T.C.
İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Doktora Tezi

Değiştirilmiş Gravitasyon Teorilerinde Anizotropik Yıldızların Yapısal Analizi

Aylin ÇALIŞKAN

Fizik Anabilim Dalı

Matematiksel Fizik Programı

DANIŞMAN
Prof. Dr. Ertan GÜDEKLİ

II. DANIŞMAN
Unvan Ad SOYAD

Temmuz, 2024

İSTANBUL

Bu çalışma, 30.07.2024 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Fizik Anabilim Dalı, Matematiksel Fizik Programında Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Jürisi

Prof. Dr. Ertan GÜDEKLİ(Danışman)
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi

Doç. Dr. Değer SOFUOĞLU
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi

Dr. Öğr. Üyesi Diyadin CAN
Yeni Yüzyıl Üniversitesi
Mühendislik Mimarlık Fakültesi

Dr. Öğr. Üyesi Fatma Çağla AKINCI
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi

Doç. Dr. Arzu ÇİLLİ
Yıldız Teknik Üniversitesi
Fen-Edebiyat Fakültesi

İntihal Programı Beyanı

20.04.2016 tarihli Resmi Gazete'de yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince; Bu Lisansüstü teze, İstanbul Üniversitesi'nin abonesi olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Fen Bilimleri Enstitüsü'nün belirlemiş olduğu ölçütlere uygun rapor alınmıştır.

Proje Destekleri

Bu tez, İstanbul Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Yürütücü Sekreterliğinin ..... numaralı projesi ile desteklenmiştir.

Bu tez, ... numaralı ..... projesi ile desteklenmiştir

Tezden Üretilmiş Yayınların Künye Bilgileri

[1]. Caliskan, A., Zulqarnain, R.M., Güdekli, E., Siddique, I., Ahmad, H., and Askar, S., 2023, Structural properties of a new class of stellar structures in modified teleparallel gravity, *Frontiers in Astronomy and Space Sciences,* 10 (September), 1–14.

[2]. Jan, M., Liu, S. min, Basit, A., Caliskan, A., and Güdekli, E., 2023, A structural analysis of self-gravitating anisotropic stars via equation of state in modified teleparallel gravity, *Results in Physics,* 51.

ÖNSÖZ

Bu tezin konusunu belirleyen kıymetli danışmanım sayın Prof. Dr. Ertan GÜDEKLİ'ye çalışmalarım süresince paylaşmış olduğu bilgi ve deneyimleri, göstermiş olduğu her türlü maddi ve manevi destek için çok teşekkür ederim. Sayesinde doktora sürecimin kayda değer bir verim ve başarı ile geçtiği sevgili danışmanıma ayrıca, bana karşı sabırlı, anlayışlı yaklaşımı ve her koşulda yanımda olduğu için minnet dolu şükranlarımı sunarım.

Huzurlu ve aile ortamında hissettiğim çalışma ortamını bana sağlamış oldukları için Matematiksel Fizik Anabilim Dalı Başkanı sayın Prof. Dr. Ertan GÜDEKLİ başta olmak üzere tüm Matematiksel Fizik Anabilim Dalı Öğretim Üyelerine teşekkür ederim.

Tez İzleme Komitesi ve Matematiksel Fizik Anabilim Dalı Öğretim Üyelerinden sayın Doç. Dr. Değer SOFUOĞLU'na çalışmalarım süresince her daim yanımda olmasından ve psikolojik desteğinin yanı sıra paylaştığı tecrübeleriyle, sabırla bana kattıklarından dolayı, ayrıca teşekkür ederim. Tez İzleme Komitesi Üyesi, çok değerli sayın Dr. Öğr. Üyesi Diyadin CAN hocama anlayışı, desteği ve emekleri için çok teşekkür ederim.

Tez yazım sürecimde fikir alışverişinde bulunduğum, hayatıma bir şekilde bir noktadan dokunmuş olan, iletişimde olduğum herkese manevi destekleri ve sabırları için teşekkür ederim.

Tüm yaşantım süresince özverisini, sabır ve anlayışını, bana olan inancını, maddi ve manevi desteğini tez sürecimde de esirgemeyen, sayelerinde bu günlere gelebildiğim ve varoluşları ile mutluluğumun ve başarımın anlam kazandığı, tüm mücadelemin motivasyon kaynağı olan çok kıymetli çekirdek aileme sonsuz teşekkür ederim.

Temmuz 2024 Aylin ÇALIŞKAN

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖNSÖZ ..... **iv**
İÇİNDEKİLER ..... **v**
ŞEKİL LİSTESİ ..... **vii**
TABLO LİSTESİ ..... **x**
SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ ..... **xi**
ÖZET ..... **xiv**
SUMMARY ..... **xvi**
1) GİRİŞ **1**
2) GENEL KISIMLAR **6**
2.1. EINSTEIN ALAN DENKLEMLERİ 6
2.1.1. Enerji-Momentum Tansörü 7
2.2. RÖLATİVİST KOZMOLOJİ 10
2.2.1. FLRW Evren Modelleri 10
2.2.2. Kozmik İvmelenme 11
2.2.3. Kozmolojik Evrim 12
2.2.4. Karanlık Enerji ve Kozmolojik Sabit İlişkisi 14
2.3. GRT'YE ALTERNATİF DEĞİŞİKLİĞE UĞRATILMIŞ GRAVİTASYON TEORİLERİ 16
2.3.1. Teleparalel Gravitasyon Teorisi 17
2.4. ANİZOTROPİK YILDIZLARIN YAPISAL ANALİZİNDE KULLANILAN BAZI KAVRAMLAR 18
2.4.1. Karmarkar Koşulu 18
2.4.2. MIT (Massachusetts Institute of Technology) Bag Modeli 19
2.4.3. Anizotropi 21
2.4.4. Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) Denklemi 22
2.4.5. Adyabatik İndeks 23
2.4.6. Enerji Koşulları 25
2.4.7. Kütle Fonksiyonu, Kompaktlık Parametresi ve Kırmızıya Kayma Fonksiyonu 26
2.4.8. Adler-Finch-Skea Uzay-Zamanı 28

2.4.9. Abreu Kriterleri 29
3) MALZEME VE YÖNTEM....31
3.1. EINSTEIN-HILBERT AKSİYONU....31
3.2. 4-BOYUTLU UZAY-ZAMAN GEOMETRİSİNİN TEMEL BİLEŞENLERİ....32
3.3. BİR U VEKTÖR ALANINA GÖRE KOVARYANT TÜREV....33
3.4. EĞRİLİK VE TORSİYON, CARTAN DENKLEMLERİ....36
3.5. TETRAD FORMALİZMİ....39
3.5.1. Ortonormal Tetrad Formalizmi....42
4) BULGULAR....45
4.1. DEĞİŞTİRİLMİŞ TELEPARALEL GRAVİTASYONDA, HÂL DENKLEMİ ARACILIĞIYLA KENDİ KENDİNE GRAVİTASYON YAPAN ANİZOTROPİK YILDIZLARIN YAPISAL ANALİZİ....45
4.1.1. Sınır Koşulları....53
4.1.2. Off-Diagonal Tetrad Arka Planında Non-Lineer Model $n = 2$ için Fiziksel Analiz....54
4.1.3. Diagonal Tetrad (Lineer Model $n = 1$) için Fiziksel Analiz....62
4.2. DEĞİŞTİRİLMİŞ TELEPARALEL GRAVİTASYON ÇERÇEVESİNDE YENİ BİR YILDIZ SINIFININ YAPISAL ÖZELLİKLERİ....72
4.2.1. Sınır Koşulları....77
4.2.2. Off-Diagonal Tetrad Arka Planında Non-Lineer Model $n = 2$ için Fiziksel Analiz....79
5) TARTIŞMA VE SONUÇ....88
KAYNAKLAR....92
EKLER....103
EK 1. GENEL VARYASYONLAR.....103
EK 2. BAZI ÖNEMLİ VARYASYONLAR.....107
EK 3. İDEAL AKIŞKAN İÇİN ENERJİ MOMENTUM TANSÖRÜ.....110
EK 4. FLRW EVRENİ İÇİN SÜREKLİLİK DENKLEMİNİN TÜRETİLMESİ.....111
EK 5. DEĞİŞTİRİLMİŞ GRAVİTASYONUN ALAN DENKLEMLERİNİN METRİĞE GÖRE VARYASYONLA ÇIKARILIŞI.....112
EK 6. BAZI SABİTLER VE BOYUTLARI.....120
ÖZGEÇMİŞ....122

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa No

Şekil 4.1: Off-diagonal tetrad, $n = 2$ için r/R oranına karşılık gelen metrik potansiyelleri. 55

Şekil 4.2: Off-diagonal tetrad, $n = 2$ için r/R oranına karşılık gelen enerji yoğunluğu ρ.....56

Şekil 4.3: Off-diagonal tetrad, $n = 2$ için r/R oranına karşılık gelen basıncın radyal (p_r) ve teğetsel (p_t) bileşenleri.....56

Şekil 4.4: Off-diagonal tetrad, $n = 2$ için r/R oranına karşılık gelen gradyanler. 57

Şekil 4.5: Off-diagonal tetrad, $n = 2$ için r/R oranına karşılık gelen anizotropi. 57

Şekil 4.6: Off-diagonal tetrad, $n = 2$ için r/R oranına karşılık gelen enerji koşulları. 58

Şekil 4.7: Off-diagonal tetrad, $n = 2$ için r/R oranına karşılık gelen hâl denklem parametreleri.....58

Şekil 4.8: Off-diagonal tetrad, $n = 2$ için r/R oranına karşılık gelen ses hız parametreleri.....59

Şekil 4.9: Off-diagonal tetrad, $n = 2$ için r/R oranına karşılık gelen ses hız parametreleri.....59

Şekil 4.10: Off-diagonal tetrad, $n = 2$ için r/R oranına karşılık gelen kuvvetler; F_h (Düz-Pozitif), F_g (Düz-Negatif), F_a (Noktalı), F_e (Nokta-Kesikli). 60

Şekil 4.11: Off-diagonal tetrad, $n = 2$ için r/R oranına karşılık gelen adyabatik indeks, Γ.....60

Şekil 4.12: Off-diagonal tetrad, $n = 2$ için r/R oranına karşılık gelen kompaktlık parametresi $u(r)$.....61

Şekil 4.13: Off-diagonal tetrad, $n = 2$ için r/R oranına karşılık gelen kütle fonksiyonu $m(r)$. 61

Şekil 4.14: Off-diagonal tetrad, $n = 2$ için r/R oranına karşılık gelen kırmızıya kayma fonksiyonu z_s.....62

Şekil 4.15: Diagonal tetrad, $n = 1$ için r/R oranına karşılık gelen metrik potansiyelleri. 65

Şekil 4.16: Diagonal tetrad, $n = 1$ için r/R oranına karşılık gelen yoğunluk ρ. 65

Şekil 4.17: Diagonal tetrad, $n = 1$ için r/R oranına karşılık gelen basıncın radyal (p_r) ve teğetsel (p_t) bileşenleri. 66

Şekil 4.18: Diagonal tetrad, $n = 1$ için r/R oranına karşılık gelen gradyanler. 66

Şekil 4.19: Diagonal tetrad, $n = 1$ için r/R oranına karşılık gelen anizotropi. 67

Şekil 4.20: Diagonal tetrad, $n = 1$ için r/R oranına karşılık gelen enerji koşulları. 67

Şekil 4.21: Diagonal tetrad, $n = 1$ için r/R oranına karşılık gelen hâl denklem parametreleri. 68

Şekil 4.22: Diagonal tetrad, $n = 1$ için r/R oranına karşılık gelen ses hızı parametreleri. 68

Şekil 4.23: Diagonal tetrad, $n = 1$ için r/R oranına karşılık gelen ses hızı parametreleri. 69

Şekil 4.24: Diagonal tetrad, $n = 1$ için r/R oranına karşılık gelen kuvvetler. 69

Şekil 4.25: Diagonal tetrad, $n = 1$ için r/R oranına karşılık gelen adyabatik indeks, Γ. 70

Şekil 4.26: Diagonal tetrad, $n = 1$ için r/R oranına karşılık gelen kompaktlık parametresi, $u(r)$. 70

Şekil 4.27: Diagonal tetrad, $n = 1$ için r/R oranına karşılık gelen kütle fonksiyonu, $m(r)$. 71

Şekil 4.28: Diagonal tetrad, $n = 1$ için r/R oranına karşılık gelen kırmızıya kayma parametresi, z_s. 71

Şekil 4.29: Off-diagonal tetrad, $n = 2$ için r/R oranına karşılık gelen metrik potansiyelleri. 80

Şekil 4.30: Off-diagonal tetrad, $n = 2$ için r/R oranına karşılık gelen enerji yoğunluğu ρ. 80

Şekil 4.31: Off-diagonal tetrad, $n = 2$ için r/R oranına karşılık gelen basıncın radyal (p_r) ve teğetsel (p_t) bileşenleri. 81

Şekil 4.32: Off-diagonal tetrad, $n = 2$ için r/R oranına karşılık gelen gradyanler. 82

Şekil 4.33: Off-diagonal tetrad, $n = 2$ için r/R oranına karşılık gelen anizotropi parametresi, Δ. 82

Şekil 4.34: Off-diagonal tetrad, $n = 2$ için r/R oranına karşılık gelen enerji koşulları. 83

Şekil 4.35: Off-diagonal tetrad, $n = 2$ için r/R oranına karşılık gelen ses hızı parametreleri. 84

Şekil 4.36: Off-diagonal tetrad, $n = 2$ için r/R oranına karşılık gelen ses hızı parametreleri. 84

Şekil 4.37: Off-diagonal tetrad, $n = 2$ için r/R oranına karşılık gelen kuvvetler; F_h (Düz-Pozitif), F_g (Düz-Negatif), F_a (Noktalı), F_e (Nokta-Kesikli). 85

Şekil 4.38: Off-diagonal tetrad, $n = 2$ için r/R oranına karşılık gelen durum denklem parametreleri; ω_t (Nokta-Kesikli), ω_r (Düz). 86

Şekil 4.39: Off-diagonal tetrad, $n = 2$ için r/R oranına karşılık gelen kütle fonksiyonu, $m(r)$. 86

Şekil 4.40: Off-diagonal tetrad, $n = 2$ için r/R oranına karşılık gelen kompaktlık parametresi, $u(r)$ 87

Şekil 4.41: Off-diagonal tetrad, $n = 2$ için r/R oranına karşılık gelen kırmızıya kayma parametresi, z_s. 87

TABLO LİSTESİ

Sayfa No

Tablo 4.1: Off-diagonal tetrad için n = 2 sabit değer durumuna karşı gelen farklı β değerleri. 55

Tablo 4.2: Diagonal tetrad için n = 1 sabit değer durumuna karşı gelen farklı β değerleri. 64

Tablo 4.3: Off-diagonal tetrad için n = 2, y = −0.04, z = −0.0009, ϕ = 2.036 × 10−35 ve β = −30 sabit değer durumlarına karşılık gelen farklı c ve β değerleri. 79

SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ

Simgeler	Açıklama
g_{ab}, g_{ij}	: Uzay-zamanın metriği
ds^2	: Metrik, yay elemanı ya da uzay-zaman aralığı
g	: Metriğin determinantı
η_{ab}, η_{ij}	: Lorentz uzay-zaman metriği
$\delta^a{}_b$	: Kronecker deltası
R_{ab}, R_{ij}	: Ricci tansörü
R	: Ricci skaler eğriliği
$R^a{}_{bcd}$	: Riemann-Christoffel eğrilik tansörü
G_{ab}, G_{ij}	: Einstein tansörü
Λ	: Kozmolojik sabit
T_{ab}, T_{ij}	: Enerji-momentum tansörü
$\mathcal{T}$	: Enerji-momentum tansörünün izi
T	: Torsiyon skaleri
G	: Gauss-Bonnet terimi
u^a, u^i	: 4-lü hız vektörü
μ	: Madde-enerji yoğunluğu
p	: Eşyönlü basınç
ρ	: Rölativist enerji yoğunluğu
q_a	: Isı akısı
π_{ab}	: Eşyönsüz basınç tansörü
$\dot{u}_a$	: 4-lü ivme
θ_{ab}	: Genişleme tansörü
θ	: Genişleme skaleri
σ_{ab}	: Makaslama (shear) tansörü
σ	: Makaslama (shear) skaleri
ω_{ab}	: Girdap (dönme) tansörü
ω_a	: Girdap (dönme) vektörü
ω	: Dönme skaleri

$\Gamma^{a}{}_{bc}, \Gamma^{i}{}_{jk}$: Ricci dönme katsayıları (veya Christoffel sembolleri)

$\Gamma^{\beta}_{\nu\mu}$: Levi-Civita bağlantısı

∇_a : Kovaryant türev operatörü

∂_μ : Kısmi türev operatörü

$\Box \equiv \nabla^a \nabla_a$: d'Alembert operatörü

δ : Varyasyon operatörü

$D_a \equiv h_a{}^b \nabla_b$: İzdüşürülmüş 3-boyutlu kovaryant türev operatörü

$e_a \equiv \partial_a$: Tetrad taban vektörü veya tetrad türev operatörü

e^a : Dual tetrad taban 1-formu

S_{EH} : Einstein-Hilbert aksiyonu

S_m : Madde-enerji aksiyonu

L_m : Lagrange madde yoğunluğu

L : Lagrange yoğunluk fonksiyonu

G : Newton gravitasyon sabiti

$\gamma^{c}{}_{ab}$: Komütasyon fonksiyonları

H : Hubble parametresi

H_0 : Hubble sabiti

q : Yavaşlama parametresi

$w(=\gamma-1)$: Standart maddenin hâl parametresi

w_{KE} : Karanlık enerji hâl parametresi

ϕ : Skaler alan

$V(\phi)$: Skaler potansiyel

$a(t)$: FLRW evrenin ölçek çarpanı

$\{e_a\}$: Tetrad tabanı

${}^3R$: Uzaysal skaler eğrilik

$\mathbf{n}$: Normal kongruans

κ^2 : Kuplaj sabiti

c : Işık hızı

v_s : Ses hızı

$m(r)$: Kütle fonksiyonu

$u(r)$: Kompaktlık parametresi

z_s : Kırmızıya kayma fonksiyonu

B_g : MIT bag sabiti

Δ : Anizotropi parametresi

Γ : Adyabatik indeks

⊗ : Tansör çarpımı

$M_{\odot}$: Güneş kütlesi

Kısaltmalar **Açıklama**

GRT : Genel Rölativite Teorisi

GR : Genel Rölativite

ΛCDM : Λ Soğuk Karanlık Madde (Λ (Lambda) Cold Dark Matter)

EAD : Einstein Alan Denklemleri

EoS : Hâl Denklemi (Equation of State)

EH : Einstein Hilbert

KE : Karanlık Enerji

KM : Karanlık Madde

RW : Robertson-Walker

FLRW : Friedmann-Lemaître- Robertson-Walker

NEC : Sıfır Enerji Koşulu (Null Energy Condition)

WEC : Zayıf Enerji Koşulu (Weak Energy Condition)

SEC : Güçlü Enerji Koşulu (Strong Energy Condition)

DEC : Baskın Enerji Koşulu (Dominant Energy Condition)

TOV : Tolman-Oppenheimer-Volkoff

MIT : Massachusetts Institute of Technology

ÖZET

DOKTORA TEZİ

DEĞİŞTİRİLMİŞ GRAVİTASYON TEORİLERİNDE ANİZOTROPİK YILDIZLARIN YAPISAL ANALİZİ

Aylin ÇALIŞKAN

İstanbul Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Fizik Anabilim Dalı

Danışman : Prof. Dr. Ertan GÜDEKLİ

II. Danışman : Unvan Ad SOYAD

Bu tezde, teleparalel gravitasyon teorisi çerçevesinde T'nin torsiyon, $\mathcal{T}$'nin enerji-momentum tansörü olduğu $f(T,\mathcal{T})$ değiştirilmiş gravitasyonun etkileri hesaba katılarak, kompakt nötron yıldız modellerini tanımlayan küresel simetrik uzay-zamanı temel alarak anizotropik çözümler ve de alan denklemlerinin, hem diagonal hem de off-diagonal tetradlar için $f(T,\mathcal{T})$ değiştirilmiş gravitasyonun genel fonksiyonunun iki farklı seçeneği olan lineer ve non-lineer modeller ile eşleşme durumları araştırıldı. MIT bag modeli hâl denklemi tanımlandıktan sonra garip (tuhaf) kuark madde dağılımı alınarak yıldız modellerine tam çözüm elde edildi. $PSRJ1416-2230, 4U1608-52, CenX-3, EXO1785-248$ ve $SMCX-1$ kompakt nötron yıldız adayları için $f(T,\mathcal{T})$ fonksiyonunun genel modeli $f(T,\mathcal{T}) = \alpha T^n(r) + \beta\mathcal{T}(r)$ formunda, $4U1538-52, J0437-4, 715, J0030+0451$ ve $4U1820-30$ kompakt nötron yıldız adayları için ise $f(T,\mathcal{T})$ fonksiyonunun genel modeli $f(T,\mathcal{T}) = \alpha T^n(r) + \beta\mathcal{T}(r) + \phi$ formunda ele alınarak ve ϕ evrenin genişleme fazlarını tanımlayan kozmolojik bir sabit

olduğundan diğer keyfi sabitler olan α, β ve n'ye değerlerini ayarlayarak temel gravitasyon modellerine dönüştürülebilir olan $f(T,\mathcal{T})$ fonksiyonunun elde edilen formu ile alan denklemleri elde edildi. Alan denklemleri elde edildikten sonra, ele alınan kompakt nötron yıldız adaylarının kütle ve yarıçap gibi gözlemsel verileri kullanılarak modellerin kararlılığını ve kabul edilebilirliğini gösteren enerji yoğunluğu, basıncın radyal ve teğetsel bileşenleri, gradyanler, anizotropi, enerji koşulları, hâl denklemi, ses hızları, TOV (Tolman-Oppenheimer-Volkoff) denklemi ve kompaktlaştırma parametreleri gibi farklı fiziksel parametrelerin ayrıntılı özellikleri araştırıldı. Ayrıntılı ve kapsamlı grafiksel analizler neticesinde, anizotropik doğa içeren bu modellerin bilinen akışkan içerdikleri, fiziksel olarak kabul edilebilir, düzenli ve kararlı oldukları bulundu.

Temmuz 2024, 140 sayfa.

Anahtar kelimeler: Değiştirilmiş teleparalel gravitasyon, MIT bag model, Anizotropik kompakt nötron yıldızları, $f(T,\mathcal{T})$ gravitasyonu

SUMMARY

Ph.D. THESIS

STRUCTURAL ANALYSIS OF ANISOTROPIC STARS IN MODIFIED THEORIES OF GRAVITY

Aylin ÇALIŞKAN

İstanbul University

Institute of Graduate Studies in Sciences

Department of Physics

Supervisor : Prof. Dr. Ertan GÜDEKLİ

Co-Supervisor : Academic Title Name SURNAME

In this thesis, within the framework of teleparallel gravity theory, considering the effects of modified $f(T,\mathcal{T})$ gravity, where T represents torsion and $\mathcal{T}$ denotes the energy-momentum tensor of torsion, anisotropic solutions for compact neutron star models based on spherically symmetric space-time and The matching conditions of the field equations for both diagonal and off-diagonal tetrads with the general function of modified $f(T,\mathcal{T})$ gravity were investigated for two different models: linear and non-linear are investigated. After defining the equation of state for the MIT bag model, a complete solution for star models was obtained by considering the strange quark matter distribution. For the compact neutron star candidates $PSRJ1416-2230, 4U1608-52, CenX-3, EXO1785-248$ and $SMCX-1$, we considered the general model of the $f(T,\mathcal{T})$ function in the form $f(T,\mathcal{T}) = \alpha T^n(r) + \beta\mathcal{T}(r)$. For the compact neutron star candidates $4U1538-52, J0437-4,715, J0030+0451$ and

$4U1820-30$ we considered the general model of the $f(T,\mathcal{T})$ function in the form $f(T,\mathcal{T}) = \alpha T^n(r) + \beta\mathcal{T}(r) + \phi$. And since ϕ is a cosmological constant defining the expansion phases of the universe, by adjusting the values of the other arbitrary constants α, β and n, the obtained form of the $f(T,\mathcal{T})$ function, which can be transformed into fundamental gravity models, are used to derive the field equations. After deriving the field equations, the detailed properties of various physical parameters such as energy density, radial and tangential components of pressure, gradients, anisotropy, energy conditions, equation of state, sound speeds, TOV (Tolman-Oppenheimer-Volkoff) equation, and compactness parameters, which demonstrate the stability and acceptability of the models, are investigated using the observational data of mass and radius for the considered compact neutron star candidates. As a result of detailed and comprehensive graphical analyses, it is found that these models, which include anisotropic nature, contain known fluids and are physically acceptable, regular, and stable.

July 2024, 140 pages.

Keywords: Modified teleparallel gravity, MIT bag model, Anisotropic compact neutron stars, $f(T,\mathcal{T})$ gravity.

1) GİRİŞ

1915 yılında Albert Einstein tarafından öne sürülen Genel Rölativite Teorisi (GRT), modern kozmolojinin temelinin oluşmasında büyük önem taşımaktadır. GRT'nin önerilmesinin ardından, 1916'da Einstein'ın ortaya koyduğu evren modeli, kapalı ve statik bir yapı olarak tasvir edilmekte ve Λ kozmolojik sabiti ile maddeyi içermektedir. Kozmolojik sabit Λ teriminin önemi, gözlemler sonucunda tespit edilen galaksilerin resesyon hareketi ve Eddington ve Lemaitre'ın yaptığı çalışmalar neticesinde ortaya konulmuştur. Büyük ölçeklerde Λ sabiti, değeri küçük olmasına rağmen etkisini farkettirebilmektedir. Örneğin, $\Lambda = 0$ durumunda evren 'açık' iken, $\Lambda \neq 0$ durumunda evren 'kapalı' olabilmektedir. Ayrıca, Kozmik Mikrodalga Arka Planı, Tip-Ia Süpernovalar, Büyük Ölçekli Yapı, Zayıf Merceklenme ve Baryon Akustik Osilasyonları gibi farklı kozmik kaynaklardan elde edilen güncel kozmolojik veriler, erken evrenin bir enflasyon döneminden geçtiğini, Standart Büyük Patlama modellerine uygun olarak evrimleştiğini ve günümüz evreninin Λ kozmolojik sabit gibi davranan, pozitif yoğunluklu, negatif basınçlı bir enerji kaynağının (karanlık enerji) yani egzotik bir maddenin etkisiyle hızlanarak ivmelendiğini ve hemen hemen uzaysal olarak düz bir geometriye sahip olduğunu göstermektedir. Yine güncel verilere göre ΛCDM (Λ (Lambda) Cold Dark Matter; Λ Soğuk Karanlık Madde) çerçevesinde, evrenin enerji yoğunluğu, yaklaşık %5'inin baryonik madde, %27'sinin karanlık madde (KM) ve %68'inin de halen yapısı tam olarak anlaşılmamış olan karanlık enerjiden (KE) oluşmaktadır.

Einstein alan denklemlerinin (EAD); yüksek mertebeden eğriliklere ihtiyaç duyan sistemlerin tasvirinde ve evrende cereyan eden bir takım olayların açıklanmasında yetersiz kalmasından ötürü bu konularda çalışan kişileri alternatif teori & teorileri aramaya yöneltmiştir. Einstein alan denklemlerinin, bilinen enerji ve momentum kaynakları için elde edilen ilk çözümleri Friedman-Lemaitre-Robertson-Walker (FLRW) modelleri olarak bilinmektedir. FLRW modelleri günümüz evrenini her ne kadar başarıyla tasvir ediyor olsa da, evrenin evrimleşmesinin tasvirinde önemli sorunları barındırmaktadır. Bu sorunlar; düzlük sorunu, ufuk problemi (izotropi sorunu), ince ayar problemi, yapıların oluşumu sorunu, raslantı sorunu, manyetik tek kutuplu sorundur. FLRW modellerinin bir mertebe genelini uzayca homojen fakat eş yönsüz modeller oluşturmaktadır. Bianchi tip denilen bu modellerde de çözüm bulmak daha da karmaşık duruma gelmektedir. Kozmolojik kapsamda bu tür zorluklar, 1969'da Ellis ve

MacCallum'un [1,2,3] yaygınlaşmasına önemli katkılar sağladığı Tetrad Formalizmi sayesinde daha hakim olunabilir bir yapı kazanmıştır. İkinci mertebeden türevler veren metrik yaklaşımına alternatif olarak Tetrad Formalizmi birinci mertebeden türevlere yol açmaktadır. Özel olarak, uzayca homojen modeller söz konusu olduğunda, denklemler yalnızca düz zamansal türevli ve değişkenler de yalnızca zamanın fonksiyonu olmaktadır. Ancak bu basitleştirmenin yol açtığı ufak bir sorun bulunmaktadır, o da denklem sayısının metrik yaklaşımdakine göre daha fazla olmasıdır. Fakat yine de Tetrad Formalizmi daha şeffaf bir fiziksel yorum yapabilme, simetrileri daha iyi ifade edebilme ve daha bütünsel olabilme gibi üstün ayrıcalıkları sebebiyle daha çok tercih edilen formalizm olmayı sürdürmektedir. Son yıllarda Tetrad Formalizmi yüksek yoğunluktaki gök cisimlerinin yapılarını anlamada kullanılan alternatif değiştirilmiş gravitasyon teorilerinde matematiksel alt yapı olma konusunda popüler hale gelmiştir.

Gök cisimlerinin evrimindeki ana aşamalardan biri, kompakt yıldız nesnelerinin oluşumuna neden olan, ölümlerine yakın gravitasyonel çöküş sürecidir. Bu kompakt yıldızsal nesneler, yüksek yoğunluktaki maddelerin özelliklerini ve bileşimini incelemek için ideal kaynaklar olarak görülmekte olan sıradan gök cisimlerinin evriminin son noktalarıdır. Beyaz cüce yıldızları, nötron yıldızları ve kara delikler gibi kompakt nesneler bir yıldızın evriminin son aşamasını temsil ederler. Sıradan bir yıldız nesnesinin süpernova patlaması, kompakt yıldızlar olarak adlandırılan bu yoğun yapıları ortaya çıkarır. Yıldızlar, hidrojen bulutlarının bir araya geldiği, yüksek derecede sıkıştırıldığı ve gravitasyon etkileşimi yoluyla ısıtıldığı gazlı bulutsularda doğar ve yaklaşık $10^7\ K$ sıcaklıkta, hidrojeni daha ağır elementlere dönüştüren nükleer bir reaksiyon başlar, böylece büyük miktarda elektromanyetik enerji (ışık) açığa çıkar. Ancak yıldız daha yüksek sıcaklıkta yanar ve çekirdekte biriken daha ağır elementler tutuşurken, elektromanyetik basınç gravitasyon çöküşüne karşı giderek daha az etkili hale gelir ve yıldız kendi ağırlığı altında çöker. Bu, yoğun yıldız yapısından kaynaklanan, içe doğru yönelen gravitasyon çekimine karşı dengelenen dışa doğru bir basınç üretir. Yıldızlarda çöküş olgusu, bu kuvvetler (gravitasyon ve dışa doğru basınç) birbirleri için gerekli dengeyi sağlamayı bıraktığında meydana gelir ve bu da yeni kompakt yıldızların oluşumunu sağlar. Nötron yıldızları ise tüm termo-nükleer yakıtını tükettikten sonra çökmüş bir yıldızın son aşamasıdır. Büyük kütleli bir nötron yıldızı tekrar kara deliğe çökebilir ancak daha düşük kütleli bir nötron yıldızı kuark yıldızına dönüşebilir. Nötron yıldızlarının merkezlerine yakın aşırı koşullar, çekirdeğin tamamen kuark maddesinden oluştuğu hipotezine yol açmıştır. Dolayısıyla da

nötron yıldızları gibi kompakt nesneler üzerine çalışmanın önemi ve ilgisi, astrofizik, nükleer fizik ve parçacık fiziği arasında bir köprü görevi görerek kritik bir rol oynamasıdır.

Bu kompakt nesneler, yüksek sıcaklık derecelerinden bile etkilenmeyen yoğun yapılarla (büyük kütleler, küçük yarıçaplar) ortaya çıkar. Kompakt nesne maddelerinin, baryonlar, leptonlar, mezonlar ve garip (tuhaf) kuark maddesi gibi atom altı parçacıklardan oluştuğu düşünülse de sahip oldukları madde bileşimi hakkında henüz kesin gözlemsel veriler bulunmamaktadır. Dolayısıyla karşılaşılan problem, kullanılan geometrinin belirlenmesi ve iç yüzey madde dağılımının tespitidir. Kompakt bir gök cisminin altındaki küresel simetrik madde dağılımı, lokal basınç anizotropisi tarafından betimlenebilir. Anizotropik kompakt yıldızlar için üretilen yıldız modelinin fizikselliği, bazı temel özelliklerinin çeşitli fiziksel testlerle doğrulanması yoluyla onaylanmıştır, bunlar; enerji yoğunluğu, radyal (p_r) ve teğetsel (p_t) basınçlar, anizotropi etkisi, dinamik denge, enerji koşulları ve dinamik kararlılık gibi özelliklerdir. Anizotropi ($\Delta = p_t - p_r$), radyal ve teğet basınç bileşenlerinin birbirine denk geldiği izotropiden ($p_t = p_r$) sapmanın bir ölçütüdür. Anizotropik koşulların oluşmasına sebep olan kaynaklar, yıldız gövdesi içindeki süperakışkan, akışkan karışımları, katı çekirdek, faz geçişi, viskozite ve manyetik alanların varlığıdır. Ultra yüksek yoğunluklar düzeyinde ($10^{15}\ g/cm^3$) yapılan madde çalışmaları, yıldız akışkanındaki radyal ve teğetsel madde-enerji tansör bileşenlerinin eşit olamayabileceğini göstermektedir. Lokal anizotropi, kendiliğinden gravitasyona sahip sistemlerin kararlılığını önemli ölçüde etkileyebilir [4,5].

Nümerik ve analitik olarak, statik, durağan veya çöken rölativist kompakt nesneleri tanımlayan, fiziksel olarak uygun çözümlerin özelliklerini keşfetmeye yönelik dikkate değer birçok girişim bulunmaktadır. Bilinen tüm kesin çözümler, metrik üzerindeki simetri koşulları, Riemann tansörünün cebirsel yapısı, değiştirilmiş alan denklemleri, madde değişkenleri için anlamlı denklemler veya belirli başlangıç ve sınır koşullarının seçilmesi gibi bazı kısıtlamalar uygulayarak elde edilmiştir.

Kararlı yıldızlar, karanlık enerjinin itici doğasının sonucu olarak oluşan gravitasyon çöküşünün kalıntılarıdır. İtme, çöküşü durduracak kadar güçlüdür ve herhangi bir tekillik olmaksızın kararlı yıldızların oluşumuna yol açar. Daha yüksek mertebeden gravitasyon teorileri, kompakt yıldız nesne modellerini üretmede başarılı olmaktadır. Kompakt yıldızları tanımlayan Einstein alan denklemlerinin kesin çözümlerini türetmek için popüler ve son dönemde uygulanan bir yaklaşım, Karmarkar koşulunun kullanılmasıdır. Karmarkar koşulu 4-boyutlu uzay-zamanların

daha yüksek boyutlara gömülmesi için hem kozmolojik hem de astrofiziksel modeller üretmede ciddi önem arz eden bir araçtır. Daha yüksek boyutlu düz uzay-zamanda eğri bir geometrinin gömülmesi, iki potansiyel (radyal ve zamansal) arasında ek bir ilişki sağlayan bir kısıtlama oluşturur, buna Karmarkar Koşulu denir. Bu kısıtlama kullanılarak statik, küresel simetrik uzay-zaman için gömme Class-I çözümü kullanılmaktadır.

Küresel simetrik bir uzay-zamanın gömme Class-I olduğu durum için gerekli ve yeterli koşul ilk kez Karmarkar tarafından türetilmiştir. Bu, kesin çözümler elde etme problemini tek bir üreten fonksiyona indirgeyen matematiksel bir basitleştirmedir. Yaklaşım, fiziksel gerekçelere dayanarak gravitasyon potansiyellerinden birini seçmek ve ardından Karmarkar koşulunu entegre ederek modelin gravitasyon davranışını tam olarak belirlemektir. Karmarkar koşulu aracılığıyla modellemeler, gözlemsel verilerle oldukça tutarlı olan, yarıçap, kütle, kırmızıya kayma, kompaktlık gibi yıldız özelliklerinin oluşturulmasında oldukça başarılıdır.

Ayrıca MIT bag modeline dayanarak, maddenin en kararlı halinin garip (tuhaf) kuark maddesi olduğu, yani yaklaşık olarak eşit sayıda yukarı, aşağı ve tuhaf kuark içeren bir karışım olduğu iddia edilmektedir. Örneğin; kompakt yıldızların içindeki topoloji değişikliğine, yani solucan deliğine yol açabileceği de önerilmiştir. Bir nötron yıldızının içindeki topoloji değişikliği, belirli bir minimal yarıçaplı bir kuark maddesi çekirdeği gerektirir.

Yukarıda yapılan açıklamalar ışığında, tez kapsamında yapmış olduğumuz çalışmalarda, genişletilmiş teleparalel gravitasyon teorisinde, kompakt nötron yıldız nesne modellerini ve bu modelleri tanımlayan küresel simetrik, anizotropik çözümleri araştırıyoruz. Bunu yaparken de koordinatsal taban (tansör) indisleri olarak, $\{i, j, k, \ldots = 0,1,2,3\}$ ve tetrad taban indisleri olarak da $\{a, b, c, \ldots = 0,1,2,3\}$ ve $\{\alpha, \beta, \gamma, \ldots = 1,2,3\}$ indislerini kullanıyoruz. Ayrıca anizotropik doğadaki kompakt nesnelerin yapılarını inşa etmek için kısıtlamaları ortadan kaldırmak amacıyla off –diagonal tetrad seçiyoruz. Yine aynı sebep olan $f(T)$ değiştirilmiş gravitasyonu ile meydana gelen Güneş sistemindeki kısıtlamalardan [6-8] kurtulabilmek amacıyla değiştirilmiş gravitasyona ek terim olarak enerji-momentum tansörünün izini ekleyerek $f(T, \mathcal{T})$ değiştirilmiş gravitasyonunu ele alıyoruz. Çünkü $f(T, \mathcal{T})$ modifikasyonu [9-12], bir başlangıç enflasyonist aşamasından sonra ivmelenmeyen ve ardından da geç zamandaki ivmelenme aşamasının birleşik bir kombinasyonunu oluşturmaktadır. Alan denklemlerini tetrad dahilinde ele alıyoruz. T'nin torsiyon (burulma) ve $\mathcal{T}$'nin enerji-momentum tansörünün izi olduğu, $f(T, \mathcal{T})$ değiştirilmiş gravitasyon teorisinde, lineer ve non-lineer modeller için tetrad alanların

eşleşmesini araştırıyoruz. İlk çalışmada, $PSRJ1416-2230, 4U1608-52, CenX-3, EXO1785-248$ ve $SMCX-1$ kompakt nötron yıldız adaylarının, ikinci çalışmada ise $4U1538-52, J0437-4,715, J0030+0451$ ve $4U1820-30$ kompakt nötron yıldız adaylarının; enerji yoğunlukları, basınç profilleri, gradyanleri, anizotropileri, enerji koşulları, hâl denklemleri (EoS; Equation of State), ses hızları, TOV (Tolman-Oppenheimer-Volkoff) denklemleri ve kompaktlaştırma parametreleri gibi ayrıntılı özelliklerini inceliyoruz. Çalışmalarımızda Karmarkar koşulunu hesaba katarak, Class-I olarak bilinen 5-boyutlu sözde (pseudo) Öklidyen uzayına gömülü 4-boyutlu bir uzay-zaman sunuyoruz ve yüksek yoğunluklar $(10^{15}\, g/cm^3)$, nükleer akışkanların doğasının anizotropik olmasına yol açtığı için, kompakt bir nesnenin iç kısmını anizotropik bir akışkan olarak kabul ediyoruz ve hâl denkleminin daha genel bir formu olan MIT bag modelini kullanıyoruz.

Tez çalışma planımız şu şekilde olacaktır; Genel Kısımlar Bölümü'nde, Einstein Genel Rölativite Teorisi'nin Alan Denklemleri'ni ve Değiştirilmiş Gravitasyon Teorileri ile bu bağlamda Teleparalel Gravitasyon Teorisi'ni tanıtıyoruz. Malzeme ve Yöntem Bölümü'nde, tez kapsamında yapılan çalışmaların anlaşılır olabilmesi adına temel bazı kavramları tanıtıyor ve Bulgular Bölümü'nde ele alınan çalışmaların üzerine inşa edildiği matematiksel temelleri veriyoruz. Bulgular Bölümü'nde kendi kendine gravitasyon yapan anizotropik kompakt yıldızların yapısal analizi ile bu yıldız modellerine tam çözümler elde ediyoruz. İlgili alan denklemlerinin elde edilmesinden sonra, ele alınan kompakt yıldız modellerinin kararlılığını ve kabul edilebilirliğini gösteren farklı fiziksel parametreleri araştırıyoruz. Sonuç Bölümü'nde de yapılan çalışmaların kısa bir karşılaştırmalı tartışmasını sunuyoruz.

2) GENEL KISIMLAR

2.1. EINSTEIN ALAN DENKLEMLERİ

1915'te Einstein'ın ileri sürmüş olduğu GRT'nin dayandığı EAD;

$$G_{ij} \equiv R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R = -\Lambda g_{ij} + \kappa^2 T_{ij} \tag{2.1}$$

şeklindedir. Burada G Newton gravitasyon sabiti, c ise ışık hızıdır. G_{ij} Einstein tansörü, R_{ij} 4-boyutlu uzay-zamanın Ricci eğrilik tansörü, g_{ij} 4-boyutlu uzay-zaman geometrisinin metriği, R Ricci skaler eğriliği, Λ kozmolojik sabit, T_{ij} madde-enerji içeriğini tasvir eden enerji-momentum tansörü ve $\kappa^2 = \frac{8\pi G}{c^4}$ eşitliğine sahip, Einstein kuplaj sabitidir. (2.1) eşitliğinin sol tarafı (G_{ij}) ele alınan uzay-zamanın geometrik özelliklerini (homojenlik, izotropi, küresel, silindirik, vb.), sağ tarafı (T_{ij}) ise fiziksel içeriği (boş uzay-zaman, mükemmel akışkan, viskoz akışkan, ısı akısı, sicim, vb.) vermektedir. Ayrıca,

$$\mathcal{T} \equiv \text{İz}(T_{ij}) = g^{ij} T_{ij} = \mathrm{T}^{i}{}_{i} \tag{2.2}$$

olarak ifade edilmektedir. Eğer, büzülmüş İkinci Bianchi Özdeşliği'nden yazılabilecek, $\nabla_j R^{ij} \equiv \frac{1}{2}\nabla^i R$ bağıntısı ve Ricci Teoremi, $\nabla_k g^{ij} \equiv 0$ ifadeleri göz önünde bulundurulursa (2.1) denkleminden:

$$\nabla_j G^{ij} \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla_j T^{ij} = 0 \tag{2.3}$$

elde edilmektedir. T^{ij} teriminin diverjansının sıfır olduğunu veren bu sonuç madde-enerji-momentum korunumunu ifade etmektedir. EAD'yi

$$S_{EH} = \frac{1}{2\kappa^2} \int_V d^4x \sqrt{-g}(R - 2\Lambda) + S_m \tag{2.4}$$

olmak üzere bir S aksiyonundan hareketle metriğe göre varyasyon alarak elde etmek de mümkündür. İntegrantı R'ye göre lineer olan (2.4)'e Einstein-Hilbert (EH) aksiyonu denir. Burada g, imzası $+2$ olan metriğin determinantını, $d^4x\sqrt{-g}$ ise 4-boyutlu hacim elemanını göstermektedir. S_m, madde-enerjiyi tasvir eden L_m Lagrange yoğunluğundan hareketle

$$S_m = \int_V d^4x\sqrt{-g}L_m \tag{2.5}$$

olarak tanımlanmış madde-enerji aksiyonudur. L_m verildiğinde T_{ij} enerji-momentum tansörü

$$T_{ij} = -\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta(\sqrt{-g}L_m)}{\delta g^{ij}} \tag{2.6}$$

ifadesiyle bulunur. Tez'imizin temelini, (2.4)'deki EH aksiyonunun keyfi bir $f(T,\mathcal{T})$ fonksiyonuyla

$$S = \int dx^4 e\{\frac{1}{2\kappa^2}f(T,\mathcal{T}) + L_m\} \tag{2.7}$$

şeklinde değişikliğe uğratılması ile elde edilen $f(T,\mathcal{T})$ gravitasyon teorisi oluşturacaktır.

Burada:

T : Torsiyon skaleri

$\mathcal{T}$: Enerji-momentum tansörünün izi

olup, $f(T,\mathcal{T})$ de bu argümanların keyfi bir fonksiyonudur.

2.1.1. Enerji-Momentum Tansörü

Gravitasyona kaynaklık eden madde-enerji içeriği; akışkan ya da akışkanların karışımı, kinetik teoriyle tasvir edilen bireysel tanecikler topluluğu, bir $V(\phi)$ skaler potansiyelinden türeyen bir ϕ skaler alanı, Maxwell denklemleriyle tasvir edilen elektromagnetik alanlar gibi pek çok unsurlardan biri ya da hepsi olabilmektedir. Bunların toplam etkisi, alan denklemlerinde eşitliğin sağında bulunan T_{ij} enerji-momentum tansörüyle tasvir edilmektedir. Bir akışkan tasviri için T_{ij}'nin ayrıcalıklı zaman cinsinden bir 4-lü hız vektörüne göre ayrışımı

$$T_{ij} = (\mu + p)u_iu_j + pg_{ij} + q_iu_j + q_ju_i + \pi_{ij} \tag{2.8}$$

$$q_iu^j = 0 \quad , \quad \pi_{ij} = \pi_{(ij)} \quad , \quad \pi_{ij}u^j = 0, \quad \pi_i^i = 0$$

şeklinde olup, burada;

μ : u^i'ye göre toplam rölativist enerji yoğunluğu

q_i : rölativist momentum yoğunluğu, ya da, u^i'ya göre enerji akısı (ısı akısını ve difüzyonu gösterir)

p : u^i'ye dik 3-uzayında eşyönlü basınç

π_{ij} : izsiz eşyönsüz basınç (stress) (viskozite olduğunda sıfırdan farklıdır)

olarak ele alınmaktadır.

(2.8) eşitliğindeki geometrik ayrışımın fiziğini, akışkanın termodinamik tasviri ile (ısı yayılım katsayısı, bulk viskozite kaysayısı vb.) μ' yü termodinamik değişkenlerle ilişkilendiren bağıntılar belirler. Bunlara genel olarak hâl denklemi veya denklemleri denmektedir. Rölativist kozmolojinin uygulamalarında, (2.8)'in

$$q_j = 0,\ \pi_{ij} = 0 \implies T_{ij} = (\mu + p)u_i u_j + p g_{ij} \tag{2.9}$$

olarak kısıtlanmış hali sıklıkla kullanılmaktadır. Buna 'Mükemmel Akışkan' denilmekte ve hâl denklemi de, sabit entropi ve sıcaklıktan bağımsız olma özelliklerinin bir sonucu olarak bulunan,

$$p = p(\mu) = (\gamma - 1)\mu \tag{2.10}$$

ifadesi olarak alınmaktadır. (2.10) ifadesi lineer barotropik hâl denklemi olarak adlandırılmaktadır. Burada γ bir sabit olup, tanım aralığını, sesin $v_s^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \mu}\right)_{sabit\ entropi}$ bağıntısı aracılığıyla tanımlanan v_s hızı belirlemektedir. Buna göre,

$$|v_s^2| \leq 1 \iff 0 \leq \gamma \leq 2 \tag{2.11}$$

olur. γ parametresinin özel değerlerine karşılık gelen durumlar şu şekildedir:

$0 \leq \gamma < 1 \implies p = (\gamma - 1)\mu < 0,\ \ 0 < v_s \leq 1$	Negatif basınç, fiziksel olmamakla birlikte Şişme (Enflasyon) Teorisinde önem taşımaktadır.
$\gamma = 0 \implies p = -\mu < 0,\ \ v_s = c$	Üstel şişmeli model, $\gamma = 0$ değeri effektif olarak Λ kozmolojik sabitine karşılık gelmektedir.

