleri etrafındaki rijit dönmelerini ifade etmektedir. Bu yer değiştirme alanından yola çıkarak, sonsuz küçük şekil değiştirme tensörünün sıfırdan farklı bileşenleri,

$$\varepsilon_{zz} = y \frac{d\theta_x(z)}{dz} - x \frac{d\theta_y(z)}{dz} \quad (3.49)$$

$$\gamma_{yz} = \gamma_{zy} = 2\varepsilon_{yz} = 2\varepsilon_{zy} = \frac{dv^0(z)}{dz} + \theta_x(z) \quad (3.50)$$

$$\gamma_{xz} = \gamma_{zx} = 2\varepsilon_{xz} = 2\varepsilon_{zx} = \frac{du^0(z)}{dz} - \theta_y(z) \quad (3.51)$$

olarak yazılabilir. Görüldüğü üzere, Euler-Bernoulli çubuk modelinin aksine, Timoshenko çubuk modelinde kesit dönmesi bağımsız bir parametre olarak ele alınmaktadır. Eğer Euler-Bernoulli çubuk modeli kullanılsaydı, kesit dönmeleri ile tarafsız eksen ötelenmeleri arasında

$$\theta_x(z) = -\frac{dv^0(z)}{dz} \quad (3.52)$$

$$\theta_y(z) = \frac{du^0(z)}{dz} \quad (3.53)$$

ilişkilerinin yazılması gerekirdi ve bu durumda denklem 3.50 ve denklem 3.51'deki γ_{yz} ve γ_{xz} kayma birim şekil değiştirmelerinin sıfır olacağı görülebilir.

Yukarıda sabit koordinat sistemine göre yazılan ilişkilere ek olarak, aynı P noktasının şekil değiştirmeden önceki konumunu ifade eden $\mathbf{r}$ konum vektörü, eğri eksenli ve hareketli $\eta\xi z$ koordinat sistemine göre

$$\mathbf{r} = \eta \mathbf{e}_\eta + \xi \mathbf{e}_\xi + z \mathbf{e}_z \quad (3.54)$$

olarak yazılabilir. Burada, $\mathbf{e}_\eta$, $\mathbf{e}_\xi$ ve $\mathbf{e}_z$ vektörleri ise $\eta\xi z$ koordinat sistemini oluşturan birim vektörleri temsil etmektedir. Bu durumda, şekil değiştirmemiş haldeki kovaryant baz vektörleri $\mathbf{g}_1(= \partial \mathbf{r} / \partial \eta)$, $\mathbf{g}_2(= \partial \mathbf{r} / \partial \xi)$ ve $\mathbf{g}_3(= \partial \mathbf{r} / \partial z)$ aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{g}_2 \\ \mathbf{g}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_\eta \\ \mathbf{e}_\xi \\ \mathbf{e}_z \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

ve bu durumda şekil değiştirmemiş hal için kovaryant metrik tensörünün sıfırdan farklı bileşenleri, $g_{ij} = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j$ ($i, j = 1, 2, 3$),

$$g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1 \quad (3.56)$$

şeklinde elde edilir. Şekil değişiminden sonra, P noktasının yeni konumunu gösteren konum vektörü, $\eta\xi z$ koordinat sisteminde

$$\mathbf{R} = (\eta + u_\eta) \mathbf{e}_\eta + (\xi + u_\xi) \mathbf{e}_\xi + (z + u_z) \mathbf{e}_z \quad (3.57)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada, u_η , u_ξ ve u_z , sırasıyla yer değiştirme alanının η , ξ ve z doğrultularındaki bileşenlerini ifade etmektedir ve küçük yer değiştirme varsayımı ve birinci mertebe şekil değiştirme teorisi temel alınarak

$$u_\eta = \bar{u}^0(z) \quad (3.58)$$

$$u_\xi = \bar{v}^0(z) \quad (3.59)$$

$$u_z = \xi\theta_\eta(z) - \eta\theta_\xi(z) \quad (3.60)$$

şeklinde yazılabilir. Burada, $\bar{u}^0$ ve $\bar{v}^0$ sırasıyla tarafsız eksenin ilgili kesitteki η ve ξ doğrultularındaki ötelenmelerini; θ_η ve θ_ξ ise sırasıyla ilgili kesidin η ve ξ eksenleri etrafındaki rijit dönmelerini ifade etmektedir. Böylece, şekil değiştirmiş duruma ait kovaryant baz vektörleri $\mathbf{G}_1(= \partial \mathbf{R} / \partial \eta)$, $\mathbf{G}_2(= \partial \mathbf{R} / \partial \xi)$ ve $\mathbf{G}_3(= \partial \mathbf{R} / \partial z)$,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}_1 \\ \mathbf{G}_2 \\ \mathbf{G}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\theta_\xi \\ 0 & 1 & \theta_\eta \\ \left(\frac{d\bar{u}^0}{dz} - \beta\bar{v}^0\right) & \left(\frac{d\bar{v}^0}{dz} + \beta\bar{u}^0\right) & \begin{pmatrix} 1 - \beta\eta\theta_\eta - \beta\xi\theta_\xi \\ +\xi\frac{d\theta_\eta}{dz} - \eta\frac{d\theta_\xi}{dz} \end{pmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_\eta \\ \mathbf{e}_\xi \\ \mathbf{e}_z \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

olarak yazılabilir.

Böylece, şekil değiştirmiş hal için kovaryant metrik tensörünün sıfırdan farklı bileşenleri, $G_{ij} = \mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}_j$ ($i, j = 1, 2, 3$), yüksek mertebe terimler ihmal edilerek

$$G_{11} = G_{22} = 1 \quad (3.62)$$

$$G_{13} = G_{31} = \frac{d\bar{u}^0}{dz} - \beta\bar{v}^0 - \theta_\xi \quad (3.63)$$

$$G_{23} = G_{32} = \frac{d\bar{v}^0}{dz} + \beta\bar{u}^0 + \theta_\eta \quad (3.64)$$

$$G_{33} = 1 - 2\beta\eta\theta_\eta - 2\beta\xi\theta_\xi + 2\xi\frac{d\theta_\eta}{dz} - 2\eta\frac{d\theta_\xi}{dz} \quad (3.65)$$

olarak yazılabilir. Böylece Green-Lagrange şekil değiştirme tensörünün, sıfırdan farklı bileşenleri, $\varepsilon_{ij} (= (G_{ij} - g_{ij})/2)$,

$$\varepsilon_{33} = \varepsilon_{zz} = \xi \frac{d\theta_\eta}{dz} - \eta \frac{d\theta_\xi}{dz} - \beta\eta\theta_\eta - \beta\xi\theta_\xi \quad (3.66)$$

$$2\varepsilon_{13} = 2\varepsilon_{31} = \gamma_{\eta z} = \gamma_{z\eta} = \frac{d\bar{u}^0}{dz} - \beta\bar{v}^0 - \theta_\xi \quad (3.67)$$

$$2\varepsilon_{23} = 2\varepsilon_{32} = \gamma_{\xi z} = \gamma_{z\xi} = \frac{d\bar{v}^0}{dz} + \beta\bar{u}^0 + \theta_\eta \quad (3.68)$$

şeklinde elde edilir (Librescu ve Song, 2006; Yildirim, 1999).

3.3.1.2 Kullanılan malzeme dağılım fonksiyonu

Statik davranış özelinde malzeme özelliklerinin ξ doğrultusunda, yani kesit kalınlığı boyunca, simetrik olduğu ve üstel kanuna göre değiştiği varsayalım. Bu durumda, karışım kanununa göre keyfi bir kesitteki malzeme özelliği, $\mathcal{P}$,

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_m V_m + \mathcal{P}_c V_c \quad (3.69)$$

olarak yazılabilir. Burada, $\mathcal{P}_m$ ve $\mathcal{P}_c$ sırasıyla metalik ve seramik malzeme özelliklerini temsil etmektedir. V_m ve V_c ise sırasıyla metalik ve seramik malzemelerin hacim oranlarını ifade etmekte ve

$$V_c(\xi) = \begin{cases} \left(-\frac{2\xi}{h}\right)^p, & \xi \in [-h/2, 0] \\ \left(\frac{2\xi}{h}\right)^p, & \xi \in [0, h/2] \end{cases} \quad (3.70)$$

$$V_m(\xi) = 1 - V_c(\xi) \quad (3.71)$$

olarak tanımlanmaktadır. Burada, p hacim oranı indisi olup negatif olmayan bir reel sayıyı temsil etmektedir.

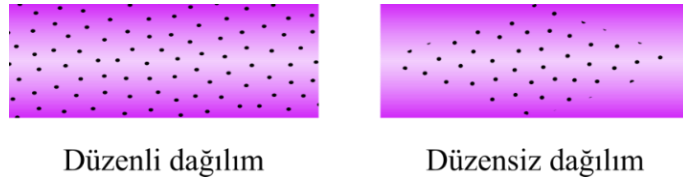
Bu durumda çubuğun her kesidindeki malzeme özellikleri aşağıdaki gibi tekrardan yazılabilir:

$$\mathcal{P}(\xi) = \begin{cases} (\mathcal{P}_c - \mathcal{P}_m) \left(-\frac{2\xi}{h}\right)^p + \mathcal{P}_m, & \xi \in [-h/2, 0] \\ (\mathcal{P}_c - \mathcal{P}_m) \left(\frac{2\xi}{h}\right)^p + \mathcal{P}_m, & \xi \in [0, h/2] \end{cases} \quad (3.72)$$

Denklem 3.72’den de yorumlanabileceği üzere, malzeme özelliklerinin simetrik olarak değişmesi sebebiyle çubuğun üst ve alt yüzeyleri ($\xi = \pm h/2$) tamamen seramik malzemeden oluşurken, orta düzlemi ($\xi = 0$) tamamen metalik malzemeden oluşmaktadır. Ayrıca hacim oranı indisinin sıfır olduğu durum, çubuğun tamamen seramik malzemeden yapıldığı hale karşılık gelirken; artan hacim oranı indisi fiziksel olarak çubuk kesidinde metalik bileşenin artışı ifade etmektedir. Kalınlık boyunca değişen malzeme özelliklerine ek olarak, kesitte imalat sırasındaki kusurlardan dolayı gözenekler bulunduğu da varsayılın. Bu durumda denklem 3.72,

$$P(\xi) = \begin{cases} \left[(P_c - P_m) \left(-\frac{2\xi}{h} \right)^p + P_m \right] [1 - \mathcal{Y}(\xi)] & \xi \in [-h/2, 0] \\ \left[(P_c - P_m) \left(\frac{2\xi}{h} \right)^p + P_m \right] [1 - \mathcal{Y}(\xi)] & \xi \in [0, h/2] \end{cases} \quad (3.73)$$

olarak yazılabilir (Jankowski ve diğ., 2021). Burada $\mathcal{Y}(\xi)$, gözeneklerin kesit kalınlığı boyunca dağılımını ifade eden gözeneklilik dağılım fonksiyonunu temsil etmektedir. Eğilme-eğilme bağlaşık statik davranışa dair incelemelerde, Şekil 3.3’te görselleştirilen gözenekliliğin kesit üzerinde düzenli ve düzensiz karakterde olmak üzere iki farklı şekilde dağıldığı durumlar araştırılmıştır.



Şekil 3.3 : Düzenli ve düzensiz gözenek dağılım modelleri.

Düzenli dağılım modelinde, gözeneklerin kesit üzerinde homojen bir şekilde dağıldığı kabul edilirken; düzensiz dağılım modelinde gözeneklerin, kesitte orta düzlem üzerinde yoğunlaşacak şekilde simetrik olarak dağıldığı varsayılmıştır. Şekil 3.3’te görselleştirilen bu iki dağılım modeli, matematiksel olarak

$$\mathcal{Y}(\xi) = \begin{cases} \frac{\alpha}{2} & \text{Düzenli gözenek dağılım modeli} \\ \frac{\alpha}{2} \left(1 - \frac{2|\xi|}{h} \right) & \text{Düzensiz gözenek dağılım modeli} \end{cases} \quad (3.74)$$

ifade edilir. Burada α , gözeneklilik katsayısını ifade etmektedir ve gözenek içermeyen bir kesitte $\alpha = 0$ olarak alınır.

3.3.1.3 Sabit koordinat sistemine göre yönetici denklemlerin elde edilmesi

Çubuğun kesidinin boyutlarının, boyuna göre küçük olduğu; Poisson oranının (ν) sabit olduğu ve çubuk malzemesinin lineer, elastik, izotropik ve fonksiyonel olarak derecelendirilmiş olduğu varsayımları üzerinden, çubukta oluşan gerilmeler xyz koordinat sisteminde

$$\sigma_{zz} = E(\xi)\varepsilon_{zz} \quad (3.75)$$

$$\sigma_{yz} = \frac{E(\xi)}{2(1+\nu)}\gamma_{yz} \quad (3.76)$$

$$\sigma_{xz} = \frac{E(\xi)}{2(1+\nu)}\gamma_{xz} \quad (3.77)$$

şeklinde yazılabilir. Bu durumda

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \int_A (\sigma_{zz}\varepsilon_{zz} + \sigma_{yz}\gamma_{yz} + \sigma_{xz}\gamma_{xz}) dA dz \quad (3.78)$$

olarak yazılan şekil değiştirme enerjisinin birinci varyasyonu aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\delta U = \int_0^L \left[M_x \frac{d\delta\theta_x}{dz} + M_y \frac{d\delta\theta_y}{dz} + F_y \frac{d\delta v^0}{dz} + F_y \delta\theta_x + F_x \frac{d\delta u^0}{dz} - F_x \delta\theta_y \right] dz \quad (3.79)$$

Burada, M_x ve M_y sırasıyla, x ve y eksenlerinde oluşan eğilme momentlerini; F_x ve F_y sırasıyla, x ve y doğrultularındaki kesme kuvvetlerini temsil etmektedir ve

$$[M_x, M_y, F_x, F_y] = \int_A [\sigma_{zz}y, -\sigma_{zz}x, k_x\sigma_{xz}, k_y\sigma_{yz}] dA \quad (3.80)$$

olarak ifade edilebilirler. Burada k_x ve k_y , birinci mertebeye kayma şekil değişimi teorisinden elde edilen cevabı gerçek çubuk davranışı ile uyumlu hale getirmek için kullanılan kayma düzeltme faktörleri olup, değerleri homojen malzemeden imal edilmiş dikdörtgen kesit için kullanılan 5/6 olarak alınmıştır (Bhattacharya ve Das,

2020; Eroğlu, 2015; Shafiei ve diğ., 2016). Homojen olmayan malzeme etkisini gözönünde bulundurarak kayma düzeltme faktörünün değerinin hesaplanması, Eroğlu tarafından kesit kalınlığı boyunca fonksiyonel olarak derecelendirilmiş bir çubuk özelinde kayma şekil değiştirmesi enerjisi kullanılarak gerçekleştirilmiştir (Eroğlu, 2015). Denklem 3.80’de verilen kesit tesirleri, açık olarak

$$F_x = \bar{C}_4(z) \frac{du^0}{dz} - \bar{C}_4(z) \theta_y \quad (3.81)$$

$$F_y = \bar{C}_5(z) \frac{dv^0}{dz} + \bar{C}_5(z) \theta_x \quad (3.82)$$

$$M_x = \bar{C}_1(z) \frac{d\theta_x}{dz} - \bar{C}_2(z) \frac{d\theta_y}{dz} \quad (3.83)$$

$$M_y = -\bar{C}_2(z) \frac{d\theta_x}{dz} + \bar{C}_3(z) \frac{d\theta_y}{dz} \quad (3.84)$$

şeklinde yazılır. Burada, $\bar{C}_1(z)$, $\bar{C}_2(z)$, $\bar{C}_3(z)$, $\bar{C}_4(z)$ ve $\bar{C}_5(z)$ rijitlik katsayıları olup,

$$\begin{aligned} & [\bar{C}_1(z), \bar{C}_2(z), \bar{C}_3(z), \bar{C}_4(z), \bar{C}_5(z)] \\ &= \int_A E(\xi) \left[y^2, xy, x^2, \frac{k_x}{2(1+\nu)}, \frac{k_y}{2(1+\nu)} \right] dx dy \end{aligned} \quad (3.85)$$

şeklinde tanımlanır.

Denklem 3.79’da verilen ifadedeki kısmi integral işlemleri gerçekleştirilirse,

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{U} = & \frac{[M_x \delta \theta_x + M_y \delta \theta_y + F_y \delta v^0 + F_x \delta u^0]}{\left| \right|_0^L} \\ & - \int_0^L \left[\left(\frac{dM_x}{dz} - F_y \right) \delta \theta_x + \left(\frac{dM_y}{dz} + F_x \right) \delta \theta_y + \frac{dF_x}{dz} \delta u^0 \right. \\ & \left. + \frac{dF_y}{dz} \delta v^0 \right] dz \end{aligned} \quad (3.86)$$

elde edilir. Burada, altı çizili terim sınır şartlarına karşılık gelmektedir.

Ayrıca, q_x ve q_y sırasıyla, x ve y doğrultularındaki yayılı dış kuvvetleri; m_x ve m_y sırasıyla, x ve y eksenleri etrafındaki yayılı dış momentleri temsil etmek üzere, bu yayılı dış kuvvet ve yayılı dış momentlerin yaptığı toplam iş

$$\mathcal{W} = \int_0^L [q_x u^0 + q_y v^0 + m_x \theta_x + m_y \theta_y] dz \quad (3.87)$$

olmak üzere, bu iş ifadesinin birinci varyasyonu

$$\delta \mathcal{W} = \int_0^L [q_x \delta u^0 + q_y \delta v^0 + m_x \delta \theta_x + m_y \delta \theta_y] dz \quad (3.88)$$

olarak yazılabilir. Bu durumda, toplam potansiyel enerjinin minimize edilmesiyle, $\delta \mathcal{U} - \delta \mathcal{W} = 0$, denge denklemleri, denklem 3.86 ve denklem 3.88 kullanılarak, Varyasyon Hesabının Temel Lemması gereğince (Reddy, 2006) aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\delta u^0: \quad \frac{dF_x}{dz} + q_x = 0 \quad (3.89)$$

$$\delta v^0: \quad \frac{dF_y}{dz} + q_y = 0 \quad (3.90)$$

$$\delta \theta_x: \quad \frac{dM_x}{dz} - F_y + m_x = 0 \quad (3.91)$$

$$\delta \theta_y: \quad \frac{dM_y}{dz} + F_x + m_y = 0 \quad (3.92)$$

Son durumda yönetici denklemler, sabit xyz koordinat sisteminde aşağıdaki gibi topluca özetlenebilir:

$$\frac{du^0}{dz} = \frac{F_x}{\bar{C}_4(z)} + \theta_y \quad (3.93)$$

$$\frac{dv^0}{dz} = \frac{F_y}{\bar{C}_5(z)} - \theta_x \quad (3.94)$$

$$\frac{d\theta_x}{dz} = \frac{\bar{C}_3(z)}{\bar{C}_1(z)\bar{C}_3(z) - \bar{C}_2^2(z)} M_x + \frac{\bar{C}_2(z)}{\bar{C}_1(z)\bar{C}_3(z) - \bar{C}_2^2(z)} M_y \quad (3.95)$$

$$\frac{d\theta_y}{dz} = \frac{\bar{C}_2(z)}{\bar{C}_1(z)\bar{C}_3(z) - \bar{C}_2^2(z)} M_x + \frac{\bar{C}_1(z)}{\bar{C}_1(z)\bar{C}_3(z) - \bar{C}_2^2(z)} M_y \quad (3.96)$$

$$\frac{dF_x}{dz} + q_x = 0 \quad (3.97)$$

$$\frac{dF_y}{dz} + q_y = 0 \quad (3.98)$$

$$\frac{dM_x}{dz} - F_y + m_x = 0 \quad (3.99)$$

$$\frac{dM_y}{dz} + F_x + m_y = 0 \quad (3.100)$$

3.3.1.4 Hareketli koordinat sistemine göre yönetici denklemlerin elde edilmesi

$\eta\xi z$ koordinat sisteminde gerilmeler, kesit boyutlarının çubuğun boyuna göre küçük olduğu; Poisson oranının sabit olduğu ve çubuk malzemesinin lineer, elastik, izotropik ve fonksiyonel olarak derecelendirilmiş olduğu varsayımları üzerinden

$$\sigma_{zz} = E(\xi)\varepsilon_{zz} \quad (3.101)$$

$$\sigma_{\xi z} = \frac{E(\xi)}{2(1+\nu)}\gamma_{\xi z} \quad (3.102)$$

$$\sigma_{\eta z} = \frac{E(\xi)}{2(1+\nu)}\gamma_{\eta z} \quad (3.103)$$

olarak yazılabilir. Böylece

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \int_0^L \int_A (\sigma_{zz}\varepsilon_{zz} + \sigma_{\xi z}\gamma_{\xi z} + \sigma_{\eta z}\gamma_{\eta z}) dA dz \quad (3.104)$$

olarak yazılan şekil değiştirme enerjisinin birinci varyasyonu bu durumda,

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{U} = \int_0^L \left[M_\eta \frac{d\delta\theta_\eta}{dz} + M_\xi \frac{d\delta\theta_\xi}{dz} + \beta M_\xi \delta\theta_\eta - \beta M_\eta \delta\theta_\xi + F_\xi \frac{d\delta\bar{v}^0}{dz} \right. \\ \left. + \beta F_\xi \delta\bar{u}^0 + F_\xi \delta\theta_\eta + F_\eta \frac{d\delta\bar{u}^0}{dz} - \beta F_\eta \delta\bar{v}^0 - F_\eta \delta\theta_\xi \right] dz \end{aligned} \quad (3.105)$$

şeklinde elde edilir.

Burada, M_η ve M_ξ sırasıyla, η ve ξ eksenlerinde oluşan eğilme momentlerini; F_η ve F_ξ sırasıyla, η ve ξ doğrultularındaki kesme kuvvetlerini temsil etmektedir ve

$$[M_\eta, M_\xi, F_\eta, F_\xi] = \int_A [\sigma_{zz}\xi, -\sigma_{zz}\eta, k_\eta\sigma_{\eta z}, k_\xi\sigma_{\xi z}]dA \quad (3.106)$$

olarak ifade edilirler. Kayma düzeltme faktörleri k_η ve k_ξ , dikdörtgen kesit için 5/6 olarak alınmıştır. Denklem 3.106'da verilen kesit tesirleri, açık olarak

$$F_\eta = C_4 \frac{d\bar{u}^0}{dz} - \beta C_4 \bar{v}^0 - C_4 \theta_\xi \quad (3.107)$$

$$F_\xi = C_5 \frac{d\bar{v}^0}{dz} + \beta C_5 \bar{u}^0 + C_5 \theta_\eta \quad (3.108)$$

$$M_\eta = C_1 \frac{d\theta_\eta}{dz} - C_2 \frac{d\theta_\xi}{dz} - \beta C_2 \theta_\eta - \beta C_1 \theta_\xi \quad (3.109)$$

$$M_\xi = -C_2 \frac{d\theta_\eta}{dz} + C_3 \frac{d\theta_\xi}{dz} + \beta C_3 \theta_\eta + \beta C_2 \theta_\xi \quad (3.110)$$

olarak yazılabilir. Burada, C_1, C_2, C_3, C_4 ve C_5 rijitlik katsayıları

$$[C_1, C_2, C_3, C_4, C_5] = \int_A E(\xi) \left[\xi^2, \eta\xi, \eta^2, \frac{k_\eta}{2(1+\nu)}, \frac{k_\xi}{2(1+\nu)} \right] d\eta d\xi \quad (3.111)$$

şeklinde ifade edilir. Kısmi integrallerin ardından, denklem 3.105

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{U} = & \underline{\left[M_\eta \delta\theta_\eta + M_\xi \delta\theta_\xi + F_\xi \delta\bar{v}^0 + F_\eta \delta\bar{u}^0 \right]_0^L} \\ & - \int_0^L \left[\left(\frac{dM_\eta}{dz} - \beta M_\xi - F_\xi \right) \delta\theta_\eta \right. \\ & + \left(\frac{dM_\xi}{dz} + \beta M_\eta + F_\eta \right) \delta\theta_\xi + \left(\frac{dF_\eta}{dz} - \beta F_\xi \right) \delta\bar{u}^0 \\ & \left. + \left(\frac{dF_\xi}{dz} + \beta F_\eta \right) \delta\bar{v}^0 \right] dz \end{aligned} \quad (3.112)$$

olarak yazılabilir. Burada, altı çizili terim, sınır şartlarına karşılık gelmektedir. q_η ve q_ξ , η ve ξ doğrultularındaki yayılı dış kuvvetleri; m_η ve m_ξ ise η ve ξ eksenleri

etrafındaki yayılı dış momentleri ifade etmek üzere, bu kuvvet ve momentlerin yaptığı toplam işler

$$\mathcal{W} = \int_0^L [q_\eta \bar{u}^0 + q_\xi \bar{v}^0 + m_\eta \theta_\eta + m_\xi \theta_\xi] dz \quad (3.113)$$

olarak ifade edilir ve bu toplam iş ifadesinin birinci varyasyonu,

$$\delta \mathcal{W} = \int_0^L [q_\eta \delta \bar{u}^0 + q_\xi \delta \bar{v}^0 + m_\eta \delta \theta_\eta + m_\xi \delta \theta_\xi] dz \quad (3.114)$$

olarak yazılabilir. Bu durumda, toplam potansiyel enerji minimize edilerek, $\delta \mathcal{U} - \delta \mathcal{W} = 0$, $\eta\xi z$ koordinat sisteminde denge denklemleri, denklem 3.112 ve 3.114'ten hareketle ve Varyasyon Hesabının Temel Lemması gereğince (Reddy, 2006)

$$\delta \bar{u}^0: \quad \frac{dF_\eta}{dz} - \beta F_\xi + q_\eta = 0 \quad (3.115)$$

$$\delta \bar{v}^0: \quad \frac{dF_\xi}{dz} + \beta F_\eta + q_\xi = 0 \quad (3.116)$$

$$\delta \theta_\eta: \quad \frac{dM_\eta}{dz} - \beta M_\xi - F_\xi + m_\eta = 0 \quad (3.117)$$

$$\delta \theta_\xi: \quad \frac{dM_\xi}{dz} + \beta M_\eta + F_\eta + m_\xi = 0 \quad (3.118)$$

olarak elde edilir.

Böylece, $\eta\xi z$ koordinat sisteminde elde edilen yönetici diferansiyel denklemler aşağıdaki gibi topluca özetlenebilir (Yildirim, 1999):

$$\frac{d\bar{u}^0}{dz} = \frac{F_\eta}{C_4} + \beta \bar{v}^0 + \theta_\xi \quad (3.119)$$

$$\frac{d\bar{v}^0}{dz} = \frac{F_\xi}{C_5} - \beta \bar{u}^0 - \theta_\eta \quad (3.120)$$

$$\frac{d\theta_\eta}{dz} = \beta \theta_\xi + \frac{C_3}{C_1 C_3 - C_2^2} M_\eta + \frac{C_2}{C_1 C_3 - C_2^2} M_\xi \quad (3.121)$$

$$\frac{d\theta_\xi}{dz} = -\beta\theta_\eta + \frac{C_2}{C_1C_3 - C_2^2}M_\eta + \frac{C_1}{C_1C_3 - C_2^2}M_\xi \quad (3.122)$$

$$\frac{dF_\eta}{dz} - \beta F_\xi + q_\eta = 0 \quad (3.123)$$

$$\frac{dF_\xi}{dz} + \beta F_\eta + q_\xi = 0 \quad (3.124)$$

$$\frac{dM_\eta}{dz} - \beta M_\xi - F_\xi + m_\eta = 0 \quad (3.125)$$

$$\frac{dM_\xi}{dz} + \beta M_\eta + F_\eta + m_\xi = 0 \quad (3.126)$$

3.3.2 Eğilme-eğilme bağlaşıklık dinamik davranışa dair matematiksel model

3.3.2.1 Kinematik

Belirli bir t anında, doğru eksenli ve önburulmalı bir çubuğun keyfi bir z konumundaki kesidi üzerinde bulunan keyfi bir P noktasına ait yer değiştirme alanı, birinci mertebeden kayma şekil değiştirme teorisini temel alarak ve küçük yer değiştirme kabülü yapılarak xyz koordinat sisteminde aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$u_x = u^0(z, t) \quad (3.127)$$

$$u_y = v^0(z, t) \quad (3.128)$$

$$u_z = y\theta_x(z, t) - x\theta_y(z, t) \quad (3.129)$$

Burada, u_x , u_y ve u_z sırasıyla yer değiştirme alanının x , y ve z doğrultularındaki bileşenlerini; u^0 ve v^0 sırasıyla, tarafsız eksenin ilgili kesitteki x ve y doğrultularındaki ötelenmelerini; θ_x ve θ_y ise ilgili kesidin x ve y eksenleri etrafındaki rijit dönmelerini ifade etmektedir.

Yer değiştirme alanının bileşenlerinin zamana göre bir defa türevinin alınmasıyla, ilgili hız alanı bu durumda,

$$\dot{u}_x = \dot{u}^0(z, t) \quad (3.130)$$

$$\dot{u}_y = \dot{v}^0(z, t) \quad (3.131)$$

$$\dot{u}_z = y\dot{\theta}_x(z, t) - x\dot{\theta}_y(z, t) \quad (3.132)$$

olarak yazılabilir. Burada ($\dot{}$) notasyonu, zamana göre bir defa alınan kısmi türevi ifade etmektedir. Ayrıca yer değiştirme alanından hareketle, sonsuz küçük şekil değiştirme tensörünün sıfırdan farklı bileşenleri aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\varepsilon_{zz} = y \frac{\partial \theta_x}{\partial z} - x \frac{\partial \theta_y}{\partial z} \quad (3.133)$$

$$\gamma_{yz} = \gamma_{zy} = 2\varepsilon_{yz} = 2\varepsilon_{zy} = \frac{\partial v^0}{\partial z} + \theta_x \quad (3.134)$$

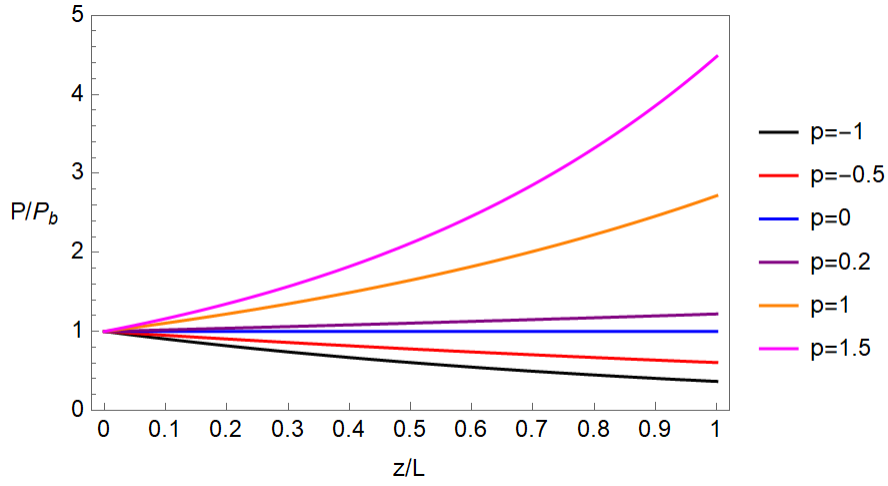
$$\gamma_{xz} = \gamma_{zx} = 2\varepsilon_{xz} = 2\varepsilon_{zx} = \frac{\partial u^0}{\partial z} - \theta_y \quad (3.135)$$

3.3.2.2 Kullanılan malzeme dağılım fonksiyonu

Eğilme-eğilme bağlaşıp dinamik davranışın incelemesinde, eğilme-eğilme bağlaşıp statik davranışın aksine malzeme özelliklerinin çubuk eksen boyunda değiştiği varsayılmıştır. Böylece malzeme özellikleri (elastisite modülü E ve yoğunluk ρ), bu incelemede kapsamında ξ yerine çubuk eksen parametresi olan z 'ye bağlı olarak değişmektedir. Bu şekildeki bir malzeme dağılımı, her kesitte geometrik merkez, kayma merkezi ve önburulmalandırma ekseninin çakışması kriterini bozmadığı için eğilme davranışını, uzama-burulma bağlaşıklığından ayırmaya müsaade etmektedir. Bu bağlamda, bu inceleme kapsamında, çubuğun malzeme özelliklerinin

$$\mathcal{P}(z) = \mathcal{P}_b e^{p \frac{z}{L}} \quad (3.136)$$

şeklinde çubuk eksen boyunda eksponansiyel olarak değiştiği varsayılmıştır. Burada $\mathcal{P}_b$, $z = 0$ konumundaki malzeme özelliğini temsil etmektedir. p malzeme parametresini ifade etmektedir. Poisson oranı sabit olarak kabul edilmiştir. Şekil 3.4'ten de görülebileceği üzere, malzeme parametresinin pozitif değerleri için çubuğun ilgili malzeme özelliği çubuk eksen boyunda artış gösterirken; negatif değerleri için azalmaktadır. Ayrıca $p = 0$ durumu, fiziksel olarak çubuğun tamamen $z = 0$ konumundaki malzeme özelliğinden yapıldığı homojen duruma karşılık gelmektedir.



Şekil 3.4 : Malzeme özelliklerinin çubuk eksenine boyunca değişimi.

3.3.2.3 Yönetici diferansiyel denklemlerin elde edilmesi

Önburulmalı ve aksel doğrultuda değişen malzeme özelliklerine sahip bir çubuğun serbest titreşimlerine ait yönetici diferansiyel denklemler, Hamilton Prensipleri'nden

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta \mathcal{T} - \delta \mathcal{U}) dt = 0 \quad (3.137)$$

elde edilebilir. Burada, $\delta \mathcal{T}$ ve $\delta \mathcal{U}$ sırasıyla kinetik enerjinin ve şekil değiştirme enerjisinin birinci varyasyonunu temsil etmektedir. Bu bağlamda,

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \int_0^L \rho(z) [\dot{u}_x^2 + \dot{u}_y^2 + \dot{u}_z^2] dz \quad (3.138)$$

kinetik enerji ifadesinin birinci varyasyonu,

$$[I_0(z), I_1(z), I_2(z), I_3(z)] = \int_A \rho(z) [1, y^2, xy, x^2] dA \quad (3.139)$$

olarak tanımlanmak üzere aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{T} = \int_0^L \left[I_0(z) \dot{u}^0 \frac{\partial \delta u^0}{\partial t} + I_0(z) \dot{v}^0 \frac{\partial \delta v^0}{\partial t} + I_1(z) \dot{\theta}_x \frac{\partial \delta \theta_x}{\partial t} \right. \\ \left. - I_2(z) \dot{\theta}_x \frac{\partial \delta \theta_y}{\partial t} - I_2(z) \dot{\theta}_y \frac{\partial \delta \theta_x}{\partial t} + I_3(z) \dot{\theta}_y \frac{\partial \delta \theta_y}{\partial t} \right] dz \end{aligned} \quad (3.140)$$

Çubuğun kesidinin boyutlarının, boyuna göre küçük olduğu; Poisson oranının sabit olduğu ve çubuk malzemesinin lineer, elastik, izotropik ve konuma bağlı olarak değişen özelliklere sahip olduğu varsayımları üzerinden, çubukta oluşan gerilmeler xyz koordinat sisteminde

$$\sigma_{zz} = E(z)\varepsilon_{zz} \quad (3.141)$$

$$\sigma_{yz} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)}\gamma_{yz} \quad (3.142)$$

$$\sigma_{xz} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)}\gamma_{xz} \quad (3.143)$$

şeklinde yazılabilir. Bu durumda,

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \int_0^L [\sigma_{zz}\varepsilon_{zz} + \sigma_{yz}\gamma_{yz} + \sigma_{xz}\gamma_{xz}] dz \quad (3.144)$$

olarak tanımlanan şekil değiştirme enerjisinin birinci varyasyonu

$$\delta\mathcal{U} = \int_0^L \left[M_x \frac{\partial \delta\theta_x}{\partial z} + M_y \frac{\partial \delta\theta_y}{\partial z} + F_y \frac{\partial \delta v^0}{\partial z} + F_y \delta\theta_x + F_x \frac{\partial \delta u^0}{\partial z} - F_x \delta\theta_y \right] dz \quad (3.145)$$

olarak yazılır. Burada, M_x , M_y , F_x ve F_y aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$[M_x, M_y, F_x, F_y] = \int_A [\sigma_{zz}y, -\sigma_{zz}x, k_x\sigma_{xz}, k_y\sigma_{yz}] dA \quad (3.146)$$

Ayrıca, k_x ve k_y kayma düzeltme katsayıları olup, değerleri dikdörtgen kesit için 5/6 olarak alınmıştır. Denklem 3.146'da verilen kesit tesirler açık olarak

$$F_x = C_4(z) \frac{\partial u^0}{\partial z} - C_4(z)\theta_y \quad (3.147)$$

$$F_y = C_5(z) \frac{\partial v^0}{\partial z} + C_5(z)\theta_x \quad (3.148)$$

$$M_x = C_1(z) \frac{\partial \theta_x}{\partial z} - C_2(z) \frac{\partial \theta_y}{\partial z} \quad (3.149)$$

$$M_y = -C_2(z) \frac{\partial \theta_x}{\partial z} + C_3(z) \frac{\partial \theta_y}{\partial z} \quad (3.150)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada,

$$\begin{aligned} & [C_1(z), C_2(z), C_3(z), C_4(z), C_5(z)] \\ & = \int_A E(z) \left[y^2, xy, x^2, \frac{k_x}{2(1+\nu)}, \frac{k_y}{2(1+\nu)} \right] dA \end{aligned} \quad (3.151)$$

olarak tanımlanmıştır. Denklem 3.145'teki kısmi integral işlemleri gerçekleştirilirse,

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{U} = & \left[M_x \delta \theta_x + M_y \delta \theta_y + F_y \delta v^0 + F_x \delta u^0 \right] \Big|_0^L \\ & - \int_0^L \left[\left(\frac{\partial M_x}{\partial z} - F_y \right) \delta \theta_x + \left(\frac{\partial M_y}{\partial z} + F_x \right) \delta \theta_y + \frac{\partial F_x}{\partial z} \delta u^0 \right. \\ & \left. + \frac{\partial F_y}{\partial z} \delta v^0 \right] dz \end{aligned} \quad (3.152)$$

elde edilir. Denklem 3.140 ve 3.152'nin, Hamilton Prensibi ifadesine konulmasıyla

$$\begin{aligned} & \int_0^L \left([I_0(z) \dot{u}^0 \delta u^0 + I_0(z) \dot{v}^0 \delta v^0 + I_1(z) \dot{\theta}_x \delta \theta_x - I_2(z) \dot{\theta}_x \delta \theta_y \right. \\ & \quad \left. - I_2(z) \dot{\theta}_y \delta \theta_x + I_3(z) \dot{\theta}_y \delta \theta_y]_{t_1}^{t_2} \right) dz \\ & - \int_{t_1}^{t_2} \left(\left[M_x \delta \theta_x + M_y \delta \theta_y + F_y \delta v^0 + F_x \delta u^0 \right] \Big|_0^L \right. \\ & \quad + \int_0^L \left(\left[-\frac{\partial F_x}{\partial z} + I_0(z) \ddot{u}^0 \right] \delta u^0 + \left[-\frac{\partial F_y}{\partial z} + I_0(z) \ddot{v}^0 \right] \delta v^0 \right. \\ & \quad + \left[-\frac{\partial M_x}{\partial z} + F_y + I_1(z) \ddot{\theta}_x - I_2(z) \ddot{\theta}_y \right] \delta \theta_x \\ & \quad \left. \left. + \left[-\frac{\partial M_y}{\partial z} - F_x - I_2(z) \ddot{\theta}_x + I_3(z) \ddot{\theta}_y \right] \delta \theta_y \right) dz \right) dt = 0 \end{aligned} \quad (3.153)$$

denklemleri elde edilir ve $\delta u^0(z, t_1) = \delta u^0(z, t_2) = 0$, $\delta v^0(z, t_1) = \delta v^0(z, t_2) = 0$, $\delta \theta_x(z, t_1) = \delta \theta_x(z, t_2) = 0$ ve $\delta \theta_y(z, t_1) = \delta \theta_y(z, t_2) = 0$ olması sebebiyle

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{[M_x \delta \theta_x + M_y \delta \theta_y + F_y \delta v^0 + F_x \delta u^0]_0^L}{\delta \theta_x} \right. \\ & + \int_0^L \left(\left[-\frac{\partial F_x}{\partial z} + I_0(z) \ddot{u}^0 \right] \delta u^0 + \left[-\frac{\partial F_y}{\partial z} + I_0(z) \ddot{v}^0 \right] \delta v^0 \right. \\ & + \left[-\frac{\partial M_x}{\partial z} + F_y + I_1(z) \ddot{\theta}_x - I_2(z) \ddot{\theta}_y \right] \delta \theta_x \\ & \left. + \left[-\frac{\partial M_y}{\partial z} - F_x - I_2(z) \ddot{\theta}_x + I_3(z) \ddot{\theta}_y \right] \delta \theta_y \right) dz \Bigg) dt = 0 \end{aligned} \quad (3.154)$$

haline indirgenir. Burada altı çizili, (), olarak ifade edilmiş terim, sınır şartlarını ifade etmektedir. İkinci terim olan integral ifadesinde birbirinden bağımsız ve keyfi δu^0 , δv^0 , $\delta \theta_x$ ve $\delta \theta_y$ varyasyonları için Varyasyon Hesabının Temel Lemması gereğince köşeli parantezlerin içinin sıfır olması gerekmektedir (Reddy, 2006).

Böylece, hareket denklemleri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\delta u^0: \quad \frac{\partial F_x}{\partial z} - I_0(z) \ddot{u}^0 = 0 \quad (3.155)$$

$$\delta v^0: \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} - I_0(z) \ddot{v}^0 = 0 \quad (3.156)$$

$$\delta \theta_x: \quad \frac{\partial M_x}{\partial z} - F_y - I_1(z) \ddot{\theta}_x + I_2(z) \ddot{\theta}_y = 0 \quad (3.157)$$

$$\delta \theta_y: \quad \frac{\partial M_y}{\partial z} + F_x + I_2(z) \ddot{\theta}_x - I_3(z) \ddot{\theta}_y = 0 \quad (3.158)$$

Konum ve zaman parametreleri birbirinden

$$\begin{bmatrix} u^0(z, t) & v^0(z, t) \\ \theta_x(z, t) & \theta_y(z, t) \\ F_x(z, t) & F_y(z, t) \\ M_x(z, t) & M_y(z, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u^0(z) & v^0(z) \\ \theta_x(z) & \theta_y(z) \\ F_x(z) & F_y(z) \\ M_x(z) & M_y(z) \end{bmatrix} f(t) \quad (3.159)$$

şeklinde ayrılabilir olduğundan hareketle ve, ω açısal frekansı ve $i = \sqrt{-1}$ temsil etmek üzere harmonik titreşim kabulü neticesinde $f(t) = e^{i\omega t}$, yönetici diferansiyel denklemler

$$\frac{du^0}{dz} = \frac{F_x}{C_4(z)} + \theta_y \quad (3.160)$$

$$\frac{dv^0}{dz} = \frac{F_y}{C_5(z)} - \theta_x \quad (3.161)$$

$$\frac{d\theta_x}{dz} = \frac{C_3(z)}{C_1(z)C_3(z) - C_2^2(z)} M_x + \frac{C_2(z)}{C_1(z)C_3(z) - C_2^2(z)} M_y \quad (3.162)$$

$$\frac{d\theta_y}{dz} = \frac{C_2(z)}{C_1(z)C_3(z) - C_2^2(z)} M_x + \frac{C_1(z)}{C_1(z)C_3(z) - C_2^2(z)} M_y \quad (3.163)$$

$$\frac{dF_x}{dz} = -\omega^2 I_0(z) u^0 \quad (3.164)$$

$$\frac{dF_y}{dz} = -\omega^2 I_0(z) v^0 \quad (3.165)$$

$$\frac{dM_x}{dz} = -\omega^2 I_1(z) \theta_x + \omega^2 I_2(z) \theta_y + F_y \quad (3.166)$$

$$\frac{dM_y}{dz} = \omega^2 I_2(z) \theta_x - \omega^2 I_3(z) \theta_y - F_x \quad (3.167)$$

şeklinde topluca özetlenebilir.

3.4 Uzama-burulma Bağlaışık Statik ve Dinamik Davranışlara Dair Matematiksel Modeller

3.4.1 Uzama-burulma bağlaışık statik davranışa dair matematiksel model

3.4.1.1 Kinematik

Doğru eksenli ve önburulmalı bir çubuğun keyfi bir z konumundaki kesidi üzerinde bulunan keyfi bir P noktasına ait yer değiştirme alanı, küçük dönme kabülü yapılarak ve Saint-Venant üniform burulma modeli kullanılarak xyz koordinat sisteminde aşağıdaki gibi yazılabilir (Kordolemis ve diğ., 2017):

$$u_x = -y\theta_z(z) \quad (3.168)$$

$$u_y = x\theta_z(z) \quad (3.169)$$

$$u_z = w^0(z) + \phi(\eta, \xi)\omega_z \quad (3.170)$$

Burada, u_x , u_y ve u_z sırasıyla yer değiştirme alanının x , y ve z doğrultularındaki bileşenlerini; w^0 , tarafsız eksenin z doğrultusundaki ötelenmesini; θ_z , ilgili kesidin z eksenini etrafındaki dönmesini ifadesini ifade etmektedir. ω_z ise θ_z dönme açısının çubuk eksenini boyunca değişimini, $\omega_z = d\theta_z/dz$, ifade eden parametre olup, Saint-Venant burulma modeli çerçevesinde sabit olarak alınır. Ayrıca $\phi(\eta, \xi)$, önburulmasız çubuğun Saint-Venant çarpılma fonksiyonunu ifade etmektedir. Bu yer değiştirme alanından hareketle ve küçük şekil değişimi kabulüyle, sıfırdan farklı birim şekil değiştirme bileşenleri aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\varepsilon_{zz} = \frac{dw^0(z)}{dz} + \frac{\partial\phi(\eta, \xi)}{\partial z}\omega_z \quad (3.171)$$

$$\gamma_{xz} = \gamma_{zx} = 2\varepsilon_{xz} = 2\varepsilon_{zx} = \left(-y + \frac{\partial\phi(\eta, \xi)}{\partial x}\right)\omega_z \quad (3.172)$$

$$\gamma_{yz} = \gamma_{zy} = 2\varepsilon_{yz} = 2\varepsilon_{zy} = \left(x + \frac{\partial\phi(\eta, \xi)}{\partial y}\right)\omega_z \quad (3.173)$$

3.4.1.2 Kullanılan malzeme dağılım fonksiyonu

Kısım 3.1’de, homojen olmayan malzemeden imal edilen dikdörtgen keside sahip önburulmalı çubuklarda, uzama-burulma bağlaşıklık davranışını, eğilme davranışından bağımsız olarak inceleyebilmek için kesit kalınlığı boyunca simetrik olarak değişen malzeme dağılımı kullanılması gerektiği belirtilmişti. Bu bağlamda, bu incelemede kesitin elastisite modülünün,

$$E(\xi) = E_i \left(1 + 4(p-1) \left(\frac{\xi}{h}\right)^2\right) \quad (3.174)$$

ilişkisine göre, kalınlık boyunca parabolik olarak değişen bir dağılımda olduğu varsayılmıştır. Burada E_i , elastisite modülünün kesit orta düzlemindeki ($\xi = 0$)

değerini ve E , efektif elastisite modülünü temsil etmektedir. Ayrıca p , kesidin alt ve üst yüzeylerindeki ($\xi = \pm h/2$) elastisite modülünün (E_o), kesidin orta düzlemindeki elastisite modülüne (E_i) oranını (E_o/E_i) ifade eden malzeme parametresi olarak tanımlanmıştır. Kesit malzemesinin izotropik olduğu ve Poisson oranının kesit üzerinde sabit olduğu varsayımları neticesinde, kayma modülü,

$$G(\xi) = \frac{E(\xi)}{2(1 + \nu)} \quad (3.175)$$

olarak ifade edilebilir. Yapılan kabuller neticesinde, kayma modülü ifadesinin, elastisite modülü ifadesinden sadece bir katsayı bakımından farklı olduğu; fonksiyon olarak aynı karakterde olduğu söylenebilir. Bu noktada, böyle bir kayma modülü yapısının matematiksel olarak, sürekli, pozitif tanımlı ve bölgenin her noktasında türevlenebilir bir karakterde olduğu belirtilmelidir (Horgan ve Chan, 1998; Lomakin, 1976). Şekil 3.5, farklı malzeme parametresi değerleri için elde edilen malzeme dağılım profillerini göstermektedir.

