



**YÜKSEK MERTEBEDEN KESİRLİ İMPALSİF SINIR DEĞER
PROBLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİ ÜZERİNE**

Esra KAYA

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

TEMMUZ 2024

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Esra KAYA

29/07/2024

YÜKSEK MERTEBEDEN KESİRLİ İMPALSİF SINIR DEĞER PROBLEMLERİNİN
ÇÖZÜMLERİ ÜZERİNE
(Yüksek Lisans Tezi)

Esra KAYA

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Temmuz 2024

ÖZET

Bu tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde yüksek mertebeden Caputo kesirli türev içeren p -nokta impulsif sınır değer problemi için gerekli bazı temel tanımlar ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde çözümlerin varlığı ve tekliği Banach sabit nokta teoremi ve Schaefer'ın sabit nokta teoremiyle ispatlanmış olup elde edilen teorik sonuçlar örneklerle desteklenmiştir. Son olarak, dördüncü bölüm sonuç kısmına ayrılmıştır.

Bilim Kodu : 20404
Anahtar Kelimeler : Kesirli Mertebeden Diferansiyel Denklemler, İmpulsif Diferansiyel Denklemler, Sınır Değer Problemleri, Sabit Nokta Teoremleri
Sayfa Adedi : 35
Danışman : Prof. Dr. Fatma FEN

ON THE SOLUTIONS OF HIGHER ORDER FRACTIONAL IMPULSIVE BOUNDARY VALUE PROBLEMS

(M. Sc. Thesis)

Esra KAYA

GAZİ UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
July 2024

ABSTRACT

This thesis study consists of four chapters. The first chapter provides an introduction section. In the second chapter, some basic definitions and theorems required for the p -point impulsive boundary value problem involving higher order Caputo fractional derivatives are given. In the third chapter, the existence and uniqueness of the solutions are proven with the help of Banach fixed point theorem and Schaefer's fixed point theorem and the theoretical results are supported by examples. Finally, the fourth chapter is devoted to the conclusion.

Science Code : 20404
Keywords : Fractional order differential equations, impulsive differential equations, boundary value problems, fixed point theorems
Number of pages : 35
Supervisor : Prof. Dr. Fatma FEN

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim esnasında tez konumun belirlenmesi, çalışmalarımın planlanıp yürütülmesi ve bu tezin hazırlanmasında benden desteğini esirgemeyen ve değerli vaktini bana ayıran saygıdeğer danışman hocam Prof. Dr. Fatma FEN 'e, tezimle ilgili değerlendirmeleri ile tezime büyük katkı sunan tez jüri üyelerine, 2210-A Yurt İçi Yüksek Lisans Burs Programı kapsamında beni destekleyen TÜBİTAK'a eğitim hayatım ve tüm yaşantım boyunca bu noktaya gelmemi sağlayan, maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen ve bu süreçte yaşadığım tüm zorluklarda yanımda olan varlıklarıyla gurur duyduğum kıymetli aileme sonsuz sevgi, saygı ve teşekkürlerimi sunarım.



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR	viii
1. GİRİŞ.....	1
2. TANIMLAR VE TEOREMLER.....	5
2.1. Tanım ve Teoremler	5
3. YÜKSEK MERTEBEDEN KESİRLİ İMPALSİF SINIR DEĞER PROBLEMİNİN ÇÖZÜMLERİNİN VARLIĞI VE TEKLİĞİ	15
3.1. Problemin Çözümü.....	15
3.2. Çözümlerin Varlığı ve Tekliği	22
3.3. Örnekler	28
4. SONUÇ VE ÖNERİLER	31
KAYNAKLAR.....	33
ÖZGEÇMİŞ	35

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılan simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler

Açıklamalar

$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^n$	n -boyutlu öklid uzayı, $n \in \mathbb{N}$
$u^{(i)}$	u 'nun i . mertebeden türevi
$\ u\ $	Öklid normu
$\Gamma(x)$	Gamma fonksiyonu
I^α	α . mertebeden Riemann Liouville kesirli integrali
${}^L D^\alpha$	α . mertebeden Riemann Liouville kesirli türevi
${}^C D^\alpha$	α . mertebeden Caputo kesirli türevi