$0 < \gamma < \frac{2}{3} \Longrightarrow p = (\gamma - 1)\mu < 0,\ v_s > \frac{1}{\sqrt{3}}$	Kuvvet kanunlu şişmeli model
$\gamma = \frac{2}{3} \Longrightarrow p = -\frac{1}{3}\mu < 0,\ v_s = \frac{1}{\sqrt{3}}$	Kozmik cisimler
$1 \leq \gamma < 2 \Longrightarrow p = (\gamma - 1)\mu > 0,\ 0 \leq v_s < 1$	Kabul edilebilir fiziksel durumu tasvir etmektedir.
$\gamma = 1 \quad , \quad p = 0 \quad , \quad v_s = 0$	Basınçsız akışkan (Toz ya da Soğuk Karanlık Madde olarak da anılmaktadır.)
$\gamma = \frac{4}{3} \quad , \quad p = \frac{1}{3}\mu \quad , \quad v_s = \frac{1}{\sqrt{3}}$	Radyasyon akışkan (rölativist gaz)
$\gamma = 2 \quad , \quad p = \mu \quad , \quad v_s = 1$	Stiff (katı) akışkan (ses hızı ışık hızına eşit)

Diğer yandan, dinamik değişkenlerin, hâl denklemine uymalarının yanı sıra bir de T_{ij} enerji-momentum tansörünün, akışkanın fizikselliğini tanımlayan, enerji koşulları olarak adlandırılan bir takım kısıtlamalara uymaları beklenmektedir [13]:

- Zayıf Enerji koşulu (WEC, Weak Energy Condition):
  $T_{ij}u^i u^j \geq 0 \quad , \quad \mu \geq 0$
  Mükemmel akışkan için bu koşul, eğer $\mu + p \geq 0$ olursa sağlanır.
- Baskın Enerji Koşulu (DEC, Dominant Energy Condition):
  $\left|T^{ij}u_i\right| \leq 0 \ \Rightarrow \ T^{00} \geq \left|T^{ij}\right| \quad , \quad \mu \geq |p| \quad , \quad \mu \geq 0$
- Güçlü Enerji Koşulu (SEC, Strong Energy Condition):
  $R_{ij}u^i u^j \geq 0 \Rightarrow T_{ij}u^i u^j \geq -\frac{1}{2}T^i{}_i \quad , \quad \mu + p \geq 0 \ , \ \mu + 3p \geq 0$
- Sıfır Enerji Koşulları (NEC, Null Energy Condition):
  $\mu + p \geq 0.$

2.2. RÖLATİVİST KOZMOLOJİ

2.2.1. FLRW Evren Modelleri

GRT'nin önerilmesinin ardından Einstein 1916'da ilk evren modelini tasarlamıştır. Einstein evren modeli olarak anılan bu model, evreni kapalı ve statik bir yapı olarak tasvir etmekte ve Λ kozmolojik sabiti ile maddeyi içermektedir. Yaklaşık bir yıl sonra, 1917'de ise, de Sitter, EAD'nin yeni bir evren modelinin çözümünü, Λ içeren fakat madde içermeyeni sunmuştur. De Sitter evreni olarak anılan bu modelde, evren dinamik özellik göstermekte yani boş olmasına rağmen genişlemektedir. Bu iki çözümü 1922'de Friedmann'ın Λ içermeyen fakat madde içeren EAD için bulmuş olduğu yeni çözümler izlemiştir. Friedmann çözümleri, evrenin, herhangi bir noktasına göre homojen ve eşyönlü olduğu varsayımına dayanmakta olup; kapalı, açık, düz, genişleyen, büzülen evrenler gibi bir takım çeşitlikler göstermektedirler. 1926'da Hubble tarafından galaksimiz dışındaki galaksilerin keşfi ile bir yandan bu galaksilerin uzaklaşma hızlarının ortaya konulması, diğer yandan da Lemaitre tarafından Λ kozmolojik sabitinin öneminin vurgulanması ve evrenin başlangıcına dair "büyük patlama" düşüncesinin ortaya çıkışı kozmolojiye ilgiyi arttırmış ve bu alanda çalışmalara hız kazandırmıştır. 1932'de Robertson ve 1933'de de Robertson ve Walker, homojenlik ve eşyönlülük varsayımlarını sürekli gruplar teorisi diliyle kesin bir matematiksel çerçeveye oturtmuşlardır. Bu çerçeveye göre: uzay-zamanın uzaysal kısmının her bir noktaya göre homojen ve eşyönlü olması demek, uzaysal kısmın 6 parametreli G_6 eşölçüm grubu altında invaryant kalması demektir. Bu koşul, uzay-zaman metriğinin, bir k-parametresine $(k = -1,0,1)$ bağlı olarak bir $\{t, r, \theta, \varphi\}$ eşharaketli koordinat sistemi gösteriminde

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)[dr^2 + f_k^2(r)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)] \qquad (2.12)$$

şeklinde ifade edilmesine yol açmaktadır. Burada t koordinatı $u = \frac{\partial}{\partial t}$ teğet vektörlü evren çizgileri boyunca ölçülen öz-zaman ve $f_k(r)$ de:

$f_k(r) = sinr,$ $k = +1$ için pozitif eğrilikli uzay, kapalı (sonlu) evren, küresel,

$f_k(r) = r,$ $k = 0$ için sıfır eğrilikli uzay, düz (sonsuz) evren, öklidyen,

$f_k(r) = shr,$ $k = -1$ için negatif eğrilikli uzay, açık (sonsuz) evren, hiperbolik,

şeklinde tanımlı bir skaler fonksiyondur.

$$d\Omega^2 = dr^2 + f_k^2(r)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \tag{2.13}$$

metriği $t = sabit$ hiperyüzeylerinin metriği olup, uzaysal eğriliği,

$$^3R = \frac{6k}{a^2(t)} \tag{2.14}$$

olan 3-geometriyi tasvir eder. k parametresinin -1, 0 ve +1 olmasına göre bu uzaysal 3-geometri sırasıyla: açık, düz ve kapalı olmaktadır. $a(t)$'ye uzunluk ölçeği fonksiyonu ya da ölçek çarpanı denir. (2.12) metriğine uzayca homojen ve eşyönlü uzay-zaman Robertson-Walker metriği denir ve EAD'nin bu metrik ile çözümleri genel olarak Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker evren modelleri olarak adlandırılır.

Evrenin madde-enerji içeriğinin bir mükemmel akışkan olarak tasvir edilebilmesi varsayımı altında, EAD bir eşhareketli ortonormal tetrad çatısında hesaplandığında, $a(t)$ ölçek çarpanı için ikinci mertebeden adi türevli iki bağımsız diferansiyel denklemi vermektedir (nokta ile t kozmik zamanına göre türev gösterilmektedir):

$$\text{(00- bileşen):}\quad \frac{3}{c^2}\left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{kc^2}{a^2} - \frac{\Lambda c^2}{3}\right) = \kappa^2\mu \tag{2.15}$$

$$\text{(11- bileşen):}\quad \frac{1}{c^2}\left(-2\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{kc^2}{a^2} - \Lambda c^2\right) = \kappa^2 p \tag{2.16}$$

bunlara Friedmann Denklemleri denir. Ayrıca (2.15)'in zamana göre türevi ifadesinde (2.15) ile (2.16)'nın bir kombinasyonu kullanılırsa

$$\dot{\mu} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\mu + p) = 0 \tag{2.17}$$

elde edilir, ki bu da maddenin korunduğu anlamına gelmektedir. Ayrıca, (2.17) denklemine, (2.3)'deki $\nabla_j T^{ij} = 0$ korunum denkleminden de varılabilirdi.

2.2.2. Kozmik İvmelenme

Evrenin genişleme (ya da büzülme) hızının bir ölçüsü olan Hubble parametresi;

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \tag{2.18}$$

olarak zamana bağlı bir şekilde tanımlanmaktadır. Bu parametreye göre $H(t) > 0$ durumu evrenin genişleme durumuna, $H(t) < 0$ durumu ise evrenin büzülme durumuna karşılık gelmektedir. İvmelenmenin ölçütü için de yavaşlama parametresi olarak adlandırılan ve ölçek faktörü ile Hubble parametresine bağlı olarak,

$$q(t) = -\frac{\ddot{a}(t)a(t)}{\dot{a}^2(t)} \equiv -\frac{1}{H^2(t)}\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} \tag{2.19}$$

şeklinde tanımlanan boyutsuz bir büyüklük kullanılmaktadır. Yavaşlama parametresinin, $q(t) > 0$ olması evrenin genişlemesinin yavaşlama durumuna, $q(t) < 0$ olması ise ivmelenme (hızlanma) durumuna karşılık gelmektedir. Bu durumların, şimdiki kozmik zamandaki (t_0) değerleri, $H_0 \equiv H(t_0)$ ve $q_0 \equiv q(t_0)$ ile gösterilir ve H_0'a özel olarak Hubble sabiti adı verilir. Gözlemsel verilere dayalı parlaklık uzaklığının veya görünen parlaklıkların kırmızıya kayma (z) cinsinden gösterildiği Hubble diyagramları aracılığıyla her iki parametreyi de elde etmek mümkündür. Bu nedenle, bu parametrelere gözlenebilir kozmolojik büyüklükler denir. Çeşitli gözlemsel veriler, 90'lı yılların sonlarına kadar yavaşlama parametresi için $q_0 > 0$ değerlerini vermiştir. Dolayısıyla, o tarihlere kadar evrenin evrimi hakkındaki yaygın görüş, Büyük Patlama ve hemen ardından (10^{-35} saniye sonra) gelen enflasyon evresinden sonra evrenin bir yavaşlama evresine girmiş olduğu ve bunun da günümüzde hala devam etmekte olduğu yönündeydi. Fakat yüksek kırmızıya kayma barındıran Tip-Ia süpernovalara ilişkin 1998'de elde edilen gözlemler, $q_0 < 0$ sonucunu vererek, evrenimizin günümüzde ivmeli (hızlanan) bir genişleme sürecinde olduğunu gösterecek ilk kanıtı oluşturmuştur [14-16]. O tarihten bu yana farklı gözlem grupları tarafından gittikçe artan duyarlılıkta gerçekleştirilen benzer gözlemler bu kanıtın doğru olduğunu, şüpheye yer bırakmayacak şekilde ortaya koymuşlardır [17-28]. Ayrıca bu süpernova gözlemleri dışında: Kozmik Mikrodalga Arka Plan Eşyönsüzlükleri [29-31], geniş ölçek yapıları [32-35], Baryon akustik osilasyonları (dalgalanmaları) [36], zayıf galaksi merceklenmesi [37], vb. pek çok farklı gözlem sonuçları da bu ivmeli genişleme durumunu desteklemektedirler.

2.2.3. Kozmolojik Evrim

Şimdi, (2.15) denklemini,

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = -\frac{1}{3}\kappa^2 c^2 \mu - \frac{kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda c^2}{3} \tag{2.20}$$

biçiminde ifade edelim. (2.15) ile (2.16) denklemlerinin kombinasyonu da

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{6}\kappa^2 c^2(\mu + 3p) + \frac{\Lambda c^2}{3} \tag{2.21}$$

eşitliğini verir. (2.21) denklemine özel olarak Raychaudhuri denklemi adı verilir. Evrenin evrimini görmek için önce $\Lambda = 0$ durumunu göz önüne alalım. Bu taktirde (2.20) ve (2.21) denklemleri

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = -\frac{1}{3}\kappa^2 c^2 \mu - \frac{kc^2}{a^2} \tag{2.22}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{6}\kappa^2 c^2 (\mu + 3p) \tag{2.23}$$

denklemlerine indirgenir. (2.22) denklemi, $\dot{a}$ terimini içerdiğinden genişlemenin (ya da büzülmenin) hızı hakkında, (2.23) denklemi ise $\ddot{a}$ terimini içerdiğinden dolayı, ivmesi hakkında bilgi verir. Büyük Patlama senaryosuna göre evren bir başlangıç hızıyla genişlemeye başlamıştır. Evrenin bundan sonraki evrimi ise, k-terimine bağlı olarak şöyle olur:

Eğer $k = 0$ ise, evren uzayca düz demektir ve (2.22) denklemi, evrenin (içinde madde bulunduğu durumda) madde ($\mu = \rho c^2$) sıfırlanana kadar genişlemesine devam edeceğini söyler. Dolayısıyla uzayca düz olan evren sonsuzda durana kadar genişleyecektir. Eğer $k = +1$ ise, genişleme, maddenin katkısıyla k-terim tarafından dengelendiği, sonlu bir madde yoğunluğunda durabilir. Dolayısıyla sonlu bir zamanda genişleme duracak ve ardından da çökme başlayacaktır. Eğer $k = -1$ ise (2.22) denkleminden kolayca görüleceği üzere madde tamamen kalmamış olsa bile k-terimi genişlemeyi sürdürtecek şekilde devreye girerek genişlemenin durmasını engelleyecek ve böylece de evren sonsuza dek genişleyecektir.

Şimdi, genişlemenin ivmesi hakkında bilgi veren (2.23) denklemini ele alalım. Dikkat edileceği üzere bu denklemde k parametresi yer almamaktadır. Başka bir deyişle ivme, uzaysal eğriliğin özelliklerine bağlı olmamaktadır. (2.23) denkleminde eksi işareti, eğer $\mu + 3p > 0$ varsayılırsa, ivmenin daima negatif olduğunu söylemektedir. GRT çerçevesinde yalnızca kütlenin değil, fakat enerji boyutundaki basıncın da kütleye eşdeğerliliği göz önünde bulundurulduğunda, buradan, genişlemenin gravitasyon tarafından yavaşlatılacağı sonucuna varılır. Buna karşın, (2.20) denkleminde $\Lambda \neq 0$ alındığında, pozitif bir Λ teriminin, önündeki artı işaretinden dolayı gravitasyona karşı koyan bir itme (anti-gravitasyon) gibi davranacağı ve bu durumun da genişlemenin ivmeli olmasına yol açacağı kolayca görülmektedir.

Yukarıdaki sonuçlar $\rho = \mu/c^2$ madde yoğunluğunun ve de $\mu + 3p$ şeklindeki kombinasyonun pozitif olduğu varsayımına dayanmaktadır. Standart madde (toz, radyasyon vb.) için ρ ve p'nin pozitif alınması, fiziksel olarak kabul edilebilir sayılması bakımından beklenen bir durumdur. Bu tür beklentilerin ışığında, maddeyi tasvir eden T_{ij}'yi fiziksel addetmek için T_{ij}'nin bileşenleri ya da bunların bir takım kombinasyonları üzerine, sağlanması gereken bir takım kısıtlamaların ileri sürülmesi gerektiği düşünülmüştür. Bunlara Enerji Koşulları denilmektedir. GRT çerçevesinde bir mükemmel akışkan için $\mu = \rho c^2$ ve p cinsinden bu koşullar:

- SEC (Strong Energy Condition-Güçlü Enerji Koşulu): $\mu + p \geq 0$, $\mu + 3p \geq 0$ (2.24.a)
- WEC (Weak Energy Condition $-$ Zayıf Enerji Koşulları) : $\mu \geq 0$, $\mu + p \geq 0$ (2.24.b)
- NEC (Null Energy Condition $-$ Sıfır Enerji Koşulu) : $\mu + p \geq 0$ (2.24.c)
- DEC (Dominant Energy Condition-Baskın Enerji Koşulu): $\mu \geq |p|$ (2.24.d)

şeklindedir.

O halde, GRT'de; eğer Büyük Patlama senaryosu, yani, evrenin genişlediği durumu kabul edilir ve $\Lambda = 0$ varsayımının yanısıra madde-enerji içeriği de SEC'i sağlayacak şekilde standart madde olarak alınırsa, genişleme, yavaşlayan genişleme olma özelliği gösterir ve dolayısıyla da gravitasyon her zaman çekici olma özelliğini korur.

2.2.4. Karanlık Enerji ve Kozmolojik Sabit İlişkisi

İvmeli (hızlanan) genişleme, $\ddot{a}(t) > 0$ olması durumu ya da genişleme parametresi ifadesiyle $q < 0$ olması durumu demektir. Halbuki, (2.23) denklemine göre $\mu > 0$ ve $p > 0$ olduğu sürece $\ddot{a} > 0$ olması durumu mümkün değildir. Bu durumun mümkün olabilmesi için

$$\mu + 3p < 0 \Rightarrow p < -\frac{1}{3}\mu \qquad (2.25)$$

olması gerekmektedir. Ya da $p = (\gamma - 1)\mu$ lineer barotropik hâl denklemi kabul alındığında,

$$\mu(1 + 3(\gamma - 1)) < 0 \quad \Rightarrow \quad (\gamma - 1) < -\frac{1}{3} \qquad (2.26)$$

koşulu sağlanmalıdır. μ enerji yoğunluğunun negatif olamayacağı kabul edilirse (2.25) ifadesinin sağlanması için mükemmel akışkanın basıncının negatif olması gerekmektedir. (2.25) bağıntısı SEC'in ihlal edilmesi gerektiği sonucuna götürmektedir. (2.26) bağıntısı ise $(\gamma - 1) < -1/3$ olması nedeniyle, bu negatif basıncın çok büyük olması gerektiğini söylemektedir. Baryonik maddenin bilinen hiçbir çeşidinin, (2.25) ve (2.26) bağıntılarını sağlayabileceğini düşünmek mümkün görünmemektedir. Literatürde, henüz tam olarak bilinemeyen bu aşırı negatif basınçlı sıradışı madde; egzotik madde ya da Karanlık Enerji olarak tanımlanmaktadır. Eğer bu karanlık enerji, hâl parametresi ($(\gamma - 1) = w$) w_{KE} ile gösterilmek üzere (w_{KE} genel olarak zamana bağlı) hâl denklemi $p_{KE} = w_{KE}\mu_{KE}$ olan bir efektif mükemmel akışkan ile modellendirilirse, bu takdirde gözlemler, w_{KE}'nin günümüz değerinin, [39]'da verildiği gibi $w_{KE} = -1.15^{+0.14}_{-0.18}$, (yani, $-1.45 \leq w_{KE} \leq -0.74$) ya da [40, 41]'de verildiği gibi $w_{KE} \approx -1 \pm 0.2$ olduğuna işaret etmektedir. $w_{KE} = -1$ değeri, bir efektif kozmolojik

sabite eşdeğer olmakta; $w_{KE} < -1$ durumu ise bir süper-ivmelenmeye karşılık gelmektedir. Tüm bu gözlemsel sonuçlar evrenin kütle-enerji içeriğinin yaklaşık: %5'inin Baryonik Madde, %27'sinin Karanlık Madde ve %68'inin de Karanlık Enerjiden oluşması gerektiğini söylemektedirler.

GRT çerçevesinde kalındığında, Karanlık Enerji olarak adlandırılan ve henüz ne olduğu anlaşılamamış negatif basınca en basit aday olarak Λ kozmolojik sabitinin varlığı ileri sürülmüştür [42, 43]. Nitekim, boşluğun enerjisi olarak yorumlanan Λ kozmolojik sabiti efektif olarak $w = -1$, yani $p_\Lambda = -\mu_\Lambda$ hâl denklemli bir mükemmel akışkan bileşenine denktir. Pozitif bir Λ kozmolojik sabitinin (2.20) ve (2.21) denklemlerinde, gravitenin ters yönünde, yani, bir anti-gravitasyon gibi davrandığından bahsedilmişti. ΛCDM veya "Konkordans Modeli" denilen bu açıklama gözlem sonuçlarını çok iyi üretmesine karşın, Parçacık Fiziği açısından henüz anlaşılamamış kavramsal bir tutarsızlık taşımaktadır; o da, Λ ile ilişkilendirilen KE yoğunluğunun günümüz gözlenen değerinin boşluğun kuantumsal enerji ölçeğindekinden (Planck ölçeği) yaklaşık 121 mertebe küçük oluşudur ve dolayısıyla da son derece yüksek seviyede ince ayar gerektirmektedir. Bu durum "Kozmolojik Sabit Problemi" olarak adlandırılmaktadır. Diğer yandan, ivmeli genişlemeyi Λ ile açıklamak bir de şöyle bir problem ortaya çıkarmaktadır; eğer "SEC"in ihlali tamamen Λ tarafından ileri geliyorsa, Λ'ya bağlanan enerji yoğunluğu evrende geri kalan içeriğin enerji yoğunluğu ile aynı büyüklük mertebesinde olmalıdır. Bu, evrenin evriminin özel bir zamanında olduğumuz, yani, madde-baskın evreden Λ-baskın evreye şimdiki zamanda geçmekte ya da çok yakın zamanlarda geçmiş olduğumuz anlamını taşımaktadır. Bu durumdan doğan, evrenin uzun evriminin sürecinde ivmeli genişleme durumunun neden "şimdi" gerçekleşmektedir sorunsalına ise "rastlantı (coincidence) problemi" denilmektedir.

KE'nin Λ ile açıklanması girişiminin, taşıdığı sorunlar nedeniyle EAD'nin sağ yanındaki madde-enerji kısmına, ya da başka bir deyişle, EH-aksiyonundaki L_m Lagrange madde-enerji yoğunluğuna çeşitli özelliklerde skaler alanlar [39] ya da Chaplygin gaz [44] gibi egzotik (bilinenin dışında) madde bileşenlerini dışarıdan eklemek aracılığıyla KE'ye uygun düşebilecek kozmolojik senaryolar üretme yoluna gidilmişse de bu yaklaşım: Güneş sistemimiz gözlemleriyle tutarlılık, mertebesel uygunluk, hayalet (phantom) alan (negatif kinetik enerjili skaler alan) vb. pek çok problemi de beraberinde meydana getirmiştir. Sonuç olarak; KE ve KM'ye kaynaklık eden madde-enerji bileşeninin ne olduğu konusu hala gizemini sürdürmektedir.

2.3. GRT'YE ALTERNATİF DEĞİŞİKLİĞE UĞRATILMIŞ GRAVİTASYON TEORİLERİ

Karanlık Enerji kavramını dahil etmeden hızlanan genişlemeyi açıklamak üzere EAD'nin sağ tarafındaki madde-enerji seçimi hakkında amaca uygun, fakat henüz hiçbir şekilde gözlemsel karşılığı olmayan varsayımlar yapmak yerine, sol taraftaki eğrilik kısmında değişikliğe gitmek ve GRT'ye alternatif teori&teoriler üretme yoluna başvurulmuştur (genel bilgi için bkz. [45-60]). Yukarıda da bahsedildiği gibi EAD, integrantı R Ricci Eğrilik skalerine göre lineer olan EH-aksiyonundan metriğe göre bir varyasyonla elde edilebilmektedir. Bu da en fazla ikinci mertebeden türevli G_{ij} Einstein tansörünü ortaya çıkarmaktadır. Eğer aksiyonun integrantında R değil de R'nin keyfi bir $f(R)$ fonksiyonu alınırsa [61, 62] bu takdirde yeni alan denklemleri, R indisi ile R'ye göre türev gösterilmek üzere,

$$f_R(R)R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}f(R) - \nabla_i\nabla_j f_R(R) + g_{ij}\Box f_R(R) = \kappa^2 T_{ij} \tag{2.27}$$

olmaktadır (Ek 5.42) ve bunlar da soldaki son iki teriminden dolayı genel olarak 4. mertebeden türevli denklemlerdir. Eğer integrant hem R hem de G Gauss-Bonnet eğrilik invaryantının $f(R,G)$ şeklinde keyfi bir fonksiyonu olarak alınırsa [63-65], bu takdirde (Ek 5.43)'deki alan denklemlerine varılmaktadır. Öte yandan, integrantın, $\mathcal{T} = İzT_{ij}$ olmak üzere, $f(R,\mathcal{T})$ alınması [66, 67] ise, (Ek 5.44)'de gösterilen alan denklemlerini vermektedir. Çalışmalarımızın temelini oluşturan $f(T,\mathcal{T})$ ise (Ek 5.46)'da gösterilen alan denklemlerine sahiptir. Benzer şekilde, integrantta farklı eğrilik invaryantlarını argüman kabul eden fonksiyonlar alarak dört ya da daha yüksek boyutlarda çeşitli gravitasyon teorileri tasarlanabilir ve bu şekilde elde edilen teorilere genel olarak değiştirilmiş ya da değişikliğe uğratılmış gravitasyon teorileri denir. Aslında Lagrange'yen yaklaşıma dayalı bu tür teorilerin ortaya çıkışı KE probleminin ortaya çıkmasından çok daha öncelere uzanmaktadır. EH aksiyonuna yüksek mertebeden eğrilik invaryantları dahil etme girişiminde ilk bulunanlar 1919'da Weyl [68] ve 1923'de Eddington [69] olmuştur. Ancak, bu girişimler gözlemsel bir olayın açıklanmasına yönelik olarak değil, yalnızca bir teorik tamamlayıcılık amacıyla yapılmıştır. Bir yandan aksiyonu karmaşıklaştırarak sonuçta 4. mertebeden türevli karmaşık denklemler elde etmek için görünürde bir gerekçe olmaması, diğer yandan da böyle yüksek mertebeden türevli hiçbir fizik teorisinin biliniyor olmaması söz konusu çalışmaları dikkat çekici hale getirmemiştir. Bununla birlikte, 1960'lardan itibaren, gravitasyonu kuantum teorisiyle birleştirme girişimleri, gravitasyon aksiyonunu karmaşıklaştırmanın bir değer taşıyabileceğine dair birtakım işaretler

ortaya çıkarmıştır. GRT'nin orijinal şekliyle yeniden normalize edilemeyeceği ve dolayısıyla da uygun bir biçimde kuantize edilemeyeceğine tam ikna olunmuşken, 1960'ların başlarındaki çalışmalar kuantum gravite girişimlerine yeni bir canlandırma getirmiştir. Bu çalışmalarda, tek-döngü yeniden normalizasyon için dörtten büyük boyutlarda EH-aksiyonunun yüksek mertebeden eğrilik terimleriyle tamamlanması gerektiği gösterilmiştir. GRT'ye yüksek enerji düzeltmesi (ya da mor-ötesi düzeltme) olarak ortaya çıkan bu tür teoriler önceleri, özellikle, evrenin erken evresine etkilerin araştırılması bakımından kullanılmışlardır. Ancak daha sonra 1970'de Buchdall [61], GRT'nin yüksek eğrilikte yetersiz kaldığı gerekçesine dayandırılan bu yüksek mertebeden invaryantlar kullanma yaklaşımını, 4-boyutta $f(R)$-gravite olarak, ilk defa, Rölativist Kozmoloji (Standart GRT'ye dayalı) alanında ele almıştır. 1980'de ise Strarobinsky ilk $f(R)$ enflasyon modelini teklif etmiştir [70]. Evrenin ivmeli genişlemesinin keşfi ise, KE olarak nitelendirilen varsayımsal madde-enerji kullanımlarına bir alternatif olarak, bu tür yaklaşımlara, fakat bu defa kızılötesi değişiklikler olmak üzere, olağanüstü bir rağbet kazandırmıştır. Değişikliğe uğratılmış söz konusu bu teoriler; Güneş sistemi testleriyle uygunluk [71-76], kozmolojik evrim, yani; önce erken-evre enflasyon, ardından yavaşlama ve sonrasında da geç-evre enflasyon sürecini üretme [77-87], pertürbasyon [88-91], tekillikler [92-95], kararlılık [96-101], kozmolojik dinamik [102-107], kozmolojik kısıtlamalar [108-116], enerji koşulları [117-127] ve daha pekçok farklı konularda [128-140] yoğun bir araştırma alanı olmayı sürdürmektedir.

2.3.1. Teleparalel Gravitasyon Teorisi

Teleparalel gravitasyon teorisi, madde alanları arasındaki gravitasyon bağlantısını belirlemek için herhangi bir eğrilik olmaksızın torsiyona (burulmaya) dayalı olarak ortaya atılmış olan Genel Rölativite Teorisi'ne alternatif teorilerden biridir. Teleparalel gravitasyon teorisi egzotik madde gibi negatif enerji yoğunluğuna sahip olan madde türlerini içerebilmektedir. Teori, tetrad formalizmine ve Weitzenböck bağlantısına dayanan, sıfır eğriliğe ve sıfırdan farklı torsiyona sahip alternatif bir gravitasyon teorisidir.

Bu teori teknik olarak torsiyon içermeyen simetrik ve burulmasız Levi-Civita bağlantısı $\Gamma_{\nu\mu}^{\beta}$ ve ∂_μ kısmi türev operatörü olmak üzere;

$$\Gamma_{cd}^{b} = \Gamma_{dc}^{b} \iff T_{dc}^{b} = 0 \tag{2.28}$$

yerine, $e_i{}^a$ tetrad alanı kullanılarak tanımlanan Weitzenböck bağlantısının;

$$\Gamma^{a}_{dc} = e_i{}^{a}\,\partial_c e^{i}{}_{d} \tag{2.29}$$

$$T^{i}{}_{dc} = \Gamma^{a}_{dc} - \Gamma^{a}_{cd} \;\;,\;\; T^{i}{}_{dc} \neq 0 \tag{2.30}$$

kullanılmasıyla uygulanmaktadır.

Weitzenböck bağlantısı, torsiyonun tamamen tetradın birinci türevlerinin çarpımlarından oluştuğu ilginç bir özelliğe sahiptir, torsiyon tansöründe ikinci türevler görülmemektedir. Yani Teleparalel gravitasyonda torsiyon tansörü yalnızca tetradın birinci türevlerinden oluşmaktadır. Teleparalel gravitasyon kuramında gravitasyonel etkileşimler eğrilik tansörünün sıfır olduğu durumda elektrodinamikteki Lorentz kuvvetine benzer bir role sahip olan torsiyon (burulma) tansörü ile ifade edilmektedir. Teleparalel yapı kavramı özellikle tetrad alanını her yerde paralel taşıyan belirli bir Lorentz bağlantısı tarafından karakterize edilmektedir. Sonuç olarak genel göreliliğin teleparalel eşdeğerinde jeodezikler yoktur, sadece elektrodinamikteki Lorentz kuvvet denklemine oldukça benzer kuvvet denklemleri vardır.

Ayrıca genel görelilik teorisindeki metrik tansörün yerine teleparalel gravitasyon teorisinde tetradlar yer almaktadır. Teleparalel gravitasyon teorisi için aksiyon ifadesi;

$$S = \int d^4x e \left(\frac{T}{2\kappa} + L_m\right) \tag{2.31}$$

şeklindedir. Burada T, torsiyon (burulma) skaleridir [141-146].

2.4. ANİZOTROPİK YILDIZLARIN YAPISAL ANALİZİNDE KULLANILAN BAZI KAVRAMLAR

2.4.1. Karmarkar Koşulu

Karmarkar koşulu, GRT çerçevesinde statik ve küresel simetrik (özellikle iç Schwarzschild çözümü gibi) bir metrik;

$$ds^2 = -e^{\nu(r)}dt^2 + e^{\lambda(r)}dr^2 + r^2 d\Omega^2 \tag{2.32}$$

seçilerek ve bu metriğe karşılık gelen EAD çözülerek bir uzay-zamanın içsel yapısını ve bu yapının denge koşullarını belirlemede kullanılan ve 4-boyutlu Lorentzian manifoldlarda belirli metriklerin bir sınıfını tanımlayan, geometrik bir özelliktir. Karmarkar koşulu, metrik fonksiyonları ve türevlerinin arasında geometrik bir ilişki sağlar, dolayısıyla metrik fonksiyonlarından biri seçilebilir ve diğeri de türetilebilir. Koşul, statik ve anizotropik madde

yapılandırmaları için radyal ve teğetsel basınçları ilişkilendiren denklemlerin geometrik bir mekanizmasını sağlar.

Karmarkar koşulu; n-boyutlu manifoldun $(n+m)$-boyutlu bir manifolda gömülmesini sağlayan gömme Class-I tekniğidir. Class-I gömme koşulu, g_{rr} ve g_{tt} gibi her iki metrik potansiyeli bağlayan küresel simetrik uzay-zaman arka planında bir diferansiyel denkleme yol açar. Riemann eğriliği formundaki Karmarkar koşulu, $R_{2323} \neq 0$ olmak üzere,

$$R_{1414}R_{2323} = R_{1224}R_{1334} + R_{1212}R_{3434} \tag{2.33}$$

şeklinde verilmektedir [147-154].

Karmarkar koşulunun uygulama alanları:

1. İç Schwarzschild Çözümü: İç Schwarzschild çözümü, küresel simetrik ve izotropik bir yıldızın içindeki madde dağılımını ve metrik yapılarını tanımlar. Karmarkar koşulu, bu çözümün belirli bir sınıf içinde olduğunu belirlemektedir.

2. Yıldız İç Yapıları: Karmarkar koşulu, yıldızların iç yapılarının modellenmesinde kullanılır. Yıldızın içindeki basınç ve yoğunluk profilleri, bu koşul ile uyumlu olarak hesaplanabilir.

3. Anizotropik Yıldız Modelleri: Anizotropik basınca sahip yıldız modellerinin incelenmesinde Karmarkar koşulu kullanılır. Bu, özellikle yoğun kompakt yıldızlar (örneğin nötron yıldızları) için önemlidir.

2.4.2. MIT (Massachusetts Institute of Technology) Bag Modeli

MIT Bag Modeli, kuantum renk dinamiği teorisinin henüz tam olarak anlaşılmadığı bir dönemde, kuarkların hadronlar içinde (örneğin proton ve nötron gibi) nasıl hapsedildiğini, nasıl davrandığını ve bu parçacıkların özelliklerini (kütlelerini ve iç yapılarını) açıklamak için 1970'lerin başında Massachusetts Institute of Technology (MIT) araştırmacıları tarafından geliştirilen bir teorik modeldir.

MIT Bag Modeli, kuarkların hadronların içinde bir "bag" (torba) içinde hapsedildiğini ve bu bagin içindeki enerjinin, kuarkların hareketlerinden ve bag yüzey geriliminden kaynaklandığını öne sürmektedir. Bu model, aşağıdaki temel bileşenlere dayanmaktadır:

Kuarklar: Hadronları oluşturan temel parçacıklardır. Kuarklar, hadronların içinde serbestçe hareket ederler ancak bagin dışına çıkamazlar.

Bag: Kuarkları hapseden bölgedir. Bag'in dışındaki bölge, kuarkların varolamayacağı bir vakumdur.

Bag Basıncı: Bag'in içinde kuarkları hapseden bir basınç vardır. Bu basınç, bagin iç yüzeyinde gerilim yaratır ve kuarkları içeride tutar.

Modelin, kuarkların bag içindeki enerjilerini ve bag yüzeyindeki gerilimini temel alan denklemi şu şekildedir:

$$E_{\text{toplam}} = \sum_i E_i + BV \tag{2.34}$$

Burada:

- E_{toplam} : Hadronun toplam enerjisini,
- E_i : Her bir kuarkın enerjisini,
- B : Bag sabiti; kuarkları hapseden bagin yüzey gerilimini,
- V : Bag'in hacmi; bag içinde hapsedilen kuarkların hareket alanını

temsil etmektedir. Bag sabiti deneysel verilerden elde edilen bir parametredir.

Fiziksel olarak tutarlı anizotropik çözümler için, madde bileşenlerine ve uzay-zaman geometrisine bazı kısıtlamalar koymak ve belirli bir hâl denklem formu kullanmak gerekmektedir. Temel parçacık etkileşimlerine dayalı olarak, standart lineer hâl denklemi bag sabitini içerecek şekilde genişletilmektedir. MIT bag modeli olarak adlandırılan bu hâl denklemi, anizotropik basınç profillerini ve yıldız içindeki bir elektromanyetik alan ile kompakt nesneleri modellemek için yaygın olarak kullanılmakta ve iyi sonuçlar vermektedir.

MIT bag modeli için hâl denklemi [155,156],

$$p = \alpha\rho - B_g \tag{2.35}$$

şeklindedir. Burada ρ enerji yoğunluğu, α sabit ve B_g bag sabitidir.

Bu çözümler yüksek yoğunluk ($10^{15}\, g/cm^3$) mertebesinde olan kompakt nesnelerin gözlemlenen kütlelerini ve yarıçaplarını başarıyla tahmin edebilmektedir. Karanlık enerjiye yönelik artan çalışmalar neticesinde astrofizikçiler α aralığını $-1 < \alpha < -1/3$ olarak almaktadırlar ve bu aralık sözde karanlık yıldızları kapsamaktadır. α genellikle 1/3 olarak alınır ve bu değer, kuark-gluon plazmasının bir ideal gaz gibi davrandığını ve her bir kuarkın kinetik enerjisinin basınca katkısını temsil eder. Mevcut çalışmamızda, yıldız sistemi içerisindeki tuhaf (strange) kuark maddesi için hâl denklemini,

$$p_r = \frac{1}{3}\left(\rho - 4B_g\right) \tag{2.36}$$

şeklinde dikkate alacağız ve buradaki B_g değerini 74 $MeV/f\, m^3$ kabul edeceğiz [157-159].

2.4.3. Anizotropi

Kozmolojide anizotropi (eş yönlü olmayan), evrenin büyük ölçekli yapısının farklı yönlerde farklı özellikler sergilemesi anlamına gelmektedir. Kozmik mikrodalga arka plan radyasyonundaki küçük sıcaklık dalgalanmaları, evrenin erken dönemlerindeki anizotropik yapısını ortaya koymaktadır. Astrofizikte, anizotropi, kompakt yıldızların iç yapısının modellenmesinde ve denge durumlarının anlaşılmasında kritik öneme sahiptir. Temelde, yıldızın her yerinde madde dağılımı düzgün olmayabilir, bu da anizotropinin varlığına neden olabilir. Anizotropik basınca sahip yıldız modelleri, yıldızın içindeki basıncın yalnızca yarıçapa bağlı olmadığı, aynı zamanda farklı yönlerde farklı olabileceğini varsayar. Bu tür modeller, özellikle nötron yıldızları gibi kompakt yıldızların iç yapısını ve denge durumlarını anlamak için kullanılmaktadır.

Anizotropik basınca sahip yıldız modellerinde, hidrostatik denge denklemi şu şekildedir:

$$\frac{dp_r}{dr} = -\frac{G\left(\rho+\frac{p_r}{c^2}\right)\left(m+\frac{4\pi r^3 p_r}{c^2}\right)}{r^2\left(1-\frac{2Gm}{rc^2}\right)} + \frac{2}{r}(p_t - p_r) \tag{2.37}$$

Burada p_r radyal basınç, p_t teğetsel basınç, ρ madde yoğunluğu, m ise yarıçap (r) içerisindeki toplam kütle, G gravitasyon sabiti, c ışık hızıdır.

Anizotropi parametresi Δ, teğetsel (p_t) ve radyal (p_r) basınçlar arasındaki fark olarak tanımlanmaktadır:

$$\Delta = p_t - p_r \tag{2.38}$$

Anizotropi durumunda, radyal ve teğetsel basınçlar eşit değildir ($p_r \neq p_t$). Bu basınç türüne de anizotropik basınç denir. Skaler alanın uzaysal gradyani sıfır olmadığında, fiziksel sistem anizotropik basınç üretir. Pozitif anizotropinin ($\Delta > 0$) varlığı, yıldız yapısında içe doğru olan gravitasyon kuvvetine karşı itici bir kuvvet olup, sistemi kararlı tutan önemli bir özelliktir, radyal mesafe arttıkça hızla artar ancak yıldız modelinin merkezinde kaybolur. Yıldız merkezindeki basınç profilleri aynıdır, bu nedenle $\Delta|_{r=0} = p_t - p_r = 0$'dır, ancak $r = R$ sınırında en yüksek değerine ulaşır. Burada R nötron yıldızının yarıçapı, yani yıldızın merkezinden yüzeyine kadar olan tam yarıçap, r ise radyal yarıçap, yani yıldızın merkezinden herhangi bir noktaya olan mesafedir [160-164].

2.4.4. Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) Denklemi

TOV denklemleri, 1939 yılında Richard C. Tolman, J. Robert Oppenheimer ve George Volkoff tarafından türetilmiştir. TOV denklemleri, Einstein'ın GRT'sini kullanarak yıldızların iç yapısını, denge koşullarını ve evrimlerini anlamak için geliştirilmiştir ve GRT çerçevesinde hidrostatik denge altında bulunan küresel olarak simetrik, izotropik ve statik bir yıldızın iç yapısını tanımlayan denklemlerdir. Bu denklemler, özellikle nötron yıldızları ve beyaz cüceler gibi yoğun gravitasyon alanlarına sahip kompakt yıldızların iç basınç, yoğunluk ve kütle dağılımını hesaplamak için kullanılmakta ve yoğun gravitasyon alanları altındaki madde davranışını inceleyerek, yıldızların kararlı durumlarını ve çökme koşullarını belirlemektedir.

TOV denkleminin yaygın versiyonu;

$$\frac{dp_r}{dr} + \frac{M_g(r)(\rho + p_r)}{r} e^{\frac{\nu-\lambda}{2}} - \frac{2(p_t - p_r)}{r} = 0 \tag{2.39}$$

şeklindedir. Burada $M_g(r)$, r yarıçap içerisindeki gravitasyon kütlesini ifade etmektedir ve Tolman-Whitter formülü yardımıyla;

$$M_g(r) = 4\pi \int_0^r (T_t^t - T_r^r - T_\theta^\theta - T_\phi^\phi) r^2 e^{\frac{\nu+\lambda}{2}} dr \tag{2.40}$$

şeklinde elde edilmektedir. Bu denklem;

$$M_g(r) = \frac{2}{2} r e^{\frac{\lambda-\nu}{2}} \nu' \tag{2.41}$$

şeklinde yeniden düzenlenebilir.

(2.41) denkleminde yer alan $M_g(r)$ ifadesini (2.39) denkleminde uyguladığımızda;

$$\frac{dp_r}{dr}+\frac{\nu'(\rho+p_r)}{r}-\frac{2(p_t-p_r)}{r}=0 \tag{2.42}$$

eşitliğini elde ederiz.

(2.42) denklemi ekstra bir kuvvet eklenerek $f(T,\mathcal{T})$ gravitasyon formalizmi için aşağıdaki şekilde değiştirilebilir:

$$\frac{dp_r}{dr}+\frac{\nu'(\rho+p_r)}{2}-\frac{2(p_t-p_r)}{r}-\frac{-\frac{1}{4}\beta\frac{dp_r}{dr}-\beta\frac{dp_t}{dr}+\frac{1}{4}\beta\frac{d\rho}{dr}}{\frac{\beta}{2}+4\pi}=0 \tag{2.43}$$

Bu eşitlik kısaca

$$F_g+F_h+F_a+F_e=0 \tag{2.44}$$

biçiminde yazılabilir. Burada;

$$F_g=-\frac{\nu'(\rho+p_r)}{2},\ F_h=-\frac{dp_r}{dr},\ F_a=\frac{2(p_t-p_r)}{r}$$

$$F_e=\frac{-\frac{1}{4}\beta\frac{dp_r}{dr}-\beta\frac{dp_t}{dr}+\frac{1}{4}\beta\frac{d\rho}{dr}}{\frac{\beta}{2}+4\pi} \tag{2.45}$$

şeklindedir.

TOV denkleminde; F_g, F_h, F_a ve F_e dört kuvvet birbirini dengelediğinde, yıldız sisteminin dengede olduğu öne sürülmektedir [165,166].

2.4.5. Adyabatik İndeks

Adyabatik indeks (Γ), astrofizikte yıldızların evrimi ve davranışlarını anlamada kritik bir parametredir. Adyabatik indeks, gazların veya plazmaların adyabatik süreçlerdeki basınç ve yoğunluk değişimlerini tanımlar. Kompakt yıldız nesnelerinde bu indeks, yoğunluğa bağlı olarak önemli ölçüde değişir ve bu değişim, yıldızın iç yapısını ve denge koşullarını belirler. Beyaz cüceler ve nötron yıldızları gibi kompakt nesnelerde, adyabatik indeksin değeri düşük

ve yüksek yoğunluk bölgelerinde farklıdır ve bu farklılık, yıldızın basınç ve yoğunluk profillerini etkiler. Mevcut çalışmamızda kompakt yıldız nesne adayları üzerine çalışıldığı için bu başlık altında da sadece nötron yıldızları detaylandırılmaktadır:

Düşük Yoğunluk Bölgeleri: Nötron yıldızlarının dış bölgelerinde, madde daha az sıkışmış olabilir ve ideal nötron gazı olarak düşünülebilir. Bu durumda, adyabatik indeks $\Gamma \approx \frac{4}{3}$ civarında olur.

Orta Yoğunluk Bölgeleri: Orta yoğunluklarda ($\rho \sim \rho_{çekirdek}$) nükleer etkileşimler ve nötron dejenere basıncı önem kazanır. Bu bölgelerde adyabatik indeks $\Gamma \approx \frac{5}{3}$ civarına çıkar.

Yüksek Yoğunluk Bölgeleri: Nötron yıldızlarının çekirdek bölgelerinde, yoğunluk çok yüksektir ve kuark-gluon plazması gibi egzotik maddeler oluşabilir. Bu durumda adyabatik indeks $\Gamma \approx 2 - 3$ olabilir. Bu, madde daha fazla sıkıştıkça yıldızın iç basınç profilinin nasıl değiştiğini gösterir.

Adyabatik İndeksin Astrofiziksel Önemi:

Yıldız Kararlılığı: Adyabatik indeks, yıldızın kararlılığını belirlemede kritik bir rol oynar. Bir yıldızın içindeki basınç, yoğunluk ve sıcaklık profilleri, adyabatik indeksin değerine bağlıdır. Eğer adyabatik indeks belirli bir değerin altına düşerse, yıldız dinamik olarak kararsız hale gelebilir ve çökebilir.

Pulsasyonlar ve Titreşimler: Kompakt yıldızların adyabatik indeksleri, yıldızın doğal frekansları ve titreşim modlarını belirler. Özellikle nötron yıldızları gibi nesnelerde, adyabatik indeksin değişimi, yıldızın titreşimsel davranışlarını ve pulsarların gözlemlenen frekanslarını etkiler.

Termal Evrim: Adyabatik indeks, yıldızın termal evrimini ve soğuma sürecini de etkiler. Beyaz cüceler ve nötron yıldızları, enerji kaybederken adyabatik süreçler tarafından yönlendirilir ve bu süreçler, adyabatik indeks tarafından belirlenir.

Adyabatik indeksin incelenmesi, küresel simetrik uzay-zamanların manifolduna dayalı olarak rölativist ve non-rölativist kompakt nesnenin kararlılığını tahmin etmek için zorunlu olarak gereklidir. Bilinen yoğunlukta hâl denkleminin kararlılık faktörünü tanımladığından, yıldız

nesnelerinin incelenmesinde ele alınması gereken önemli bir faktördür. Heintzmann ve Hillebrandt, adyabatik indeksi, $\Gamma|_{(0\leq r\leq R)} > \frac{4}{3}$ eşitsizliği ile sabitleyerek bir kararlılık limiti belirlemişlerdir. Adyabatik indeksin matematiksel denklemi ise;

$$\Gamma = \frac{p_r+\rho}{p_r} v_r^2 \tag{2.46}$$

şeklindedir [167, 168].