Görüldüğü üzere, malzeme parametresinin $p = 1$ olduğu durum, homojen malzemeden imal edilmiş kesite karşılık gelmektedir.

3.4.1.3 Yönetici denklemler ve rijitlik katsayıları

Çubuğun kesit boyutlarının, boyuna kıyasla küçük olduğu varsayımı neticesinde, lineer, elastik, izotropik ve kesit kalınlığı boyunca homojen olmayan malzemeden imal edilmiş önburulmalı bir çubuktaki gerilmeler aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\sigma_{zz} = E(\xi)\varepsilon_{zz} \quad (3.176)$$

$$\sigma_{zx} = G(\xi)\gamma_{zx} \quad (3.177)$$

$$\sigma_{zy} = G(\xi)\gamma_{zy} \quad (3.178)$$

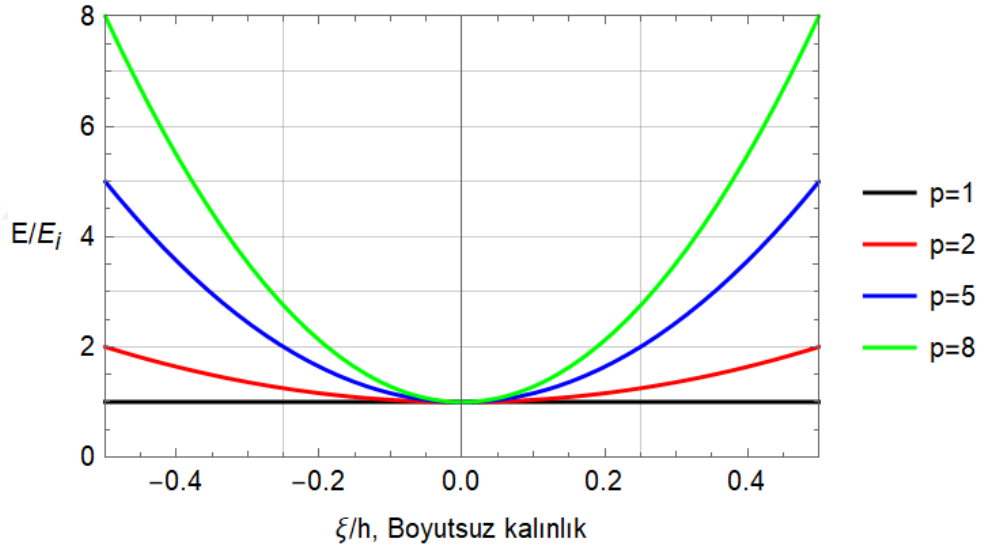
Bu durumda,

$$u = \frac{1}{2} \int_0^L \int_A [\sigma_{zz}\varepsilon_{zz} + \sigma_{zx}\gamma_{zx} + \sigma_{zy}\gamma_{zy}] dA dz \quad (3.179)$$

şeklinde yazılan şekil değiştirme enerjisinin birinci varyasyonu

$$\begin{aligned}
\delta u = \int_0^L & \left[\left(\int_A E(\xi) dA \right) \frac{dw^0}{dz} + \left[\int_A E(\xi) \frac{\partial \phi(\eta, \xi)}{\partial z} dA \right] \omega_z \right) \delta \left(\frac{dw^0}{dz} \right) \right. \\
& + \left(\left[\int_A E(\xi) \frac{\partial \phi(\eta, \xi)}{\partial z} dA \right] \frac{dw^0}{dz} \right. \\
& + \left[\int_A E(\xi) \left(\frac{\partial \phi(\eta, \xi)}{\partial z} \right)^2 dA \right. \\
& + \left. \int_A G(\xi) \left(\left[-y + \frac{\partial \phi(\eta, \xi)}{\partial x} \right]^2 \right. \right. \\
& + \left. \left. \left[x + \frac{\partial \phi(\eta, \xi)}{\partial y} \right]^2 \right) dA \right] \omega_z \left. \right) \delta \omega_z \left. \right] dz
\end{aligned} \tag{3.180}$$

olarak yazılabilir.



Şekil 3.5 : Elastisite modülünün kesit üzerindeki parabolik dağılımı.

İlgilenilen önburulmalı çubuğun bir ucunun ankastre ($w^0(0) = \theta_z(0) = 0$), diğer ucunun da serbest olup tekil eksenel çekme kuvvetine, F_{z0} , ve tekil pozitif burulma momentine, M_{z0} , maruz kaldığı durumda

$$\mathcal{W} = F_{z0}w^0(L) + M_{z0}\theta_z(L) = \int_0^L \left(F_{z0} \frac{dw^0}{dz} + M_{z0}\omega_z \right) dz \tag{3.181}$$

şeklinde yazılan dış kuvvetlerin yaptığı toplam iş ifadesinin birinci varyasyonu

$$\delta \mathcal{W} = \int_0^L \left(F_{z0} \delta \left(\frac{dw^0}{dz} \right) + M_{z0} \delta \omega_z \right) dz \quad (3.182)$$

olarak yazılabilir (Rosen, 1983).

Toplam potansiyel enerjinin minimize edilmesiyle, $\delta \mathcal{U} - \delta \mathcal{W} = 0$, uzama-burulma bağlaşıklık statik davranışa ait temel denklemler:

$$\delta \left(\frac{dw^0}{dz} \right): \quad F_{z0} = E^* \frac{dw^0}{dz} + \beta S^* \omega_z \quad (3.183)$$

$$\delta \omega_z: \quad M_{z0} = \beta S^* \frac{dw^0}{dz} + (\beta^2 K^* + J^*) \omega_z \quad (3.184)$$

olarak elde edilir (Rosen, 1983). Burada elde edilen bu ifadeler, Rosen (1983)'te sunulan ifadelerin lineer olmayan terimleri içermeyen haline karşılık gelmektedir ve matris formunda

$$\begin{bmatrix} \frac{dw^0}{dz} \\ \frac{d\theta_z}{dz} \end{bmatrix} = \frac{1}{J^* E^* + \beta^2 [K^* E^* - (S^*)^2]} \begin{bmatrix} \beta^2 K^* + J^* & -\beta S^* \\ -\beta S^* & E^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{z0} \\ M_{z0} \end{bmatrix} \quad (3.185)$$

şeklinde tekrar yazılabilir.

Burada E^* , S^* , K^* ve J^* , rijitlik katsayıları olarak adlandırılır ve denklem 3.45'te sunulan bağıntı $f(\eta, \xi) = \phi(\eta, \xi)$ için uygulanırsa,

$$E^* = \int_A E(\xi) d\eta d\xi \quad (3.186)$$

$$S^* = \frac{1}{\beta} \int_A E(\xi) \frac{\partial \phi(\eta, \xi)}{\partial z} dA = \int_A E(\xi) \left(\xi \frac{\partial \phi(\eta, \xi)}{\partial \eta} - \eta \frac{\partial \phi(\eta, \xi)}{\partial \xi} \right) d\eta d\xi \quad (3.187)$$

$$\begin{aligned} K^* &= \frac{1}{\beta^2} \int_A E(\xi) \left(\frac{\partial \phi(\eta, \xi)}{\partial z} \right)^2 dA \\ &= \int_A E(\xi) \left(\xi \frac{\partial \phi(\eta, \xi)}{\partial \eta} - \eta \frac{\partial \phi(\eta, \xi)}{\partial \xi} \right)^2 d\eta d\xi \end{aligned} \quad (3.188)$$

$$\begin{aligned}
J^* &= \int_A G(\xi) \left(\left(-y + \frac{\partial \phi(\eta, \xi)}{\partial x} \right)^2 + \left(x + \frac{\partial \phi(\eta, \xi)}{\partial y} \right)^2 \right) dA \\
&= \int_A G(\xi) \left(\left(\eta + \frac{\partial \phi(\eta, \xi)}{\partial \xi} \right)^2 + \left(-\xi + \frac{\partial \phi(\eta, \xi)}{\partial \eta} \right)^2 \right) d\eta d\xi
\end{aligned} \tag{3.189}$$

şeklinde yazılabilir. Bu rijitlik katsayıları, homojen malzemeden imal edilmiş bir önburulmalı çubuk için Rosen ve, Kordolemis ve diğerleri tarafından elde edilmiştir (Kordolemis ve diğ., 2015, 2017; Rosen, 1980). Bu sebeple, burada önceki adlandırmalara bağlı kalmak adına, sembollere homojen olmayan durumu temsilen sadece bir asteriks (*) eklenmiştir. Bu ifadelerde, E^* , eksenel rijitliği; S^* , uzama ve burulma arasındaki bağışıklığı sağlayan katsayıyı; K^* , önburulmalandırmanın burulma rijitliğine olan katkısını ve J^* önburulmasız çubuğun Saint-Venant burulma rijitliğini ifade etmektedir. Denklem 3.185'ten de görüldüğü üzere, S^* ve K^* katsayıları sadece önburulmanın varlığında ($\beta \neq 0$) ortaya çıkmaktadır.

Burada S^* , K^* ve J^* katsayılarının çarpılma fonksiyonunu $\phi(\eta, \xi)$ içermeleri sebebiyle, çalışmanın geri kalanında “çarpılma-kaynaklı rijitlik katsayıları” olarak adlandırılacaktır.

Denklem 3.187-3.189'dan da görülebileceği üzere, çarpılma-kaynaklı rijitlik katsayılarının elde edilmesi için homojen olmayan kesite ait çarpılma fonksiyonunun, $\phi(\eta, \xi)$, hesaplanması gerekmektedir. Bunun için aşağıdaki sınır değer probleminin çözülmesi gerekmektedir:

$$\text{Bölgede, } \Omega: \quad G(\xi) \nabla^2 \phi(\eta, \xi) + \frac{dG(\xi)}{d\xi} \frac{d\phi(\eta, \xi)}{d\xi} = -\eta \frac{dG(\xi)}{d\xi} \tag{3.190}$$

$$\text{Sınırdaki, } \Gamma: \quad \nabla \phi(\eta, \xi) \cdot \bar{\mathbf{n}} = \xi \bar{n}_\eta - \eta \bar{n}_\xi \tag{3.191}$$

Burada Ω , Γ sınırı tarafından sınırlanan basit bağlantılı bölgeyi; $\bar{\mathbf{n}}$ bileşenleri $\bar{n}_\eta$ ve $\bar{n}_\xi$ olan ve Γ sınırına normal olan birim vektörü ifade etmektedir (İlgili sınır değer probleminin en genel hali için bakınız, Katsikadelis ve Tsiatas (2016)). Matematiksel olarak, denklem 3.190 ve 3.191 tarafından oluşan sınır değer problemi, sınır şartları sebebiyle Neumann-tipi sınır değer problemi olarak adlandırılır ve çözümleri oldukça zahmetli olabilmektedir. Onun yerine, denklem 3.187-3.189'da verilen çarpılma-kaynaklı rijitlik katsayılarının

$$\frac{\partial \phi(\eta, \xi)}{\partial \eta} = \xi + \frac{1}{G(\xi)} \frac{\partial \Psi(\eta, \xi)}{\partial \xi} \quad (3.192)$$

$$\frac{\partial \phi(\eta, \xi)}{\partial \xi} = -\eta - \frac{1}{G(\xi)} \frac{\partial \Psi(\eta, \xi)}{\partial \eta} \quad (3.193)$$

dönüşümü kullanılarak Prandtl gerilme fonksiyonu, $\Psi(\eta, \xi)$, cinsinden ifade edilmesi (Ecsedi, 2009; Rosen, 1980),

$$\text{Bölgede, } \Omega: \quad \nabla \cdot \left(\frac{1}{G(\xi)} \nabla \Psi(\eta, \xi) \right) = -2 \quad (3.194)$$

$$\text{Sınırdaki, } \Gamma: \quad \Psi(\eta, \xi) = 0 \quad (3.195)$$

olarak ifade edilebilen, çözümü daha kolay olan Dirichlet tipi sınır değer probleminin çözümü gerektirir. Böylece çarpılma-kaynaklı rijitlik katsayıları,

$$S^* = \int_A E(\xi) \left(\xi^2 + \eta^2 + \frac{1}{G(\xi)} \left(\xi \frac{\partial \Psi(\eta, \xi)}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial \Psi(\eta, \xi)}{\partial \eta} \right) \right) d\eta d\xi \quad (3.196)$$

$$K^* = \int_A E(\xi) \left(\xi^2 + \eta^2 + \frac{1}{G(\xi)} \left(\xi \frac{\partial \Psi(\eta, \xi)}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial \Psi(\eta, \xi)}{\partial \eta} \right) \right)^2 d\eta d\xi \quad (3.197)$$

$$J^* = 2 \int_A \Psi(\eta, \xi) d\eta d\xi \quad (3.198)$$

şeklinde ifade edilebilir (J^* için bakınız, Ecsedi (2009)).

3.4.2 Uzama-burulma bağlaışık dinamik davranışa dair matematiksel model

Literatürde uzama-burulma bağlaışık dinamik davranış, çarpılma-temelli bir boyutlu mekanik modeller çerçevesinde incelemek amacıyla sunulan matematiksel modellerin en bilineni Rosen tarafından sunulmuştur (Rosen, 1991). İlgili çalışmada Rosen, Saint-Venant burulma kabulüne dayanan statik yükleme ve şekil değişimi denklemlerine atalet terimlerini eklemiştir ve dolayısıyla uzama-burulma davranışını incelemek için Saint-Venant burulma modelini temel alan bir formülasyon sunmuştur (K. C. Liu ve diğ., 2009). Ancak K.C. Liu ve diğ. (2009), uzama-burulma bağlaışık dinamik davranışını incelemek için Saint-Venant burulma kabulünün fiziksel olarak tutarsız olduğunu

göstermiş ve homojen malzemeden imal edilmiş önburulmalı çubukların uzama-burulma bağlaşıklık dinamik davranışın çarpılma-temelli bir boyutlu mekanik modeller çerçevesinde incelenmesinin ancak üniform olmayan (Saint-Venant dışı) burulma modelinin kullanılması durumunda fiziksel olarak tutarlı bir şekilde gerçekleştirilebileceğini göstermiştir.

Ayrıca, Kısım 3.4.1’de sunulan uzama-burulma statik davranışı incelemeyi hedefleyen Saint-Venant burulma kabulü temelli mekanik modelde, kesit integrasyonları sonucu elde edilen çarpılma-kaynaklı rijitlik katsayıları, çarpılma fonksiyonunun sadece türevlerinden oluşmaktaydı ve bu sayede uygun bir dönüşüm kullanılarak -daha kolay hesaplanabilen- Prandtl gerilme fonksiyonunun türevleri cinsinden ifade edilebilmekteydi. Ancak, üniform olmayan burulma modelinin kullanılması durumunda, geliştirilen mekanik modeldeki bazı çarpılma-kaynaklı rijitlik katsayıları, çarpılma fonksiyonunun türevlerine ek olarak bizzat çarpılma fonksiyonunun kendisini de ihtiva etmektedir. Bu durum da, incelenen problem özelinde Prandtl gerilme fonksiyonuna geçişi engellemekte ve homojen olmayan malzeme durumunda çarpılma fonksiyonunun doğrudan çözümünü gerektirmektedir. Ancak homojen olmayan malzemeden imal edilmiş bir kesit özelinde çarpılma fonksiyonunu verecek olan sınır değer probleminin çözümü, önburulmasız bir çubuğun çarpılma fonksiyonunun hesaplanması durumunda bile oldukça gelişmiş çözüm yöntemlerinin kullanımını gerektirmektedir (Bochev ve Lehoucq, 2005; Ivanov ve diğ., 2019; Katsikadelis ve Tsiatas, 1999, 2016; Raeli, 2017; Raeli ve diğ., 2018). Böylesi gelişmiş çözüm yöntemlerinin uygulanmasının başlı başına ayrı bir araştırma alanı olduğu düşünülmektedir ve bu sebeple bu tezin kapsamı dışında bırakılmıştır.

Bu bağlamda, K.C. Liu ve diğ. (2009) tarafından homojen malzemeden imal edilmiş önburulmalı çubukların uzama-burulma dinamik davranışlarını incelemek için geliştirilen ve üniform olmayan burulma kabulünü temel alan modele bağlı kalınmış ve bu kısımda bütünlük açısından bu formülasyon tekrar sunulmuştur. K.C. Liu ve diğ. (2009), bu denklemleri, serbest-serbest sınır şartlarına sahip önburulmalı bir çubuğun serbest titreşimlerini incelemek için yarı analitik olarak çözmüştür. Ancak Kısım 4.4’te bu denklemlerden hareketle burada bir sonlu eleman formülasyonu geliştirilmiştir. Kısım 5.4’te ise ankastre-serbest sınır şartlarına sahip bir önburulmalı çubuk için bu modelden elde edilen sonuçlar, üç boyutlu sonlu eleman modelinden elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

3.4.2.1 Kinematik

Dinamik durumda, doğru eksenli ve önburulmalı bir çubuğun keyfi bir z konumundaki kesidi üzerinde bulunan keyfi bir P noktasına ait yer değiştirme alanı, konum parametrelerine ek olarak t olarak temsil edilen zaman parametresinin de bir fonksiyonu haline gelmektedir. Bu durumda, küçük dönme kabülü yapılarak xyz koordinat sisteminde yer değiştirme alanı

$$u_x = -y\theta_z(z, t) \quad (3.199)$$

$$u_y = x\theta_z(z, t) \quad (3.200)$$

$$u_z = w^0(z, t) + \phi \frac{\partial \theta_z(z, t)}{\partial z} \quad (3.201)$$

olarak yazılabilir (K. C. Liu ve diğ., 2009). Burada, u_x , u_y ve u_z sırasıyla yer değiştirme alanının x , y ve z doğrultularındaki bileşenlerini; w^0 , tarafsız eksenin z doğrultusundaki ötelenmesini; θ_z , ilgili kesidin z eksenine etrafındaki dönmesini ifade etmektedir. ϕ ise çubuğun Saint-Venant çarpılma fonksiyonunu ifade etmektedir. K.C. Liu ve diğ. (2009), eğer burulma davranışı uzama davranışına göre daha baskın ise; çubuğun önburulma açısı küçük ise; ve çubuğun uzunluk-kalınlık oranı yeterince yüksek ise, -bu incelemede yapıldığı gibi- önburulmasız çubuğa ait çarpılma fonksiyonunun önburulmalı çubuğun çarpılma fonksiyonu olarak kullanılabileceğini göstermiştir, $\phi = \phi(\eta, \xi)$. Ayrıca, bu inceleme özelinde, dinamik davranışı incelenen önburulmalı ve doğru eksenli çubuğun kesidinin, yarı büyük ve yarı küçük eksen uzunlukları sırasıyla $b/2$ ve $h/2$ olan bir elips geometrisinde olduğu varsayılmıştır (Şekil 3.6). Bu durumda, keside ait çarpılma fonksiyonu

$$\phi(\eta, \xi) = \frac{h^2 - b^2}{b^2 + h^2} \eta \xi \quad (3.202)$$

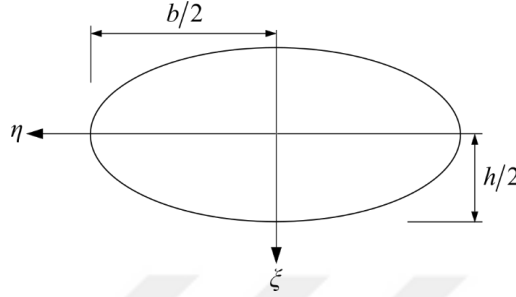
şekilde ifade edilebilir (Slaughter, 2002). Yer değiştirme alanının bileşenlerinin zamana göre bir defa türevinin alınmasıyla, ilgili hız alanı bu durumda aşağıdaki gibi yazılabilir (K. C. Liu ve diğ., 2009):

$$\dot{u}_x = -y\dot{\theta}_z(z, t) \quad (3.203)$$

$$\dot{u}_y = x \dot{\theta}_z(z, t) \quad (3.204)$$

$$\dot{u}_z = \dot{w}^0(z, t) + \phi(\eta, \xi) \frac{\partial^2 \theta_z(z, t)}{\partial z \partial t} \quad (3.205)$$

Burada ($\dot{}$) notasyonu, zamana göre bir defa alınan kısmi türevi ifade etmektedir.



Şekil 3.6 : Eliptik kesit.

Yer değiştirme alanından hareketle ve küçük şekil değişimi kabulüyle, sıfırdan farklı şekil değiştirme bileşenleri aşağıdaki gibi ifade edilebilir (K. C. Liu ve diğ., 2009):

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w^0(z, t)}{\partial z} + \frac{\partial \phi(\eta, \xi)}{\partial z} \frac{\partial \theta_z(z, t)}{\partial z} + \phi(\eta, \xi) \frac{\partial^2 \theta_z(z, t)}{\partial z^2} \quad (3.206)$$

$$\gamma_{zx} = -y \frac{\partial \theta_z(z, t)}{\partial z} + \frac{\partial \phi(\eta, \xi)}{\partial x} \frac{\partial \theta_z(z, t)}{\partial z} \quad (3.207)$$

$$\gamma_{zy} = x \frac{\partial \theta_z(z, t)}{\partial z} + \frac{\partial \phi(\eta, \xi)}{\partial y} \frac{\partial \theta_z(z, t)}{\partial z} \quad (3.208)$$

3.4.2.2 Yönetici denklemler ve rijitlik katsayıları

Önburulmalı ve homojen malzeme özelliklerine sahip bir çubuğun uzama-burulma bağlaşıp serbest titreşimlerine ait yönetici diferansiyel denklemler, Genelleştirilmiş Hamilton Prensipleri kullanılarak elde edilebilir (K. C. Liu ve diğ., 2009):

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta \mathcal{T} - \delta \mathcal{U} + \delta \mathcal{W}) dt = 0 \quad (3.209)$$

Burada, $\delta \mathcal{T}$, $\delta \mathcal{U}$ ve $\delta \mathcal{W}$ sırasıyla kinetik enerjinin, şekil değiştirme enerjisinin ve bir potansiyelden türetilemeyen dış kuvvetlerin yaptığı toplam işin birinci varyasyonunu temsil etmektedir.

Bu bağlamda, denklem 3.203-3.205'in kullanımıyla aşağıdaki kinetik enerji ifadesinin

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \int_0^L \int_A \rho [\dot{u}_x^2 + \dot{u}_y^2 + \dot{u}_z^2] dA dz \quad (3.210)$$

birinci varyasyonu aşağıdaki gibi yazılabilir (K. C. Liu ve diğ., 2009):

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{T} = \int_0^L \left[\left[I_0 \dot{w}^0 + I_1 \frac{\partial^2 \theta_z}{\partial t \partial z} \right] \frac{\partial}{\partial t} (\delta w^0) \right. \\ \left. + \left[I_1 \dot{w}^0 + I_2 \frac{\partial^2 \theta_z}{\partial t \partial z} \right] \frac{\partial}{\partial t} \left(\delta \left(\frac{\partial \theta_z}{\partial z} \right) \right) + I_3 \dot{\theta}_z \frac{\partial}{\partial t} (\delta \theta_z) \right] dz \end{aligned} \quad (3.211)$$

Burada, I_0, I_1, I_2 ve I_3 sabitleri aşağıdaki gibi tanımlanır (K. C. Liu ve diğ., 2009):

$$[I_0, I_1, I_2, I_3] = \rho \int_A [1, \phi(\eta, \xi), \phi^2(\eta, \xi), (\eta^2 + \xi^2)] dA \quad (3.212)$$

Çubuk kesidinin boyutlarının, boyuna göre küçük olduğu; Poisson oranının sabit olduğu ve çubuk malzemesinin lineer, elastik, izotropik ve homojen malzemeden imal edildiği varsayımları üzerinden, çubukta oluşan gerilmeler xyz koordinat sisteminde aşağıdaki gibi yazılabilir (K. C. Liu ve diğ., 2009):

$$\sigma_{zz} = E \varepsilon_{zz} \quad (3.213)$$

$$\sigma_{yz} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{yz} = G \gamma_{yz} \quad (3.214)$$

$$\sigma_{xz} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xz} = G \gamma_{xz} \quad (3.215)$$

Bu durumda,

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \int_0^L \int_A [\sigma_{zz} \varepsilon_{zz} + \sigma_{yz} \gamma_{yz} + \sigma_{xz} \gamma_{xz}] dA dz \quad (3.216)$$

olarak tanımlanan şekil değiştirme enerjisinin birinci varyasyonu aşağıdaki gibi yazılabilir (K. C. Liu ve diğ., 2009):

$$\delta\mathcal{U} = \left[F_z \delta w^0 + M_z \delta \theta_z + B \delta \left(\frac{\partial \theta_z}{\partial z} \right) \right] \Big|_0^L - \int_0^L \left[\frac{\partial F_z}{\partial z} \delta w^0 + \frac{\partial M_z}{\partial z} \delta \theta_z \right] dz \quad (3.217)$$

Burada eksenel rijitlik, E^* olarak ifade edilmek üzere ve çarpılma-kaynaklı rijitlik katsayıları olarak adlandırılan diğer katsayılarda bulunan önburulmasız çubuğun Saint-Venant çarpılma fonksiyonunun, $\phi(\eta, \xi)$, tek simetrik bir fonksiyon karakterinde olması sebebiyle (K. C. Liu ve diğ., 2009)

$$E^* = E \int_A dA \quad (3.218)$$

$$S^* = E \int_A \frac{\partial \phi(\eta, \xi)}{\partial z} dA = \beta E \int_A \left(\xi \frac{\partial \phi(\eta, \xi)}{\partial \eta} - \eta \frac{\partial \phi(\eta, \xi)}{\partial \xi} \right) dA \quad (3.219)$$

$$K^* = E \int_A \left(\frac{\partial \phi(\eta, \xi)}{\partial z} \right)^2 dA = \beta^2 E \int_A \left(\xi \frac{\partial \phi(\eta, \xi)}{\partial \eta} - \eta \frac{\partial \phi(\eta, \xi)}{\partial \xi} \right)^2 dA \quad (3.220)$$

$$J_\omega = \int_A (\phi(\eta, \xi))^2 dA \quad (3.221)$$

$$J_\omega^* = E \int_A (\phi(\eta, \xi))^2 dA \quad (3.222)$$

$$\begin{aligned} J^* &= G \int_A \left[\left(-y + \frac{\partial \phi(\eta, \xi)}{\partial x} \right)^2 + \left(x + \frac{\partial \phi(\eta, \xi)}{\partial y} \right)^2 \right] dA \\ &= G \int_A \left[\left(\xi - \frac{\partial \phi(\eta, \xi)}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\eta + \frac{\partial \phi(\eta, \xi)}{\partial \xi} \right)^2 \right] dA \end{aligned} \quad (3.223)$$

$$D^* = E \int_A \phi(\eta, \xi) dA = 0 \quad (3.224)$$

$$R^* = E \int_A \phi(\eta, \xi) \frac{\partial \phi(\eta, \xi)}{\partial z} dA = 0 \quad (3.225)$$

tanımlamaları yapılabilir. Bu durumda,

$$F_z = E^* \frac{\partial w^0}{\partial z} + S^* \frac{\partial \theta_z}{\partial z} \quad (3.226)$$

$$B = J_\omega^* \frac{\partial^2 \theta_z}{\partial z^2} \quad (3.227)$$

$$\begin{aligned} M_z &= S^* \frac{\partial w^0}{\partial z} + (K^* + J^*) \frac{\partial \theta_z}{\partial z} - \frac{\partial B}{\partial z} \\ &= S^* \frac{\partial w^0}{\partial z} + (K^* + J^*) \frac{\partial \theta_z}{\partial z} - J_\omega^* \frac{\partial^3 \theta_z}{\partial z^3} \end{aligned} \quad (3.228)$$

ilişkileri yazılabilir (K. C. Liu ve diğ., 2009). Ayrıca, önburulmasız çubuğun Saint-Venant çarpılma fonksiyonun, $\phi(\eta, \xi)$, tek simetrik bir fonksiyon olması, denklem 3.212'deki I_1 sabitinin sıfır olmasına da sebep olur, $I_1 = 0$ (K. C. Liu ve diğ., 2009).

Bir potansiyelden türetilemeyen dış kuvvetlerin yaptığı toplam işin birinci varyasyonu

$$\delta \mathcal{W} = \int_0^L [q_z \delta w^0 + m_z \delta \theta_z] dz \quad (3.229)$$

şeklinde ifade edilip, burada q_z ve m_z sırasıyla, yayılı eksenel kuvveti ve yayılı burulma momentini temsil etmektedir (K. C. Liu ve diğ., 2009).

Kinetik enerji ve şekil değiştirme enerjinin birinci varyasyonlarının ve bir potansiyelden türetilemeyen dış kuvvetlerin yaptığı toplam işin birinci varyasyonunun, denklem 3.209'da verilen Genelleştirilmiş Hamilton Prensibi ifadesine konulmasıyla

$$\begin{aligned} &\int_0^L \left(\left[(I_0 \dot{w}^0) \delta w^0 + (I_3 \dot{\theta}_z) \delta \theta_z + \left(I_2 \frac{\partial^2 \theta_z}{\partial t \partial z} \right) \delta \left(\frac{\partial \theta_z}{\partial z} \right) \right] \right|_{t_1}^{t_2} dz \\ &- \int_{t_1}^{t_2} \left(\left[F_z \delta w^0 + \left(I_2 \frac{\partial^3 \theta_z}{\partial t^2 \partial z} + M_z \right) \delta \theta_z + B \delta \left(\frac{\partial \theta_z}{\partial z} \right) \right] \right|_0^L \\ &+ \int_0^L \left(\left[I_0 \ddot{w}^0 - \frac{\partial F_z}{\partial z} - q_z \right] \delta w^0 \right. \\ &\left. + \left[-I_2 \frac{\partial^4 \theta_z}{\partial t^2 \partial z^2} + I_3 \ddot{\theta}_z - \frac{\partial M_z}{\partial z} - m_z \right] \delta \theta_z \right) dz \Bigg) dt = 0 \end{aligned} \quad (3.230)$$

denklemleri yazılır ve, $\delta w^0(z, t_1) = \delta w^0(z, t_2) = 0$, $\delta \theta_z(z, t_1) = \delta \theta_z(z, t_2) = 0$ ve $\delta(\partial \theta_z(z, t_1)/\partial z) = \delta(\partial \theta_z(z, t_2)/\partial z) = 0$ olması sebebiyle

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \left(\left[F_z \delta w^0 + \left(I_2 \frac{\partial^3 \theta_z}{\partial t^2 \partial z} + M_z \right) \delta \theta_z + B \delta \left(\frac{\partial \theta_z}{\partial z} \right) \right] \right) \Big|_0^L \\ & + \int_0^L \left(\left[I_0 \ddot{w}^0 - \frac{\partial F_z}{\partial z} - q_z \right] \delta w^0 \right. \\ & \left. + \left[-I_2 \frac{\partial^4 \theta_z}{\partial t^2 \partial z^2} + I_3 \ddot{\theta}_z - \frac{\partial M_z}{\partial z} - m_z \right] \delta \theta_z \right) dz \Bigg) dt = 0 \end{aligned} \quad (3.231)$$

haline indirgenir (K. C. Liu ve diğ., 2009).

Denklemler 3.231'deki içteki integral ifadesinde, birbirinden bağımsız ve keyfî δw^0 ve $\delta \theta_z$ varyasyonları için Varyasyon Hesabının Temel Lemması gereğince köşeli parantezlerin içinin sıfır olması gerekmektedir (K. C. Liu ve diğ., 2009; Reddy, 2006).

Böylece hareket denklemleri aşağıdaki gibi elde edilir (K. C. Liu ve diğ., 2009):

$$\delta w^0: \quad I_0 \ddot{w}^0 - \frac{\partial F_z}{\partial z} - q_z = 0 \quad (3.232)$$

$$\delta \theta_z: \quad -I_2 \frac{\partial^4 \theta_z}{\partial t^2 \partial z^2} + I_3 \ddot{\theta}_z - \frac{\partial M_z}{\partial z} - m_z = 0 \quad (3.233)$$

Bu denklemler, denklem 3.226 ve 3.228'de verilen F_z ve M_z ifadelerinin konulmasıyla aşağıdaki şekilde yazılabilir (K. C. Liu ve diğ., 2009):

$$E^* \frac{\partial^2 w^0}{\partial z^2} + S^* \frac{\partial^2 \theta_z}{\partial z^2} - I_0 \ddot{w}^0 + q_z = 0 \quad (3.234)$$

$$S^* \frac{\partial^2 w^0}{\partial z^2} + (K^* + J^*) \frac{\partial^2 \theta_z}{\partial z^2} - J_\omega^* \frac{\partial^4 \theta_z}{\partial z^4} + I_2 \frac{\partial^4 \theta_z}{\partial t^2 \partial z^2} - I_3 \ddot{\theta}_z + m_z = 0 \quad (3.235)$$

Ayrıca $z = 0$ ve $z = L$ 'de, kinematik sınır şartları

$$w^0 = 0 \quad (3.236)$$

$$\theta_z = 0 \quad (3.237)$$

$$\frac{d\theta_z}{dz} = 0 \quad (3.238)$$

olarak ve doğal sınır şartları

$$E^* \frac{\partial w^0}{\partial z} + S^* \frac{\partial \theta_z}{\partial z} = 0 \quad (3.239)$$

$$I_2 \frac{\partial^3 \theta_z}{\partial t^2 \partial z} + S^* \frac{\partial w^0}{\partial z} + (K^* + J^*) \frac{\partial \theta_z}{\partial z} - J_\omega^* \frac{\partial^3 \theta_z}{\partial z^3} = 0 \quad (3.240)$$

$$J_\omega^* \frac{\partial^2 \theta_z}{\partial z^2} = 0 \quad (3.241)$$

biçiminde yazılabilir (K. C. Liu ve diğ., 2009).

4. MALZEME ÖZELLİKLERİ KONUMA BAĞLI OLARAK DEĞİŞEN ÖNBURULMALI ÇUBUKLARIN YÖNETİCİ DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ

4.1 Eğilme-eğilme Bağlaşık Statik Davranışa Ait Denklemlerin Çözümü

4.1.1 Sabit koordinat sistemine göre elde edilen yönetici denklemlerin çözümü

Önburulmalı ve kesit kalınlığı boyunca değişen malzeme özelliklerine sahip bir Timoshenko çubuğunun statik davranışına ilişkin xyz koordinat sisteminde ifade edilen yönetici denklemler, denklem 3.93-3.100'de birinci mertebeden diferansiyel denklem sistemi olarak verilmiştir ve aşağıdaki gibi matris formunda ifade edilebilir:

$$\frac{d\mathbf{y}(z)}{dz} = \mathbf{P}(z)\mathbf{y}(z) + \mathbf{f}(z) \quad (4.1)$$

Burada $\mathbf{y}(z)$, 8x1 boyutundaki değişkenler vektörünü temsil etmektedir ve açık olarak

$$\mathbf{y}(z) = [u^0 \quad v^0 \quad \theta_x \quad \theta_y \quad F_x \quad F_y \quad M_x \quad M_y]^T \quad (4.2)$$

şeklinde ifade edilebilir. Benzer şekilde $\mathbf{f}(z)$, 8x1 boyutundaki yayılı dış kuvvet ve momentleri ifade eden vektör olup

$$\mathbf{f}(z) = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -q_x \quad -q_y \quad -m_x \quad -m_y]^T \quad (4.3)$$

olarak ifade edilebilir. Ayrıca $\mathbf{P}(z)$, 8x8 boyutundaki sistem matrisi (ya da katsayılar matrisi) olup, sıfırdan farklı elemanları

$$[P_{14}, P_{76}, P_{23}, P_{85}] = [1, 1, -1, -1] \quad (4.4)$$

$$[P_{15}, P_{26}] = \left[\frac{1}{\bar{c}_4(z)}, \frac{1}{\bar{c}_5(z)} \right] \quad (4.5)$$

$$[P_{37}, P_{38}, P_{47}, P_{48}] = \frac{1}{\bar{c}_1(z)\bar{c}_3(z) - \bar{c}_2(z)^2} [\bar{c}_3(z), \bar{c}_2(z), \bar{c}_2(z), \bar{c}_1(z)] \quad (4.6)$$

olarak yazılabilir. Formülasyonun sabit koordinat sisteminde yapılması neticesinde, sistem matrisinin bazı elemanları, önburulmadan dolayı konuma bağlı olarak değişmektedir. Benzer bir durumun, çubuk eksen boyunca değişen kesit boyutlarına veya malzeme özelliklerine sahip bir çubukta da var olabileceği belirtilmelidir. Bu durumda, denklem 4.1’de ifade edilen diferansiyel denklem takımının sayısal çözümü başlangıç değerleri yöntemi kullanılarak aşağıdaki gibi elde edilebilir (Pease, 1965):

$$\mathbf{y}(z) = \tilde{\mathbf{Y}}(z, z_0)\mathbf{y}(z_0) + \tilde{\mathbf{Y}}(z, z_0) \int_{z_0}^z \tilde{\mathbf{Y}}^{-1}(z', z_0)\mathbf{f}(z')dz' \quad (4.7)$$

Burada $\tilde{\mathbf{Y}}(z, z_0)$, yaklaşık asal matris olup, Volterra’nın çarpımsal integrali kullanılarak

$$\tilde{\mathbf{Y}}(z, z_0) = \prod_{i=0}^{n-1} [\mathbf{I} + \mathbf{P}(z_i)(z_{i+1} - z_i)] \quad (4.8)$$

şeklinde hesaplanabilir (Pease, 1965). Burada $\mathbf{I}$, 8x8 boyutundaki birim matrisi ve $\mathbf{y}(z_0)$, $z_0 = 0$ olmak üzere başlangıç değerleri vektörünü temsil etmektedir. n ise ayrıklaştırmadan sonra oluşan altbölge sayısını ifade etmektedir. z' kukla değişkeni temsil etmektedir. z_i ve z_{i+1} ise i . altbölgenin uçlarının konumlarını ifade etmektedir. Ayrıca, denklem 4.7’deki eşitliğin sağ yanında bulunan ikinci terimdeki integral ifadesi kompozit 3/8 Simpson kuralı kullanılarak sayısal olarak hesaplanmıştır (Chapra ve Canale, 2006). Bu çözüm yaklaşımı, serbest uç, ankastre mesnet ve sabit mesnet gibi klasik sınır şartlarına sahip bütün çubuk tipi yapılara uygulanabilir. Örneğin, ankastre mesnet için $u^0 = v^0 = \theta_x = \theta_y = 0$; serbest uç için $F_x = F_y = M_x = M_y = 0$ ve sabit mesnet için $u^0 = v^0 = \theta_y = M_x = 0$ şeklinde yazılabilir.

4.1.2 Hareketli koordinat sistemine göre elde edilen yönetici denklemlerin çözümü

Sabit koordinat sistemine göre elde edilenin aksine, denklem 3.119-3.126’da verilen $\eta\zeta z$ hareketli koordinat sistemine göre elde edilen statik davranışı yöneten denklemler, sabit katsayılarla sahip birinci mertebeden diferansiyel denklem takımı olarak

$$\frac{d\mathbf{y}(z)}{dz} = \mathcal{L}\mathbf{y}(z) + \mathbf{f}(z) \quad (4.9)$$

biçiminde ifade edilebilir. Bu durumda, 8x1 boyutundaki değişkenler vektörü $\mathbf{y}(z)$

$$\mathbf{y}(z) = [\bar{u}^0 \quad \bar{v}^0 \quad \theta_\eta \quad \theta_\xi \quad F_\eta \quad F_\xi \quad M_\eta \quad M_\xi]^T \quad (4.10)$$

biçiminde ve 8x1 boyutundaki yayılı dış kuvvet ve momentler vektörü

$$\mathbf{f}(z) = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -q_\eta \quad -q_\xi \quad -m_\eta \quad -m_\xi]^T \quad (4.11)$$

şeklinde yazılabilir. 8x8 boyutundaki sistem matrisi $\mathcal{L}$ 'nin sıfırdan farklı elemanları

$$[\mathcal{L}_{12}, \mathcal{L}_{21}, \mathcal{L}_{34}, \mathcal{L}_{43}, \mathcal{L}_{56}, \mathcal{L}_{65}, \mathcal{L}_{78}, \mathcal{L}_{87}] = [\beta, -\beta, \beta, -\beta, \beta, -\beta, \beta, -\beta] \quad (4.12)$$

$$[\mathcal{L}_{14}, \mathcal{L}_{23}, \mathcal{L}_{76}, \mathcal{L}_{85}] = [1, -1, 1, -1] \quad (4.13)$$

$$[\mathcal{L}_{15}, \mathcal{L}_{26}] = \left[\frac{1}{C_4}, \frac{1}{C_5} \right] \quad (4.14)$$

$$[\mathcal{L}_{37}, \mathcal{L}_{38}, \mathcal{L}_{47}, \mathcal{L}_{48}] = \frac{1}{C_1 C_3 - C_2^2} [C_3, C_2, C_2, C_1] \quad (4.15)$$

olarak yazılabilir. Formülasyonun hareketli $\eta\xi z$ koordinat takımına göre yapılması sebebiyle ve önburulmanın çubuk eksen boyunca lineer olarak değiştiği ($d\bar{\varphi}/dz = \beta$) varsayımından dolayı, sistem matrisi $\mathcal{L}$ 'nin bütün elemanları sabitlerden oluşmaktadır. Bu durumda kesin çözüm, başlangıç değerleri yöntemi kullanılarak

$$\mathbf{y}(z) = \mathbf{Y}(z, z_0)\mathbf{y}(z_0) + \mathbf{Y}(z, z_0) \int_{z_0}^z \mathbf{Y}^{-1}(z', z_0)\mathbf{f}(z')dz' \quad (4.16)$$

şeklinde elde edilebilir. Burada $\mathbf{Y}(z, z_0)$ asal matris olup, matris eksponansiyeli kullanılarak aşağıdaki şekilde kesin analitik olarak hesaplanabilir:

$$\mathbf{Y}(z, z_0) = e^{\mathcal{L}z} \quad (4.17)$$

Bu çalışmada $z_0 = 0$ olduğu varsayılmıştır. $\mathbf{Y}$ matrisinin sıfırdan farklı elemanları denklem A.4.1-A.4.20'de verilmiştir. Ayrıca asal matris $\mathbf{Y}(z, z_0)$,

$$\frac{d\mathbf{Y}(z, z_0)}{dz} = \mathcal{L}\mathbf{Y}(z, z_0) \quad (4.18)$$

$$Y(z_0, z_0) = I \quad (4.19)$$

$$Y(z_1, z_2)Y(z_2, z_3) = Y(z_1, z_3) \quad (4.20)$$

$$Y(z_1, z_2) = Y^{-1}(z_2, z_1) \quad (4.21)$$

ilişkilerini sağlamaktadır ve birim önburulma şiddeti β limitte sıfıra giderken önburulmasız çubuğun asal matrisine $(\bar{Y}(z, z_0))$ eşit hale gelmektedir:

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} Y(z, z_0) = \bar{Y}(z, z_0) \quad (4.22)$$

Bunlara ek olarak, tekil kuvvetler çubuğa eksen boyunca herhangi bir noktada etkiyebilir. Bu bağlamda, çubuğa $z_K \in (0, L)$ noktasında etkiyen bir tekil kuvvet etkidiği varsayılın. Bu durumda çubuk iki bölgeye ayrılarak her bölge için çözümler aşağıdaki gibi elde edilebilir (Aya ve Tufekci, 2016):

$$z_0 \leq z_1 \leq z_K \text{ için} \quad y_1(z_1) = Y(z_1, z_0)y_{10} \quad (4.23)$$

$$z_K \leq z_2 \leq L \text{ için} \quad y_2(z_2) = Y(z_2, z_K)y_{2K} \quad (4.24)$$

Burada z_1 ve z_2 sırasıyla, birinci ve ikinci bölgelerdeki çubuk eksen parametrelerini ifade etmektedir. Ayrıca, y_{10} ve y_{2K} sırasıyla, birinci ve ikinci bölgeler için başlangıç değerleri vektörlerine karşılık gelmektedir. K vektörü

$$K = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad F_\eta \quad F_\xi \quad M_\eta \quad M_\xi]^T \quad (4.25)$$

olmak üzere, z_K noktasındaki süreklilik ve denge şartları aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$y_1(z_K) - K = y_{2K} \quad (4.26)$$

Böylece denklem 4.20, 4.21, 4.23, 4.24 ve 4.26 kullanılarak, ikinci bölge için çözüm, birinci bölgenin başlangıç şartları kullanılarak

$$y_2(z_2) = Y(z_2, z_0)y_{10} - Y(z_2, z_0)Y^{-1}(z_K, z_0)K \quad (4.27)$$

şeklinde yazılabilir. Tek bölgenin kullanıldığı durumda, her iki uç için yazılan dört cebirsel denklem ile sekiz bilinmeyen başlangıç değeri hesaplanabilir. Yukarıda

anlatılan çözüm yaklaşımı, serbest uç, ankastre mesnet ve sabit mesnet gibi klasik sınır şartlarına sahip bütün çubuk tipi yapılara uygulanabilir. Bu bağlamda, sınır şartları ankastre mesnet için $\bar{u}^0 = \bar{v}^0 = \theta_\eta = \theta_\xi = 0$; serbest uç için $F_\eta = F_\xi = M_\eta = M_\xi = 0$ ve sabit mesnet için $\bar{u}^0 = \bar{v}^0 = \theta_\xi = M_\eta = 0$ şeklinde yazılabilir.