1. GİRİŞ

300 yıldır üzerinde durulan bir konu olan türev birçok bilim insanının dikkatini çekmiştir. Newton, L'Hospital ve Leibniz gibi bilim insanları türevin mertebesini başlangıçta hep tam sayı olarak düşünmüşlerdir. Daha sonra bu konu birçok bilim insanının da dikkatini çekmiştir ve türevin mertebesinin tam sayıdan farklı olabileceği üzerinde durmuşlardır [1]. Bu sebeple "Türevin mertebesini neden sadece tam sayı olarak düşünülüyor? Daha geniş sayı kümesine genişletilebilir mi?" sorusuna değinilmiştir. Hatta bu soruyu ilk defa 30 Eylül 1695 yılında Leibniz, L'Hospital'a yazdığı mektupta sormuştur [2]. Böylelikle kesirli mertebeden türev kavramı ilk olarak 1695 yılında Leibniz tarafından ortaya atılmıştır. Leibniz gibi birçok bilim insanı da kesirli mertebeden türev ile ilgili çalışmalar yapmıştır. Bunlardan bazıları; Riemann Liouville, Weyl, Lagrange, Abel, Euler, Fourier ve Laplace'dır [3]. Kesirli mertebeden türev için bir çok tanım yapılmıştır fakat bu çalışmada Riemann Liouville ve Caputo kesirli mertebeden türev tanımlarına yer verilmiştir. Ayrıca, kesirli mertebeden türevin her tanımında mertebe tam sayı olarak alındığında aynı sonuç çıkmaktadır. Yapılan bazı çalışmalarda tanımlar arasında belli şartlar altında kolaylıkla geçiş yapılmasına rağmen, tanımların ifadeleri ve fiziksel yorumları farklıdır [4,5]. Aslında kesirli analizde birçok türev tanımının olması, çözülen problemin türüne göre istenilen kesirli mertebeden türev tanımının kullanılması için kolaylık sağlar. Ayrıca, kesirli mertebeden türevlerle oluşturulan modeller, bazı etkilerin ihmal edildiği klasik tamsayı mertebeli modellerle karşılaştırıldığında kesirli mertebeden türevler daha avantajlıdır. Kesirli mertebeden türevlerin avantajları, gerçek malzemelerin mekanik ve elektriksel özelliklerinin modellenmesinde ve ayrıca tanımlamalarda daha çok ön plana çıkar. Kesirli mertebeden türev özellikle son yıllarda matematik, mühendislik, fizik ve biyoloji gibi alanlarda oldukça geniş kullanım alanına sahiptir [6–9].

Ayrıca bu çalışmada önemli bir yere sahip olan impulsif diferansiyel denklemler hakkında bilgi verelim. Doğadaki çoğu uygulama problemi, fiziksel olayların süreksiz özelliklerinden etkilenirler. Çalışılan bu uygulama probleminin süreksiz olduğu durumların, uygulama probleminin toplam süresiyle kıyaslandığında ihmal edilecek kadar kısa bir sürede gerçekleşir. Bu sürece etki eden kısa süreli dış etki yani süreksizlik durumu, impuls olarak

adlandırılan anlık değışikliklere sebep olmaktadır. İşte bu anlık değışiklikler sistemde sürecin davranışında çok büyük farklılıklar gösterebilmektedir. Adi diferansiyel denklemlerle yapılan modelleme bu anlık değışimleri göz ardı etmektedir. Bu yüzden bu süreçleri göz ardı etmemize gerek olmadan matematiksel olarak modellememizi sağlayan impulsif diferansiyel denklemler diye adlandırılan süreksiz olan sistemler kullanılmaktadır. Böylelikle önemsiz gibi görünen anlık değışimlerin sebep olduğu sistemlerde daha doğru sonuçlar elde etmiş olunur [10]. Buradan impulsif denklemler ani kuvvetlerin veya darbelerin etkilerini matematiksel olarak modelleyen ve sistemlerin zamanla değışen davranışlarını açıklayan önemli bir araç olduğu söylenebilir [11]. Bu tür impulsif denklemler fizik, mühendislik, ekonomi, biyoloji gibi bir çok alanda kullanılır [5, 12–17]. Örneğin finansal piyasalarda ani fiyat değışikliklerini veya ekolojik sistemlerde doğal afetlerin etkilerini modellemek için kullanılır [18].