2.4.6. Enerji Koşulları

Çalışmalarımız için, daha öncesinde (2.24.a)-(2.24.d) denklemlerinde de genel olarak bahsetmiş olduğumuz enerji koşulları Güçlü Enerji Koşulu (SEC, Strong Energy Condition), Zayıf Enerji Koşulu (WEC, Weak Energy Condition), Sıfır Enerji Koşulu (NEC, Null Energy Condition) ve Baskın Enerji Koşulu (DEC, Dominant Energy Condition) kendi kendine gravitasyona uğrayan anizotropik kompakt yıldız nesneleri söz konusu olduğunda;

$$\text{SEC}: \ \rho + p_\gamma \geq 0 \ , \ \rho + p_r + 2p_t \geq 0 \tag{2.47.a}$$

$$WEC: \ \rho \geq 0 \ , \ \rho + p_\gamma \geq 0 \tag{2.47.b}$$

$$\text{NEC}: \ \rho + p_\gamma \geq 0 \tag{2.47.c}$$

$$\text{DEC}: \ \rho > |p_\gamma| \tag{2.47.d}$$

formunu alırlar. Burada $\gamma = r, t$'dir. Yıldız sistemindeki maddenin gerçek özü bu enerji koşulları ile incelenmektedir. Enerji koşullarının pozitif davranışı, yıldızın tüm yayılımında anizotropik formdaki maddenin gerçek ve fiziksel olarak kabul edilebilir dağılımını sağlamaktadır. SEC, WEC, NEC ve DEC enerji koşulları, yıldız nesnelerinin kompakt oluşumu sırasında yukarıda (2.47.a)-(2.47.d) eşitlikleri ile verilen koşulları sağlamalıdır.

2.4.7. Kütle Fonksiyonu, Kompaktlık Parametresi ve Kırmızıya Kayma Fonksiyonu

Kütle Fonksiyonu

Nötron yıldızlarının kütle ve yarıçapı, yıldızın yapısını belirleyen temel parametrelerdir. Bu parametreler arasındaki ilişki, yıldızın iç yapısını ve denge koşullarını belirler. Nötron yıldızlarının kütle fonksiyonu, bu nesnelerin iç yapısını, yoğunluk ve basınç profillerini anlamada önemli bir rol oynamaktadır. TOV denklemleri ve hâl denklemi kullanılarak, nötron yıldızlarının kütle ve yarıçapı hesaplanabilir. Kütle fonksiyonu, gözlemsel verilerle doğrulanarak nötron yıldızlarının fiziksel modelleri geliştirilebilir. Kütle fonksiyonu,

$$m(r) = 4\pi \int r^2 \rho dr \tag{2.48}$$

eşitliğinden elde edilebilir.

Kütle fonksiyon eşitliği ve hidrostatik denge denkleminden de nötron yıldızının yoğunluk ve basınç profillerinin kütleye ve yarıçapa bağlı olarak nasıl değiştiği görülebilmektedir.

Kompaktlık Parametresi

Kompaktlık parametresi, bir yıldızın veya kompakt nesnenin ne kadar sıkışık olduğunu tanımlayan bir ölçüttür. Bu parametre, bir nesnenin kütlesi ve yarıçapı arasındaki ilişkiyi ifade etmektedir ve nesnenin yüzeyindeki gravitasyonel alanın gücünü belirler. Aynı zamanda bu parametre, gravitasyonel kırmızıya kaymanın derecesini doğru orantılı bir şekilde, ışığın bükülmesi ve kaçış hızı gibi fiziksel fenomenleri belirlemede önemli bir rol oynamaktadır ve gözlemsel verilerle doğrulanabilmektedir. Bu da, genel göreliliğin öngördüğü ışık sapması (gravitational lensing) fenomenini açıklamak için kullanılmaktadır. Kompakt nesnelerin yüzeyinden kaçış hızı ile kompaktlık parametresi arasında doğrudan bir ilişki bulunmaktadır. Yani, yüksek kompaktlık değerleri, yüksek kaçış hızlarına yol açmaktadır. Örneğin, kara deliklerde kaçış hızı ışık hızına eşittir.

Kompaktlık ifadesi $u(r)$;

$$u(r) = \frac{m(r)}{r} \tag{2.49}$$

ilişkisi ile hesaplanabilir.

Kompaktlık parametresi için maksimum sınırlayıcı değer, $u(r) = \frac{m(r)}{R} < \frac{4}{9}$ olarak belirlenmiştir [169, 170].

Kırmızıya Kayma Fonksiyonu

Kırmızıya kayma, üç ana türde incelenebilir: Doppler kırmızıya kayması, kozmolojik kırmızıya kayma ve gravitasyonel kırmızıya kayma. Burada mevcut çalışmalarımız için detaylandıracağımız Gravitasyonel Kırmızıya Kayma durumudur.

Gravitasyonel Kırmızıya Kayma:

Kırmızıya kayma parametresi (z_s), kompakt nötron yıldızlarının güçlü gravitasyonel alanları nedeniyle yayılan ışığın dalga boyunun uzamasını tanımlamaktadır. Bu parametre, yıldızın kütlesi, yarıçapı ve yoğunluğuna bağlıdır. GRT çerçevesinde, gravitasyonel kırmızıya kayma, kompakt nesnelerin yüzeylerinden kaçan ışığın, gözlemlenen dalga boyunun artması olarak ortaya çıkar. Daha büyük kütleler ve daha küçük yarıçaplar, daha yüksek kırmızıya kayma değerlerine yol açar. Nötron yıldızları gibi yoğun kompakt nesneler için kırmızıya kayma parametresi, bu nesnelerin gravitasyonel potansiyel kuyusunun (Gravitasyonel potansiyel kuyusu, bir kütlenin çevresinde oluşturduğu gravitasyon alanının, potansiyel enerji profilini tanımlar.) derinliğini ve iç yapılarını anlamada kritik bir rol oynar. Nötron yıldızları çok yüksek yoğunluklara sahiptir ve bu da kırmızıya kayma parametresinin yüksek olmasına neden olur. Yıldızın içindeki madde yoğunluğu arttıkça, yüzeydeki gravitasyonel potansiyel de artar.

GRT çerçevesinde, bir nötron yıldızının yüzeyinden yayılan ışığın gravitasyonel kırmızıya kayma parametresi şu şekilde hesaplanır:

$$1 + z_s = \left(1 - \frac{2GM}{Rc^2}\right)^{-1/2} \tag{2.50}$$

Burada G gravitasyon sabiti, M nötron yıldızının kütlesi, R nötron yıldızının yarıçapı, c ise ışık hızıdır.

Ayrıca kırmızıya kayma fonksiyonu z_s, (2.49) ifadesinden;

$$z_s = (1 - 2u)^{-\frac{1}{2}} - 1 \tag{2.51}$$

şeklinde yeniden üretilebilir.

Yıldızın iç yapısını tanımlayan adyabatik indeks de kırmızıya kayma parametresini etkileyebilir. Yüksek adyabatik indeks değerleri, daha kararlı ve yoğun yıldız yapıları oluşturabilir, bu da kırmızıya kaymayı etkiler. Buchdhal kırmızıya kayma parametresi için maksimum değer kriterini $z_s \leq 4.77$ olarak belirlemiştir [161].

2.4.8. Adler-Finch-Skea Uzay-Zamanı

Adler metriği, teorik fizikçi Ronald Adler tarafından sunulmuş bir uzay-zaman geometrisidir. Bu metrik, GRT'nin genişletilmiş bir versiyonu olarak düşünülebilir ve genellikle simetrik uzay-zamanların incelenmesinde kullanılır. Adler metriği uzay-zaman geometrisinin belirli bir formunu tanımlar ve GRT çerçevesinde yüklü ve dönen gök cisimlerini incelemek için kullanılır.

Adler metriği şu şekildedir:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{q^2}{r^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \tag{2.52}$$

Burada, q elektrik yükü, $d\Omega^2$ ise küresel açısal koordinatlar için metrik bileşenidir ($d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$).

Adler'in orijinal çalışmasındaki metrik bazı modifikasyonlar içerebilir ve özel formu çalışmanın bağlamına bağlı olarak değişebilir.

Finch-Skea geometrisi de, kompakt yıldızların iç yapısını modellemek için kullanılan belirli bir statik, küresel simetrik çözümdür. Bu çözüm, GRT bağlamında yoğun, kompakt nesnelerin iç yapısını incelemek için 1989'da geliştirilmiştir.

Finch-Skea metrik çözümü aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$ds^2 = -e^{\nu(r)} dt^2 + e^{\lambda(r)} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \tag{2.53}$$

Burada, r radyal (yarıçap) koordinat, $\nu(r)$ ve $\lambda(r)$ ise radyal koordinata bağlı metrik fonksiyonlardır.

Bu metrik fonksiyonlar, Finch-Skea çözümünde belirli bir forma sahiptir:

$$e^{\nu(r)} = A^2(1 + ar^2),$$

$$e^{\lambda(r)} = \frac{1+3ar^2}{1+ar^2}.$$

Burada A ve a yıldızın fiziksel özelliklerine bağlı sabitlerdir. Bu metrik fonksiyonlar yıldızın içindeki madde dağılımını ve basınç profilini tanımlayan EAD'ye uygun bir çözüm sağlar.

Finch-Skea çözümü; yıldızın merkezinde maksimum yoğunluk ve basınç değeri veren ve yüzeye doğru azalan bir profil sunar. Bu çözüm, yıldızın merkezinden yüzeyine kadar düzgün ve sürekli bir metrik sağlar ve fiziksel olarak anlamlı yoğunluk ve basınç profilleri sunar, böylelikle de çözümün fiziksel geçerliliğini arttırır. Finch-Skea çözümünde $r = 0$ noktasında (yıldızın merkezi) metrik fonksiyonların düzgün davranması, merkez tekilliğinin olmadığını gösterir [171-174].

Özetle, Adler-Finch-Skea uzay-zamanı, GRT çerçevesinde kompakt yıldızların ve kara deliklerin iç yapısını modellemek için kullanılan önemli bir çözümdür. Bu çözüm, yıldızların enerji yoğunluğu ve basınç profilini tanımlayarak fiziksel olarak anlamlı ve kabul edilebilir bir model sunar.

2.4.9. Abreu Kriterleri

Abreu kriterleri, nötron yıldızları gibi kompakt statik ve küresel simetrik yıldız modellerinin kararlılığını belirlemek ve fiziksel geçerliliğini değerlendirmek için kullanılan termodinamik kriterlerdir. Pozitif sıcaklık, entropi, basınç, iç enerji ve yoğunluk gibi koşulları içerir [175].

Abreu kriterleri, yıldız modellerinin kabul edilebilir ve fiziksel olarak anlamlı olmasını sağlamak için temel olarak şu şartları içerir:

1. Abreu enerji koşulları: Yıldızın içindeki enerji yoğunluğu ve basıncın pozitif ve fiziksel olarak anlamlı olması gerekir. Yani tüm bölgelerde $\rho > 0$ ve p> 0 olmalıdır. Ayrıca entropi (S) $S > 0$, sıcaklık (T) $T > 0$ ve iç enerji (U) $U > 0$ olmalıdır.

2. Kararlılık koşulu: Yıldızın içindeki maddelerin kararlı olması için adi türevli eşitliklerin (TOV denklemleri) sağlanması gerekir. Bu, hidrostatik denge koşulu olarak da bilinir.

3. Nedensellik koşulu: Yıldız içindeki ses hızının, ışık hızını geçmemesi gerekir.

4. Enerji koşulları: Zayıf enerji koşulu (WEC), güçlü enerji koşulu (SEC), sıfır enerji koşulu (NEC) ve baskın enerji koşulu (DEC) olarak adlandırılan enerji koşulları sağlanmalıdır.

3) MALZEME VE YÖNTEM

3.1. EINSTEIN-HILBERT AKSİYONU

Langrange yoğunluğunun, uzay-zaman içerisindeki yol integralinden oluşan Einstein-Hilbert aksiyonu;

$$S_{EH} = \int L d^4x \tag{3.1}$$

şeklindedir. Burada L, sıfırıncı mertebeden bir tansördür. Einstein-Hilbert, gerekli koşulları sağlayan en basit skalerin Riemann tansörünün iki kez büzülmesiyle oluşturulmuş olan Ricci skaleri R olduğunu ve aksiyon denklemini g metrik tansörünün determinantı olmak üzere,

$$S_{EH} = \int \sqrt{-g} R d^4x \tag{3.2}$$

olarak belirlemiştir. En küçük etki prensibi ile Einstein alan denklemlerine ulaşmak için bu integralin metriğe göre

$$\delta S_{EH} = \delta \int \sqrt{-g} R d^4x = 0 \tag{3.3}$$

varyasyonu alınarak EAD elde edilebilmektedir. Maddeyi de içeren alan denklemlerine de,

$$S_{EH} = \frac{1}{2\kappa^2} \int_V d^4x \sqrt{-g}(R - 2\Lambda) + S_m \tag{3.4}$$

eşitliği ile ulaşılabilmektedir. S_m, madde-enerjiyi tasvir eden L_m Lagrange yoğunluğundan hareketle,

$$S_m = \int_V d^4 x \sqrt{-g} L_m \tag{3.5}$$

olarak tanımlanmış madde-enerji aksiyonudur. Dolayısıyla L_m Lagrange yoğunluğundan hareketle aksiyon ifadesi için ise,

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g}(R + L_m) \tag{3.6}$$

eşitliği kullanılabilmektedir. L_m Lagrange yoğunluğu verildiğinde ise T_{ij} enerji-momentum tansörü:

$$T_{ij} = -\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta(\sqrt{-g}L_m)}{\delta g^{ij}} \tag{3.7}$$

eşitliği ile bulunmaktadır.

3.2. 4-BOYUTLU UZAY-ZAMAN GEOMETRİSİNİN TEMEL BİLEŞENLERİ

4-boyutlu metrik uzay-zaman manifoldunda $x^0 = ct$ ile zaman koordinatı ve x^1, x^2, x^3 ile de uzay koordinatları gösterilmek üzere, bir $\{x^i\}$ lokal koordinat sistemi göz önüne alındığında, bu koordinat sisteminde iki tür taban seçmek mümkündür. İlki, koordinat eğrilerine teğet vektörler olan $\partial_i (\equiv \partial/\partial x^i)$'lerden oluşan $\{\partial_i\}$ kümesi, diğeri ise koordinat yüzeylerine dik olan $dx^i(\partial_j) = \delta^i{}_j$ bağıntısı ile tanımlanan $\{dx^i\}$ kümesidir. $\{\partial_i\}$, koordinatsal teğet vektör tabanı, $\{dx^i\}$ ise koordinatsal diferansiyel 1-form tabanı olarak adlandırılmaktadır.

Metrik olarak adlandırılan ve uzayda birbirine sonsuz yakın uzaklıkta olan iki nokta arasındaki uzaklığı veren ifade:

$$ds^2 = g_{jk}dx^j dx^k \tag{3.8}$$

şeklindedir. ds^2 ayrıca yay elemanı ya da uzay-zaman aralığı olarak da adlandırılmaktadır. g_{jk} metrik tansördür, $g^{ik}g_{kj} = \delta^i{}_j$ bağıntısıyla tanımlanır ve simetriktir ($g_{ij} = g_{ji}$). Ayrıca özel olarak $\nabla_k g_{ij} = 0$ eşitliğine ise Ricci Teoremi denmektedir. Uzay-zamanın burulması, ϕ keyfi bir skaler fonksiyon olmak üzere,

$$\nabla_i\nabla_j\phi - \nabla_j\nabla_i\phi = -T^k{}_{ij}\nabla_k\phi \tag{3.9}$$

bağıntısı ile tanımlanmaktadır. Eğer $T^k{}_{ij}$ burulma tansörü sıfır alınırsa ($T^k{}_{ij} = 0$), ele alınan uzay-zamana burulmasız denir ve bu taktirde:

$$\nabla_i\nabla_j\phi = \nabla_j\nabla_i\phi \tag{3.10}$$

ve de $\Gamma^k{}_{ij} = \Gamma^k{}_{ji}$ (alt iki indise göre simetrik) olur. Metrik tansörden (g_{jk}), genel bir tabanda Ricci Dönme Katsayıları, koordinatsal tabanda ise Christoffel sembolleri olarak adlandırılan (Γ^j_{kl})'ler:

$$\Gamma^j_{kl} = \Gamma^j_{lk} = \frac{1}{2}g^{jm}\left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m}\right) \tag{3.11}$$

eşitliği ile elde edilmektedir. Teğet taban vektörlerinin birbiri doğrultusundaki türevleri $\nabla_{\partial_i}\partial_j = \Gamma^k{}_{ij}\partial_k$ bağıntısı ile tanımlanmaktadır. Minkowski metriğinden sapmayı belirleyen bir nicelik ve eğriliğin bir ölçütü olan Riemann tansörü (R_{jklm}):

$$R_{jklm} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{jm}}{\partial x^k \partial x^l} + \frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x^j \partial x^m} - \frac{\partial^2 g_{jl}}{\partial x^k \partial x^m} - \frac{\partial^2 g_{km}}{\partial x^j \partial x^l}\right) + g_{np}\left(\Gamma^n_{kl}\Gamma^p_{jm} - \Gamma^n_{km}\Gamma^p_{jl}\right) \tag{3.12}$$

şeklinde tanımlıdır. Riemann tansörüne uygulanan büzülme işlemi sonucunda elde edilen Ricci tansörü (R_{jk}):

$$R_{jk} = R_{kj} = g^{lim}R_{ljmk} = \frac{\partial\Gamma^l_{jk}}{\partial x^l} - \frac{\partial\Gamma^l_{jl}}{\partial x^k} + \Gamma^l_{jk}\Gamma^m_{lm} - \Gamma^m_{jl}\Gamma^l_{km} \tag{3.13}$$

ve bu tansöre uygulanan büzülme işlemi sonucunda elde edilen Ricci skaleri de (R):

$$R = g^{jk}R_{jk} \tag{3.14}$$

şeklindedir [176].

3.3. BİR U VEKTÖR ALANINA GÖRE KOVARYANT TÜREV

Lie türevi ve dış türev gibi olmayıp da varyeteyi bir yapıyla donatan ve varyetede tanımlı her bir U vektörüne bağlanan ∇_U türev işlemi (U vektörüne göre kovaryant türev) şu özellikler ile tanımlanmaktadır:

1) ∇_U, bir tansör alanına uygulandığında aynı tipten bir tansör versin ve U'ya göre lineer olsun:
$$\nabla_{(fU+gV)}(T) = f\nabla_U(T) + g\nabla_V(T) \tag{3.15}$$
2) Uygulandığı vektör alanına göre de lineer olsun:
$$\nabla_U(fV + gW) = f\nabla_U(V) + g\nabla_U(W) \tag{3.16}$$
3) Bir fonksiyona uygulandığında
$$\nabla_U(f) = Uf \tag{3.17}$$
olsun.
4) Tansörel çarpımlara uygulandığında türev operatörü özelliği göstersin:
$$\nabla_U(S\otimes T) = \nabla_U(S)\otimes T + S\otimes\nabla_U(T) \tag{3.18}$$

Dikkat edileceği üzere ∇_U Tansör Analizindeki ∇ (ya da ;) ile gösterilen kovaryant türev kavramından farklıdır çünkü ∇ uygulandığı tansörün kovaryansını 1 mertebe arttırmaktaydı. (3) ve (4) özelliklerinden, keyfi bir f fonksiyonu ve U, V vektörleri için

$$\nabla_U(fV) = f\nabla_U(V) + (Uf)V \tag{3.19}$$

yazmak mümkündür.

Şimdi, $\{E_\mu, \omega^\mu\}$ genel tabanda, taban vektörlerinin taban vektörlerine göre kovaryant türevleri göz önüne alınsın. Sonuç yine bir vektör olacağından, taban vektörlerinin lineer kombinezonu olarak

$$\nabla_{E_\mu}(E_\nu) = \Gamma^\sigma_{\nu\mu}E_\sigma \tag{3.20}$$

yazılır. (3.20) eşitliği ile tanımlanan Γ'lara bağlantı katsayıları denir. (3.15) ve (3.16) eşitlikleri kullanılarak şunları hesaplamak mümkündür:

$\{E_\mu, \omega^\mu\}$ tabanında $V = V^\alpha E_\alpha$, $U = U^\beta E_\beta$, $\omega = \omega_\alpha \omega^\alpha$ olsun,

$\nabla_U(V)$'nin hesabı:

$$\begin{aligned}\nabla_U(V) &= \nabla_U(V^\alpha E_\alpha)\\ &= V^\alpha \nabla_U(E_\alpha) + (UV^\alpha)E_\alpha = U^\beta V^\alpha \nabla_{E_\beta}(E_\alpha) + \left(U^\beta E_\beta V^\alpha\right)E_\alpha \\ &= U^\beta\left(E_\beta V^\tau + \Gamma^\tau_{\alpha\beta}V^\alpha\right)E_\tau\end{aligned} \tag{3.21}$$

Eğer $E_\beta V^\tau \equiv V^\tau_{,\beta}$ ve $V^\tau_{,\beta} + \Gamma^\tau_{\alpha\beta}V^\alpha \equiv V^\tau_{;\beta}$ yazılırsa

$$\nabla_U(V) = U^\beta V^\tau_{;\beta}E_\tau \tag{3.22}$$

biçiminde bir ifade bulunur. Bu ifade, $U \equiv E_\beta$ özel hali için

$$\nabla_{E_\beta}(V) = V^\tau_{;\beta}E_\tau \tag{3.23}$$

ifadesine indirgenir.

$\nabla_U(\omega)$'nin hesabı:

$$\nabla_U\big(\omega(V)\big) = \nabla_U(\omega)(V) + \omega\big(\nabla_U(V)\big) \tag{3.24}$$

$$\omega(V) \equiv < \omega, V > = \omega_\alpha V^\alpha \tag{3.25}$$

olduğundan

$$\nabla_U(\omega_\alpha V^\alpha) = (\nabla_U\omega)_\alpha V^\alpha + \omega_\tau(\nabla_\tau V)^\tau \tag{3.26}$$

$$U(\omega_\alpha V^\alpha) = (\nabla_U\omega)_\alpha V^\alpha + \omega_\tau\big(U^\beta E_\beta V^\tau + U^\beta V^\alpha \Gamma^\tau_{\alpha\beta}\big) \tag{3.27}$$

$$(U\omega_\alpha)V^\alpha + \omega_\alpha(UV^\alpha) = (\nabla_U\omega)_\alpha V^\alpha + \omega_\tau(UV^\tau) + W_\tau U^\beta V^\alpha \Gamma^\tau_{\alpha\beta} \tag{3.28}$$

ve buradan da

$$\big(\nabla_U(\omega)\big)_\alpha = U\omega_\alpha - U^\beta \omega_\tau \Gamma^\tau_{\alpha\beta} \tag{3.29}$$

ya da

$$\nabla_U(\omega) = U^\beta\big(E_\beta\omega_\alpha - \omega_\tau\Gamma^\tau_{\alpha\beta}\big)\omega^\alpha = U^\beta\omega_{\alpha;\beta}\omega^\alpha \tag{3.30}$$

bulunur. Özel olarak $\omega \equiv \omega^\mu$ ve $U \equiv E_\beta$ alınırsa

$$\nabla_{E_\beta}(\omega^\mu) = -\Gamma^\tau_{\alpha\beta}\omega^\alpha \tag{3.31}$$

olduğu görülür.

$\{\partial_\mu, dx^\mu\}$ koordinatsal tabanda (3.22) ve (3.30) ifadeleri alışılmış kısmi türev ve kovaryant türev ifadelerine indirgenir.

Yukarıdaki hesaplamalar kolaylıkla daha yüksek mertebeden tansörlere de genelleştirilebilir. Mesela 2. mertebeden kovaryant g tansörü için

$$\nabla_{E_\tau}\big(g_{\mu\nu}\omega^\mu \otimes \omega^\nu\big) = \big(E_\lambda g_{\mu\nu} - \Gamma^\tau_{\nu\lambda}g_{\mu\tau} - \Gamma^\tau_{\mu\lambda}g_{\tau\nu}\big)\omega^\mu \otimes \omega^\nu \tag{3.32}$$

bulunur. Eğer ek bir varsayım olarak

5) $\nabla_U(g) = 0$

koşulu istenirse (3.32) eşitliğinden

$$E_\lambda g_{\mu\nu}\omega^\lambda = \left(\Gamma^\tau_{\nu\lambda} g_{\mu\nu} - \Gamma^\tau_{\mu\lambda} g_{\tau\nu}\right)\omega^\lambda \tag{3.33}$$

elde edilir. Sol taraf $\{E_\mu, \omega^\mu\}$ tabanında $dg_{\mu\nu}$ (dış türev) nin ifadesidir. Eğer

$$\omega^\tau_\nu \equiv \Gamma^\tau_{\nu\lambda}\omega^\lambda \tag{3.34}$$

denilirse, (3.33) eşitliği

$$dg_{\mu\nu} = g_{\mu\tau}\omega^\tau_\nu + g_{\nu\tau}\omega^\tau_\mu \tag{3.35}$$

ya da

$$\omega_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\tau}\omega^\tau{}_\nu \tag{3.36}$$

yazarak

$$dg_{\mu\nu} = \omega_{\mu\nu} + \omega_{\nu\mu} \tag{3.37}$$

elde edilir. $\omega^\tau{}_\nu$'lara (ya da $\omega_{\mu\nu}$) bağlantı 1-formları denir. Bunların ω^μ tabanındaki bileşenlerine bağlantı katsayıları denildiği gibi Ricci Dönme Katsayıları da denir. Bu iki tip katsayı şöyle de ifade edilebilir: (3.34) ve (3.36) ifadelerinden yazılabilecek

$$\omega_{\nu\mu} = g_{\mu\tau}\Gamma^\tau_{\nu\lambda}\omega^\lambda \tag{3.38}$$

bağıntısında

$$\Gamma_{\mu\nu\lambda} = g_{\mu\tau}\Gamma^\tau_{\nu\lambda} \tag{3.39}$$

tanımlanırsa

$$\omega_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu\lambda}\omega^\lambda \tag{3.40}$$

ifadesi elde edilir [177].

3.4. EĞRİLİK VE TORSİYON, CARTAN DENKLEMLERİ

U ve V teğet vektörler olmak üzere

$$T(U,V) = \nabla_U(V) - \nabla_V(U) - [U,V] \tag{3.41}$$

$$R(U,V) = \nabla_U \nabla_V - \nabla_V \nabla_U - \nabla_{[U,V]} \tag{3.42}$$

şeklinde tanımlanan T ve R operatörlerine sırasıyla Torsiyon ve Eğrilik Operatörleri denir. Torsiyon içermeyen uzay ile işlem yapılması istenirse

$$\nabla_U(V) - \nabla_V(U) = [U,V] \tag{3.43}$$

koşulu gerçekleşir. E_μ taban vektörleri için bu ifade

$$\nabla_{E_\alpha}(E_\beta) - \nabla_{E_\beta}(E_\alpha) = [E_\alpha, E_\beta] \tag{3.44}$$

şeklini alır ve

$$\Gamma^\mu_{\beta\alpha} - \Gamma^\mu_{\alpha\beta} = \mathrm{D}^\mu_{\alpha\beta} \tag{3.45}$$

bağıntısı elde edilir. Bu taktirde,

$$\begin{aligned} d\omega^\mu &= E^\mu_{\alpha\beta}\omega^\alpha \Lambda \omega^\beta \\ &= -\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^\mu_{\alpha\beta}\omega^\alpha \Lambda \omega^\beta \\ &= -\tfrac{1}{2}\left[\Gamma^\mu_{\beta\alpha} - \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\right]\omega^\alpha \Lambda \omega^\beta \\ &= -\tfrac{1}{2}\left(\omega^\mu{}_\beta \Lambda \omega^\beta - \omega^\alpha \Lambda \omega^\mu{}_\alpha\right) \\ &= -\tfrac{1}{2}\left(\omega^\mu{}_\beta \Lambda \omega^\beta + \omega^\mu{}_\alpha \Lambda \omega^\alpha\right) \end{aligned} \tag{3.46}$$

yani

$$d\omega^\mu = -\omega^\mu{}_\beta \Lambda \omega^\beta = \Gamma^\mu_{\beta\alpha}\omega^\beta \Lambda \omega^\alpha \tag{3.47}$$

bulunur. (3.47) eşitliğine torsiyonsuz uzaylar için Birinci Cartan Denklemi (Yapı Denklemi) denir.

$\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ bağlantı katsayılarının $\{E_\mu, \omega^\mu\}$ genel tabanında,

$$\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\mu\sigma}\left(E_\alpha g_{\sigma\beta} + E_\beta g_{\sigma\alpha} - E_\sigma g_{\alpha\beta}\right) + \frac{1}{2}\left(-D^{\mu}_{\alpha\beta} + g_{\alpha\sigma} g^{\mu\tau} D^{\sigma}_{\tau\beta} + g_{\alpha\beta} g^{\mu\tau} D^{\sigma}_{\tau\alpha}\right)$$

(3.48)

ile hesaplanabileceği gösterilebilir. Eğer $\{\partial_\mu, dx^\mu\}$ koordinat tabanı kullanılırsa $D^{\mu}_{\alpha\beta} = 0$ olduğundan bilinen Christoffel Sembolleri ifadesine düşülür. $R(U,V)$ operatöründen hareketle

$$R(U,V,W,\omega) = \omega[R(U,V)W] \tag{3.49}$$

tanımlansın. $R(U,V,W,\omega)$, üç teğet vektör alanı ile bir 1-forma etkiyerek bir fonksiyon (eşitliğin sağ yanı) vermektedir. $R(U,V,W,\omega)$'nın tüm argümanlarına göre çok kere lineer ve dolayısıyla da bir tansör olduğu gösterilebilir. Bu tansöre Riemann Eğrilik Tansörü adı verilir.

$\{E_\mu, \omega^\mu\}$ tabanı için $R(E_\mu, E_\nu)(E_\alpha)$ bir vektör alanı olduğundan

$$R(E_\mu, E_\nu)(E_\alpha) = R^{\sigma}_{\alpha\mu\nu} E_\sigma \tag{3.50}$$

yazılabilir. $R^{\sigma}_{\alpha\mu\nu}$'lere Riemann Eğrilik Tansörünün bileşenleri denir ve bunların (torsiyon içermeyen uzay için)

$$R^{\sigma}_{\alpha\mu\nu} = E_\mu \Gamma^{\sigma}_{\alpha\nu} - E_\nu \Gamma^{\sigma}_{\alpha\mu} + \Gamma^{\tau}_{\alpha\nu}\Gamma^{\sigma}_{\tau\mu} - \Gamma^{\tau}_{\alpha\mu}\Gamma^{\sigma}_{\tau\nu} - D^{\tau}_{\mu\nu}\Gamma^{\sigma}_{\alpha\tau} \tag{3.51}$$

ifadesi aracılığıyla hesaplanabileceği gösterilebilir. $\{\partial_\mu, dx^\mu\}$ tabanında bu ifade $R^{\sigma}_{\alpha\mu\nu}$'nin tansör analizindeki bilinen ifadesine indirgenir. Gene bu tabanda (3.51) eşitliği kullanılarak,

$$\theta^{\mu}_{\nu} \equiv d\omega^{\mu}_{\nu} + \omega^{\mu}_{\ \alpha} \Lambda \omega^{\alpha}_{\ \nu} \tag{3.52}$$

şeklinde tanımlanan θ^{μ}_{ν} lerin Riemann Eğrilik Tansörünün bileşenlerine,

$$\theta^{\mu}_{\nu} = \tfrac{1}{2} R^{\mu}_{\nu\sigma\tau} \omega^\tau \Lambda \omega^\sigma \tag{3.53}$$

denklemi uyarınca bağlı olduğu gösterilebilir. θ^{μ}_{ν} 2-formlarına Eğrilik Formları ve (3.53) eşitliğine de İkinci Cartan Denklemi denir [177].

3.5. TETRAD FORMALİZMİ

$\{\partial_i, dx^i\}$ koordinatsal tabanı, metriğin grup simetrileri gibi özelliklerini yansıtmakta yetersiz kaldığından genel tabanlar tanımlama yoluna gidilmiştir. $\{\partial_i, dx^i\}$ koordinatsal tabandan hareketle,

$$e_a = e_a{}^i \partial_i \quad , \quad \det(e_a{}^i) \neq 0 \tag{3.54}$$

$$e^a = e_i{}^a dx^i \tag{3.55}$$

formunda lineer kombinasyonlar almak kaydıyla yeni bir $\{e_a, e^a\}$ tabanı tanımlanabilir. Bu, dört bağımsız vektörden oluşan $\{e_a\}$'ya tetrad tabanı denir. $e_a{}^i$'lar ise bu vektörlerin $\{\partial_i\}$ tabanındaki bileşenleridir ve genel olarak uzay ve zaman koordinatlarının fonksiyonudurlar. e^a'lar ise e_a tetrad vektörlerinin,

$$e^a(e_b) = \delta^a{}_b \tag{3.56}$$

bağıntısı ile tanımlanan dual 1-formları olup, $\{dx^i\}$ tabanında $e_i{}^a$ bileşenlerine sahiptirler. Ayrıca burada $\{e^a\}$'ya tetrad 1-form tabanı denir. (3.54)-(3.56) bağıntıları kullanılarak $e_a{}^i$ ve $e_i{}^a$ bileşenlerinin birbirlerinin ters matrisi oldukları, yani,

$$e_a{}^i e_j{}^a = \delta^i{}_j \quad \text{ve} \quad e_a{}^i e_i{}^b = \delta^b_a \tag{3.57}$$

bağıntılarına uydukları gösterilebilir.

$\{\partial_i, dx^i\}$ ve $\{e_a, e^a\}$ tabanlarında, bir vektör $X = X^i \partial_i = X_i dx^i = X^a e_a = X_a e^a$ olarak yazılacaktır. Burada X^i ile X_i'ye vektörün koordinatsal ya da tansör bileşenleri, X^a ve X_a'ya da tetrad bileşenleri denir. Bu bileşenler arasındaki geçişler;

$$X^i = e_a^i X^a \quad \Leftrightarrow \quad X^a = e_i^a X^i \tag{3.58.a}$$

$$X^i{}_j = e_a^i e^b{}_j X^a{}_b \quad \Leftrightarrow \quad X^a{}_b = e_i^a e_b^j X^i{}_j \tag{3.58.b}$$

şeklindedir.

g_{jk} metrik tansör için koordinatsal ve tetrad bileşenler arasındaki geçiş;

$$g_{ij} = e_i^a e_j^b g_{ab} \quad \Leftrightarrow \quad g_{ab} = e_a^i e_b^j g_{ij} \tag{3.59}$$

şeklinde olur. $\{e_a, e^a\}$ tetrad tabanında uzay-zaman metriği:

$$ds^2 = g^{ab} e_a e_b = g_{ab} e^a e^b \tag{3.60}$$

eşitliği ile ifade edilir.

$\{\partial_i, dx^i\}$ koordinatsal tabanında ∂_i'lerin komütatörünün $[\partial_i, \partial_j] = 0$ olmasına karşın, $\{e_a, e^a\}$ tabanında,

$$[e_a, e_b] = \gamma^c{}_{ab} e_c \tag{3.61}$$

formundadır. Burada $\gamma^c{}_{ab}$'lere komütasyon fonksiyonları denir ve genel olarak uzay-zaman koordinatlarının fonksiyonudurlar. Tanımdan, bu ifadelerin

$$\gamma^c{}_{ab} = -\gamma^c{}_{ba} \qquad \text{(alt indise göre antisimetrik)} \tag{3.62.a}$$

$$e_{[a}\gamma^f{}_{bc]} + \gamma^d{}_{[ab}\gamma^f{}_{c]d} = 0 \qquad \text{(Jacobi özdeşliği)} \tag{3.62.b}$$

bağıntılarına uydukları söylenebilir.

Tetrad formalizminde,

$$\nabla_{e_a} e_b (\equiv \nabla_a e_b) = \Gamma^c_{ab} e_c \tag{3.63}$$

ifadesi ile e_b taban vektörünün e_a doğrultusundaki kovaryant türevi gösterilmek üzere skaler, vektör ve tansörlerin kovaryant türevlerinin tetrad formalizmindeki karşılığı:

$$\nabla_a \phi = e_a \phi$$

$$\nabla_a X_b = e_a X_b - \Gamma^c{}_{ab} X_c \tag{3.64}$$

$$\nabla_a X^c_b = e_a X^c_b + \Gamma^c{}_{ad} X^d_b - \Gamma^d{}_{ab} X^c_d$$

şeklinde olur. Burada artık Γ'lara Ricci Dönme Katsayıları denir. Burulma tansörünün $(T(X,Y))$ ve Riemann tansörünün

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] \tag{3.65}$$

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_{[X,Y]} Z \tag{3.66}$$

formundaki tanımları göz önüne alınsın. (3.65)'te $X \equiv e_a$, $Y \equiv e_b$ ve (3.66)'da da $X \equiv e_c$, $Y \equiv e_d$, $Z \equiv e_b$ alınır ve (3.61, 3.63 ve 3.64) bağıntılarıyla birlikte,

$$T(e_a, e_b) \equiv T^c{}_{ab} e_c \tag{3.67}$$

$$R(e_c, e_d)e_b \equiv R^a{}_{bcd} e_a \tag{3.68}$$

tanım kabulleri kullanılırsa sonuçta,

$$T^c{}_{ab} = \Gamma^c{}_{ab} - \Gamma^c{}_{ba} - \gamma^c{}_{ab} \tag{3.69}$$

$$R^a{}_{bcd} = e_c \Gamma^a{}_{bd} - e_d \Gamma^a{}_{cb} + \Gamma^f{}_{db} \Gamma^a{}_{cf} - \Gamma^f{}_{cb} \Gamma^a{}_{df} - \gamma^f{}_{cd} \Gamma^a{}_{fb} \tag{3.70}$$

ifadeleri elde edilir. (3.69)'da burulma sıfır olduğunda

$$\Gamma^c{}_{ab} - \Gamma^c{}_{ba} = \gamma^c{}_{ab} \tag{3.71}$$

olduğu görülmektedir. Bu, koordinatsal tabanda $\Gamma^k{}_{ij} = \Gamma^k{}_{ji}$ olmasına karşılık, tetrad tabanında uzay-zaman burulmasız ($T^c_{ab} \equiv 0$) olsa bile $\Gamma^c_{ab} \neq \Gamma^c_{ba}$ olduğunu söylemektedir.

Ricci tansörünün tetrad bileşenlerini bulmak için (3.70)'de $a = c$ büzülmesi yapılır ve γ yerine de (3.71) kullanılıp $\Gamma^c{}_{ab}$'ler cinsinden ifadesi yazılırsa, gerekli kısıtlama sonucunda, indislerin yeniden adlandırılmış şekliyle,

$$R_{ab} = e_c \Gamma^c{}_{ab} - e_b \Gamma^c{}_{ca} + \Gamma^d{}_{ba} \Gamma^c{}_{cd} - \Gamma^d{}_{cb} \Gamma^c{}_{da} \tag{3.72}$$

elde edilir. Ricci skaleri ise,

$$R = g^{ab} R_{ab} \tag{3.73}$$

olarak tanımlanır. Ricci skaleri ve $R_{ab}R^{ab}$ şeklinde tanımlanan skaler de eğrilik invaryantıdır.

(3.61)'de (3.54-3.57) bağıntıları kullanılırsa, komütasyon fonksiyonlarının tabanların koordinat bileşenleri cinsinden ifadesi,

$$\gamma^c{}_{ab} = -\left(e^i_a e^j_b - e^i_b e^j_a\right) \partial_i e^c_j \tag{3.74}$$

olarak bulunur. Diğer yandan, Ricci teoremiyle birlikte (3.71) bağıntısı kullanılırsa $\Gamma^{c}{}_{ab}$ Ricci dönme katsayılarının γ komütasyon fonksiyonları cinsinden ifadesi,

$$\Gamma_{abc} = g_{ad}\Gamma^{d}{}_{bc} \Leftrightarrow \Gamma^{c}{}_{ab} = g^{cd}\Gamma_{dab} \quad \text{ve} \quad \gamma_{abc} = g_{ad}\gamma^{d}{}_{bc} \Leftrightarrow \gamma^{c}{}_{ab} = g^{cd}\gamma_{dab} \tag{3.75}$$

tanımlarından yola çıkılarak

$$\Gamma_{abc} = \frac{1}{2}(e_b g_{ca} + e_c g_{ab} - e_a g_{bc}) + \frac{1}{2}(\gamma_{abc} + \gamma_{cab} - \gamma_{bca}) \tag{3.76}$$

şeklinde elde edilir [178-180].

3.5.1. Ortonormal Tetrad Formalizmi

$\{e_a\}$ taban vektörlerinin birbirine dik alınması durumunda, metriğin tetrad bileşenlerini tanımlayan $e_a . e_b = g_{ab}$ bağıntısı, $\eta_{ab} = köş(-1,+1,+1,+1)$ olmak üzere,

$$e_a . e_b = \eta_{ab} \quad \Leftrightarrow \quad e_0 . e_0 = -1 \quad , \quad e_0 . e_\beta = 0 \quad , \quad e_\alpha . e_\beta = \delta_{\alpha\beta} \tag{3.77}$$

bağıntılarına indirgenir. Bu, taban 1-formları diliyle uzay-zaman aralığının,

$$ds^2 = \eta_{ab} e^a e^b = -(e^0)^2 + (e^1)^2 + (e^2)^2 + (e^3)^2 \tag{3.78}$$

biçiminde Minkowskisel (Lorentzsel) formunu aldığı bir formalizmdir. Burada η_{ab} Lorentzsel uzay-zaman metriğidir. $\{e_a, e^a\}$'nın ortonormal (dik) bir formalizm olarak seçilimi, genel bir tetrad formalizmi için yazılmış bağıntıları kayda değer bir biçimde sadeleştirir. Bir başka sadeleştirmeyi ise, tetrad formalizminin zamansal taban vektörü e_0'ın, akışkanın 4-lü hız vektörü $\mathbf{u}$'ya paralel seçilmesi oluşturur. Bu taktirde, $\{e_a, e^a\}$ formalizmine eşhareketli formalizm denir. $e_0 = \mathbf{u} = \partial_t$ alınması, 4-lü hız vektörünün tetrad bileşenlerinin,

$$u^a = (1,0,0,0) \equiv \delta^a{}_0 \quad \text{ve} \quad u_a = (-1,0,0,0) \equiv -\delta^0_a \tag{3.79}$$

olması anlamına geldiğinden, buradan, $h_{ab} = \eta_{ab} + u_a u_b$ ile tanımlı dik izdüşürme tansörünün tetrad bileşenlerinin,

$$h_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = h^{ab} \tag{3.80}$$

şeklinde basitleşeceği görülür.

Bunun sonucunda, eşhareketli ortonormal formalizmde akışkanın kinematik ve dinamik büyüklükleri arasında sıfır indisli bileşenler özdeş olarak sıfır olur ve geriye yalnızca, $\dot{u}_\alpha$, $\omega_{\alpha\beta}$, ω_α, Ω_α, $n_{\alpha\beta}$, α_α, q_α, $\pi_{\alpha\beta}$ olmak üzere uzaysal bileşenleri kalır. Bunların komütasyon fonksiyonları cinsinden ifadeleri [179]:

$$\dot{u}_\beta = \gamma^0{}_{0\beta} \tag{3.81.a}$$

$$\theta_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\left(\gamma^\gamma{}_{0\alpha} + \gamma^\gamma{}_{0\beta}\right)\theta = -\gamma^\gamma{}_{0\gamma} \tag{3.81.b}$$

$$\sigma_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\left(\gamma^\gamma{}_{0\alpha} + \gamma^\gamma{}_{0\beta}\right) + \frac{1}{3}\gamma^\lambda{}_{0\lambda}\delta_{\alpha\beta} \tag{3.81.c}$$

$$\omega^\lambda = \frac{1}{4}\varepsilon^{\lambda\alpha\beta}\gamma^0{}_{\alpha\beta} \tag{3.81.d}$$

$$\Omega^\lambda = \frac{1}{2}\varepsilon_\gamma{}^{\beta\lambda}\gamma^\gamma{}_{0\beta} - \omega^\lambda \tag{3.81.e}$$

$$a_\alpha = \frac{1}{2}\gamma^\gamma{}_{\alpha\gamma} \tag{3.81.f}$$

$$n^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon^{\alpha\varepsilon\lambda}\gamma^\beta{}_{\varepsilon\lambda} + \varepsilon^{\alpha\beta\varepsilon}\gamma^\lambda{}_{\varepsilon\lambda}\right) \tag{3.81.g}$$

şeklindedir. Burada $\dot{u}_\alpha$ ivme, $\theta_{\alpha\beta}$ genişleme tansörü, θ genişleme skaleri, $\omega_{\alpha\beta}$ girdap (dönme) tansörü, ω_α girdap (dönme) skaleri, q_α ısı (enerji) akısı, $\pi_{\alpha\beta}$ eşyönsüz basınç tansörü, $\sigma_{\alpha\beta}$ makaslama tansörü, σ makaslama skaleri, Ω_α, ortonormal tetrad formalizminin Fermi ötelenmesinde bir eylemsizlik sistemine göre dönmüşlüğünün ölçüsünü tasvir eden bir vektördür. α_α vektörü ile $n_{\alpha\beta}$ $(n_{\alpha\beta} = n_{\beta\alpha})$ matrisi ise, komütasyon değişkenleri denilen ve tamamen uzay indisli $\gamma^\gamma{}_{\alpha\beta}$ komütasyon fonksiyonlarının

$$\gamma^\gamma{}_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta\lambda}n^{\lambda\gamma} + a_\alpha\delta^\gamma{}_\beta - a_\beta\delta^\gamma{}_\alpha \tag{3.82}$$

biçiminde parametrizasyonunda yer alan değişkenlerdir.

Ortonormal eşhareketli tetrad formalizminde, metriğin tetrad bileşenlerinin sabitler olmasından dolayı alan denklemlerinin hesaplanması daha kolay olmaktadır. Örneğin; (3.76)'da $g_{ab} = \eta_{ab}$

alındığında ilk terimin sıfırlanacağı yani $e_c g_{ab} \equiv e_c \eta_{ab} = 0$ olacağından ve (3.75) tanımları göz önüne alındığında da Γ_{abc} bağlantı katsayılarının ifadesinin γ_{abc} terimine doğrudan

$$\Gamma_{abc} = \frac{1}{2}(\gamma_{abc} + \gamma_{cab} - \gamma_{bca}) = \frac{1}{2}(\eta_{ae}\gamma^{e}{}_{bc} + \eta_{ce}\gamma^{e}{}_{ab} - \eta_{be}\gamma^{e}{}_{ca}) \tag{3.83}$$

ifadesiyle bağlı olacağı rahatlıkla görülür [179].