4.2 Eğilme-eğilme Bağlaışık Dinamik Davranışa Ait Denklemlerin Çözümü

Önburulmalı, doğru eksenli ve malzeme özellikleri eksenel doğrultuda değişen bir Timoshenko çubuğuna ait serbest titreşim davranışını yöneten ve denklem 3.160-3.167’de topluca ifade edilen yönetici denklemler,

$$\frac{d\mathbf{y}(z)}{dz} = \mathbf{P}(z)\mathbf{y}(z) \quad (4.28)$$

şeklinde birinci mertebeden, homojen ve değişken katsayılar matrisine sahip bir diferansiyel denklem sistemi oluşturur ve

$$\hat{z} = z/L; \hat{u}^0 = u^0/L; \hat{v}^0 = v^0/L \quad (4.29)$$

$$\hat{\theta}_x = \theta_x; \hat{\theta}_y = \theta_y; \lambda = \omega L^2 \sqrt{\rho_b A / (E_b \bar{I}_{\eta\eta})} \quad (4.30)$$

$$\hat{F}_x = F_x / (G_b A); \hat{F}_y = F_y / (G_b A) \quad (4.31)$$

$$\hat{M}_x = M_x L / (E_b \bar{I}_{\eta\eta}); \hat{M}_y = M_y L / (E_b \bar{I}_{\xi\xi}) \quad (4.32)$$

$$\hat{\beta} = G_b A L^2 / (E_b \bar{I}_{\eta\eta}); \chi = \bar{I}_{\eta\eta} / \bar{I}_{\xi\xi} \quad (4.33)$$

boyutsuz parametreleri kullanılarak:

$$\frac{d\hat{\mathbf{y}}(\hat{z})}{d\hat{z}} = \hat{\mathbf{P}}(\hat{z})\hat{\mathbf{y}}(\hat{z}) \quad (4.34)$$

şeklinde boyutsuzlaştırılabilir. Burada E_b ve G_b , sırasıyla $z = 0$ konumundaki elastisite modülü ve kayma modülü değerlerini ifade etmektedir. Ayrıca $\bar{I}_{\eta\eta}$ ve $\bar{I}_{\xi\xi}$ ifadeleri ise sırasıyla kesidin η ve ξ eksenlerine göre alan atalet momentlerini temsil etmektedir. Burada $\hat{\mathbf{y}}(\hat{z})$, 8x1 boyutundaki boyutsuz durum için tanımlanan değişkenler vektörü olup

$$\hat{\mathbf{y}}(\hat{z}) = [\hat{u}^0 \quad \hat{v}^0 \quad \hat{\theta}_x \quad \hat{\theta}_y \quad \hat{F}_x \quad \hat{F}_y \quad \hat{M}_x \quad \hat{M}_y]^T \quad (4.35)$$

biçiminde ve 8x8 boyutundaki katsayılar matrisi $\hat{\mathbf{P}}(\hat{z})$ 'nin sıfırdan farklı elemanları

$$[\hat{P}_{14}, \hat{P}_{23}, \hat{P}_{76}, \hat{P}_{85}, \hat{P}_{15}, \hat{P}_{26}] = \left[1, -1, \hat{\beta}, -\hat{\beta}\chi, \frac{G_b A}{C_4(\hat{z})}, \frac{G_b A}{C_5(\hat{z})} \right] \quad (4.36)$$

$$[\hat{P}_{37}, \hat{P}_{38}, \hat{P}_{47}, \hat{P}_{48}] = \frac{E_b [\bar{I}_{\eta\eta} C_3(\hat{z}), \bar{I}_{\xi\xi} C_2(\hat{z}), \bar{I}_{\eta\eta} C_2(\hat{z}), \bar{I}_{\xi\xi} C_1(\hat{z})]}{C_1(\hat{z}) C_3(\hat{z}) - C_2^2(\hat{z})} \quad (4.37)$$

$$[\hat{P}_{51}, \hat{P}_{62}] = -\frac{\lambda^2 I_0(\hat{z})}{A \rho_b} \left[\frac{1}{\hat{\beta}}, \frac{1}{\hat{\beta}} \right] \quad (4.38)$$

$$[\hat{P}_{73}, \hat{P}_{74}, \hat{P}_{83}, \hat{P}_{84}] = \frac{\lambda^2}{A \rho_b} \left[-\frac{I_1(\hat{z})}{L^2}, \frac{I_2(\hat{z})}{L^2}, \frac{\chi I_2(\hat{z})}{L^2}, -\frac{\chi I_3(\hat{z})}{L^2} \right] \quad (4.39)$$

şeklinde yazılabilir. Denklem 4.34'te boyutsuz olarak ifade edilen yönetici denklemler, katsayılar matrisinin değişken olması sebebiyle sayısal olarak çözülebilir. Bu inceleme kapsamında çözüm yöntemi olarak, hesaplamalardaki verimliliği sebebiyle adi ve kısmi diferansiyel denklemlerin sayısal çözümünde sıklıkla başvurulan bir yöntem olan harmonik diferansiyel kuadratür yöntemi (HDKY) kullanılmıştır (Striz ve diğ., 1995). İlk defa Bellman ve Casti tarafından geliştirilen diferansiyel kuadratür yönteminin temel çıkış noktası, bir fonksiyonun ($f(z_j)$) çözüm ağındaki belirli bir z_i . noktasındaki türevinin, o fonksiyonun çözüm ağının bütün noktalarındaki değerlerinin ağırlıklı toplamı olarak ifade edilebileceği fikridir (Bellman ve Casti, 1971; Bert ve diğ., 1994):

$$f'(z_i) = \sum_{j=1}^N a_{ij} f(z_j) \quad (i = 1, \dots, N) \quad (4.40)$$

Burada N çözüm ağındaki toplam nokta sayısını, a_{ij} ise $N \times N$ boyutundaki birinci türevin ağırlık katsayılarını temsil etmektedir. Bu noktada diferansiyel kuadratür yönteminin temelde çözüm bölgesinin ayrıklaştırılmasına dayalı bir yöntem olduğu ve bu sebeple kullanılan çözüm ağı şemasının hassas sonuç elde etmek için önemli olduğu belirtilmelidir. Bu bağlamda, bu inceleme kapsamında bölgeyi ayrıklaştırmak için Chebyshev-Gauss-Lobatto ağ ayrıklaştırma şeması kullanılmıştır (Shu, 2000):

$$z_i = \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{i-1}{N-1} \pi \right) \quad (i = 1, \dots, N) \quad (4.41)$$

Ayrıca, ağırlık katsayıları matrisinin hesaplanmasında harmonik test fonksiyonları kullanılmıştır (Wang, 2015):

$$a_{ij} = \begin{cases} \frac{\pi}{8} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i,j}}^N \sin \frac{\pi}{8} (z_i - z_k) / \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N \sin \frac{\pi}{8} (z_j - z_k) & (i \neq j) \\ \frac{\pi}{8} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N \frac{\cos \frac{\pi}{8} (z_i - z_k)}{\sin \frac{\pi}{8} (z_i - z_k)} & (i = j) \end{cases} \quad (4.42)$$

Tek bir diferansiyel denklem için geçerli olan denklem 4.40'ta ifade edilen türev ile ağırlık toplam arasındaki ilişkinin, denklem 4.34'te ifade edilen denklem sistemine uygulanmasıyla özdeğer problemi aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{F}_{11} & \cdots & \mathcal{F}_{1,8N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{F}_{8N,1} & \cdots & \mathcal{F}_{8N,8N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{X}} \\ \hat{\mathbf{F}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

Burada $\mathcal{F}$, $8N \times 8N$ boyutundaki katsayılar matrisi olup boyutsuz frekans λ 'nın bir fonksiyonudur. Ayrıca $\hat{\mathbf{X}}$ ve $\hat{\mathbf{F}}$ vektörleri, sırasıyla $N \times 1$ boyutlarındaki $\hat{\mathbf{u}}^0$, $\hat{\mathbf{v}}^0$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}_x$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}_y$ ve $\hat{\mathbf{F}}_x$, $\hat{\mathbf{F}}_y$, $\hat{\mathbf{M}}_x$, $\hat{\mathbf{M}}_y$ vektörlerini içeren $4N \times 1$ boyutundaki vektörlerdir:

$$\hat{\mathbf{X}} = [\hat{\mathbf{u}}^{0T} \quad \hat{\mathbf{v}}^{0T} \quad \hat{\boldsymbol{\theta}}_x^T \quad \hat{\boldsymbol{\theta}}_y^T]^T \quad (4.44)$$

$$\hat{\mathbf{F}} = [\hat{\mathbf{F}}_x^T \quad \hat{\mathbf{F}}_y^T \quad \hat{\mathbf{M}}_x^T \quad \hat{\mathbf{M}}_y^T]^T \quad (4.45)$$

Yukarıda özetlenen çözüm yöntemi ankastre mesnet, sabit mesnet ve serbest uç sınır şartlarına sahip bütün çubuk problemlerinin çözümünde uygulanabilir.

Bu bağlamda, ankastre mesnet, serbest uç ve sabit mesnet için sınır şartları, örneğin, $\hat{z} = 0$ konumunda ankastre mesnet için $\hat{u}^0(0) = \hat{v}^0(0) = \hat{\theta}_x(0) = \hat{\theta}_y(0) = 0$; $\hat{z} = 1$ konumunda serbest uç için $\hat{F}_x(1) = \hat{F}_y(1) = \hat{M}_x(1) = \hat{M}_y(1) = 0$ ve $\hat{z} = 0$ konumunda sabit mesnet için $\hat{u}^0(0) = \hat{v}^0(0) = \hat{\theta}_y(0) = \hat{M}_x(0) = 0$ şeklinde yazılabilir. Çubuğun iki ucuna da bu sınır şartlarının uygulanması neticesinde $8(N - 1) \times 8(N - 1)$ boyutuna indirgenen $\mathcal{F}$ katsayılar matrisinin determinantının kökleri,

incelenen çubuğun boyutsuz doğal frekanslarına karşılık gelecektir. Bu inceleme kapsamında, sınır şartları uygulanmış katsayılar matrisinin determinantının kökleri ikiye bölme yöntemi kullanılarak hesaplanmıştır (Chapra ve Canale, 2006).

Ayrıca, bu incelemede benimsenen matematiksel yaklaşım olan yönetici denklemlerin birinci mertebeden diferansiyel denklem takımı biçiminde ifade edilmesi ve diferansiyel kuadratür yöntemi kullanılarak çözülmesi bağlamında, mod şekillerini aşağıdaki yöntemle yaklaşık olarak elde etmek mümkündür.

Bu bağlamda ilk olarak, HDKY uygulandıktan sonra oluşturulan determinant ifadesinin kökünün, ikiye bölme yöntemi kullanılmadan da bulunabildiği ve yapıya ait bu -kök bulma bakımından- “kesin” doğal frekans değerinin $\bar{\lambda}$ ile ifade edildiği varsayılın. İkiye bölme yöntemi neticesinde elde edilen doğal frekans değeri ise bu “kesin” değere çok yakın olmasına rağmen, sayısal kök bulma sürecinden dolayı $\bar{\lambda}$ değerinden bir miktar farklı olacaktır. Bu doğal frekans değeri de $\tilde{\lambda}$ olarak gösterilsin. Bu $\tilde{\lambda}$ değeri, sınır şartları uygulandıktan sonra $8(N-1) \times 8(N-1)$ boyutuna indirgenmiş olan $\mathcal{F}$ matrisinin determinantının sıfıra çok yakın bir değerde olmasına sebep olmaktadır. Böylesi bir durumda matris singüler değil ancak kötü koşullu (ill-conditioned) bir karakterde olacaktır ve bu durumda matematiksel olarak homojen bir denklem sistemini temsil eden Denklem 4.43’ün sınır şartları uygulandıktan sonraki halinin çözümünün tekil değer ayrıştırması yöntemi (TDA) ile elde edilebileceği düşünülmüştür:

$$\mathcal{F}(\tilde{\lambda}) = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T \quad (4.46)$$

Burada $\mathbf{\Sigma}$, $\Sigma_1 \geq \Sigma_2 \geq \dots \geq \Sigma_{8(N-1)} \geq 0$ şeklinde büyükten küçüğe doğru sıralanmış tekil değerleri içeren köşegen matrisi; $\mathbf{U}$ ve $\mathbf{V}$ ise sırasıyla sol ve sağ tekil vektörleri içeren matrisleri temsil etmektedir. Burada, sağ tekil vektörleri içeren matrisin $8(N-1) \times 1$ boyutundaki son sütunu, en küçük tekil değere aittir. Bu vektörün ilk $2(N-1)$ satırı ise tarafsız eksenin x ve y doğrultularındaki ötelenme bileşenlerinin (ankastre mesnetli olduğu düğüm noktası haricindeki) her düğüm noktasındaki değerlerini içermektedir. Bu durumda, ilgili mod şeklinin x ve y doğrultularındaki bileşenleri sırasıyla bütün olarak aşağıdaki gibi ifade edilebilirler:

$$\mathbf{T}_x = [0 \quad \mathbf{V}(\mathbf{1}:N-1)]^T \quad (4.47)$$

$$\mathbf{T}_y = [0 \quad \mathbf{V}(\mathbf{N}; \mathbf{2}(\mathbf{N} - \mathbf{1}))]^T \quad (4.48)$$

Burada $\mathbf{T}_x$ ve $\mathbf{T}_y$ vektörleri ilgili modun x ve y doğrultularındaki bileşenlerini temsil etmektedir ve bu iki vektörün mutlak değerce en büyük değerine göre normalize edilerek ifade edilebilirler.

4.3 Uzama-burulma Bağlaışık Statik Davranışa Ait Denklemlerin Çözümü

Denklem 3.185'te verilen F_{z0} ve M_{z0} ifadeleri, fiziksel olarak sırasıyla, serbest uca ait tekil çekme kuvvetini ve tekil pozitif burulma momentini temsil etmektedir. Dolayısıyla, matematiksel olarak bir sabite karşılık gelmektedirler. Bu durumda, denklem 3.185 doğrudan integre edilebilir hali alır:

$$\int_0^z \frac{dw^0}{dz} dz = \int_0^z \left[\frac{\beta^2 K^* + J^*}{J^* E^* + \beta^2 [K^* E^* - (S^*)^2]} F_{z0} - \frac{\beta S^*}{J^* E^* + \beta^2 [K^* E^* - (S^*)^2]} M_{z0} \right] dz \quad (4.49)$$

$$\int_0^z \frac{d\theta_z}{dz} dz = \int_0^z \left[-\frac{\beta S^*}{J^* E^* + \beta^2 [K^* E^* - (S^*)^2]} F_{z0} + \frac{E^*}{J^* E^* + \beta^2 [K^* E^* - (S^*)^2]} M_{z0} \right] dz \quad (4.50)$$

Bu noktada, çubuğun sınır şartlarının ankastre-serbest olduğu hatırlanırsa, $w^0(0) = \theta_z(0) = 0$, yer değiştirme bileşenlerine dair analitik çözüm aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$w^0 = \frac{(\beta^2 K^* + J^*)z}{(J^* E^* + \beta^2 [K^* E^* - (S^*)^2])} F_{z0} - \frac{\beta S^* z}{(J^* E^* + \beta^2 [K^* E^* - (S^*)^2])} M_{z0} \quad (4.51)$$

$$\theta_z = -\frac{\beta S^* z}{(J^* E^* + \beta^2 [K^* E^* - (S^*)^2])} F_{z0} + \frac{E^* z}{(J^* E^* + \beta^2 [K^* E^* - (S^*)^2])} M_{z0} \quad (4.52)$$

4.4 Uzama-burulma Bağılaık Dinamik Davranışa Ait Denklemlerin özümü

Kısım 3.4.2’de de bahsedildiği üzere, denklem 3.234 ve 3.235’te sunulan hareket denklemleri K.C. Liu ve diğ. (2009) tarafından yarı-analitik olarak özölmüştür. Bu kısımda, bu denklemlerin çözümünün sonlu elemanlar yöntemi çerçevesinde geliştirilmesi amaçlanmıştır. Bu amaçla, K.C. Liu ve diğ. (2009) tarafından yapılane benzer şekilde, denklem 3.234 ve 3.235’te sunulan hareket denklemleri

$$\hat{w}^0 = \frac{w^0 EA}{q_{z0} L^2}; \hat{\theta}_z = \frac{\theta_z E \sqrt{J_\omega A}}{q_{z0} L^3}; \hat{z} = \frac{z}{L}; \hat{t} = \frac{t}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}; \lambda = \omega L \sqrt{\frac{\rho}{E}} \quad (4.53)$$

tanımlamaları kullanılarak aşağıdaki gibi boyutsuzlaştırılabilir (K. C. Liu ve diğ., 2009):

$$\frac{\partial^2 \hat{w}^0(\hat{z}, \hat{t})}{\partial \hat{z}^2} + a_1 \frac{\partial^2 \hat{\theta}_z(\hat{z}, \hat{t})}{\partial \hat{z}^2} + \frac{q_z EA}{q_{z0} E^*} = a_2 \frac{\partial^2 \hat{w}^0(\hat{z}, \hat{t})}{\partial \hat{t}^2} \quad (4.54)$$

$$\begin{aligned} a_3 \frac{\partial^2 \hat{w}^0(\hat{z}, \hat{t})}{\partial \hat{z}^2} + a_4 \frac{\partial^2 \hat{\theta}_z(\hat{z}, \hat{t})}{\partial \hat{z}^2} - a_5 \frac{\partial^4 \hat{\theta}_z(\hat{z}, \hat{t})}{\partial \hat{z}^4} + \frac{m_z LA \sqrt{AE}}{q_{z0} E^* \sqrt{J_\omega}} \\ = a_6 \frac{\partial^2 \hat{\theta}_z(\hat{z}, \hat{t})}{\partial \hat{t}^2} - a_7 \frac{\partial^4 \hat{\theta}_z(\hat{z}, \hat{t})}{\partial \hat{t}^2 \partial \hat{z}^2} \end{aligned} \quad (4.55)$$

Burada, boyutsuz katsayılar aşağıdaki gibi tanımlanmıştır (K. C. Liu ve diğ., 2009):

$$[a_1, a_2, a_3, a_4] = \left[\frac{S^* L \sqrt{A}}{E^* \sqrt{J_\omega}}, \frac{I_0 E}{\rho E^*}, \frac{S^* L \sqrt{A}}{E^* \sqrt{J_\omega}}, \frac{(K^* + J^*) L^2 A}{E^* J_\omega} \right] \quad (4.56)$$

$$[a_5, a_6, a_7] = \left[\frac{J_\omega^* A}{E^* J_\omega}, \frac{I_3 L^2 AE}{\rho J_\omega E^*}, \frac{I_2 AE}{\rho E^* J_\omega} \right] \quad (4.57)$$

Bu noktada, serbest titreşim davranışını ($q_z = 0$ ve $m_z = 0$) incelemek amacıyla harmonik titreşim kabulü neticesinde $\hat{w}^0(\hat{z}, \hat{t}) = \hat{W}^0(\hat{z})e^{-i\lambda\hat{t}}$ ve $\hat{\theta}_z(\hat{z}, \hat{t}) = \hat{\Theta}(\hat{z})e^{-i\lambda\hat{t}}$ olarak tanımlanmıştır. Böylece, denklem 4.54 ve 4.55’te verilen hareket denklemleri aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\frac{d^2 \hat{W}^0(\hat{z})}{d\hat{z}^2} + a_1 \frac{d^2 \hat{\Theta}(\hat{z})}{d\hat{z}^2} = -\lambda^2 a_2 \hat{W}^0(\hat{z}) \quad (4.58)$$

$$a_3 \frac{d^2 \widehat{W}^0(\hat{z})}{d\hat{z}^2} + a_4 \frac{d^2 \widehat{\Theta}(\hat{z})}{d\hat{z}^2} - a_5 \frac{d^4 \widehat{\Theta}(\hat{z})}{d\hat{z}^4} = -\lambda^2 a_6 \widehat{\Theta}(\hat{z}) + \lambda^2 a_7 \frac{d^2 \widehat{\Theta}(\hat{z})}{d\hat{z}^2} \quad (4.59)$$

Matematiksel olarak denklem 4.58 ve 4.59’da verilen boyutsuzlaştırılmış hareket denklemleri, bağılaık, sabit katsayılı ve yüksek mertebeden adi diferansiyel denklemler olup çözümleri sonlu elemanlar yöntemiyle sayısal olarak elde edilebilir.

Bu amaçla, çubuğun N_e adet, iki düğüm noktasından oluşan sonlu elemanlardan oluştuğı varsayılmıştır. Çalışmada Ritz sonlu eleman modeli kullanılması tercih edilmiştir. Bu bağlamda, iki düğüm noktası $\hat{z}_e$ ve $\hat{z}_{e+1}$ konumlarında ($\hat{z}_{e+1} - \hat{z}_e = \ell$) bulunan, izole edilmiş keyfi bir sonlu eleman için zayıf formu elde etmek amacıyla, denklem 4.58 ve 4.59 düzenlenirse ve sırasıyla $\tilde{W}^0(\hat{z})$ ve $\tilde{\Theta}(\hat{z})$ ağırlık fonksiyonları ile çarpılırsa aşağıdaki ağırlıklı-integral formlarında yazılabilir (Karimi-Nobandegani ve diğ., 2018; Reddy, 2006):

$$\int_{\hat{z}_e}^{\hat{z}_{e+1}} \tilde{W}^0(\hat{z}) \left[\frac{d^2 \widehat{W}^0(\hat{z})}{d\hat{z}^2} + a_1 \frac{d^2 \widehat{\Theta}(\hat{z})}{d\hat{z}^2} + \lambda^2 a_2 \widehat{W}^0(\hat{z}) \right] d\hat{z} = 0 \quad (4.60)$$

$$\int_{\hat{z}_e}^{\hat{z}_{e+1}} \tilde{\Theta}(\hat{z}) \left[a_3 \frac{d^2 \widehat{W}^0(\hat{z})}{d\hat{z}^2} + a_4 \frac{d^2 \widehat{\Theta}(\hat{z})}{d\hat{z}^2} - a_5 \frac{d^4 \widehat{\Theta}(\hat{z})}{d\hat{z}^4} + \lambda^2 a_6 \widehat{\Theta}(\hat{z}) - \lambda^2 a_7 \frac{d^2 \widehat{\Theta}(\hat{z})}{d\hat{z}^2} \right] d\hat{z} = 0 \quad (4.61)$$

Denklem 4.60 ve 4.61’de verilen ağırlıklı-integral formlarının taraf tarafa toplanmasıyla

$$\begin{aligned} \int_{\hat{z}_e}^{\hat{z}_{e+1}} & \left[\tilde{W}^0(\hat{z}) \frac{d^2 \widehat{W}^0(\hat{z})}{d\hat{z}^2} + a_1 \tilde{W}^0(\hat{z}) \frac{d^2 \widehat{\Theta}(\hat{z})}{d\hat{z}^2} + \lambda^2 a_2 \tilde{W}^0(\hat{z}) \widehat{W}^0(\hat{z}) \right. \\ & + a_3 \tilde{\Theta}(\hat{z}) \frac{d^2 \widehat{W}^0(\hat{z})}{d\hat{z}^2} + a_4 \tilde{\Theta}(\hat{z}) \frac{d^2 \widehat{\Theta}(\hat{z})}{d\hat{z}^2} - a_5 \tilde{\Theta}(\hat{z}) \frac{d^4 \widehat{\Theta}(\hat{z})}{d\hat{z}^4} \\ & \left. + \lambda^2 a_6 \tilde{\Theta}(\hat{z}) \widehat{\Theta}(\hat{z}) - \lambda^2 a_7 \tilde{\Theta}(\hat{z}) \frac{d^2 \widehat{\Theta}(\hat{z})}{d\hat{z}^2} \right] d\hat{z} = 0 \end{aligned} \quad (4.62)$$

elde edilir.

Ardından, kısmi integrallerin uygulanmasının neticesinde zayıf form

$$\begin{aligned}
& \left[\tilde{W}^0(\hat{z}) \left(\frac{d\hat{W}^0(\hat{z})}{d\hat{z}} + a_1 \frac{d\hat{\Theta}(\hat{z})}{d\hat{z}} \right) \right. \\
& \quad + \check{\Theta}(\hat{z}) \left(a_3 \frac{d\hat{W}^0(\hat{z})}{d\hat{z}} + a_4 \frac{d\hat{\Theta}(\hat{z})}{d\hat{z}} - a_5 \frac{d^3\hat{\Theta}(\hat{z})}{d\hat{z}^3} \right. \\
& \quad \left. \left. - \lambda^2 a_7 \frac{d\hat{\Theta}(\hat{z})}{d\hat{z}} \right) + \frac{d\check{\Theta}(\hat{z})}{d\hat{z}} \left(a_5 \frac{d^2\hat{\Theta}(\hat{z})}{d\hat{z}^2} \right) \right] \Big|_{\hat{z}_e}^{\hat{z}_{e+1}} \\
& \quad - \int_{\hat{z}_e}^{\hat{z}_{e+1}} \left[\frac{d\tilde{W}^0(\hat{z})}{d\hat{z}} \frac{d\hat{W}^0(\hat{z})}{d\hat{z}} + a_1 \frac{d\tilde{W}^0(\hat{z})}{d\hat{z}} \frac{d\hat{\Theta}(\hat{z})}{d\hat{z}} \right. \\
& \quad - \lambda^2 a_2 \tilde{W}^0(\hat{z}) \hat{W}^0(\hat{z}) + a_3 \frac{d\check{\Theta}(\hat{z})}{d\hat{z}} \frac{d\hat{W}^0(\hat{z})}{d\hat{z}} \\
& \quad + a_4 \frac{d\check{\Theta}(\hat{z})}{d\hat{z}} \frac{d\hat{\Theta}(\hat{z})}{d\hat{z}} + a_5 \frac{d^2\check{\Theta}(\hat{z})}{d\hat{z}^2} \frac{d^2\hat{\Theta}(\hat{z})}{d\hat{z}^2} - \lambda^2 a_6 \check{\Theta}(\hat{z}) \hat{\Theta}(\hat{z}) \\
& \quad \left. - \lambda^2 a_7 \frac{d\check{\Theta}(\hat{z})}{d\hat{z}} \frac{d\hat{\Theta}(\hat{z})}{d\hat{z}} \right] d\hat{z} = 0
\end{aligned} \tag{4.63}$$

şeklinde elde edilir. Sınır şartlarının incelenmesi neticesinde, $\hat{W}^0$, $\hat{\Theta}$ ve $d\hat{\Theta}(\hat{z})/d\hat{z}$ ifadelerinin birincil değişkenleri oluşturduğu söylenebilir. Böylece, Dirichlet sınır şartları (geometrik, ana sınır şartları) sonlu elemanın her iki ucunda:

$$\hat{W}^0(\hat{z}_e), \hat{\Theta}(\hat{z}_e), \frac{d\hat{\Theta}(\hat{z})}{d\hat{z}} \Big|_{\hat{z}=\hat{z}_e}, \hat{W}^0(\hat{z}_{e+1}), \hat{\Theta}(\hat{z}_{e+1}), \frac{d\hat{\Theta}(\hat{z})}{d\hat{z}} \Big|_{\hat{z}=\hat{z}_{e+1}} \tag{4.64}$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Bu sınır şartları kullanılarak, i . sonlu eleman için eleman düğüm yer değiştirme vektörü aşağıdaki gibi ifade edilmiştir:

$$\mathbf{q}_i^e = [\hat{W}^0(\hat{z}_e) \quad \hat{\Theta}(\hat{z}_e) \quad \hat{\Theta}'(\hat{z}_e) \quad \hat{W}^0(\hat{z}_{e+1}) \quad \hat{\Theta}(\hat{z}_{e+1}) \quad \hat{\Theta}'(\hat{z}_{e+1})]^T \tag{4.65}$$

Burada (') sembolü, $\hat{z}$ koordinatına göre bir defa türevi ifade etmektedir. Benzer şekil de Neumann sınır şartlarının (dinamik, ikincil değişkenler) da

$$Q_1 = \left[\frac{d\hat{W}^0(\hat{z})}{d\hat{z}} + a_1 \frac{d\hat{\Theta}(\hat{z})}{d\hat{z}} \right] \Big|_{\hat{z}=\hat{z}_e} \tag{4.66}$$

$$Q_2 = \left[a_3 \frac{d\hat{W}^0(\hat{z})}{d\hat{z}} + a_4 \frac{d\hat{\Theta}(\hat{z})}{d\hat{z}} - a_5 \frac{d^3\hat{\Theta}(\hat{z})}{d\hat{z}^3} - \lambda^2 a_7 \frac{d\hat{\Theta}(\hat{z})}{d\hat{z}} \right] \Big|_{\hat{z}=\hat{z}_e} \tag{4.67}$$

$$Q_3 = \left[a_5 \frac{d^2 \widehat{\Theta}(\hat{z})}{d\hat{z}^2} \right] \Big|_{\hat{z}=\hat{z}_e} \quad (4.68)$$

$$Q_4 = \left[\frac{d\widehat{W}^0(\hat{z})}{d\hat{z}} + a_1 \frac{d\widehat{\Theta}(\hat{z})}{d\hat{z}} \right] \Big|_{\hat{z}=\hat{z}_{e+1}} \quad (4.69)$$

$$Q_5 = \left[a_3 \frac{d\widehat{W}^0(\hat{z})}{d\hat{z}} + a_4 \frac{d\widehat{\Theta}(\hat{z})}{d\hat{z}} - a_5 \frac{d^3 \widehat{\Theta}(\hat{z})}{d\hat{z}^3} - \lambda^2 a_7 \frac{d\widehat{\Theta}(\hat{z})}{d\hat{z}} \right] \Big|_{\hat{z}=\hat{z}_{e+1}} \quad (4.70)$$

$$Q_6 = \left[a_5 \frac{d^2 \widehat{\Theta}(\hat{z})}{d\hat{z}^2} \right] \Big|_{\hat{z}=\hat{z}_{e+1}} \quad (4.71)$$

biçiminde olmak üzere altı adet olduğu belirtilmelidir. Bu durumda, denklem 4.63'te verilen zayıf form aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\begin{aligned} & \widetilde{W}^0(\hat{z}_{e+1})Q_4 + \check{\Theta}(\hat{z}_{e+1})Q_5 + \check{\Theta}'(\hat{z}_{e+1})Q_6 - \widetilde{W}^0(\hat{z}_e)Q_1 - \check{\Theta}(\hat{z}_e)Q_2 \\ & - \check{\Theta}'(\hat{z}_e)Q_3 \\ & - \int_{\hat{z}_e}^{\hat{z}_{e+1}} \left[\frac{d\widetilde{W}^0(\hat{z})}{d\hat{z}} \frac{d\widehat{W}^0(\hat{z})}{d\hat{z}} + a_1 \frac{d\widetilde{W}^0(\hat{z})}{d\hat{z}} \frac{d\widehat{\Theta}(\hat{z})}{d\hat{z}} \right. \\ & - \lambda^2 a_2 \widetilde{W}^0(\hat{z}) \widehat{W}^0(\hat{z}) + a_3 \frac{d\check{\Theta}(\hat{z})}{d\hat{z}} \frac{d\widehat{W}^0(\hat{z})}{d\hat{z}} \\ & + a_4 \frac{d\check{\Theta}(\hat{z})}{d\hat{z}} \frac{d\widehat{\Theta}(\hat{z})}{d\hat{z}} + a_5 \frac{d^2 \check{\Theta}(\hat{z})}{d\hat{z}^2} \frac{d^2 \widehat{\Theta}(\hat{z})}{d\hat{z}^2} - \lambda^2 a_6 \check{\Theta}(\hat{z}) \widehat{\Theta}(\hat{z}) \\ & \left. - \lambda^2 a_7 \frac{d\check{\Theta}(\hat{z})}{d\hat{z}} \frac{d\widehat{\Theta}(\hat{z})}{d\hat{z}} \right] d\hat{z} = 0 \end{aligned} \quad (4.72)$$

Denklem 4.72'de verilen zayıf formdan hareketle, $\widehat{W}^0(\hat{z})$ için önerilecek yaklaşım fonksiyonu

$$\widetilde{W}^0(\hat{z}) = N_1(\hat{z})\widehat{W}^0(\hat{z}_e) + N_2(\hat{z})\widehat{W}^0(\hat{z}_{e+1}) \quad (4.73)$$

genel yapısında olup, aşağıda verilen 1.derece Lagrange interpolasyon fonksiyonlarından oluşturulmuştur:

$$N_1(\hat{z}) = 1 - \frac{\hat{z}}{\ell} \quad (4.74)$$

$$N_2(\hat{z}) = \frac{\hat{z}}{\ell} \quad (4.75)$$

Benzer şekilde, $\hat{\Theta}(\hat{z})$ için önerilecek yaklaşım fonksiyonu

$$\tilde{\hat{\Theta}}(\hat{z}) = N_3(\hat{z})\hat{\Theta}(\hat{z}_e) + N_4(\hat{z})\hat{\Theta}'(\hat{z}_e) + N_5(\hat{z})\hat{\Theta}(\hat{z}_{e+1}) + N_6(\hat{z})\hat{\Theta}'(\hat{z}_{e+1}) \quad (4.76)$$

genel yapısında olup, aşağıdaki Hermite kübik interpolasyon fonksiyonlarından oluşmaktadır:

$$N_3(\hat{z}) = 1 - 3\left(\frac{\hat{z}}{\ell}\right)^2 + 2\left(\frac{\hat{z}}{\ell}\right)^3 \quad (4.77)$$

$$N_4(\hat{z}) = \ell \left[\frac{\hat{z}}{\ell} - 2\left(\frac{\hat{z}}{\ell}\right)^2 + \left(\frac{\hat{z}}{\ell}\right)^3 \right] \quad (4.78)$$

$$N_5(\hat{z}) = 3\left(\frac{\hat{z}}{\ell}\right)^2 - 2\left(\frac{\hat{z}}{\ell}\right)^3 \quad (4.79)$$

$$N_6(\hat{z}) = \ell \left[\left(\frac{\hat{z}}{\ell}\right)^3 - \left(\frac{\hat{z}}{\ell}\right)^2 \right] \quad (4.80)$$

Bahsedilenler ışığında,

$$\mathbf{N}_{\hat{\mathcal{W}}^0}(\hat{z}) = [N_1(\hat{z}) \quad 0 \quad 0 \quad N_2(\hat{z}) \quad 0 \quad 0] \quad (4.81)$$

$$\mathbf{N}_{\hat{\Theta}}(\hat{z}) = [0 \quad N_3(\hat{z}) \quad N_4(\hat{z}) \quad 0 \quad N_5(\hat{z}) \quad N_6(\hat{z})] \quad (4.82)$$

olarak tanımlanmak üzere aşağıdaki ilişkiler yazılabilir (Karimi-Nobandegani ve diğ., 2018).

$$\hat{\mathcal{W}}^0(\hat{z}) = \mathbf{N}_{\hat{\mathcal{W}}^0}(\hat{z})\mathbf{q}_i^e \quad (4.83)$$

$$\hat{\Theta}(\hat{z}) = \mathbf{N}_{\hat{\Theta}}(\hat{z})\mathbf{q}_i^e \quad (4.84)$$

$$\tilde{\mathcal{W}}^0(\hat{z}) = \mathbf{q}_i^{eT} \mathbf{N}_{\hat{\mathcal{W}}^0}^T(\hat{z}) \quad (4.85)$$

$$\check{\Theta}(\hat{z}) = \mathbf{q}_i^{eT} \mathbf{N}_{\hat{\Theta}}^T(\hat{z}) \quad (4.86)$$

Bu ifadelerin denklem 4.72'deki zayıf forma yerleştirilmesiyle, çubuğa ait özdeğer problemi:

$$\sum_{i=1}^{N_e} \mathbf{q}_i^{eT} [\mathbf{K}_i^e - \lambda^2 \mathbf{M}_i^e] \mathbf{q}_i^e = \mathbf{0} \quad (4.87)$$

olarak ifade edilir.

Denklem 4.87'de verilen özdeğer probleminin çözümü neticesinde elde edilen özdeğerlerin karekökleri λ , ilgili yapının boyutsuz doğal frekanslarına karşılık gelmektedir.

Burada, $\mathbf{K}_i^e$ ve $\mathbf{M}_i^e$ sırasıyla eleman rijitlik ve eleman kütle matrisleri olup

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_i^e = \int_0^\ell & \left[\frac{d\mathbf{N}_{\hat{W}^0}^T(\hat{z})}{d\hat{z}} \frac{d\mathbf{N}_{\hat{W}^0}(\hat{z})}{d\hat{z}} + a_1 \frac{d\mathbf{N}_{\hat{W}^0}^T(\hat{z})}{d\hat{z}} \frac{d\mathbf{N}_{\hat{\Theta}}(\hat{z})}{d\hat{z}} \right. \\ & + a_3 \frac{d\mathbf{N}_{\hat{\Theta}}^T(\hat{z})}{d\hat{z}} \frac{d\mathbf{N}_{\hat{W}^0}(\hat{z})}{d\hat{z}} + a_4 \frac{d\mathbf{N}_{\hat{\Theta}}^T(\hat{z})}{d\hat{z}} \frac{d\mathbf{N}_{\hat{\Theta}}(\hat{z})}{d\hat{z}} \\ & \left. + a_5 \frac{d^2\mathbf{N}_{\hat{\Theta}}^T(\hat{z})}{d\hat{z}^2} \frac{d^2\mathbf{N}_{\hat{\Theta}}(\hat{z})}{d\hat{z}^2} \right] d\hat{z} \end{aligned} \quad (4.88)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_i^e = \int_0^\ell & \left[a_2 \mathbf{N}_{\hat{W}^0}^T(\hat{z}) \mathbf{N}_{\hat{W}^0}(\hat{z}) + a_6 \mathbf{N}_{\hat{\Theta}}^T(\hat{z}) \mathbf{N}_{\hat{\Theta}}(\hat{z}) \right. \\ & \left. + a_7 \frac{d\mathbf{N}_{\hat{\Theta}}^T(\hat{z})}{d\hat{z}} \frac{d\mathbf{N}_{\hat{\Theta}}(\hat{z})}{d\hat{z}} \right] d\hat{z} \end{aligned} \quad (4.89)$$

şeklinde ifade edilebilir ve açık olarak denklem 4.90 ve 4.91'deki şekilde tanımlanabilir:

$$\mathbf{K}_i^e = \begin{bmatrix} \frac{1}{\ell} & \frac{a_1}{\ell} & 0 & -\frac{1}{\ell} & -\frac{a_1}{\ell} & 0 \\ \frac{a_3}{\ell} & \frac{12a_5}{\ell^3} + \frac{6a_4}{5\ell} & \frac{a_4}{10} + \frac{6a_5}{\ell^2} & -\frac{a_3}{\ell} & -\frac{12a_5}{\ell^3} - \frac{6a_4}{5\ell} & \frac{a_4}{10} + \frac{6a_5}{\ell^2} \\ 0 & \frac{a_4}{10} + \frac{6a_5}{\ell^2} & \frac{4a_5}{\ell} + \frac{2a_4\ell}{15} & 0 & -\frac{a_4}{10} - \frac{6a_5}{\ell^2} & \frac{2a_5}{\ell} - \frac{a_4\ell}{30} \\ -\frac{1}{\ell} & -\frac{a_1}{\ell} & 0 & \frac{1}{\ell} & \frac{a_1}{\ell} & 0 \\ -\frac{a_3}{\ell} & -\frac{12a_5}{\ell^3} - \frac{6a_4}{5\ell} & -\frac{a_4}{10} - \frac{6a_5}{\ell^2} & \frac{a_3}{\ell} & \frac{12a_5}{\ell^3} + \frac{6a_4}{5\ell} & -\frac{a_4}{10} - \frac{6a_5}{\ell^2} \\ 0 & \frac{a_4}{10} + \frac{6a_5}{\ell^2} & \frac{2a_5}{\ell} - \frac{a_4\ell}{30} & 0 & -\frac{a_4}{10} - \frac{6a_5}{\ell^2} & \frac{4a_5}{\ell} + \frac{2a_4\ell}{15} \end{bmatrix} \quad (4.90)$$

$$\mathbf{M}_i^e = \begin{bmatrix} \frac{a_2\ell}{3} & 0 & 0 & \frac{a_2\ell}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6a_7}{5\ell} + \frac{13a_6\ell}{35} & \frac{a_7}{10} + \frac{11a_6\ell^2}{210} & 0 & -\frac{6a_7}{5\ell} + \frac{9a_6\ell}{70} & \frac{a_7}{10} - \frac{13a_6\ell^2}{420} \\ 0 & \frac{a_7}{10} + \frac{11a_6\ell^2}{210} & \frac{2a_7\ell}{15} + \frac{a_6\ell^3}{105} & 0 & -\frac{a_7}{10} + \frac{13a_6\ell^2}{420} & -\frac{a_7\ell}{30} - \frac{a_6\ell^3}{140} \\ \frac{a_2\ell}{6} & 0 & 0 & \frac{a_2\ell}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6a_7}{5\ell} + \frac{9a_6\ell}{70} & -\frac{a_7}{10} + \frac{13a_6\ell^2}{420} & 0 & \frac{6a_7}{5\ell} + \frac{13a_6\ell}{35} & -\frac{a_7}{10} - \frac{11a_6\ell^2}{210} \\ 0 & \frac{a_7}{10} - \frac{13a_6\ell^2}{420} & -\frac{a_7\ell}{30} - \frac{a_6\ell^3}{140} & 0 & -\frac{a_7}{10} - \frac{11a_6\ell^2}{210} & \frac{2a_7\ell}{15} + \frac{a_6\ell^3}{105} \end{bmatrix} \quad (4.91)$$

5. SAYISAL İNCELEMELER VE TARTIŞMA

5.1 Eğilme-eğilme Bağlaşık Statik Davranışa Ait Sayısal İncelemeler ve Tartışma

5.1.1 Ankastre-serbest sınır şartlarına sahip önburulmalı çubuğa ait bazı kesin analitik ifadeler

Kısım 4.1.2’de sunulan çözüm yöntemi, ankastre-serbest sınır şartlarına sahip ve serbest ucundan $F_\eta(L)$ ve $F_\xi(L)$ tekil yüklerine maruz önburulmalı bir çubuğun tarafsız ekseninin $\bar{u}^0(z)$ ve $\bar{v}^0(z)$ doğrultularındaki ötelenmelerine ait kesin analitik ilişkilerin elde edilmesine olanak sağlamaktadır. Denklem B.5.1 ve B.5.2, serbest ucundan tekil kuvvete maruz önburulmalı bir çubuğun tarafsız ekseninin kesin analitik ötelenmelerini sunmaktadır. Bu noktada belirtmekte fayda vardır ki, tekil uç yüklemeleri olan $F_\eta(L)$ ve $F_\xi(L)$ kullanılarak serbest uçtan etkiyen uzayda sabit tekil kuvvet de aşağıdaki ilişkiler yardımıyla modellenenebilir:

$$\left. \begin{aligned} F_\eta(L) &= \cos(\beta L) F_x(L) + \sin(\beta L) F_y(L) \\ F_\xi(L) &= -\sin(\beta L) F_x(L) + \cos(\beta L) F_y(L) \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

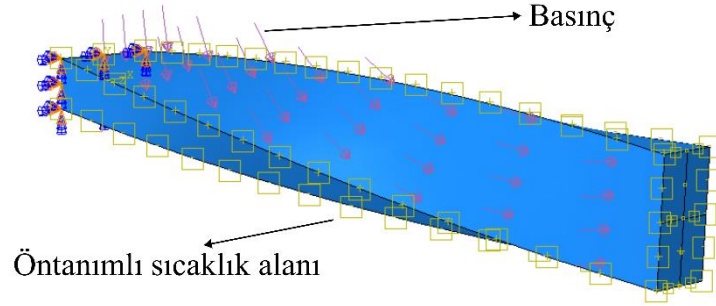
Burada, $F_x(L) = 0$ ve $F_y(L) \neq 0$ yükleme durumu “uzay-sabit düşey uç kuvveti” olarak adlandırılmıştır. Benzer şekilde, yayılı yüklerin varlığında, kesin analitik ifade denklem 4.16 kullanılarak elde edilebilir. Örneğin, ξ doğrultusunda etkiyen üniform yayılı yükün (q_ξ) varlığında, çubuğun tarafsız ekseninin kesin analitik ötelenme ifadeleri denklem B.5.3 ve B.5.4’de sunulmuştur. Bu yükleme senaryosu, “cisim-sabit üniform yayılı kuvvet” durumu olarak adlandırılmıştır. Son olarak, elde edilen $\bar{u}^0$ ve $\bar{v}^0$ ötelenme değerleri, sabit koordinat sistemindeki ötelenmelere, u^0 ve v^0 , denklem 3.42 kullanılarak dönüştürülebilir.

5.1.2 Yakınsama çalışması ve matematik modelin doğrulanması

Kısım 4.1.1’de bahsedildiği üzere denklem 4.1, problemin sabit koordinatlarda formüle edilmesinden dolayı kesin olarak çözülememektedir. Bu durumda çözüm,

Volterra'nın çarpımsal integrali kullanılarak sayısal olarak elde edilmiştir. Burada, yaklaşık asal matrisin $\tilde{Y}(z, z_o)$ hesaplanmasında kullanılan altbölge sayısının (n) ve sayısal integrasyonda kullanılan bölüm sayısının (m) belirlenmesi için bir yakınsaklık çalışması gerçekleştirilmiştir. Yakınsama çalışmasında, hesaplanan sayısal sonuçlar, kesin analitik ifadelerden elde edilen sonuçlarla ve üç boyutlu sonlu eleman analizi sonuçlarıyla karşılaştırılmıştır. Bu bağlamda, cisim-sabit üniform yayılı kuvvete maruz ($q_\xi = 1000 \text{ N/m}$), 90° toplam önburulma açısına sahip, fonksiyonel olarak derecelendirilmiş ($p = 0.5$), düzensiz gözenek dağılımına sahip ($\alpha = 0.15$) ve ankastre-serbest sınır şartlarına sahip bir çubuğun analizi gerçekleştirilmiştir. Çubuk malzemesinin, $\xi = 0$ konumunda tamamen paslanmaz çelikten, (SUS304 $E_m = 201.04 \text{ GPa}$), ve $\xi = \pm h/2$ konumlarında tamamen silikon nitritten (Si_3N_4 , $E_c = 348.43 \text{ GPa}$) oluştuğu varsayılmıştır. Poisson oranı 0.28 olarak alınmıştır. Çubuk geometrisi, $L = 0.15 \text{ m}$, $h/b = 0.6$ ve $L/h = 15$ parametrelerine göre modellenmiştir. Sonlu eleman modeli, 1200 adet C3D20 20 düğüm noktalı kuadratik hekzahedral eleman kullanılarak oluşturulmuştur. Cisim-sabit üniform yayılı kuvvet ise basınç olarak modellenmiştir. Homojen olmayan malzeme özellikleri sonlu eleman modeline, Rousseau ve Tippur tarafından önerilen bir yaklaşım kullanılarak dahil edilmiştir (Rousseau ve Tippur, 2000). Bu yaklaşımda, malzeme özellikleri sıcaklığın fonksiyonu olarak tanımlanmaktadır. Böylece, düğüm sıcaklıklarının interpolate edilmesiyle sürekli olarak değişen karakterdeki malzeme özellikleri elde edilebilmektedir (Rousseau ve Tippur, 2000; Tilbrook ve diğ., 2005). Bu çalışmada aynı yaklaşım, kalınlık doğrultusunda fonksiyonel olarak derecelendirilmiş ve gözenekli önburulmalı çubuğa uygulanmıştır. Bu bağlamda, ξ doğrultusunda değişen öntanımlı sıcaklık alanı tanımlanmıştır ve ısı gerilmelerin oluşumunun engellenmesinin garanti edilmesi için ısı genleşme katsayısı 0 olarak alınmıştır. Yükleme durumunu, öntanımlı sıcaklık alanını ve sınır şartlarını içeren sonlu eleman modelinin görseli, Şekil 5.1'de verilmiştir. Sonuç seti olarak ise x ve y doğrultularındaki uç yer sapmaları, $u^0(L)$ and $v^0(L)$, kullanılmıştır. Çizelge 5.1, farklı altbölge (n) ve bölüm (m) sayıları için sabit xyz koordinat sistemine göre yapılan formülasyondan alınan sonuçların, $\eta\xi z$ koordinat sistemine göre yapılan formülasyondan ve sonlu eleman analizinden elde edilen sonuçlarla karşılaştırmasını sunmaktadır. Görüldüğü üzere, sayısal sonuçlar yakınsamaktadır ve yaklaşık asal matrisi hesaplamak için çubuğu en az 500 altbölgeye ayırmak ve sayısal integrasyonda

da en az 30 bölüm kullanmak uygundur. Bu parametreler kullanılarak elde edilen sayısal sonuçların, kesin çözüm ve sonlu eleman analizi sonucuyla uyumlu olduğu söylenebilir.