4) BULGULAR

4.1. DEĞİŞTİRİLMİŞ TELEPARALEL GRAVİTASYONDA, HÂL DENKLEMİ ARACILIĞIYLA KENDİ KENDİNE GRAVİTASYON YAPAN ANİZOTROPİK YILDIZLARIN YAPISAL ANALİZİ

Bu çalışmada, MIT bag hâl denklemini dikkate alarak anizotropik senaryoda, $PSRJ1416-2230, 4U1608-52, CenX-3, EXO1785-248$ ve $SMCX-1$ kompakt nötron yıldız adaylarının oluşumunu araştırıyoruz. Metrik fonksiyonlar, enerji yoğunluğu, basıncın radyal ve teğetsel bileşenleri, anizotropi, gradyanler, hâl denklemi, ses hızları gibi parametreleri Abreu kriterleri ve TOV kuvvetleri dengesi ile inceleyerek anizotropik yıldız nesnelerinin kararlılığını inceliyoruz. Torsiyona bağlı teorilerin tetrad formalizmini esas almasından dolayı bu çalışmada diagonal ve off-diagonal tetradları seçiyoruz. Kompakt yıldız nesnelerinin gravitasyona dayalı yapısının tam oluşumunu, lineer ve non-lineer gravitasyon modifikasyonu ile ayarlanabilen doğru tetrad formalizminin seçiminin kararlılık analizini detaylandırıyoruz.

Mevcut analizimizde,

$$ds^2 = g_{\xi\zeta}dx^{\xi}dx^{\zeta} = \eta_{ij}\theta^i\theta^j \tag{4.1}$$

metriğini kullanacağız. Burada;

$$dx^{\xi} = e_i^{\xi}\theta^i; \theta^i = e^i{}_{\xi}dx^{\xi} \tag{4.2}$$

ve η_{ij}, $diag(1,-1,-1,-1)$ Minkowski metriğini temsil etmektedir. Ayrıca $e^i{}_{\xi}$ tetrad bileşenleri ise,

$$e_i{}^{\xi}e_{\zeta}{}^i = \delta_{\zeta}^{\xi}, e_{\xi}{}^i e^{\xi}{}_j = \delta_j^i \tag{4.3}$$

ilişkilerine sahiptir.

GR'de Levi-Civita bağlantısı;

$$\dot{\Gamma}^{\varrho}{}_{\xi\zeta} = \frac{1}{2}g^{\varrho\sigma}\left(\partial_{\zeta}g_{\sigma\xi} + \partial_{\xi}g_{\sigma\zeta} - \partial_{\sigma}g_{\xi\zeta}\right) \tag{4.4}$$

şeklindedir. (4.4) denklemindeki koşulu yalnızca sıfırdan farklı eğriliğe ve torsiyona sahip uzay-zaman sağlar.

Teleparalel gravitasyonun tüm değiştirilmiş formları dikkate alındığında, (4.4) denkleminde verilen Levi-Civita bağlantısı yerine,

$$\Gamma^{\alpha}_{\xi\zeta} = e_i{}^{\alpha}\,\partial_{\zeta} e^{i}{}_{\zeta} = -e^{i}{}_{\xi}\,\partial_{\zeta} e_{i\alpha} \tag{4.5}$$

eşitliği ile tanımlanan Weitzenböck bağıntısı dikkate alınır. Torsiyon ise (4.5) denklemi ile verilen Weitzenböck bağıntısından,

$$T^{\alpha}_{\xi\zeta} = \Gamma^{\alpha}_{\xi\zeta} - \Gamma^{\alpha}_{\zeta\xi} \tag{4.6}$$

şeklinde elde edilebilir. İlgili kontorsiyon tansörü ise,

$$K^{\alpha}_{\xi\zeta} = \Gamma^{\alpha}_{\xi\zeta} - \dot{\Gamma}^{\alpha}_{\xi\zeta} = \frac{1}{2}\left(T_{\xi}{}^{\alpha}{}_{\zeta} + T_{\zeta}{}^{\alpha}{}_{\xi} - T^{\alpha}{}_{\xi\zeta}\right) \tag{4.7}$$

olarak elde edilir ve

$$K_{\alpha}^{\xi\zeta} = -\frac{1}{2}\left(T^{\xi\zeta}{}_{\alpha} - T^{\zeta\xi}{}_{\alpha} + T_{\alpha}{}^{\xi\zeta}\right) \tag{4.8}$$

şeklinde yeniden düzenlenir.

Süperpotansiyel, torsiyon tansörü ve kontorsiyon kullanılarak;

$$S_{\alpha}{}^{\xi\zeta} = \frac{1}{2}\left(K^{\xi\zeta}{}_{\alpha} + \delta^{\xi}_{\alpha} T^{\sigma\zeta}{}_{\sigma} - \delta^{\zeta}_{\alpha} T^{\sigma\xi}{}_{\sigma}\right) \tag{4.9}$$

şeklinde ifade edilir. Genel olarak, T torsiyon skaleri;

$$T = T^{\alpha}{}_{\xi\zeta} S_{\alpha}{}^{\xi\zeta} \tag{4.10}$$

şeklinde yazılır. Riemann tansörü, (4.7) denkleminden kontorsiyon tansörünün bir fonksiyonu olarak;

$$R_{\alpha}{}^{\xi\varrho\zeta} = K^{\alpha}_{\xi\varrho;\zeta} - K^{\alpha}_{\xi\zeta;\varrho} + K^{\alpha}_{\sigma\zeta} K^{\sigma}_{\xi\varrho} - K^{\alpha}_{\sigma\varrho} K^{\sigma}_{\xi\zeta} \tag{4.11}$$

şeklinde hesaplanabilir. Ricci skaleri ise,

$$R = -T - 2D_{\xi} T^{\zeta\xi}_{\zeta} \tag{4.12}$$

şeklinde tanımlanır. Burada Levi-Civita bağıntısının arka planındaki kovaryant türev D_ξ ile temsil edilmektedir.

$f(T,\mathcal{T})$ değiştirilmiş gravitasyon aksiyonu:

$$s = \int dx^4 e \left\{ \frac{1}{2\kappa^2} f(T,\mathcal{T}) + L_m \right\} \tag{4.13}$$

şeklindedir. Burada L_m, Lagrange yoğunluğu ve f, torsiyon T ve enerji-momentum tansör izi $\mathcal{T}$'ye bağlı bir fonksiyondur. Burada $e = det\left(e_a^i\right) = \sqrt{-g}$ 'dir. Ayrıca sayısal hesaplamalar yaparken, geometrik birimlerle ilgili karmaşıklıklardan ve küresel simetrik uzay-zaman tarafından verilen karmaşıklıklardan kaçınmak için mevcut analizimizde $\kappa^2 = \frac{8\pi G}{c^4} = 1$ olarak seçtik.

Bu teorinin alan denklemleri, Lagrangiyeni ifade eden (4.13) denkleminden türetilmiştir ve

$$S_\xi^{\zeta\varrho}\left(f_{TT}\,\partial_\varrho T + f_{TT}\,\partial_\varrho \mathcal{T}\right) + \left[e^{-1}e_\xi^i\,\partial_\varrho\left(e e_i^\alpha S_\alpha^{\zeta\varrho} + T_{\alpha\xi}^\alpha S_\alpha^{\zeta\alpha}\right)\right]f_T + \frac{1}{4}\delta_\xi^\zeta f + \frac{1}{2}f_{\mathcal{T}}\left(\mathcal{T}_\xi^\zeta + p_t\delta_\xi^\zeta\right) = \frac{8\pi G}{2}\mathcal{T}_\xi^\zeta \tag{4.14}$$

şeklindedir. (4.11) ve (4.12) denklemlerini, (4.14) denkleminde uyguladığımızda, alan denklemleri;

$$\left(R_{\xi\zeta} - \frac{1}{2}g_{\xi\zeta}R\right)f_T + \frac{1}{2}g_{\xi\zeta}(f - f_T T) + 2S\zeta\xi^\sigma(f_{TT}\nabla_\sigma T + f_{TT}\nabla_\sigma\mathcal{T}) = (8\pi G - f_{\mathcal{T}})\mathcal{T}_{\xi\zeta} - f_{\mathcal{T}}g_{\xi\zeta}p_t \tag{4.15}$$

şeklinde elde edilir.

(4.15) denklemi ile sağlanan alan denklemleri, $f(T,\mathcal{T}) = T$ konularak EAD'ye indirgenmektedir. (4.13) denklemini oluşturmak için kovaryant yaklaşım kullanılır. Artık hesaplanan alan denklemlerinde diverjans bulunmamaktadır. Fakat süreklilik denklemi $\nabla_\xi\mathcal{T}^{\xi\zeta}$, (4.15) alan denklemlerinin diverjansı kullanılarak elde edilemez. Ancak, [9]'daki yol izlenerek;

$$\nabla_\xi\mathcal{T}^{\xi\zeta} = \frac{f_{\mathcal{T}}}{8\pi G - f_{\mathcal{T}}}\left[\left(\mathcal{T}^{\xi\zeta} + g^{\xi\zeta}p\right)\nabla_\xi log f_{\mathcal{T}} + g^{\xi\zeta}\nabla_\xi\left(p_t + \frac{1}{2}\mathcal{T}\right)\right] \tag{4.16}$$

şeklindeki denkleme ulaşılabilir.

Süreklilik denklemi bir sorundur. Çünkü aksiyonun ekstra terimleri kozmolojik ölçeklerde evrende belirtilen maddenin genişlemesini engellemektedir.

Mevcut çalışma kapsamında kompakt nesnelerin incelenmesinde kullanılacak olan küresel simetri:

$$ds^2 = e^{\nu(r)}dt^2 - e^{\mu(r)}dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2\sin^2\theta d\phi^2 \tag{4.17}$$

metriği ile ifade edilmektedir. Burada $\nu(r)$ ve $\mu(r)$ ayar bileşenleri, gravitasyonu tanımlayan radyal (r) fonksiyonlardır.

Alan denklemlerinin hesaplanmasında önemli rol oynayan tetradlar, eğri uzay-zaman ile düz uzay-zaman arasındaki bağlantıyı kuran yani eğri uzay-zamanın, düz uzay-zamana izdüşümünü betimleyen niceliklerdir. Tetrad formalizminin eşdeğerlik ilkesinden bağımsız olmasından dolayı, kuantum etkileri araştırmak için de uygundurlar. Diagonal ve off-diagonal olmak üzere iki tür tetrad alanından bahsetmek mümkündür. Diagonal tetrad alanının kullanılmasının güneş sistemi üzerindeki mevcut kısıtlamalardan ötürü, çalışmalarımızda sınırlamaların etkisini azaltmak için off-diagonal tetrad alanını ele almaktayız. Mevcut çalışmada ele alınacak off-diagonal tetrad:

$$e_\gamma^\eta = \begin{pmatrix} e^{\frac{\nu(r)}{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{\mu(r)}{2}}\sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ 0 & e^{\frac{\mu(r)}{2}}\sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ 0 & e^{\frac{\mu(r)}{2}}\cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix} \tag{4.18}$$

şeklindedir. Burada, $e = e^{\nu(r)+\mu(r)}r^2\sin\theta$ ifadesine sahiptir.

Anizotropik nitelikteki akışkan dağılımı;

$$T_{\nu\mu}^{(m)} = (\rho + p_t)u_\nu u_\mu - p_t g_{\nu\mu} + (p_r - p_t)v_\nu v_\mu \tag{4.19}$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Burada $u_\nu = e^{\frac{\mu}{2}}\delta_\nu^0$ ve $\upsilon_\nu = e^{\frac{\nu}{2}}\delta_\nu^1$ eşitliğine sahiptir. ρ, p_r ve p_t ise sırasıyla, enerji yoğunluğu, radyal basınç ve teğetsel basınç fonksiyonunu temsil etmektedir. Ayrıca, $T_{\nu\mu}^{(m)} = [\rho, -p_r, -p_t, -p_t]$ enerji-momentum tansörünün İz terimi:

$$\mathcal{T} = \delta_\mu^\nu T_\nu^\mu \tag{4.20}$$

şeklinde ifade edilir.

(4.10) denkleminden, $T(r)$ ve 'r''ye göre türevi $T'(r)$ ifadeleri:

$$T(r) = \frac{2e^{-\mu(r)}\left(e^{\frac{\mu(r)}{2}}-1\right)\left(e^{\frac{\mu(r)}{2}}-rv'(r)-1\right)}{r^2} \tag{4.21}$$

$$\begin{aligned} T' = &-\frac{4e^{-\mu(r)}\left(e^{\frac{\mu(r)}{2}}-1\right)\left(e^{\frac{\mu(r)}{2}}-rv'(r)-1\right)}{r^3} + \frac{e^{-\frac{\mu(r)}{2}}\mu'(r)\left(e^{\frac{\mu(r)}{2}}-rv'(r)-1\right)}{r^2} \\ &-\frac{2e^{-\mu(r)}\left(e^{\frac{\mu(r)}{2}}-1\right)\mu'(r)\left(e^{\frac{\mu(r)}{2}}-rv'(r)-1\right)}{r^2} \\ &+\frac{1}{r^2}2e^{-\mu(r)}\left(e^{\frac{\mu(r)}{2}}-1\right)\left[\frac{1}{2}e^{\frac{\mu(r)}{2}}\mu'(r) - rv''(r) - v'(r)\right] \end{aligned} \tag{4.22}$$

şeklinde elde edilir.

(4.14), (4.17) ve (4.18) denklemleri kullanılarak elde edilen $f(T,\mathcal{T})$ değiştirilmiş gravitasyonun $\rho,\ p_r$ ve p_t ifadelerinin genelleştirilmiş alan ifadeleri,

$$\rho = -\frac{e^{-\frac{\mu(r)}{2}}\left(e^{-\frac{\mu(r)}{2}}-1\right)(f_{\mathrm{TT}}T' + f_{\mathrm{T}\mathcal{T}}\mathcal{T}')}{r} - \frac{1}{2}f_T\left(-\frac{e^{-\mu(r)}\left(1-r\mu'(r)\right)}{r^2} - \frac{1}{r^2} + \frac{T(r)}{2}\right) + \frac{f}{4} + \frac{1}{2}f_{\mathcal{T}} \times (p_t + \rho) \tag{4.23}$$

$$p_r = \left(\frac{e^{-\mu(r)}\left(rv'(r)+1\right)}{r^2} - \frac{1}{r^2} + \frac{T(r)}{2}\right)\frac{f_T}{2} - \frac{f}{4} - \frac{1}{2}f_T(p_t - p_r) \tag{4.24}$$

$$\begin{aligned} p_t = &\frac{1}{2}e^{-\mu(r)}\left(-\frac{e^{\frac{\mu(r)}{2}}}{r} + \frac{v'(r)}{2} + \frac{1}{r}\right)(f_{\mathrm{TT}}T' + f_{\mathrm{T}\mathcal{T}}\mathcal{T}') \\ &+\left[e^{-\mu(r)}\left(\left(\frac{v'(r)}{4} + \frac{1}{2r}\right)\left(v'(r) - \mu'(r)\right) + \frac{v''(r)}{2}\right) + \frac{T(r)}{2}\right]\frac{f_T}{2} - \frac{f}{4} \end{aligned} \tag{4.25}$$

şeklinde elde edilir.

Şimdi burada, kompakt yıldız sistemi içerisindeki tuhaf (strange) quark maddesini tanımlayan, hâl denkleminin MIT bag modeli hâl denklemini,

$$p_r = \frac{1}{3}\left(\rho - 4B_g\right) \tag{4.26}$$

ele alıyoruz. Burada B_g, MIT bag sabitidir. Yapılan çalışmalarda [158,159] kompakt yıldız konfigürasyonları için B_g değerinin $58.8\ MeV/f\,m^3 < B_g < 91.2\ MeV/f\,m^3$ aralığında yer aldığı ileri sürülmüştür. Mevcut çalışma için ise B_g değerini $74\ MeV/f\,m^3$ olarak kabul ediyoruz [157].

Bu çalışmamızda, $f(T,\mathcal{T})$ gravitasyonun;

$$f(T,\mathcal{T}) = \alpha T^n(r) + \beta\mathcal{T}(r) \tag{4.27}$$

şeklindeki fonksiyonunu ele alıyoruz. Burada α, β ve n keyfi olarak seçilen sabitlerdir. Bu teori α, β ve n parametre değerlerini ayarlayarak bazı temel gravitasyon modellerine dönüştürülebilir. Sadece $\beta = 0$ olarak alınırsa $f(T)$ gravitasyonuna ulaşılır. $n = 1$ ve $\beta = 0$ olarak ayarlandığında, GR'nin teleparalel eşdeğer teorisindeki sonuçlar elde edilir. Fakat off-diagonal tetrad ile daha uyumlu olduğundan diagonal tetradda $n = 2$ en iyi seçimdir. Diagonal tetrad, lineer ya da non-lineer herhangi bir model ile kullanılabilir ve en iyi $n = 1$ lineer durumu ile çalışmaktadır.

Mevcut analizde, off-diagonal tetrad arka planında non-lineer $n = 2$ ve diagonal tetrad arka planında lineer $n = 1$ durumları ayrı ayrı incelenecektir. Alan denklemlerinin çözümü için, her iki durumda da Karmarkar koşulu göz önünde bulundurulacaktır. Riemann eğriliği formundaki Karmarkar koşulu, $\mathcal{R}_{2323} \neq 0$ olmak üzere,

$$\mathcal{R}_{1414}\mathcal{R}_{2323} = \mathcal{R}_{1224}\mathcal{R}_{1334} + \mathcal{R}_{1212}\mathcal{R}_{3434} \tag{4.28}$$

şeklinde verilmektedir. Riemann tansör bileşenleri ise (4.17) denklemi ile verilen küresel simetrik metrik için

$$\mathcal{R}_{1414} = \frac{e^{\nu(r)}(2\nu''(r)+\nu'(r)^2-\nu'(r)\mu'(r))}{4}, \qquad \mathcal{R}_{2323} = \frac{r^2 sin^2\theta(e^{\nu(r)}-1)}{e^{\mu(r)}},$$
$$\mathcal{R}_{1212} = \frac{r\mu'(r)}{2}, \qquad \mathcal{R}_{3434} = \frac{r sin^2\theta\mu'(r)e^{\nu(r)-\mu(r)}}{2}$$
$$\mathcal{R}_{1334} = \mathcal{R}_{1224}sin^2\theta, \qquad \mathcal{R}_{1224} = 0$$

şeklinde hesaplanır.

Riemann tensör bileşenleri (4.28) denklemi ile verilen Karmarkar koşulunda kullanılarak, (4.17) denklemindeki metrik bileşenlere karşı;

$$e^{\mu(r)} = 1 + \frac{\mathcal{K}^2 e^{\nu(r)} \nu'^2(r)}{4} \tag{4.29}$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Bu aşamada, sistemin tutarlı sonuçlarını elde etmek amacıyla, Adler metrik fonksiyonu (2.52) için,

$$e^{\nu(r)} = A(1 + Br^2)^2 \tag{4.30}$$

yaklaşımını kullanıyoruz [171].

(4.30) denklemi, (4.29) denklemine yerleştirilirse, diğer metrik bileşeni için

$$e^{\mu(r)} = 1 + 16AB^2Fr^2 \tag{4.31}$$

elde edilir. Burada A, B ve F sabitlerdir. Bu Finch Skea geometrisine (2.53) çok benzemektedir. (4.30) ve (4.31) denklemleri ile (4.21)-(4.22) denklemleri ve (4.26) denklemi ile (4.27) denklemi, (4.23)-(4.25) denklemlerinde kullanılarak ρ, p_r ve p_t ifadeleri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\rho = \frac{3\alpha 2^{n-2} n(Y(r)-1)}{(8\pi-\beta)r^2(Br^3+r)^2 Y(r)} \left[\frac{(Y(r)-1)\left(-\frac{4Br^2}{Br^2+1}+Y(r)-1\right)}{r^2 Y(r)}\right]^{n-2} \times \left[\frac{\left(Br^2(Y(r)-5)+Y(r)-1\right)}{Y(r)^4} \times \right.$$
$$[32AB^3Fr^4 + 3Br^2 + 1] \; - \frac{4(n-1)}{Y(r)^{\frac{5}{2}}}[128A^2B^6F^2r^8(Y(r)-9)] +$$
$$256A^2B^5F^2r^6(Y(r)-4) + 8AB^4Fr^4[16AF(Y(r)-3) + 3r^2(4Y(r)-5)] +$$
$$96AB^3Fr^4(Y(r)-1) + B^2[8AFr^2(4Y(r)-5) + 3r^4(Y(r)-1)] + 2Br^2(Y(r)-$$
$$\left.1) + Y(r) - 1]\right] + B_g \tag{4.32}$$

$$
\begin{aligned}
p_r = {} & \frac{\alpha 2^{n-2} n(Y(r)-1)}{(8\pi-\beta) r^2 (Br^3+r)^2 Y(r)} \left(\frac{(Y(r)-1)\left(-\frac{4Br^2}{Br^2+1}+Y(r)-1\right)}{r^2 Y(r)} \right)^{n-2} \\
& \times \left[\frac{\left(Br^2(Y(r)-5)+Y(r)-1\right)}{Y(r)^4} \right] \\
& \times [32AB^3Fr^4 + 3Br^2 + 1] - \frac{4(n-1)}{Y(r)^{5/2}} [128A^2F^2r^8(Y(r)-9) \\
& +256A^2B^5F^2r^6(Y(r)-4) \\
& +8AB^4Fr^4[16AF(Y(r)-3) + 3r^2(4Y(r)-5)] + 96AB^3Fr^4(Y(r)-1) \\
& +B^2[8AFr^2(4Y(r)-5) \\
& +3r^4(Y(r)-1)] + 2Br^2(Y(r)-1) + Y(r) - 1]] - B_g
\end{aligned}
\tag{4.33}
$$

$$
\begin{aligned}
p_t = {} & \frac{r^2 Y(r)}{16(\beta-8\pi)^2 (Y(r)-1)^2 \left(-\frac{4Br^2}{Br^2+1}+Y(r)-1\right)^2} \left[\frac{\alpha 2^{n+4}(n-1)n}{r^2(Br^2+1)^3 Y(r)^{5/2}} \right] \\
& \times \left(\frac{(Y(r)-1)\left(-\frac{4Br^2}{Br^2+1}+Y(r)-1\right)}{r^2 Y(r)} \right)^n [16\pi(Br^2(Y(r)-3) + Y(r) - 1)] \\
& -\beta[Br^2(Y(r)-5) \\
& +Y(r)-1]][128A^2B^6F^2r^8(Y(r)-9) + 256A^2B^5F^2r^6(Y(r)-4) \\
& +8AB^4Fr^4[16AF(Y(r)-3) \\
& +3r^2(4Y(r)-5)] + 96AB^3Fr^4(Y(r)-1) \\
& +B^2[8AFr^2(4Y(r)-5) + 3r^4(Y(r)-1)] \\
& +2Br^2(Y(r)-1) + Y(r) - 1] \\
& + \frac{\alpha 2^{n+2} n(Y(r)-1)\left(Br^2(Y(r)-5)+Y(r)-1\right)}{r^2(Br^2+1)^2 Y(r)^4} \left[\frac{(Y(r)-1)}{r^2 Y(r)} \times \left(-\frac{4Br^2}{Br^2+1} + Y(r) - 1 \right) \right]^n \\
& (64A(4\pi-\beta)B^3Fr^4 - 32A(8\pi-\beta)B^2Fr^2) \\
& -\beta + (64\pi - 11\beta)Br^2) \\
& -\frac{16(8\pi-\beta)\beta B_g}{r^2 Y(r)} (Y(r)-1)^2 \left(-\frac{4Br^2}{Br^2+1} + Y(r) - 1 \right)^2 \\
& +\alpha(8\pi-\beta)2^{n+3}(n-1)r^2 Y(r) \left[\frac{(Y(r)-1)}{r^2 Y(r)} \right. \\
& \left. \times \left[-\frac{4Br^2}{Br^2+1} + Y(r) - 1 \right] \right]^{n+2}]
\end{aligned}
\tag{4.34}
$$

burada

$$Y(r) = \sqrt{16AB^2Fr^2 + 1}$$

eşitliğine sahiptir.

4.1.1. Sınır Koşulları

Akışkan kürelerinin çözümlerini, kütlesini ve yarıçapını karakterize eden, A, B, F ve α sabitlerini değerlendirmek için iç geometri (M^-) ve dış geometri (M^+)'nin düzgün eşleşmesi gerekir. Geometri seçimi tamamen çalışmanın doğasıyla ilgilidir. Bu çalışmamızda, anizotropik yüksüz kompakt nesneleri incelediğimizden dolayı;

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \tag{4.35}$$

uzay-zamanı dikkate alabiliriz.

Uzay-zaman denklemleri (4.17) ve (4.35)'in yıldız yüzeyi ötesinde düzgün eşleştirilmesi için, $r = R$ yıldız yüzeyinde birinci temel formun sürekliliği için g_{tt} ve g_{rr} bileşenlerden ve ikinci temel formun sürekliliği için $\frac{dg_{tt}}{dr}$ türevinden

$$A(BR^2 + 1)^2 = 1 - \frac{2M}{R} \tag{4.36}$$

$$16AB^2FR^2 + 1 = \left(1 - \frac{2M}{R}\right)^2 \tag{4.37}$$

$$4ABR(BR^2 + 1) = \frac{2M}{R^2} \tag{4.38}$$

$$p_r(r = R) = 0 \tag{4.39}$$

eşitlikleri elde edilir. (4.36)-(4.39) denklem sistemi çözülürse,

$$A = -\frac{(5M-2R)^2}{4R(2M-R)} \tag{4.40}$$

$$B = -\frac{M}{R^2(5M-2R)} \tag{4.41}$$

$$F = \frac{R^3}{2M} \tag{4.42}$$

bulunur ve bu sabitlerin (4.39) denkleminde kullanılması ile α parametresi için

$$\alpha = \frac{(8\pi-\beta)B_g 4^{1-n} R\left(\sqrt{\frac{R}{R-2M}}-1\right)\left(R\left(\sqrt{\frac{R}{R-2M}}-1\right)-2M\sqrt{\frac{R}{R-2M}}\right)^2\left[\frac{R\left(-\sqrt{\frac{R}{R-2M}}\right)+M\sqrt{\frac{R}{R-2M}}+R}{R^3}\right]^{-n}}{n\sqrt{\frac{R}{R-2M}}\left(4M^3\left(n\left(\sqrt{\frac{R}{R-2M}}+2\right)+\sqrt{\frac{R}{R-2M}}-4\right)+M_1+M_2+MR^2\left(M_3-11\sqrt{\frac{R}{R-2M}}+7\right)\right)} \tag{4.43}$$

elde edilir. Burada;

$$M_1 = 2M^2R\left(n\left(3-9\sqrt{\frac{R}{R-2M}}\right)+4\sqrt{\frac{R}{R-2M}}+2\right)$$

$$M_2 = 2M^2R\left(n\left(3-9\sqrt{\frac{R}{R-2M}}\right)+4\sqrt{\frac{R}{R-2M}}+2\right)$$

$$M_3 = 4n\left(4\sqrt{\frac{R}{R-2M}}-3\right)$$

şeklindedir.

Şimdi, çalışmamızı iki farklı duruma özelleştirerek ele alacağız.

4.1.2. Off-Diagonal Tetrad Arka Planında Non-Lineer Model $(n = 2)$ için Fiziksel Analiz

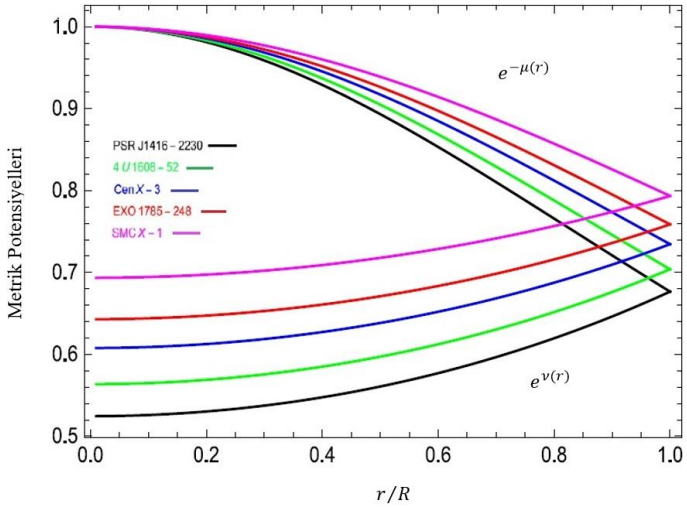
Bu kısımda, off-diagonal tetradın çalışmayla uyumluluğunu sağlamak için (4.27) denkleminde $n = 2$ alarak $f(T,\mathcal{T}) = \alpha T^2 + \beta\mathcal{T}$ fonksiyonuna indirgenen non-lineer modeli ele aldık. Şimdi, off-diagonal tetrad aracılığıyla non-lineer gravitasyon (yani $n = 2$) için fiziksel davranışların grafiksel analizlerini vereceğiz:

Yapılacak analizler için, $A, B, F, \alpha,$ ve β sabitlerinin Tablo 1'de verilmiş olan uygun değerleri seçilmektedir.

Tablo 4.1: Off-diagonal tetrad için $n = 2$ sabit değer durumuna karşı gelen farklı β değerleri.

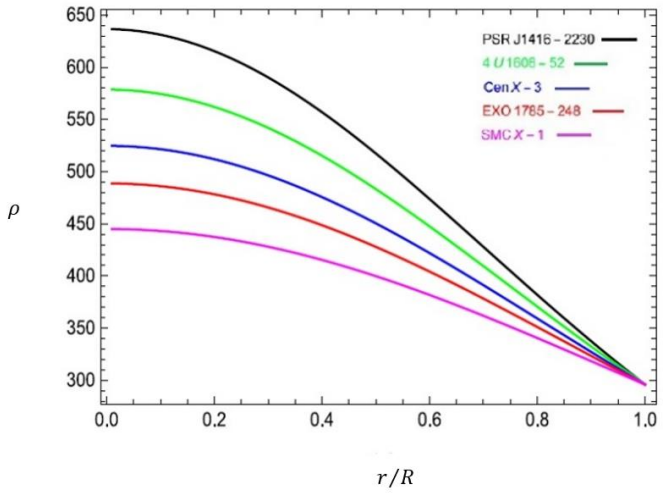
Yıldız İsmi	Gözlemlenen Kütle ($M_\odot$)	Öngörülen Yarıçap (km)	β	A	B	F	α	$\frac{p_{rc}}{\rho_c} < 1$
PSR J1416-2230	1.97	12.182	-19.28	0.5245	0.000914	458.83	-1.262x10^9	0.1783
4 U 1608-52	1.74	11.751	-16	0.5635	0.000851	466.27	-1.206x10^9	0.1628
Cen X-3	1.49	11.224	-12.95	0.6077	0.000788	474.49	-1.159x10^9	0.1453
EXO 1785-248	1.3	10.775	-10.9	0.6428	0.000743	481.14	-1.131x10^9	0.1314
SMC X-1	1.04	10.067	-8.43	0.6934	0.000687	490.49	-1.103x10^9	0.1116

- Enerji yoğunluğu ve basınç bileşenlerinin genel formları $e^{\nu(r)}$ ve $e^{\mu(r)}$ metrik bileşenlerine dayalı olarak (4.30)–(4.31) denklemleri ile sunulmuştu. Şimdi bu denklemlere A, B ve F gibi bazı sabitleri içeren (4.2) – (4.3) denklemleri aracılığıyla Class-I uzay-zaman bileşenlerini yerleştirmeyi (kompakt etmeyi) gerçekleştiriyoruz. $r \to 0$'da her iki metrik bileşeninin de gerekli koşulları sağladığı, yani $e^{\nu(r)} = A$ ve $e^{\mu(r)} = 1$ olduğu görülmektedir, bu durum Şekil 4.1'den de doğrulanabilmektedir.



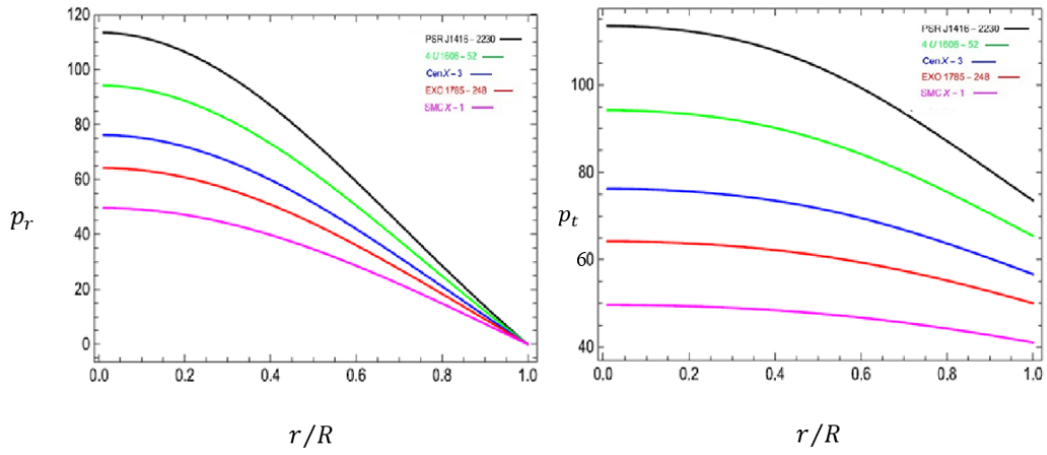
Şekil 4.1: Off-diagonal tetrad, $n = 2$ için r/R oranına karşılık gelen metrik potansiyelleri.

- Şekilde 4.2'de görüldüğü gibi, enerji yoğunluğu ρ, incelenen yıldız konfigürasyonları boyunca pozitiftir ve azalan bir davranış sergilemektedir.



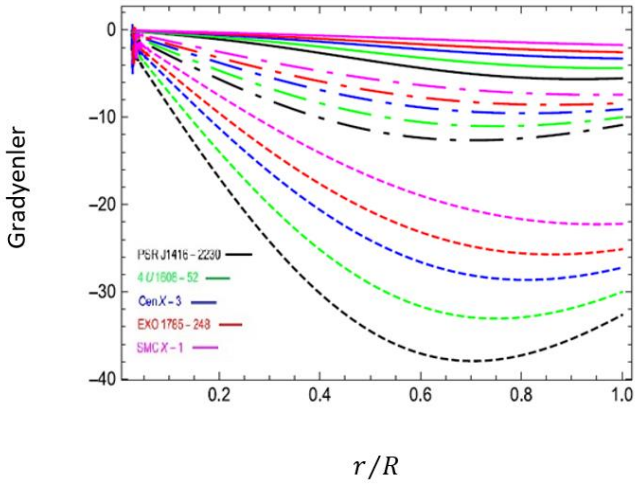
Şekil 4.2: Off-diagonal tetrad, $n = 2$ için r/R oranına karşılık gelen enerji yoğunluğu ρ.

- Kompakt yıldız nesnelerinin fiziksel kararlılığını sağlamak için basınç bileşenleri de çok önemlidir. Radyal basınç p_r ve teğetsel basınç p_t Şekil 4.3'te grafiksel olarak gösterilmiştir. Fiziksel davranışları maksimum değerlerini merkezde, minimum değerlerini ise sınırda almaktadır. Yıldız modellerinin sınırında radyal basıncın bittiği görülmektedir.



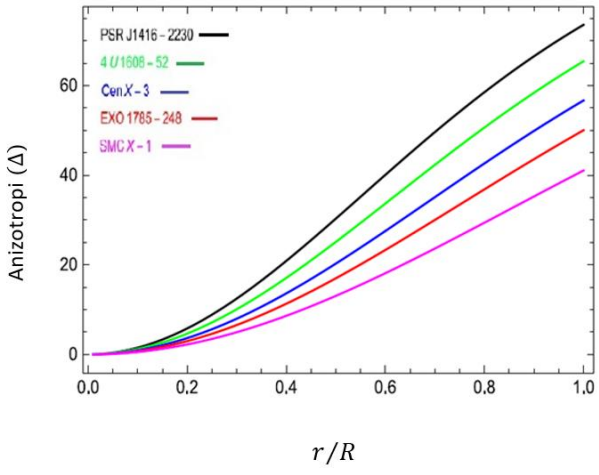
Şekil 4.3: Off-diagonal tetrad, $n = 2$ için r/R oranına karşılık gelen basıncın radyal (p_r) ve teğetsel (p_t) bileşenleri.

- Enerji yoğunluğu ve basınç bileşenlerinin gradyanleri için kabul edilen aralık $\frac{d\rho}{dr} = \frac{dp_r}{dr} = \frac{dp_t}{dr})|_{(r\to 0)} = 0$ ya da başka bir şekilde; $(\frac{d\rho}{dr}, \frac{dp_r}{dr}, \frac{dp_t}{dr})|_{(0<r\leq R)} < 0$ dır, yani bu bileşenlerin gradyanleri zorunlu olarak merkezde sıfırdan başlayarak negatif ve azalan bir davranış göstermeleridir. Şekil 4.4'te bu gradyanlerin tanımlanan değer aralığına denk düştüğü görülmektedir.



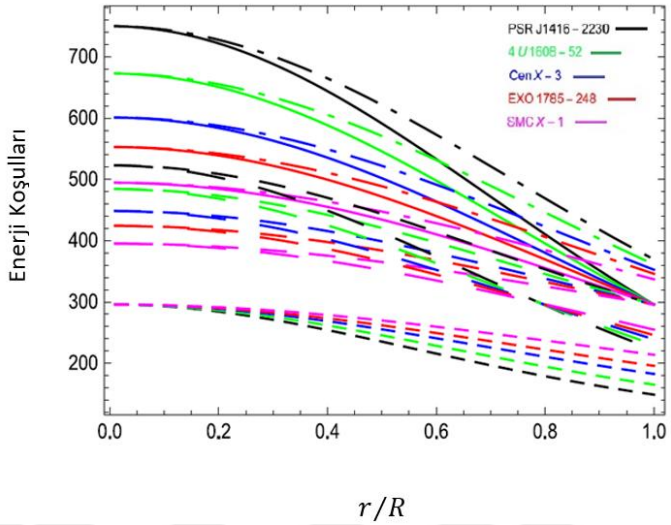
Şekil 4.4: Off-diagonal tetrad, $n = 2$ için r/R oranına karşılık gelen gradyanler.

- Mevcut analiz için Şekil 4.5'te görüldüğü gibi anizotropi Δ, incelenen yıldız konfigürasyonları boyunca pozitif kalmaktadır.



Şekil 4.5: Off-diagonal tetrad, $n = 2$ için r/R oranına karşılık gelen anizotropi.

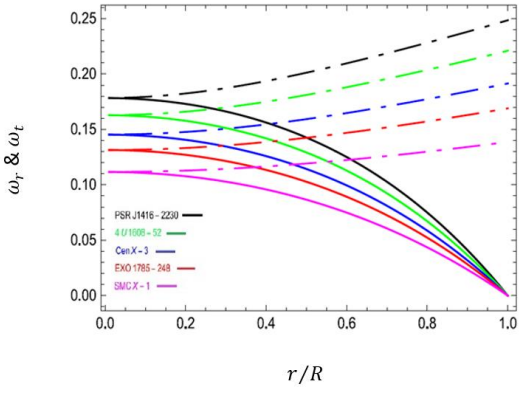
- Kompakt yıldız modellerinin kararlılığı için önemli rol oynayan (2.47.a)-(2.47.d) denklemlerinde ifade edilen enerji koşullarının grafiksel davranışı Şekil 4.6'da görülmektedir.



Şekil 4.6: Off-diagonal tetrad, $n = 2$ için r/R oranına karşılık gelen enerji koşulları.

- $\omega_r = \frac{p_r}{\rho}$ & $\omega_t = \frac{p_t}{\rho}$

şeklinde tanımlanan hâl denklem parametreleri mevcut çalışma için Şekil 4.7'den de görüleceği üzere gerekli koşulları yani, gerçek madde dağılım kriterlerini ($0 < \omega_r$ ve $\omega_t < 1$) sağlamaktadır.

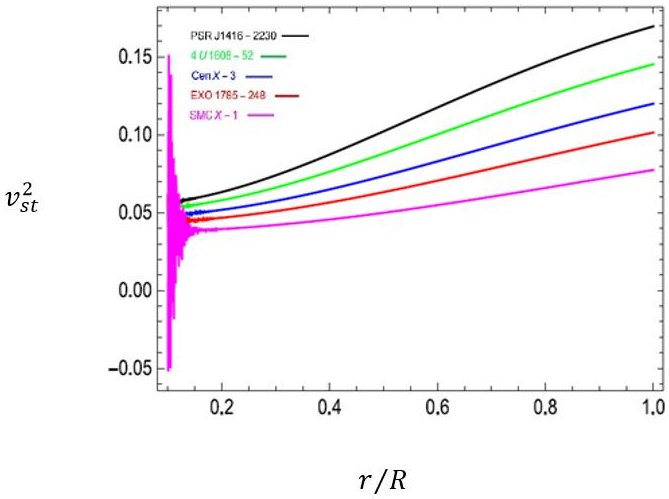


Şekil 4.7: Off-diagonal tetrad, $n = 2$ için r/R oranına karşılık gelen hâl denklem parametreleri.

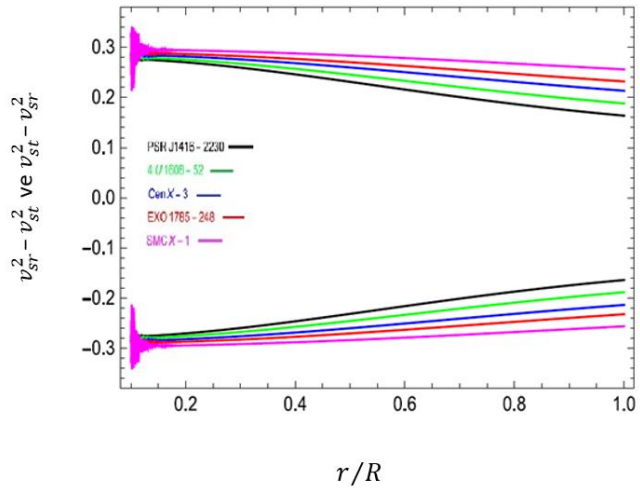
- Yıldız sisteminin kararlılığını tartışmak için ele alacağımız bir diğer koşul ses parametrelerinin hızlarıdır. Mevcut çalışmamızda;

$$v_r^2 = \frac{dp_r}{d\rho} \quad \& \quad v_t^2 = \frac{dp_t}{d\rho}$$

şeklinde tanımlanan v_{sr}^2 ve v_{st}^2 ses hız parametrelerinin her ikisi de sıfır ile bir arasında yer almaktadır. Bu da en genel limit halinde ($0 < |v_t^2 - v_r^2| < 1$ (170)) dikkate alınan bölgenin kararlı olduğunu göstermektedir.

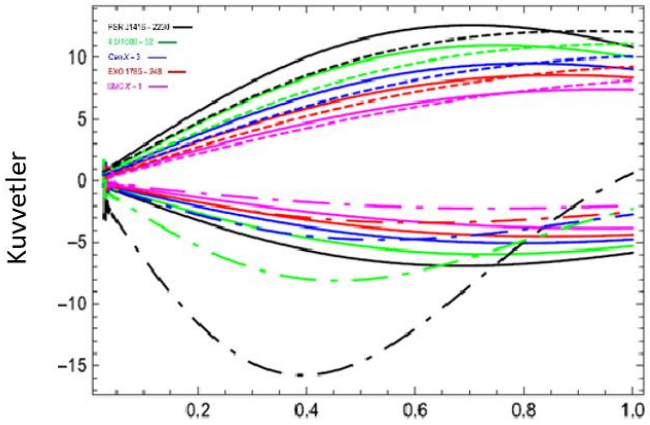


Şekil 4.8: Off-diagonal tetrad, $n = 2$ için r/R oranına karşılık gelen ses hız parametreleri.



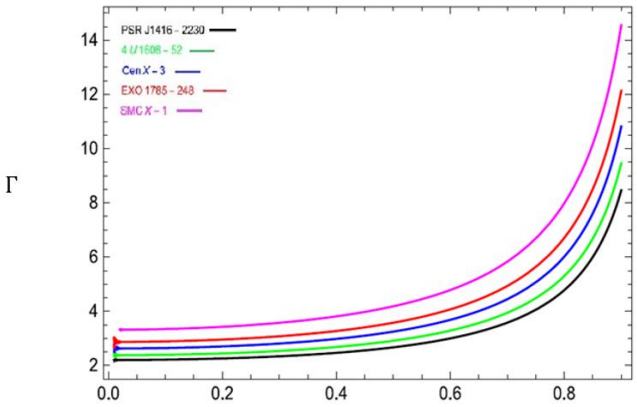
Şekil 4.9: Off-diagonal tetrad, $n = 2$ için r/R oranına karşılık gelen ses hız parametreleri.

- TOV denkleminde; F_g, F_h, F_a ve F_e dört kuvvetin birbirini dengelediğinde, yıldız sisteminin dengede olduğu öne sürülmektedir. Mevcut çalışma için merkezde sıfır etki ile dengeleme davranışı Şekil 4.10'da görülebilir.



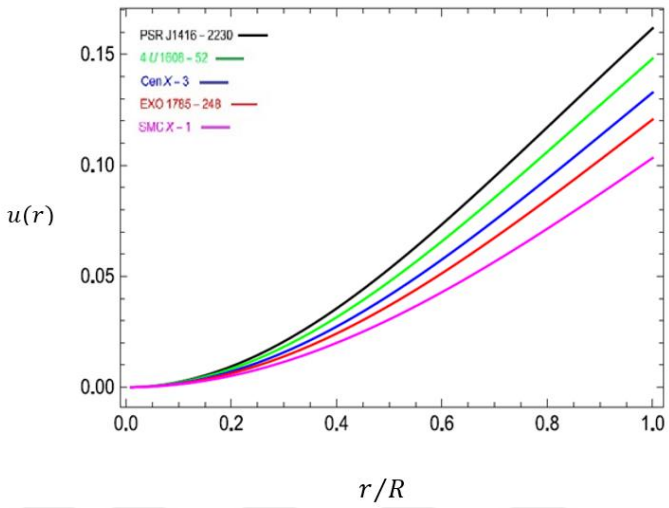
Şekil 4.10: Off-diagonal tetrad, $n = 2$ için r/R oranına karşılık gelen kuvvetler; F_h (Düz-Pozitif), F_g (Düz-Negatif), F_a (Noktalı), F_e (Nokta-Kesikli).

- Şekil 4.11' de (2.46) denkleminde verilen adyabatik indeks Γ'nın davranışının belirlenen kararlılık limitine ($\Gamma|_{(0\leq r\leq R)} > \frac{4}{3}$) uymasından dolayı, çözümlerimizin kararlılılığını görmekteyiz.



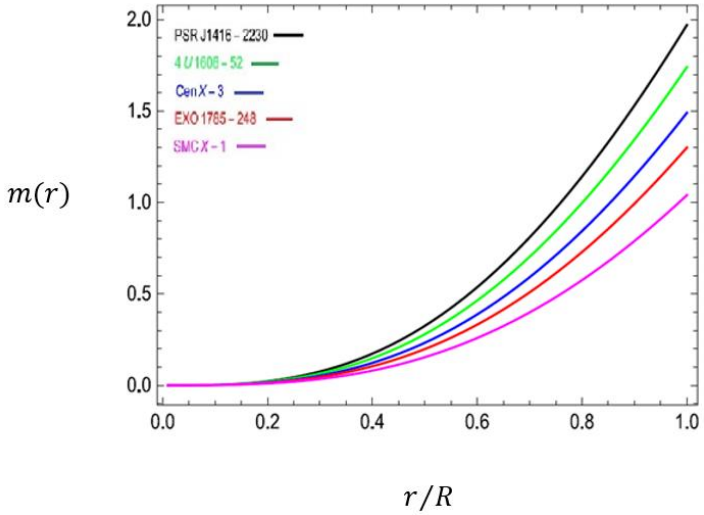
Şekil 4.11: Off-diagonal tetrad, $n = 2$ için r/R oranına karşılık gelen adyabatik indeks, Γ.

- Mevcut çalışmamız için (2.49) denkleminde verilen $u(r)$ kompaktlık parametresinin davranışı Şekil 4.12'de gösterilmektedir.



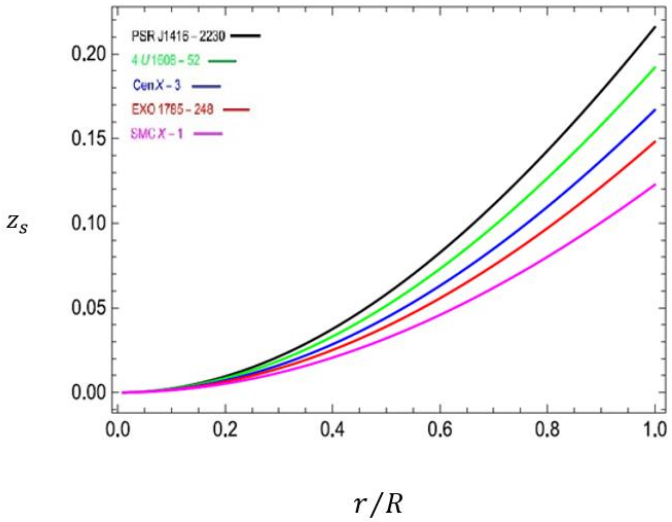
Şekil 4.12: Off-diagonal tetrad, $n = 2$ için r/R oranına karşılık gelen kompaktlık parametresi $u(r)$.

- Mevcut çalışmada (2.48) denkleminde verilen kütle fonksiyonu için düzgün ve düzenli sonuç Şekil 4.13'te gösterilmektedir.



Şekil 4.13: Off-diagonal tetrad, $n = 2$ için r/R oranına karşılık gelen kütle fonksiyonu $m(r)$.

- Mevcut çalışmada (2.51) denklemi ile verilen kırmızıya kayma parametresine ilişkin sonuç Şekil 4.14'te gösterilmiştir.



Şekil 4.14: Off-diagonal tetrad, $n = 2$ için r/R oranına karşılık gelen kırmızıya kayma fonksiyonu z_s.

4.1.3. Diagonal Tetrad (Lineer Model ($n = 1$)) için Fiziksel Analiz

Bu bölümde, diagonal tetradın kompakt nesnelerin incelenmesindeki fiziksel etkilerini ele alıyoruz. Torsiyon temelli gravitasyonun modifikasyonunda kullanılırken, diagonal tetrad;

$$e_\gamma^\eta = [e^{\frac{\nu(r)}{2}}, e^{\frac{\mu(r)}{2}}, r, r\sin\theta] \tag{4.44}$$

şeklinde matris formunda verilmektedir. Diagonal tetrad durumunda alan denklemleri;

$$\rho = -\frac{e^{-\mu(r)}}{r}(f_{TT}T' + f_{T\tau}\tau') - \frac{1}{2}f_T\left(T(r) - \frac{1}{r^2} - \frac{e^{-\mu(r)}(\mu'(r)+\nu'(r))}{r}\right) + \frac{f}{4} - \frac{1}{2}f_\tau(p_t + \rho) \tag{4.45}$$

$$p_r = \frac{1}{2}f_T\left(T(r) - \frac{1}{r^2}\right) - \frac{f}{4} + \frac{1}{2}f_\tau(p_t - p_r) \tag{4.46}$$

$$p_t = \frac{1}{2}e^{-\mu(r)}\left(\frac{\nu'(r)}{2} + \frac{1}{r}\right)(f_{TT}T' + f_{T\tau}\tau') + \frac{1}{2}f_T[e^{-\mu(r)}\left(\left(\frac{\nu'(r)}{4} + \frac{1}{2r}\right)(\nu'(r) - \mu'(r)) + \frac{\nu''(r)}{2}\right) + \frac{T(r)}{2}] - \frac{f}{4} \tag{4.47}$$

şeklinde elde edilmektedir. Diagonal tetrad (4.44) denklemi için (4.6) denkleminden elde edilen torsiyon skaleri;

$$T(r) = \frac{2e^{-\mu(r)}}{r}\left(\nu'(r) + \frac{1}{r}\right) \tag{4.48}$$

şeklindedir.

Bu analiz için, (4.26) denklemi ile ele alınan MIT bag modeli ve (4.27) denklemi ile verilen genel model ile (4.30) – (4.31) denklemleriyle verilen metrik fonksiyonları ile birlikte kullanıldığında, (4.45) – (4.47) denklemlerini ρ, p_r ve p_t için çözüldüğünde;

$$\rho = \frac{3\times 2^{n+1} n\left(\frac{5Br^2+1}{r^2(Br^2+1)(16AB^2Fr^2+1)}\right)^{n-2}}{4} \times \left[4(\beta+8\pi)B_g r^4 (Br^2+1)^2 (16AB^2Fr^2+1)^3\right]$$
$$+\alpha[n(160AB^4Fr^6 + 128AB^3Fr^4 + B^2(32AFr^2 + 5r^4) + 2Br^2 + 1) - (Br^2+1)$$
$$\times (8AB^2Fr^2(5Br^2+3) + 1)] \tag{4.49}$$

$$p_r = \frac{2^{n+1} n\left(\frac{5Br^2+1}{r^2(Br^2+1)(16AB^2Fr^2+1)}\right)^{n-2}}{4(\beta+8\pi)r^4(Br^2+1)^2(16AB^2Fr^2+1)^3}[\alpha[n[160AB^4Fr^6] + 128AB^3Fr^4 + B^2[32AFr^2$$
$$+5r^4] + 2Br^2 + 1] - (Br^2+1)(8AB^2Fr^2(5Br^2+3) + 1)] - (\beta+8\pi)B_g r^4 (Br^2+1)^2$$
$$\times (16AB^2Fr^2+1)^3] \tag{4.50}$$

$$p_t = \frac{r\left(Br^3+r\right)^2\left(16AB^2Fr^2+1\right)}{16(64\pi^2-\beta^2)(5Br^2+1)^2}\left[-\frac{16\beta(\beta+8\pi)B_g\left(5Br^2+1\right)^2}{r^3(Br^2+1)^2(16AB^2Fr^2+1)}+\alpha(\beta+8\pi)2^{n+3}(n-1)r\right.$$

$$\times(16AB^2Fr^2+1)\left(\frac{5Br^2+1}{r^2(Br^2+1)(16AB^2Fr^2+1)}\right)^{n+2}+\frac{\alpha B2^{n+3}nr^3}{5Br^2+1}$$

$$\times\left(\frac{5Br^2+1}{r^2(Br^2+1)(16AB^2Fr^2+1)}\right)^{n+2}\left(\beta\left(3-8ABF(Br^2+3)\right)+32\pi(4ABF(Br^2-1)+1)\right)$$

$$-\frac{\alpha 2^{n+3}(n-1)n\left(\beta\left(7Br^2+3\right)+16\pi\left(3Br^2+1\right)\right)}{(Br^3+r)^3(16AB^2Fr^2+1)^2}[160AB^4Fr^6]+128AB^3Fr^4$$

$$\left.+B^2(32AFr^2+5r^4)+2Br^2+1]\times\left(\frac{5Br^2+1}{r^2(Br^2+1)(16AB^2Fr^2+1)}\right)^n\right] \tag{4.51}$$

elde edilir. $\{A, B, F, \alpha\}$ sabitler kümesini değerlendirmek için (4.17) denklemi ile verilen iç uzay zaman ile (4.25) denklemi ile verilen dış geometriyi ilişkilendirmek gerekir. Bu ilişkilendirmeden elde edilen sistemi çözdükten sonra A, B ve F için (4.40) – (4.42) denklemlerinde verilen ifadelerin aynısını elde ederiz. $p_r(r = R) = 0$ koşulundan α'yı;

$$\alpha = \frac{(\beta+8\pi)B_g 2^{2-n}\left(\frac{1}{R^2}\right)^{-n-1}}{n(2M^2(n-3)+M(7-4n)R+2(n-1)R^2)} \tag{4.52}$$

şeklinde elde ederiz.

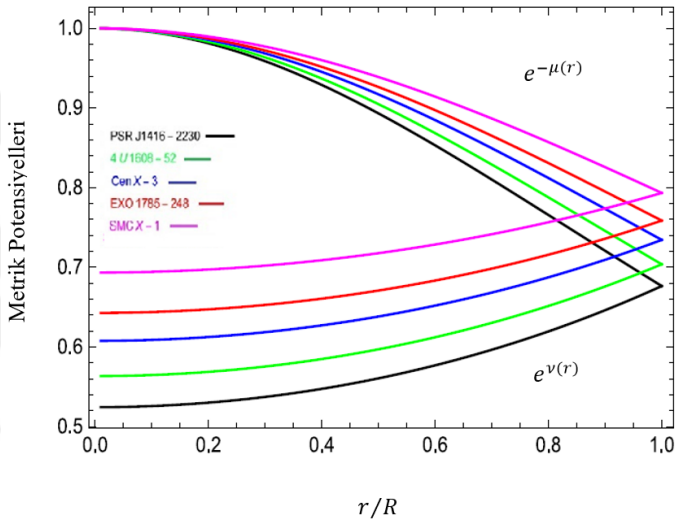
Yapılacak analizler için, A, B, F, α, ve β sabitlerinin Tablo 2'de verilmiş olan uygun değerleri seçilmektedir.

Tablo 4.2: Diagonal tetrad için n = 1 sabit değer durumuna karşı gelen farklı β değerleri.

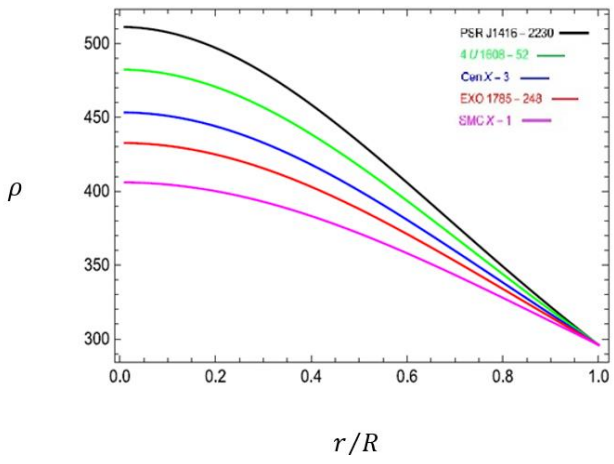
Yıldız İsmi	Gözlemlenen Kütle ($M_\odot$)	Öngörülen Yarıçap (km)	β	A	B	F	α	$\frac{p_{rc}}{\rho_c} < 1$
PSR J1416-2230	1.97	12.182	-9.52	0.5245	0.0009146	458.838	901119	0.140342
4 U 1608-52	1.74	11.751	-8.20	0.5635	0.0008512	466.278	970644	0.128798
Cen X-3	1.49	11.224	-6.90	0.6077	0.0007886	474.490	1.03694×10^6	0.115725
EXO 1785-248	1.3	10.775	-6.00	0.6428	0.0007439	481.148	1.08242×10^6	0.105329

SMC X-1	1.04	10.067	-4.84	0.6934	0.0006871	490.498	1.13869×10^6	0.0903399

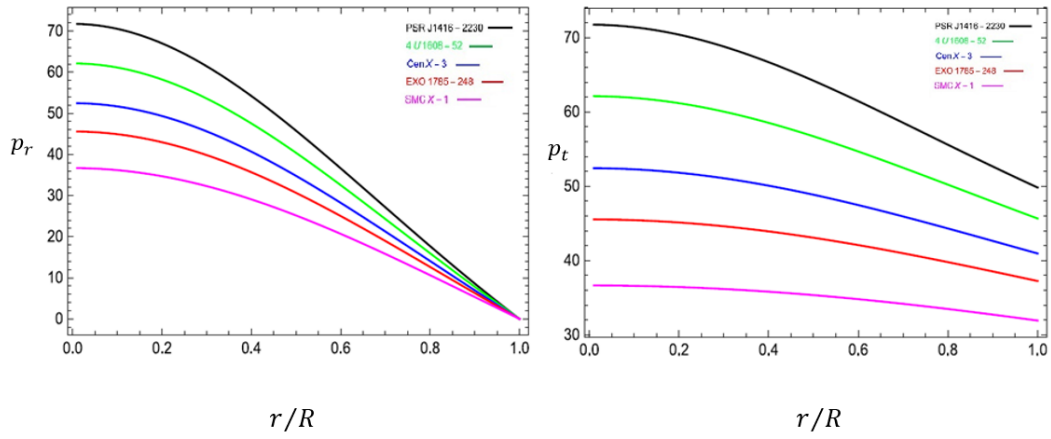
Diagonal tetradın çalışmayla uyumluluğunu sağlamak için (4.27) denklemini $n = 1$' e sabitleyip $f(T, \mathcal{T}) = \alpha T + \beta \mathcal{T}$'ye indirgeyerek elde edilen lineer modeli ele aldık. Off-diagonal tetrad aracılığıyla non-lineer gravitasyon yani $n = 2$ için fiziksel davranışların grafiksel gözlemlerini sunduğumuz gibi şimdi de diagonal tetrad aracılığıyla lineer gravitasyon yani $n = 1$ için aynı fiziksel davranışların grafiksel analizlerini vereceğiz:



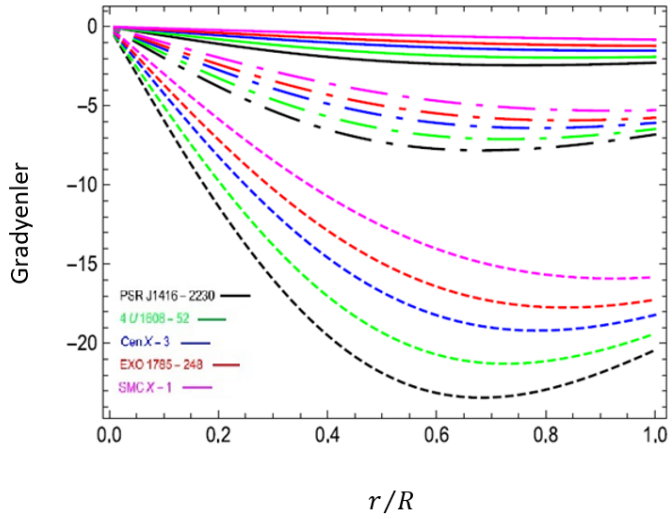
Şekil 4.15: Diagonal tetrad, $n = 1$ için r/R oranına karşılık gelen metrik potansiyelleri.



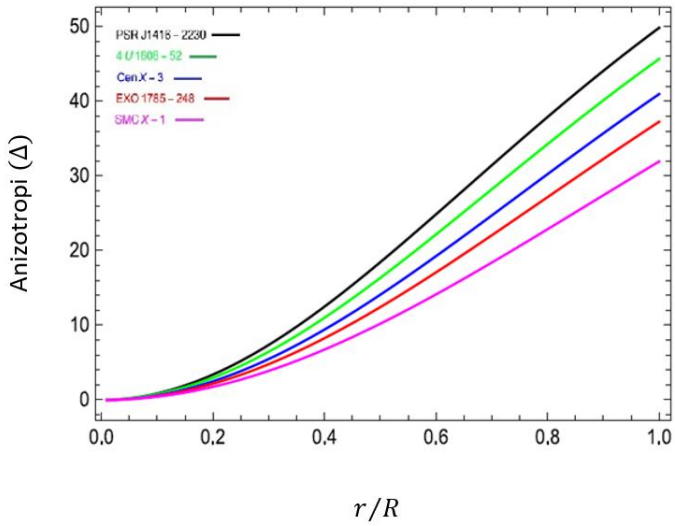
Şekil 4.16: Diagonal tetrad, $n = 1$ için r/R oranına karşılık gelen yoğunluk ρ.



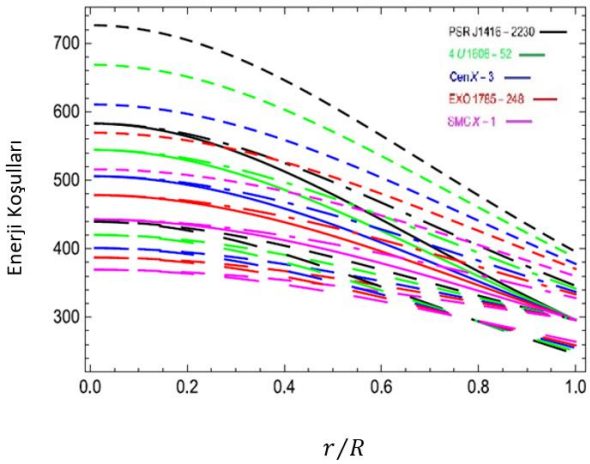
Şekil 4.17: Diagonal tetrad, $n = 1$ için r/R oranına karşılık gelen basıncın radyal (p_r) ve teğetsel (p_t) bileşenleri.



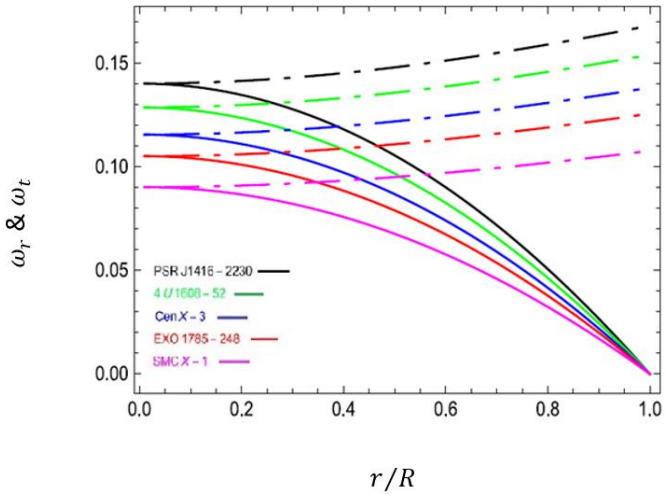
Şekil 4.18: Diagonal tetrad, $n = 1$ için r/R oranına karşılık gelen gradyanler.



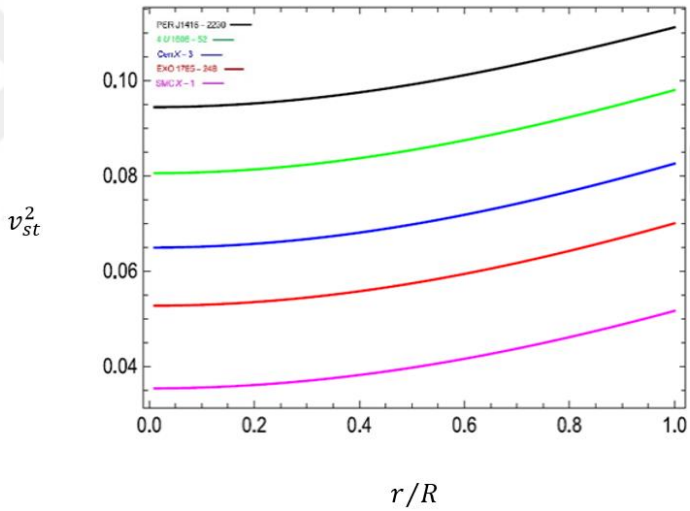
Şekil 4.19: Diagonal tetrad, $n = 1$ için r/R oranına karşılık gelen anizotropi.



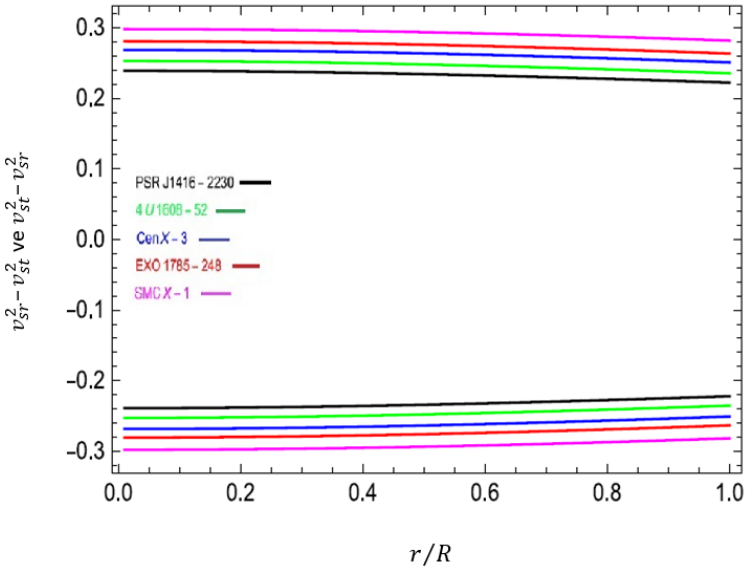
Şekil 4.20: Diagonal tetrad, $n = 1$ için r/R oranına karşılık gelen enerji koşulları.



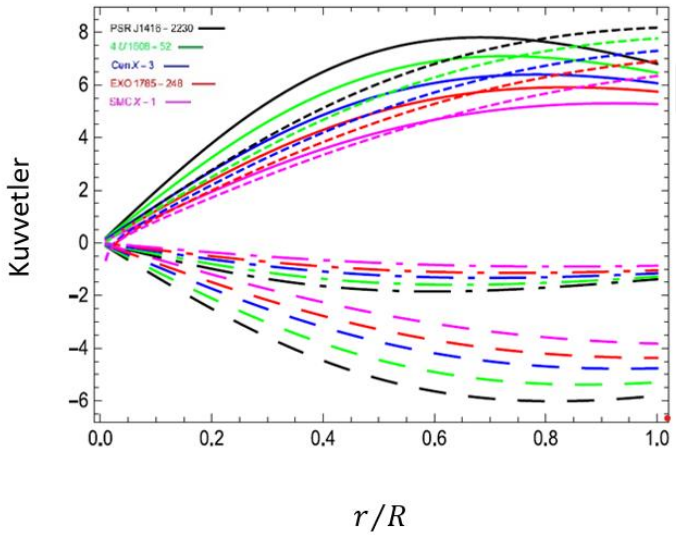
Şekil 4.21: Diagonal tetrad, $n = 1$ için r/R oranına karşılık gelen hâl denklem parametreleri.



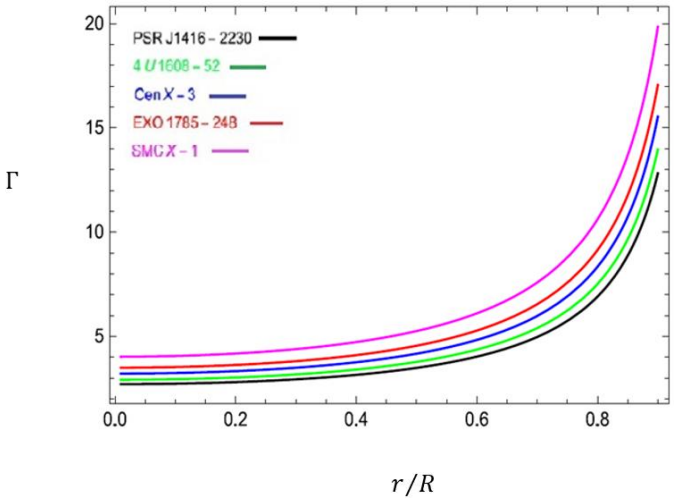
Şekil 4.22: Diagonal tetrad, $n = 1$ için r/R oranına karşılık gelen ses hızı parametreleri.



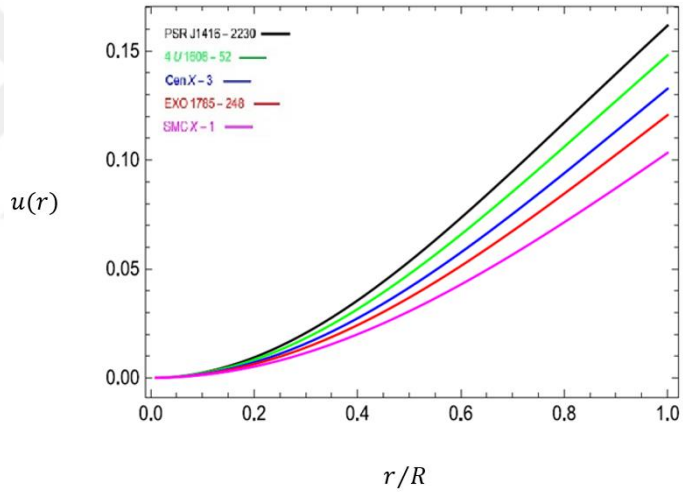
Şekil 4.23: Diagonal tetrad, $n = 1$ için r/R oranına karşılık gelen ses hızı parametreleri.



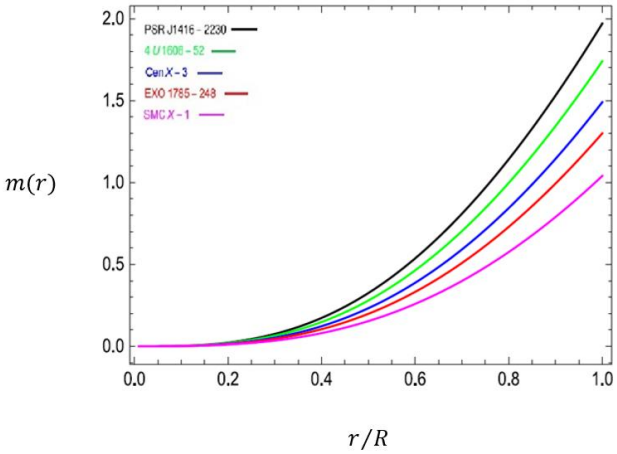
Şekil 4.24: Diagonal tetrad, $n = 1$ için r/R oranına karşılık gelen kuvvetler.



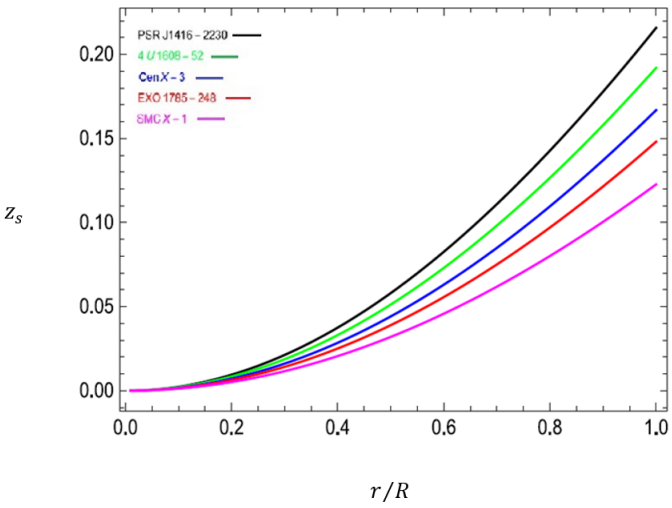
Şekil 4.25: Diagonal tetrad, $n = 1$ için r/R oranına karşılık gelen adyabatik indeks, Γ.



Şekil 4.26: Diagonal tetrad, $n = 1$ için r/R oranına karşılık gelen kompaktlık parametresi, $u(r)$.



Şekil 4.27: Diagonal tetrad, $n = 1$ için r/R oranına karşılık gelen kütle fonksiyonu, $m(r)$.



Şekil 4.28: Diagonal tetrad, $n = 1$ için r/R oranına karşılık gelen kırmızıya kayma parametresi, z_s.

Bu sonuçların anizotropik davranışı, 'non-lineer model $n = 2$' başlığı altında tartışıldığı gibi off-diagonal non-lineer durum için elde edilen sonuçlara çok benzerdir. Dolayısıyla, diagonal tetrad alan ve lineer model için tüm sonuçlar, ayrıntılı açıklaması verilen 'non-lineer model $n = 2$' bölümünde verilen 'Fiziksel Analiz' bölümünde yazılan ilgili davranışsal tepkiyi kabul etmektedir.

4.2. DEĞİŞTİRİLMİŞ TELEPARALEL GRAVİTASYON ÇERÇEVESİNDE YENİ BİR YILDIZ SINIFININ YAPISAL ÖZELLİKLERİ

Bu çalışmamızda da, $4U1538-52, J0437-4, 715, J0030+0451$ ve $4U1820-30$ kompakt nötron yıldız adaylarının oluşumunu araştırıyoruz. Metrik fonksiyonlar, enerji yoğunluğu, basıncın radyal ve teğetsel bileşenleri, anizotropi, gradyanler, hâl denklemi, ses hızları gibi parametreleri ve TOV kuvvetleri dengesi ile inceleyerek anizotropik yıldız nesnelerinin kararlılığını inceliyoruz. Torsiyona bağlı teorilerin tetrad formalizmini esas almasından dolayı bu çalışmada ise off-diagonal tetradları seçiyoruz. Kompakt yıldız nesnelerinin gravitasyona dayalı yapısının tam oluşumunu non-lineer gravitasyon modifikasyonu ile ayarlanabilen doğru tetrad formalizminin seçiminin kararlılık analizini detaylandırıyoruz.

Mevcut analizimizde, $f(T,\mathcal{T})$ değiştirilmiş gravitasyon aksiyonu:

$$s=\int dx^4 e\left\{\frac{1}{2\kappa^2}f(T,\mathcal{T})+L_m\right\} \tag{4.53}$$

şeklindedir. Burada L_m, Lagrange yoğunluğu ve f, torsiyon T ve enerji-momentum tansör izi $\mathcal{T}$'ye bağlı bir fonksiyondur. Ayrıca burada $e=det\left(e_a^i\right)=\sqrt{-g}$ ve $\kappa^2=\frac{8\pi G}{c^4}=1$ eşitliklerine sahiptir. Bu teorinin alan denklemleri, Lagrangiyeni ifade eden denklem (4.53)'den türetilmiştir ve

$$e_i{}^{\gamma}S_{\gamma}{}^{\mu\eta}f_{TT}\,\partial_\mu T+e_i{}^{\gamma}S_{\gamma}{}^{\mu\eta}f_{T\mathcal{T}}\,\partial_\mu\mathcal{T}+e^{-1}\,\partial_\mu\left(ee_i{}^{\gamma}S_{\gamma}{}^{\mu\eta}\right)f_T-e_\eta{}^{i}T^{\gamma}{}_{\mu i}S_{\gamma}{}^{\eta\mu}f_T-\frac{1}{4}e_\eta{}^{i}f+$$
$$f_T\omega^{\gamma}{}_{\eta\mu}S_{\gamma}{}^{\eta\mu}-\frac{f_{\mathcal{T}}}{2}\left(e_\eta{}^{i}T_i{}^{\eta}+p_te_\eta{}^{i}\right)=-4\pi e_\eta{}^{i}T_i{}^{\eta} \tag{4.54}$$

şeklindedir. Burada $T_i{}^{\eta}$, enerji-momentum tansörüdür ve f fonksiyonunun türevleri; $f_T=\frac{\partial f}{\partial T}$, $f_{TT}=\frac{\partial^2 f}{\partial T^2}$, $f_{\mathcal{T}}=\frac{\partial f}{\partial\mathcal{T}}$, ve $f_{T\mathcal{T}}=\frac{\partial^2 f}{\partial T\,\partial\mathcal{T}}$ şeklindedir. (4.54) denkleminde kullanılan diğer kavramlar; torsiyon, kontorsiyon ve süperpotansiyel ifadeleri sırası ile:

$$T^{\lambda}_{\mu\eta}=e_\vartheta{}^{\lambda}\left(\partial_\mu e^{\vartheta}{}_{\eta}-\partial_\eta e^{\vartheta}{}_{\mu}\right)+\omega^{\gamma}{}_{\eta\mu} \tag{4.55}$$

$$K^{\mu\eta}_{\lambda}=-\frac{1}{2}\left(T^{\mu\eta}{}_{\lambda}-T^{\mu\eta}{}_{\lambda}-T_{\lambda}{}^{\mu\eta}\right) \tag{4.56}$$

$$S_{\lambda}{}^{\mu\eta}=\frac{1}{2}\left(K^{\mu\eta}{}_{\lambda}+\delta^{\mu}{}_{\lambda}T^{\gamma\mu}{}_{\gamma}-\delta^{\eta}{}_{\lambda}T^{\gamma\mu}{}_{\gamma}\right) \tag{4.57}$$

şeklindedir. Torsiyon (T) skaleri ise:

$$T = T^{\lambda}{}_{\kappa\eta} S_{\lambda}{}^{\kappa\eta} \tag{4.58}$$

şeklindedir.

Bu çalışma kapsamında kompakt nesnelerin incelenmesinde kullanılacak olan küresel simetri:

$$ds^2 = e^{\nu(r)}dt^2 - e^{\lambda(r)}dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\phi^2 \tag{4.59}$$

metriği ile ifade edilmektedir. Burada $\nu(r)$ ve $\lambda(r)$ ayar bileşenleri, gravitasyonu tanımlayan radyal (r) fonksiyonlardır.

Alan denklemlerinin hesaplanmasında önemli rol oynayan tetradlar, eğri uzay-zaman ile düz uzay-zaman arasındaki bağlantıyı kuran yani eğri uzay-zamanın, düz uzay-zamana izdüşümünü betimleyen niceliklerdir. Tetrad formalizminin eşdeğerlik ilkesinden bağımsız olmasından dolayı kuantum etkileri araştırmak için de uygundur. Diagonal ve off-diagonal olmak üzere iki tür tetrad alanından bahsetmek mümkündür. Diagonal tetrad alanının kullanılmasının güneş sistemi üzerinde bazı sınırlamaları olduğundan giriş bölümünde bahsetmiştik. Dolayısıyla çalışmalarımızda sınırlamaların etkisini azaltmak için off-diagonal tetrad alanını ele almaktayız. Bu çalışmada ise ele alınacak off-diagonal tetrad:

$$e^{\eta}_{\gamma} = \begin{pmatrix} e^{\frac{\nu(r)}{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{\lambda(r)}{2}}\sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ 0 & e^{\frac{\lambda(r)}{2}}\sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ 0 & e^{\frac{\lambda(r)}{2}}\cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix} \tag{4.60}$$

şeklindedir. Burada, $e = e^{\nu(r)+\lambda(r)} r^2 \sin\theta$ olduğu gösterilebilir. Çalışmamızda $\omega^{\gamma}{}_{\eta\mu} = 0$ alarak, off-diagonal tetradı kullanıyoruz.

Anizotropik akışkan dağılımı için enerji-momentum tansörü:

$$T^{(m)}_{\nu\mu} = (\rho + p_t)u_\nu u_\mu - p_t g_{\nu\mu} + (p_r - p_t)v_\nu v_\mu \tag{4.61}$$

şeklindedir. Burada üst indis (m) madde dağılımı anlamına gelmekte olup, $u_\nu = e^{\frac{\mu}{2}}\delta_\nu^0$ ve $\nu_\nu = e^{\frac{\nu}{2}}\delta_\nu^1$ ve ρ, p_r ve p_t sırasıyla, enerji yoğunluğu, radyal ve teğetsel basınç fonksiyon formlarını temsil ederler. Ayrıca burada, $T_{\nu\mu}^{(m)} = [\rho, -p_r, -p_t, -p_t]$'dir.

Enerji-momentum tansörünün iz terimi:

$$\mathcal{T} = \delta_\mu^\nu T_\nu^\mu \tag{4.62}$$

şeklindedir.

(4.58) denkleminden hesaplanan torsiyon $T(r)$ ve 'r''ye göre türevi $T'(r)$ ifadesi:

$$T(r) = \frac{2e^{-\lambda(r)}\left(e^{\frac{\lambda(r)}{2}}-1\right)\left(e^{\frac{\lambda(r)}{2}}-rv'(r)-1\right)}{r^2} \tag{4.63}$$

$$\begin{aligned} T' = &-\frac{4e^{-\lambda(r)}\left(e^{\frac{\lambda(r)}{2}}-1\right)\left(e^{\frac{\lambda(r)}{2}}-rv'(r)-1\right)}{r^3} + \frac{e^{-\frac{\lambda(r)}{2}}\lambda'(r)\left(e^{\frac{\lambda(r)}{2}}-rv'(r)-1\right)}{r^2} \\ &-\frac{2e^{-\lambda(r)}\left(e^{\frac{\lambda(r)}{2}}-1\right)\lambda'(r)\left(e^{\frac{\lambda(r)}{2}}-rv'(r)-1\right)}{r^2} \\ &+\frac{1}{r^2}2e^{-\lambda(r)}\left(e^{\frac{\lambda(r)}{2}}-1\right)\left[\frac{1}{2}e^{\frac{\lambda(r)}{2}}\lambda'(r) - rv''(r) - v'(r)\right] \end{aligned} \tag{4.64}$$

şeklindedir.

$f(T,\mathcal{T})$ değiştirilmiş gravitasyonunda ρ, p_r ve p_t ifadeleri, (4.54), (4.59), (4.60) denklemleri ile verilen alan denklemlerinden:

$$\rho = -\frac{e^{-\frac{\lambda(r)}{2}}\left(e^{-\frac{\lambda(r)}{2}}-1\right)(f_{\mathrm{TT}}T' + f_{\mathrm{T}\mathcal{T}}\mathcal{T}')}{r} - \frac{1}{2}f_T\left(-\frac{e^{-\lambda(r)}\left(1-r\lambda'(r)\right)}{r^2} - \frac{1}{r^2} + \frac{T(r)}{2}\right) + \frac{f}{4} + \frac{1}{2}f_{\mathcal{T}} \times (p_t + \rho) \tag{4.65}$$

$$p_r = \left(\frac{e^{-\lambda(r)}(rv'(r)+1)}{r^2} - \frac{1}{r^2} + \frac{T(r)}{2}\right)\frac{f_T}{2} - \frac{f}{4} - \frac{1}{2}f_T(p_t - p_r) \tag{4.66}$$

$$p_t = \frac{1}{2}e^{-\lambda(r)}\left(-\frac{e^{\frac{\lambda(r)}{2}}}{r}+\frac{\nu'(r)}{2}+\frac{1}{r}\right)(f_{\mathrm{TT}}T'+f_{\mathrm{T}\mathcal{T}}\mathcal{T}')+\left[e^{-\lambda(r)}\left(\left(\frac{\nu'(r)}{4}+\frac{1}{2r}\right)(\nu'(r)-\lambda'(r))+\frac{\nu''(r)}{2}\right)+\frac{T(r)}{2}\right]\frac{f_T}{2}-\frac{f}{4} \quad (4.67)$$

şeklinde elde edilmektedir.

Alan denklemlerinin çözümleri esas olarak, metrik uzayın gravitasyonundan sorumlu bileşenlerinin fonksiyonlarına bağlıdır. Burada $\lambda(r)$ fonksiyonunu,

$$\lambda(r) = \left(\frac{cr^2}{R^2}+1\right)^2 \quad (4.68)$$

şeklinde ele alıyoruz. Burada c model parametresi, ve R ise yıldızın sınırındaki yarıçaptır. Potansiyel metrik (4.68), $c > 0$ iken yıldızın iç kısmında tekillik göstermediği için geçerli bir fiziksel kavramdır ve burada $0 \leq r \leq R$'dir. Dolayısıyla c parametresi gerçekçi kütleler sergileyen nötron yıldızlarını karakterize etmede önemli rol oynamaktadır.

Burada $\nu'(r)$'nin,

$$\nu'(r) = \frac{\frac{r^5 z}{R^6}+\frac{r^3 y}{R^4}+\frac{rx}{R^2}}{\frac{cr^2}{R^2}+1} \quad (4.69)$$

eşitliğine sahip olduğu başka bir metrik potansiyel $e^{\nu(r)}$ seçiyoruz. Burada x, y, z ve R sabit parametrelerdir. R bir yıldızın yarıçapını, r ise radyal koordinatı temsil etmektedir. x, y ve z sabitleri model parametrelerini temsil etmektedirler dolayısıyla uzaysal koordinatlarla bu sabitlerin bir ilişkisi olmadığını belirtmek gerekmektedir. (4.69) denkleminin integrasyonu,

$$e^{\nu(r)} = ke^{\left(\frac{r^2(cy-z)}{2c^2R^2}+\frac{r^4 z}{4cR^4}\right)\left(\frac{cr^2}{R^2}+1\right)^{\frac{c^2x-cy+z}{2c^3}}} \quad (4.70)$$

eşitliğini vermektedir.

Bu çalışmamızda da, $f(T,\mathcal{T})$ değiştirilmiş gravitasyon teorisinin daha genel bir hali olan;

$$f(T,\mathcal{T}) = \alpha T^n(r)+\beta\mathcal{T}(r)+\phi \quad (4.71)$$

formunu ele alıyoruz. Burada, ϕ evrenin genişleme fazlarını tanımlayan kozmolojik bir sabittir. Pozitif bir ϕ ile evrenin genişlemesi ivmelenirken, negatif bir ϕ genişlemenin yavaşlamasını,

durmasını ve tersine dönmesini ifade eder. Hesaplamalara göre, kozmolojik sabitin değeri $\phi = 2.036 \times 10^{-35} s^{-2}$ olmalıdır. Burada tekrar vurgulamak iyi olacaktır ki, (4.25) denklemi α, β ve n parametrelerinin seçimine bağlı olarak bazı genel torsiyon tabanlı teorilere indirgenebilir. Örneğin; $\beta = 0$ için farklı n seçimleri ile incelendiğinde $f(T)$ gravitasyonu, $\alpha = 1, n = 1, \phi = 0$ ve $\beta = 0$ seçiminde Genel Rölativite'nin Teleparalel Eşdeğeri'ne indirgenir. Bu çalışmamızda, $f(T, \mathcal{T})$ gravitasyonun non-lineer modelini ele alarak $n = 2$ seçimi ile inceleme yapıyoruz. Sonuçlar $n = 1$ için de iyi ve kabul edilebilirdir ancak n'nin diğer değerleri için sonuçlar kabul edilebilir aralık içinde yer almamaktadır. Ayrıca İz terimi, $T = \rho - p_r - 2p_t$ ekleyerek, torsiyon ile maddenin katkıları arasındaki minimal bağlantıyı incelemek mümkündür. Önceki çalışmalar; eğrilik ve torsiyon bileşenleri arasındaki minimal bağlantıyı gösteren $f(R, T) = R + \lambda T$ bağlamında kompakt yıldız modellerine odaklanmıştır (148, 151).

Mevcut çalışmamızda, evrenin ivmelenerek genişleme fazını incelemek için hesaplanan pozitif ϕ değerini ele alıyoruz. Denklem (4.63)-(4.67), (4.71)'i kullanarak ve Denklem (4.68), (4.70)'deki metrik bileşenlerini de işleme koyarak, ρ, p_r ve p_t ifadelerini;

$$\rho = -\frac{4\left(1-\frac{3\beta}{4}\right)}{8(-\beta^2+3\beta-2)r^4} \times \left[\left[-\frac{\alpha l_5(r) 2^{n+2}(n-1) n r^4 R^4}{(l_1(r)-1)(-cr^2R^4(l_1(r)-1)-R^6(l_1(r)-1)+r^6 z+r^4R^2 y+r^2R^4 x)^2}\right]\right] \times$$
$$[c^4r^8 + 4c^3r^6R^2 - c^2r^4R^4(4l_1(r) - 9) + cr^2[-r^4R^2y(l_1(r) - 2) -$$
$$r^2R^4x(2l_1(r) - 3)] - 2R^6(3l_1(r) - 4) + r^6z] - R^2(l_1(r) - 1)(-2r^6z - r^4R^2y +$$
$$2R^6)] + \frac{\alpha l_3(r) 2^n n r^2}{l_2^2(r) R^4 (cr^2+R^2)}[2l_2(r)R^4(cr^2 + R^2) - 4cr^2R^4 + r(l_1(r) - 1)(r^5z +$$
$$r^3R^2y + rR^4x)] + \alpha l_4(r)2^n r^4 + r^4\phi] + \beta r^2[\frac{\alpha l_3(r) 2^n n}{l_2^2(r)}\left(\frac{r^2(l_1(r)-2)(r^4z+r^2R^2y+R^4x)}{cr^2R^4+R^6} +\right.$$
$$\left.2(l_2(r) - 1)\right) + \alpha l_4(r)2^n r^2 + r^2\phi]] \qquad (4.72)$$

$$p_r = \frac{(l_2(r)-1)}{8(\beta^2-3\beta+2)(l_2(r)-1)\left(\frac{r^6z+r^4R^2y+r^2R^4x}{cr^2R^4+R^6}-l_2(r)+1\right)^2} \times \left[\left[2\left[\frac{\alpha\beta l_5(r)2^n(n-1)nr^2}{R^4(cr^2+R^2)^2}(c(3r^6z +\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.r^4R^2y - r^2R^4x) + 5r^4R^2z)\right]\right] + 3r^2R^4y + R^6x) + \alpha l_4(r)2^n[(\beta - 2)l_2^2(r) +$$
$$2l_2(r)(n - 1)(\beta + \beta n - 2)] - (2n - 1)(\beta + \beta n - 2)] + (\beta - 2)\,\phi(l_2(r) - 1)^2] -$$
$$\frac{\alpha\beta c l_5(r)2^{n+2}n(2n-3)r^2}{cr^2+R^2} \times \frac{r\left(r^5z+r^3R^2y+rR^4x\right)}{R^6\left(\frac{\alpha^2}{R^2}+1\right)}\Bigg| - \frac{\alpha\beta c l_4(r)2^{n+2}nr^2(l_2(r)(n-1)-2n+3)}{R^2\left(\frac{\alpha r^2}{R^2}+1\right)} +$$

$$\alpha l_4(r)2^n[-4\beta + 2(\beta - 2)]\Bigg| + \frac{\left(r^6 z + r^4 R^2 y + r^2 R^4 x\right)^2 \left(2(\beta-2)\phi(l_2(r)-1) - \alpha l_4(r) 2^n (2\beta + 2(\beta-2) l_2(r)(n-1) - 5\beta n + 8n - 4)\right)}{l_2^2(r) R^{12}} \tag{4.73}$$

$$p_t = \frac{1}{8(l_2(r)-1)^2 \left(-l_2(r) + \frac{zr^6 + R^2 yr^4 + R^4 xr^2}{R^6 + cr^2 R^4} + 1\right)^2 (\beta-2)(\beta-1)} \times \left[\frac{2^n l_5(r) n r^6 (l_1(r)-1)}{R^{12}(cr^2+R^2)^3} (zr^4 + R^2 yr^2 + R^4 x)^3 \alpha(\beta-1) - \frac{(l_2(r)-1)\left(zr^5 + R^2 yr^3 + R^4 xr\right)}{\left(\frac{cr^2}{R^2}+1\right) R^6} \right) \times [-2^{n+3} l_4(r) \alpha l_2^2(r) + 2^{n+3} l_4(r) n l_2^2(r) \alpha - 3(2^{n+1}) n l_4(r) \alpha\beta l_2^2(r) + 2^{n+2} l_4(r) \alpha\beta l_2^2(r)] - 8\phi l_2^2(r) + 4\beta\phi l_2^2(r) - 2^{n+3} n^2 l_4(r)\alpha - 2^{n+3} l_4(r)\alpha - 13(2^{n+1}) n l_2(r) l_4(r) \alpha 9(2^{n+1}) l_4(r) n\alpha + -2^{n+3} l_2(r) l_4(r) n^2 \alpha + 2^{n+4} l_2(r) l_4(r)\alpha + 3(2^{n+1}) l_4(r) n^2 \alpha\beta \& + 2^{n+2} l_4(r)\alpha\beta - 11(2^n) n l_4(r)\alpha\beta 2^{n+3} l_2(r) l_4(r)\alpha\beta - 32^{n+1} n^2 l_2(r) l_4(r)\alpha\beta + 15(2^n) l_2(r) l_4(r) n\alpha\beta + 16 l_2(r)\phi - 8 l_2(r)\beta\phi + 4\beta\phi - 8\phi - \frac{2^{n+2} c n r^2 l_4(r)\alpha(-4\beta n + 6n + l_2(r)(n(\beta-2)+1) - 3)}{\left(\frac{cr^2}{R^2}+1\right) R^2} - \frac{2^{n+1} n^2 r^2 l_5(r)}{R^4 (cr^2+R^2)^2} \times [xR^6 + 3r^2 yR^4 + 5r^4 zR^2 \quad + c(3zr^6 + R^2 yr^4 - r^2 R^4 x)]\alpha(\beta-1)[\mathrm{r} + \times \frac{\left(zr^6 + R^2 yr^4 + R^4 xr^2\right)^2}{l_2^2(r) R^{12}} [(l_2(r)-1)[2(l_2(r)-1)(\beta-2)\phi - 2^n l_4(r)\alpha(2(\beta-1)n^2 + + (9-6\beta)n] \& + 2(\beta-2) + l_2(r)(-2\beta + n(3\beta-5) + 4))\} - \frac{2^{n+2} c n r^2 (n(l_1(r)-2)+1) l_5(r)\alpha(\beta-1)}{cr^2+R^2} \& + (l_2(r)-1)^2 \left[\frac{2^{n+2} c l_5(r) n r^2 \alpha(2n(\beta-2)+\beta+2)}{cr^2+R^2} + 2\left[- \frac{2^n n l_5(r)\left(xR^6 + 3r^2 yR^4 + 5r^4 zR^2 + c\left(3zr^6 + R^2 yr^4 - r^2 R^4 x\right)\right)\alpha(n(\beta-2)+1) r^2}{R^4 (cr^2+R^2)^2} - 2^n l_4(r)\alpha\big(r(2n(\beta-1) - \beta + 2) l_2^2(r) - (2n^2 - 3n + 1)(\beta-2) + 2 l_2(r)(n - 1)^2(\beta-2)\big) + (l_2(r)-1)^2(\beta-2)\phi]]] \tag{4.74}$$

şeklinde elde ederiz.