Şekil 5.1 : Yükleme durumunu ve sınır şartlarını içeren sonlu eleman modeli.

Çizelge 5.1 : Önburulmalı fonksiyonel olarak derecelendirilmiş ve gözenekli bir ankastre-serbest çubuk için bir boyutlu modele dair yakınsama çalışması.

n	m	u^0 [mm]	v^0 [mm]
10	6	-0.066766	0.070530
	15	-0.066830	0.070500
	30	-0.066832	0.070499
	60	-0.066832	0.070499
100	6	-0.068065	0.070342
	15	-0.068130	0.070324
	30	-0.068132	0.070323
	60	-0.068132	0.070323
500	6	-0.068147	0.070288
	15	-0.068212	0.070271
	30	-0.068213	0.070271
	60	-0.068213	0.070271
1000	6	-0.068156	0.070281
	15	-0.068222	0.070264
	30	-0.068223	0.070264
	60	-0.068223	0.070264
Kesin çözüm		-0.068233	0.070257
ABAQUS		-0.068050	0.070466

Çizelge 5.1’de referans olarak kullanılan üç boyutlu sonlu eleman analizi sonucunun elde edilmesine yönelik gerçekleştirilen yakınsama çalışması Çizelge C.1’de sunulmuştur. Çizelge 5.2 ve Çizelge 5.3, sırasıyla uzay-sabit düşey uç kuvveti ve cisim-sabit üniform yayılı kuvvet yükleme durumlarında, farklı uzunluk-kalınlık oranı (L/h), en-boy oranı (h/b) ve toplam önburulma açısı (φ) değerleri için üç boyutlu sonlu eleman modelinden elde edilen sonuçların, bu çalışmada sunulan bir boyutlu modelden elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmasını sunmaktadır. Burada U_{SEA}^0 ve V_{SEA}^0 ,

sonlu eleman modelinden elde edilen sırasıyla x ve y doğrultularındaki boyutsuz tarafsız eksen ötelenmelerine karşılık gelmektedir. U_I^0 ve V_I^0 sırasıyla, sabit xyz koordinat sistemine göre geliştirilen bir boyutlu formülasyondan elde edilmiş x ve y doğrultularındaki boyutsuz tarafsız eksen ötelenmelerini ifade etmektedir.

Çizelge 5.2 : Analitik ve sonlu eleman sonuçlarının karşılaştırılması ($p = 0.5$, $\alpha = 0.15$, düzensiz gözenek dağılımı, uzay-sabit düşey uç kuvveti).

$\frac{L}{h}$	φ	$h/b = 0.2$		$h/b = 0.5$		$h/b = 0.8$	
		U_{II}^0/U_{SEA}^0	V_{II}^0/V_{SEA}^0	U_{II}^0/U_{SEA}^0	V_{II}^0/V_{SEA}^0	U_{II}^0/U_{SEA}^0	V_{II}^0/V_{SEA}^0
5	0°	-	1.03540	-	1.01774	-	1.01109
	45°	0.94217	0.94462	1.00206	1.00279	1.00383	1.00538
	90°	0.74318	0.76598	0.95091	0.96388	0.98076	0.98968
	180	0.47530	0.49937	0.81394	0.85699	0.91429	0.93924
15	0°	-	1.02055	-	1.00702	-	1.00428
	45°	0.99992	1.00897	1.00020	1.00543	0.99765	1.00368
	90°	0.96394	0.97699	0.99402	1.00085	0.99519	1.00190
	180	0.85473	0.87527	0.97175	0.98381	0.98677	0.99468
60	0°	-	1.00575	-	1.00175	-	1.00104
	45°	1.00016	1.00528	0.99921	1.00172	0.99683	1.00107
	90°	0.99761	1.00376	0.99907	1.00166	0.99535	1.00153
	180	0.98902	0.99742	0.99744	1.00108	0.99504	1.00144

Çizelge 5.3 : Analitik ve sonlu eleman sonuçlarının karşılaştırılması ($p = 0.5$, $\alpha = 0.15$, düzensiz gözenek dağılımı, cisim-sabit üniform yayılı kuvvet).

$\frac{L}{h}$	φ	$h/b = 0.2$		$h/b = 0.5$		$h/b = 0.8$	
		U_{II}^0/U_{SEA}^0	V_{II}^0/V_{SEA}^0	U_{II}^0/U_{SEA}^0	V_{II}^0/V_{SEA}^0	U_{II}^0/U_{SEA}^0	V_{II}^0/V_{SEA}^0
5	0°	-	1.04020	-	1.01860	-	1.01043
	45°	0.98301	0.90781	1.04061	0.99342	1.03076	0.99856
	90°	0.70093	0.60886	0.98548	0.90740	1.00931	0.94976
	180	0.13229	-0.92107	0.74849	1.09829	0.91864	1.01378
15	0°	-	1.02526	-	1.00871	-	1.00520
	45°	1.00486	1.00699	1.00764	1.00554	1.00721	1.00379
	90°	0.95266	0.94757	1.00088	0.99370	1.00467	0.99752
	180	0.60232	1.08705	0.96394	1.01286	0.99290	1.00406
60	0°	-	1.00751	-	1.00233	-	1.00138
	45°	1.00087	1.00609	1.00151	1.00208	1.00199	1.00126
	90°	0.99736	1.00129	1.00121	1.00103	1.00226	1.00044
	180	0.96305	1.01496	0.99964	1.00385	1.00208	1.00225

Tarafsız eksen ötelenmelerinin boyutsuzlaştırılması, hesaplanan sonuçların, homojen ve önburulmasız bir Euler-Bernoulli çubuğunun analitik olarak hesaplanmış uç ötelenmesine oranlanmasıyla gerçekleşmiştir. Bu durumda, U_I^0/U_{SEA}^0 ve V_I^0/V_{SEA}^0 , sabit xyz koordinat sistemine göre geliştirilen bir boyutlu modelden elde edilmiş boyutsuz tarafsız eksen ötelenmelerinin, boyutsuz sonlu eleman sonuçlarına oranlarını

ifade etmektedir. Ayrıca, U_{II}^0 ve V_{II}^0 sırasıyla, hareketli $\eta\xi z$ koordinat sistemine göre geliştirilen bir boyutlu formülasyondan kesin analitik olarak hesaplanmış x ve y doğrultularındaki boyutsuz tarafsız eksen ötelenmelerini ifade etmektedir. Böylece U_{II}^0/U_{SEA}^0 ve V_{II}^0/V_{SEA}^0 , hareketli $\eta\xi z$ koordinat sistemine göre yapılan formülasyondan kesin analitik olarak hesaplanmış boyutsuz tarafsız eksen ötelenmelerinin, boyutsuz sonlu eleman sonuçlarına oranlarını ifade etmektedir. Çizelge 5.2 ve Çizelge 5.3'ten hareketle, $\varphi \leq 90^\circ$, $L/h \geq 15$ ve $h/b \geq 0.5$ parametrelerine sahip önburulmalı çubuklar için kullanılan bir boyutlu modelin, sonlu eleman analizi sonuçlarıyla uyumlu sonuçlar verdiği söylenebilir. Çizelge 5.2 ve 5.3'te referans olarak kullanılan üç boyutlu sonlu eleman modellerinden elde edilen sonuçlar, bir dizi yakınsama çalışması neticesinde elde edilmiştir. Bu bağlamda, üç boyutlu sonlu eleman analizlerinde kullanılan eleman sayısının belirlenmesini amaçlayan yakınsama çalışması Çizelge C.2-C.7'de sunulmuştur.

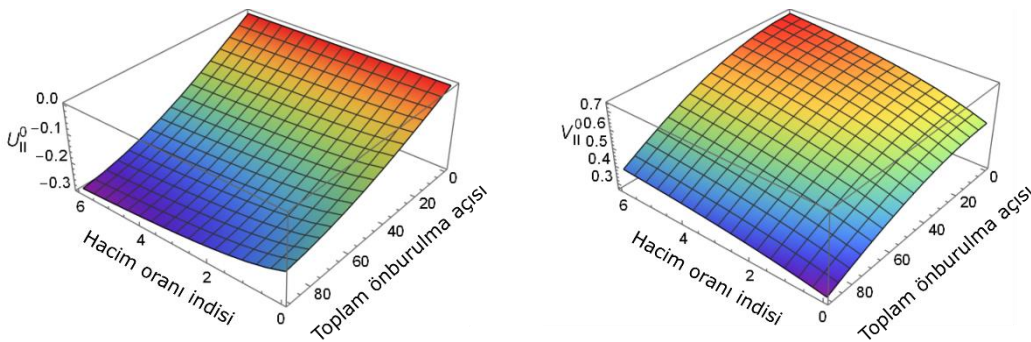
Ayrıca sayısal çözüm yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların, kesin analitik çözüm yöntemi kullanılarak elde edilenlerle uyumu Çizelge 5.4'te sunulmuştur.

Çizelge 5.4 : Sayısal ve kesin analitik çözüm yöntemlerinin karşılaştırılması ($\varphi = 90^\circ$, $p = 0.5$, $\alpha = 0.15$, düzensiz gözenek dağılımı).

Yükleme	L/h	h/b	U_I^0/U_{II}^0	V_I^0/V_{II}^0
Uzay-sabit düşey uç kuvveti	5	0.2	0.99663	1.00100
		0.5	0.99663	1.00072
		0.8	0.99663	1.00026
	15	0.2	0.99663	1.00104
		0.5	0.99663	1.00074
		0.8	0.99663	1.00027
	60	0.2	0.99663	1.00104
		0.5	0.99663	1.00075
		0.8	0.99663	1.00027
Cisim-sabit üniform yayılı kuvvet	5	0.2	0.99813	0.99989
		0.5	0.99938	1.00008
		0.8	1.00028	1.00053
	15	0.2	0.99788	0.99989
		0.5	0.99932	1.00008
		0.8	1.00029	1.00055
	60	0.2	0.99785	0.99989
		0.5	0.99932	1.00008
		0.8	1.00029	1.00055

5.1.3 Hacim oranı indisinin ve gözeneklilik oranının uç yer değıştirmeleri üzerindeki etkisi

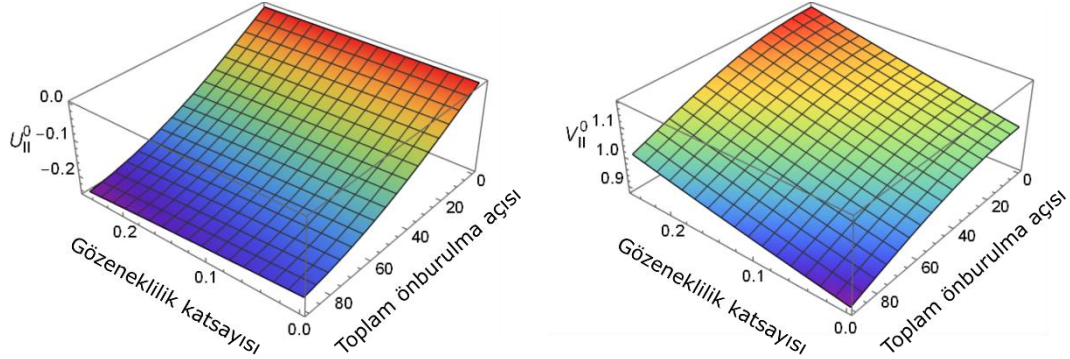
Bu bölümde, uzay-sabit düşey uç kuvveti ve cisim-sabit üniform yayılı kuvvet yükleme senaryoları kapsamında hacim oranı indisinin ve gözeneklilik oranının, tarafsız eksen uç ötelenmeleri üzerindeki etkisi incelenmiştir. Malzeme derecelendirmesinin ve gözenekliliğin etkisi matematiksel modele rijitlik katsayıları üzerinden doğrudan dahil edilebileceğinden dolayı, bu incelemelerde, denklem B.5.1-B.5.4'te verilen kesin analitik ifadeler kullanılabilmektedir. Sonuç seti olarak, x ve y doğrultularındaki boyutsuz uç ötelenmeleri seçilmiştir, U_{II}^0 ve V_{II}^0 . Ayrıca, çubuk malzemesinin $\xi = 0$ konumunda tamamen paslanmaz çelik, ve $\xi = \pm h/2$ konumlarında tamamen silikon nitrit olduğu varsayılmıştır. Denklem 3.72'den de görülebileceği üzere, hacim oranı indisinin artan değerleri, rijitlik katsayılarında bir düşüşe sebep olmaktadır. Benzer şekilde, kesit üzerinde artan gözeneklilik, dağılım karakterinden bağımsız olarak kesit dayanımında bir zayıflamaya yol açmakta ve dolayısıyla rijitlik katsayılarında bir düşüşe sebep olmaktadır. Bu bağlamda, bu iki parametrenin yapısal cevap üzerindeki etkisinin ve toplam önburulma açısıyla olan değışiminin benzer nitelikte olacağı söylenebilir. Dolayısıyla, bu parametrelere yönelik tartışmalar her iki yükleme senaryosu için beraber yapılabilir. Şekil 5.2 ve 5.3'te, cisim-sabit üniform yayılı kuvvet yükleme senaryosu için sırasıyla hacim oranı indisinin ve gözeneklilik katsayısının farklı toplam önburulma açılarında tarafsız eksenin uç ötelenmeleri üzerindeki etkileri sunulmuştur.



Şekil 5.2 : Hacim oranı indisinin farklı toplam önburulma açılarında tarafsız eksenin uç ötelenmeleri üzerindeki etkisi ($L/h = 15$, $h/b = 0.5$, $\alpha = 0.1$, düzenli gözenek dağılımı. Cisim-sabit üniform yayılı kuvvet yükleme senaryosu).

Görülebileceği üzere, artan hacim oranı indisii fiziksel olarak yapıda metal malzeme miktarının artışına karşılık gelmesi sebebiyle boyutsuz yanal (U_{II}^0) ve düşey (V_{II}^0) uç

ötelenme değerlerinde daha esnek bir davranış gözlenmektedir. Benzer şekilde, artan gözeneklilik katsayısı fiziksel olarak kesitin zayıflaması anlamına geldiği için, ötelenme değerleri her iki doğrultuda artmaktadır.

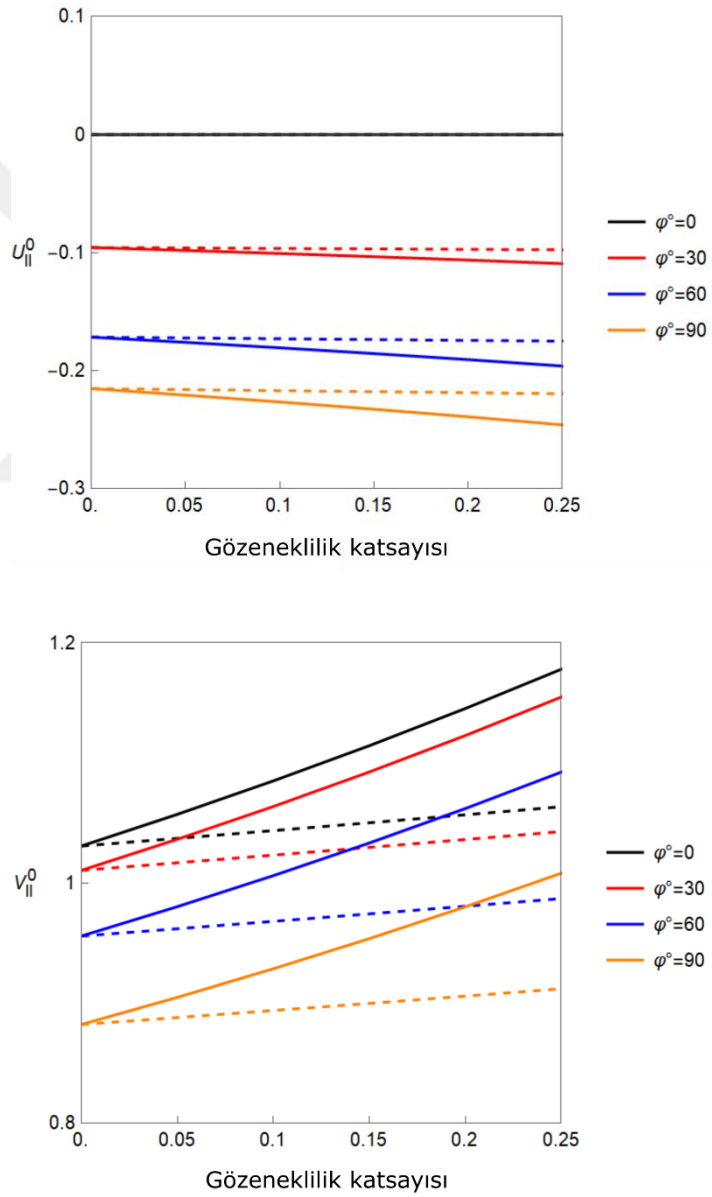


Şekil 5.3 : Gözeneklilik katsayısının farklı toplam önburulma açılarında tarafsız eksenin uç ötelenmeleri üzerindeki etkisi ($L/h = 15$, $h/b = 0.5$, $p = 0.2$, düzenli gözenek dağılımı. Cisim-sabit üniform yayılı kuvvet yükleme senaryosu).

Ek olarak, toplam önburulma açısı 90° 'ye doğru arttıkça, düşey sapma değerleri azalırken, yanal ötelenme değerleri artmaktadır. Ayrıca, toplam önburulma açısı arttıkça, hacim oranı indisinin ve gözeneklilik oranının yanal ötelenmeler üzerinde daha etkili hale geldiği söylenebilir. Ayrıca, gözenekliliğin kesit üzerindeki dağılım karakteri, önburulmalı çubukların statik analizinde gözönünde bulundurulması gereken bir diğer noktadır. Şekil 5.4, uzay-sabit düşey uç kuvvetine maruz önburulmalı bir çubukta gözeneklilik oranının yanal ve düşey uç ötelenmeleri üzerindeki etkisini göstermektedir. Görüldüğü üzere, düzensiz gözenek dağılımında gözeneklerin kesidin orta bölümünde yoğunlaşması sebebiyle yanal ve düşey doğrultularda uç ötelenmeleri daha düşük değerlerde olmaktadır ve yapının gözeneklilik oranının değişimine olan hassasiyeti azalmaktadır.

Yukarıda yapılan bu parametrik incelenmelerin ardından değinilmesi gereken bir diğer husus da tasarımda önburulmalandırma kavramının kullanımıdır. Pratikte, önburulmasız bir çubuğun düşey sapmasını kontrol etmek için genelde ya kesit boyutları değiştirilmektedir ya da farklı bir malzeme kullanılmaktadır. Ancak, yukarıda yapılan incelemelerden de görülebileceği üzere, mümkün olduğu yerlerde çubuğun önburulmalandırılması, ilgili yapının düşey doğrultudaki sapmasını kontrol etmek için değerlendirilebilecek bir diğer tasarım yaklaşımıdır. Bu durumda tabii ki yanal doğrultuda bir ek sapma oluşmaktadır ve bu durumun ilgili uygulama için uygunluğu tasarımcı tarafından dikkatle değerlendirilmelidir. Ayrıca, aynı anda düşey

ve yanal doğrultularda ötelenme oluşturmayı hedefleyen özel tasarımlarda, önburulmalı çubuk kullanımı bir alternatif olarak değerlendirilebilir. Bu bağlamda, kesin analitik ifadelerin kullanımının ve yukarıda sunulan parametrik incelemelerin daha gelişmiş çalışmalara bir temel oluşturabileceği söylenebilir. Örneğin, yapı içerisindeki malzeme ve gözeneklilik dağılımı manipüle edilerek önburulmalı çubukların statik davranışları kontrol edilebilir. Bu bağlamda, hacim oranı indisinde ve gözeneklilik oranında beraber bir artışın düzenli gözenek dağılım durumunda en esnek kesit durumunu vereceği söylenebilir.



Şekil 5.4 : Gözeneklilik katsayısının tarafsız eksenin uç ötelenmeleri üzerindeki etkisi ($L/h = 15$, $h/b = 0.5$, $p = 0.2$. Uzun-sabit düşey uç kuvveti senaryosu. Kesikli çizgiler düzensiz gözenek dağılımını temsil etmektedir.).

Çizelge 5.5 ve Çizelge 5.6, sırasıyla uzay-sabit düşey uç kuvveti ve cisim-sabit üniform yayılı kuvvet senaryoları için sayısal sonuçları sunmaktadır. Bu çizelgelerde parantez içinde verilen sayısal değerler, U_{II}^0/U_{FE}^0 ve V_{II}^0/V_{FE}^0 , bir boyutlu model kullanılarak analitik olarak hesaplanmış sonuçların sonlu elemanlar sonuçlarına oranını temsil etmektedir.

5.2 Eğilme-eğilme Bağlaşık Dinamik Davranışa Ait Sayısal İncelemeler ve Tartışma

5.2.1 HDKY için yakınsama çalışması ve matematiksel modelin doğrulanması

Öncelikle, harmonik diferansiyel kuadratür yönteminde (HDKY) kullanılacak olan minimum düğüm noktası sayısının belirlenmesi amacıyla bir yakınsama çalışması gerçekleştirilmiştir. Aynı zamanda, geliştirilen bilgisayar kodunun da sınanmasına hizmet edecek olan bu çalışmada, önburulmalı ($\varphi = \pi/4$), homojen ($p = 0$) ve ankastre-serbest sınır şartlarına sahip bir çubuğun doğal frekansları hesaplanmıştır ve elde edilen sonuçlar Yardımoğlu ve Yıldırım (2004) ve Subrahmanyam ve diğ. (1981) ile karşılaştırılmıştır. İncelenen çubuğun geometrik özellikleri $L = 15.24$ cm, $b = 2.54$ cm, $h = 0.17272$ cm, $k = 0.847458$ olup, malzeme özellikleri $E = 206.85$ GPa, $G = 82.74$ GPa, $\rho = 7857.6$ kg/m³ olarak varsayılmıştır (Yardimoglu ve Yildirim, 2004).

Çizelge 5.7, farklı düğüm noktası sayıları (N) için hesaplanan ilk dört eğilme-eğilme bağlaşık modlarına ait doğal frekans değerlerini göstermektedir. Sonuçlar, Hertz cinsinden sunulmuştur. Görülebileceği üzere, kullanılan düğüm noktası sayısı arttıkça ilk dört eğilme-eğilme bağlaşık modlarına ait doğal frekans değerleri yakınsamakta ve 13 düğüm noktasından sonra neredeyse sabit kalmaktadır. Bu sebeple, bu bölümde gerçekleştirilen HDKY ile gerçekleştirilen doğal frekans analizlerinde çubuk boyunun 13 düğüm noktası kullanılarak ayrıklaştırılmasına karar verilmiştir.

Ayrıca, HDKY kullanılarak hesaplanan sonuçların Yardımoğlu ve Yıldırım (2004) ve sonlu eleman analizi sonuçlarıyla tutarlı olduğu gözlenmiştir. Karşılaştırma için geliştirilen sonlu eleman modeli, ABAQUS sonlu elemanlar paket programında 13872 adet C3D20 20 düğüm noktalı kuadratik hekzahedral eleman kullanılarak oluşturulmuştur. Üç boyutlu sonlu eleman modelinde kullanılan eleman sayısının belirlenmesine yönelik yakınsama çalışması Çizelge C.8’de sunulmuştur.

Çizelge 5.5 : Hacim oranı indisinin uç ötelenmeleri üzerindeki etkisi ($L/h = 15$, $h/b = 0.5$, $\alpha = 0.2$, uzay-sabit düşey uç kuvveti).

φ	Gözeneklilik	$p = 0$		$p = 0.5$		$p = 2$	
		U_{II}^0 (U_{II}^0/U_{SEA}^0)	V_{II}^0 (V_{II}^0/V_{SEA}^0)	U_{II}^0 (U_{II}^0/U_{SEA}^0)	V_{II}^0 (V_{II}^0/V_{SEA}^0)	U_{II}^0 (U_{II}^0/U_{SEA}^0)	V_{II}^0 (V_{II}^0/V_{SEA}^0)
0°	Gözeneksiz	0.00000	1.00341	0.00000	1.06829	0.00000	1.20842
		(-)	(1.00776)	(-)	(1.00712)	(-)	(1.00783)
	Düzenli	0.00000	1.11490	0.00000	1.18699	0.00000	1.34269
		(-)	(1.00776)	(-)	(1.00712)	(-)	(1.00784)
	Düzensiz	0.00000	1.02923	0.00000	1.09458	0.00000	1.23629
		(-)	(1.00764)	(-)	(1.00702)	(-)	(1.00779)
30°	Gözeneksiz	-0.09466	0.98338	-0.09759	1.04764	-0.10797	1.18557
		(1.00199)	(1.00706)	(1.00139)	(1.00638)	(1.00284)	(1.00710)
	Düzenli	-0.10517	1.09264	-0.10844	1.16404	-0.11996	1.31730
		(1.00199)	(1.00706)	(1.00139)	(1.00638)	(1.00283)	(1.00711)
	Düzensiz	-0.09623	1.00887	-0.09909	1.07361	-0.10938	1.21314
		(1.00195)	(1.00694)	(1.00142)	(1.00628)	(1.00294)	(1.00706)
60°	Gözeneksiz	-0.16978	0.92925	-0.17505	0.99183	-0.19366	1.12383
		(0.99915)	(1.00504)	(0.99856)	(1.00430)	(1.00000)	(1.00495)
	Düzenli	-0.18865	1.03250	-0.19450	1.10203	-0.21518	1.24870
		(0.99915)	(1.00504)	(0.99856)	(1.00429)	(1.00000)	(1.00496)
	Düzensiz	-0.17261	0.95384	-0.17773	1.01695	-0.19620	1.15060
		(0.99911)	(1.00490)	(0.99859)	(1.00417)	(1.00013)	(1.00489)
90°	Gözeneksiz	-0.21297	0.85639	-0.21958	0.91670	-0.24292	1.04072
		(0.99452)	(1.00187)	(0.99398)	(1.00099)	(0.99536)	(1.00150)
	Düzenli	-0.23663	0.95154	-0.24398	1.01856	-0.26991	1.15635
		(0.99452)	(1.00187)	(0.99398)	(1.00099)	(0.99536)	(1.00150)
	Düzensiz	-0.21651	0.87976	-0.22294	0.94067	-0.24610	1.06639
		(0.99448)	(1.00168)	(0.99403)	(1.00080)	(0.99551)	(1.00137)

Çizelge 5.6 : Hacim oranı indisinin uç ötelenmeleri üzerindeki etkisi ($L/h = 15$, $h/b = 0.5$, $\alpha = 0.2$, cisim-sabit üniform yayılı kuvvet).

φ	Gözeneklilik	$p = 0$		$p = 0.5$		$p = 2$	
		U_{II}^0 (U_{II}^0/U_{SEA}^0)	V_{II}^0 (V_{II}^0/V_{SEA}^0)	U_{II}^0 (U_{II}^0/U_{SEA}^0)	V_{II}^0 (V_{II}^0/V_{SEA}^0)	U_{II}^0 (U_{II}^0/U_{SEA}^0)	V_{II}^0 (V_{II}^0/V_{SEA}^0)
0°	Gözeneksiz	0.00000	1.00455	0.00000	1.06962	0.00000	1.21000
		(-)	(1.00968)	(-)	(1.00892)	(-)	(1.00956)
	Düzenli	0.00000	1.11617	0.00000	1.18846	0.00000	1.34445
		(-)	(1.00969)	(-)	(1.00891)	(-)	(1.00956)
	Düzensiz	0.00000	1.03043	0.00000	1.09597	0.00000	1.23795
		(-)	(1.00954)	(-)	(1.00878)	(-)	(1.00948)
30°	Gözeneksiz	-0.17022	0.94422	-0.18811	1.00478	-0.21804	1.13620
		(1.00774)	(1.00832)	(1.00874)	(1.00750)	(1.00959)	(1.00817)
	Düzenli	-0.18913	1.04914	-0.20901	1.11642	-0.24226	1.26245
		(1.00774)	(1.00832)	(1.00874)	(1.00750)	(1.00959)	(1.00818)
	Düzensiz	-0.17646	0.96839	-0.19470	1.02936	-0.22540	1.16224
		(1.00796)	(1.00817)	(1.00899)	(1.00735)	(1.00993)	(1.00808)
60°	Gözeneksiz	-0.30650	0.77385	-0.33903	0.82171	-0.39321	0.92784
		(1.00492)	(1.00398)	(1.00576)	(1.00305)	(1.00660)	(1.00371)
	Düzenli	-0.34055	0.85983	-0.37670	0.91301	-0.43690	1.03093
		(1.00492)	(1.00398)	(1.00577)	(1.00305)	(1.00660)	(1.00372)
	Düzensiz	-0.31782	0.79318	-0.35101	0.84131	-0.40658	0.94850
		(1.00511)	(1.00381)	(1.00597)	(1.00288)	(1.00690)	(1.00360)
90°	Gözeneksiz	-0.38201	0.52313	-0.42334	0.55241	-0.49157	0.62141
		(1.00011)	(0.99508)	(1.00077)	(0.99392)	(1.00151)	(0.99452)
	Düzenli	-0.42445	0.58126	-0.47038	0.61379	-0.54619	0.69046
		(1.00012)	(0.99508)	(1.00077)	(0.99392)	(1.00151)	(0.99452)
	Düzensiz	-0.39634	0.53536	-0.43851	0.56471	-0.50853	0.63421
		(1.00027)	(0.99486)	(1.00091)	(0.99370)	(1.00172)	(0.99434)

Çizelge 5.7 : HDKY için yakınsama çalışması ve sonuçların karşılaştırılması.

	N	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
Bu çalışma	7	62.034	305.547	892.628	1791.77
	9	62.034	305.005	946.983	1183.44
	11	62.034	305.005	943.006	1200.56
	13	62.034	305.005	943.126	1199.83
	15	62.034	305.005	943.126	1199.83
	17	62.034	305.005	943.126	1199.83
	19	62.034	305.005	943.126	1199.83
Sonlu eleman analizi (SEA)		62.385	306.871	947.300	1202.709
Yardımoğlu ve Yıldırım (2004)		61.8	304.8	944.5	1193.0
Subrahmanyam ve diğ. (1981)		61.9	304.7	937.0	1205.1

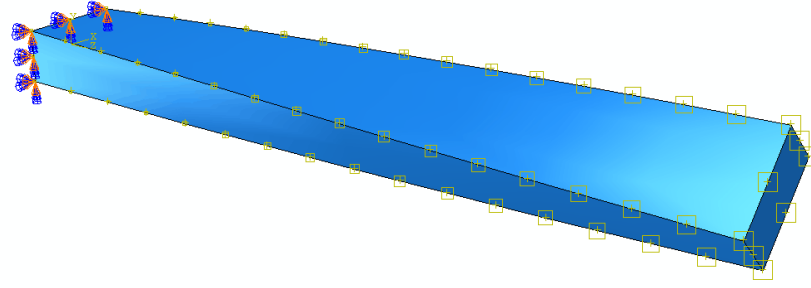
Çizelge 5.8, Timoshenko çubuk modeli kullanılarak modellenmiş, eksenel doğrultuda homojen olmayan malzeme özelliklerine sahip ($p = 1$) ve ankastre-serbest sınır şartları uygulanmış bir çubuğa ait eğilme-eğilme bağlaşıklık modlarına ait ilk dört boyutsuz doğal frekans değerlerini farklı uzunluk-kalınlık (L/h), kalınlık-genişlik (h/b) ve toplam önburulma açıları (φ) için sunmaktadır. Çizelge 5.9 ise HDKY ile hesaplanan bu doğal frekans değerlerinin, sonlu eleman analizinden elde edilmiş karşılıklarına oranlarını göstermektedir. ABAQUS paket programı kullanılarak gerçekleştirilen üç boyutlu sonlu eleman analizlerinde ilgili önburulmalı yapı, C3D20 20 düğüm noktalı kuadratik hegzahedral eleman kullanılarak modellenmiştir. Çubuğun malzeme özelliklerinin eksenel doğrultuda değişmesi için, çubuk eksenine boyunca değişen öntanımlı sıcaklık alanı tanımlanmıştır ve ısı gerilmelerinin oluşumunun engellenmesinin garanti edilmesi için ısı genleşme katsayısı 0 olarak alınmıştır. Çubuk eksenine doğrultusunda tanımlanan öntanımlı sıcaklık alanını ve sınır şartlarını içeren sonlu eleman modeli, Şekil 5.5'te gösterilmiştir. Çizelge 5.9'dan görülebileceği üzere $h/b \geq 0.5$, $L/h \geq 15$ ve $\varphi \leq 90^\circ$ aralığında kullanılan çubuk modelinden elde edilen sonuçlar ile sonlu elemanlar modelinden elde edilen sonuçlar arasında oldukça iyi bir uyum mevcuttur. Bu sebeple, eğilme-eğilme bağlaşıklık serbest titreşim davranışına ilişkin incelemelerde geometrik olarak bu sınırlar içerisinde kalan çubukların incelenmesine karar verilmiştir. Ayrıca, üç boyutlu sonlu eleman analizlerinde kullanılan eleman sayısının belirlenmesini amaçlayan yakınsama çalışması EK C'de Çizelge C.9-C.11'de sunulmuştur.

Çizelge 5.8 : Önburulmalı çubuğun bir boyutlu model kullanılarak hesaplanmış eğilme-eğilme bağlaşıklık boyutsuz doğal frekans değerleri ($p = 1$).

L/h	φ	h/b	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4
5	0°	0.2	2.50195	8.69578	16.63590	25.65940
		0.5	2.50195	4.68211	16.63590	23.70560
		0.8	2.50195	3.08602	16.63590	19.17190
	45°	0.2	2.46539	8.11453	16.76530	25.82440
		0.5	2.50711	4.61602	16.74470	23.55940
		0.8	2.50664	3.07711	16.68470	19.11190
	90°	0.2	2.40773	6.92391	16.79910	25.73440
		0.5	2.52680	4.43742	17.06910	23.07940
		0.8	2.51977	3.05133	16.82720	18.93940
	180°	0.2	2.50289	4.85766	15.62720	23.46940
		0.5	2.63273	3.94852	17.86970	21.60940
		0.8	2.56945	2.96742	17.25470	18.42840
15	0°	0.2	2.55820	12.01030	19.55440	56.68130
		0.5	2.55820	5.07328	19.55440	36.58310
		0.8	2.55820	3.19242	19.55440	24.12190
	45°	0.2	2.56758	10.31720	22.54310	49.92380
		0.5	2.56945	4.97672	20.02690	35.18060
		0.8	2.56383	3.18117	19.68560	23.93440
	90°	0.2	2.59945	8.11172	27.62440	42.64130
		0.5	2.60367	4.73391	21.31690	32.30810
		0.8	2.58023	3.14977	20.05310	23.43560
	180°	0.2	2.74992	5.59078	27.53810	42.14620
		0.5	2.72180	4.17070	24.08810	28.14940
		0.8	2.63414	3.05836	21.00190	22.30310
60	0°	0.2	2.56477	12.76970	20.00810	59.65130
		0.5	2.56477	5.12672	20.00810	39.82880
		0.8	2.56477	3.20602	20.00810	24.98810
	45°	0.2	2.58023	10.71470	23.92690	54.13880
		0.5	2.57742	5.02547	20.55190	37.87880
		0.8	2.57086	3.19383	20.15440	24.76690
	90°	0.2	2.62570	8.29641	30.75940	46.17380
		0.5	2.61305	4.77328	22.04440	34.21310
		0.8	2.58773	3.16195	20.56690	24.19690
	180°	0.2	2.78461	5.71078	30.30560	49.33130
		0.5	2.73305	4.19977	25.25810	29.38690
		0.8	2.64211	3.06961	21.61690	22.93690

Çizelge 5.9 : Önburulmalı çubuğun bir boyutlu model kullanılarak hesaplanmış eğilme-eğilme bağlaşıklık boyutsuz doğal frekans değerlerinin sonlu eleman analizi sonuçlarıyla karşılaştırılması ($p = 1$).

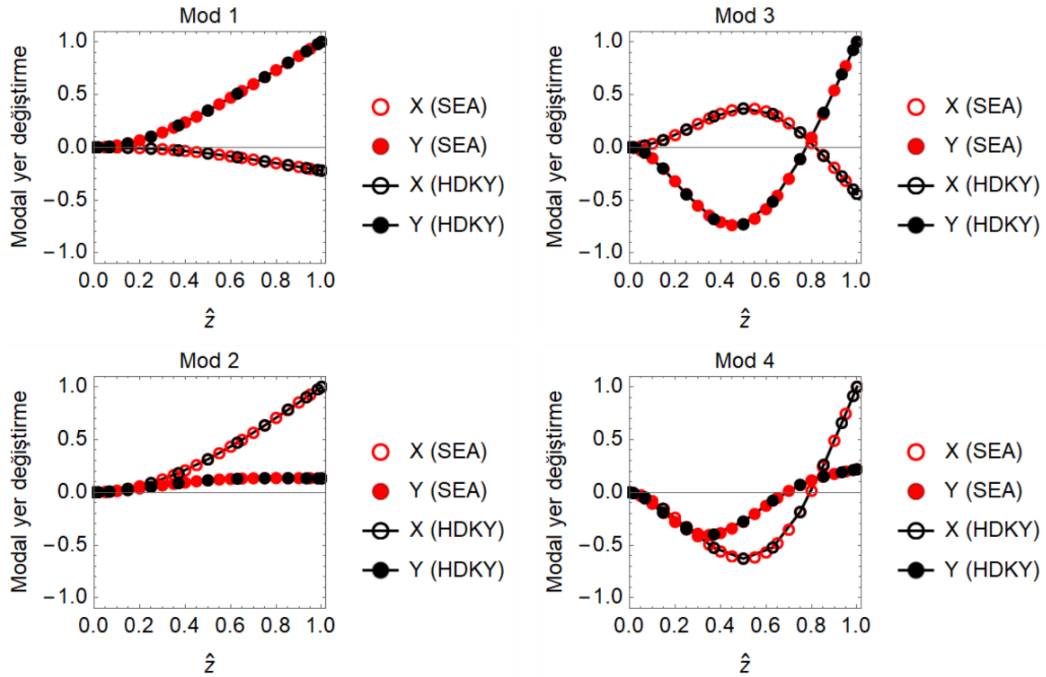
L/h	φ	h/b	$\frac{\lambda_1}{\lambda_1^{3D,SEA}}$	$\frac{\lambda_2}{\lambda_2^{3D,SEA}}$	$\frac{\lambda_3}{\lambda_3^{3D,SEA}}$	$\frac{\lambda_4}{\lambda_4^{3D,SEA}}$
5	0°	0.2	0.97506	0.98386	0.99188	0.98271
		0.5	0.98797	0.99174	0.99038	0.98948
		0.8	0.99192	0.99289	0.99228	0.99214
	45°	0.2	1.01756	1.01505	1.02285	0.96657
		0.5	0.99449	0.99493	0.99368	0.99249
		0.8	0.99480	0.99492	0.99409	0.99394
	90°	0.2	1.12674	1.11147	1.09564	1.00735
		0.5	1.01351	1.00654	1.00318	1.00276
		0.8	1.00171	1.00008	0.99821	0.99852
	180°	0.2	1.40941	1.42224	1.36548	1.41008
		0.5	1.07821	1.05882	1.05439	1.02673
		0.8	1.02629	1.02040	1.01767	1.01186
15	0°	0.2	0.98715	0.99507	0.98984	0.98766
		0.5	0.99589	0.99767	0.99617	0.99678
		0.8	0.99779	0.99813	0.99777	0.99793
	45°	0.2	0.99294	0.99734	0.99583	0.99301
		0.5	0.99671	0.99820	0.99677	0.99752
		0.8	0.99796	0.99834	0.99789	0.99822
	90°	0.2	1.00948	1.01034	1.00812	1.00480
		0.5	0.99926	0.99946	0.99837	0.99923
		0.8	0.99893	0.99913	0.99872	0.99909
	180°	0.2	1.07051	1.07103	1.07506	1.03367
		0.5	1.00880	1.00704	1.00857	1.00216
		0.8	1.00245	1.00190	1.00219	1.00131
60	0°	0.2	0.99623	0.99915	0.99686	0.99622
		0.5	0.99909	0.99961	0.99932	0.99968
		0.8	0.99957	0.99981	0.99974	0.99983
	45°	0.2	0.99658	0.99828	0.99829	0.99646
		0.5	0.99923	0.99969	0.99927	0.99951
		0.8	0.99963	0.99969	0.99969	0.99975
	90°	0.2	0.99776	0.99843	0.99987	0.99715
		0.5	0.99934	0.99971	0.99956	0.99953
		0.8	0.99964	0.99983	0.99985	0.99977
	180°	0.2	1.00236	1.00244	1.00264	1.00136
		0.5	0.99997	1.00007	1.00033	0.99968
		0.8	0.99996	0.99999	1.00006	0.99994



Şekil 5.5 : Eksenel olarak homojen olmayan bir önburulmalı çubuğa ait sonlu eleman modeli.

5.2.2 Mod şekilleri

Bu bölümde ilk olarak, homojen ($p = 0$) ve önburulmalı ($\varphi = 60^\circ$) bir çubuğa ait ilk dört eğilme-eğilme bağlaşık mod şeklinin, üç boyutlu sonlu elemanlar modelinden elde edilen karşılıklarıyla kıyaslanması amaçlanmıştır. Bu bağlamda, üç boyutlu sonlu eleman modelinden mod şekillerini elde etmek için çubuk eksenini boyunca yapı 20 parçaya bölünmüştür ve ardından oluşan her kesit yüzeyindeki geometrik merkezlerin her moddaki x ve y doğrultularındaki ötelenmeleri hesaplanmıştır. Şekil 5.6'dan da görüldüğü üzere, bir boyutlu çubuk modeli kullanılarak elde edilen ilk dört mod şekli, sonlu elemanlar analizinden üretilmiş mod şekilleriyle iyi bir uyum içerisindedir.



Şekil 5.6 : Bir boyutlu model kullanılarak elde edilen mod şekilleriyle sonlu elemanlar analizinden elde edilen mod şekillerinin karşılaştırılması ($L/h = 15$, $h/b = 0.5$, $\varphi = 60^\circ$ ve $p = 0$).

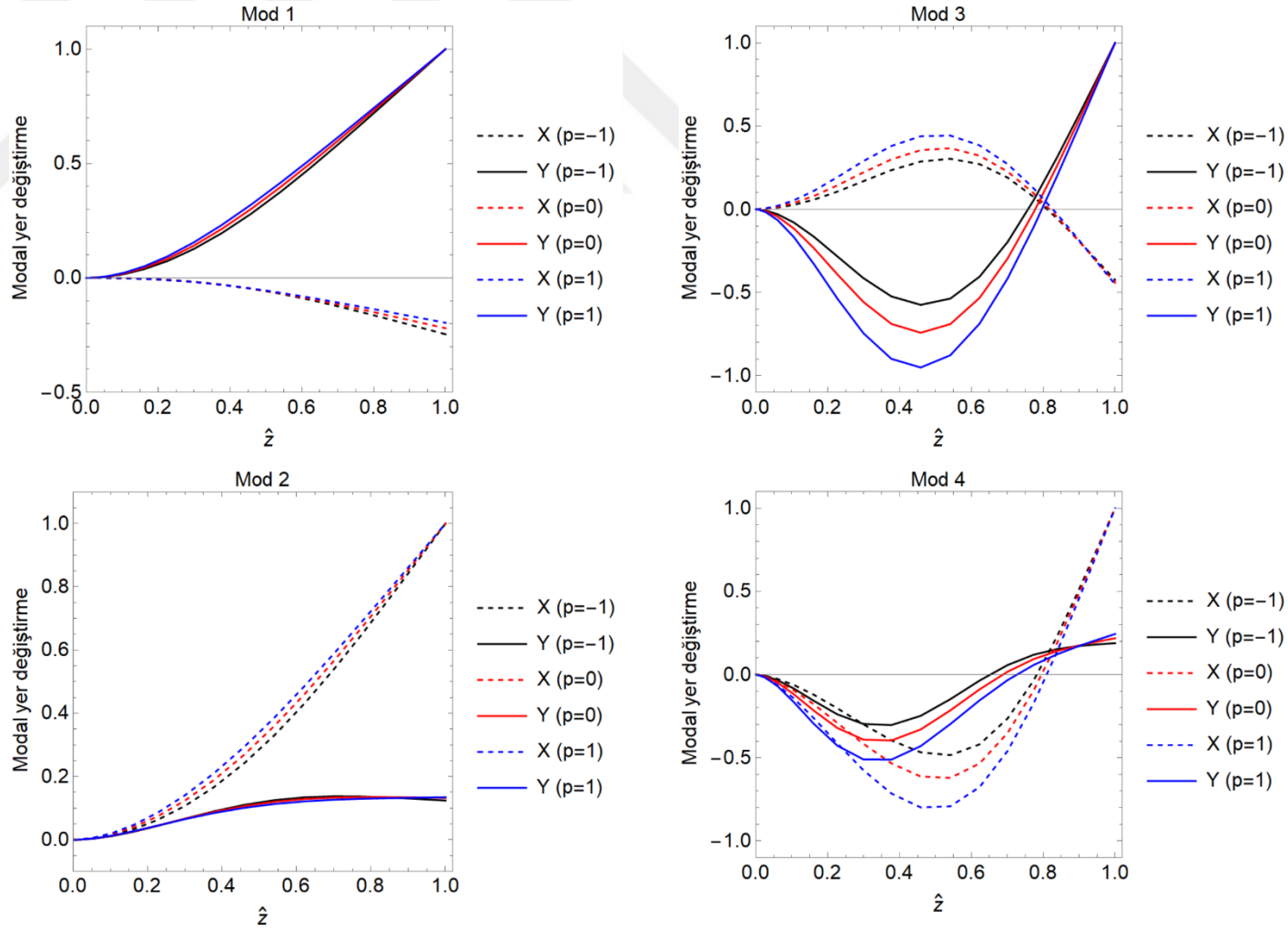
Şekil 5.7, malzeme parametresinin $p = -1,0,1$ olduğu durumlar için bu çubuğun ilk dört eğilme-eğilme bağlaşıklık mod şeklinin değişimini göstermektedir. Şekil 5.7’den, malzeme parametresindeki değişimin çubuğun ilk dört eğilme-eğilme bağlaşıklık mod şeklini belirgin bir biçimde etkilediği yorumu yapılabilir. Bu etkinin özellikle yüksek modlarda daha belirgin bir hale geldiği gözlenmiştir.