4.2.1. Sınır Koşulları

Sınır yüzeyinde $r = R$'dir. Bilinmeyenlerin belirlenmesi için ise iç ve dış metriklerin eşleştirilmesi gerekir. Bu çalışmada Denklem (4.70)'deki gibi k'yı değerlendirmek için iç uzay-

zamanı (4.59), dış Schwarzschild uzay-zamanı (4.75) ile eşleştiriyoruz. Yani α'yı $p_r(r=R)=0$'da değerlendiriyoruz. Dış Schwarzschild metriği;

$$ds^2=\left(1-\frac{2M}{R}\right)dt^2-\left(1-\frac{2M}{R}\right)^{-1}dr^2-r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2) \tag{4.75}$$

şeklinde verilmektedir. (4.59) denklemini, (4.75) denklemi ile eşleştirerek;

$$\left(\frac{cr^2}{R^2}+1\right)^2=\left(1-\frac{2M}{R}\right)^{-1} \tag{4.76}$$

$$ke^{\left(\frac{r^2(cy-z)}{2c^2R^2}+\frac{r^4z}{4cR^4}\right)}\left(\frac{cr^2}{R^2}+1\right)^{\frac{c^2x-cy+z}{2c^3}}=1-\frac{2M}{R} \tag{4.77}$$

$$p_r(r=R)=0 \tag{4.78}$$

denklem sistemini elde ederiz.

(4.77) ve (4.78) denklemlerinin çözümleri k değerini;

$$k=e^{-\frac{2cy+cz-2z}{4c^2}}(c+1)^{-\frac{4c^3+c^2x-cy+z}{2c^3}} \tag{4.79}$$

ve (4.78) denklemi;

$$\alpha=\frac{(\beta-2)(L-1)2^{1-n}\phi(c(-L)+c-L+x+y+z+1)^2\left(\frac{(L-1)(c(L-1)+L-x-y-z-1)}{(c+1)^3R^2}\right)^{-n}}{N} \tag{4.80}$$

şeklindeki α ifadesini verir. Burada;

$$L=\sqrt{(1+c)^2}$$

ve

$$N=2c^4\big((\beta-2)(L-3)+2\beta n^2-4n\big)+2c^3[2(\beta-2)(2L-x-y-z-6)]\&+$$
$$8\beta n^2+n\big((\beta-2)x+(\beta-2)y+\beta z-2z-16\big]-2c^2[2\beta(4L-9)n^2]-n(-5\beta+$$
$$5\beta L+8L+3(\beta-2)x+3(\beta-2)y+3\beta z-6z-28-(\beta-2)]+(9L-6x-$$
$$6y-6z-19)]-c[4\beta n^2((2L-3)x+(L-2)y+6L-z-8)]+n(8\beta-8\beta L+$$
$$x(\beta(3L-1)-20L+28)+y(-5\beta+7\beta L-20L+28)+11\beta Lz-20Lz-32L-$$
$$9\beta z+28z+48)-4(\beta-2)(2(L-2)x+2(L-2)y)\ +2Lz+5L-4z-7)]+$$

$$4\beta(L-1)n^2 \times (y+2z-2) - n[-2\beta+2\beta L+x^2] \times (\beta(2L-5)-4L+8) + x(-13\beta+11\beta L+2y(\beta(2L-5)-4L+8)) + 2z(-5\beta+2\beta L-4L+8) - 20L + 20) + y^2(\beta(2L-5)-4L+8) + y \times (\beta(15L-17)+2z[\beta(2L-5)-4L+8] - 20L+20) + 2\beta L z^2 - 4L + 19\beta L z - 20Lz - 16L - 5\beta z^2 + 8z^2 - 21\beta z + 20z + 16 + 2(\beta-2)\& \times (L-1)(x+y+z+2)^2$$

dir.

4.2.2. Off-Diagonal Tetrad Arka Planında Non-Lineer Model $(n = 2)$ için Fiziksel Analiz

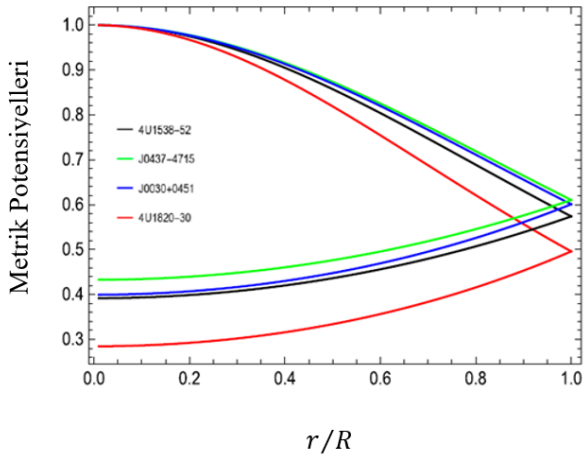
Kompakt nötron yıldız adaylarının konfigürasyonlarının fiziksel geçerliliğini doğrulamak önem arz etmektedir. Bir kompakt yıldızın fiziksel varlığı için enerji pozitif olmalı, merkezde maksimum, sınırda ise minimum değere sahip, azalan bir eğilim göstermelidir. Gravitasyon etkileri esas olarak metrik fonksiyona bağlı olduğundan, kompakt nesnelerin incelenmesi için analizi yapılan metrik fonksiyonların davranışının pozitif ve düzgün olması beklenmektedir.

Aşağıdaki analizler için c, x, y, z, ϕ ve β sabitlerinin Tablo 4.3'te verilmiş olan uygun değerleri seçilmektedir.

Tablo 4.3: Off-diagonal tetrad için n = 2, y = −0.04, z = −0.0009, ϕ = 2.036 × 10−35 ve β = −30 sabit değer durumlarına karşılık gelen farklı c ve β değerleri.

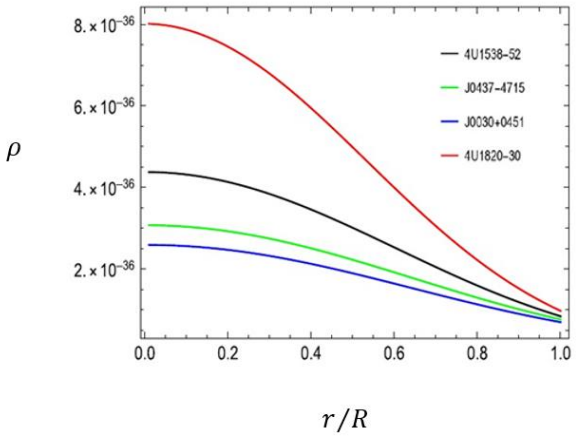
Yıldız İsmi	Gözlemlenen Kütle ($M_\odot$)	Öngörülen Yarıçap (km)	c	x	k	α
4U1538-52	0.827	10.060	0.32	0.9	0.391689	-1.22734×10^{-30}
J0437-4715	1.440	13.972	0.28	0.8	0.432662	-4.01855×10^{-30}
J0030+0451	1.5	12.350	0.29	0.95	0.399381	-1.55632×10^{-30}
4U1820-30	1.460	10.602	0.42	1.35	0.284537	-1.34009×10^{-30}

- Şekil 4.29'dan da görüldüğü üzere, $e^{\lambda(r)} = 1$ (merkezde) ve $e^{\nu(r)} > 0$ (merkezde), tüm yıldız sisteminin iç kısmında pozitif ve düzenli davranış göstermektedir.



Şekil 4.29: Off-diagonal tetrad, $n = 2$ için r/R oranına karşılık gelen metrik potansiyelleri.

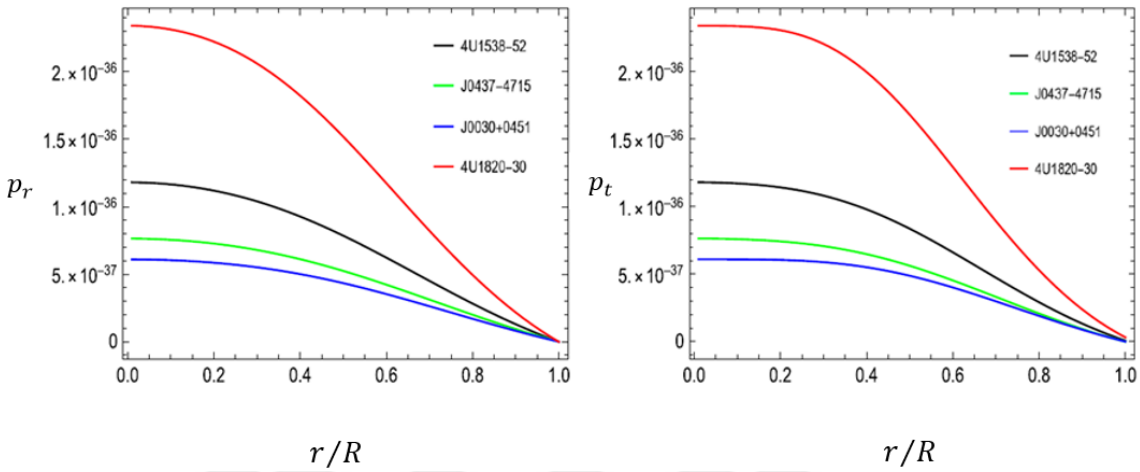
- Şekil 4.30'da, enerji yoğunluğu ρ'nun merkezde pozitif ve maksimum fakat sınırda minimum değere sahip davranışı ile madde dağılımının geçerliliği görülmektedir.



Şekil 4.30: Off-diagonal tetrad, $n = 2$ için r/R oranına karşılık gelen enerji yoğunluğu ρ.

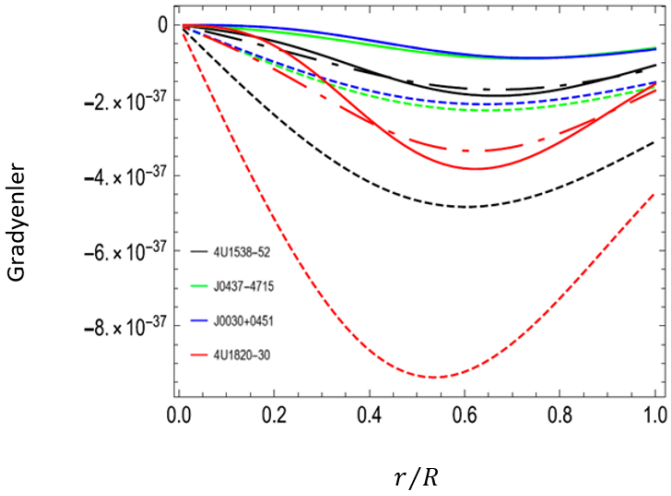
- Bir yıldız yapısının geçerliliğini değerlendirirken diğer bir kritik öneme sahip parametre de basınç bileşenleridir. Yoğunluk parametresi için beklenen eğilimin, basınç profilleri dağılımında da görülmesi, yani merkezde pozitif ve maksimum fakat yıldız sistemi boyunca azalan bir yayılım ile sınırda minimum değere sahip bir davranış göstermesi

beklenmektedir. Buna ek olarak, $p_r|_{r=R} = 0$ olmalıdır, çünkü aksi taktirde, p_t ve p_r bileşenleri pozitif kalır ve $p_t > p_r$ olur. Bu bilgiler doğrultusunda Şekil 4.31'de görüldüğü üzere, basınç profillerinin beklenen davranışı gösterdiği, ele aldığımız yıldız modellerinin fiziksel varlığının gerçekliği görülmektedir.



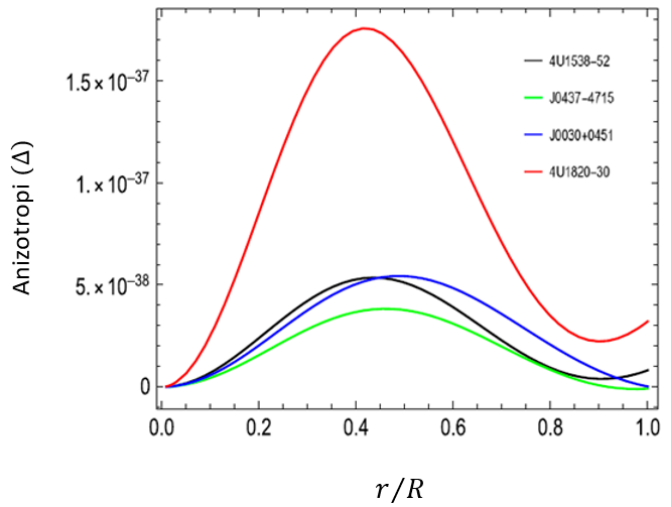
Şekil 4.31: Off-diagonal tetrad, $n = 2$ için r/R oranına karşılık gelen basıncın radyal (p_r) ve teğetsel (p_t) bileşenleri.

- Yıldız yapısının kompakt olması için, gradyanlerin merkezden yani sıfırdan başlayarak sınıra kadar negatif bir artış eğilimi sergilemesi beklenmektedir. Şekil 4.32'de, analizimizde yoğunluk, radyal basınç ve teğet basıncın tüm türevlerinin negatif olduğu; $\frac{d\rho}{dr}|_{(0<r\leq R)} \leq 0, \frac{dp_r}{dr}|_{(0<r\leq R)} \leq 0, \frac{dp_t}{dr}|_{(0<r\leq R)} \leq 0$ ve azalan bir eğilim sergilediği görülmektedir.



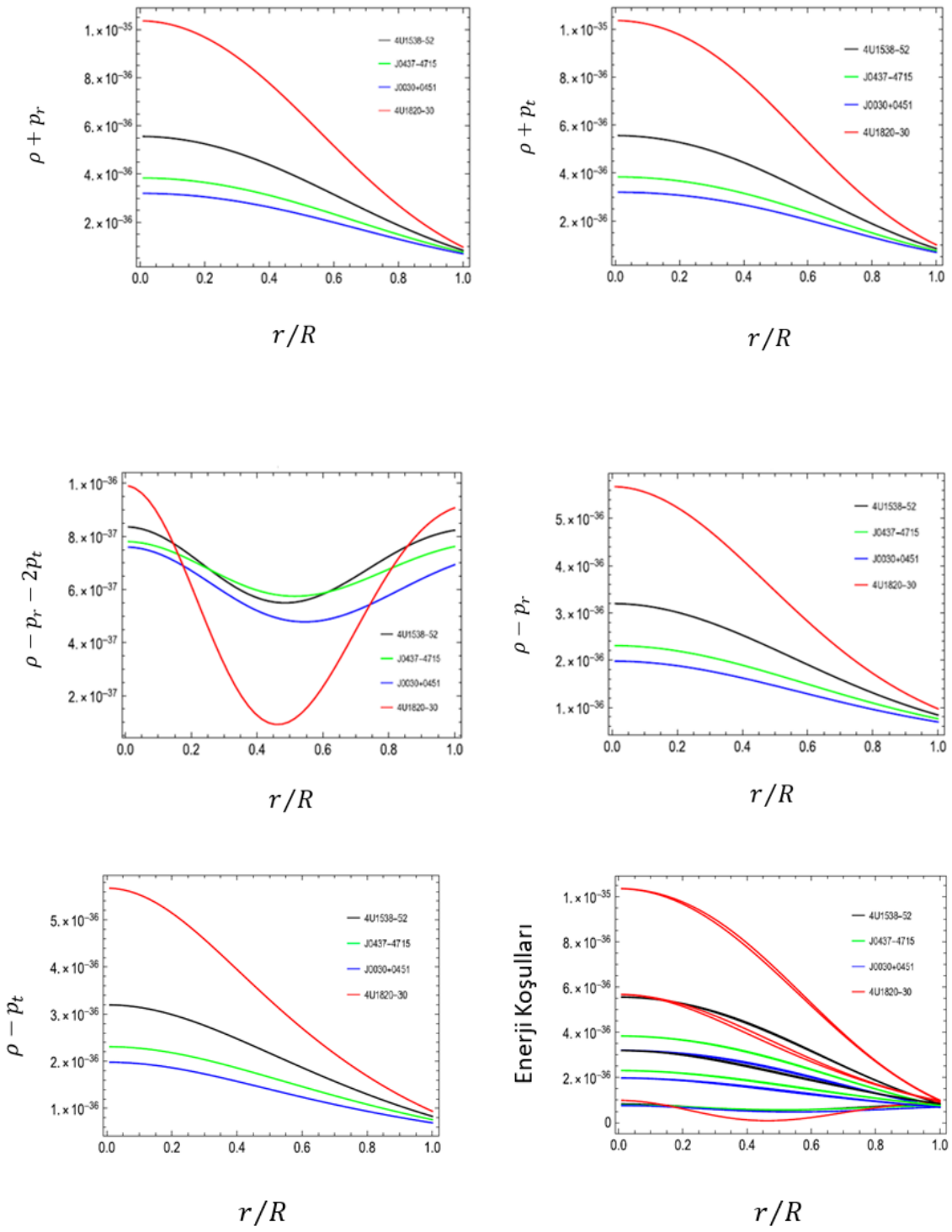
Şekil 4.32: Off-diagonal tetrad, $n = 2$ için r/R oranına karşılık gelen gradyanler.

- Anizotropi parametresinin ele alınan kompakt nötron yıldız adaylarının kararlı olduğunu gösteren, merkezde sıfırdan başlayıp en yüksek değerine ulaşması ve sınıra doğru azalarak sıfıra yaklaşan ve pozitif kalan davranışı Şekil 4.33'te görülmektedir.



Şekil 4.33: Off-diagonal tetrad, $n = 2$ için r/R oranına karşılık gelen anizotropi parametresi, Δ.

- Şekil 4.34'te gösterildiği gibi, (2.47.a)-(2.47.d) eşitliklerinde verilen enerji koşulları, $f(T, \mathcal{T})$ gravitasyon etkileri altında sağlanmaktadır. Bu ise, mevcut çalışmada ele alınan nötron yıldız adaylarındaki kompakt maddenin gerçek oluşunu göstermektedir.

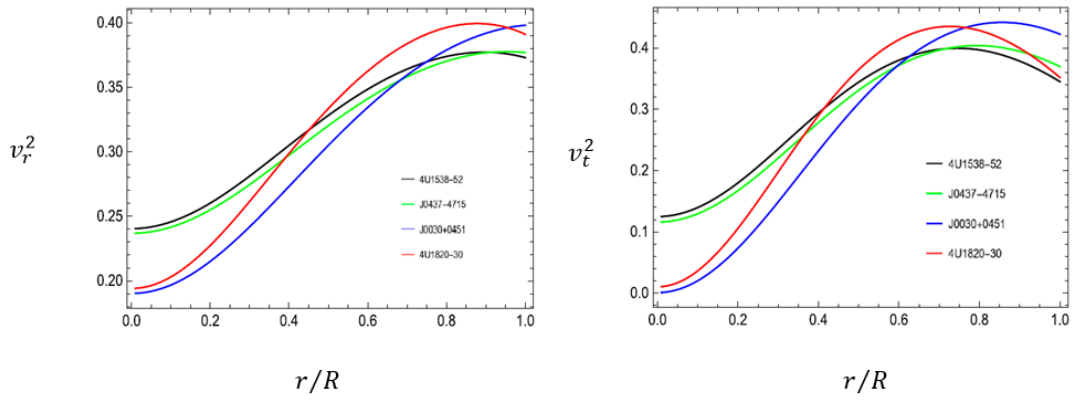


Şekil 4.34: Off-diagonal tetrad, $n = 2$ için r/R oranına karşılık gelen enerji koşulları.

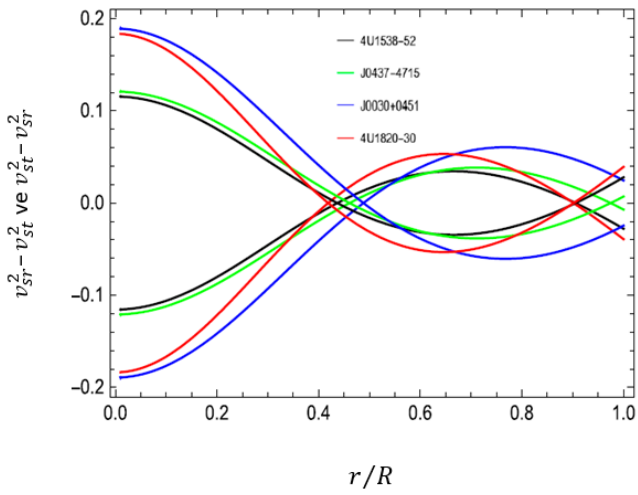
- Ses hızları v_r^2 ve v_t^2, kompakt yıldız sisteminin kararlılığını incelemek için önem arz eden diğer iki parametredir. Ses hızlarının ifadeleri;

$$v_r^2 = \frac{dp_r}{d\rho} \quad \text{ve} \quad v_t^2 = \frac{dp_t}{d\rho}$$

şeklindedir. Kararlılığı Herrera (162), iki kısıtlama ile tanımlamıştır; $0 < v_r^2$ ve $v_t^2 < 1$ her iki ses hızının ışık hızından küçük olması gerektiğini söylemiştir. Abreu ve diğ. (175), tarafından tanımlanan kararlılık bölgesine göre ise, $v_r^2 > v_t^2$ olan ve $v_r^2 - v_t^2$ ifadesinde işaret değişikliği olmayan bölge kararlıdır. Daha sonra ise Andreasson (170) bu kriteri, $0 < |v_t^2 - v_r^2| < 1$ olarak genelleştirmiş ve bu bölgenin kararlı olduğunu belirtmiştir. Mevcut çalışmamızda ele alınan kompakt nötron yıldızı modellerinde Şekil 4.35 ve 4.36'da da görüldüğü üzere, tüm kararlılık sınırlarının doğrulandığı görülmektedir.

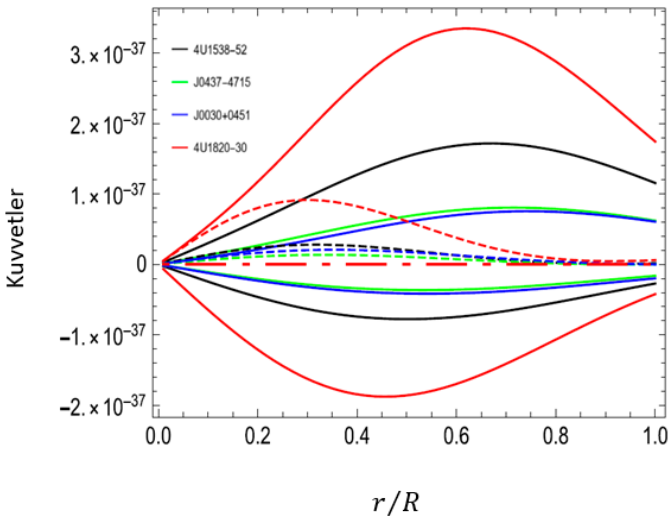


Şekil 4.35: Off-diagonal tetrad, $n = 2$ için r/R oranına karşılık gelen ses hızı parametreleri.



Şekil 4.36: Off-diagonal tetrad, $n = 2$ için r/R oranına karşılık gelen ses hızı parametreleri.

- TOV kuvvetleri; birbirlerinin etkilerini sıfırlayarak net etkiyi sıfıra eşit hale getirdiğinden, sistemin gravitasyon kuvvetleri sırasında tekil bir noktaya çökmekten kurtulmasını sağlayarak kararlılığını tanımlar. Çalışmamızda TOV kuvvetlerinin dengeleyici davranışı Şekil 4.37'de görülmektedir.

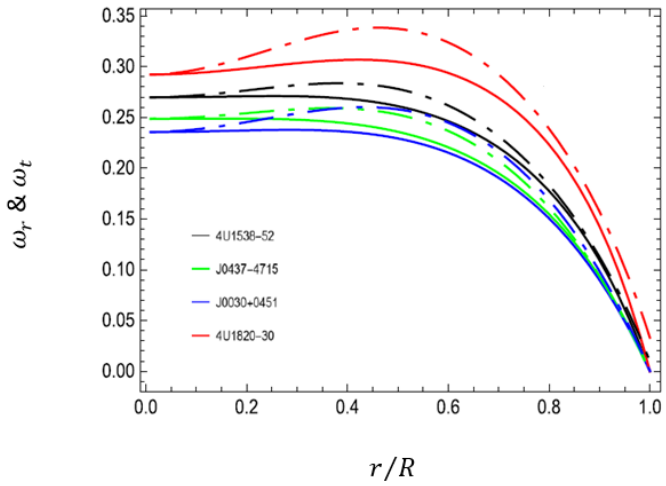


Şekil 4.37: Off-diagonal tetrad, $n = 2$ için r/R oranına karşılık gelen kuvvetler; F_h (Düz-Pozitif), F_g (Düz-Negatif), F_a (Noktalı), F_e (Nokta-Kesikli).

- Yıldız gövdesinin madde bileşeni, bilinen anizotropik madde ya da karanlık madde olabilir. Madde bileşeninin doğasının bilinen anizotropik olmasını tartışmak adına durum denklemi bileşenleri için $0 \leq w_r < 1$ ve $0 < w_t < 1$ sınırlarını göz önüne almak gerekir. Eğer kompakt yıldız bilinen anizotropik maddeden oluşuyorsa, elde edilen sonuçlar bu kararlılık limitlerini sağlayacaktır. Hâl denklemi için tanımlanan sınırların ihlali, egzotik madde veya karanlık maddenin varlığını potansiyel olarak göstermektedir.

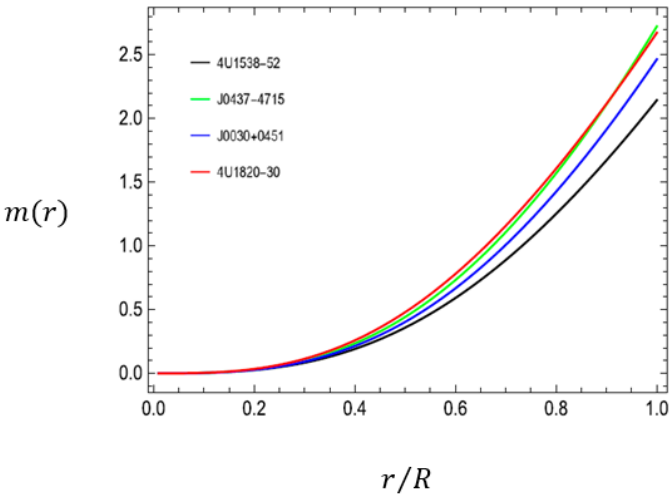
$$\omega_r = \frac{p_r}{\rho} \quad \& \quad \omega_t = \frac{p_t}{\rho}$$

şeklinde tanımlanan durum denklem parametrelerinin, Şekil 4.38'de gösterdikleri davranışlardan da görüldüğü üzere, incelemekte olduğumuz yıldız nesnelerinin bilinen bir madde bileşimine sahip olduğunu ortaya koymaktadır.

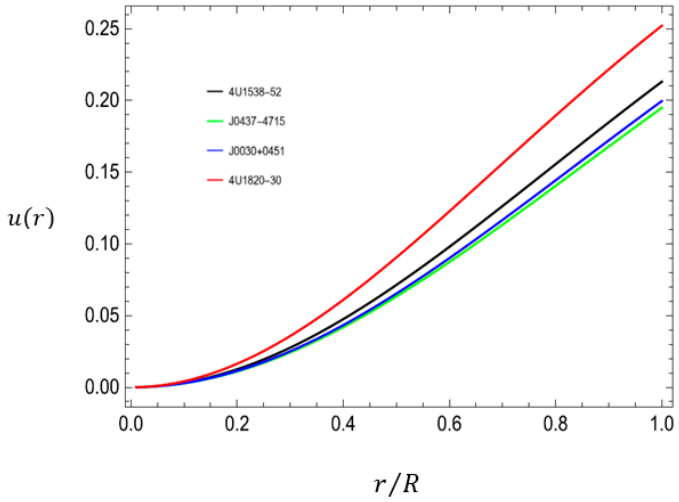


Şekil 4.38: Off-diagonal tetrad, $n = 2$ için r/R oranına karşılık gelen durum denklem parametreleri; ω_t (Nokta-Kesikli), ω_r (Düz).

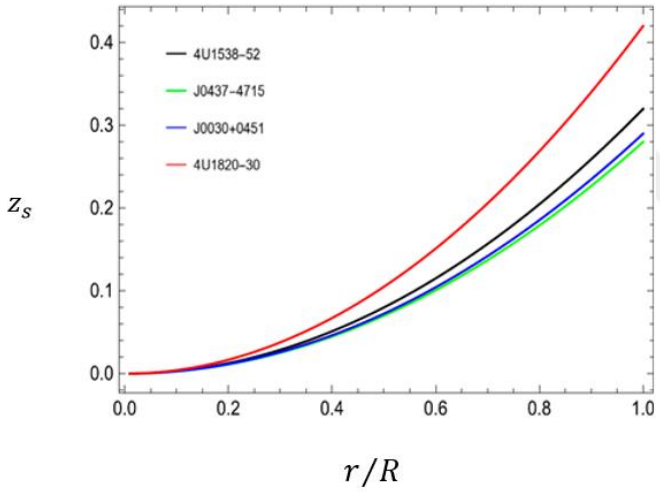
- Yıldız nesnesinin toplam kütlesini temsil eden (2.48) denklemi ile verilen kütle fonksiyonu $m(r)$'nin davranışı Şekil 4.39'da, (2.49) denklemi ile verilen kompaktlık parametresi $u(r)$'nin davranışı Şekil 4.40'da, (2.51) denklemi ile verilen kırmızıya kayma parametresi z_s'nin davranışı Şekil 4.41'de verilmektedir.



Şekil 4.39: Off-diagonal tetrad, $n = 2$ için r/R oranına karşılık gelen kütle fonksiyonu, $m(r)$.



Şekil 4.40: Off-diagonal tetrad, $n = 2$ için r/R oranına karşılık gelen kompaktlık parametresi, $u(r)$.



Şekil 4.41: Off-diagonal tetrad, $n = 2$ için r/R oranına karşılık gelen kırmızıya kayma parametresi, z_s.

5) TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tezde, T'nin torsiyon (burulma) ve $\mathcal{T}$'nin enerji-momentum tansörünün izi olduğu $f(T,\mathcal{T})$ değiştirilmiş gravitasyon teorisinde, gravitasyon etkileri açısından kompakt nötron yıldız adaylarından bazıları ve bunları tanımlayan küresel simetrik, anizotropik çözümler incelenmiş, $f(T,\mathcal{T})$ değiştirilmiş gravitasyon teorisinin alan denklemleri tetrad formalizmi çerçevesinde ele alınmış ve $f(T,\mathcal{T})$ değiştirilmiş gravitasyon teorisinin lineer ve non-lineer modelleri için tetrad alanların eşleşmesi araştırılmıştır.

Bu kapsamda, analizlerimiz $f(T,\mathcal{T})$ fonksiyonunun iki farklı fonksiyonel şekli için ayrı ayrı gerçekleştirilmiştir. Her bir fonksiyon için, farklı kompakt nötron yıldız adayları üzerine çalışılmıştır. İki ayrı çalışma için elde edilen sonuçlar aşağıda özetlenmiştir:

İlk çalışmamız kapsamında, $PSRJ1416-2230, 4U1608-52, CenX-3, EXO1785-248$ ve $SMCX-1$ kompakt nötron yıldız adaylarının gövdesi içerisindeki kuark maddesinin olası varlığı ile başa çıkabilmek adına MIT bag hâl denklemlerini de analizimize dahil ettik. Adler-Finch-Skea geometrisi, küresel simetrik uzay-zaman geometrisi diagonal ve off-diagonal tetrad alanlarının seçimini desteklemek amacıyla kabul edilebilir sonuçları elde etmek amacı ile kullanılmıştır. Bu çalışmada, tetrad alanların fiziksel uygunluğunu göstermek ve MIT bag modeli denklemi $p_r = \frac{1}{3}(\rho - 4B_G)$'nin dahil edildiği, olası kuark madde varlığında kompakt nesnelerin anizotropik etkisini ifade etmek için $f(T,\mathcal{T})$ değiştirilmiş gravitasyonun arka planında gömülü Class-I Karmarkar koşulunu, Adler-Finch-Skea uzay-zamanını kullandık. Bunun için, α, β ve n sabitler olmak üzere, $f(T,\mathcal{T})$ fonksiyonunun fonksiyonel şeklini $f(T,\mathcal{T}) = \alpha T^n(r) + \beta\mathcal{T}(r)$ biçiminde seçtik. Fonksiyonun bu seçiminde, n değerinin, $n = 1$ ve $n \neq 1$ şeklinde alınmasıyla, teorinin lineer ve non-lineer modifikasyona kolayca indirgenebilir olması rol oynamıştır. Buna göre ilk çalışmada;

- non-lineer gravitasyon, yani $n = 2$ seçimi için off-diagonal tetrad aracılığıyla
- lineer gravitasyon yani, $n = 1$ seçimi için diagonal tetrad aracılığıyla

Class-I Karmarkar koşulu altında Adler-Finch-Skea uzay-zamanı arka planında yukarıda bahsedilen kompakt yıldızların anizotropik doğasını ayrıntılı bir biçimde inceledik. Off-diagonal tetrad durumunda non-lineer durum için en iyi çözümü veren $n = 2$ değerini aldık. n $(n > 2)$'nin diğer değerlerinden elde edilen sonuçlar iyi bir davranış sergilemeyen, uygun

olmayan sonuçlar olduğundan bu tez kapsamında bu durumlara yer verilmemiştir. Geleneksel bağlantı koşulları, sabit parametrelerin basitleştirilmiş değerlerinin Tablo 4.1 ve Tablo 4.2'de gösterildiği gibi, iç küresel ve simetrik uzay-zamanı dış Schwarzschild uzay-zamanı ile eşleştirerek kullanılmıştır.

Teorik sonuçlarla iyi uyum sağlayan non-lineer modele sahip off-diagonal tetradın davranışı Şekil 4.1-4.14 ile lineer modele sahip diagonal tetradın davranışı Şekil 4.15-4.27' de sunulmaktadır. Her iki durumda da elde edilen sonuçlar benzerdir. Sonuçlarımız şu şekilde özetlenebilir:

- Şekil 4.1-4.14'ten off-diagonal tetradın non-lineer modelle iyi bir şekilde eşleştiği yani araştırılan tüm özellikler için sonuçların kabul edilebilir aralığına denk düştüğü görülmektedir. Tüm parametrelerin anizotropik davranışı bu analize tam uymaktadır. Metrik potansiyellerin davranışı düzgün olarak gözlenmektedir, yani $r \to 0$ ve $e^{\nu} > 0$ olduğunda gömülü Class-I uzay-zaman gereklilikleri ile $e^{\nu(r)} = A$ ve $e^{\mu} = 1$'dir. ρ, p_r ve p_t ifadeleri, yıldız konfigürasyonları içerisinde gerekli davranışa uygundur. Anizotropi parametresi Δ, merkezden başlayıp sınıra doğru, düzgün bir davranış göstermektedir. Gradyenler, merkezden sınıra doğru negatif davranışa sahiptir. Enerji koşullarındaki eşitsizlikler, yıldız konfigürasyonları boyunca olumlu davranış göstermektedir. Hâl denklem parametresi, ses hızı ve nedensellik sınırları da gerekli kriterleri karşılamaktadır. Aynı zamanda TOV kuvvetleri yıldız sisteminin kararlılığını da sağlamaktadır. Adyabatik indeks, kütle fonksiyonu, kompaktlaştırma ve kırmızıya kayma fonksiyonları da beklenen davranışı göstermektedir.
- Şekil 4.15-4.28'den diagonal tetradın lineer durumunda araştırılan tüm özellikler için sonuçların kabul edilebilir aralığına denk düştüğü görülmektedir. Gradyenler merkezden negatif bir değerle yayılmaya başlar ve daha sonra sınırda sıfıra yaklaşır. Anizotropi parametresi Δ, merkezde sıfırdan başlayıp r/R oranı arttıkça değerinde artış görülmekte ve daha sonra neredeyse tutarlı bir şekilde yayılmaktadır. Diğer tüm parametreler düzenli davranış göstermektedir.

Sonuç olarak, çalışmamızda araştırmak üzere ele aldığımız yıldız konfigürasyonları için her iki tetrad alanını da kullandık. Elde edilen sonuçların, daha önce belirtilen kısıtlamalar altında

$f(T,\mathcal{T})$ değiştirilmiş gravitasyon teorisindeki Karmarkar koşulu çerçevesinde fiziksel olarak kabul edilebilir olduklarını gösterdik.

Diğer çalışmamızda ise nötron yıldız adayları olan $\mathrm{U1538-52}$, $\mathrm{J0437-4,715}$, $\mathrm{J0030+0451}$ ve $\mathrm{4U1820-30}$ kompakt nötron yıldız adaylarının gövdesi içerisindeki kuark maddesinin olası varlığı ile başa çıkabilmek için bir önceki modelde de olduğu gibi MIT bag hâl denklemini analizimize dahil ettik.

Yıldız nesnelerinin incelenmesinde iç geometri potansiyel bileşeninin önemli olduğunu belirtmek gerekir. Bu çalışmada, $\lambda(r)=\left(\frac{cr^2}{R^2}+1\right)^2$ fonksiyonunu tanımlayıcı bir fonksiyon olarak kullandık. Burada c'nin rolü yıldız yapısını modellemede kritiktir. Mevcut çalışmada $f(T,\mathcal{T})=\alpha T^n(r)+\beta\mathcal{T}(r)+\phi$ fonksiyonu kullanılarak çalışmalar bir önceki modelde ele alınan fonksiyona göre daha geniş bir spektruma genelleştirilmiştir. Burada, $\alpha=n=1$ ve $\beta=\phi=0$ tercihi bizi orijinal teleparalel gravitasyona götürürken, $\alpha\neq 0{,}1$ ve $\beta=0$ seçimi bizi $f(T)$ gravitasyona götürür. Öte yandan $\alpha\neq 0$ ve $\beta\neq 0$ seçimi torsiyon ve enerji-momentum tansörünün izi arasındaki mevcut bağlantıyı korur. Bu analizimizde, off-diagonal tetrad alanı çerçevesinde, $f(T,\mathcal{T})=\alpha T^n(r)+\beta\mathcal{T}(r)+\phi$ fonksiyonunda $n=2$ seçimi yaparak, yani $f(T,\mathcal{T})$ değiştirilmiş gravitasyonun kuadratik modeli arka planında, kompakt nesnelerin özelliklerini ayrıntılı olarak ele aldık. Bu çerçevede, alan denklemleri, küresel simetrik uzay-zaman kullanılarak hesaplanmış; TOV denkleminin, hâl denkleminin, metrik potansiyellerinin ve ayrıca kompakt nesnelerin kütle fonksiyonu, kırmızıya kayma ve kompaktlaşma gibi özelliklerinin davranışları incelenmiştir.

Geleneksel bağlantı koşulları, sabit parametrelerin basitleştirilmiş değerlerinin Tablo 4.3'te gösterildiği gibi, iç küresel ve simetrik uzay-zaman, dış Schwarzschild uzay-zaman ile eşleştirilerek kullanılmıştır. Elde ettiğimiz sonuçları şöyle özetleyebiliriz:

- Metriğin bileşenleri $e^{\mu(r)}$ ve $e^{\lambda(r)}$, Şekil 4.29'da görüldüğü üzere düzenli pozitif davranış sergilemektedir.
- Enerji yoğunluğu ρ, Şekil 4.30'da görüldüğü üzere, merkezde maksimum değeri ve sınırda minimum değeri göstererek fiziksel olarak kabul edilebilir pozitif davranış sergilemektedir.

- Basınç profillerinin davranışı, Şekil 4.31'de görüldüğü üzere, maksimum değeri merkezde ve minimum değeri sınırda olmak üzere anizotropik yapıya sahip kompakt nesnelerin doğasına uygun bir davranış sergilemektedir.
- Gradyen profilleri Şekil 4.32'de görüldüğü üzere, sıfırdan negatif artan bir değere doğru değişerek, $\frac{d\rho}{dr}|_{(0<r\leq R)} \leq 0, \frac{dp_r}{dr}|_{(0<r\leq R)} \leq 0, \frac{dp_t}{dr}|_{(0<r\leq R)} \leq 0$ sınır koşulunu doğrulamakta ve kompakt yıldız sisteminin oluşumunu göstermektedir.
- Şekil 4.33'te anizotropi Δ'nın pozitif davranışı görülmektedir. Pozitif anizotropi itici kuvvet $\Delta \geqslant 0$, içe doğru olan gravitasyon kuvvetine karşı koyarak sistemin kararlılığını sağlamaktadır.
- Yıldız siteminin pozitif enerji limitleri ile madde dağılımına sahip olma durumu Şekil 4.34'te görülmektedir. Yıldız yapısının tamamında tüm enerji limitlerinin pozitif olduğu bu grafikten kolayca doğrulanabilir, bu da maddenin bilinen madde formunda olduğu ve karanlık madde varlığının olmadığını göstermektedir.
- Ses hızlarının $0 < v_r^2$ ve $v_t^2 < 1$ sınır koşullarına uyarak sistemin kararlığını sağladığını da Şekil 4.35'de görülmekte olan davranışlarından doğrulayabiliriz. Ayrıca Şekil 4.36'da görüldüğü üzere, genelleştirilmiş kararlılık kriterleri $0 < |v_t^2 - v_r^2| < 1$ de sağlanmaktadır.
- Şekil 4.37'de de görüldüğü üzere, F_a, F_g, F_h ve F_e ile verilen TOV kuvvetleri dengededir. Başka bir deyişle, sistem herhangi bir noktasal tekillik olmadan kararlıdır.
- Hâl denklemi bileşenleri w_r ve w_t, Şekil 4.38'de görüldüğü üzere, bilinen madde dağılımı kriterleri olan $0 < w_r$ ve $w_t < 1$ kriterlerini sağlayarak karanlık maddenin varlığını reddeder.
- Kütle fonksiyonunun, kırmızıya kayma ve kompaktlaşma parametrelerinin düzenli ve kabul edilebilir davranışları Şekil 4.39, Şekil 4.40 ve Şekil 4.41'de görülmektedir.

Sonuç olarak, bu çalışmamızda da ele alınan nötron yıldızlarının kararlı olduğu ve fiziksel olarak kabul edilebilir olduklarını gösterdik.

KAYNAKLAR

[1]. ELLIS, G.F.R. and MACCALLUM, M.A.H., 1969, A class of homogeneous cosmological models, *Commun. Math. Phys*. 12, 108-141.

[2]. ELLIS, G.F.R., 1971, Relativistic cosmology. *In General Relativity and Cosmology*, Proceedings of XLVII Enrico Fermi Summer School, ed. R. K. Sachs. Academic Press.

[3]. ELLIS. G.F.R., 1973, Relativistic cosmology. *In Cargése Lectures in Physics*, Volume 6, ed. E. Schatzmann. Gordon and Breach.

[4]. Ivanov, B. V., (2002), Maximum bounds on the surface redshift of anisotropic stars, *Phys. Rev. D. 65*, 104011, doi:10.1103/physrevd.65.104011.

[5]. Maurya, S.K., Gupta, Y.K., Ray, S., and Deb, D., 2016, Generalised model for anisotropic compact stars, *European Physical Journal C*, 76 (12), 1–9.

[6]. Iorio, L. and Saridakis, E.N., 2012, Solar system constraints on f(T) gravity, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 427 (2), 1555–1561.

[7]. Xie, Y. and Deng, X., 2013, f (T) gravity : effects on astronomical observations and Solar system experiments and upper bounds 1 Introduction, *3589 3584–3589.*

[8]. Xie, Y. and Deng, X.M., 2013, f(T) gravity: Effects on astronomical observations and Solar system experiments and upper bounds, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 433 (4), 3584–3589.

[9]. Harko T, Lobo FSN, Otalora G, Saridakis, 2014, $f(T,\mathcal{T})$ gravity and cosmology, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 12:021.

[10]. Saleem, R, Kramat, F, Zubair, M., 2020, Interior solutions of compact stars in $f(T,\mathcal{T})$ gravity under Karmarkar condition, *Physics of the Dark Universe*, PDU 2020;30:100592.

[11]. Ashraf A., Zhang Z., Ditta A., Mustafa G., 2020, A study of anisotropic spheres in modified gravity via embedding approach, *Annals of Physics*, 422, 168322.

[12]. Salako, I.G., Khlopov, M., Ray, S., Arouko, M.Z., Saha, P., and Debnath, U., 2020, Study on anisotropic strange stars in $f(T,\mathcal{T})$ gravity, *Universe*, 6 (10), 1–16.

[13]. Sofuoğlu, D., 2014, Konvansiyonel kozmolojinin tetrad teoremleri ve zar-evren kozmolojisindeki benzerleri, Yüksek Lisans Tezi, *İ.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü.*

[14]. Riess, A.G., et al.,1998, Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant, *Astron. J*. 116, 1009-1038.

[15]. Perlmutter, S., et al., 1999, Measurements of Ω and Λ from 42 high-redshift supernovae, *Astrophys. J.*, 517, 565-586.

[16]. Riess, A.G., et al., 1999, BV RI light curves for 22 type Ia supernovae, *Astron. J.*, 117, 707**.**

[17]. Tonry, J.L., et al., 2003, Cosmological results from high-z supernovae, *Astrophys. J.*, 594, 1-24.

[18]. Riess, A.G., et al., 2004, Type Ia supernova discoveries at *z*>1 from Hubble Space Telescope: evidence for past deceleration and constraints on dark energy evolution, *Astrophys. J.*, 607, 665-687.

[19]. Clocchiatti , A., et al., 2006, Hubble Space Telescope and ground-based observations of Type Ia supernovae at redshift 0.5: cosmological implications, *Astrophys. J.*, 642, 1-21.

[20]. Peiris, H.V., et al., 2003, First year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations: implications for inflation, *Astrophys. J. Suppl.* 148, 213.

[21]. Astier, P. et al., 2006, The supernova legacy survey: measurement of ΩM, ΩΛ and w from the first year data set, *Astron. Astrophys*. 447, 31.

[22]. Riess, A.G., et al., 2007, New Hubble space telescope discoveries of Type Ia supernovae at *z*>1: narrowing constraints on the early behaviour of dark energy, *Astrophys. J.*, 659, 98.

[23]. Spergel, D.N., et al., 2007, Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) three year results: implications for cosmology, *Astrophys. J. Suppl.* 170, 377.

[24]. Komatsu, E., et al., 2009, Five-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations: cosmological interpretation, *Astrophys. J. Suppl.* 180, 330.

[25]. Komatsu, E., et al., 2011, Seven-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations: cosmological interpretation, *Astrophys. J. Suppl.* 192,18.

[26]. Komatsu, E., et al., 2011, Seven-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations: cosmological interpretation, *Astrophys. J. Suppl.* 192,18.

[27]. Hinshaw, G., at al, 2012, Nine-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Cosmological Parameter Results, *Astrophys. J. Suppl.* 208, 19.

[28]. Ade, P.A.R., et al., 2014, Planck 2013 results. I. Overwiew of products and scientific results, *Astron. Astrophys.*, 571, A1.

[29]. Ade, P.A.R., et al., 2016, Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters, *Astron. Astrophys.*, 594, A13.

[30]. de Bernardis, P., at al., 2000, A flat universe from high-resolution maps of the cosmic microwave background radiation, *Nature,* 404, 955-959.

[31]. Hanany, S., at al.,2000, MAXIMA-1: a measurement of the cosmic microwave background anisotropy on angular scales of 10-5, *Astropys. J.*, 545, 1.5-1.9.

[32]. Bennett, C.L., et al., 2003, First year Wilkinson microwave anisotropy probe (WMAP) observations: preliminary maps and basic results, *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, 148, 1.

[33]. Spergel, D.N., et al., 2003, First-year Wilkinson microwave anisotropy probe (WMAP) observations: determination of cosmological parameters, *Astrophys. J. Suppl.* 148, 175-194.

[34]. Tegmark, M., et al., 2004, Cosmological parameters from SDSS and WMAP, *Phys.Rev. D*, 69, 103501.

[35]. Tegmark, M., et al., 2004, The 3D power spectrum of galaxies from SDSS, *Astropys. J.*, 606, 702-740.

[36]. Seljak, U., et al., 2005,Cosmological parameter analysis including SDSS Lyα forest and galaxy bias: constraints on the primordial spectrum of fluctuations, neutrino mass, and dark energy, *Phys.Rev. D*, 71, 103515.

[37]. Eisenstein D.J., et al., 2005, Detection of the Baryon Acoustic Peak in the Large-Scale Correlation Function of SDSS Luminous Red Galaxies, *Astrophys. J.*, 633, 560.

[38]. Jain, B., Taylor, A., 2003, Cross-correlation Tomography: Measuring Dark Energy Evolution with Weak Lensing, *Phys. Rev. Lett.*, 91, 141302.

[39]. Copeland, E.J., Sami, M., Tsujikawa, S., 2006, Dynamics of dark energy, *Int. J. Mod. Phys. D*, 15, 1753-1936.

[40]. Turner, M.S., Huterer, D., 2007, Cosmic Acceleration, Dark Energy and Fundamental Physics, *J.Phys.Soc.Jap.*, 76:111015.

[41]. Frieman, J.A., Turner, M.S., Huterer, D., 2008, Dark Energy and the Accelerating Universe, *Ann.Rev.Astron.Astrophys.*, 46:385.

[42]. Peebles, P.J.E., Ratra, B. 2003, The cosmological constant and dark energy, *Rev. Mod. Phys.*, 75, 559-606.

[43]. Carroll, S.M., 2001, The cosmological constant, *Living Reviews in Relavity*, 4, 1.

[44]. Bean,R., Dore, O., 2003, Are chaplygin gases serious contenders for the dark energy?, *Phys. Rev. D* 68, 023515.

[45]. S.M. Carroll, V. Duvvuri, M. Trodden and M.S. Turner, 2004, Is cosmic speed up due to new gravitational physics? *Phys. Rev. D* 70, 043528.

[46]. Polarski, D., 2006, Dark energy: Current issues, *Ann. Phys. (Berlin)* 15, 342.

[47]. Schmidt, H.J., 2007, Fourth order gravity: Equations, history, and applications to cosmology, *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys*., 4, 209.

[48]. Nojiri, S., Odintsov, S.D., 2007, Introduction to modified gravity and gravitational alternative for dark energy, *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys*., 4, 115.

[49]. Durrer, R., Maartens, R., 2008, Dark energy and dark gravity: theory overview, *Gen. Relativ. Gravit*., 40, 301.

[50]. Capozziello, S., Francaviglia, M., 2008, Extended theories of gravity and their cosmological and astrophysical applications, *Gen. Relativ. Gravit*., 40, 357.

[51]. Sotiriou, T.P., 2009, 6+1 lessons from *f(R)* gravity, *J. Phys. Conf. Ser*., 189, 012039.

[52]. Tsujikawa, S., 2010, *Dark energy: investigation and modeling*, Dark Matter and Dark Energy, In: Matarrese, S., Colpi, M., Gorini, V., Moschella, U. (ed), *Chapter 8, Springer, Dordrecht, The Netherlands*, ISBN: 978-90-481-8684-6, 331.

[53]. Felice, A. De, Tsujikawa, S., 2010, *f(R)* theories, *Living Reviews in Relativity, 13, 3.*

[54]. Sotiriou, T.P., Faraoni, V., 2010, *f(R)* theories of gravity, *Rev. Mod. Phys.*, 82, 451.

[55]. Amendola, L., Tsujikawa, S., 2010, *Dark Energy: Theory and Observations*, (Cambridge University Press, Cambridge.

[56]. Linder, E.V., 2010, Einstein's other gravity and the acceleration of the universe, *Phys. Rev. D*, 81, 127301.

[57]. Tsujikawa, S., 2010, Recent status of dark energy, *Mod. Phys. Lett*. A 25, 843.

[58]. Capozziello, S., de Laurentis, M., 2011, Extended theories of gravity, *Phys. Rep.*, 509, 167.

[59]. Capozziello, S., Faraoni, V., 2011, *Beyond Einstein Gravity: A Survey of Gravitational Theories for Cosmology and Astrophysics*, Springer, London.

[60]. Clifton, T., Ferreira, P.G., Padilla, A., Skordis, C., 2012, Modied gravity and cosmology, *Phys. Rep., 513*, 1.

[61]. Buchdahl, H.A., 1970, Non-Linear Lagrangians and Cosmological Theory, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 150, 1-8.

[62] Rippl, S., van Elst, H., Tavakol, R., Taylor, D., 1996, Kinematics and dynamics of *f(R)* theories of gravity, *Gen. Rel. Grav*., 28, 193.

[63]. Nojiri, S., Odintsov, S., D., 2003, Modified gravity with negative and positive powers of curvature: Unification of inflation and cosmic acceleration, *Phys. Rev*. D, 68, 123512.

[64]. Nojiri, S., Odintsov, S., D., 2005, Modified Gauss-Bonnet Theory as Gravitational Alternative for Dark Energy, *Phys. Lett*. B, 631, 1.

[65]. Nojiri, S., Odintsov, S., D., Sasaki, M., 2005, Gauss-Bonnet Dark Energy, *Phys. Rev. D, 71*, 123509.

[66]. Harko T., 2008, Modied gravity with arbitrary coupling between matter and geometry, *Phys. Lett. B 669, 376.*

[67]. Harko T., Lobo, F.S.N., Nojiri, S., Odintsov, S.D., 2011, *f(R, T)* gravity, *Phys. Rev. D 84, 024020.*

[68]. Weyl, H., 1919, Eine neue Erweiterung der Relativitätstheorie, *Annalen der Physik*, 364, 101-133.

[69]. Eddington, A.S., 1923, *The Mathematical Theory of Relativity*, Cambridge University Press, Cambridge.

[70]. Starobinsky, A.A., 1980, A new type of isotropic cosmological models without singularity, *Phys. Lett. B*, 91, 99.

[71]. Zhang, P.-J., 2007, The behavior of *f(R)* gravity in the solar system, galaxies and clusters, *Phys. Rev. D*, 76, 024007.

[72]. Hu, W., Sawicki, I., 2007, Models of *f(R)* cosmic acceleration that evade Solar-System tests, *Phys. Rev. D*, 76, 064004.

[73]. Chiba, T, Smith, T.L. Erickcek, A.L., 2007, Solar system constraints to general *f(R)* gravity, *Phys. Rev. D*, 75, 124014.

[74]. Tsujikawa, S., 2008, Observational signatures of *f(R)* dark energy models that satisfy cosmological and local gravity constraints, *Phys. Rev. D*, 77, 023507.

[75]. Shabani, H., Farhoudi, M., 2014, Cosmological and solar system consequences of *f(R,T)* gravity models, *Phys. Rev. D 90*, 044031.

[76]. Nojiri, S., Odintsov, S.D., 2003, Modified gravity with negative and positive powers of the curvature: unification of the inflation and of the cosmic acceleration, *Phys. Rev. D, 68*, 123512.

[77]. Nojiri, S., Odintsov, S.D., Gorbunova, O.G., 2005, Dark energy problem: from phantom theory to modified Gauss-Bonnet gravity, *J. Phys. A 39*, 6627.

[78]. Nojiri, S., Odintsov, S.D., 2007, Unifying inflation with ΛCDM epoch in modified *f(R)* gravity consistent with solar system tests, *Phys. Lett*. B, 657, 238.

[79]. Song, Y.-S., Hu, W., Sawicki. I., 2007, Large scale structure of expansion of *f(R)* gravity, *Phys. Rev. D*, 75, 044004.

[80]. Li, B., Barrow, J.D., 2007, The cosmology of *f(R)* gravity in the metric variational approach, *Phys. Rev. D*, 75, 084010.

[81]. Li, B., Barrow, J.D., 2007, Mota, D.F., 2007, The Cosmology of Modified Gauss-Bonnet Gravity, *Phys. Rev. D*, 76, 044027.

[82]. Cognola, G., et al., 2008, A class of viable modified *f(R)* gravities describing inflation and the onset of accelerated expansion, *Phys. Rev. D*, 77, 046009.

[83]. Nojiri, S., Odintsov, S.D., 2008, Modified *f(R)* gravity unifying Rm inflation with ΛCDM epoch, *Phys. Rev*. D, 77, 026007.

[84]. Nojiri, S., Odintsov, S.D., 2009, Non-singular modified gravity: the unification of the inflation, dark energy and dark matter, *AIP Conf. Proc.* 1241, 1094.

[85]. Bamba, K., Geng, C.-Q., Lee, C.-C., 2010, Cosmological evolution in exponential gravity, *JCAP 08*, 021.

[86]. Zaregonbadi, R., Farhoudi, M., 2016, Cosmic acceleration from matter-curvature coupling, *Gen . Rel. Gravit.*, 48, 142.

[87]. de la Cruz-Dombriz, A., Dobado, A., Maroto, A.I., 2008, Evolution of density perturbations in *f(R)* theories of gravity, *Phys. Rev. D*, 77, 123515.

[88]. De Felice, A., Gérard, J.M, Suyama, T., 2010, Cosmological perturbation in *f(R,G)* theories with a perfect fluid, *Phys. Rev. D* 82, 063526.

[89]. De Felice, A., Suyama, T., 2011, Linear growth of matter density perturbations in *f(R,G)* theories, *Prog. Theor. Phys*. 125, 603.

[90]. Alvarenga, F.G., de la Cruz-Dombriz, A., Houndjo, M.J.S., Rodrigues, M.E., Saez-Gômez, D., 2013, Dynamics of scalar perturbatıons in *f(R,T)* gravity, *Phys. Rev. D, 87*, 103526.

[91]. Zaregonbadi, R., Farhoudi, M., Riazi, N.,2016, Dark Matter From *f(R,T)* Gravity, *Phys. Rev. D* 94, 084052.

[92]. Nojiri, S., Odintsov, S., D., Gorbunova, O., G., 2005, Dark Energy Problem: from Phantom Theory to Modified Gauss-Bonnet Gravity, *J. Phys*. A, 39, 6627.

[93]. Bamba, K., 2009, Behavior of *F(R)* gravity around a crossing of the phantom divide, *Open Astron. J.*, 3, 13.

[94]. Makarenko, A.N., Obukhov, V.V., Kirnos, I.V., 2012, From Big to Little Rip in modified *f(R,G)* gravity, *Astrophys. Space Sci.*, 343, 481.

[95]. Alani, I., Santillan, O.P., 2016, Cosmological singularity theorems for *f(R)* gravity theories, *JCAP 05*, 023.

[96]. Dolgov, A.D, Kawasaki, M., 2003, Can modified gravity explain accelerated cosmic expansion?, *Phys. Lett. B*, 573, 1.

[97]. Faraoni, V., 2005, The stability of modified gravity models, *Phys. Rev. D*, 72, 124005.

[98]. Faraoni, V., 2006, Matter instability in modified gravity, *Phys. Rev. D*, 74, 104017.

[99]. Sawicki, I., Hu, W., 2007, Stability of cosmological solutions in *f(R)* models of gravity, *Phys. Rev. D*, 75, 127502.

[100]. Sharif, M., İkram, A., 2016, Stability Analysis of Some Reconstructed Cosmological Models in *f(R,G)* gravity, *Physics of the Dark Universe 17*, 1.

[101]. Sharif, M., İkram, A., 2017, Stability Analysis of Einstein Universe in *f(G,T)* Gravity, *Int. J. Mod. Phys. D*, 26, 1750084.

[102]. Ananda, K.N., Carloni, S., Dunsby, P.K.S., 2008, A characteristic signature of fourth order gravity, *Springer Proc. Phys*., 137, 165.

[103]. Carloni, S., Troisi, A., Dunsby, P.K.S., 2008, Some remarks on the dynamical systems approach to fourth order gravity, *Gen. Rel. Grav*., 41, 1757.

[104]. Abdelwahab, M., Carloni, S., Dunsby, P.K.S., 2008, Cosmological dynamics of exponential gravity, *Class. Quant. Grav.*, 25, 135002.

[105]. Carloni, S., Dunsby, P.K.S., Troisi, A., 2009, Cosmological dynamics of fourth order gravity, *arXiv:0906.1998 [gr-qc]*.

[106]. Ivanov, M.M., Toporensky, A.V. 2011, Cosmological dynamics of fourth order gravity with Gauss-Bonnet term, *Grav. Cosmol.*, 18, 43.

[107]. Guo, J.-Q., Frolov, A.V., 2013, Cosmological dynamics in *f(R)* gravity, *Phys. Rev. D*, 88, 124036.

[108]. Amendola, L., Charmousis, C., Davis., S., C., 2006, Constraints on Gauss-Bonnet Gravity in Dark Energies Cosmologies, *JCAP 0612*, 020.

[109]. Koivisto, T., Mota, D., F., 2006, Cosmology and Astrophysical Constraints of Gauss-Bonnet Dark Energy, *Phys. Lett. B* 644, 104.

[110]. Wu, P.-U., Yu, H.-W., 2006, Constraints on a variable dark energy model with recent observations, *Phys. Lett. B*, 643, 315.

[111]. Calcagui, G., Carlos, B., Felice, A., 2006, Ghost Conditions for Gauss-Bonnet Cosmologies, *Nucl. Phys. B, 752*, 404.

[112]. Amendola, L., Gannouji, R., Polarski, D, Tsujikawa, S., 2007, Conditions for the cosmological viability of *f(R)* dark energy models, *Phys. Rev. D*, 75, 083504.

[113]. Neupane, I. P., 2007, Constraints on Gauss-Bonnet Cosmologies, *JCAP 12*, 020.

[114]. Martinelli, M., Melchiorri, A., Amendola, L., 2009, Cosmological constraints on the Hu-Sawicki modified gravity scenario, *Phys. Rev. D*, 79, 123516

[115]. Ali, A., Gannouji, R., Sami, M., Sen, A.A, 2010, Background cosmological dynamics in f(R) gravity and observational constraints, *Phys. Rev. D*, 81, 104029.

[116]. Linder, E.V., 2010, Constraining models of dark energy, *arXiv:1004.4646 [astro-ph.CO]*.

[117]. Santos, J., Alcaniz, J.S., Rebouças, M.J., Carvalho, F.C., 2007, Energy conditions in *f(R)* gravity, *Phys. Rev. D.*, 76, 083513.

[118]. Santos, J., Alcaniz, J.S., Pires, N., Rebouças, M.J., 2007, Energy conditions and cosmic acceleration, *Phys. Rev. D* 75, 083523.

[119]. Santos, J., Rebouças, M.J., Alcaniz, J.S., 2008, Energy conditions constraints on a class of *f(R)* gravity, *Int. J. Mod. Phys. D 19*, 1315.

[120]. Bertolami, O., Sequeira, M.C., 2009, Energy conditions and stability in *f(R)* theories of gravity with nonminimal coupling to matter, *Phys. Rev. D*, 79, 104010.

[121]. Garcia, N.M., Harko, T., Lobo, F.S.N., Mimoso, J.P., 2011, Energy conditions in modified Gauss-Bonnet gravity, *Phys. Rev.* D, 83, 104032.

[122]. Sharif, M., Zubair, M., 2012, Energy conditions constraints and stability of power law solutions in *f(R,T)* gravity, *J. Phys. Soc. Jpn. 82*, 014002.

[123]. Alvarenga, F.G., Houndjo, M.J.S., Monwanou, A.V., Chabi Orou, J.B., 2012, Testing some *f(R,T)* gravity models from energy conditions, *Journal of Modern Physics*, 4, 130.

[124]. Atazadeh, K., Darabi, F., 2014, Energy conditions in *f(R,G)* gravity, *Gen. Relativ. Gravit., 46*, 1664.

[125]. Sharif, M., Ikram. A., 2016, Energy conditions in *f(G,T)* gravity, *Eur. Phys. J. C*, 76, 640.

[126]. Bamba, K., İlyas M., Bhatti, M.Z., Yousaf, Z., 2017, Energy Conditions in Modified *f(G)* Gravity, *Gen. Relativ. Gravit*. 49, 112.

[127]. Capozziello, S., Lobo, F.S.N., Mimoso, J.P., 2015, Generalized energy conditions in extended theories of gravity, *Phys. Rev. D* 91, 124019.

[128]. S. Capozziello, V.F. Cardone, S. Carloni and A. Troisi, 2003, Curvature quintessence matched with observational data, *Int. J. Mod. Phys. D 12*, 1969.

[129]. Zhang, P., 2006, Testing *f(R)* gravity against the large scale structure of the universe, *Phys. Rev. D*, 73, 123504.

[130]. Copeland, E.J., Sami, M., Tsujikawa, S., 2006, Dynamics of dark energy, *Int. J. Mod. Phys. D*, 15, 1753.

[131]. Alam, U., Sahni, V., Starobinsky, A.A., 2007, Exploring the properties of dark energy using type Ia supernovae and other datasets, *JCAP, 0702*, 011.

[132]. Baghram, S., Farhang, S., Rahvar, S., 2007, Modified gravity with $f(R)=\sqrt{R2-R02}$, *Phys. Rev. D, 75*, 044024.

[133]. Nesseris, S., Perivolaropoulos, L., 2007, Crossing the phantom divide: theoretical implications and observational status, *JCAP, 0701*, 018.

[134]. Bamba, K., Geng, C.-Q., Nojiri, S., Odintsov, S.D., 2009, Crossing of the phantom divide in modified gravity, *Phys. Rev. D*, 79, 083014.

[135]. Linder, E.V., 2009, Exponential gravity, *Phys. Rev. D*, 80, 123528.

[136]. Jassal, H.K., Bagla, J.S., Padmanabhan, T., 2010, Understanding the origin of CMB constraints on dark energy, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 405, 2639.

[137]. Bamba, K., Geng, C.-Q., Nojiri, S., Odintsov, S.D., 2010, Crossing of phantom divide in $F(R)$ gravity, *Mod. Phys. Lett. A 25*, 900.

[138]. Bamba, K., Capozziello, S., Nojiri, S., Odintsov, S.D., 2012, Dark energy cosmology: The equivalent description via different theoretical models and cosmography tests, *Astrophys. Space Sci*. 342, 155.

[139]. Bisabr, Y. , 2012, Modied gravity with a nonminimal gravitational coupling to matter, *Phys. Rev. D 86*, 044025.

[140]. Zaregonbadi, R., Farhoudi, M., 2016, Cosmic acceleration from matter-curvature coupling, *Gen Relativ Gravit*, 48, 142.

[141]. Aldrovandi R, Pereira JG., 2013, Teleparallel gravity: An introduction, *Dordrecht: Springer; 2013.*

[142]. Krššák, M. and Pereira, J.G., 2015, Spin connection and renormalization of teleparallel action, *European Physical Journal C*, 75 (11), 1–13.

[143]. Pereira, J.G. and Obukhov, Y.N., 2019, Gauge structure of teleparallel gravity, *Universe*, 5 (6), 1–8.

[144]. Pereira, J.G., 2014, Teleparallelism: A New Insight into Gravity, *Springer Handbooks*, 197–212.

[145]. Arcos, H.I. and Pereira, J.G., 2004, Torsion gravity: A reappraisal, *International Journal of Modern Physics D*, 13 (10), 2193–2240.

[146]. Krššák, M., Van Den Hoogen, R.J., Pereira, J.G., Böhmer, C.G., and Coley, A.A., 2019, Teleparallel theories of gravity: Illuminating a fully invariant approach, *Classical and Quantum Gravity*, 36 (18),.

[147]. Singh, K.N. and Pant, N., 2016, A family of well-behaved Karmarkar spacetimes describing interior of relativistic stars, *European Physical Journal C*, 76 (10).

[148]. Rahaman, M., Singh, K.N., Errehymy, A., and Rahaman, F., 2020, Anisotropic Karmarkar stars in f (R , T) -gravity, *The European Physical Journal C*, 80 (3), 1–13.

[149]. Singh, K.N., Pant, N., and Govender, M., 2017, Physical viability of fluid spheres satisfying the Karmarkar condition, *European Physical Journal C*, 77 (2),.

[150]. Newton Singh, K., Pant, N., and Govender, M., 2017, Anisotropic compact stars in Karmarkar spacetime, *Chinese Physics C*, 41 (1).

[151]. Waheed, S., Mustafa, G., Zubair, M., and Ashraf, A., 2020, SS symmetry Physically Acceptable Embedded Class-I Compact Stars in Modified Gravity with Karmarkar

Condition, 1–23.

[152]. Karmarkar, K.R., 1948, Gravitational metrics of spherical symmetry and class one, *Proceedings of the Indian Academy of Sciences - Section A*, 27 (1), 56–60.

[153]. Ospino, J. and Núñez, L.A., 2020, Karmarkar scalar condition, *The European Physical Journal C*, 80 (2),.

[154]. Sharif, M. and Fatima, A., 2023, Traversable wormhole solutions admitting Karmarkar condition in f(R, T) theory, *European Physical Journal Plus*, 138 (3), 1–25.

[155]. Chodos A, Jaffe RL, Johnson K, Thorn CB, Weisskopf VF., 1974, New extended model of hadrons, *Physics Review D*, 974;9:3471.

[156]. Chodos A, Jaffe RL, Johnson K, Thorn CB., 1974, Baryon structure in the bag theory, *Physics Review D*, 1974;10:2599.

[157]. Rahaman, F., Chakraborty, K., Kuhfittig, P.K.F., Shit, G.C., and Rahman, M., 2014, A new deterministic model of strange stars, *European Physical Journal C*, 74 (10), 1–5.

[158]. Spergel, D.N., et al., 2003, First-year Wilkinson microwave anisotropy probe (WMAP) observations: determination of cosmological parameters, *Astrophys. J. Suppl.* 148, 175-194.

[159]. Spergel, D.N., et al., 2007, Wilkinson microwave anisotropy probe (WMAP) three year results: implications for cosmology, *Astrophys. J. Suppl.* 170, 377.

[160]. Lemaître, G., 1933, Annales de la Société scientifique de Bruxelles, *A53, 51-85.*

[161]. Bowers, R.L. and Liang, E.P.T., 1974, Anisotropic Spheres in General Relativity, *The Astrophysical Journal*, 188 (1), 657.

[162]. Herrera, L. and Santos, N.O., 1997, Local anisotropy in self-gravitating systems, *Physics Report*, 286 (2), 53–130.

[163]. Maurya, S.K., Gupta, Y.K., Ray, S., and Deb, D., 2016, Generalised model for anisotropic compact stars, *European Physical Journal C*, 76 (12), 1–9.

[164]. Weber, F., Negreiros, R., Rosenfield, P., and Stejner, M., 2007, Pulsars as astrophysical laboratories for nuclear and particle physics, *Progress in Particle and Nuclear Physics*, 59 (1), 94–113.

[165]. Tolman, R.C., 1939, Static Solutions of Einstein's Field Equations for Spheres of Fluid, *Physical Review*, 55, 364.

[166]. Oppenheimer, J. and Volkoff, G., 1939, On Massive Neutron Cores, *Physical Review*, 55, 374.

[167]. Horvat, D., Ilijić, S., and Marunović, A., 2011, Radial pulsations and stability of anisotropic stars with a quasi-local equation of state, *Classical and Quantum Gravity*, 28, 025009.

[168]. Heintzmann H, Hillebrandt W., 1975, Neutron stars with an anisotropic equation of state - Mass, redshift and stability, *Astronomy and Astrophysics*, 24:51.

[169]. Buchdahl, H.A., 1959, General Relativistic Fluid Spheres, *Physical Review D*, 116, 1027.

[170]. Andreasson, H., 2008, Sharp bounds on $2m/r$ of general spherically symmetric static objects, *Journal of Differential Equations*, 245, 2243.

[171]. Adler, R.J., 1974, A Fluid Sphere in General Relativity, *Journal of Mathematical Physics*, 15, 727.

[172]. Finch MR, Skea JE., 1989, A realistic stellar model based on an ansatz of Duorah and Ray, *Classical and Quantum Gravity*, 6:467.

[173]. Bhar, P., Maurya, S.K., Gupta, Y.K., and Manna, T., 2016, Modelling of anisotropic compact stars of embedding class one, *European Physical Journal A*, 52 (10), 1–18.

[174]. Sharif, M. and Saba, S., 2020, Adler–Finch–Skea Anisotropic Solution in f(G) Gravity, *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 130 (3), 397–408.

[175]. Abreu, H., Hernández, H., and Núñez, L.A., 2007, Sound speeds, cracking and the stability of self-gravitating anisotropic compact objects, *Classical and Quantum Gravity*, 24 (18), 4631–4645.

[176]. Özemre, A. Y., 1982, Teorik Fizik Dersleri Cild 7: Gravitasyonun Rölâtivist Teorileri, *İst. Üniv. Fen Fak. Yay.*, İstanbul.

[177]. Güdekli, E., 1997, Homojen evren modellerinin matematiksel temelleri , Yüksek Lisans Tezi, *İ.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü.*

[178]. Ellis, G.F.R., van Elst, H., 1999, Cosmological models (Cargese lectures 1998), *In: Theoretical and Observational Cosmology, NATO Series C: Math. Phys. Sci., Lachieze-Ray, M. (ed.),* Vol 541, Kluwer, Dordrecht, 1-116.

[179]. Can, D., 2021, Genel rölativite teorisine karanlık madde ve karanlık enerjiye alternatif olacak şekilde kızılötesi düzeltmeler, Doktora Tezi, *İ.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü.*

[180]. Güdekli, E., 2004, Bianchi tip çözümlerde ufuk-eşyönlüleşme meseleleri, Doktora Tezi, *İ.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü.*

[181]. Guarnizo, A., Castaneda, L., Juan, M. T., 2010, Variational principles in modified gravity: field equations in *f(R)* Gravity, *Gen. Rel. Grav.* 42, 2713-2728.

[182]. De Felice, F., Clarke, C.J.S., 1990, Relativity on curved manifolds, *Ch. 6, 195-198, Cambridge University Press.*

EKLER

EK 1. Genel varyasyonlar.

Metrik tansör $g^{\mu\nu}$'nün,

$$g^{\mu\nu} \to g^{\mu\nu} + \delta g^{\mu\nu} \tag{Ek 1.1}$$

şeklindeki varyasyonu altında $(\mu, \nu = 1, 2, \dots, n)$ $n = 4$ boyutlu uzay-zaman için Levi-Civita bağlantısının varyasyonu,

$$\delta\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} = \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}\left[g^{\alpha\beta} + \delta g^{\beta\alpha}\right] - \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}\left[g^{\alpha\beta}\right] \tag{Ek 1.2}$$

şeklinde verilir. Eğer $\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}\left[g^{\alpha\beta} + \delta g^{\beta\alpha}\right]$ ifadesi $\delta g^{\beta\alpha}$'nın birinci mertebeden kuvvetlerine kadar açılırsa,

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}\left[g^{\alpha\beta} + \delta g^{\beta\alpha}\right] = \frac{1}{2}(g^{\mu\rho} + \delta g^{\mu\rho})[\partial_{\nu}\left(g_{\lambda\rho} + \delta g_{\lambda\rho}\right) + \partial_{\lambda}\left(g_{\nu\rho} + \delta g_{\nu\rho}\right) - \partial_{\rho}(g_{\nu\lambda} + \delta g_{\nu\lambda})] \approx \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}\left[g^{\alpha\beta}\right] + \frac{1}{2}g^{\mu\rho}\left[\partial_{\nu}\left(\delta g_{\lambda\rho}\right) + \partial_{\lambda}\left(\delta g_{\nu\rho}\right) - \partial_{\rho}(\delta g_{\nu\lambda})\right] + \frac{1}{2}\delta g^{\mu\rho}[\partial_{\nu}\left(g_{\lambda\rho}\right) + \partial_{\lambda}\left(\delta g_{\nu\rho}\right) - \partial_{\rho}(\delta g_{\nu\lambda})] \tag{Ek 1.3}$$

elde edilir ve $\delta g^{\beta\alpha}$ bir tansör olduğu için,

$$\nabla_{\nu}\delta g_{\lambda\rho} = \partial_{\nu}\delta g_{\lambda\rho} - \Gamma^{\beta}_{\nu\lambda}\delta g_{\beta\rho} - \Gamma^{\beta}_{\nu\rho}\delta g_{\beta\lambda}$$

$$\nabla_{\lambda}\delta g_{\nu\rho} = \partial_{\lambda}\delta g_{\nu\rho} - \Gamma^{\beta}_{\nu\lambda}\delta g_{\beta\rho} - \Gamma^{\beta}_{\lambda\rho}\delta g_{\beta\nu} \tag{Ek 1.4}$$

$$\nabla_{\rho}\delta g_{\lambda\rho} = \partial_{\rho}\delta g_{\lambda\nu} - \Gamma^{\beta}_{\lambda\rho}\delta g_{\beta\nu} - \Gamma^{\beta}_{\nu\rho}\delta g_{\beta\lambda}$$

eşitliklerinden,

$$\partial_{\nu}\delta g_{\lambda\rho} + \partial_{\lambda}\delta g_{\nu\rho} - \partial_{\rho}\delta g_{\lambda\nu} = \nabla_{\nu}\delta g_{\lambda\rho} + \nabla_{\lambda}\delta g_{\nu\rho} - \nabla_{\rho}\delta g_{\lambda\rho} + 2\Gamma^{\beta}_{\nu\lambda}\delta g_{\beta\rho} \tag{Ek 1.5}$$

elde edilir. Benzer şekilde $g_{\mu\nu}$ için,

$$\nabla_{\nu}g_{\lambda\rho} = \partial_{\nu}g_{\lambda\rho} - \Gamma^{\beta}_{\nu\lambda}g_{\beta\rho} - \Gamma^{\beta}_{\nu\rho}g_{\beta\lambda} \tag{Ek 1.6}$$

$$\nabla_\lambda g_{\nu\rho} = \partial_\lambda g_{\nu\rho} - \Gamma^\beta_{\nu\lambda} g_{\beta\rho} - \Gamma^\beta_{\lambda\rho} g_{\beta\nu} \quad \text{(Ek 1.7)}$$

$$\nabla_\rho g_{\lambda\rho} = \partial_\rho g_{\lambda\nu} - \Gamma^\beta_{\lambda\rho} g_{\beta\nu} - \Gamma^\beta_{\nu\rho} g_{\beta\lambda} \quad \text{(Ek 1.8)}$$

eşitlikleri yazılarak elde edilecek olan,

$$2\Gamma^\beta_{\nu\lambda} g_{\beta\rho} = \partial_\nu g_{\lambda\rho} + \partial_\lambda g_{\nu\rho} - \partial_\rho g_{\lambda\nu} \quad \text{(Ek 1.9)}$$

ifadesi kullanıldığında (Ek 1.3) ifadesi,

$$\Gamma^\mu_{\nu\lambda}\left[g^{\alpha\beta} + \delta g^{\beta\alpha}\right] \approx \Gamma^\mu_{\nu\lambda}\left[g^{\alpha\beta}\right] + \frac{1}{2} g^{\mu\rho}\left[\nabla_\nu \delta g_{\lambda\rho} + \nabla_\lambda \delta g_{\nu\rho} - \nabla_\rho \delta g_{\lambda\rho} + 2\Gamma^\beta_{\nu\lambda}\delta g_{\beta\rho}\right] + \frac{1}{2} g^{\mu\rho}\Gamma^\beta_{\nu\lambda} g_{\beta\rho} \quad \text{(Ek 1.10)}$$

şeklinde yazılır. Aynı zamanda metriğin

$$(\delta g^{\mu\rho}) g_{\beta\rho} = -\left(\delta g_{\beta\rho}\right) g^{\mu\rho} \quad \text{(Ek 1.11)}$$

özelliği kullanılarak (Ek 1.10) ifadesi,

$$\Gamma^\mu_{\nu\lambda}\left[g^{\alpha\beta} + \delta g^{\beta\alpha}\right] \approx \Gamma^\mu_{\nu\lambda}\left[g^{\alpha\beta}\right] + \frac{1}{2} g^{\mu\rho}\left[\nabla_\nu \delta g_{\lambda\rho} + \nabla_\lambda \delta g_{\nu\rho} - \nabla_\rho \delta g_{\lambda\rho}\right] + g^{\mu\rho}\Gamma^\beta_{\nu\lambda}\delta g_{\beta\rho} - \left(\delta g_{\beta\rho}\right)\Gamma^\beta_{\nu\lambda} g^{\mu\rho} = \frac{1}{2} g^{\mu\rho}\left[\nabla_\nu \delta g_{\lambda\rho} + \nabla_\lambda \delta g_{\nu\rho} - \nabla_\rho \delta g_{\lambda\rho}\right] \quad \text{(Ek 1.12)}$$

ve (Ek 1.2) ifadesi ile verilen Levi-Civita bağıntısının varyasyonu,

$$\delta\Gamma^\mu_{\nu\lambda} = \Gamma^\mu_{\nu\lambda}\left[g^{\alpha\beta} + \delta g^{\beta\alpha}\right] - \Gamma^\mu_{\nu\lambda}\left[g^{\alpha\beta}\right] = \frac{1}{2} g^{\mu\rho}\left[\nabla_\nu \delta g_{\lambda\rho} + \nabla_\lambda \delta g_{\nu\rho} - \nabla_\rho \delta g_{\lambda\rho}\right] \quad \text{(Ek 1.13)}$$

şeklinde yazılır ve burada $\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$ bir tansör olmamasına rağmen $\delta\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$ bir tansördür.

(Ek 1.1) varyasyonu altında,

$$\Gamma^\mu_{\nu\lambda} \to \Gamma^\mu_{\nu\lambda} + \delta\Gamma^\mu_{\nu\lambda} \quad \text{(Ek 1.14)}$$

Levi-Civita bağlantısının varyasyonu ile Ricci eğrilik tansöründeki varyasyon için,

$$\mathrm{R}^{\mu}_{\nu\lambda\alpha}\left[\Gamma^{\beta}_{\sigma\rho}+\delta\Gamma^{\beta}_{\sigma\rho}\right]=2\,\partial_{[\lambda}\Gamma^{\mu}_{\alpha]\nu}+2\,\partial_{[\lambda}\Gamma^{\mu}_{\alpha]\nu}+\left(\Gamma^{\mu}_{\beta\lambda}+\delta\Gamma^{\mu}_{\beta\lambda}\right)\left(\Gamma^{\beta}_{\alpha\nu}+\delta\Gamma^{\beta}_{\alpha\nu}\right)-\left(\Gamma^{\mu}_{\beta\alpha}+\delta\Gamma^{\mu}_{\beta\alpha}\right)\left(\Gamma^{\beta}_{\lambda\nu}+\delta\Gamma^{\beta}_{\lambda\nu}\right)=2\,\partial_{[\lambda}\Gamma^{\mu}_{\alpha]\nu}+\Gamma^{\mu}_{\beta\lambda}\Gamma^{\beta}_{\alpha\nu}+\Gamma^{\mu}_{\beta\lambda}\delta\Gamma^{\beta}_{\alpha\nu}+\Gamma^{\beta}_{\alpha\nu}\delta\Gamma^{\mu}_{\beta\lambda}+\Gamma^{\mu}_{\beta\alpha}\Gamma^{\beta}_{\lambda\nu}-\Gamma^{\mu}_{\beta\alpha}\delta\Gamma^{\beta}_{\lambda\nu}-\Gamma^{\beta}_{\lambda\nu}\delta\Gamma^{\mu}_{\beta\alpha}+0(\delta\Gamma^{2})=2\,\partial_{[\lambda}\Gamma^{\mu}_{\alpha]\nu}+2\Gamma^{\mu}_{\beta[\lambda}\Gamma^{\beta}_{\alpha]\nu}+22\,\partial_{[\lambda}\Gamma^{\mu}_{\alpha]\nu}+2\Gamma^{\mu}_{\beta[\lambda}\Gamma^{\beta}_{\alpha]\nu}-\Gamma^{\beta}_{\nu[\lambda}\delta\Gamma^{\mu}_{\alpha]\beta}+\mathcal{O}(\delta\Gamma^{2})=\mathrm{R}^{\mu}{}_{\nu\lambda\alpha}\left[\Gamma^{\beta}_{\sigma\rho}\right]+2\,\partial_{[\lambda}\Gamma^{\mu}_{\alpha]\nu}+2\Gamma^{\mu}_{\beta[\lambda}\Gamma^{\beta}_{\alpha]\nu}-\Gamma^{\beta}_{\nu[\lambda}\delta\Gamma^{\mu}_{\alpha]\beta}+\mathcal{O}(\delta\Gamma^{2}) \quad \text{(Ek 1.15)}$$

yalnızca $\delta\Gamma$'nın birinci mertebedeki terimleri alınırsa,

$$\mathrm{R}^{\mu}{}_{\nu\lambda\alpha}\left[\Gamma^{\beta}_{\sigma\rho}+\delta\Gamma^{\beta}_{\sigma\rho}\right]\approx\mathrm{R}^{\mu}{}_{\nu\lambda\alpha}\left[\Gamma^{\beta}_{\sigma\rho}\right]+2\,\partial_{[\lambda}\Gamma^{\mu}_{\alpha]\nu}+2\Gamma^{\mu}_{\beta[\lambda}\Gamma^{\beta}_{\alpha]\nu}-\Gamma^{\beta}_{\nu[\lambda}\delta\Gamma^{\mu}_{\alpha]\beta} \quad \text{(Ek 1.16)}$$

yazılır. Böylece Ricci eğrilik tansörünün varyasyonu,

$$\delta\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda\alpha}=R^{\mu}_{\nu\lambda\alpha}\left[\Gamma^{\beta}_{\sigma\rho}+\delta\Gamma^{\beta}_{\sigma\rho}\right]-R^{\mu}_{\nu\lambda\alpha}\left[\Gamma^{\beta}_{\sigma\rho}\right]=2\,\partial_{[\lambda}\Gamma^{\mu}_{\alpha]\nu}+2\Gamma^{\mu}_{\beta[\lambda}\Gamma^{\beta}_{\alpha]\nu}-\Gamma^{\beta}_{\nu[\lambda}\delta\Gamma^{\mu}_{\alpha]\beta} \quad \text{(Ek 1.17)}$$

olarak bulunur. $\delta\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}$ ifadesinin de tansör olması nedeniyle,

$$\nabla_{\lambda}\delta\Gamma^{\mu}_{\alpha\nu}=\partial_{\lambda}\delta\Gamma^{\mu}_{\alpha\nu}+\Gamma^{\mu}_{\beta\lambda}\Gamma^{\beta}_{\alpha\nu}-\Gamma^{\beta}_{\alpha\lambda}\delta\Gamma^{\mu}_{\nu\beta}-\Gamma^{\beta}_{\nu\lambda}\delta\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} \quad (1.18)$$

ve

$$\nabla_{\alpha}\delta\Gamma^{\mu}_{\lambda\nu}=\partial_{\alpha}\delta\Gamma^{\mu}_{\lambda\nu}+\Gamma^{\mu}_{\beta\alpha}\Gamma^{\beta}_{\lambda\nu}-\Gamma^{\beta}_{\alpha\lambda}\delta\Gamma^{\mu}_{\nu\beta}-\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}\delta\Gamma^{\mu}_{\lambda\beta} \quad \text{(Ek 1.19)}$$

ifadeleri yazılarak,

$$2\nabla_{[\lambda}\Gamma^{\mu}_{\alpha]\nu}=\partial_{[\alpha}\delta\Gamma^{\mu}_{\lambda]\nu}+2\Gamma^{\mu}_{\beta[\lambda}\Gamma^{\beta}_{\alpha]\nu}-\Gamma^{\beta}_{\nu[\lambda}\delta\Gamma^{\mu}_{\alpha]\beta} \quad \text{(Ek 1.20)}$$

elde edilir. Bu ifadeler kullanılarak Ricci eğrilik tansörünün varyasyonu,

$$\delta\mathrm{R}^{\mu}{}_{\nu\lambda\alpha}=\nabla_{\lambda}\delta\Gamma^{\mu}_{\alpha\nu}-\partial_{\alpha}\delta\Gamma^{\mu}_{\lambda\nu} \quad \text{(Ek 1.21)}$$

şeklinde verilir.

Ek olarak $\mathrm{R}_{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{R}^{\mu\nu\rho\sigma}$ ve $\mathrm{R}_{\mu\nu}\mathrm{R}^{\mu\nu}$ ifadelerinin varyasyonlarını da hesaplamak yerinde olacaktır.

Birinci ifade için verilecek olan,

$$\delta\left(\mathrm{R}_{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{R}^{\mu\nu\rho\sigma}\right) = \mathrm{R}_{\mu\nu\rho\sigma}\delta\mathrm{R}^{\mu\nu\rho\sigma} + \delta\mathrm{R}_{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{R}^{\mu\nu\rho\sigma} \quad \text{(Ek 1.22)}$$

şeklindeki varyasyonu,

$$\mathrm{R}_{\mu\nu\rho\sigma}\delta\mathrm{R}^{\mu\nu\rho\sigma} = \mathrm{R}_{\mu\nu\rho\sigma}\delta\left(g^{\mu\alpha}g^{\beta\nu}g^{\gamma\rho}g^{\sigma\delta}\mathrm{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}\right) = \mathrm{R}^{\mu\nu\rho\sigma}\delta\mathrm{R}_{\mu\nu\rho\sigma} + 4\mathrm{R}_{\mu}{}^{\gamma\beta\delta}\mathrm{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}\delta g^{\mu\alpha} = \mathrm{R}^{\mu\nu\rho\sigma}\delta\mathrm{R}_{\mu\nu\rho\sigma} + 4\mathrm{R}_{\mu}{}^{\alpha\beta\gamma}\mathrm{R}_{\nu\alpha\beta\gamma}\delta g^{\mu\nu} \quad \text{(Ek 1.23)}$$

şeklindeki terim göz önünde bulundurulduğunda,

$$\delta\left(\mathrm{R}_{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{R}^{\mu\nu\rho\sigma}\right) = 2\mathrm{R}^{\mu\nu\rho\sigma}\delta\mathrm{R}_{\mu\nu\rho\sigma} + 4\mathrm{R}_{\mu}{}^{\alpha\beta\gamma}\mathrm{R}_{\nu\alpha\beta\gamma}\delta g^{\mu\nu} \quad \text{(Ek 1.24)}$$

şeklinde verilir. Buna ek olarak (Ek 1.24) eşitliğinin sağ tarafındaki ilk terimi için,

$$2\mathrm{R}^{\mu\nu\rho\sigma}\delta\mathrm{R}_{\mu\nu\rho\sigma} = 2\mathrm{R}^{\mu\nu\rho\sigma}\delta g_{\mu\alpha}\mathrm{R}^{\alpha}{}_{\nu\rho\sigma} = 2\mathrm{R}^{\mu\nu\rho\sigma}\delta\mathrm{g}_{\mu\alpha}\delta\mathrm{R}^{\alpha}{}_{\nu\rho\sigma} + 2\mathrm{R}^{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{R}^{\alpha}{}_{\nu\rho\sigma}\delta g_{\mu\alpha} = 2\mathrm{R}^{\mu\nu\rho\sigma}\delta\mathrm{R}_{\mu\nu\rho\sigma} = 2\mathrm{R}^{\mu\nu\rho\sigma}\delta g_{\mu\alpha}\mathrm{R}^{\alpha}{}_{\nu\rho\sigma} = 2\mathrm{R}^{\mu\nu\rho\sigma}\delta\mathrm{g}_{\mu\alpha}\delta\mathrm{R}^{\alpha}{}_{\nu\rho\sigma} + 2\mathrm{R}^{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{R}^{\alpha}{}_{\nu\rho\sigma}\delta g_{\mu\alpha} = 2\mathrm{R}_{\alpha}{}^{\nu\rho\sigma}\delta\mathrm{R}^{\alpha}{}_{\nu\rho\sigma} - \delta g^{\alpha\beta}g_{\mu\alpha}\mathrm{R}_{\mu\nu\rho\sigma}2\mathrm{R}^{\mu\nu\rho\sigma} \quad \text{(Ek 1.25)}$$

ifadesi kullanıldığında (Ek 1.22) varyasyonu,

$$\delta\left(\mathrm{R}_{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{R}^{\mu\nu\rho\sigma}\right) = 2\mathrm{R}_{\alpha}{}^{\nu\rho\sigma}\delta\mathrm{R}^{\alpha}{}_{\nu\rho\sigma} + 2\mathrm{R}_{\mu}{}^{\alpha\beta\gamma}\mathrm{R}_{\nu\alpha\beta\gamma}\delta g^{\mu\nu} \quad \text{(Ek 1.26)}$$

şeklinde verilir.