5.2.3 Malzeme parametresinin eğilme-eğilme bağlaşıklık doğal frekansları üzerindeki etkisi

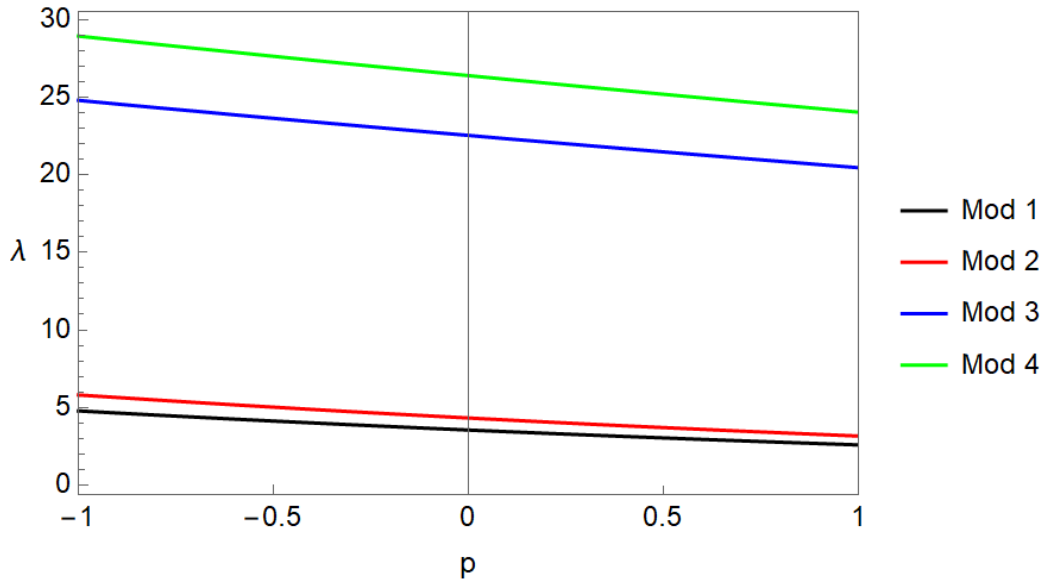
Bu bölümde, malzeme parametresinin (p) önburulmalı bir çubuğun ilk dört eğilme-eğilme bağlaşıklık doğal frekansı üzerindeki etkisi incelenmiştir. Malzeme parametresinin (p), ilk dört eğilme-eğilme bağlaşıklık doğal frekansı üzerindeki etkisinin incelendiği çalışmalarda, $L/h = 30$, $h/b = 0.8$ ve $\varphi = 90^\circ$ geometrik özelliklerine sahip bir çubuğun, elastisite modülünün ve yoğunluğunun çubuk eksen boyunda eksponansiyel olarak değiştiği ve her iki malzeme özelliğinin çubuk eksen boyunda dağılımının da $p = [-1,1]$ arasında değişen malzeme parametresi tarafından kontrol edildiği varsayılmıştır. Ayrıca, Poisson oranının 0.3 olduğu kabul edilmiştir. Şekil 5.8, bu kabuller altında ilk dört eğilme-eğilme bağlaşıklık doğal frekanslarının değişimini göstermektedir. Şekil 5.8’den de görüldüğü üzere, malzeme parametresinin değeri arttıkça ilk dört eğilme-eğilme bağlaşıklık modlarına ait doğal frekans değerleri düşmektedir. Bu düşüşün üçüncü ve dördüncü modlarda, birinci ve ikinci modlardakinden daha belirgin olduğu söylenebilir. Ayrıca bu düşüş eğiliminin, çubuğun kütle ve rijitlik dağılımının, malzeme parametresindeki artışla beraber, gittikçe serbest ucuna doğru kaymasından kaynaklandığı düşünülmektedir.

5.3 Uzama-burulma Bağlaşıklık Statik Davranışa Ait Sayısal İncelemeler ve Tartışma

Uzama-burulma bağlaşıklık statik davranışa dair gerçekleştirilen sayısal incelenmelerin ilk üç grubu doğrulama çalışmalarına ayrılmıştır. Doğrulama çalışmalarının ilk kısmında, çarpılma-kaynaklı rijitlik katsayılarının hesaplanması için geliştirilen bilgisayar kodundan alınan sonuçların, literatürden ve ABAQUS sonlu elemanlar paket programından elde edilen sonuçlar ile karşılaştırılması amaçlanmıştır. İkinci kısımda, geliştirilen bilgisayar kodundan elde edilen kayma gerilmelerinin ve rijitlik katsayılarının, çoklu malzemeli yaklaşımdan elde edilmiş sonuçlarla karşılaştırılması



şekil 5.7 : Malzeme parametresinin ilk dđrt eğilme-eğilme bağlaşık mod şekilleri ęzerindeki etkisi ($L/h = 15$, $h/b = 0.5$, $\varphi = 60^\circ$).



Şekil 5.8 : Farklı malzeme parametresi değerleri için ilk dört eğilme-eğilme bağlaşıp doğal frekansı ($L/h = 30$, $h/b = 0.8$, $\varphi = 90^\circ$).

gerçekleştirilmiş ve geliştirilen yaklaşımın Prandtl'in membran analojisi ile ilişkisi tartışılmıştır. Üçüncü kısım, geliştirilen matematiksel modelden beklenen yapısal cevaplar için yorumları ve hesaplanan bu cevapların sonlu eleman modelinden elde edilenlerle karşılaştırılmasını içermektedir. Dördüncü inceleme kısmı, malzeme parametresinin uzama-burulma bağlaşıp statik cevabı üzerindeki etkisinin incelenmesine ayrılmıştır. Burada, $\xi = 0$ konumunda çubuk malzemesinin tamamen metal (örneğin SUS304, $E_t = 201.04$ GPa) olduğu ve kesitin alt ve üst yüzeylerine doğru elastisite modülünün parabolik olarak arttığı varsayılmıştır. Ayrıca, Poisson oranı 0.3 olarak kabul edilmiştir.

5.3.1 Çarpılma-kaynaklı rijitlik katsayılarının hesaplanmasına dair doğrulama çalışmaları

Çarpılma-kaynaklı rijitlik katsayılarının hesaplanmasından sorumlu bilgisayar kodunun doğrulanmasına dair ilk incelemeler homojen, içi dolu ve dikdörtgen kesit için gerçekleştirilmiştir. Bu maksatla, çeşitli homojen, içi dolu ve dikdörtgen kesitler için burulma sabitleri hesaplanmış ve elde edilen sonuçlar denklem 5.2'de verilen analitik ifadeden elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır (W. C. Young ve Budynas, 2002):

$$J = \frac{h^3 b}{3} \left[1 - 0.63 \left(\frac{h}{b} \right) \left(1 - \frac{h^4}{12b^4} \right) \right] \quad (5.2)$$

Hesaplamalarda, denklem 3.194 ve 3.195'in oluşturduğu sınır değer problemi, Mathematica 12.2 yazılımında sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak çözülmüştür (Wolfram Research, 2020). J^* değerini elde etmek için denklem 3.198 kullanılmıştır. Ardından J^* değeri, kesidin $\xi = 0$ konumundaki kayma modülü değerine, G_i , bölünmüş ve bu sayede keside ait burulma sabiti değeri elde edilmiştir. Burada, dikdörtgen kesit bölgesi, MATHEMATICA programında, $h/b = 0.2, 0.4, 0.8$ kalınlık-genişlik oranları için sırasıyla 405, 416, and 414 adet ikinci mertebe dikdörtgen elemanlara ayrılmıştır. Çizelge 5.10'dan da görülebileceği üzere, hesaplanan burulma sabiti değerlerinin, analitik sonuçlarla iyi bir uyum içinde olduğu söylenebilir.

İkinci incelemede, ince cidarlı ($h/b = 0.1$), içi dolu ve dikdörtgen geometriye sahip homojen bir kesit incelenmiştir. Burada, homojen kesit varsayımı çarpılma-kaynaklı rijitlik katsayılarının $S = S^*/E_i$, $K = K^*/E_i$ ve $J = J^*/G_i$ şeklinde tanımlanmasına olanak sağlamaktadır. Çizelge 5.11, hesaplanan bu katsayıların, Aravas ve Papadioti, ve Kordolemis ve diğerleri tarafından sunulan yaklaşık analitik ifadeler kullanılarak elde edilmiş olan sonuçlar ile karşılaştırmasını sunmaktadır (Aravas ve Papadioti, 2022; Kordolemis ve diğ., 2015). Çizelge 5.11'den görülebileceği üzere, hesaplanan çarpılma-kaynaklı rijitlik katsayısı değerleri, yaklaşık analitik ifadelerden elde edilenlere oldukça yakındır. Burada belirtmekte fayda vardır ki, denklem 3.194'ü $\partial\Psi/\partial\eta \cong 0$ kabul ederek basitleştirmek literatürde tercih edilen bir yaklaşım olmasına rağmen, bu çalışmada bu terim korunmuştur (Arghavan ve Hematiyan, 2009; Ecsedi, 2009; Kolchin, 1971).

Çizelge 5.10 : Sayısal ve analitik olarak hesaplanmış burulma sabitlerinin karşılaştırılması [m^4] ($h = 10$ mm, $p = 1$).

İnceleme	$h/b = 0.2$	$h/b = 0.4$	$h/b = 0.8$
Bu çalışma	1.4566×10^{-8}	6.2341×10^{-9}	2.1467×10^{-9}
Analitik sonuç	1.4567×10^{-8}	6.2378×10^{-9}	2.1384×10^{-9}

Çizelge 5.11 : İnce cidarlı dikdörtgen kesit için rijitlik katsayıları.

İnceleme	S [m^4]	K [m^6]	J [m^4]
Bu çalışma	8.0634×10^{-7}	1.1504×10^{-9}	3.1232×10^{-8}
Aravas ve Papadioti (2022)	8.1026×10^{-7}	1.1723×10^{-9}	3.1409×10^{-8}
Kordolemis ve diğ. (2015)	8.3333×10^{-7}	1.2500×10^{-9}	3.3333×10^{-8}

Homojen olmayan kesit durumunda, çarpılma-kaynaklı rijitlik katsayılarının hesaplanmasından sorumlu bilgisayar kodunun doğrulanması, hesaplanan burulma

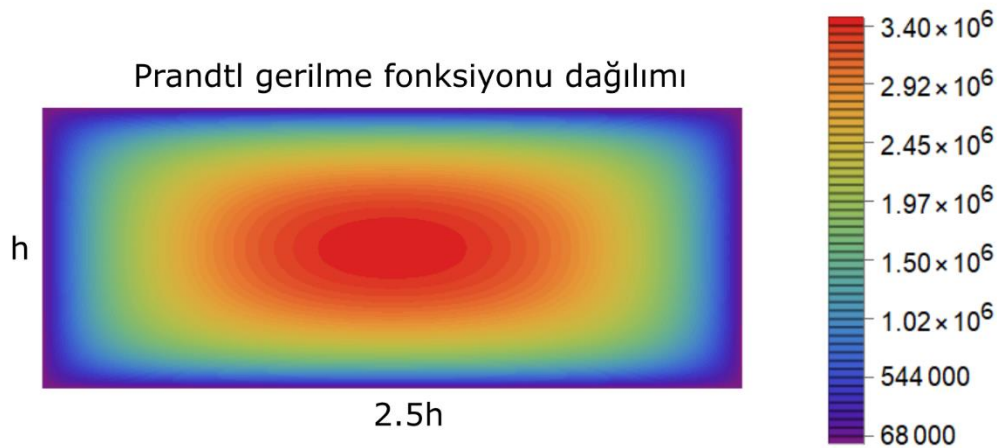
rijitliğinin (J^*), ABAQUS yazılımından elde edilen değeri ile karşılaştırılmasıyla gerçekleştirilmiştir. ABAQUS'te homojen olmayan kesitin modellenmesi için katman modelleme yaklaşımı kullanılmıştır.

Bu yaklaşımda homojen olmayan kesit, kalınlık doğrultusunda, birbirinden farklı malzeme özelliklerine sahip çok sayıda homojen kesit kullanılarak modellenmiştir. Bu yaklaşımla modellenen kesitte ait burulma rijitliği, ABAQUS ortamında *BEAM SECTION GENERATE seçeneği kullanılarak elde edilmiştir. Çözüm ağı ABAQUS'te, WARP2D4 eleman tipi kullanılarak oluşturulurken, MATHEMATICA da ise ikinci-mertebe dikdörtgen elemanlar kullanılmıştır.

Çizelge 5.12, farklı kalınlık-genişlik oranlarına (h/b) ve katman sayılarına (N_k) sahip kesitler için MATHEMATICA'dan elde edilen burulma rijitliklerinin, ABAQUS'te hesaplanan burulma rijitlikleriyle bir karşılaştırmasını sunmaktadır. Burada, parantez içindeki sayılar, analizlerde kullanılan eleman sayılarını ifade etmektedir.

Çizelge 5.12'den görülebileceği üzere, ABAQUS'te kullanılan katman sayısı arttıkça burulma rijitlikleri yakınsamaktadır. Ayrıca yakınsanan burulma rijitliği değerleri, MATHEMATICA programıyla hesaplanan burulma rijitliği değerleriyle iyi bir uyum içerisinde.

Ayrıca Şekil 5.9, $h/b = 0.4$ ve $p = 3$ değerlerine sahip bir kesit üzerinde, MATHEMATICA programında hesaplanmış Prandtl gerilme fonksiyonunun dağılımını göstermektedir.



Şekil 5.9 : Prandtl gerilme fonksiyonunun homojen olmayan kesit üzerindeki dağılımı ($h/b = 0.4$ ve $p = 3$).

Çizelge 5.12 : Hesaplanan burulma rijitliklerinin J^* [Nm^2] ABAQUS’ten elde edilen burulma rijitliği değerleriyle karşılaştırılması.

h/b	p	ABAQUS				Bu çalışma
		$N_k = 15$	$N_k = 25$	$N_k = 55$	$N_k = 75$	
0.1	1	2415.6 (2250)	2415.2 (6250)	2415 (30250)	2415 (56250)	2414.97 (448)
	5	7886.7 (2250)	7928.4 (6250)	7947 (30250)	7949.3 (56250)	7947.55 (448)
	10	14511 (2250)	14603 (6250)	14644 (30250)	14649 (56250)	14642.1 (448)
0.4	1	482.65 (570)	482.26 (1575)	482.09 (7590)	482.07 (14100)	482.039 (416)
	5	1379.2 (570)	1384.6 (1575)	1387 (7590)	1387.3 (14100)	1387.52 (416)
	10	2312.3 (570)	2323.1 (1575)	2328 (7590)	2328.6 (14100)	2329.03 (416)
0.8	1	166.49 (285)	166.17 (775)	166.02 (3795)	166.01 (7050)	165.986 (414)
	5	390.09 (285)	390.9 (775)	391.25 (3795)	391.29 (7050)	391.331 (414)
	10	590.85 (285)	592.6 (775)	593.36 (3795)	593.46 (7050)	593.543 (414)

5.3.2 Galuppi ve Royer-Carfagni’nin çoklu malzemeli membran analojisi ve kayma gerilmelerinin ve rijitlik katsayılarının karşılaştırılması

Prandtl’in membran analojisi, her iki problemin de aynı kısmi türevli diferansiyel denklemler tarafından yönetilmesinden dolayı, Saint-Venant burulma probleminin elastik bir membranın enine çökmesi problemi olarak yorumlanabilmesine olanak vermektedir. Galuppi ve Royer-Carfagni, bu analojiyi çoklu malzemeden imal edilmiş kesite sahip çubukların burulma davranışını incelemek üzere geliştirmiştir ve birden fazla homojen malzemeden oluşan kesite sahip çubuklar için analojinin daha iyi anlaşılmasına olanak verecek fiziksel bir membran modeli geliştirmiştir (Galuppi ve Royer-Carfagni, 2019). Burada belirtmelidir ki, Prandtl’in membran analojisinin homojen olmayan malzemeden imal edilmiş keside sahip çubuklara genişletilmesi mümkündür. Bu bağlamda bu çalışmadaki yaklaşım ile Prandtl’in membran yaklaşımı arasında bir karşılaştırma yapılması analojiye ilişkin yorumlara katkıda bulunabilir. Öncelikle, basit bağlantılı ve çoklu malzemeden imal edilmiş kesit durumunda, her bölgenin homojen malzemeden imal edilmiş olması, her bölgeye ait kısmi diferansiyel denklemin sabit katsayılarından oluşmasını sağlamaktadır. Bu durumda, dış sınırlara dair tanımlanan sınır şartlarına ek olarak, farklı malzemeleri içeren bölgeler arasındaki

düzgün arayüzde tanımlanan arayüz şartlarına da ihtiyaç duyulmaktadır. Prandtl'ın membran analogisinde, bu arayüz şartları membran çökmesinin sürekliliği olarak yorumlanmaktadır (Galuppi ve Royer-Carfagni, 2019). Diğer taraftan, homojen olmayan durumda, yönetici kısmi türevli diferansiyel denklem değişken katsayılar içerir ve kayma modülünün sürekli olarak değiştiği sadece tek bir bölgeyle ilgilenildiği için arayüz şartlarının tanımlanmasına ihtiyaç duyulmaz.

Galuppi ve Royer-Carfagni'nin çalışmasındaki fiziksel modele atıfla, homojen olmayan kesit durumuna karşılık gelecek olan uygun fiziksel membran modeli, düşey çubukların ortadan kaldırılması ve dış sınırlardaki çubukların üniform olmayacak şekilde gerdirilmesiyle elde edilebilir (Galuppi ve Royer-Carfagni, 2019). Burada, Garcia A. ve diğerlerinin üniform olmayan gergi kuvvetine sahip bir membranın dinamiğini incelediği çalışmaya ve bu çalışmada sunulan üniform olmayan gergi kuvvetine sahip dairesel bir membranın yönetici denklemlerine atıfta bulunmak yerinde olacaktır (García A. ve diğ., 2021). Galuppi ve Royer-Carfagni'nin membran analogisinde kullandığı notasyonu takip ederek, homojen olmayan durumdaki Prandtl'ın membran analogisi için sınır değer problemi aşağıdaki gibi yazılabilir (Galuppi ve Royer-Carfagni, 2019).

$$\text{Bölgede, } \Omega: \quad \nabla \cdot (\varepsilon \nabla w) = -p \quad (5.3)$$

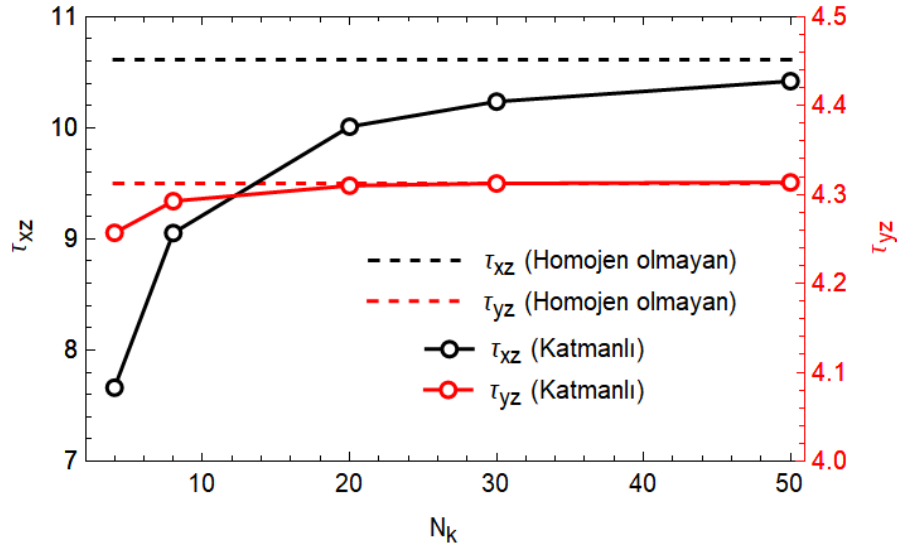
$$\text{Sınırdaki, } \Gamma: \quad w = 0 \quad (5.4)$$

Burada, ε çekme durumunu, p şişirme basıncını ve w düzlem-dışı yer değiştirmeyi temsil etmektedir. Bu sınır değer probleminin, denklem 3.194 ve 3.195 'in oluşturduğu Dirichlet tipi sınır değer problemiyle aynı yapıya sahip olduğu belirtilmelidir. Ayrıca çoklu malzemeli membran analogisi yaklaşımı, önburulmasız homojen olmayan malzemedan imal edilmiş keside sahip bir çubukta oluşan ve

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \vartheta \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \vartheta \quad (5.5)$$

şeklinde hesaplanan kayma gerilmelerinin ve çarpılma-kaynaklı rijitlik katsayılarının karşılaştırılması için de kullanılabilir. Burada ϑ , birim burulma açısını ifade etmektedir. Şekil 5.10, homojen olmayan malzemedan imal edilmiş keside sahip bir önburulmasız bir çubuk ile kesidi homojen malzemedan imal edilmiş farklı sayılarda

katmanlardan oluşan çoklu malzemeli bir önburulmasız çubukta oluşan maksimum kayma gerilmelerinin, τ_{xz} ve τ_{yz} , bir karşılaştırmasını sunmaktadır.



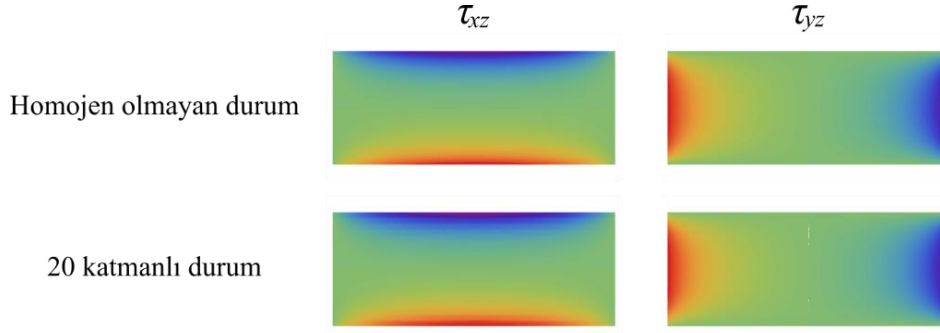
Şekil 5.10 : Önburulmasız homojen olmayan bir çubuktaki maksimum kayma gerilmelerinin karşılaştırılması.

Burada, çubuğun geometrik özellikleri $L = 1$ m, $L/h = 200$, $h/b = 0.4$ olarak alınmıştır. Malzeme parametresi ve birim burulma açısı, sırasıyla, $p = 3$ ve $\vartheta = 10^{-5}$ rad/m olarak alınmıştır. Şekil 5.10'dan görülebileceği üzere, katman sayısı arttıkça, kayma gerilmeleri homojen olmayan durumdaki kayma gerilmeleri değerlerine yakınsamaktadır. Kalınlık boyunca parabolik olarak homojen olmayan çubuğu modellemek için, bir önceki bölümde olduğu gibi, çubuk kalınlık doğrultusunda katmanlandırılmıştır. Şekil 5.11, homojen olmayan ve çok malzemeli yaklaşım durumlarındaki kayma gerilmesi dağılımlarını, τ_{xz} ve τ_{yz} , göstermektedir.

Katmanlı bir çubuk için, çarpılma-kaynaklı rijitlik katsayıları

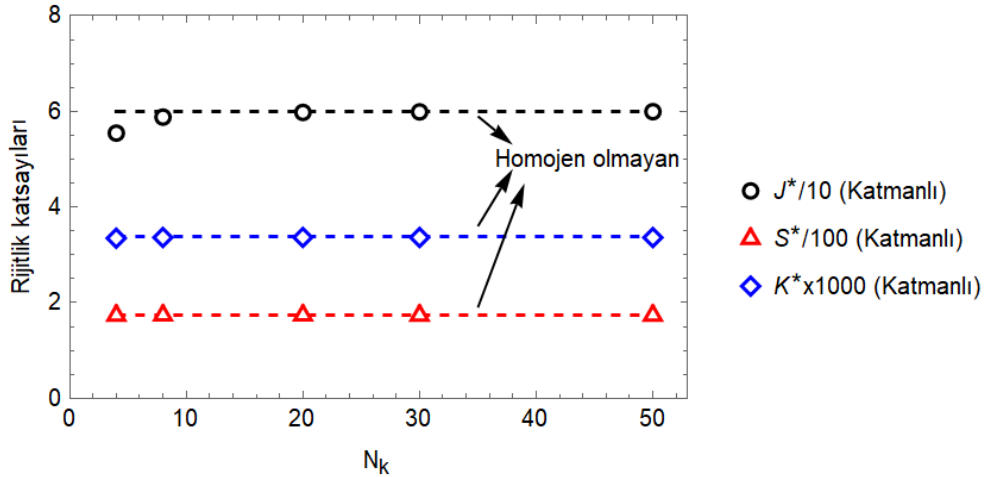
$$\left. \begin{aligned} J^* &= \frac{2}{\vartheta} \sum_{k=1}^{N_k} \int_{\Omega_k} \Psi_k d\Omega_k \\ S^* &= \sum_{k=1}^{N_k} \int_{\Omega_k} E_k \left(\eta^2 + \xi^2 + \frac{1}{G_k} \left(\xi \frac{\partial \Psi_k}{\partial \xi} + \frac{\eta}{\vartheta} \frac{\partial \Psi_k}{\partial \eta} \right) \right) d\Omega_k \\ K^* &= \sum_{k=1}^{N_k} \int_{\Omega_k} E_k \left(\eta^2 + \xi^2 + \frac{1}{G_k} \left(\xi \frac{\partial \Psi_k}{\partial \xi} + \frac{\eta}{\vartheta} \frac{\partial \Psi_k}{\partial \eta} \right) \right)^2 d\Omega_k \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

şeklinde yazılabilir.



Şekil 5.11 : Önburulmasız homojen olmayan bir çubukta kayma gerilmesi dağılımları.

Burada N_k , kesitte kullanılan katman sayısını; E_k ve G_k ise, sırasıyla, k . katmandaki (Ω_k) elastisite modülünü ve kayma modülü temsil etmektedir. Şekil 5.12, denklem 3.194-3.195 ile denklem 5.6 kullanılarak hesaplanan çarpılma-kaynaklı rijitlik katsayılarının bir karşılaştırmasını sunmaktadır. Şekil 5.12’den de görülebileceği üzere, çoklu malzemeli yaklaşımla hesaplanan çarpılma-kaynaklı rijitlik katsayıları ile homojen olmayan yaklaşım kullanılarak hesaplanan çarpılma-kaynaklı rijitlik katsayıları arasında iyi bir uyum gözlenmektedir.



Şekil 5.12 : Homojen olmayan yaklaşımdan ve katmanlı yaklaşımdan hesaplanan çarpılma-kaynaklı rijitlik katsayılarının karşılaştırılması.

5.3.3 Yapısal cevap üzerine yorumlar ve doğrulama

Önburulmalı ve homojen olmayan ankastre-serbest çubuğun uzama-burulma bağlaşıklık davranışı üzerinde malzeme parametresinin (p) etkisi, uç çekme kuvveti ve uç burulma momenti durumları için incelenmiştir. Bu bağlamda, serbest uç için sınır şartları, uç çekme kuvveti durumunda, $F_{z0} = F$, $M_{z0} = 0$ ve uç burulma momenti durumunda

$F_{z0} = 0, M_{z0} = M$ olarak tanımlanmıştır. Bu durumda, uç çekme kuvveti durumu için burulma açısı denklem 4.52'den hareketle aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\theta_z(z) = -\frac{\beta S^* z}{(J^* E^* + \beta^2 [K^* E^* - (S^*)^2])} F \quad (5.7)$$

Denklem 5.7'den görülebileceği üzere, $z \in (0, L]$ ve $\beta > 0$ için örneğin $(E^*, S^*, J^*, K^*) > 0, K^* E^* > (S^*)^2$ ve $F > 0$ kriterlerinin sağlanması durumunda burulma açısı θ_z çubuk eksenini boyunca negatif değerlerde lineer olarak değişmektedir. Fiziksel olarak negatif burulma açısı, uç çekme yüküne maruz bir önburulmalı çubuğun “açılacağını” ifade etmektedir. Benzer bir irdeleme, denklem 4.51'i ele alarak uç burulma momenti durumu için de yapılabilir. Bu durumda, eksenel uzama

$$w^0(z) = -\frac{\beta S^* z}{(J^* E^* + \beta^2 [K^* E^* - (S^*)^2])} M \quad (5.8)$$

olarak yazılabilir. Denklem 5.7'ye benzer olarak, denklem 5.8'de $z \in (0, L]$ ve $\beta > 0$ için, örneğin $(E^*, S^*, J^*, K^*) > 0, K^* E^* > (S^*)^2$ ve $M > 0$ kriterlerinin sağlanması durumunda eksenel uzamanın çubuk eksenini boyunca negatif değerlerde lineer olarak değiştiğini ifade etmektedir. Fiziksel olarak bu durumun, pozitif yöndeki bir uç burulma momentinin varlığında çubuğun boyunun kısalacağı şeklinde yorumlanabileceği söylenebilir.

Aravas ve Papadioti, homojen malzeme kabulü ve üniform olmayan burulma modelini kullanarak, bu çalışmanın temel aldığı burulma modeli olan Saint-Venant burulma modelinin, (1) eksenel yükün baskın olduğu durumda, ince cidarlı eliptik ve dikdörtgen kesitlere sahip önburulmalı çubuklar; (2) burulma yükünün baskın olduğu durumda, küçük toplam önburulma açısına sahip önburulmalı çubuklar için uygulanabilir olduğunu göstermiştir (Aravas ve Papadioti, 2022). Bu bağlamda, bu çalışmada da sayısal incelemeler, ince cidarlı dikdörtgen keside ($h/b = 0.1$) ve küçük toplam önburulma açısına ($0^\circ - 90^\circ$) sahip önburulmalı çubuklar için gerçekleştirilmiştir. Ayrıca, çubuğun uzunluk-kalınlık oranının (L/h) 200 olduğu varsayılmıştır. Önerilen yöntemin doğrulanması amacıyla her iki yükleme senaryosu için ABAQUS sonlu elemanlar paket programında detaylı sonlu eleman analizleri gerçekleştirilmiştir. Bu analizlerdeki ana amaç, 30° , 60° , ve 90° toplam önburulma açılara sahip çubukların uç yer değiştirmelerinin hesaplanmasıdır. Bu maksatla üç

boyutlu sonlu eleman analizlerinde uç çekme kuvveti senaryosunda meydana gelen uç burulma açısı aşağıdaki ilişki kullanılarak hesaplanmıştır (Aravas ve Papadioti, 2022):

$$\theta_z^{SEA}(L) = \frac{1}{N_d} \sum_{i=1}^{N_d} \left[\arctan \frac{y_i + u_y^{SEA}(x_i, y_i, L)}{x_i + u_x^{SEA}(x_i, y_i, L)} - \arctan \frac{y_i}{x_i} \right] \quad (5.9)$$

Uç burulma momenti durumu için ise sonlu eleman analizlerinde uç eksenel uzama değeri aşağıdaki gibi alınmıştır:

$$w^{0,SEA}(L) = u_z^{SEA}(0,0,L) \quad (5.10)$$

Burada N_d , çubuğun uç kesidindeki düğüm sayısını; x_i ve y_i ise i . düğümün şekil değişiminden önceki koordinatının x ve y bileşenlerini ifade etmektedir. u_x^{SEA} , u_y^{SEA} ve u_z^{SEA} ise sonlu eleman modelindeki yer değiştirme alanının x , y ve z doğrultularındaki bileşenlerini ifade etmektedir. Ayrıca θ_z^{SEA} , kesidin ortalama burulma açısını ve $w^{0,SEA}$ tarafsız eksenin uzamasını ifade etmektedir.

Çubuğun malzeme özelliklerinin kesit kalınlığı boyunca derecelendirilmesi, ABAQUS'te malzeme özelliklerinin sıcaklığa bağlı olarak tanımlanması yoluyla gerçekleştirilmiştir (Rousseau ve Tippur, 2000). Bu bağlamda, ξ doğrultusunda değişen öntanımlı sıcaklık alanı tanımlanmıştır ve ısıl gerilmelerin oluşumunun engellenmesinin garanti edilmesi için ısıl genleşme katsayısı 0 olarak alınmıştır. Bütün analizlerde çözüm ağı, 1080000 adet C3D8 8 düğüm noktalı lineer hekzahedral eleman kullanılarak oluşturulmuştur.

Çizelge 5.13 ve Çizelge 5.14, sırasıyla uç çekme kuvveti ve uç burulma momenti senaryolarında, farklı toplam önburulma açısı ve malzeme parametresi değerleri için hesaplanan sonuçların, üç boyutlu sonlu eleman analizi sonuçlarıyla karşılaştırmasını sunmaktadır.

Çizelge 5.13 : Uç çekme kuvveti senaryosu için hesaplanan sonuçların sonlu eleman sonuçlarıyla karşılaştırılması.

φ°	$p = 1$		$p = 5$		$p = 10$	
	$\bar{\theta}_z$	$\bar{\theta}_z / \bar{\theta}_z^{SEA}$	$\bar{\theta}_z$	$\bar{\theta}_z / \bar{\theta}_z^{SEA}$	$\bar{\theta}_z$	$\bar{\theta}_z / \bar{\theta}_z^{SEA}$
30	-0.35047	1.00461	-0.10556	0.99875	-0.05717	0.99747
60	-0.69500	1.00485	-0.20986	0.99891	-0.11370	0.99761
90	-1.02799	1.00543	-0.31168	0.99947	-0.16898	0.99815

Burada hesaplanan sonuçlar ve sonlu eleman analizi sonuçları, uç çekme kuvveti ve uç burulma momenti yükleme durumları için

$$[\bar{\theta}_z, \bar{\theta}_z^{SEA}] = [\theta_z, \theta_z^{SEA}] \frac{E_i A}{100F} \quad (5.11)$$

$$[\bar{w}^0, \bar{w}^{0,SEA}] = [w^0, w^{0,SEA}] \frac{100G_i I_p}{ML^2} \quad (5.12)$$

ilişkileri kullanılarak boyutsuz olarak sunulmuştur. Ayrıca, üç boyutlu sonlu eleman analizlerinde kullanılan eleman sayısının belirlenmesini amaçlayan yakınsama çalışması Çizelge C.12 ve C.13'te sunulmuştur.

Çizelge 5.14 : Uç burulma momenti senaryosu için hesaplanan sonuçların sonlu eleman sonuçlarıyla karşılaştırılması.

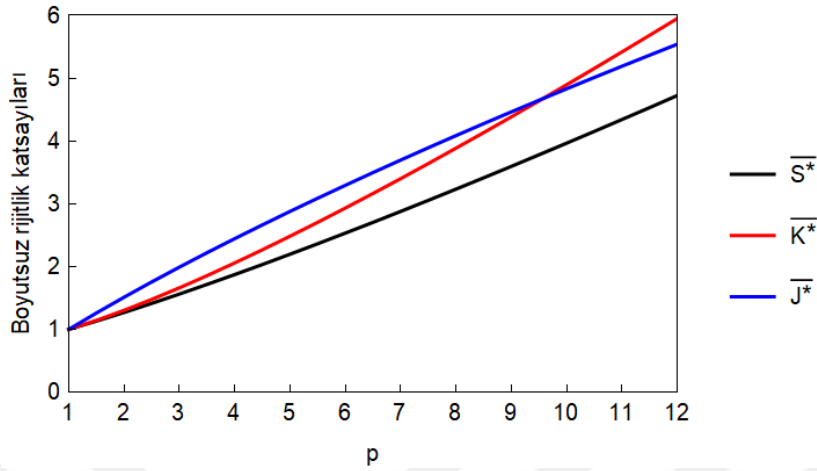
φ°	$p = 1$		$p = 5$		$p = 10$	
	$\bar{w}^0$	$\bar{w}^0 / \bar{w}^{0,SEA}$	$\bar{w}^0$	$\bar{w}^0 / \bar{w}^{0,SEA}$	$\bar{w}^0$	$\bar{w}^0 / \bar{w}^{0,SEA}$
30	-0.28363	1.02205	-0.08543	1.01632	-0.04627	1.01503
60	-0.56246	1.02240	-0.16984	1.01656	-0.09202	1.01523
90	-0.83195	1.02317	-0.25224	1.01726	-0.13675	1.01591

Burada, A ve I_p sırasıyla, kesit alanını ve kesitin kutupsal atalet momentini temsil etmektedir. Çizelge 5.13 ve 5.14'teki $\bar{\theta}_z / \bar{\theta}_z^{SEA}$ ve $\bar{w}^0 / \bar{w}^{0,SEA}$ ifadeleri ise sırasıyla, hesaplanan boyutsuz uç burulma açısı ve uç tarafsız eksen ötelenme değerlerinin, sonlu eleman analizlerinden hesaplanana karışıklarına oranını ifade etmektedir. Çizelge 5.13 ve Çizelge 5.14'den görülebileceği üzere, maksimum mutlak hatalar uç çekme kuvveti ve uç burulma momenti senaryoları için sırasıyla %0.54 ve %2.32 değerinde olup, malzeme parametresinin $p = 1$ ve önburulma açısının 90° olduğu durumda ortaya çıkmaktadır.

5.3.4 Malzeme parametresinin uzama-burulma bağlaşıklık statik davranış üzerindeki etkisi

Bu bölümde ilk olarak, malzeme parametresinin çarpılma-kaynaklı rijitlik katsayıları üzerindeki etkisi incelenmiştir. Şekil 5.13, incelenen malzeme parametresi aralığında pozitif değerde olan üç çarpılma-kaynaklı rijitlik katsayısının homojen değerlerine bölünerek normalize edilmiş değişimini göstermektedir. Şekil 5.13'ten görülebileceği üzere malzeme parametresi (p) arttıkça (ya da bir başka deyişle, kesidin ξ doğrultusunda yüzeylerine doğru rijitliği arttıkça), eksenel uzama ile burulma

arasındaki bağılıklık ($\bar{S}^*$), önburulmanın burulma rijitliğine olan katkısı ($\bar{K}^*$) ve kesidin Saint-Venant burulma rijitliği ($\bar{J}^*$) artmaktadır.



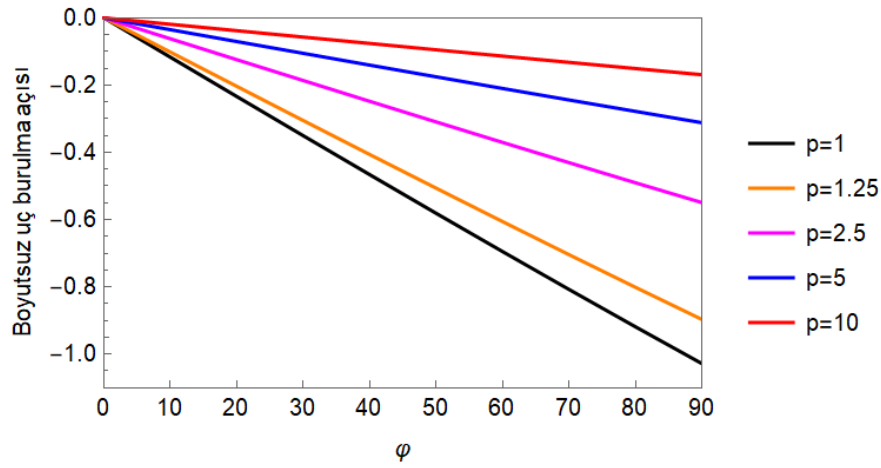
Şekil 5.13 : Çarpılma-kaynaklı rijitlik katsayılarının malzeme parametresine bağlı değişimi.

Malzeme parametresinin (p) uzama-burulma statik davranışı üzerindeki etkisini incelemek için $L/h = 200$ ve $h/b = 0.1$ boyutlarına sahip, toplam önburulma açısı $0^\circ - 90^\circ$ arasında değişen ankastre-serbest sınır şartlarına sahip bir çubuk, sırasıyla uç çekme kuvveti ve uç burulma momenti yükleme durumları altında analiz edilmiştir. Çizelge 5.15, çeşitli malzeme parametresi değerleri için hesaplanan rijitlik katsayılarını sunmaktadır. Çubuğun boyu 1 m olarak kabul edilmiştir. Çizelge 5.15'den de görülebileceği üzere $(E^*, S^*, J^*, K^*) > 0$ ve $K^* E^* > (S^*)^2$ kriterleri sağlanmaktadır. Şekil 5.14 ve Şekil 5.15, sırasıyla uç çekme kuvveti ve uç burulma momenti altında, farklı malzeme parametrelerine sahip önburulmalı bir çubukta oluşan uç burulma açısı ve uç tarafsız eksen ötelenmesini göstermektedir.

Çizelge 5.15 : Farklı malzeme parametresi değerleri için rijitlik katsayıları.

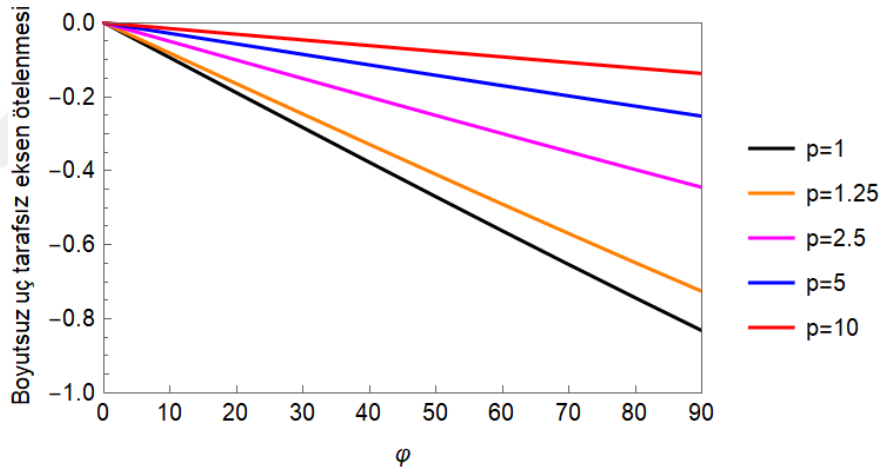
p	E^* [N]	S^* [Nm ²]	K^* [Nm ⁴]	J^* [Nm ²]
1	5.026×10^7	10131.6	3.61382	150.935
1.25	5.445×10^7	10960.6	3.90518	173.024
2.5	7.539×10^7	15108.7	5.36865	282.295
5	1.173×10^8	23413.4	8.31443	496.722
10	2.010×10^8	40043.7	14.2473	915.132

Şekil 5.14 ve Şekil 5.15'den görülebileceği üzere, malzeme parametresinin artan değerleri için, uç burulma açısı ve uç tarafsız eksen ötelenme değerlerinde bir düşüş meydana gelmektedir.



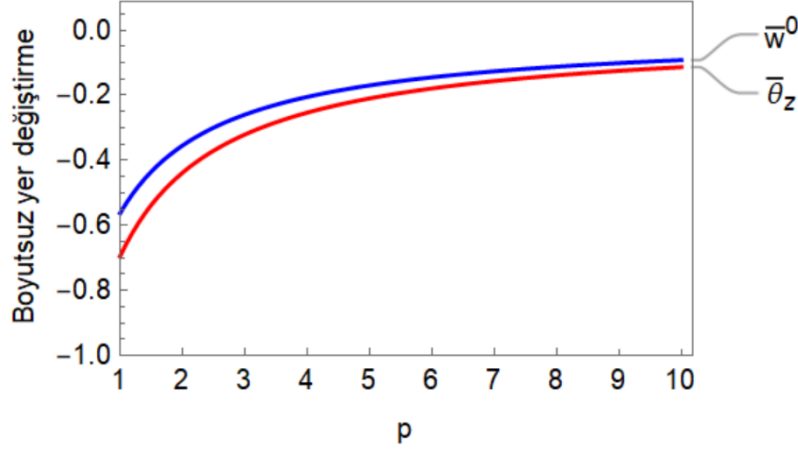
Şekil 5.14 : Boyutsuz uç burulma açısının farklı toplam önburulma açıları için değişimi (Uç çekme kuvveti).

Fiziksel olarak bu durum, çubuktaki rijitlik artışı şeklinde açıklanabilir. Bu sonuç, önburulmalı bir çubuktaki uzama-burulma statik yer değiştirmelerinin kesitteki malzeme dağılımının değiştirilmesi vasıtasıyla kontrol edilebileceğini göstermektedir.



Şekil 5.15 : Boyutsuz uç tarafsız eksen ötelenmesinin farklı toplam önburulma açıları için değişimi (Uç burulma momenti).

Bahsedilmesi gereken bir diğer nokta, malzeme parametresinin yüksek değerlerinde çubuğun sergilediği yapısal davranıştır. Şekil 5.14 ve Şekil 5.15, malzeme parametresindeki 1.25'den 2.5'a artışın sebep olduğu yapısal cevap farkının, malzeme parametresinin 5'ten 10'a arttığı durumda meydana gelen yapısal cevap farkından daha belirgin olduğunu göstermektedir ve Şekil 5.16, bu durumu her iki yükleme durumu için daha iyi açıklayabilmektedir. Şekil 16'dan görülebileceği üzere, malzeme parametresi arttıkça, yapısal cevaplar malzeme parametresindeki değişime daha az duyarlı hale gelmektedir.



şekil 5.16 : Boyutsuz uç burulma açısı ve uç tarafsız eksen ötelenmesinin farklı malzeme parametresi değeri için değeri ($\varphi = 60^\circ$).