Eğer (Ek 1.26) varyasyonu bir F skaleri ile çarpılırsa,

$$\mathrm{F}\delta\left(\mathrm{R}_{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{R}^{\mu\nu\rho\sigma}\right) = 2\mathrm{F}\mathrm{R}_{\alpha}{}^{\nu\rho\sigma}\delta\mathrm{R}^{\alpha}{}_{\nu\rho\sigma} + 2\mathrm{F}\mathrm{R}_{\mu}{}^{\alpha\beta\gamma}\mathrm{R}_{\nu\alpha\beta\gamma}\delta g^{\mu\nu} \quad \text{(Ek 1.27)}$$

şeklini alır. $\mathrm{R}_{\mu\nu}\mathrm{R}^{\mu\nu}$ ifadesinin varyasyonu ve varyasyonun skaler bir F ile çarpılması durumunda,

$$\mathrm{F}\delta\left(\mathrm{R}_{\mu\nu}\mathrm{R}^{\mu\nu}\right) = \mathrm{F}\left[\mathrm{R}^{\mu\nu}\delta\mathrm{R}_{\mu\nu} + \mathrm{R}_{\mu\nu}\delta\mathrm{R}^{\mu\nu}\right] = \mathrm{F}\left[\mathrm{R}^{\mu\nu}\delta\mathrm{R}_{\mu\nu} + \mathrm{R}_{\mu\nu}\delta\left(g^{\alpha\mu}g^{\nu\beta}\mathrm{R}_{\alpha\beta}\right)\right] = \mathrm{F}\left[\mathrm{R}^{\mu\nu}\delta\mathrm{R}_{\mu\nu} + \mathrm{R}^{\alpha\beta}\delta\mathrm{R}_{\alpha\beta} + \mathrm{R}_{\mu\nu}\mathrm{R}_{\alpha\beta}\left(g^{\nu\beta}\delta g^{\alpha\mu} + g^{\alpha\mu}\delta g^{\nu\beta}\right)\right] = \mathrm{F}\left[2\mathrm{R}^{\mu\nu}\delta\mathrm{R}_{\mu\nu} + 2\mathrm{R}_{\mu\alpha}\mathrm{R}^{\alpha}{}_{\nu}\delta g^{\mu\nu}\right] \quad \text{(Ek 1.28)}$$

şeklinde verilir.

EK 2. Bazı Önemli Varyasyonlar.

$g^{\mu\nu}$, $g_{\mu\nu}$ metrik tansörün tersi olmak üzere, bunlar ve varyasyonları arasındaki ilişki,

$$g_{\mu\nu}g^{\nu\alpha} = \delta_{\mu}^{\alpha} \tag{Ek 2.1}$$

$$0 = \left(\delta g_{\mu\nu}\right)g^{\nu\alpha} + (\delta g^{\nu\alpha})g_{\mu\nu} \tag{Ek 2.2}$$

şeklindedir ve burada δ_{μ}^{α} matrisi sabittir. (Ek 2.2) eşitliği $g_{\alpha\beta}$ ile çarpılırsa,

$$0 = \left(\delta g_{\mu\nu}\right)\delta_{\beta}^{\nu} + (\delta g^{\nu\alpha})g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta} \tag{Ek 2.3}$$

ve

$$\delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta}(\delta g^{\nu\alpha}) \tag{Ek 2.4}$$

elde edilir. Bu tarz ifadelerin alternatifleri,

$$\delta g_{\mu\nu} = \delta\left(g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}g^{\alpha\beta}\right) = \left(\delta g_{\mu\alpha}\right)g_{\nu\beta}g^{\alpha\beta} + g_{\mu\alpha}\left(\delta g_{\nu\beta}\right)g^{\alpha\beta} + g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}\left(\delta g^{\alpha\beta}\right) = \left(\delta g_{\mu\alpha}\right)g_{\nu\beta}g^{\alpha\beta} + \delta g_{\mu\nu} + \delta g_{\nu\mu} \tag{Ek 2.5}$$

$$\delta g_{\mu\nu} = \left(\delta g_{\mu\alpha}\right)g_{\nu\beta}g^{\alpha\beta} + \delta g_{\mu\nu} + \delta g_{\nu\mu} \tag{Ek 2.6}$$

$$\delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}\delta g^{\alpha\beta} \tag{Ek 2.7}$$

şeklinde de yazılır. (Ek 2.1) ifadesinden,

$$g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = 4 \tag{Ek 2.8}$$

ve

$$g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \tag{Ek 2.9}$$

yazılır. Bu sonuçlar, n-boyutlu genel bir Riemannian uzayı için de geçerlidir. Yani,

$$g_{ab}g^{bc} = \delta_{a}^{c},\ g_{ab}g^{ab} = n \tag{Ek 2.10}$$

ve böylelikle metrik için,

$$\delta g_{ab} = -g_{ac} g_{bd} \delta g^{cd} \quad \text{(Ek 2.11)}$$

$$g^{ab} \delta g_{ab} = -g_{ab} \delta g^{ab} \quad \text{(Ek 2.12)}$$

şeklindedir.

g_{ab} metrik tansör olmak üzere,

$$\delta(\sqrt{g}) = \frac{1}{2\sqrt{g}} \delta g \quad \text{(Ek 2.13)}$$

biçimindeki varyasyonu için $\left(g \equiv \det(g_{ab})\right)$, (nxn) biçiminde bir A genel matrisi düşünülsün. Bu matris için determinant,

$$\det(\mathrm{A}) = \mathrm{e}^{\mathrm{Tr(A)}} \quad \text{(Ek 2.14)}$$

şeklindedir. g_{ab} için (Ek 2.14) ifadesi,

$$g = \det(g_{ab}) = e^{\mathrm{Tr}(g_{ab})} \quad \text{(Ek 2.15)}$$

şeklinde olup, $g_{ab} \rightarrow g_{ab} + \delta g_{ab}$ bağıntısı altında varyasyonu,

$$\det(g_{ab} + \delta g_{ab}) = e^{Tr(g_{ab} + \delta g_{ab})} = e^{Tr(g_{ab}) + Tr(\delta g_{ab})} = e^{Tr(g_{ab})} e^{Tr(\delta g_{ab})} \quad \text{(Ek 2.16)}$$

şeklinde yazılır ve burada izin lineerlik özelliği; $\mathrm{Tr}(g + \delta g_{\mathrm{ab}}) = \mathrm{Tr}(g_{\mathrm{ab}}) + \mathrm{Tr}(\delta g_{\mathrm{ab}})]$ şeklindedir. δg ifadesi çok küçük olduğu için $((\delta g)^2 \approx 0)$,

$$e^{Tr(\delta g_{ab})} \approx 1 + Tr(\delta g_{ab}) \quad \text{(Ek 2.17)}$$

ve (Ek 2.4) ifadesi,

$$\det(g_{ab} + \delta g_{ab}) \approx g\left(1 + \mathrm{Tr}(\delta g_{ab})\right) \quad \text{(Ek 2.18)}$$

şeklinde yazılır. Burada izin,

$$\mathrm{Tr}(\delta g_{\mathrm{ab}}) = g^{\mathrm{ab}} \delta g_{\mathrm{ab}} \quad \text{(Ek 2.19)}$$

ifadesi kullanıldığında,

$$det(g_{ab} + \delta g_{ab}) \approx g(1 + g^{ab} \delta g_{ab}) \quad \text{(Ek 2.20)}$$

elde edilir. Buradan varyasyonun tanımı için,

$$\delta g = \delta\big(\det(g_{ab})\big) = \det(g_{ab} + \delta g_{ab}) - \det(g_{ab}) \approx g(1 + g^{ab}\delta g_{ab}) - g = g g^{ab}\delta g_{ab} \quad \text{(Ek 2.21)}$$

ifadesi elde edilir. (Ek 2.12) eşitliği ile de,

$$\delta g = -g g_{ab}\delta g^{ab} \quad \text{(Ek 2.22)}$$

yazılabilmektedir. Buradan (Ek 2.13) varyasyonu,

$$\delta(\sqrt{\mathrm{g}}) = \frac{1}{2\sqrt{\mathrm{g}}}\delta g = -\frac{1}{2}\frac{\mathrm{g}}{\sqrt{\mathrm{g}}} g_{\mathrm{ab}}\delta g^{\mathrm{ab}} = -\frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{g}} g_{\mathrm{ab}}\delta \mathrm{g}^{\mathrm{ab}} \quad \text{(Ek 2.23)}$$

şeklini alır. Burada GR için 4-boyutlu sözde (pseude) Riemannian uzay-zamanı için $((g \longrightarrow -g)$ ve $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3)$ benzer,

$$\delta(\sqrt{g}) = -\frac{1}{2}\sqrt{g} g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \quad \text{(Ek 2.24)}$$

ifadesi yazılır.

Metriğin determinantının herhangi bir kuvveti için (Ek 2.22) ifadesi,

$$\delta(g^{\mathrm{n}}) = n g^{\mathrm{n}-1}\delta g = -n g^{\mathrm{n}-1} g g_{\mathrm{ab}}\delta g^{\mathrm{ab}} = -n g^{\mathrm{n}} g_{\mathrm{ab}}\delta g^{\mathrm{ab}} \quad \text{(Ek 2.25)}$$

şeklinde genel bir eşitlik ile verilir. Eğer bütün doğal sayılar ($n \in \mathbb{N}$) üzerinden toplam alırsak,

$$\sum_{\mathrm{n}=0}^{\infty}\delta(g^{\mathrm{n}}) = -\left(\sum_{\mathrm{n}=0}^{\infty}\mathrm{n} g^{\mathrm{n}}\right) g_{\mathrm{ab}}\delta g^{\mathrm{ab}} \quad \text{(Ek 2.26)}$$

olur. (Ek 2.26) eşitliğinin sağ kısmındaki toplamı hesaplamak için, $|g| < 1$ koşulu kabul edildiğinde,

$$\frac{g}{(1-g)^2} = \sum_{\mathrm{n}=0}^{\infty}\mathrm{n} g^{\mathrm{n}},\ |g| < 1 \quad \text{(Ek 2.27)}$$

elde edilir. Böylece (Ek 2.26) ifadesi,

$$\sum_{\mathrm{n}=0}^{\infty}\delta(g^{\mathrm{n}}) = -\frac{g}{(1-g)^2} g_{\mathrm{ab}}\delta g^{\mathrm{ab}},\ |g| < 1 \quad \text{(Ek 2.28)}$$

şeklini alır.

EK 3. İdeal Akışkan için Enerji Momentum Tansörü.

Eğrisel uzay-zamanda, mükemmel akışkan için verilen enerji-momentum tansörü,

$$T_{\mu\nu} = pg_{\mu\nu} + (\rho + p)u_\mu u_\nu \qquad \text{(Ek 3.1)}$$

şeklindedir. Burada ρ ve p sırasıyla akışkan için, enerji yoğunluğunu ve basıncı ifade etmektedir. $g_{\mu\nu}$, uzay-zamanın metrik tansörü ve u_μ ise akışkanın hareketini takip eden gözlemcinin 4-lü hız vektör alanını temsil etmektedir. Minkowski uzay-zamanı için $\left[\eta_{\mu\nu} = diag(-1,1,1,1)\right]$, $T_{\mu\nu}$'nün bileşenleri,

$$\mathrm{T}_{00} = \mathrm{T}^{00} = \rho,\ \mathrm{T}_{\mathrm{ij}} = \mathrm{p}\delta_{\mathrm{ij}} \qquad \text{(Ek 3.2)}$$

şeklinde verilir. $T_{\mu\nu}$ ikinci mertebeden tansör olması sebebiyle yine, örneğin geometriden gelen katkılar sebebiyle $g_{\mu\nu}$ metriği gibi, ikinci mertebeden tansör ile ifade etmemiz gerekmektedir. Bunun yanında $T_{\mu\nu}$ tansörü, bu uzay-zamanda hareket eden gözlemcinin u_μ 4-lü hız vektörü gibi kinematik nicelikleri de içermesi gerekmektedir. Bu birinci mertebeden bir tansör, yani bir vektör olması sebebiyle, $u_\mu \otimes u_\nu$ biçiminde tansörel çarpımı alınarak ikinci mertebe tansör elde edilir. Böylece $T_{\mu\nu}$ tansörü, $g_{\mu\nu}$ metriğin ve $u_\mu \otimes u_\nu$ biçimindeki tansörün lineer bir birleşimi olarak ifade edilir. Fakat tansör, akışkanın basınç ve yoğunluk gibi bazı özelliklerini de barındırmak zorundadır ve bunlar skaler oldukları için $T_{\mu\nu}$'nün barındırdığı tansörlerin katsayıları olarak ifadeye katılırlar. Genel ifade ile enerji-momentum tansörü,

$$T_{\mu\nu} = A(p,\rho)g_{\mu\nu} + B(p,\rho)u_\mu u_\nu \qquad \text{(Ek 3.3)}$$

şeklinde verilir ve burada $A(p,\rho)$ ve $B(p,\rho)$, p ve ρ'nun türevlenebilir sürekli fonksiyonlarıdır. (Ek 3.3) ifadesi lokal olarak, yani gravitasyonel etkiler ihmal edildiğinde de sağlanmalıdır. Böylece $T_{\mu\nu}$, (Ek 3.2) ifadesine indirgenir $\left(g_{\mu\nu} \to \eta_{\mu\nu}\right)$. Ek olarak, akışkan ile genişleyen ve büzülen eşhareketli bir gözlemci için,

$$\mathrm{u}_\mu = (1,0,0,0) = \delta_0^\mu = -\delta_\mu^0 \qquad \text{(Ek 3.4)}$$

şeklinde olup, lokal olarak enerji-momentum tansörü,

$$\mathrm{T}_{\mu\nu}^{\mathrm{SR}} = \mathrm{A}(\mathrm{p},\rho)\eta_{\mu\nu} + \mathrm{B}(\mathrm{p},\rho)\delta_\mu^0\delta_\nu^0 \qquad \text{(Ek 3.5)}$$

şeklini alır. (Ek 3.5) eşitliği $\eta_{\mu\nu}$ ile çarpıldığında,

$$-\rho + 3p = 4A - B \qquad \text{(Ek 3.6)}$$

ve $\delta_0^\mu \delta_0^\nu$ ile çarpıldığında ise,

$$\rho = -A + B \qquad \text{(Ek 3.7)}$$

elde edilir. A ve B fonksiyonları için ise,

$$A = p\ ,\ B = \rho + p \qquad \text{(Ek 3.8)}$$

ifadeleri elde edilir, bu da eğrisel uzaydaki mükemmel akışkan için verilen (Ek 3.3) ifadesini verir.

Ek 4. FLRW Evreni için Süreklilik Denkleminin Türetilmesi.

Enerji-momentum tansörünün korunumu için,

$$\nabla^\mu \mathrm{T}_{\mu\nu} = 0 \qquad \text{(Ek 4.1)}$$

ifadesi sağlanmalıdır.

Mükemmel akışkana sahip, uzayca homojen ve izotropik bir evren için verilen,

$$T_{\mu\nu} = p g_{\mu\nu} + (\rho + p) u_\mu u_\nu \qquad \text{(Ek 4.2)}$$

şeklinde enerji-momentum tansörü ve

$$u_\mu = (1,0,0,0) = \delta_0^\mu = -\delta_\mu^0 \qquad \text{(Ek 4.3)}$$

şeklindeki 4-lü hız vektörüne sahip eşhareketli bir gözlemci ele alındığında (Ek 3.3)'ün bir sonucu olarak,

$$u_\mu u^\mu = -1 \qquad \text{(Ek 4.4)}$$

normalizasyonu elde edilir.

Şimdi ise, (Ek 4.1) ifadesi,

$$\nabla^{\mu}T_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}\nabla^{\mu}p + u_{\nu}u_{\mu}\nabla^{\mu}(\rho + p) + (\rho + p)\left[u_{\nu}\nabla^{\mu}u_{\mu} + u_{\mu}\nabla^{\mu}u_{\nu}\right] \quad \text{(Ek 4.5)}$$

ve her bir terim için,

$$u_{\nu}u_{\mu}\nabla^{\mu}(\rho + p) = u_{\nu}u^{\mu}\nabla_{\mu}(\rho + p) = -\delta^{0}_{\mu}\delta^{\mu}_{0}\partial_{\mu}(\rho + p) = -\delta^{0}_{\nu}(\dot{\rho} + \dot{p}) \quad \text{(Ek 4.6)}$$

$$u_{\mu}\nabla^{\mu}u_{\nu} = u^{\mu}\nabla_{\mu}u_{\nu} = u^{\mu}\left[\partial_{\mu}u_{\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}u_{\alpha}\right] = -\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}u_{\alpha}u^{\mu} = +\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\delta^{0}_{\alpha}\delta^{\mu}_{0} = \Gamma^{0}_{0\nu} = 0 \quad \text{(Ek 4.7)}$$

$$u_{\nu}\nabla^{\mu}u_{\mu} = u_{\nu}\nabla_{\mu}u^{\mu} = -\delta^{0}_{\nu}\left(\partial_{\mu}u^{\mu} + \Gamma^{\mu}_{\mu\alpha}u^{\alpha}\right) = -\delta^{0}_{\nu}\Gamma^{\mu}_{\mu\alpha}\delta^{\alpha}_{0} = -\delta^{0}_{\nu}\Gamma^{\mu}_{\mu0} = -\delta^{0}_{\nu}(\Gamma^{1}_{10} + \Gamma^{2}_{20} + \Gamma^{3}_{30}) = -\delta^{0}_{\nu}3H \quad \text{(Ek 4.8)}$$

$$g_{\mu\nu}\nabla^{\mu}p = \nabla_{\nu}p = \partial_{\nu}p = \delta^{0}_{\nu}\dot{p} \quad \text{(Ek 4.9)}$$

hesanplandığında (f gibi bir skaler niceliğin, $\nabla_{\mu}f = \partial_{\mu}f = \delta^{0}_{\mu}\dot{f}$ formunda herhangi bir uzaysal bağlılığı olmadığı düşünülerek) (Ek 4.5) ifadesi,

$$\nabla^{\mu}T_{\mu\nu} = -\delta^{0}_{\nu}(\dot{\rho} + \dot{p}) - \delta^{0}_{\nu}3H(\rho + p) + \delta^{0}_{\nu}\dot{p} = -\delta^{0}_{\nu}[\dot{\rho} + 3H(\rho + p)] = 0 \quad \text{(Ek 4.10)}$$

şeklinde elde edilir ve bu ifadeden de,

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0 \quad \text{(Ek 4.11)}$$

süreklilik denklemine ulaşılır ($\nu = 0$).

Ek 5. Değiştirilmiş Gravitasyonun Alan Denklemlerinin Metriğe Göre Varyasyonla Çıkarılışı.

Bilindiği üzere,

$$R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R + \Lambda g_{ij} = k^{2}T_{ij} \quad \text{(Ek 5.1)}$$

şeklindeki EAD,

$$S_{EH} = \frac{1}{2k^{2}}\int_{V} d^{4}x\sqrt{-g}(R - 2\Lambda) + S_{m} \quad \text{(Ek 5.2)}$$

olarak tanımlanan EH aksiyonundan g_{ij} metriğine göre varyasyon alarak ve g_{ij} terimlerinin hem kendilerinin hem de δg_{ij} (veya δg^{ij}) varyasyonlarının V bölgesini kuşatan ∂V sınır yüzeyi üzerinde sıfır olduğunu ifade eden,

$$g_{ij}\big|_{\partial V} = g^{ij}\big|_{\partial V} = 0 \quad ve \quad \delta g_{ij}\big|_{\partial V} = \delta g^{ij}\big|_{\partial V} = 0 \tag{Ek 5.3}$$

sınır koşulları varsayımı altında, S_{EH} stasyoner, yani $\delta S_{EH} = 0$ olması koşulu sonucunda elde edilebilmektedirler. S_{EH} eşitliğinde d^4x, 4-boyutlu hacim elemanı, g ise determinanttır ($g = detg_{ij}$). S_m ise madde alanlarına bağlanan aksiyon olup L_m, madde Lagrange yoğunluğundan hareketle,

$$S_m = \int_V d^4x\sqrt{-g}L_m \tag{Ek 5.4}$$

olarak tanımlanmaktadır. L_m için, metrik tansörün türevlerine ya da bir ϕ skaler Alana bağlılık gibi birden fazla form göz önüne almak mümkün fakat çalışmalarımız doğrultusunda amaca yönelik olarak L_m'nin sadece metrik tansörün bileşenlerine bağlı olduğu durumu göz önünde bulunduracağız. Yani,

$$L_m = L_m\left(g^{ij}, g_{ij}\right) \tag{Ek 5.5}$$

olacaktır. Maddenin baryonik olması durumunda (Ek 5.5)'e eklenebilecek $T_{ij}^{(m)}$, enerji-momentum tansörü

$$T_{ij}^{(m)} = -\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta(\sqrt{-g}L_m)}{\delta g^{ij}} \tag{Ek 5.6}$$

şeklinde tanımlanmaktadır. (Ek 5.2)'deki aksiyonun,

$$R = g^{ij}R_{ij} \equiv İz\left(R_{ij}\right) \tag{Ek 5.7}$$

$$G = R^2 - 4R_{ij}R^{ij} + R_{ijkl}R^{ijkl} \tag{Ek 5.8}$$

$$T = g^{ij}T_{ij} \equiv İz\left(T_{ij}\right) \tag{Ek 5.9}$$

şeklinde tanımlı, (burada; R Ricci eğrilik skaleri, G Gauss-Bonnet eğrilik invaryantı ve T enerji-momentum tansörünün izidir) bu 3 skaleri argüman olarak kabul eden keyfi bir $f(R,G,T)$ fonksiyonu ile

$$S = \frac{1}{2k^2}\int d^4x\sqrt{-g}f(R,G,T) + S_m \qquad \text{(Ek 5.10)}$$

şeklinde değişikliğe uğratılmış formunu ele alalım (Λ kozmolojik sabit terimi $f(R,G,T)$ fonksiyonun içine atılmıştır). $f(R,G,T)$ alternatif gravitasyon teorisinin, alan denklemlerinin metriğe göre varyasyonla çıkarılmasını [179, 180 ve 181] numaralı kaynaklardan yararlanarak ele alıyoruz. Fakat öncelikle bu çıkarım için bazı gerekli bağıntı ve özdeşlikleri sıralayalım:

Metrik tansör için varyasyon ifadeleri:

$$\delta g_{ij} = -g_{ik}\delta g^{kl} g_{lj},\ \delta g^{ij} = -g^{ik}\delta g_{kl} g^{lj} \qquad \text{(Ek 5.11.a)}$$

$$\delta g = -g g_{ij}\delta g^{ij},\ \delta g = g g^{ij}\delta g_{ij} \qquad \text{(Ek 5.11.b)}$$

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{ij}\delta g^{ij},\ \delta\sqrt{-g} = +\frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{ij}\delta g_{ij} \qquad \text{(Ek 5.11.c)}$$

Christoffel sembollerinin varyasyonu:

$$\delta\Gamma^k{}_{ij} = -\frac{1}{2}\left[g_{il}\nabla_j(\delta g^{kl}) + g_{jl}\nabla_i(\delta g^{kl}) - g_{im}g_{jn}\nabla^k(\delta g^{mn})\right] \qquad \text{(Ek 5.12.a)}$$

$$\delta\Gamma^k{}_{ik} = -\frac{1}{2}g_{mn}\nabla_i(\delta g^{mn}) \qquad \text{(Ek 5.12.b)}$$

Riemann ve Ricci tansörlerinin varyasyonu:

$$\delta R^i{}_{jkl} = \nabla_k\left(\delta\Gamma^i{}_{jj}\right) - \nabla_l\left(\delta\Gamma^i{}_{kj}\right) \qquad \text{(Ek 5.13.a)}$$

$$\delta R_{ij} = \nabla_k\left(\delta\Gamma^k{}_{ij}\right) - \nabla_i\left(\delta\Gamma^k{}_{kj}\right) \qquad \text{(Ek 5.13.b)}$$

Şimdi, (Ek 5.10) ifadesinin varyasyonunu göz önüne alırsak,

$$f \equiv f(R,G,T);\ f_X \equiv \frac{\partial f(R,G,T)}{\partial X}; X = R,G,T \qquad \text{(Ek 5.14)}$$

kısıtlamaları kullanılarak ve

$$\delta f(R,G,T) \equiv \delta f = f_R \delta R + f_G \delta G + f_T \delta T \qquad \text{(Ek 5.15)}$$

olduğuna da dikkat edilerek, (Ek 5.11.c) ifadesinin de kullanımıyla,

$$\begin{aligned} \delta S &= \tfrac{1}{2k^2}\int_V d^4x[(\delta\sqrt{-g})f + \sqrt{-g}\delta f] + \delta S_m \\ &= \tfrac{1}{2k^2}\int_V d^4x\left[(\delta\sqrt{-g})f + \sqrt{-g}(f_R\delta R + f_G\delta G + f_T\delta T)\right] + \delta S_m \\ &= \tfrac{1}{2k^2}\int_V d^4x\sqrt{-g}\left[-\tfrac{1}{2}g_{ij}f\delta g^{ij} + f_R\delta R + f_G\delta G + f_T\delta T\right] + \delta S_m \end{aligned} \qquad \text{(Ek 5.16)}$$

elde edilir. R ve G terimlerinin varyasyonları, tanımlarından hareketle,

$$\delta R = \delta\left(g^{ij}R_{ij}\right) = R_{ij}\delta g^{ij} + g^{ij}\delta R_{ij} \qquad \text{(Ek 5.17)}$$

$$\delta G = \delta\left(R^2 - 4R_{ij}R^{ij} + R_{ijkl}R^{ijkl}\right) = 2R\delta R - 4R_{ij}\delta R^{ij} - 4R^{ij}\delta R_{ij} + R_{ijkl}\delta R^{ijkl} + R^{ijkl}\delta R_{ijkl} \qquad \text{(Ek 5.18)}$$

olur. Bu son ifadeye (Ek 5.17) ile birlikte,

$$R_{ij}\delta R^{ij} = 2R_i^k R_{jk}\delta g^{ij} + R^{ij}\delta R_{ij} \qquad \text{(Ek 5.19)}$$

$$R_{ijkl}\delta R^{ijkl} = 3R_i^{klm}R_{jklm}\delta g^{ij} + R_i^{jkl}\delta R^i_{jkl} \qquad \text{(Ek 5.20)}$$

özdeşlikleri yerleştirilip, düzenlendiği taktirde,

$$\delta G = \left(2RR_{ij} - 4R_i{}^k R_{jk} - 4R_j{}^k R_{ik} + 2R_i^{klm}R_{jklm}\right)\delta g^{ij} + 2Rg^{ij}R_{ij} - 8R^{ij}\delta R_{ij} + 2R_i{}^{jkl}\delta R^i{}_{jkl} \qquad \text{(Ek 5.21)}$$

elde edilir. (Ek 5.17) ile (Ek 5.21) ifadeleri, (Ek 5.13)'ten hareketle ve (Ek 5.12)'nin de kullanımı ile elde edilebilecek,

$$g^{ij}\delta R_{ij} = -\nabla_i\nabla_j\left(\delta g^{ij}\right) + g_{ij}\Box\left(\delta g^{ij}\right) \qquad \text{(Ek 5.22)}$$

$$R^{ij}\delta R_{ij} = -\tfrac{1}{2}R_i{}^k\nabla_j\nabla_k\left(\delta g^{ij}\right) - \tfrac{1}{2}R_j{}^k\nabla_i\nabla_k\left(\delta g^{ij}\right) + \tfrac{1}{2}R_{ij}\Box\left(\delta g^{ij}\right) + \tfrac{1}{2}g_{ij}R^{mn}\nabla_m\nabla_n\left(\delta g^{ij}\right) \qquad \text{(Ek 5.23)}$$

$$R_i^{jkl}R^i{}_{jkl} = -2R_i^{mn}{}_j\nabla_n\nabla_m\left(\delta g^{ij}\right) \qquad \text{(Ek 5.24)}$$

bağıntıları yardımıyla, sırası ile,

$$\delta R = R_{ij}\delta g^{ij} - \nabla_i\nabla_j\left(\delta g^{ij}\right) + g_{ij}\,\Box\left(\delta g^{ij}\right) \qquad \text{(Ek 5.25)}$$

$$\delta G = \left(2RR_{ij} - 4R_i^k R_{jk} - 4R_j{}^k R_{ik} + 2R_i^{klm}R_{jklm}\right)\delta g^{ij} - 2R\nabla_i\nabla_j\left(\delta g^{ij}\right) + 2Rg_{ij}\,\Box\left(\delta g^{ij}\right) + 2Rg_{ij}\,\Box\left(\delta g^{ij}\right) + 4R_i^k\nabla_j\nabla_k\left(\delta g^{ij}\right) + 4R_j{}^k\nabla_i\nabla_k\left(\delta g^{ij}\right) - 4R_{ij}\,\Box\left(\delta g^{ij}\right) - 4g_{ij}R^{mn}\nabla_m\nabla_n\left(\delta g^{ij}\right) - 4R_i^{mn}{}_j\nabla_n\nabla_m\left(\delta g^{ij}\right) \qquad \text{(Ek 5.26)}$$

şeklini alırlar. δT varyasyonu ise,

$$\delta T = \delta\left(g^{ij}T_{ij}\right) = T_{ij}\delta g^{ij} + g^{ij}\delta T_{ij} = T_{ij}\delta g^{ij} + g^{mn}\frac{\delta T_{mn}}{\delta g^{ij}}\delta g^{ij} \qquad \text{(Ek 5.27)}$$

ya da

$$\Theta_{ij} \equiv g^{mn}\frac{\delta T_{mn}}{\delta g^{ij}} \qquad \text{(Ek 5.28)}$$

tanımlanırsa,

$$\delta T = \left(T_{ij} + \Theta_{ij}\right)\delta g^{ij} \qquad \text{(Ek 5.29)}$$

olur. (Ek 5.6) ifadesinin varyasyonu sonucu elde edilen,

$$T_{mn} = g_{mn}L_m - 2\frac{\delta L_m}{\delta g^{mn}} \qquad \text{(Ek 5.30)}$$

ifadesi, (Ek 5.28) ifadesinde işleme sokulduğunda, Θ_{ij}'nin T_{ij} ve L_m'ye bağlılığı için,

$$\Theta_{ij} = g_{ij}L_m - 2T_{ij} - 2g^{mn}\frac{\delta}{\delta g^{jj}}\left(\frac{\delta L_m}{\delta g^{mn}}\right) \qquad \text{(Ek 5.31)}$$

elde edilir. S_m'nin varyasyonu ise, (Ek 5.4)'den, (Ek 5.6) ve (Ek 5.11.c) ifadelerinin de kullanımı ile δS_m,

$$\delta S_m = -\frac{1}{2}\int_V d^4x\sqrt{-g}T_{ij}\delta g^{ij} \qquad \text{(Ek 5.32)}$$

şeklinde elde edilir.

(Ek 5.25), (Ek 5.26), (Ek 5.29) ve (Ek 5.32) ifadeleri, (Ek 5.16) ifadesinde işleme sokulur ve düzenlemeler yapılırsa,

$$\delta S = \frac{1}{2k^2}\int V^2 d^4x\sqrt{-g}\,\Big\{\Big[f_R R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}f + f_G\big(2RR_{ij} - 4R_i{}^k R_{jk} - 4R_j{}^k R_{ik} + 2R_i^{km}R_{jklm}\big) + f_T\big(T_{ij}+\Theta_{ij}\big) - k^2 T_{ij}\Big]\delta g^{ij} + f_R\left(g_{ij}\Box\delta g^{ij} - \nabla_i\nabla_j\big(\delta g^{ij}\big)\right) + f_G\big[-2R\nabla_i\nabla_j\big(\delta g^{ij}\big) - 4R_{ij}\Box\big(\delta g^{jj}\big) + 4R_i^m\nabla_j\nabla_m\big(\delta g^{jj}\big) + 4R_j^m\nabla_i\nabla_m\big(\delta g^{ij}\big) - 4g_{ij}R^{mm}\nabla_m\nabla_n\big(\delta g^{jj}\big) - 4R_i^{mm}{}_j\nabla_n\nabla_m\big(\delta g^{ij}\big)\big]\Big\} \quad \text{(Ek 5.33)}$$

elde edilir. Bu ifadede, son dokuz terimde δg^{ij} varyasyonu, türev içerisinde yer almaktadır. Bu terimler için kısmi integrasyon uygulanır ve V hacmi üzerinden integrasyon, Gauss teoremi aracılığıyla V'yi kuşatan ∂V sınır yüzey üzerine dönüştürüldüktan sonra (Ek 5.3) ifadesinde yer alan sınır koşulları uygulanırsa, bu terimler sıfırlanır ve sonuçta (Ek 5.33) ifadesindeki aksiyon,

$$\delta S = \frac{1}{2k^2}\int_V d^4x\sqrt{-g}\,\Big[f_R R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}f + g_{ij}\Box f_R - \nabla_i\nabla_j f_R + f_G\big(2RR_{ij} - 4R_i{}^k R_{jk} - 4R_j{}^k R_{ik} - 4R_{iklm}R^{km} + 2R_i^{klm}R_{jklm}\big) - 2R\nabla_i\nabla_j f_G - 4R_{ij}\Box f_G + 4R_i^m\nabla_j\nabla_m f_G + 4R_j{}^m\nabla_i\nabla_m f_G - 4g_{ij}R^{mn}\nabla_m\nabla_n f_G - 4R_i^{mn}{}_j\nabla_n\nabla_m f_G + f_T\big(T_{ij}+\Theta_{ij}\big) - k^2 T_{ij}\Big]\delta g^{ij}$$

(Ek 5.34)

ifadesine indirgenir ve $\delta S = 0$ stasyoner koşulundan da

$$f_R R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}f + g_{ij}\Box f_R - \nabla_i\nabla_j f_R + f_G\big(2RR_{ij} - 4R_i{}^k R_{jk} - 4R_j{}^k R_{ik} - 4R_{iklm}R^{kn} + 2R_i^{km}R_{jkmm}\big) - 2R\nabla_i\nabla_j f_G - 4R_{ij}\Box f_G + 4R_i^m\nabla_j\nabla_m f_G + 4R_j{}^m\nabla_i\nabla_m f_G - 4g_{ij}R^{mm}\nabla_m\nabla_n f_G - 4R_i^{mn}{}_j\nabla_n\nabla_m f_G + f_T\big(T_{ij}+\Theta_{ij}\big) - k^2 T_{ij} = 0 \quad \text{(Ek 5.35)}$$

elde edilir.

4-boyutta G Gauss-Bonnet invaryantı, bir topolojik invaryanttır. Yani, G teriminin aksiyona toplamsal olarak eklenmesi, Einstein denklemlerini değiştirmemektedir. Dolayısıyla, $f(R,G,T) = R + G$ olduğunda, $f_R = 1, f_G = 1, f_T = 0$ olacağından (Ek 5.35) ifadesinin indirgeneceği,

$$R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R - \frac{1}{2}g_{ij}G + 2RR_{ij} - 4R_i^k R_{jk} - 4R_{ikj}R^{kl} + 2R_i^{klm}R_{jklm} - k^2 T_{ij} = 0$$

(Ek 5.36)

denklemi, Einstein denklemleri olmalıdır. Buradan,

$$-\frac{1}{2}g_{ij}G + 2RR_{ij} - 4R_i^k R_{jk} - 4R_{ikj}R^{kl} + 2R_i^{kmm}R_{jklm} = 0 \qquad \text{(Ek 5.37)}$$

olması gerektiği sonucu çıkmaktadır. Bu özdeşlik, (Ek 5.35) ifadesinde işleme sokulursa, sonuçta $f(R,G,T)$ gravitasyonun alan denklemleri,

$$f_R R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}f - \nabla_i\nabla_j f_R + g_{ij}\Box f_R + \frac{1}{2}g_{ij}Gf_G - 2R\nabla_i\nabla_j f_G - 4G_{ij}\Box f_G + 4R_i^m\nabla_j\nabla_m f_G + 4R_j^m\nabla_i\nabla_m f_G - 4g_{ij}R^{mn}\nabla_m\nabla_n f_G - 4R_i^{mn}{}_j\nabla_n\nabla_m f_G = k^2T_{ij} - f_T\left(T_{ij} + \Theta_{ij}\right) \qquad \text{(Ek 5.38)}$$

şeklinde elde edilir. Burada (Ek 5.31) ifadesi ile verilen Θ_{ij} teriminin açık ifadesi, kozmik akışkanın

$$T_{ij} = (\mu + p)u_i u_j + pg_{ij} \qquad \left(u_i u^i = -1\right) \qquad \text{(Ek 5.39)}$$

enerji-momentum tansörü ile gösterilen bir mükemmel akışkan olduğu varsayımı altında hesaplayalım. Fakat (Ek 5.39) ifadesini veren L_m madde Lagrange yoğunluğu için tek değil ancak $L_m = p$ ve $L_m = -\mu$ olmak üzere farklı iki ifade bulunmaktadır[182]. Bu ifadeler, (Ek 5.31)'den;

$$L_m = p \quad \text{için:} \quad \Theta_{ij} = pg_{ij} - 2T_{ij} \qquad \text{(Ek 5.40.a)}$$

$$L_m = -\mu \quad \text{için:} \quad \Theta_{ij} = -\mu g_{ij} - 2T_{ij} \qquad \text{(Ek 5.40.b)}$$

şeklinde elde edilirler. (Ek 5.38) ifadesi, (Ek 5.40.a) seçimi için,

$$f_R R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}f - \nabla_i\nabla_j f_R + g_{ij}\Box f_R + \frac{1}{2}g_{ij}Gf_G - 4g_{ij}R^{mn}\nabla_m\nabla_n f_G - 4G_{ij}\Box f_G - 2R\nabla_i\nabla_j f_G + 4R_i^m\nabla_j\nabla_m f_G + 4R_j^m\nabla_i\nabla_m f_G - 4R_i^{mn}{}_j\nabla_n\nabla_m f_G = k^2T_{ij} + f_T\left(T_{ij} - pg_{ij}\right) \qquad \text{(Ek 5.41.a)}$$

şeklinde, (Ek 5.40.b) seçimi için ise,

$$f_R R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} f - \nabla_i \nabla_j f_R + g_{ij} \square f_R + \frac{1}{2} g_{ij} G f_G - 4 g_{ij} R^{mn} \nabla_m \nabla_n f_G - 4 G_{ij} \square f_G - 2R \nabla_i \nabla_j f_G + 4 R_i^m \nabla_j \nabla_m f_G + 4 R_j^m \nabla_i \nabla_m f_G - 4 R_i^{mn}{}_j \nabla_n \nabla_m f_G = k^2 T_{ij} + f_T\left(T_{ij} + \mu g_{ij}\right)$$

(Ek 5.41.b)

şeklinde elde edilir.

Diğer yandan, $f(R, G, T)$ gravitasyonun alan denklemlerinin, özel seçimleri için, literatürdeki diğer f gravitasyon teorilerine indirgenebileceği kolayca görülebilir:

$f(R, G, T) \equiv f(R)$ alarak, $\boldsymbol{f(R)}$ **gravitasyon**:

$$f_R R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} f - \nabla_i \nabla_j f_R + g_{ij} \square f_R = k^2 T_{ij} \quad \text{(Ek 5.42)}$$

$f(R, G, T) \equiv f(R, G)$ alarak, $\boldsymbol{f(R, G)}$ **gravitasyon**:

$$f_R R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} f - \nabla_i \nabla_j f_R + g_{ij} \square f_R + \frac{1}{2} g_{ij} G f_G - 4 g_{ij} R^{mn} \nabla_m \nabla_n f_G - 4 G_{ij} \square f_G - 2R \nabla_i \nabla_j f_G + 4 R_i^m \nabla_j \nabla_m f_G + 4 R_j{}^m \nabla_i \nabla_m f_G - 4 R_i^{mn}{}_j \nabla_n \nabla_m f_G = k^2 T_{ij} \quad \text{(Ek 5.43)}$$

$f(R, G, T) \equiv f(R, T)$ alarak, $\boldsymbol{f(R, T)}$ **gravitasyon**:

$L_m = p$ için: $f_R R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} f - \nabla_i \nabla_j f_R + g_{ij} \square f_R = k^2 T_{ij} + f_T\left(T_{ij} - p g_{ij}\right)$ (Ek 5.44.a)

ve

$L_m = -\mu$ için: $f_R R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} f - \nabla_i \nabla_j f_R + g_{ij} \square f_R = k^2 T_{ij} + f_T\left(T_{ij} + \mu g_{ij}\right)$ (Ek 5.44.b)

olur.

Bu adımlar doğrultusunda, tezimizde ele aldığımız $\boldsymbol{f(T, \mathcal{T})}$ **gravitasyonun** (T torsiyon ve $\mathcal{T}$ enerji-momentum tansörünün izi) L_m, madde Lagrange yoğunluğundan hareketle aksiyon ifadesi,

$$s = \int dx^4 e \left\{ \frac{1}{2k^2} f(T, \mathcal{T}) + L_m \right\} \quad \text{(Ek 5.45)}$$

ve burdan hareketle alan denklemleri,

$$e_i{}^{\gamma} S_{\gamma}{}^{\mu\eta} f_{TT}\, \partial_\mu T + e_i{}^{\gamma} S_{\gamma}{}^{\mu\eta} f_{T\mathcal{T}}\, \partial_\mu \mathcal{T} + e^{-1}\, \partial_\mu \left(e e_i{}^{\gamma} S_{\gamma}{}^{\mu\eta} \right) f_T - e_\eta{}^{i} T^{\gamma}{}_{\mu i} S_{\gamma}{}^{\eta\mu} f_T - \frac{1}{4} e_\eta{}^{i} f +$$

$$f_T \omega^{\ \gamma}{}_{\eta\mu} S_{\gamma}{}^{\eta\mu} - \frac{f_{\mathcal{T}}}{2} \left(e_\eta{}^{i} T_i{}^{\eta} + p_t e_\eta{}^{i} \right) = -4\pi e_\eta{}^{i} T_i{}^{\eta} \qquad \text{(Ek 5.46)}$$

şeklindedir.

Ek 6. Bazı Sabitler ve Boyutları.

L: uzunluk, M: kütle, T: zaman olmak üzere:

$\pi = 3.14159$

$c = 2.998 \times 10^{8}\ \mathrm{ms}^{-1}$ $\qquad [c] = LT^{-1}$

$G_N = 6.672 \times 10^{-11}\ \mathrm{m}^3\ \mathrm{kg}^{-1}\ \mathrm{s}^{-2}$ $\qquad [G_N] = L^3 M^{-1} T^{-2}$

$\kappa^2 = \frac{8\pi G_N}{c^4} = 2.076 \times 10^{-43}\ \mathrm{m}^{-1}\ \mathrm{kg}^{-1}\ \mathrm{s}^2$ $\qquad [\kappa^2] = L^{-1} M^{-1} T^2$

$ışık\ yılı = 9.460 \times 10^{15}\ \mathrm{m} \approx 10^{13}\ \mathrm{km}$ $\qquad [ışık\ yılı] = L$

$parsec\ (pc) = 3.086 \times 10^{16}\ m \approx 3.26\ ışık\ yılı$ $\qquad [parsec] = L$

$H_0 = 100 h_0 kms^{-1} Mpc^{-1} = 3.241 h_0 \times 10^{-18}\ \mathrm{s}^{-1}$ $\qquad [H_0] = T^{-1}$

$(0.5 \leq h_0 \leq 1)$

$H_0/c = 1.081 h_0 \times 10^{-26}\ m^{-1}$ $\qquad [H_0/c] = L^{-1}$

$c/H_0 = 9.250 h_0 \times 10^{+25}\ m$ $\qquad [c/H_0] = L$

$\kappa^2 c^4 / 3H_0{}^2 \equiv 8\pi G_N / 3H_0{}^2 = 5.322 h_0^{-2} \times 10^{+25}\ \mathrm{m}^3\ \mathrm{kg}^{-1}$ $\qquad [\kappa^2 c^4 / 3H_0{}^2] = M^{-1} L T^2$

Hubble yaşı: $H_0^{-1} \cong 3.086 h_0^{-1} \times 10^{17}\ s$ $\qquad [H_0^{-1}] = T$

$\cong 9.8\ h_0^{-1} \times 10^{9} yıl$

$0.5 \leq h_0 \leq 1 \ \Rightarrow\ 50 \leq H_0 \leq 100 \mathrm{kms}^{-1} Mpc^{-1}$ ve $9.8 \times 10^{9} \leq H_0^{-1} \leq 19.6 \times 10^{9} yıl$

Madde yoğunluğu: ρ $\qquad [\rho] = ML^{-3}$

Enerji yoğunluğu: $\mu = \rho c^2$	$[\mu] = ML^{-1}T^{-2}$
Basınç: p	$[p] = ML^{-1}T^{-2} = [\mu]$
Ricci eğrilik skaleri: R	$[R] = L^{-2}$
Torsiyon invaryantı: T	$[T] = L^{-1}$
Enerji-momentum tansörünün izi: $\mathcal{T}$	$[\mathcal{T}] = ML^{-1}T^{-2}$

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	Aylin ÇALIŞKAN
Doğum Yeri	
Doğum Tarihi	
Uyruğu	☑ T.C. ❒ Diğer:
E-Posta Adresi	
Web Adresi	

Eğitim Bilgileri Lisans	
Üniversite	İstanbul Üniversitesi
Fakülte	Fen Fakültesi
Bölümü	Fizik
Mezuniyet Yılı	24.06.2016

Yüksek Lisans	
Üniversite	İstanbul Üniversitesi
Enstitü Adı	Fen Bilimleri Enstitüsü
Anabilim Dalı	Fizik Anabilim Dalı
Programı	Matematiksel Fizik Programı

Doktora	
Üniversite	İstanbul Üniversitesi
Enstitü Adı	Fen Bilimleri Enstitüsü
Anabilim Dalı	Fizik Anabilim Dalı
Programı	Matematiksel Fizik Programı

Makale ve Bildiriler

Caliskan, A., Zulqarnain, R.M., Güdekli, E., Siddique, I., Ahmad, H., and Askar, S., 2023, Structural properties of a new class of stellar structures in modified teleparallel gravity, *Frontiers in Astronomy and Space Sciences*, 10 (September), 1–14.

Shekh, S.H., Caliskan, A., Mustafa, G., Maurya, S.K., Pradhan, A., and Güdekli, E., 2024, Observational constraints on parameterized deceleration parameter with f(Q, T) gravity, *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 21 (3), 1–24.

Jan, M., Liu, S. min, Basit, A., Caliskan, A., and Güdekli, E., 2023, A structural analysis of self-gravitating anisotropic stars via equation of state in modified teleparallel gravity, *Results in Physics*, 51.

Jan, M., Ashraf, A., Basit, A., Caliskan, A., and Güdekli, E., 2023, Traversable Wormhole in f(Q) Gravity Using Conformal Symmetry, *Symmetry*, 15 (4), 1–13.

Chen, R.Y., Mustafa, G., Caliskan, A., and Güdekli, E., 2023, New wormhole solutions using dark matter profiles with the signature of observational data in teleparallel gravity, *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 20 (8), 1–15.

Shekh, S.H., Mustafa, G., Caliskan, A., Güdekli, E., and Pradhan, A., 2023, Observational constraints on transit reconstructed Tsallis f (T) gravity, *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 20 (12), 1–18.

Javed, F., Basit, A., Caliskan, A., and Güdekli, E., 2023, Thermal fluctuations, QNMs, and emission energy of charged ADS black hole with nonlinear electrodynamics, *Frontiers in Astronomy and Space Sciences*, 10 (November), 1–14.

Caliskan A., Gudekli E., 2018, Examination of Anisotropic Bianchi V Types For Perfect Fluid Universe Models, *34. TFD Conference*, Bodrum, Turkey.

E. Güdekli, A. Çalışkan, 2018,Perfect Fluid LRS Bianchi Universe in Myrzakulov Gravity, *AIP Conference Proceedings 2042*, 020052.

A. Caliskan, G. D. Esmer, 2018, Black Holes And Gravitational Waves, *34. TFD Conference*, Bodrum, Turkey.

Caliskan, A., Güdekli, E., 2023, Teleparalel Gravitasyonda Solucan Deliği Çözümlerinin Araştırılması, *9. Bilim Günleri Kongresi*, İstanbul, Türkiye.

Caliskan, A., Güdekli, E., 2023, Investigation Of Wormhole Solutions In The Framework Of Weitzenbock Geometry *34. TFD Conference*, Bodrum, Turkey.