5.4 Uzama-burulma Bağlaşık Dinamik Davranışa Ait Sayısal İncelemeler ve Tartışma

Uzama-burulma bağlaşık dinamik davranış özelinde, önburulmalı çubuğun eliptik keside sahip olduğu ve homojen malzemeden imal edildiği varsayılmıştır. Çözümün ise sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilmesi amaçlanmıştır. Bu bağlamda, ilk olarak uzama-burulma bağlaşık dinamik davranışı bir boyutlu sonlu elemanlar yöntemi kullanarak incelemek için seçilen interpolasyon fonksiyonlarının kısa bir değeriendirilmesi yapılmıştır. Ardından, belirtilen kabuller altında, Kısım 4.4’de geliştirilen bir boyutlu sonlu eleman modeline dair bir yakınsama çalışması gerçeleştirilmiştir. Bu yakınsama çalışması neticesinde, kullanılması gereken eleman sayısı belirlendikten sonra, farklı uzunluk-kalınlık oranları, farklı toplam önburulma açısı ve farklı en-kalınlık oranlarına sahip çubuklardan hesaplanan ilk dört uzama-burulma bağlaşık doğal frekansı, ABAQUS programından elde edilen karşılıklarıyla karşılaştırılmıştır. Son olarak ilk dört uzama-burulma bağlaşık moda ait mod şekilleri sunulmuştur.

5.4.1 Kullanılan interpolasyon fonksiyonlarına dair yorumlar

Kısım 4.4’te geliştirilen bir boyutlu sonlu eleman modeli, her ne kadar önburulmalı çubukların uzama-burulma dinamik davranışlarını incelemek amacıyla geliştirilmiş olsa da, önburulmanın olmadığı durumda, çubuğun uzama ve burulma davranışlarını beraber incelemeye de olanak vermektedir. Bahsedilen sonlu eleman modelinde, $\hat{W}^0(\hat{z})$ için

$$\tilde{W}^0(\hat{z}) = N_1(\hat{z})\hat{W}^0(\hat{z}_e) + N_2(\hat{z})\hat{W}^0(\hat{z}_{e+1}) \quad (5.13)$$

olarak ifade edilen genel yapı önerilmiştir ve aşağıdaki 1.derece Lagrange interpolasyon fonksiyonları kullanılmıştır:

$$N_1(\hat{z}) = 1 - \frac{\hat{z}}{\ell} \quad N_2(\hat{z}) = \frac{\hat{z}}{\ell} \quad (5.14)$$

Benzer şekilde,

$$\tilde{\Theta}(\hat{z}) = N_3(\hat{z})\hat{\Theta}(\hat{z}_e) + N_4(\hat{z})\hat{\Theta}'(\hat{z}_e) + N_5(\hat{z})\hat{\Theta}(\hat{z}_{e+1}) + N_6(\hat{z})\hat{\Theta}'(\hat{z}_{e+1}) \quad (5.15)$$

genel yapısında olup, $\hat{\Theta}(\hat{z})$, için önerilecek yaklaşım fonksiyonu

$$N_3(\hat{z}) = 1 - 3\left(\frac{\hat{z}}{\ell}\right)^2 + 2\left(\frac{\hat{z}}{\ell}\right)^3 \quad N_4(\hat{z}) = \ell \left[\frac{\hat{z}}{\ell} - 2\left(\frac{\hat{z}}{\ell}\right)^2 + \left(\frac{\hat{z}}{\ell}\right)^3 \right] \quad (5.16)$$

$$N_5(\hat{z}) = 3\left(\frac{\hat{z}}{\ell}\right)^2 - 2\left(\frac{\hat{z}}{\ell}\right)^3 \quad N_6(\hat{z}) = \ell \left[\left(\frac{\hat{z}}{\ell}\right)^3 - \left(\frac{\hat{z}}{\ell}\right)^2 \right] \quad (5.17)$$

şeklinde ifade edilen Hermite kübik interpolasyon fonksiyonlarından oluşturulmuştur.

Yukarıdaki hatırlatmanın ardından, üniform olmayan burulma varsayımı yapılarak uzama-burulma bağlaışık dinamik davranış için kullanılan bu interpolasyon fonksiyonlarının, bir Euler-Bernoulli çubuğunun uzama ve eğilme davranışlarının sonlu elemanlar yöntemi çerçevesinde beraber incelenmesi durumunda da kullanılabildiği burada belirtilmelidir (Shabana, 2019). Hem ilgili problem özelinde, hem de Euler-Bernoulli çubuğunun uzama davranışının sonlu elemanlar yöntemi çerçevesinde incelenmesinde, uzama davranışı ile ilgili ana değişkenin sadece ilgili bağımlı bilinmeyenden (türevinden değil) oluşması, 1.dereceden Lagrange interpolasyon fonksiyonları kullanılmasına olanak sağlamaktadır (Reddy, 2006). Ayrıca, aynı interpolasyon fonksiyonları, Saint-Venant burulma kabulü çerçevesinde bir çubuğun burulmasının sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak incelenmesi durumunda kullanılabilmektedir (Reddy, 2006). Ancak burada, -tıpkı bir Euler-Bernoulli çubuğunda eğilme davranışının sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak incelenmesi durumunda olduğu gibi, yani ana değişkenlerin ilgili bağımlı bilinmeyen (çökme ya da sehim) ve bu ilgili bağımlı bilinmeyenin türevi (dönme) olarak

tanımlanması gibi- ana değişkenler, burulmaya ilişkin bağımlı bilinmeyen (dönme) ve bu bağımlı bilinmeyenin türevi olarak ortaya çıkmaktadır (Reddy, 2006). Bu durumda, tıpkı Euler-Bernoulli çubuğunun eğilmesine yönelik bir sonlu eleman geliştirilmesinde olduğu gibi, kullanılması olanaklı interpolasyon fonksiyonları Hermite kübik interpolasyon fonksiyonları olarak seçilebilmektedir. Bu bakımdan, geliştirilen sonlu eleman modeli ile Euler-Bernoulli çubuğunun uzama ve eğilme davranışını incelemek için kullanılan sonlu eleman modeli arasında bir analogi kurulabilir.

5.4.2 Sonlu eleman modeline dair yakınsama çalışması

Bu kısımda, bir boyutlu sonlu eleman modeline yönelik bir yakınsama çalışması gerçekleştirilmiştir. Bu bağlamda, farklı uzunluk-kalınlık oranları ($L/h = 25, 50, 100$), farklı en-kalınlık oranları ($h/b = 0.2, 0.5, 0.8$) ve farklı toplam önburulma açılarına ($\varphi^\circ = 0, 30, 60, 90$) sahip ankastre-serbest sınır şartlarına sahip çubuklara ait çözüm ağı sırasıyla 5, 15, 45, 135 ve 405 adet sonlu eleman kullanılarak oluşturulmuştur ve her çubuğa ait ilk dört uzama-burulma bağlaşıp serbest titreşim moduna ait doğal frekansların eleman sayısı ile değişimi araştırılmıştır. Elde edilen sonuçlar, Çizelge 5.16, 5.17 ve 5.18’de topluca sunulmuştur. Çizelge 5.16, 5.17 ve 5.18’den görülebileceği üzere, ilgili yapının modellenmesi için 135 adet sonlu eleman kullanımından sonra sonuçların önemli ölçüde değişmediği söylenebilir. Bu sebeple, bundan sonraki bir boyutlu sonlu eleman analizlerinde 135 adet sonlu eleman kullanılmasına karar verilmiştir.

5.4.3 Bir boyutlu sonlu eleman modelinden elde edilen sonuçların üç boyutlu sonlu eleman modelinden elde edilen sonuçlarla karşılaştırılması

Bir boyutlu sonlu eleman modelinde kullanılması gereken minimum eleman sayısına karar verildikten sonra, geliştirilen sonlu eleman modelinin ürettiği sonuçlar, ABAQUS programında üç boyutlu olarak oluşturulan modelden elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Bu bağlamda, ABAQUS ortamında, farklı uzunluk-kalınlık oranları ($L/h = 25, 50, 100$), farklı en-kalınlık oranları ($h/b = 0.2, 0.5, 0.8$) ve farklı toplam önburulma açılarına ($\varphi^\circ = 0, 30, 60, 90$) sahip yapılar oluşturulmuştur. C3D20 20 düğüm noktalı kuadratik hegzahedral eleman kullanılarak oluşturulan üç boyutlu modellerin ankastre-serbest sınır şartları altındaki serbest titreşim analizi gerçekleştirilmiş ve ilk dört uzama-burulma bağlaşıp moduna ait hesaplanan doğal frekanslar Çizelge 5.19’da sunulmuştur.

Çizelge 5.16 : $L/h = 25$ için önburulmalı çubuğa ait yakınsama çalışması.

φ°	Mod	$N_e (h/b = 0.2)$					$N_e (h/b = 0.5)$					$N_e (h/b = 0.8)$				
		5	15	45	135	405	5	15	45	135	405	5	15	45	135	405
0	$\lambda_1^{1D,SEA}$	0.392641	0.390101	0.389975	0.389973	0.389972	0.805513	0.794491	0.792518	0.792399	0.792397	0.980988	0.965667	0.961061	0.96009	0.960012
	$\lambda_2^{1D,SEA}$	1.18766	1.17985	1.17946	1.17945	1.17945	1.57726	1.57151	1.57088	1.57081	1.5708	1.57726	1.57151	1.57088	1.57081	1.5708
	$\lambda_3^{1D,SEA}$	1.57726	1.57151	1.57088	1.57081	1.5708	2.41767	2.38478	2.37887	2.37852	2.37851	2.94275	2.89706	2.88327	2.88036	2.88013
	$\lambda_4^{1D,SEA}$	2.01338	1.99767	1.99696	1.99695	1.99695	4.03593	3.97901	3.96918	3.96858	3.96857	4.88814	4.73179	4.71454	4.71263	4.71242
30	$\lambda_1^{1D,SEA}$	0.394521	0.391891	0.391747	0.391743	0.391742	0.805567	0.794543	0.79257	0.792451	0.792448	0.980991	0.965669	0.961064	0.960093	0.960015
	$\lambda_2^{1D,SEA}$	1.19351	1.1852	1.18472	1.18471	1.18471	1.57728	1.57153	1.57089	1.57082	1.57082	1.57726	1.57151	1.57088	1.57081	1.5708
	$\lambda_3^{1D,SEA}$	1.57768	1.57195	1.57131	1.57124	1.57123	2.41784	2.38494	2.37903	2.37867	2.37866	2.94276	2.89707	2.88328	2.88037	2.88014
	$\lambda_4^{1D,SEA}$	2.02373	2.00654	2.00559	2.00554	2.00554	4.03623	3.97928	3.96944	3.96884	3.96883	4.88814	4.73179	4.71454	4.71263	4.71242
60	$\lambda_1^{1D,SEA}$	0.400094	0.3972	0.397003	0.396992	0.39699	0.80573	0.7947	0.792725	0.792605	0.792603	0.981	0.965678	0.961072	0.960101	0.960023
	$\lambda_2^{1D,SEA}$	1.21083	1.20108	1.20035	1.2003	1.20029	1.57734	1.57159	1.57095	1.57088	1.57087	1.57726	1.57151	1.57088	1.57081	1.5708
	$\lambda_3^{1D,SEA}$	1.57894	1.57325	1.57261	1.57254	1.57253	2.41835	2.38541	2.37949	2.37913	2.37913	2.94278	2.8971	2.88331	2.8804	2.88016
	$\lambda_4^{1D,SEA}$	2.05436	2.03286	2.03117	2.03104	2.03102	4.03715	3.98007	3.97021	3.96961	3.9696	4.88814	4.73179	4.71454	4.71263	4.71242
90	$\lambda_1^{1D,SEA}$	0.409167	0.40585	0.405566	0.405544	0.405541	0.806001	0.794961	0.792983	0.792863	0.79286	0.981014	0.965692	0.961086	0.960116	0.960038
	$\lambda_2^{1D,SEA}$	1.239	1.22696	1.22581	1.22571	1.2257	1.57743	1.57168	1.57104	1.57097	1.57097	1.57727	1.57152	1.57088	1.57081	1.5708
	$\lambda_3^{1D,SEA}$	1.58105	1.57542	1.57479	1.57472	1.57471	2.4192	2.3862	2.38027	2.37991	2.3799	2.94283	2.89714	2.88335	2.88044	2.88021
	$\lambda_4^{1D,SEA}$	2.10413	2.07578	2.07289	2.07261	2.07258	4.03867	3.9814	3.9715	3.97089	3.97088	4.88814	4.7318	4.71455	4.71263	4.71242

Çizelge 5.17 : $L/h = 50$ için önburulmalı çubuğa ait yakınsama çalışması.

φ°	Mod	$N_e (h/b = 0.2)$					$N_e (h/b = 0.5)$					$N_e (h/b = 0.8)$				
		5	15	45	135	405	5	15	45	135	405	5	15	45	135	405
0	$\lambda_1^{1D,SEA}$	0.388399	0.384084	0.383608	0.383593	0.383593	0.804629	0.792426	0.78929	0.788884	0.788869	0.980912	0.965457	0.96052	0.959137	0.958915
	$\lambda_2^{1D,SEA}$	1.16764	1.1547	1.15327	1.15323	1.15322	1.57726	1.57151	1.57088	1.57081	1.5708	1.57726	1.57151	1.57088	1.57081	1.5708
	$\lambda_3^{1D,SEA}$	1.57726	1.57151	1.57088	1.57081	1.5708	2.41398	2.37759	2.3682	2.36698	2.36694	2.94245	2.89637	2.88158	2.87743	2.87677
	$\lambda_4^{1D,SEA}$	1.95565	1.93265	1.93024	1.93016	1.93016	4.02619	3.96371	3.94811	3.94608	3.94601	4.88814	4.73179	4.71454	4.71263	4.71242
30	$\lambda_1^{1D,SEA}$	0.388874	0.384536	0.384053	0.384038	0.384037	0.804643	0.792439	0.789303	0.788897	0.788882	0.980913	0.965458	0.960521	0.959137	0.958916
	$\lambda_2^{1D,SEA}$	1.16913	1.15607	1.15461	1.15456	1.15456	1.57727	1.57152	1.57088	1.57081	1.5708	1.57726	1.57151	1.57088	1.57081	1.5708
	$\lambda_3^{1D,SEA}$	1.57737	1.57162	1.57098	1.57091	1.57091	2.41402	2.37763	2.36824	2.36702	2.36698	2.94245	2.89637	2.88158	2.87744	2.87677
	$\lambda_4^{1D,SEA}$	1.95833	1.93494	1.93246	1.93237	1.93237	4.02627	3.96378	3.94818	3.94615	3.94607	4.88814	4.73179	4.71454	4.71263	4.71242
60	$\lambda_1^{1D,SEA}$	0.390296	0.385888	0.385387	0.385368	0.385367	0.804683	0.792479	0.789342	0.788936	0.78892	0.980915	0.96546	0.960523	0.95914	0.958918
	$\lambda_2^{1D,SEA}$	1.17358	1.16014	1.1586	1.15854	1.15854	1.57728	1.57153	1.57089	1.57082	1.57082	1.57726	1.57151	1.57088	1.57081	1.5708
	$\lambda_3^{1D,SEA}$	1.57768	1.57195	1.57131	1.57124	1.57123	2.41415	2.37775	2.36836	2.36714	2.36709	2.94246	2.89637	2.88159	2.87744	2.87678
	$\lambda_4^{1D,SEA}$	1.96635	1.94179	1.93909	1.93897	1.93897	4.0265	3.96398	3.94837	3.94634	3.94626	4.88814	4.73179	4.71454	4.71263	4.71242
90	$\lambda_1^{1D,SEA}$	0.392651	0.388128	0.387596	0.387573	0.387571	0.804751	0.792544	0.789406	0.789	0.788985	0.980919	0.965464	0.960526	0.959143	0.958922
	$\lambda_2^{1D,SEA}$	1.18095	1.16689	1.16522	1.16513	1.16513	1.57731	1.57156	1.57092	1.57085	1.57084	1.57726	1.57151	1.57088	1.57081	1.5708
	$\lambda_3^{1D,SEA}$	1.5782	1.57249	1.57185	1.57178	1.57177	2.41436	2.37795	2.36855	2.36733	2.36729	2.94247	2.89638	2.8816	2.87745	2.87679
	$\lambda_4^{1D,SEA}$	1.97962	1.95313	1.95008	1.94991	1.9499	4.02688	3.96431	3.94869	3.94666	3.94659	4.88814	4.73179	4.71454	4.71263	4.71242

Çizelge 5.18 : $L/h = 100$ için önburulmalı çubuğa ait yakınsama çalışması.

φ°	Mod	$N_e (h/b = 0.2)$					$N_e (h/b = 0.5)$					$N_e (h/b = 0.8)$				
		5	15	45	135	405	5	15	45	135	405	5	15	45	135	405
0	$\lambda_1^{1D,SEA}$	0.387142	0.381688	0.380623	0.380547	0.380546	0.804403	0.791827	0.788021	0.787198	0.787128	0.980894	0.965404	0.960369	0.958785	0.958397
	$\lambda_2^{1D,SEA}$	1.16195	1.14568	1.14249	1.14226	1.14226	1.57726	1.57151	1.57088	1.57081	1.5708	1.57726	1.57151	1.57088	1.57081	1.5708
	$\lambda_3^{1D,SEA}$	1.57726	1.57151	1.57088	1.57081	1.5708	2.41304	2.37554	2.36415	2.36168	2.36147	2.94237	2.89619	2.88111	2.87636	2.8752
	$\lambda_4^{1D,SEA}$	1.93963	1.91151	1.9062	1.90582	1.90582	4.02372	3.95945	3.94052	3.93641	3.93606	4.88814	4.73179	4.71454	4.71263	4.71242
30	$\lambda_1^{1D,SEA}$	0.387262	0.381802	0.380734	0.380659	0.380657	0.804407	0.79183	0.788024	0.787201	0.787131	0.980894	0.965404	0.96037	0.958785	0.958397
	$\lambda_2^{1D,SEA}$	1.16233	1.14602	1.14282	1.14259	1.14259	1.57726	1.57152	1.57088	1.57081	1.5708	1.57726	1.57151	1.57088	1.57081	1.5708
	$\lambda_3^{1D,SEA}$	1.57729	1.57154	1.5709	1.57083	1.57082	2.41305	2.37555	2.36416	2.36169	2.36148	2.94237	2.89619	2.88111	2.87636	2.8752
	$\lambda_4^{1D,SEA}$	1.94031	1.91209	1.90676	1.90638	1.90637	4.02374	3.95947	3.94054	3.93642	3.93607	4.88814	4.73179	4.71454	4.71263	4.71242
60	$\lambda_1^{1D,SEA}$	0.38762	0.382142	0.38107	0.380993	0.380991	0.804417	0.79184	0.788034	0.787211	0.787141	0.980894	0.965405	0.96037	0.958785	0.958398
	$\lambda_2^{1D,SEA}$	1.16345	1.14705	1.14383	1.1436	1.14359	1.57727	1.57152	1.57088	1.57081	1.5708	1.57726	1.57151	1.57088	1.57081	1.5708
	$\lambda_3^{1D,SEA}$	1.57737	1.57162	1.57098	1.57091	1.57091	2.41308	2.37558	2.36419	2.36172	2.36151	2.94238	2.89619	2.88112	2.87636	2.8752
	$\lambda_4^{1D,SEA}$	1.94235	1.91383	1.90844	1.90805	1.90804	4.02379	3.95952	3.94059	3.93647	3.93612	4.88814	4.73179	4.71454	4.71263	4.71242
90	$\lambda_1^{1D,SEA}$	0.388215	0.382709	0.381627	0.381548	0.381546	0.804434	0.791857	0.78805	0.787227	0.787157	0.980895	0.965405	0.960371	0.958786	0.958399
	$\lambda_2^{1D,SEA}$	1.16532	1.14876	1.1455	1.14526	1.14525	1.57727	1.57152	1.57089	1.57082	1.57081	1.57726	1.57151	1.57088	1.57081	1.5708
	$\lambda_3^{1D,SEA}$	1.5775	1.57176	1.57112	1.57105	1.57104	2.41314	2.37563	2.36423	2.36176	2.36155	2.94238	2.89619	2.88112	2.87636	2.8752
	$\lambda_4^{1D,SEA}$	1.94573	1.91671	1.91123	1.91082	1.91081	4.02389	3.9596	3.94067	3.93655	3.9362	4.88814	4.73179	4.71454	4.71263	4.71242

Burada, $\lambda_i^{1D,SEA}$ ve $\lambda_i^{3D,SEA}$ sırasıyla, i . moda ait bir boyutlu ve üç boyutlu sonlu eleman analizinden elde edilen boyutsuz doğal frekans değerlerini temsil etmektedir. Üç boyutlu sonlu eleman analizlerinde kullanılan eleman sayısının belirlenmesini amaçlayan yakınsama çalışması Çizelge C.14-C.16'da sunulmuştur.

Ayrıca Çizelge 5.19'da koyu olarak yazılan sayısal değerler, uzama davranışının baskın olduğu uzama-burulma bağlaşıklık moduna ilişkin boyutsuz doğal frekans değerlerini; koyu olarak yazılmayan sayısal değerler ise burulma davranışının baskın olduğu uzama-burulma bağlaşıklık moduna ilişkin boyutsuz doğal frekans değerlerini ifade etmektedir. Çizelge 5.20 ise bir boyutlu sonlu eleman analizinden elde edilen ilk dört uzama-burulma bağlaşıklık moduna ait boyutsuz doğal frekansların, ABAQUS ortamında gerçekleştirilen üç boyutlu sonlu eleman analizinden elde edilen karşılıklarına olan oranını göstermektedir.

Çizelge 5.19 ve 5.20'den görülebileceği üzere, burulma davranışının baskın olduğu uzama-burulma bağlaşıklık modlar için bir boyutlu sonlu eleman analizinden elde edilen sonuçların, üç boyutlu sonlu eleman analizinden elde edilen sonuçlar ile uyumlu olduğu söylenebilir. Çizelge 5.19'den görülebileceği üzere, toplam önburulma açısı arttıkça burulma davranışının baskın olduğu uzama-burulma bağlaşıklık modlara ait boyutsuz doğal frekanslar her iki sonlu eleman modelinde de artış göstermektedir. Ancak, benzer bir yorum uzama davranışının baskın olduğu uzama-burulma bağlaşıklık modlar için yapılamamaktadır.

Uzama davranışının baskın olduğu uzama-burulma bağlaşıklık modlarda, toplam önburulma açısı arttıkça bir boyutlu sonlu eleman analizinden elde edilen sonuçların arttığı buna karşılık üç boyutlu sonlu eleman analizinde azaldığı gözlenmektedir. Elde edilen sonuçlar arasında bulunan bu farklılığın ana sorumlusunun bir boyutlu sonlu eleman modelinde, önburulmalı çubuğa ait çarpılma fonksiyonu yerine önburulmasız çubuğa ait çarpılma fonksiyonunun kullanımı olduğu K.C. Liu ve diğ. (2009) tarafından belirtilmiştir. Ayrıca, bütün uzama-burulma bağlaşıklık doğal frekans sonuçları için, bir boyutlu sonlu eleman modelinden elde edilen sonuçlar ile üç boyutlu sonlu eleman modelinden elde edilen karşılıklar arasında kabul edilebilir sınırlar dahilinde farklılıklar olduğu ve bunun da üniform olmayan burulma kabulüne dayalı bir boyutlu mekanik modele ait hareket denklemlerinin elde edilmesi esnasında kinematik alana ilişkin yapılan kabullerden kaynaklandığının düşünüldüğü de belirtilmelidir.

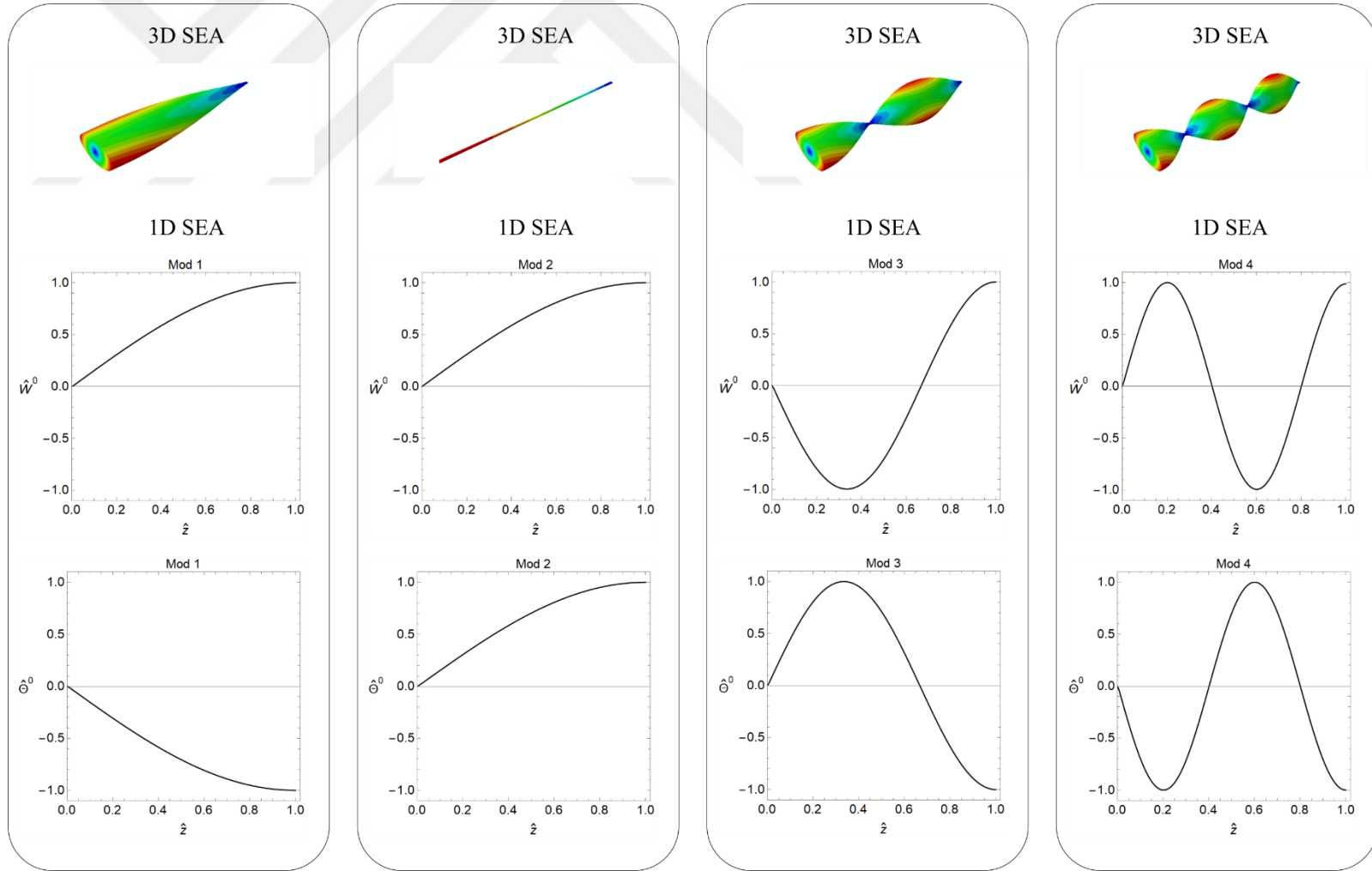
Çizelge 5.19 : Bir boyutlu sonlu eleman analizinden elde edilen sonuçların üç boyutlu sonlu eleman analizinden elde edilenlerle karşılaştırılması.

L/h	φ°	h/b	$\lambda_1^{1D,SEA}$	$\lambda_2^{1D,SEA}$	$\lambda_3^{1D,SEA}$	$\lambda_4^{1D,SEA}$	$\lambda_1^{3D,SEA}$	$\lambda_2^{3D,SEA}$	$\lambda_3^{3D,SEA}$	$\lambda_4^{3D,SEA}$
25	0	0.2	0.389973	1.17945	1.57081	1.99695	0.39732	1.19981	1.60924	2.02516
		0.5	0.792399	1.57081	2.37852	3.96858	0.80652	1.60751	2.41991	4.03434
		0.8	0.96009	1.57081	2.88036	4.71263	0.97934	1.60702	2.93800	4.82012
	30	0.2	0.391743	1.18471	1.57124	2.00554	0.39906	1.20473	1.60845	2.03237
		0.5	0.792451	1.57082	2.37867	3.96884	0.80656	1.60743	2.42004	4.03455
		0.8	0.960093	1.57081	2.88037	4.71263	0.97934	1.60702	2.93800	4.82011
	60	0.2	0.396992	1.2003	1.57254	2.03104	0.40424	1.21932	1.60608	2.05379
		0.5	0.792605	1.57088	2.37913	3.96961	0.80669	1.60719	2.42041	4.03516
		0.8	0.960101	1.57081	2.8804	4.71263	0.97935	1.60700	2.93802	4.82005
	90	0.2	0.405544	1.22571	1.57472	2.07261	0.41243	1.24244	1.60216	2.08776
		0.5	0.792863	1.57097	2.37991	3.97089	0.80690	1.60678	2.42103	4.03617
		0.8	0.960116	1.57081	2.88044	4.71263	0.97935	1.60696	2.93804	4.81994
50	0	0.2	0.383593	1.15323	1.57081	1.93016	0.39148	1.17655	1.60743	1.96792
		0.5	0.788884	1.57081	2.36698	3.94608	0.80461	1.60649	2.41394	4.02358
		0.8	0.959137	1.57081	2.87743	4.71263	0.97913	1.60624	2.93738	4.81848
	30	0.2	0.384038	1.15456	1.57091	1.93237	0.39197	1.17800	1.60723	1.97028
		0.5	0.788897	1.57081	2.36702	3.94615	0.80464	1.60648	2.41403	4.02372
		0.8	0.959137	1.57081	2.87744	4.71263	0.97913	1.60624	2.93739	4.81848
	60	0.2	0.385368	1.15854	1.57124	1.93897	0.39326	1.18182	1.60663	1.97644
		0.5	0.788936	1.57082	2.36714	3.94634	0.80468	1.60642	2.41413	4.02388
		0.8	0.95914	1.57081	2.87744	4.71263	0.97913	1.60623	2.93739	4.81845
	90	0.2	0.387573	1.16513	1.57178	1.94991	0.39550	1.18845	1.60563	1.98718
		0.5	0.789	1.57085	2.36733	3.94666	0.80473	1.60632	2.41429	4.02415
		0.8	0.959143	1.57081	2.87745	4.71263	0.97913	1.60622	2.93739	4.81842
100	0	0.2	0.380547	1.14226	1.57081	1.90582	0.38865	1.16649	1.60645	1.94596
		0.5	0.787198	1.57081	2.36168	3.93641	0.80368	1.60596	2.41107	4.01853
		0.8	0.958785	1.57081	2.87636	4.71263	0.97902	1.60583	2.93707	4.81744
	30	0.2	0.380659	1.14259	1.57083	1.90638	0.38876	1.16681	1.60640	1.94649
		0.5	0.787201	1.57081	2.36169	3.93642	0.80368	1.60596	2.41107	4.01855
		0.8	0.958785	1.57081	2.87636	4.71263	0.97902	1.60583	2.93707	4.81743
	60	0.2	0.380993	1.1436	1.57091	1.90805	0.38910	1.16782	1.60625	1.94817
		0.5	0.787211	1.57081	2.36172	3.93647	0.80369	1.60594	2.41110	4.01859
		0.8	0.958785	1.57081	2.87636	4.71263	0.97902	1.60583	2.93707	4.81742
	90	0.2	0.381548	1.14526	1.57105	1.91082	0.38966	1.16951	1.60600	1.95095
		0.5	0.787227	1.57082	2.36176	3.93655	0.80370	1.60591	2.41112	4.01862
		0.8	0.958786	1.57081	2.87636	4.71263	0.97902	1.60583	2.93707	4.81742

Çizelge 5.20 : Bir boyutlu sonlu eleman analizinden elde edilen sonuçların üç boyutlu sonlu eleman analizinden elde edilenlerle karşılaştırılması.

L/h	φ°	h/b	$\frac{\lambda_1^{1D,SEA}}{\lambda_1^{3D,SEA}}$	$\frac{\lambda_2^{1D,SEA}}{\lambda_2^{3D,SEA}}$	$\frac{\lambda_3^{1D,SEA}}{\lambda_3^{3D,SEA}}$	$\frac{\lambda_4^{1D,SEA}}{\lambda_4^{3D,SEA}}$
25	0	0.2	0.98152	0.98303	0.97612	0.98607
		0.5	0.98249	0.97717	0.98290	0.98370
		0.8	0.98034	0.97747	0.98038	0.97770
	30	0.2	0.98165	0.98338	0.97687	0.98680
		0.5	0.98250	0.97722	0.98291	0.98371
		0.8	0.98035	0.97747	0.98038	0.97770
	60	0.2	0.98208	0.98440	0.97912	0.98892
		0.5	0.98254	0.97741	0.98295	0.98376
		0.8	0.98035	0.97748	0.98039	0.97771
	90	0.2	0.98330	0.98653	0.98287	0.99274
		0.5	0.98261	0.97771	0.98301	0.98383
		0.8	0.98036	0.97750	0.98040	0.97774
50	0	0.2	0.97986	0.98018	0.97722	0.98081
		0.5	0.98045	0.97779	0.98054	0.98074
		0.8	0.97958	0.97794	0.97959	0.97803
	30	0.2	0.97976	0.98010	0.97740	0.98076
		0.5	0.98043	0.97780	0.98053	0.98072
		0.8	0.97958	0.97794	0.97959	0.97803
	60	0.2	0.97993	0.98030	0.97797	0.98104
		0.5	0.98044	0.97784	0.98054	0.98073
		0.8	0.97958	0.97795	0.97959	0.97804
	90	0.2	0.97995	0.98038	0.97892	0.98124
		0.5	0.98045	0.97792	0.98055	0.98074
		0.8	0.97959	0.97795	0.97959	0.97804
100	0	0.2	0.97916	0.97923	0.97782	0.97937
		0.5	0.97949	0.97811	0.97952	0.97956
		0.8	0.97933	0.97819	0.97933	0.97824
	30	0.2	0.97917	0.97924	0.97786	0.97939
		0.5	0.97949	0.97811	0.97952	0.97956
		0.8	0.97933	0.97819	0.97933	0.97825
	60	0.2	0.97918	0.97926	0.97800	0.97941
		0.5	0.97950	0.97812	0.97952	0.97957
		0.8	0.97933	0.97819	0.97933	0.97825
	90	0.2	0.97919	0.97927	0.97824	0.97943
		0.5	0.97951	0.97815	0.97953	0.97958
		0.8	0.97933	0.97819	0.97933	0.97825

Ayrıca, Şekil 5.17’de, önburulmalı bir çubuğa ait ilk dört uzama-burulma bağlaşıklık mod şekilleri, ABAQUS karşılıklarıyla beraber sunulmuştur. Şekil 5.17’den, bir boyutlu sonlu eleman modelinden elde edilen ilk dört uzama-burulma bağlaşıklık mod şeklinin, üç boyutlu sonlu eleman modelinden edilen ilk dört uzama-burulma bağlaşıklık mod şekilleriyle benzer karakterde olduğu söylenebilir. Bir boyutlu sonlu eleman modelinden elde edilen mod şekillerinde, normalizasyon mutlak değerce maksimum olan yer değiştirme değerine göre $\hat{W}^0$ ve $\hat{\Theta}$ bağımlı bilinmeyenleri için ayrı ayrı uygulanmıştır.



Şekil 5.17 : Önburulmalı bir çubukta ilk dört uzama-burulma bağlaşıklık moduna ait mod şekilleri ($L/h = 100$, $h/b = 0.5$, $\varphi = 60^\circ$).



6. SONUÇ

Önburulmalı yapılar, kapalı bir düzlemsel eğriye belirli bir referans eksenini boyunca derinlik kazandırılması esnasında, bu düzlemsel eğrinin referans eksenini etrafında döndürülmesiyle elde edilen üç boyutlu yapılardır. Bu yapılar, başta havacılık sektörü (örneğin, türbin kanadının aerodinamik performansını arttırmak amacıyla) ve imalat sektörü (örneğin, delme işleminin gerçekleştirilmesi maksadıyla) olmak üzere makina mühendisliğinde birçok alanda kullanılmaktadır. Ayrıca önburulma kavramını, yukarıda değinildiği şekliyle, belirli teknik ihtiyaçlar doğrultusunda, bilinçli olarak tasarım sürecinde tanımlanan bir geometrik parametre olarak ele almanın yanı sıra, ideal bir önburulmasız yapı elde etmeyi amaçlayan imalat süreçlerinde ortaya çıkan bir kusur olarak da değerlendirmek mümkündür.

Birçok önburulmalı yapı, işletilmeleri esnasında içinde bulundukları zorlu ortamdan kaynaklanan -mekanik performanslarını olumsuz olarak etkileyebilen- bir takım etkilere (sıcaklık, nem, sürtünme vb.) maruz kalabilmektedir. Bu etkilerin mekanik performans üzerindeki olumsuz sonuçlarını -önburulmalı geometriye bir müdahalede bulunmaksızın- yapının malzeme özelliklerinin iyileştirilmesi vasıtasıyla belirli ölçüde hafifletmek mümkündür. Bu bağlamda, özellikle son 40 yıllık zaman dilimi içerisindeki malzeme bilimindeki gelişmeler sonucunda geliştirilen genel olarak konuma bağlı olarak değişen özelliklere sahip malzemelerin (yani homojen olmayan malzemelerin), özel olarak da fonksiyonel olarak derecelendirilmiş malzemelerin kullanımı sayesinde, bu yapıların zorlu ortamlarda görevlerini yerine getirirken dayanımlarını da koruyabilmeleri sağlanabilmektedir.

Genel olarak, -önburulmaya sahip olsun ya da olmasın- homojen olmayan malzemeden imal edilmiş yapıların mekanik davranışlarının detaylı incelenmesi için gerekli matematiksel modelin inşaa sürecinde, homojen olmayan malzeme özelliklerini sonlu eleman yöntemi çerçevesinde ifade etmek için, yapının farklı malzeme özelliklerine sahip katmanlar olarak ifade edilmesi, kullanıcı tanımlı bir altprogram geliştirilmesi veya -bu çalışmada yapıldığı gibi- malzeme özelliklerinin sıcaklığın bir fonksiyonu olarak tanımlanması gibi çeşitli yöntemler kullanılmaktadır. Ancak bu

yöntemlerin, yoğun önişleme eforu ve detaylı bir analiz için fazla sayıda eleman kullanımı gerektirmelerinden dolayı düşük verimliliğe sahip oldukları söylenebilir. Ayrıca bu noktada, yukarıda değinilen son sonlu eleman modelleme yönteminin (malzeme özelliklerinin sıcaklığın bir fonksiyonu olarak tanımlanması) uygulanabilirliğinin, gerçek ısı etkilerinin varlığında tartışmalı hale geldiği de belirtilmelidir. Ek olarak, ilgili yapının önburulmalı olması ve malzeme özelliklerinin kesit üzerinde belirli bir doğrultuda değişmesi durumunda, gerekli önişleme eforunun artacağı da değinilmesi gereken bir başka husustur. Bu bağlamda, özellikleri konuma bağlı olarak değişen malzemelerden imal edilmiş önburulmalı yapıların matematiksel modelinin verimli bir şekilde geliştirilmesinin, makine mühendisliği araştırma alanında halen önemli bir başlık olduğu söylenebilir.

Ancak yukarıda değinilen yaklaşımların aksine, konuma bağlı olarak değişen malzemeden imal edilmiş önburulmalı yapıların bir boyutlu mekanik modeller kullanarak modellenmesi, belirli şartlar altında, deney sonuçlarıyla kabul edilebilir sınırlar çerçevesinde uyumlu sonuçlar verebilen verimli bir yaklaşım olarak değerlendirilmektedir. Bu bağlamda, bu çalışma kapsamında da konuma bağlı olarak değişen malzemelerden imal edilmiş önburulmalı yapıların eğilme-eğilme bağlaşık statik, eğilme-eğilme bağlaşık dinamik ve uzama-burulma bağlaşık statik davranışları üzerinde, toplam önburulma açısı, malzeme dağılımı ve gözeneklilik gibi parametrelerin etkilerinin bir boyutlu mekanik modeller kullanılarak incelenmesi amaçlanmıştır. Ayrıca uzama-burulma bağlaşık dinamik davranış kapsamında, homojen malzemeden imal edilmiş önburulmalı çubukların modellenmesine yönelik literatürde sunulmuş bir boyutlu bir mekanik modelden hareketle bir sonlu eleman formülasyonu da geliştirilmiştir.

Bu kapsamda, mekanik davranışların incelenmesine başlamadan önce ilk olarak, malzeme özelliklerinin kesit üzerinde değiştiği durum özelinde, eğilme davranışlarını ve uzama-burulma bağlaşık davranışını birbirinden ayrı olarak inceleyebilmek amacıyla, kullanılması gereken malzeme dağılım profilinin sahip olması gereken genel karakter araştırılmıştır. Yapılan incelemeler neticesinde, geometrik olarak çift simetrik ve kesit üzerinde $\xi = 0$ eksenine göre simetrik bir malzeme dağılımına sahip bir kesitte, kayma merkezinin, geometrik merkezin ve önburulma merkezinin çakışıklığının bozulmadığı ve bu sebeple böyle bir malzeme dağılım profili kullanımının eğilme davranışları ile uzama-burulma bağlaşık davranışını birbirinden

ayrı olarak incelemeye olanak verdiği belirtilmiştir. Ayrıca, malzeme özelliklerinin eksenel doğrultuda değişmesi durumunda, çubuk eksen boyunca her kesitteki malzeme özelliği kesit üzerinde homojen olduğu için, geometrik olarak çift simetrik bir kesit kullanımının eğilme davranışları ile uzama-burulma bağlaşıklık davranışını ayrı ayrı incelemek için yeterli olduğu da belirtilmiştir.

Eğilme-eğilme bağlaşıklık statik davranışa dair incelemeler özelinde, önburulmalı çubuğun kesit kalınlığı boyunca simetrik ve üstel olarak değişen fonksiyonel olarak derecelendirilmiş malzemedен imal edildiği ve imalat kusurlarından dolayı kesitin gözenek içerdiği varsayılmıştır. Burada gözeneklerin, bütün kesit üzerine homojen olarak dağıldığı ve merkezde yoğunlaştığı iki senaryo ele alınmıştır. Timoshenko çubuk modelinin kullanıldığı çalışmada, problem ilk olarak sabit koordinat sistemine göre formüle edilmiştir. Bu formülasyona göre birinci mertebeden diferansiyel denklem sistemi olarak ifade edilen yönetici denklemlerdeki rijitlik katsayıları, önburulmadan dolayı konuma bağlı olarak değişmektedir. Bu durumda, sayısal olarak elde edilebilen çözüm, Volterra'nın çarpımsal integrali kullanılarak başlangıç değerleri yöntemiyle elde edilmiştir. Ardından aynı problem, eğri eksenli koordinat sistemine göre formüle edilmiştir. Bu durumda, birinci mertebeden diferansiyel denklem sistemi olarak ifade edilebilen yönetici denklemlerdeki rijitlik katsayıları sabitlerden oluşmaktadır ve bu sayede çözüm, matris eksponansiyeli kullanılarak kesin analitik olarak başlangıç değerleri yöntemi ile elde edilmiştir. Böylece ikinci formülasyondan hareketle, uzay-sabit düşey uç kuvveti ve cisim-sabit üniform yayılı kuvvet yükleme senaryoları için kesin analitik ifadeler sunulmuştur. Ayrıca, her iki formülasyon yaklaşımı ve çözüm yönteminden elde edilen sonuçların eş değeri de gösterilmiştir. Bu noktada, her iki formülasyon yaklaşımında da, malzemenin konuma bağlı olarak değişen karakterinin etkisinin denklemlere rijitlik katsayıları üzerinden etkidiği belirtilmelidir. Dolayısıyla kullanılan yaklaşımların genel karakterde olduğu ve daha karmaşık senaryolara da uygulanabilir olduğu söylenebilir. Hangi yöntemin ilgilenilen probleme daha uygun olduğuna analizci karar vermelidir. Örneğin, çubuk kesidinin çubuk eksen boyunca konikleştiği ya da malzeme özelliklerinin çubuk eksen boyunca değiştiği problemlerde sabit koordinat sistemine göre yapılan formülasyon daha verimli bir alternatif olarak öne çıkarken, optimizasyon gibi hesaplama yükü ve detay gerektiren çalışmalar için eğri eksenli koordinat sistemine göre yapılan formülasyon daha uygun bir seçenek olarak değerlendirilebilir. Ayrıca,

önburulmalı yapıların, eğilme-eğilme statik davranışlarını incelemek için burada faydalanan birinci mertebeden kayma şekil değişimi teorisi temelli bir boyutlu mekanik modelin uygulama sınırlarının belirlenmesi amacıyla detaylı bir inceleme yapılmıştır. Bu bağlamda, eğri eksenli koordinat sistemine göre formülasyondan elde edilen kesin analitik ifadelerden hesaplanan sonuçlar, üç boyutlu sonlu eleman modelinden elde edilen sonuçlar ile karşılaştırılmıştır. Yapılan incelemeler neticesinde, uzay-sabit düşey uç kuvveti ve cisim-sabit üniform yayılı kuvvet yükleme senaryolarında; ankastre-serbest mesnetli; küçük toplam önburulma açısına ($0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$); orta seviye ve üstü narinliğe ($L/h \geq 15$); orta seviye ve üstü genişlik-kalınlık oranına ($h/b \geq 0.5$) sahip önburulmalı yapıların eğilme-eğilme statik davranışlarının, birinci mertebeden kayma şekil değişimi varsayımı temelli bir boyutlu mekanik model yardımıyla incelenebileceğine karar verilmiştir. Kullanmış olduğu mekanik modelden hareketle, yapılan incelemenin, kinematik açıdan daha zengin mekanik modellerin sıfıncı derece çözümleri olarak değerlendirilebileceği ve bu sayede gelecek çalışmalara bir referans oluşturacağı düşünülmektedir. Son olarak, inceleme kapsamında, belirtilen sınırlar çerçevesinde kalan önburulmalı bir çubuk için hacim oranı indisinin ve gözeneklilik oranının yer değiştirmeler üzerindeki etkisi incelenmiştir.

Eğilme-eğilme bağlaşık dinamik davranışa dair incelemeler özelinde, önburulmalı çubuğun, özellikleri çubuk ekseni boyunca eksponansiyel olarak değişen malzemeden imal edildiği varsayılmıştır. Timoshenko çubuk modelinin kullanıldığı çalışmada, problem sabit koordinat sistemine göre formüle edilmiştir. Bu durumda, Hamilton Prensibi kullanılarak elde edilen ve birinci mertebeden diferansiyel denklem sistemi olarak ifade edilen yönetici denklemlerdeki atalet ve rijitlik katsayıları hem önburulmadan ve hem de malzeme özelliklerinin çubuk ekseni boyunca değişmesinden dolayı konuma bağlı olarak değişmektedir. Bu durumda, çözüm harmonik diferansiyel kuadratur yöntemi kullanılarak sayısal olarak elde edilmiştir. Bu çalışma kapsamında da birinci mertebeden kayma şekil değişimi temelli bir boyutlu mekanik modelin uygulanabilirlik aralığını tespit etmek için hesaplanan sonuçlar, üç boyutlu sonlu eleman modelinden elde edilen sonuçlar ile karşılaştırılmıştır. Yapılan değerlendirme sonucunda, ankastre-serbest mesnetli; küçük toplam önburulma açısına ($0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$); orta seviye ve üstü narinliğe ($L/h \geq 15$); orta seviye ve üstü genişlik-kalınlık oranına ($h/b \geq 0.5$) sahip önburulmalı yapıların ilk dört eğilme-

eğilme bağlaşık titreşim modunun, birinci mertebeden kayma şekil değişimi varsayımı temelli bir boyutlu mekanik model yardımıyla incelenebileceği değerlendirilmiştir. Bu çerçevedeki bir çubuk için ilk dört eğilme-eğilme bağlaşık moduna ait mod şekilleri, üç boyutlu sonlu eleman analizi sonuçlarından çıkartılan mod şekilleri ile karşılaştırmalı olarak sunulmuştur. Ardından ilk dört eğilme-eğilme bağlaşık mod şeklinin çeşitli malzeme parametresi değerleri için aldıkları biçimler sunulmuştur. Sonrasında, malzeme parametresinin ilk dört eğilme-eğilme bağlaşık doğal frekansı üzerindeki etkileri incelenmiştir. Yapılan değerlendirmeler neticesinde, önburulmalı çubukların eğilme-eğilme bağlaşık serbest titreşimlerinin, toplam önburulma açısı, ve eksenel doğrultudaki malzeme dağılımı manipüle edilerek kontrol edilebilebileceği tespit edilmiştir.

Uzama-burulma bağlaşık statik davranışa dair incelemeler özelinde, önburulmalı çubuğun kesit kalınlığı boyunca simetrik ve parabolik olarak değişen elastisite modülüne sahip bir malzemeden imal edildiği varsayılmıştır. Poisson oranı ise sabit olarak kabul edilmiştir. Uzama-burulma bağlaşıklığını modellemek için literatürde de sıklıkla yararlanılan çarpılma-temelli bir boyutlu çubuk modeli Saint-Venant burulma kabulü çerçevesinde kullanılmıştır. Temel denklemlerin minimum toplam potansiyel enerji prensibi kullanılarak elde edildiği çalışmada, çarpılma-kaynaklı rijitlik katsayıları, Neumann tipi bir sınır değer probleminin çözümünü gerektiren çarpılma fonksiyonu yerine, Dirichlet tipi bir sınır değer probleminin çözümüne olanak sağlayan Prandtl gerilme fonksiyonu cinsinden ifade edilmiştir. Çarpılma-kaynaklı rijitlik katsayılarının hesaplanmasından sorumlu bilgisayar kodunun doğrulanması amacıyla çeşitli homojen ve homojen olmayan kesitler için bir dizi doğrulama çalışması gerçekleştirilmiştir. Ayrıca kullanılan yaklaşımın, literatürde bulunan çoklu malzemeli membran analogisi ile bir karşılaştırması yapılmıştır. Ardından kullanılan yaklaşımdan hesaplanan kayma gerilmeleri ve çarpılma-kaynaklı rijitlik katsayıları, çoklu malzemeli membran yaklaşımından elde edilen sonuçlar ile karşılaştırılmıştır. Yapılan sonlu eleman analizleri sonucunda ve güncel literatür ışığında, önerilen Saint-Venant burulma kabulü temelli bir boyutlu mekanik modelin, kesit üzerinde ξ doğrultusunda parabolik olarak değişen malzeme özelliklerine sahip; narin ($L/h = 200$); ince cidarlı açık kesitli dikdörtgen keside sahip ($h/b = 0.1$) ve küçük toplam önburulma açısına sahip ($0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$) önburulmalı yapılar için uç çekme kuvveti ve uç burulma momenti yüklemeleri altında uygulanabilir olduğu tespit edilmiştir. Bu

şartlar altında yapılan değerlendirmeler neticesinde, bu kriterleri sağlayan önburulmalı çubukların uzama-burulma bağlaşık statik davranışlarının, toplam önburulma açısı ve kesit üzerindeki malzeme dağılımı manipüle edilerek kontrol edilebilebileceği gösterilmiştir. Malzeme parametresi arttıkça, sırasıyla uç çekme kuvveti ve uç burulma momenti yükleme senaryoları için, uç burulma açısının ve uç tarafsız eksen ötelenmesinin azaldığı ve yapının malzeme parametresindeki değişime olan hassasiyetinin giderek azaldığı gözlemlenmiştir.

Uzama-burulma bağlaşık dinamik davranışa dair incelemeler özelinde, bu davranışı incelemeye yönelik literatürde daha önceden sunulmuş olan üniform olmayan burulma kabülünü temel alan bir boyutlu mekanik model temel alınarak bir sonlu eleman formülasyonu gerçekteştirilmiştir. İlgilenilen önburulmalı yapının homojen malzemedan imal edildiği ve eliptik keside sahip olduğu varsayılmıştır. Eksenel uzama ile ilgili bağımlı bilinmeyenin, 1. dereceden Lagrange interpolasyon fonksiyonları; burulma açısı ile ilgili bağımlı bilinmeyenin ise Hermite kübik interpolasyon fonksiyonları kullanılarak ifade edildiği çalışmada, kullanılan bu interpolasyon fonksiyonları üzerinden, bir Euler-Bernoulli çubuğunun uzama ve eğilmesinin beraber incelenmesi için kullanılan sonlu eleman formülasyonu ile burada sunulan sonlu eleman formülasyonu arasında bir analogi kurulmuştur. Ardından, farklı uzunluk-kalınlık, en-boy ve önburulma açıları için geliştirilen bir boyutlu sonlu eleman formülasyonuna dair bir yakınsama çalışması sunularak, incelemelerde kullanılması gereken minimum eleman sayısı belirlenmiştir. Sonrasında, bir boyutlu sonlu eleman formülasyonundan elde edilen ilk dört uzama-burulma bağlaşık moduna ait doğal frekans sonuçları, üç boyutlu sonlu eleman modelinden elde edilen sonuçlar ile karşılaştırılarak geliştirilen formülasyonun ürettiği sonuçlar tartışılmıştır. Ayrıca, bir boyutlu sonlu eleman modelinde elde edilen ilk dört uzama-burulma bağlaşık moduna ilişkin mod şekilleri de sunulmuştur.

Yukarıda sonuçları detaylı olarak sunulmuş olan incelemelerin neticesinde, özellikleri konuma bağlı olarak değişen malzemedan imal edilmiş ve gerekli uygulanabilirlik sınırları içerisinde tasarlanmış önburulmalı yapıların, eğilme-eğilme bağlaşık statik, eğilme-eğilme bağlaşık dinamik ve uzama-burulma bağlaşık statik davranışları üzerinde, toplam önburulma açısı, malzeme dağılımı ve gözeneklilik gibi parametrelerin etkilerinin, bir boyutlu mekanik modeller kullanılarak verimli olarak incelenebileceği söylenebilir. Ayrıca uzama-burulma dinamik davranış çerçevesinde,

literatürde daha önceden sunulmuş üniform olmayan burulma modelini temel alan bir boyutlu modelden hareketle geliştirilen bir boyutlu sonlu eleman formülasyonunun, özellikle burulma davranışının baskın olduğu uzama-burulma bağlaşıp modları incelemek için kullanılabilecek verimli bir yaklaşım olduğu belirtilmelidir.





KAYNAKLAR

- Abid, S., Taktak, M., Dammak, F., ve Haddar, M.** (2008). An accurate two-node finite element for the pre-twisted beam modeling. *Strojnicky Casopis*, 39(1), 39-54.
- Abrate, S.** (2008). Functionally graded plates behave like homogeneous plates. *Composites Part B: Engineering*, 39(1), 151-158. doi:10.1016/j.compositesb.2007.02.026.
- Álvarez Tejedor, T.** (2011). Gas turbine materials selection, life management and performance improvement. In *Power Plant Life Management and Performance Improvement*, (pp. 330-419). Retrieved from <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/B9781845697266500092?via%3Dihub>
- Aravas, N. & Papadioti, I.** (2022). The problem of tension–torsion of pretwisted elastic beams revisited. *Journal of Engineering Mechanics*, 148(1), 1-22. doi: 10.1061/(asce)em.1943-7889.0002037.
- Arghavan, S. & Hematiyan, M. R.** (2009). Torsion of functionally graded hollow tubes. *European Journal of Mechanics, A/Solids*, 28(3), 551-559. doi: 10.1016/j.euromechsol.2008.07.009.
- Aya, S. A. & Tufekci, E.** (2016). Out-of-plane static analysis of Nanoarches using Eringen's nonlocal elasticity theory. *Proceedings of the 2nd World Congress on New Technologies, (ICNFA 143)*. Budapest, Hungary: August 18-19 doi: 10.11159/icnfa16.143.
- Bahaadini, R. & Saidi, A. R.** (2018). On the stability of spinning thin-walled porous beams. *Thin-Walled Structures*, 132, 604-615. doi: 10.1016/j.tws.2018.09.022.
- Balhaddad, A. S. & Onipede, D.** (1998). Three-dimensional free vibration of pretwisted beams. *AIAA Journal*, 36(8), 1524-1528. doi: 10.2514/2.547.
- Banerjee, J. R.** (2001). Free vibration analysis of a twisted beam using the dynamic stiffness method. *International Journal of Solids and Structures*, 38(38-39), 6703-6722. doi: 10.1016/S0020-7683(01)00119-6.
- Batra, R. C.** (2006). Torsion of a functionally graded cylinder. *AIAA Journal*, 44(6), 1363-1365. doi: 10.2514/1.19555.
- Bauchau, O. A. & Hong, C. H.** (1987). Large displacement analysis of naturally curved and twisted composite beams. *AIAA Journal*, 25(11), 1469-1475. doi: 10.2514/3.9806.
- Bellman, R. & Casti, J.** (1971). Differential quadrature and long-term integration. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 34(2), 235-238. doi: 10.1016/0022-247X(71)90110-7.

- Bert, C. W., Wang, X., ve Striz, A. G.** (1994). Static and free vibrational analysis of beams and plates by differential quadrature method. *Acta Mechanica*, 102(1-4), 11-24. doi: 10.1007/BF01178514.
- Bhattacharya, S. & Das, D.** (2020). Modified couple stress-based free vibration behavior of pre-twisted tapered BFGM rotating micro beam considering spin-softening and Coriolis effects. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part L: Journal of Materials: Design and Applications*, 234(1), 21-47. doi: 10.1177/1464420719870822.
- Biot, M. A.** (1939). Increase of torsional stiffness of a prismatical bar due to axial tension. *Journal of Applied Physics*, 10(12), 860-864. doi: 10.1063/1.1707272.
- Birman, V. & Byrd, L. W.** (2007). Modeling and analysis of functionally graded materials and structures. *Applied Mechanics Reviews*, 60(5), 195-216. doi: 10.1115/1.2777164.
- Bochev, P. & Lehoucq, R. B.** (2005). On the finite element solution of the pure Neumann problem. *SIAM Review*, 47(1), 50-66. doi: 10.1137/S0036144503426074.
- Bousahla, A. A., Houari, M. S. A., Tounsi, A., ve Adda Bedia, E. A.** (2014). A novel higher order shear and normal deformation theory based on neutral surface position for bending analysis of advanced composite plates. *International Journal of Computational Methods*, 11(6), 1350082. doi: 10.1142/S0219876213500825.
- Carnegie, W.** (1957). Static bending of pre-twisted cantilever blading. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, 171(1), 873-894. doi: 10.1243/pime_proc_1957_171_071_02.
- Carnegie, W.** (1959). Vibrations of pre-twisted cantilever blading. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, 173(1), 343-374. doi: 10.1243/pime_proc_1959_173_038_02.
- Carnegie, W.** (1962). Vibrations of pre-twisted cantilever blading: An additional effect due to torsion. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, 176(13), 315-322. doi: 10.1243/pime_proc_1962_176_030_02.
- Carnegie, W.** (1964). Vibrations of pre-twisted cantilever blading allowing for rotary inertia and shear deflection. *Journal of Mechanical Engineering Science*, 6(2), 105-109. doi: 10.1243/jmes_jour_1964_006_019_02.
- Carnegie, W., Dawson, B., ve Thomas, J.** (1965). Vibration characteristics of cantilever blading. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Conference Proceedings*, 180(9), 71-79. doi: 10.1243/pime_conf_1965_180_235_02.
- Carnegie, W. & Thomas, J.** (1972). The coupled bending — bending vibration of pre-twisted tapered blading. *Journal of Engineering for Industry*, 94(1), 255-266. doi: 10.1115/1.3428120.

- Celep, Z. & Turhan, D.** (1986). On the influence of pre-twisting on the vibration of beams including the shear and rotatory inertia effects. *Journal of Sound and Vibration*, 110(3), 523-528.
- Chandiramani, N. K., Shete, C. D., ve Librescu, L. I.** (2003). Vibration of higher-order-shearable pretwisted rotating composite blades. *International Journal of Mechanical Sciences*, 45(12), 2017-2041. doi: 10.1016/j.ijmecsci.2004.02.001.
- Chapra, S. & Canale, R.** (2006). *Numerical Methods for Engineers*. McGraw-Hill.
- Chen, D., Kitipornchai, S., ve Yang, J.** (2018). Dynamic response and energy absorption of functionally graded porous structures. *Materials and Design*, 140, 473-487. doi: 10.1016/j.matdes.2017.12.019.
- Chen, W.-R.** (2007). Parametric studies on buckling loads and critical speeds of microdrill bits. *International Journal of Mechanical Sciences*, 49(8), 935-949. doi: 10.1016/j.ijmecsci.2007.01.005.
- Chen, W.-R.** (2010). On the vibration and stability of spinning axially loaded pre-twisted Timoshenko beams. *Finite Elements in Analysis and Design*, 46(11), 1037-1047. doi: 10.1016/j.finel.2010.07.020.
- Chen, W.-R.** (2012). Parametric studies on bending of twisted timoshenko beams under complex loadings. *Journal of Mechanics*, 28(1), N1-N6. doi: 10.1017/jmech.2012.23.
- Chen, W.-R.** (2014). Effect of local Kelvin-Voigt damping on eigenfrequencies of cantilevered twisted Timoshenko beams. *Procedia Engineering*, 79, 160-165. doi: 10.1016/j.proeng.2014.06.325.
- Cheng, H. & Yan, X.** (2012). Difference and application of matrix displacement method and finite element method in the truss structure analysis. *Applied Mechanics and Materials*, 117-119, 112-117. doi: 10.4028/www.scientific.net/AMM.117-119.112.
- Choi, S. C., Park, J. S., ve Kim, J. H.** (2007). Vibration control of pre-twisted rotating composite thin-walled beams with piezoelectric fiber composites. *Journal of Sound and Vibration*, 300(1-2), 176-196. doi: 10.1016/j.jsv.2006.07.051.
- Chu, C.** (1951). The effect of initial twist on the torsional rigidity of thin prismatical bars and tubular members. *Proceedings of the 1st U.S. National Congress of Applied Mechanics*, (pp. 265-269). United States of America: Illinois Institute of Technology, June 11-16.
- Das, A., Agarwal, G., Inaba, K., ve Karmakar, A.** (2019). Time dependent low velocity impact response of turbomachinery blade made of porous exponential FGM. *ASME 2019 Gas Turbine India Conference, GTINDIA 2019*, (pp. GTINDIA2019-2785). India: Tamil Nadu, Chennai, December 5-6. doi: 10.1115/GTINDIA2019-2785.
- Dawson, B.** (1968). Coupled bending-bending vibrations of pre-twisted cantilever blading treated by the Rayleigh-Ritz energy method. *Journal of Mechanical Engineering Science*, 10(5), 381-388. doi: 10.1243/jmes_jour_1968_010_060_02.

- Dawson, B. & Carnegie, W.** (1969). Modal curves of pre-twisted beams of rectangular cross-section. *Journal Mechanical Engineering Science*, 11(1), 1-13. doi: 10.1243/JMES_JOUR_1969_011_003_02.
- Dawson, B., Ghosh, N. G., ve Carnegie, W.** (1971). Effect of slenderness ratio on the natural frequencies of pre-twisted cantilever beams of uniform rectangular cross-section. *Journal of Mechanical Engineering Science*, 13(1), 51-59. doi: 10.1243/JMES_JOUR_1971_013_008_02.
- Dokumaci, E., Thomas, J., ve Carnegie, W.** (1967). Matrix displacement analysis of coupled bending-bending vibrations of pretwisted blading. *Journal of Mechanical Engineering Science*, 9(4), 247-254. doi: 10.1243/jmes_jour_1967_009_039_02.
- Ebrahimi, F. & Barati, M. R.** (2017). Through-the-length temperature distribution effects on thermal vibration analysis of nonlocal strain-gradient axially graded nanobeams subjected to nonuniform magnetic field. *Journal of Thermal Stresses*, 40(5), 548-563. doi: 10.1080/01495739.2016.1254076.
- Ecsedi, I.** (2009). Some analytical solutions for Saint-Venant torsion of non-homogeneous cylindrical bars. *European Journal of Mechanics, A/Solids*, 28(5), 985-990. doi: 10.1016/j.euromechsol.2009.03.010.
- Ecsedi, I. & Baksa, A.** (2020). Saint-Venant torsion of non-homogeneous orthotropic circular cylinder. *Archive of Applied Mechanics*, 90(4), 815-827. doi: 10.1007/s00419-019-01640-y.
- Eishinskii, A. M., Adlucky, V. J., ve Tsadikova, E. Ts.** (1999). About a torsional problem for the orthotropic non-homogeneous rod of rectangular cross-section. *Technische Mechanik*, 19(1), 45-48.
- Eltaher, M. A., Alshorbagy, A. E., ve Mahmoud, F. F.** (2013). Determination of neutral axis position and its effect on natural frequencies of functionally graded macro/nanobeams. *Composite Structures*, 99, 193-201. doi: 10.1016/j.compstruct.2012.11.039.
- Eroglu, U.** (2015). In-plane free vibrations of circular beams made of functionally graded material in thermal environment: Beam theory approach. *Composite Structures*, 122, 217-228. doi: 10.1016/j.compstruct.2014.11.051.
- Fang, Z. Z., Fan, P., ve Guo, J.** (2016). U.S. Patent No. 9,388,482 B2: U. S. Patent and Trademark Office.
- Farsadi, T.** (2022). Variable thickness thin-walled rotating blades made of functionally graded porous materials. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 236(14), 7674-7689. doi: 10.1177/09544062221080654.
- Fazelzadeh, S. A., Malekzadeh, P., Zahedinejad, P., ve Hosseini, M.** (2007). Vibration analysis of functionally graded thin-walled rotating blades under high temperature supersonic flow using the differential quadrature method. *Journal of Sound and Vibration*, 306(1-2), 333-348. doi: 10.1016/j.jsv.2007.05.011.

- Filiz, S., Bediz, B., Romero, L. A., ve Ozdoganlar, O. B.** (2014). Three dimensional dynamics of pretwisted beams: A spectral-Tchebychev solution. *Journal of Sound and Vibration*, 333(10), 2823-2839. doi: 10.1016/j.jsv.2014.01.010.
- Galuppi, L. & Royer-Carfagni, G.** (2019). Membrane analogy for multi-material bars under torsion. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 475(2225), 20190124. doi: 10.1098/rspa.2019.0124.
- García A., C., Dauchez, N., Buot de l'Epine, Y., ve Lefebvre, G.** (2021). Localized modes prediction in a membrane with non-uniform tension from the quasi-static measurement of its localization landscape. *Journal of Sound and Vibration*, 511, 116272. doi: 10.1016/j.jsv.2021.116272.
- García-Moreno, F.** (2016). Commercial applications of metal foams: Their properties and production. *Materials*, 9(2), 85. doi: 10.3390/ma9020085.
- Ghorbani Shenaz, A., Malekzadeh, P., ve Ziaee, S.** (2017). Vibration analysis of pre-twisted functionally graded carbon nanotube reinforced composite beams in thermal environment. *Composite Structures*, 162, 325-340. doi: 10.1016/j.compstruct.2016.12.009.
- Ghorbani Shenaz, A., Ziaee, S., ve Malekzadeh, P.** (2017). Nonlinear vibration analysis of pre-twisted functionally graded microbeams in thermal environment. *Thin-Walled Structures*, 118, 87-104. doi: 10.1016/j.tws.2017.05.003.
- Giannakopoulos, A. E., Aravas, N., Papageorgopoulou, A., ve Vardoulakis, I.** (2013). A structural gradient theory of torsion, the effects of pretwist, and the tension of pre-twisted DNA. *International Journal of Solids and Structures*, 50(24), 3922-3933. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2013.08.003.
- Gupta, R. S. & Rao, S. S.** (1978). Finite element eigenvalue analysis of tapered and twisted Timoshenko beams. *Journal of Sound and Vibration*, 56(2), 187-200. doi: 10.1016/S0022-460X(78)80014-5.
- Hodges, D. H.** (1980). Torsion of pretwisted beams due to axial loading. *Journal of Applied Mechanics*, 47(2), 393-397. doi: 10.1115/1.3153675.
- Horgan, C. O. & Chan, A. M.** (1998). Torsion of functionally graded isotropic linearly elastic bars. *Journal of Elasticity*, 52(2), 181-199. doi: 10.1023/A:1007544011803.
- Houbolt, J. C. ve Brooks, G. W.** (1958). Differential equations of motion for cobined flapwise bending, chordwise bending, and torsion of twisted nonuniform rotor blades (Rapor No: NACA-TR-1346). Washington, D.C., USA: Government Printing Office.
- Hu, Y., Zhao, Y., Wang, N., ve Chen, X.** (2020). Dynamic analysis of varying speed rotating pretwisted structures using refined beam theories. *International Journal of Solids and Structures*, 185-186, 292-310. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2019.08.008.
- Huang, B. W.** (2004). The drilling vibration behavior of a twisted microdrill. *Journal of Manufacturing Science and Engineering, Transactions of the ASME*, 126(4), 719-726. doi: 10.1115/1.1813472.

- İnan, M.** (1966). *Elastik çubukların genel teorisi*. İstanbul Teknik Üniversitesi.
- Ivanov, M. I., Kremer, I. A., & Urev, M. V.** (2019). Solving the pure Neumann problem by a finite element method. *Numerical Analysis and Applications*, 12(4), 359-371. doi: 10.1134/S1995423919040049.
- Jankowski, P., Żur, K. K., Kim, J., Lim, C. W., ve Reddy, J. N.** (2021). On the piezoelectric effect on stability of symmetric FGM porous nanobeams. *Composite Structures*, 267, 113880. doi: 10.1016/j.compstruct.2021.113880.
- Jha, D. K., Kant, T., ve Singh, R. K.** (2013). A critical review of recent research on functionally graded plates. *Composite Structures*, 96, 833-849. doi: 10.1016/j.compstruct.2012.09.001.
- Kar, R. C. & Sujata, T.** (1992). Dynamic stability of a rotating, pretwisted and preconed cantilever beam including coriolis effects. *Computers and Structures*, 42(5), 741-750. doi: 10.1016/0045-7949(92)90186-4.
- Karimi-Nobandegani, A., Fazelzadeh, S. A., ve Ghavanloo, E.** (2018). Non-conservative stability of spinning pretwisted cantilever beams. *Journal of Sound and Vibration*, 412, 130-147. doi: 10.1016/j.jsv.2017.09.035.
- Katsikadelis, J. T. & Tsiatas, G. C.** (1999). The boundary element method for the torsion problem of non-homogeneous anisotropic bars. *Proceedings of the 3rd National Congress on Computational Mechanics of GRACM*, (pp. 517-526), Greece: Volos, June 24-26.
- Katsikadelis, J. T. & Tsiatas, G. C.** (2016). Saint-Venant torsion of non-homogeneous anisotropic bars. *Journal of Applied and Computational Mechanics*, 2(1), 42-53. doi: 10.22055/jacm.2016.12270.
- Kaza, K. R. V. & Kielb, R. E.** (1984). Effects of warping and pretwist on torsional vibration of rotating beams. *Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME*, 51(4), 913-920. doi: 10.1115/1.3167746.
- Koizumi, M. & Niino, M.** (1995). Overview of FGM research in Japan. *MRS Bulletin*, 20(1), 19-21. doi: 10.1557/S0883769400048867.
- Kolchin, G. B.** (1971). *Calculation of structural elements made of elastic inhomogeneous materials*. Kartya Moldovenyaske.
- Konyashin, I., Zaitsev, A. A., Sidorenko, D., Levashov, E. A., Konischev, S. N., Sorokin, M., Hlawatschek, S., Ries, B., Mazilkin, A. A., Lauterbach, S., ve Kleebe, H. J.** (2017). On the mechanism of obtaining functionally graded hardmetals. *Materials Letters*, 186, 142-145. doi: 10.1016/j.matlet.2016.09.130.
- Kordolemis, A., Aravas, N., ve Giannakopoulos, A. E.** (2015). Pretwisted beams in axial tension and torsion: Analogy with dipolar gradient elasticity and applications to textile materials. *Journal of Engineering Mechanics*, 141(10), 04015036. doi: 10.1061/(asce)em.1943-7889.0000917.
- Kordolemis, A., Giannakopoulos, A. E., ve Aravas, N.** (2017). Pretwisted beam subjected to thermal loads: A gradient thermoelastic analogue. *Journal of Thermal Stresses*, 40(10), 1231-1253. doi: 10.1080/01495739.2017.1308810.

- Krenk, S.** (1983). The torsion-extension coupling in pretwisted elastic beams. *International Journal of Solids and Structures*, 19(1), 67-72. doi: 10.1016/0020-7683(83)90038-0.
- Kugler, S., Fotiu, P., ve Murín, J.** (2019). On the access to transverse shear stiffnesses and to stiffness quantities for non-uniform warping torsion in FGM beam structures. *Strojnický Casopis*, 69(2), 27-56. doi: 10.2478/scjme-2019-0016.
- Larbi, L. O., Kaci, A., Houari, M. S. A., ve Tounsi, A.** (2013). An efficient shear deformation beam theory based on neutral surface position for bending and free vibration of functionally graded beams. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 41(4), 421-433. doi: 10.1080/15397734.2013.763713.
- Lee, J. W. & Lee, J. Y.** (2016). Development of a transfer matrix method to obtain exact solutions for the dynamic characteristics of a twisted uniform beam. *International Journal of Mechanical Sciences*, 105, 215-226. doi: 10.1016/j.ijmecsci.2015.11.015.
- Lee, S. Y., Lin, S. M., ve Wu, C. T.** (2004). Free vibration of a rotating non-uniform beam with arbitrary pretwist, an elastically restrained root and a tip mass. *Journal of Sound and Vibration*, 273(3), 477-492. doi: 10.1016/S0022-460X(03)00506-6.
- Lekhnitskii, S. G.** (1971). *Torsion of anisotropic and non-homogeneous beams*. Fiz.Mat.Lit.
- Lengauer, W. & Dreyer, K.** (2002). Functionally graded hardmetals. *Journal of Alloys and Compounds*, 338(1-2), 194-212. doi: 10.1016/S0925-8388(02)00232-3.
- Li, L., Zhang, D. G., ve Zhu, W. D.** (2014). Free vibration analysis of a rotating hub-functionally graded material beam system with the dynamic stiffening effect. *Journal of Sound and Vibration*, 333(5), 1526-1541. doi: 10.1016/j.jsv.2013.11.001.
- Liao, C. L. & Dang, Y. H.** (1992). Structural characteristics of spinning pretwisted orthotropic beams. *Computers and Structures*, 45(4), 715-731. doi: 10.1016/0045-7949(92)90490-Q.
- Librescu, L., Oh, S. Y., ve Song, O.** (2004). Spinning thin-walled beams made of functionally graded materials: Modeling, vibration and instability. *European Journal of Mechanics, A/Solids*, 23(3), 499-515. doi: 10.1016/j.euromechsol.2003.12.003.
- Librescu, L., Oh, S. Y., ve Song, O.** (2005). Thin-walled beams made of functionally graded materials and operating in a high temperature environment: Vibration and stability. *Journal of Thermal Stresses*, 28(6-7), 649-712. doi: 10.1080/01495730590934038.
- Librescu, L., Oh, S. Y., Song, O., ve Kang, H. S.** (2008). Dynamics of advanced rotating blades made of functionally graded materials and operating in a high-temperature field. *Journal of Engineering Mathematics*, 61(1), 1-16. doi: 10.1007/s10665-007-9155-5.

- Librescu, L. & Song, O.** (2006). *Thin-walled composite beams: Theory and application*. Springer-Verlag. doi: 10.1007/1-4020-4203-5.
- Lin, S. M.** (1997). Vibrations of elastically restrained non-uniform beams with arbitrary pretwist. *American Institute of Aeronautics and Astronautics*, 35(11), 1681-1687. doi: 10.2514/2.22.
- Lin, S. M.** (1998). Non-uniform timoshenko beams with time-dependent elastic boundary conditions. *Journal of Sound and Vibration*, 217(2), 223-238. doi: 10.1006/jsvi.1998.1747.
- Lin, S. M., Lee, J. F., Lee, S. Y., ve Wang, W. R.** (2006). Prediction of vibration of rotating damped beams with arbitrary pretwist. *International Journal of Mechanical Sciences*, 48(12), 1494-1504. doi: 10.1016/j.ijmecsci.2006.05.015.
- Lin, S. M., Wang, W. R., ve Lee, S. Y.** (2001). The dynamic analysis of nonuniformly pretwisted Timoshenko beams with elastic boundary conditions. *International Journal of Mechanical Sciences*, 43(10), 2385-2405. doi: 10.1016/S0020-7403(01)00018-2.
- Lin, S. M., Wu, C. T., & Lee, S. Y.** (2003). Analysis of rotating nonuniform pretwisted beams with an elastically restrained root and a tip mass. *International Journal of Mechanical Sciences*, 45(4), 741-755. doi: 10.1016/S0020-7403(03)00052-3.
- Liu, K. C., Friend, J., ve Yeo, L.** (2009). The axial-torsional vibration of pretwisted beams. *Journal of Sound and Vibration*, 321(1-2), 115-136. doi: 10.1016/j.jsv.2008.09.016.
- Liu, L. T., Hao, Y. X., Zhang, W., ve Chen, J.** (2018). Free vibration analysis of rotating pretwisted functionally graded sandwich blades. *International Journal of Aerospace Engineering*, 2018, 1-18. doi: 10.1155/2018/2727452.
- Lomakin, V. A.** (1976). *Theory of elasticity of inhomogeneous body*. Moscow University Publishing House.
- Magrab, E. B. & Gilsinn, D. E.** (1984). Buckling loads and natural frequencies of drill bits and fluted cutters. *Journal of Manufacturing Science and Engineering, Transactions of the ASME*, 106(3), 196-204. doi: 10.1115/1.3185933.
- Malta, J., Jefri, Bur, M., ve Satria, E.** (2019). Natural frequencies of twisted cantilever beam. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 602(1), 012069. doi: 10.1088/1757-899X/602/1/012069.
- McGee, O. G.** (1992a). Closed-form effects of warping and pretwist on the torsional vibration of thin-walled open-profile cantilevers. *Thin-Walled Structures*, 13(3), 217-244. doi: 10.1016/0263-8231(92)90042-U.
- McGee, O. G.** (1992b). Influence of warping-pretwist coupling on the torsional vibration of centrifugally-stressed cantilevers with thin-walled open-profiles. *Computers and Structures*, 42(2), 175-195. doi: 10.1016/0045-7949(92)90203-C.

- Mcgee, O. G., Owings, M. I., ve Harris, J. W.** (1993). Torsional vibration of pretwisted thin-walled cantilevered I-beams. *Computers and Structures*, 47(1), 47-56. doi: 10.1016/0045-7949(93)90277-K.
- Migliaccio, G.** (2022). Analytical evaluation of stresses and strains in inhomogeneous non-prismatic beams undergoing large deflections. *Acta Mechanica*, 233, 2815-2827. doi: 10.1007/s00707-022-03247-x.
- Migliaccio, G. & Ruta, G.** (2021). The influence of an initial twisting on tapered beams undergoing large displacements. *Meccanica*, 56(7), 1831-1845. doi: 10.1007/s11012-021-01334-2.
- Mindlin, R. D. & Goodman, L. E.** (1950). Beam vibrations with time- dependent boundary conditions. *Journal of Applied Mechanics*, 17(4), 377-380. doi: 10.1115/1.4010161.
- Morimoto, T., Tanigawa, Y., ve Kawamura, R.** (2006). Thermal buckling of functionally graded rectangular plates subjected to partial heating. *International Journal of Mechanical Sciences*, 48(9), 926-937. doi: 10.1016/j.ijmecsci.2006.03.015.
- Murthy, V. R.** (1976). Dynamic characteristics of rotor blades. *Journal of Sound and Vibration*, 49(4), 483-500. doi: 10.1016/0022-460X(76)90830-0.
- Nikmehr, O. & Lashkarbolok, M.** (2019). A numerical investigation on the torsional rigidity of bars with functionally graded material (FGM) cross sections weakened by cracks. *Iranian Journal of Science and Technology - Transactions of Civil Engineering*, 43(2), 117-123. doi: 10.1007/s40996-018-0147-7.
- Oh, S. Y., Librescu, L., ve Song, O.** (2003). Vibration of turbomachinery rotating blades made-up of functionally graded materials and operating in a high temperature field. *Acta Mechanica*, 166(1-4), 69-87. doi: 10.1007/s00707-003-0049-y.
- Oh, S. Y., Librescu, L., ve Song, O.** (2005). Modelling and vibration of composite thin-walled rotating blades featuring extension-twist elastic coupling. *Aeronautical Journal*, 109(1095), 233-246. doi: 10.1017/S0001924000005212.
- Oh, S. Y., Song, O., ve Librescu, L.** (2003). Effects of pretwist and presetting on coupled bending vibrations of rotating thin-walled composite beams. *International Journal of Solids and Structures*, 40(5), 1203-1224. doi: 10.1016/S0020-7683(02)00605-4.
- Oh, Y. & Yoo, H. H.** (2016). Vibration analysis of rotating pretwisted tapered blades made of functionally graded materials. *International Journal of Mechanical Sciences* 119, 68-79. doi: 10.1016/j.ijmecsci.2016.10.002.
- Oh, Y. & Yoo, H. H.** (2018). Vibration analysis of a rotating pre-twisted blade considering the coupling effects of stretching, bending, and torsion. *Journal of Sound and Vibration*, 431, 20-39. doi: 10.1016/j.jsv.2018.05.030.

- Pease, M.** (1965). The Matricant. In M. Pease (Ed.), *Mathematics in Science and Engineering* (Vol. 16, C, pp. 172-192). Academic Press. Retrieved from <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0076539208607079>
- Raeli, A.** (2017). *Solution of the Variable Coefficient Poisson Equation On Cartesian Hierarchical Meshes In Parallel: Applications To Phase Changing Materials*. (Doktora tezi). University of Bordeaux, Ecole doctorale de mathematiques et informatique, Bordeaux.
- Raeli, A., Bergmann, M., ve Iollo, A.** (2018). A finite-difference method for the variable coefficient Poisson equation on hierarchical Cartesian meshes. *Journal of Computational Physics*, 355, 59-77. doi: 10.1016/j.jcp.2017.11.007.
- Ramesh, M. N. V. & Mohan Rao, N.** (2013). Free vibration analysis of pre-twisted rotating FGM beams. *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, 9(4), 367-383. doi: 10.1007/s10999-013-9226-x.
- Rao, S. S. & Gupta, R. S.** (2001). Finite element vibration analysis of rotating timoshenko beams. *Journal of Sound and Vibration*, 242(1), 103-124. doi: 10.1006/jsvi.2000.3362.
- Reddy, J. N.** (2006). *An Introduction to the Finite Element Method*. McGraw-Hill.
- Rongqiao, X., Jiansheng, H., ve Weiqiu, C.** (2010). Saint-Venant torsion of orthotropic bars with inhomogeneous rectangular cross section. *Composite Structures*, 92(6), 1449-1457. doi: 10.1016/j.compstruct.2009.10.042.
- Rooney, F. J. & Ferrari, M.** (1995). Torsion and flexure of inhomogeneous elements. *Composites Engineering*, 5(7), 901-911. doi: 10.1016/0961-9526(95)00043-M.
- Rosen, A.** (1980). Effect of initial twist on the torsional rigidity of beams - another point of view. *Journal of Applied Mechanics*, 47(2), 389-392. doi: 10.1115/1.3153674.
- Rosen, A.** (1983). Theoretical and experimental investigation of the nonlinear torsion and extension of initially twisted bars. *Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME*, 50(2), 321-326. doi: 10.1115/1.3167039.
- Rosen, A.** (1991). Structural and dynamic behavior of pretwisted rods and beams. *Applied Mechanics Reviews*, 44(12), 483-515. doi: 10.1115/1.3119490.
- Rousseau, C. E. & Tippur, H. V.** (2000). Compositionally graded materials with cracks normal to the elastic gradient. *Acta Materialia*, 48(16), 4021-4033. doi: 10.1016/S1359-6454(00)00202-0.
- Sabuncu, M. & Evran, K.** (2006). The dynamic stability of a rotating pre-twisted asymmetric cross-section blade subjected to lateral parametric excitation. *Finite Elements in Analysis and Design*, 42(13), 1113-1122. doi: 10.1016/j.finel.2006.04.004.
- Sadd, M. H.** (2009). *Elasticity: Theory, Applications and Numerics*. Elsevier. doi: 10.1016/B978-0-12-374446-3.X0001-6.

- Saleh, B., Jiang, J., Fathi, R., Al-hababi, T., Xu, Q., Wang, L., Song, D., ve Ma, A.** (2020). 30 Years of functionally graded materials: An overview of manufacturing methods, Applications and Future Challenges. *Composites Part B: Engineering*, 201, 108376. doi: 10.1016/j.compositesb.2020.108376.
- Sankar, B. V.** (2001). An elasticity solution for functionally graded beams. *Composites Science and Technology*, 61(5), 689-696. doi: 10.1016/S0266-3538(01)00007-0.
- Shabana, A.** (2019). *Vibration of Discrete and Continuous Systems*. Springer International Publishing. doi: 10.1007/978-3-030-04348-3.
- Shafiei, N., Mousavi, A., ve Ghadiri, M.** (2016). Vibration behavior of a rotating non-uniform FG microbeam based on the modified couple stress theory and GDQEM. *Composite Structures*, 149, 157-169. doi: 10.1016/j.compstruct.2016.04.024.
- Shorr, B. F.** (1980). Theory of twisted nonuniformly heated bars (Rapor No. NASA TM-75758). Washington, D.C., USA: Government Printing Office.
- Shu, C.** (2000). *Differential Quadrature and Its Application in Engineering*. Springer-Verlag London. doi: 10.1007/978-1-4471-0407-0.
- Sina, S. A. & Haddadpour, H.** (2014). Axial-torsional vibrations of rotating pretwisted thin walled composite beams. *International Journal of Mechanical Sciences*, 80, 93-101. doi: 10.1016/j.ijmecsci.2013.12.018.
- Slaughter, W. S.** (2002). *The Linearized Theory of Elasticity*. Birkhäuser Boston.
- Soler, A. I.** (1972). Pretwisted curved beams of thin-walled open section. *Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME*, 39(3), 779-785. doi: 10.1115/1.3422788.
- Song, O., Jeong, N. H., ve Librescu, L.** (2000). Vibration and stability of pretwisted spinning thin-walled composite beams featuring bending-bending elastic coupling. *Journal of Sound and Vibration*, 237(3), 513-533. doi: 10.1006/jsvi.2000.3100.
- Song, O., Librescu, L., ve Oh, S. Y.** (2001a). Dynamics of pretwisted rotating thin-walled beams operating in a temperature environment. *Journal of Thermal Stresses*, 24(3), 255-279. doi: 10.1080/014957301300006407.
- Song, O., Librescu, L., ve Oh, S. Y.** (2001b). Vibration of pretwisted adaptive rotating blades modeled as anisotropic thin-walled beams. *AIAA journal*, 39(2), 285-295. doi: 10.2514/2.1303.
- Steinman, D. A., Cleghorn, W. L., ve Tabarrok, B.** (1995). Exact solution for the free vibration of axially-loaded pretwisted rods. *International Journal of Mechanical Sciences*, 37(1), 21-30. doi: 10.1016/0020-7403(95)93052-8.
- Striz, A. G., Wang, X., ve Bert, C. W.** (1995). Harmonic differential quadrature method and applications to analysis of structural components. *Acta Mechanica*, 111(1-2), 85-94. doi: 10.1007/BF01187729.

- Subrahmanyam, K. B. & Kaza, K. R. V.** (1985). Finite difference analysis of torsional vibrations of pretwisted, rotating, cantilever beams with effects of warping. *Journal of Sound and Vibration*, 99(2), 213-224. doi: 10.1016/0022-460X(85)90358-X.
- Subrahmanyam, K. B., Kulkarni, S. v., ve Rao, J. S.** (1981). Coupled bending-bending vibrations of pre-twisted cantilever blading allowing for shear deflection and rotary inertia by the Reissner method. *International Journal of Mechanical Sciences*, 23(9), 517-530. doi: 10.1016/0020-7403(81)90058-8.
- Şakar, G. & Sabuncu, M.** (2008). Dynamic stability analysis of pretwisted aerofoil cross-section blade packets under rotating conditions. *International Journal of Mechanical Sciences*, 50(1), 1-13. doi: 10.1016/j.ijmecsci.2007.06.001.
- Tan, T. H., Lee, H. P., ve Leng, G. S. B.** (1998). Parametric instability of spinning pretwisted beams subjected to spin speed perturbation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 66(6), 745-764. doi: 10.1016/S0045-7949(98)00002-9.
- Tilbrook, M. T., Moon, R. J., ve Hoffman, M.** (2005). Finite element simulations of crack propagation in functionally graded materials under flexural loading. *Engineering Fracture Mechanics*, 72(16), 2444-2467. doi: 10.1016/j.engfracmech.2005.04.001.
- Tsiatas, G. C. & Babouskos, N. G.** (2017). Elastic-plastic analysis of functionally graded bars under torsional loading. *Composite Structures*, 176, 254-267. doi: 10.1016/j.compstruct.2017.05.044.
- Valliappan, V., Harursampath, D., Roy, S., ve Yu, W.** (2014). Variational asymptotic modelling of an initially-curved and pre-twisted smart beam. *22nd AIAA/ASME/AHS Adaptive Structures Conference*, (1-22). United States of America: National Harbor, Maryland, January 13-17. doi: 10.2514/6.2014-1416.
- Vielsack, P.** (2000). Lateral bending vibrations of a beam with small pretwist. *Engineering Structures*, 22(6), 691-698. doi: 10.1016/S0141-0296(99)00010-3.
- Wagner, H. & Pretschner, W.** (1936). Torsion and buckling of open sections (Rapor No. NACA-TM-807). Washington, D.C., USA: Government Printing Office.
- Wang, X.** (2015). *Differential Quadrature and Differential Quadrature Based Element Methods*. Butterworth-Heinemann. doi: 10.1016/c2014-0-03612-x.
- Washizu, K.** (1964). Some considerations on a naturally curved and twisted slender beam. *Journal of Mathematics and Physics*, 43(1-4), 111-116. doi: 10.1002/sapm1964431111.
- Wattanasakulpong, N. & Chaikittiratana, A.** (2015). Flexural vibration of imperfect functionally graded beams based on Timoshenko beam theory: Chebyshev collocation method. *Meccanica*, 50(5), 1331-1342. doi: 10.1007/s11012-014-0094-8.

- Wattanasakulpong, N., Gangadhara Prusty, B., Kelly, D. W., ve Hoffman, M.** (2012). Free vibration analysis of layered functionally graded beams with experimental validation. *Materials and Design*, 36, 182-190. doi: 10.1016/j.matdes.2011.10.049.
- Wolfram Research, Inc.** (2020). *Mathematica* (Version 12.2). Wolfram Research, Inc.
- Yardimoglu, B. & Yildirim, T.** (2004). Finite element model for vibration analysis of pre-twisted Timoshenko beam. *Journal of Sound and Vibration*, 273(4-5), 741-754. doi: 10.1016/j.jsv.2003.05.003.
- Yildirim, V.** (1999). Governing equations of initially twisted elastic space rods made of laminated composite materials. *International Journal of Engineering Science*, 37(8), 1007-1035. doi: 10.1016/S0020-7225(98)00106-2.
- Yoon, K., Lee, P. S., ve Kim, D. N.** (2015). Geometrically nonlinear finite element analysis of functionally graded 3D beams considering warping effects. *Composite Structures*, 132, 1231-1247. doi: 10.1016/j.compstruct.2015.07.024.
- Young, T. H.** (1991). Dynamic response of a pretwisted, tapered beam with non-constant rotating speed. *Journal of Sound and Vibration*, 150(3), 435-446. doi: 10.1016/0022-460X(91)90896-R.
- Young, W. C. & Budynas, R. G.** (2002). *Roark's Formulas for Stress and Strain*. McGraw-Hill.
- Zhang, D. G. & Zhou, Y. H.** (2008). A theoretical analysis of FGM thin plates based on physical neutral surface. *Computational Materials Science*, 44(2), 716-720. doi: 10.1016/j.commatsci.2008.05.016.
- Zhang, W., Niu, Y., ve Behdinan, K.** (2019). Vibration characteristics of rotating pretwisted composite tapered blade with graphene coating layers. *Aerospace Science and Technology*, 98, 105644. doi: 10.1016/j.ast.2019.105644.
- Zhao, Z. L., Zhao, H. P., Chang, Z., ve Feng, X. Q.** (2014). Analysis of bending and buckling of pre-twisted beams: A bioinspired study. *Acta Mechanica Sinica/Lixue Xuebao*, 30(4), 507-515. doi: 10.1007/s10409-014-0067-0.
- Zhu, J., Lai, Z., Yin, Z., Jeon, J., ve Lee, S.** (2001). Fabrication of ZrO₂-NiCr functionally graded material by powder metallurgy. *Materials Chemistry and Physics*, 68(1-3), 130-135. doi: 10.1016/S0254-0584(00)00355-2.
- Zhu, T. L.** (2011). The vibrations of pre-twisted rotating Timoshenko beams by the Rayleigh-Ritz method. *Computational Mechanics*, 47(4), 395-408. doi: 10.1007/s00466-010-0550-9.
- Ziou, H., Guenfoud, H., ve Guenfoud, M.** (2016). Numerical modelling of a Timoshenko FGM beam using the finite element method. *International Journal of Structural Engineering*, 7(3), 239-261. doi: 10.1504/IJSTRUCTE.2016.077719.



EKLER

EK A : Y asal matrisinin sıfırdan farklı elemanları

EK B : Ankastre-serbest sınır şartlarına sahip önburulmalı bir çubuğun tarafsız ekseninin ötelenmesine dair kesin analitik ifadeler

EK C : Üç boyutlu sonlu eleman analizlerine ilişkin yakınsama çalışmaları





EK A : Y asal matrisinin sıfırdan farklı elemanları

$$Y_{11} = Y_{22} = Y_{33} = Y_{44} = Y_{55} = Y_{66} = Y_{77} = Y_{88} = \cos(\beta z) \quad (\text{A 4.1})$$

$$Y_{12} = -Y_{21} = Y_{34} = -Y_{43} = Y_{56} = -Y_{65} = Y_{78} = -Y_{87} = \sin(\beta z) \quad (\text{A 4.2})$$

$$Y_{13} = Y_{24} = Y_{75} = Y_{86} = -z \sin(\beta z) \quad (\text{A 4.3})$$

$$Y_{14} = Y_{76} = -Y_{23} = -Y_{85} = z \cos(\beta z) \quad (\text{A 4.4})$$

$$Y_{15} = \frac{z\beta(3(-C_1 + C_3)C_4C_5 + (6(C_2^2 - C_1C_3)(C_4 + C_5) + (C_1 + C_3)C_4C_5z^2)\beta^2) \cos(\beta z) + 3((C_1 - C_3)C_4C_5 - 2(C_2^2 - C_1C_3)(C_4 - C_5)\beta^2) \sin(\beta z)}{12(C_2^2 - C_1C_3)C_4C_5\beta^3} \quad (\text{A 4.5})$$

$$Y_{16} = \frac{6C_2C_4C_5z\beta \cos(\beta z) + (-6C_2C_4C_5 + z(6(C_2^2 - C_1C_3)(C_4 + C_5) + (C_1 + C_3)C_4C_5z^2)\beta^3) \sin(\beta z)}{12(C_2^2 - C_1C_3)C_4C_5\beta^3} \quad (\text{A 4.6})$$

$$Y_{17} = \frac{(C_1 - C_3)z\beta \cos(\beta z) + (-C_1 + C_3 - 2C_2z\beta + (C_1 + C_3)z^2\beta^2) \sin(\beta z)}{4(C_2^2 - C_1C_3)\beta^2} \quad (\text{A 4.7})$$

$$Y_{18} = \frac{-z\beta(2C_2 + (C_1 + C_3)z\beta) \cos(\beta z) + (2C_2 + (-C_1 + C_3)z\beta) \sin(\beta z)}{4(C_2^2 - C_1C_3)\beta^2} \quad (\text{A 4.8})$$

$$Y_{25} = \frac{6C_2C_4C_5z\beta \cos(\beta z) - (6C_2C_4C_5 + z(6(C_2^2 - C_1C_3)(C_4 + C_5) + (C_1 + C_3)C_4C_5z^2)\beta^3) \sin(\beta z)}{12(C_2^2 - C_1C_3)C_4C_5\beta^3} \quad (\text{A } 4.9)$$

$$Y_{26} = \frac{z\beta(3(C_1 - C_3)C_4C_5 + (6(C_2^2 - C_1C_3)(C_4 + C_5) + (C_1 + C_3)C_4C_5z^2)\beta^2) \cos(\beta z) + 3((-C_1 + C_3)C_4C_5 + 2(C_2^2 - C_1C_3)(C_4 - C_5)\beta^2) \sin(\beta z)}{12(C_2^2 - C_1C_3)C_4C_5\beta^3} \quad (\text{A } 4.10)$$

$$Y_{27} = \frac{z\beta(-2C_2 + (C_1 + C_3)z\beta) \cos(\beta z) + (2C_2 + (-C_1 + C_3)z\beta) \sin(\beta z)}{4(C_2^2 - C_1C_3)\beta^2} \quad (\text{A } 4.11)$$

$$Y_{28} = \frac{(-C_1 + C_3)z\beta \cos(\beta z) + (C_1 - C_3 + 2C_2z\beta + (C_1 + C_3)z^2\beta^2) \sin(\beta z)}{4(C_2^2 - C_1C_3)\beta^2} \quad (\text{A } 4.12)$$

$$Y_{35} = \frac{(C_1 - C_3)z\beta \cos(\beta z) + (-C_1 + C_3 + 2C_2z\beta + (C_1 + C_3)z^2\beta^2) \sin(\beta z)}{4(C_2^2 - C_1C_3)\beta^2} \quad (\text{A } 4.13)$$

$$Y_{36} = \frac{-z\beta(2C_2 + (C_1 + C_3)z\beta) \cos(\beta z) + (2C_2 + (C_1 - C_3)z\beta) \sin(\beta z)}{4(C_2^2 - C_1C_3)\beta^2} \quad (\text{A } 4.14)$$

$$Y_{37} = \frac{-((C_1 + C_3)z\beta \cos(\beta z)) + (C_1 - C_3) \sin(\beta z)}{2(C_2^2 - C_1C_3)\beta} \quad (\text{A } 4.15)$$

$$Y_{38} = -\frac{(2C_2 + (C_1 + C_3)z\beta) \sin(\beta z)}{2(C_2^2 - C_1C_3)\beta} \quad (\text{A } 4.16)$$

$$Y_{45} = \frac{z\beta(-2C_2 + (C_1 + C_3)z\beta) \cos(\beta z) + (2C_2 + (C_1 - C_3)z\beta) \sin(\beta z)}{4(C_2^2 - C_1C_3)\beta^2} \quad (\text{A } 4.17)$$

$$Y_{46} = \frac{(-C_1 + C_3)z\beta \cos(\beta z) + (C_1 - C_3 - 2C_2z\beta + (C_1 + C_3)z^2\beta^2) \sin(\beta z)}{4(C_2^2 - C_1C_3)\beta^2} \quad (\text{A } 4.18)$$

$$Y_{47} = \frac{(-2C_2 + (C_1 + C_3)z\beta) \sin(\beta z)}{2(C_2^2 - C_1C_3)\beta} \quad (\text{A } 4.19)$$

$$Y_{48} = \frac{-((C_1 + C_3)z\beta \cos(\beta z)) + (-C_1 + C_3) \sin(\beta z)}{2(C_2^2 - C_1C_3)\beta} \quad (\text{A } 4.20)$$



EK B : Ankastre-serbest sınır şartlarına sahip önburulmalı bir çubuğun tarafsız ekseninin ötelenmesine dair kesin analitik ifadeler

$$\begin{aligned}
\bar{u}^0(z) = & -\frac{1}{24(C_2^2 - C_1C_3)C_4C_5\beta^3} F_{\xi}(L) (3C_1C_4C_5 - 3C_3C_4C_5 - 6(C_2^2 - C_1C_3)(C_4 - C_5)\beta^2 - 3C_1C_4C_5 \cos(2z\beta) \\
& + 3C_3C_4C_5 \cos(2z\beta) - 12C_2C_4C_5z\beta \cos(2z\beta) + 6(C_2^2 - C_1C_3)(C_4 - C_5)\beta^2 \cos(2z\beta) \\
& + 6C_1C_4C_5z^2\beta^2 \cos(2z\beta) - 6C_3C_4C_5z^2\beta^2 \cos(2z\beta) + 6C_2C_4C_5 \sin(2z\beta) - 6(C_1 - C_3)C_4C_5z\beta \sin(2z\beta) \\
& - 12C_2C_4C_5z^2\beta^2 \sin(2z\beta)) - \frac{1}{24(C_2^2 - C_1C_3)C_4C_5\beta^3} F_{\eta}(L) (6C_2C_4C_5 - 12(C_2^2 - C_1C_3)(C_4 + C_5)z\beta^3 + 4(C_1 \\
& + C_3)C_4C_5z^3\beta^3 - 6C_2C_4C_5 \cos(2z\beta) + 6(C_1 - C_3)C_4C_5z\beta \cos(2z\beta) + 12C_2C_4C_5z^2\beta^2 \cos(2z\beta) \\
& - 3C_1C_4C_5 \sin(2z\beta) + 3C_3C_4C_5 \sin(2z\beta) - 12C_2C_4C_5z\beta \sin(2z\beta) + 6(C_2^2 - C_1C_3)(C_4 - C_5)\beta^2 \sin(2z\beta) \\
& + 6C_1C_4C_5z^2\beta^2 \sin(2z\beta) - 6C_3C_4C_5z^2\beta^2 \sin(2z\beta))
\end{aligned} \tag{B 5.1}$$

$$\begin{aligned}
\bar{v}^0(z) = & \frac{1}{24(C_2^2 - C_1C_3)C_4C_5\beta^3} F_{\eta}(L) (-3C_1C_4C_5 + 3C_3C_4C_5 + 6(C_2^2 - C_1C_3)(C_4 - C_5)\beta^2 - 3(-C_1 + C_3)C_4C_5 \cos(2z\beta) \\
& + 12C_2C_4C_5z\beta \cos(2z\beta) - 6(C_2^2 - C_1C_3)(C_4 - C_5)\beta^2 \cos(2z\beta) - 6(C_1 - C_3)C_4C_5z^2\beta^2 \cos(2z\beta) \\
& - 6C_2C_4C_5 \sin(2z\beta) + 6(C_1 - C_3)C_4C_5z\beta \sin(2z\beta) + 12C_2C_4C_5z^2\beta^2 \sin(2z\beta)) \\
& + \frac{1}{24(C_2^2 - C_1C_3)C_4C_5\beta^3} F_{\xi}(L) (6C_2C_4C_5 + 12(C_2^2 - C_1C_3)(C_4 + C_5)z\beta^3 - 4(C_1 + C_3)C_4C_5z^3\beta^3 \\
& - 6C_2C_4C_5 \cos(2z\beta) + 6(C_1 - C_3)C_4C_5z\beta \cos(2z\beta) + 12C_2C_4C_5z^2\beta^2 \cos(2z\beta) - 3C_1C_4C_5 \sin(2z\beta) \\
& + 3C_3C_4C_5 \sin(2z\beta) - 12C_2C_4C_5z\beta \sin(2z\beta) + 6(C_2^2 - C_1C_3)(C_4 - C_5)\beta^2 \sin(2z\beta) + 6C_1C_4C_5z^2\beta^2 \sin(2z\beta) \\
& - 6C_3C_4C_5z^2\beta^2 \sin(2z\beta))
\end{aligned} \tag{B 5.2}$$

$$\begin{aligned}
\bar{u}^0(z) = & \frac{q_\xi}{24(C_2^2 - C_1 C_3)C_4 C_5 \beta^4} (12C_2 C_4 C_5 + 12(C_2^2 - C_1 C_3)(C_4 + C_5)z\beta^3 - 4(C_1 + C_3)C_4 C_5 z^3 \beta^3 - 24C_2 C_4 C_5 \cos(z\beta) \\
& - 24C_3 C_4 C_5 z\beta \cos(z\beta) + 12C_2 C_4 C_5 \cos(2z\beta) - 12(C_1 - C_3)C_4 C_5 z\beta \cos(2z\beta) - 12C_2 C_4 C_5 z^2 \beta^2 \cos(2z\beta) \\
& + 24C_3 C_4 C_5 \sin(z\beta) - 24C_2 C_4 C_5 z\beta \sin(z\beta) - 24C_2^2 C_5 \beta^2 \sin(z\beta) + 24C_1 C_3 C_5 \beta^2 \sin(z\beta) + 6C_1 C_4 C_5 \sin(2z\beta) \\
& - 6C_3 C_4 C_5 \sin(2z\beta) + 24C_2 C_4 C_5 z\beta \sin(2z\beta) - 6(C_2^2 - C_1 C_3)(C_4 - C_5)\beta^2 \sin(2z\beta) - 6C_1 C_4 C_5 z^2 \beta^2 \sin(2z\beta) \\
& + 6C_3 C_4 C_5 z^2 \beta^2 \sin(2z\beta))
\end{aligned} \tag{B 5.3}$$

$$\begin{aligned}
\bar{v}^0(z) = & \frac{q_\xi}{24(C_2^2 - C_1 C_3)C_4 C_5 \beta^4} (-6C_1 C_4 C_5 - 18C_3 C_4 C_5 - 6(-((C_2^2 - C_1 C_3)(C_4 + 3C_5)) + (C_1 + C_3)C_4 C_5 z^2)\beta^2 \\
& + 24C_3 C_4 C_5 \cos(z\beta) - 24C_2 C_4 C_5 z\beta \cos(z\beta) - 24C_2^2 C_5 \beta^2 \cos(z\beta) + 24C_1 C_3 C_5 \beta^2 \cos(z\beta) \\
& + 6C_1 C_4 C_5 \cos(2z\beta) - 6C_3 C_4 C_5 \cos(2z\beta) + 24C_2 C_4 C_5 z\beta \cos(2z\beta) - 6(C_2^2 - C_1 C_3)(C_4 - C_5)\beta^2 \cos(2z\beta) \\
& - 6C_1 C_4 C_5 z^2 \beta^2 \cos(2z\beta) + 6C_3 C_4 C_5 z^2 \beta^2 \cos(2z\beta) + 24C_2 C_4 C_5 \sin(z\beta) + 24C_3 C_4 C_5 z\beta \sin(z\beta) \\
& - 12C_2 C_4 C_5 \sin(2z\beta) + 12(C_1 - C_3)C_4 C_5 z\beta \sin(2z\beta) + 12C_2 C_4 C_5 z^2 \beta^2 \sin(2z\beta))
\end{aligned} \tag{B 5.4}$$

EK C : Üç boyutlu sonlu eleman analizlerine ilişkin yakınsama çalışmaları

Sunulan çalışmada, önburulmalı yapıların statik ve dinamik davranışlarının incelenmesi amacıyla geliştirilen bir boyutlu mekanik modellerin ve bu bir boyutlu mekanik modellerin matematiksel çözümü için geliştirilen bilgisayar kodunun doğruluğunun sınanması ve son olarak, kullanılan ilgili bir boyutlu mekanik modelin uygulanabilirlik sınırlarının tespit edilmesi amacıyla, literatürdeki çalışmalara ek olarak, bir dizi referans değere ihtiyaç duyulmuştur. Bu referans değerlerin, fazla sayıda çeşitlilik gösteren yapılardan elde edilmesi gerekmektedir. Bu bağlamda, bu referans değerlerin üç boyutlu sonlu elemanlar modelinden elde edilmesine karar verilmiştir. Bu sonlu eleman analizlerinde, model geliştirme sürecinde hassasiyet gösterilmesi gereken noktalara ek olarak, dikkat edilmesi gereken bir diğer nokta ise referans olarak alınacak sonucun, eleman sayısının değişiminden mümkün olduğunca etkilenmemesidir. Bu bağlamda, bu bölümde, eleman sayısına olan hassasiyetin kontrolü anlamında, eğilme-eğilme bağlaşık statik, eğilme-eğilme bağlaşık dinamik, uzama-burulma bağlaşık statik ve uzama-burulma bağlaşık dinamik incelemelerinde kullanılan üç boyutlu sonlu eleman modellerinden elde edilen yakınsama sonuçları sunulmuştur. Referans alınan eleman sayıları koyu olarak gösterilmiştir.

Her uzunluk-kalınlık oranı, en-kalınlık oranı ve toplam önburulma açısı için detaylı olarak gerçekleştirilen yakınsama çalışmalarında, sonuçların yakınsamasının kontrolü için kullanılan hata kriteri

$$e(\psi) = 100 \left| \frac{x - x_r}{x_r} \right| \quad (C.5.1)$$

olarak tanımlanmıştır. Burada ψ yakınsaklığı araştırılan ilgili sonucu (bu sonuç, statik analizlerde ilgili yer değiştirme bileşeni olarak, serbest titreşim analizlerinde ise ilgili doğal frekans olarak alınmıştır.); x , belirli bir eleman sayısı için üç boyutlu sonlu eleman analizinde elde edilen ψ ile ilgili sonucu; x_r ise en küçük eleman boyutu kullanımında üç boyutlu sonlu eleman analizinde elde edilen ψ ile ilgili sonucu; ve son olarak, $e(\psi)$ ise yakınsaklığı araştırılan ilgili ψ sonucuna ait yüzde hatayı temsil etmektedir.

Aşağıda eğilme-eğilme bağlaşık statik, eğilme-eğilme bağlaşık dinamik, uzama-burulma bağlaşık statik ve uzama-burulma bağlaşık dinamik incelemelerinde kullanılan üç boyutlu sonlu eleman modelleri için gerçekleştirilen yakınsama çalışmaları çizelge olarak sunulmuştur. Bu çizelgelerde, kullanılan eleman sayısının yanında kullanılan eleman türü de belirtilmiştir.

Çizelge C.1 : Önburulmalı fonksiyonel olarak derecelendirilmiş ve gözenekli bir ankastre-serbest çubuk için üç boyutlu modele dair yakınsama çalışması.

Eleman	Eleman sayısı	$e(u^0)$	$e(v^0)$
C3D20	80	0.232250	0.440953
C3D20	240	0.058798	0.242453
C3D20	1200	0.029399	0.089325
C3D20	10368	0.000000	0.000000

Çizelge C.2 : Eğilme-eğilme statik davranış için yakınsama çalışması ($L/h = 5$, uzay-sabit düşey uç kuvveti senaryosu).

φ°	h/b	Eleman	Eleman sayısı	$e(u^0)$	$e(v^0)$
0	0.2	C3D10	5240	-	0.13905
		C3D10	16703	-	0.05021
		C3D10	45325	-	0.00000
	0.5	C3D10	4968	-	0.08656
		C3D10	15038	-	0.02734
		C3D10	47865	-	0.00000
	0.8	C3D10	5874	-	0.09595
		C3D10	20602	-	0.02405
		C3D10	68800	-	0.00000
45	0.2	C3D10	8516	0.04679	0.11172
		C3D10	25444	0.02734	0.05120
		C3D10	77655	0.00000	0.00000
	0.5	C3D10	9289	0.02132	0.08617
		C3D10	30718	0.01036	0.02223
		C3D10	91236	0.00000	0.00000
	0.8	C3D10	10380	0.01908	0.05170
		C3D10	29800	0.00884	0.01954
		C3D10	89016	0.00000	0.00000
90	0.2	C3D10	13634	0.04412	0.14656
		C3D10	39408	0.01744	0.06892
		C3D10	125810	0.00000	0.00000
	0.5	C3D10	15779	0.04654	0.09122
		C3D10	45103	0.02256	0.03499
		C3D10	152205	0.00000	0.00000
	0.8	C3D10	21062	0.05734	0.03929
		C3D10	73992	0.00203	0.00830
		C3D10	157763	0.00000	0.00000
180	0.2	C3D10	31129	0.06934	0.20366
		C3D10	93111	0.02311	0.04900
		C3D10	168510	0.00000	0.00000
	0.5	C3D10	11800	0.04812	0.13440
		C3D10	33374	0.02224	0.05085
		C3D10	113202	0.00000	0.00000
	0.8	C3D10	23027	0.09794	0.07547
		C3D10	69807	0.07225	0.02458
		C3D10	173405	0.00000	0.00000

Çizelge C.3 : Eğilme-eğilme statik davranış için yakınsama çalışması ($L/h = 15$, uzay-sabit düşey uç kuvveti senaryosu).

φ°	h/b	Eleman	Eleman sayısı	$e(u^0)$	$e(v^0)$
0	0.2	C3D10	8091	-	0.03898
		C3D10	30404	-	0.01828
		C3D10	95260	-	0.00000
	0.5	C3D10	3804	-	0.04587
		C3D10	20028	-	0.01672
		C3D10	70810	-	0.00000
	0.8	C3D10	9452	-	0.03425
		C3D10	28669	-	0.01042
		C3D10	99456	-	0.00000
45	0.2	C3D10	11192	0.07509	0.02395
		C3D10	42161	0.00207	0.01495
		C3D10	129317	0.00000	0.00000
	0.5	C3D10	3619	0.08721	0.06074
		C3D10	20906	0.03029	0.01942
		C3D10	70582	0.00000	0.00000
	0.8	C3D10	16303	0.02626	0.01695
		C3D10	43643	0.02341	0.00938
		C3D10	138104	0.00000	0.00000
90	0.2	C3D10	17876	0.06092	0.02850
		C3D10	53040	0.01185	0.01468
		C3D10	150725	0.00000	0.00000
	0.5	C3D10	12375	0.01848	0.03870
		C3D10	39577	0.00855	0.01327
		C3D10	106358	0.00000	0.00000
	0.8	C3D10	29853	0.02068	0.01668
		C3D10	100217	0.00109	0.00315
		C3D10	166743	0.00000	0.00000
180	0.2	C3D10	21339	0.02989	0.08792
		C3D10	78023	0.01651	0.01201
		C3D10	148685	0.00000	0.00000
	0.5	C3D10	6747	0.16601	0.09334
		C3D10	22160	0.04218	0.04231
		C3D10	66985	0.00000	0.00000
	0.8	C3D10	17100	0.06718	0.03928
		C3D10	59384	0.01498	0.00436
		C3D10	115985	0.00000	0.00000

Çizelge C.4 : Eğilme-eğilme statik davranış için yakınsama çalışması ($L/h = 60$, uzay-sabit düşey uç kuvveti senaryosu).

φ°	h/b	Eleman	Eleman sayısı	$e(u^0)$	$e(v^0)$
0	0.2	C3D10	11435	-	0.04443
		C3D10	32217	-	0.02900
		C3D10	94099	-	0.00000
	0.5	C3D10	14694	-	0.02366
		C3D10	44193	-	0.00671
		C3D10	152151	-	0.00000
	0.8	C3D10	17651	-	0.02095
		C3D10	50925	-	0.00291
		C3D10	124815	-	0.00000
45	0.2	C3D10	5938	0.18007	0.11088
		C3D10	61643	0.09394	0.06435
		C3D10	126106	0.00000	0.00000
	0.5	C3D10	1850	0.05952	0.01925
		C3D10	9184	0.04941	0.01517
		C3D10	82207	0.00000	0.00000
	0.8	C3D10	9764	0.27230	0.02273
		C3D10	38188	0.08066	0.00402
		C3D10	126424	0.00000	0.00000
90	0.2	C3D10	4831	0.14931	0.07466
		C3D10	61959	0.06602	0.03791
		C3D10	205162	0.00000	0.00000
	0.5	C3D10	9346	0.09615	0.00608
		C3D10	27396	0.09161	0.00152
		C3D10	151841	0.00000	0.00000
	0.8	C3D10	28881	0.21644	0.00938
		C3D10	116517	0.02112	0.00185
		C3D10	172112	0.00000	0.00000
180	0.2	C3D10	4985	0.14057	0.02806
		C3D10	43766	0.07522	0.02651
		C3D10	130000	0.00000	0.00000
	0.5	C3D10	10832	0.07561	0.03515
		C3D10	44439	0.01799	0.00402
		C3D10	122790	0.00000	0.00000
	0.8	C3D10	9944	0.28618	0.01710
		C3D10	39239	0.10028	0.01644
		C3D10	128388	0.00000	0.00000

Çizelge C.5 : Eğilme-eğilme statik davranış için yakınsama çalışması ($L/h = 5$, cisim-sabit uniform yayılı kuvveti senaryosu).

φ°	h/b	Eleman	Eleman sayısı	$e(u^0)$	$e(v^0)$
0	0.2	C3D10	10568	-	0.11429
		C3D10	30129	-	0.03957
		C3D10	90308	-	0.00000
	0.5	C3D10	14339	-	0.06214
		C3D10	40750	-	0.02539
		C3D10	109328	-	0.00000
	0.8	C3D10	20602	-	0.04847
		C3D10	68800	-	0.01450
		C3D10	150253	-	0.00000
45	0.2	C3D10	11058	0.03856	0.12748
		C3D10	37185	0.01744	0.04108
		C3D10	137445	0.00000	0.00000
	0.5	C3D10	15143	0.00207	0.05874
		C3D10	45617	0.00207	0.02033
		C3D10	113435	0.00000	0.00000
	0.8	C3D10	21193	0.02865	0.04756
		C3D10	66487	0.00889	0.01359
		C3D10	150089	0.00000	0.00000
90	0.2	C3D10	10478	0.01415	0.14208
		C3D10	29290	0.00858	0.06681
		C3D10	92651	0.00000	0.00000
	0.5	C3D10	10697	0.04907	0.10455
		C3D10	34076	0.01682	0.03176
		C3D10	117552	0.00000	0.00000
	0.8	C3D10	21062	0.04512	0.07032
		C3D10	64944	0.01805	0.02670
		C3D10	193031	0.00000	0.00000
180	0.2	C3D10	39935	0.02964	0.18563
		C3D10	125200	0.01046	0.06529
		C3D10	271240	0.00000	0.00000
	0.5	C3D10	41469	0.06754	0.12515
		C3D10	127289	0.01421	0.03059
		C3D10	258080	0.00000	0.00000
	0.8	C3D10	45624	0.04274	0.04148
		C3D10	141556	0.01111	0.01198
		C3D10	275056	0.00000	0.00000

Çizelge C.6 : Eğilme-eğilme statik davranış için yakınsama çalışması ($L/h = 15$, cisim-sabit uniform yayılı kuvveti senaryosu).

φ°	h/b	Eleman	Eleman sayısı	$e(u^0)$	$e(v^0)$
0	0.2	C3D10	10754	-	0.03693
		C3D10	30404	-	0.02375
		C3D10	94302	-	0.00000
	0.5	C3D10	15186	-	0.03909
		C3D10	45066	-	0.01190
		C3D10	140819	-	0.00000
	0.8	C3D10	20428	-	0.02276
		C3D10	62887	-	0.00794
		C3D10	174388	-	0.00000
45	0.2	C3D10	15665	0.02782	0.01570
		C3D10	59345	0.00416	0.00749
		C3D10	160590	0.00000	0.00000
	0.5	C3D10	26533	0.02567	0.03033
		C3D10	75909	0.00367	0.00587
		C3D10	189592	0.00000	0.00000
	0.8	C3D10	16303	0.02844	0.02319
		C3D10	62783	0.00012	0.00689
		C3D10	138104	0.00000	0.00000
90	0.2	C3D10	24136	0.00652	0.04005
		C3D10	72375	0.00408	0.00930
		C3D10	217475	0.00000	0.00000
	0.5	C3D10	22953	0.03001	0.02013
		C3D10	72871	0.00296	0.00682
		C3D10	208519	0.00000	0.00000
	0.8	C3D10	17858	0.00310	0.05247
		C3D10	103916	0.00232	0.00686
		C3D10	257349	0.00000	0.00000
180	0.2	C3D10	34052	0.02950	0.11271
		C3D10	105527	0.00781	0.03383
		C3D10	257069	0.00000	0.00000
	0.5	C3D10	45328	0.00713	0.01475
		C3D10	156731	0.00126	0.00461
		C3D10	276142	0.00000	0.00000
	0.8	C3D10	36437	0.01100	0.00677
		C3D10	115985	0.00387	0.00269
		C3D10	240999	0.00000	0.00000

Çizelge C.7 : Eğilme-eğilme statik davranış için yakınsama çalışması ($L/h = 60$, cisim-sabit uniform yayılı kuvveti senaryosu).

φ°	h/b	Eleman	Eleman sayısı	$e(u^0)$	$e(v^0)$
0	0.2	C3D10	32217	-	0.02332
		C3D10	94099	-	0.00167
		C3D10	171093	-	0.00000
	0.5	C3D10	23746	-	0.04110
		C3D10	79421	-	0.00066
		C3D10	180639	-	0.00000
	0.8	C3D10	37919	-	0.00704
		C3D10	124815	-	0.00290
		C3D10	258457	-	0.00000
45	0.2	C3D10	33617	0.02924	0.03030
		C3D10	94766	0.00154	0.01042
		C3D10	196131	0.00000	0.00000
	0.5	C3D10	25421	0.03945	0.04592
		C3D10	81059	0.02207	0.00153
		C3D10	181782	0.00000	0.00000
	0.8	C3D10	27530	0.04679	0.00933
		C3D10	79241	0.01024	0.00074
		C3D10	169892	0.00000	0.00000
90	0.2	C3D10	33432	0.01524	0.03082
		C3D10	95206	0.00034	0.01245
		C3D10	259154	0.00000	0.00000
	0.5	C3D10	26379	0.06170	0.06160
		C3D10	114400	0.00917	0.00128
		C3D10	229572	0.00000	0.00000
	0.8	C3D10	39069	0.02763	0.00237
		C3D10	127194	0.00516	0.00190
		C3D10	276948	0.00000	0.00000
180	0.2	C3D10	33768	0.05272	0.02898
		C3D10	96925	0.02418	0.00874
		C3D10	246892	0.00000	0.00000
	0.5	C3D10	26537	0.14184	0.07164
		C3D10	152784	0.00673	0.00024
		C3D10	239249	0.00000	0.00000
	0.8	C3D10	52051	0.05037	0.02561
		C3D10	146354	0.00815	0.00594
		C3D10	257867	0.00000	0.00000

Çizelge C.8 : Üç boyutlu sonlu eleman modeline yönelik yakınsama çalışması.

Eleman	Eleman sayısı	$e(\omega_1)$	$e(\omega_2)$	$e(\omega_3)$	$e(\omega_4)$
C3D20	988	0.075343	0.093532	0.081606	0.035671
C3D20	13872	0.006412	0.007821	0.007073	0.003659
C3D20	46665	0	0	0	0

Çizelge C.9 : Eğilme-eğilme dinamik davranış için yakınsama çalışması ($L/h = 5$).

φ°	h/b	Eleman	Eleman sayısı	$e(\omega_1)$	$e(\omega_2)$	$e(\omega_3)$	$e(\omega_4)$
0	0.2	C3D20	3380	0.309933	0.343972	0.311596	0.391937
		C3D20	12800	0.115198	0.124745	0.116591	0.139646
		C3D20	35739	0	0	0	0
	0.5	C3D20	1914	0.254506	0.259374	0.257482	0.287178
		C3D20	5120	0.116878	0.119797	0.118619	0.132326
		C3D20	16008	0	0	0	0
	0.8	C3D20	1488	0.297337	0.300557	0.301263	0.313695
		C3D20	5076	0.134709	0.136082	0.137224	0.142321
		C3D20	29631	0	0	0	0
45	0.2	C3D20	3375	0.283558	0.281051	0.320147	0.378981
		C3D20	13760	0.104255	0.102658	0.115344	0.131932
		C3D20	38874	0	0	0	0
	0.5	C3D20	1914	0.285514	0.283064	0.294424	0.314329
		C3D20	7290	0.109539	0.108937	0.112728	0.119621
		C3D20	22308	0	0	0	0
	0.8	C3D20	1904	0.231082	0.229305	0.241053	0.242873
		C3D20	6000	0.095391	0.094665	0.09748	0.098213
		C3D20	18144	0	0	0	0
90	0.2	C3D20	2080	0.23815	0.105811	0.38051	0.292493
		C3D20	9933	0.09367	0.054859	0.131786	0.107201
		C3D20	32000	0	0	0	0
	0.5	C3D20	3185	0.229005	0.209242	0.247868	0.234577
		C3D20	10600	0.086905	0.079848	0.093811	0.08891
		C3D20	30856	0	0	0	0
	0.8	C3D20	2394	0.208973	0.204685	0.217542	0.212772
		C3D20	9086	0.072746	0.071334	0.075944	0.074394
		C3D20	26240	0	0	0	0
180	0.2	C3D10	18891	0.079007	0.149903	0.061883	0.003215
		C3D10	36729	0.027822	0.055017	0.023573	0.003144
		C3D10	75130	0	0	0	0
	0.5	C3D20	2310	1.200098	0.530659	0.823075	0.559531
		C3D20	12200	0.300405	0.126373	0.199359	0.135045
		C3D20	50176	0	0	0	0
	0.8	C3D20	3600	0.165137	0.149176	0.170283	0.163469
		C3D20	9856	0.071731	0.06474	0.074056	0.071077
		C3D20	33201	0	0	0	0

Çizelge C.10 : Eğilme-eğilme dinamik davranış için yakınsama çalışması ($L/h = 15$).

φ°	h/b	Eleman	Eleman sayısı	$e(\omega_1)$	$e(\omega_2)$	$e(\omega_3)$	$e(\omega_4)$
0	0.2	C3D20	2550	0.13655	0.146616	0.133865	0.128177
		C3D20	5896	0.064247	0.06778	0.063431	0.061924
		C3D20	18240	0	0	0	0
	0.5	C3D20	1050	0.173228	0.180494	0.170943	0.183349
		C3D20	4400	0.068034	0.069324	0.067876	0.070595
		C3D20	17000	0	0	0	0
	0.8	C3D20	2800	0.082565	0.08388	0.082485	0.08452
		C3D20	6615	0.039106	0.039485	0.039074	0.03967
		C3D20	17160	0	0	0	0
45	0.2	C3D20	2070	0.154894	0.145549	0.171125	0.142699
		C3D20	5896	0.05807	0.054078	0.064058	0.053666
		C3D20	16560	0	0	0	0
	0.5	C3D20	1512	0.149088	0.149138	0.152691	0.150045
		C3D20	4510	0.055317	0.05567	0.055901	0.055468
		C3D20	15104	0	0	0	0
	0.8	C3D20	1608	0.124861	0.126675	0.124872	0.126655
		C3D20	9120	0.036324	0.03623	0.03667	0.036489
		C3D20	20020	0	0	0	0
90	0.2	C3D20	2652	0.126248	0.097343	0.149959	0.109675
		C3D20	6072	0.062733	0.049395	0.072444	0.055873
		C3D20	19008	0	0	0	0
	0.5	C3D20	2016	0.120917	0.116463	0.126273	0.113316
		C3D20	6480	0.052875	0.050985	0.054836	0.050051
		C3D20	19890	0	0	0	0
	0.8	C3D20	1608	0.116172	0.116608	0.118013	0.115107
		C3D20	5600	0.046148	0.045678	0.046564	0.045682
		C3D20	17160	0	0	0	0
180	0.2	C3D20	2907	0.110607	0.051892	0.056956	0.13687
		C3D20	9840	0.047912	0.029757	0.031428	0.054967
		C3D20	26103	0	0	0	0
	0.5	C3D20	2448	0.109081	0.093979	0.104932	0.107941
		C3D20	6408	0.061382	0.054755	0.058695	0.060738
		C3D20	22194	0	0	0	0
	0.8	C3D20	2835	0.096952	0.093601	0.097874	0.094858
		C3D20	10160	0.030126	0.029108	0.030071	0.029596
		C3D20	26026	0	0	0	0

Çizelge C.11 : Eğilme-eğilme dinamik davranış için yakınsama çalışması ($L/h = 60$).

φ°	h/b	Eleman	Eleman sayısı	$e(\omega_1)$	$e(\omega_2)$	$e(\omega_3)$	$e(\omega_4)$
0	0.2	C3D20	2500	0.058077	0.067465	0.059088	0.058059
		C3D20	10200	0.019496	0.021367	0.01983	0.019646
		C3D20	31970	0	0	0	0
	0.5	C3D20	3006	0.047905	0.050004	0.048696	0.050579
		C3D20	8000	0.018797	0.019305	0.019065	0.019516
		C3D20	26208	0	0	0	0
	0.8	C3D20	3376	0.037727	0.037663	0.038332	0.038124
		C3D20	9240	0.015192	0.01524	0.015484	0.015493
		C3D20	27972	0	0	0	0
45	0.2	C3D20	2500	0.058158	0.059819	0.066701	0.055916
		C3D20	10200	0.019528	0.019455	0.021715	0.019
		C3D20	31970	0	0	0	0
	0.5	C3D20	3006	0.047971	0.049522	0.049295	0.04932
		C3D20	9612	0.014751	0.015167	0.015143	0.015121
		C3D20	26208	0	0	0	0
	0.8	C3D20	3376	0.037726	0.037595	0.038373	0.038034
		C3D20	9240	0.015205	0.015212	0.015507	0.01544
		C3D20	27972	0	0	0	0
90	0.2	C3D20	2500	0.058319	0.053401	0.070915	0.05441
		C3D20	10200	0.019586	0.017785	0.022641	0.018589
		C3D20	31970	0	0	0	0
	0.5	C3D20	3006	0.048166	0.048491	0.050963	0.047404
		C3D20	9612	0.014832	0.014848	0.015742	0.014505
		C3D20	26208	0	0	0	0
	0.8	C3D20	3376	0.037821	0.037529	0.038659	0.03782
		C3D20	9240	0.015305	0.015235	0.015733	0.015374
		C3D20	28035	0	0	0	0
180	0.2	C3D20	2520	0.059483	0.049314	0.050281	0.067923
		C3D20	10302	0.020823	0.017595	0.017829	0.022691
		C3D20	34560	0	0	0	0
	0.5	C3D20	3006	0.048917	0.046756	0.050032	0.048863
		C3D20	9612	0.015761	0.014581	0.015903	0.015342
		C3D20	26208	0	0	0	0
	0.8	C3D20	3376	0.037119	0.03653	0.03767	0.037235
		C3D20	9240	0.014901	0.014425	0.01528	0.014733
		C3D20	27405	0	0	0	0

Çizelge C.12 : Uç çekme kuvveti senaryosu için yakınsama çalışması ($p = 10$).

φ°	Eleman	Eleman sayısı	$e(\theta_z^{SEA})$
30	C3D8	40000	8.559113
	C3D8	109760	3.47446
	C3D8	233280	1.732284
	C3D8	425920	0.836216
	C3D8	703040	0.279874
	C3D8	1080000	0
60	C3D8	40000	8.516176
	C3D8	109760	3.453785
	C3D8	233280	1.720224
	C3D8	425920	0.82957
	C3D8	703040	0.277125
	C3D8	1080000	0
90	C3D8	40000	8.469673
	C3D8	109760	3.437926
	C3D8	233280	1.713833
	C3D8	425920	0.827019
	C3D8	703040	0.276626
	C3D8	1080000	0

Çizelge C.13 : Uç burulma momenti senaryosu için yakınsama çalışması ($p = 10$).

φ°	Eleman	Eleman sayısı	$e(w^{0,SEA})$
30	C3D8	40000	8.574412
	C3D8	109760	3.483661
	C3D8	233280	1.737369
	C3D8	425920	0.838791
	C3D8	703040	0.281084
	C3D8	1080000	0
60	C3D8	40000	8.530565
	C3D8	109760	3.46177
	C3D8	233280	1.724602
	C3D8	425920	0.832009
	C3D8	703040	0.277785
	C3D8	1080000	0
90	C3D8	40000	8.485475
	C3D8	109760	3.446828
	C3D8	233280	1.719032
	C3D8	425920	0.829753
	C3D8	703040	0.277692
	C3D8	1080000	0

Çizelge C.14 : Uzama-burulma dinamik davranış için yakınsama çalışması ($L/h = 25$).

φ°	h/b	Eleman	Eleman sayısı	$e(\omega_1)$	$e(\omega_2)$	$e(\omega_3)$	$e(\omega_4)$
0	0.2	C3D20	6080	0.088054	0.0893	0.007417	0.091734
		C3D20	20500	0.034992	0.035464	0.00264	0.036375
		C3D20	64000	0	0	0	0
	0.5	C3D20	6272	0.018104	0.004727	0.018144	0.018226
		C3D20	19656	0.00207	0.001212	0.002073	0.002077
		C3D20	43240	0	0	0	0
	0.8	C3D20	2800	0.002823	0.007225	0.002832	0.00723
		C3D20	9352	0.000586	0.002488	0.000602	0.002491
		C3D20	29000	0	0	0	0
30	0.2	C3D20	10200	0.07969	0.08091	0.003339	0.083264
		C3D20	28200	0.030703	0.031162	0.001862	0.03205
		C3D20	69600	0	0	0	0
	0.5	C3D20	3600	0.030719	0.006571	0.030799	0.030951
		C3D20	10472	0.007174	0.002395	0.007181	0.007211
		C3D20	31080	0	0	0	0
	0.8	C3D20	2800	0.002823	0.007225	0.002822	0.00723
		C3D20	9352	0.000594	0.002478	0.000583	0.002485
		C3D20	29000	0	0	0	0
60	0.2	C3D20	7800	0.181007	0.184818	0.004336	0.192103
		C3D20	24600	0.017902	0.018263	0.001782	0.018972
		C3D20	63200	0	0	0	0
	0.5	C3D20	3600	0.030714	0.006582	0.030794	0.030947
		C3D20	10472	0.007163	0.002396	0.007187	0.00721
		C3D20	31080	0	0	0	0
	0.8	C3D20	2800	0.002831	0.007216	0.002842	0.007236
		C3D20	9352	0.000594	0.002479	0.000593	0.002485
		C3D20	29000	0	0	0	0
90	0.2	C3D20	5200	0.163574	0.168702	0.007339	0.178462
		C3D20	15000	0.01598	0.016446	0.002542	0.017363
		C3D20	51552	0	0	0	0
	0.5	C3D20	3600	0.030724	0.006629	0.030799	0.030968
		C3D20	10472	0.007171	0.002424	0.007191	0.007223
		C3D20	31220	0	0	0	0
	0.8	C3D20	2800	0.002846	0.00729	0.002842	0.007303
		C3D20	9352	0.000602	0.002543	0.000593	0.002547
		C3D20	29812	0	0	0	0

Çizelge C.15 : Uzama-burulma dinamik davranış için yakınsama çalışması ($L/h = 50$).

φ°	h/b	Eleman	Eleman sayısı	$e(\omega_1)$	$e(\omega_2)$	$e(\omega_3)$	$e(\omega_4)$
0	0.2	C3D20	13000	0.216593	0.217359	0.001964	0.218868
		C3D20	41000	0.031741	0.031857	0.000845	0.032072
		C3D20	82600	0	0	0	0
	0.5	C3D20	3724	0.084728	0.005427	0.084771	0.084864
		C3D20	14000	0.015688	0.001662	0.015689	0.015701
		C3D20	49600	0	0	0	0
	0.8	C3D20	2660	0.00935	0.005575	0.009362	0.005585
		C3D20	11572	0.000933	0.001387	0.000934	0.001396
		C3D20	30400	0	0	0	0
30	0.2	C3D20	10400	0.200143	0.200874	0.002707	0.202343
		C3D20	30366	0.021719	0.021802	0.001221	0.02197
		C3D20	74200	0	0	0	0
	0.5	C3D20	2000	0.336955	0.007797	0.337121	0.337463
		C3D20	7200	0.025262	0.002351	0.025284	0.025314
		C3D20	26640	0	0	0	0
	0.8	C3D20	2660	0.00935	0.005585	0.009362	0.005591
		C3D20	11748	0.000926	0.00136	0.000924	0.001353
		C3D20	30400	0	0	0	0
60	0.2	C3D20	10400	0.206565	0.207397	0.002884	0.209057
		C3D20	30000	0.028687	0.028807	0.001011	0.02906
		C3D20	82600	0	0	0	0
	0.5	C3D20	2000	0.336839	0.007853	0.336997	0.33734
		C3D20	7200	0.025261	0.002361	0.025276	0.025313
		C3D20	26640	0	0	0	0
	0.8	C3D20	2660	0.009512	0.005833	0.009513	0.005842
		C3D20	12584	0.001065	0.001424	0.001055	0.001433
		C3D20	40848	0	0	0	0
90	0.2	C3D20	12000	0.067086	0.067405	0.002426	0.068029
		C3D20	37400	0.020952	0.021051	0.0009	0.021256
		C3D20	74412	0	0	0	0
	0.5	C3D20	2000	0.336628	0.007944	0.336804	0.337141
		C3D20	7200	0.02525	0.002361	0.025275	0.025304
		C3D20	26640	0	0	0	0
	0.8	C3D20	2660	0.009512	0.005841	0.009533	0.005842
		C3D20	12584	0.001057	0.001423	0.001065	0.001433
		C3D20	40940	0	0	0	0

Çizelge C.16 : Uzama-burulma dinamik davranış için yakınsama çalışması ($L/h = 100$).

φ°	h/b	Eleman	Eleman sayısı	$e(\omega_1)$	$e(\omega_2)$	$e(\omega_3)$	$e(\omega_4)$
0	0.2	C3D20	27000	0.028251	0.028241	0.000827	0.02815
		C3D20	60800	0.012701	0.012738	6.39E-05	0.012668
		C3D20	124800	0	0	0	0
	0.5	C3D20	9324	0.079892	0.001755	0.079909	0.079933
		C3D20	28000	0.013196	0.000505	0.013199	0.01321
		C3D20	55200	0	0	0	0
	0.8	C3D20	11200	0.001967	0.001516	0.001959	0.001513
		C3D20	37352	0.000193	0.000331	0.000191	0.000337
		C3D20	60800	0	0	0	0
30	0.2	C3D20	26000	0.031089	0.031107	0.000615	0.031152
		C3D20	55200	0.001516	0.001515	0.000257	0.001516
		C3D20	117000	0	0	0	0
	0.5	C3D20	4000	0.334275	0.003896	0.334309	0.334395
		C3D20	14400	0.024268	0.001176	0.024269	0.024275
		C3D20	53360	0	0	0	0
	0.8	C3D20	11200	0.002014	0.00158	0.001999	0.001574
		C3D20	37352	0.000239	0.000395	0.000231	0.000398
		C3D20	71638	0	0	0	0
60	0.2	C3D20	30000	0.018725	0.018739	0.000514	0.018766
		C3D20	69600	0.001252	0.001255	0.000174	0.001257
		C3D20	109200	0	0	0	0
	0.5	C3D20	7000	0.080699	0.002563	0.080716	0.08074
		C3D20	28000	0.013121	0.000469	0.013125	0.013136
		C3D20	53360	0	0	0	0
	0.8	C3D20	12432	0.002083	0.001443	0.00208	0.001439
		C3D20	37352	0.000339	0.000459	0.000342	0.000453
		C3D20	81788	0	0	0	0
90	0.2	C3D20	42000	0.017874	0.017891	0.00011	0.017908
		C3D20	64400	0.003112	0.003113	3.7E-05	0.003108
		C3D20	109200	0	0	0	0
	0.5	C3D20	8008	0.081018	0.002361	0.081027	0.081048
		C3D20	28000	0.013891	0.000707	0.01389	0.013892
		C3D20	77112	0	0	0	0
	0.8	C3D20	11200	0.002114	0.001626	0.00211	0.001623
		C3D20	37352	0.000339	0.000441	0.000332	0.000441
		C3D20	80040	0	0	0	0

ÖZGEÇMİŞ

Ad-Soyad : Ömer Ekim GENEL

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans** : 2016, İstanbul Teknik Üniversitesi, Makina Fakültesi, Makina Mühendisliği
- **Yükseklisans** : 2018, İstanbul Teknik Üniversitesi, Makina Mühendisliği Anabilim Dalı, Makina Dinamiği, Titreşim ve Akustik

MESLEKİ DENEYİM VE ÖDÜLLER:

- Araştırma Görevlisi: 2020-2021, İstanbul Teknik Üniversitesi Makina Fakültesi.

DOKTORA TEZİNDEN TÜRETİLEN YAYINLAR, SUNUMLAR VE PATENTLER:

- **Genel, Ö.E.**, Tüfekci, E. 2023. Bending-bending coupled static analysis of functionally graded and porous pretwisted cantilever beams using initial values method. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 1-24. doi: 10.1080/15397734.2023.2185632.
- **Genel, Ö.E.**, Tüfekci, E. 2023. Axial-torsional coupled static behavior of inhomogeneous pretwisted cantilever beams. *Acta Mechanica*. doi: 10.1007/s00707-023-03561-y.