Kesirli mertebeden

$$\left\{ \begin{array}{l} {}^C D_{0+}^{\alpha} u(t) = f(t, u(t)), t \in J' \\ \Delta u(t_k) = I_k(u(t_k)), \Delta u'(t_k) = \bar{I}_k(u(t_k)), \\ \Delta u''(t_k) = \tilde{I}_k(u(t_k)), k = 1, 2, \dots, m. \\ au(0) + bu'(0) = \sum_{i=1}^{p-2} c_i u(\xi_i), \\ cu(1) + du'(1) = \sum_{i=1}^{p-2} d_i u(\xi_i), u''(0) = 0 \end{array} \right. \quad (1.1)$$

impulsif sınır değer problemi Tokmak Fen [19] tarafından çalışılmıştır. Burada ${}^C D_{0+}^{\alpha}$, $\alpha \in (2, 3)$ mertebeden Caputo kesirli türevidir. Çözümlerin varlığı ve tekliğini göstermek için Schaefer'in sabit nokta teoremi ve Banach sabit nokta teoremi kullanılmıştır. Bu çalışmadan alınan motivasyonla aşağıdaki kesirli mertebeden impulsif sınır değer problemi çözülecektir:

$$\left\{ \begin{array}{l} {}^C D_{0+}^{\alpha} u(t) = f(t, u(t)), t \in J' \\ \Delta u(t_k) = I_k(u(t_k)), k = 1, 2, \dots, m \\ \Delta u^{(j)}(t_k) = I_k^{(j)}(u(t_k)), j = 1, 2, \dots, n-1. \\ au(0) + bu'(0) = \sum_{i=1}^{p-2} c_i u(\xi_i), \\ cu(1) + du'(1) = \sum_{i=1}^{p-2} d_i u(\xi_i), u^{(l)}(0) = 0, l = 2, 3, \dots, n-1. \end{array} \right. \quad (1.2)$$

Burada ${}^C D_0^{\alpha}$, $\alpha \in (n-1, n)$ mertebeden Caputo kesirli türevidir. a , b , c ve d reel sabitlerdir. $f : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $I_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $j = 1, 2, \dots, n-1$ iken $I_k^{(j)} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları süreklidir. $0 < \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_{p-2} < 1$, her $i = 1, \dots, p-2$ için $c_i, d_i \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \dots, m$ iken $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k < \dots < t_m < t_{m+1} = 1$, $J = [0, 1]$, $J' = J \setminus \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$, $\Delta u(t_k) = u(t_k^+) - u(t_k^-)$ ve $u(t_k^+) = \lim_{t \rightarrow t_k^+} u(t)$. $j = 1, 2, \dots, n-1$ iken $\Delta u^{(j)}(t_k)$, $\Delta u(t_k)$ tanımına benzer şekilde tanımlanabilir.

Bu çalışmanın ikinci bölümünde temel tanımlar, teoremler ve örnekler verilmiştir. Üçüncü bölümde ise çözümlerin varlığı ve tekliği Banach sabit nokta teoremiyle, en az bir çözümünün varlığı ise Schaefer'in sabit nokta teoremi kullanılarak ispatlanmıştır. Daha sonra, elde edilen teorik sonuçları desteklemek için örnekler verilmiştir. Son olarak dördüncü bölüm ise sonuç ve öneriler kısmına ayrılmıştır.



2. TANIMLAR VE TEOREMLER

Bu bölümde, ilerleyen bölümlerde ihtiyaç duyulan tanımlar ve teoremler verilecektir.

2.1. Tanım ve Teoremler

2.1.1. Tanım

Gamma fonksiyonu $0 < x < \infty$ değerleri için Euler integrali denilen ;

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} s^{x-1} e^{-s} ds$$

genelleştirilmiş integrali ile tanımlanır [20].

Gamma fonksiyonunun temel özelliklerinden biri,

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{\infty} e^{-s} s^x ds = \left(-e^{-s} s^x \right) \Big|_{s=0}^{s=\infty} + x \int_0^{\infty} e^{-s} s^{x-1} ds = x\Gamma(x)$$

eşitliğinden,

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), (x \in \mathbb{R}) \tag{2.1}$$

elde edilir. Ayrıca (2.1) eşitliğini ve $\Gamma(1) = 1$ olduğunu kullanarak,

$$\Gamma(2) = 1.\Gamma(1) = 1 = 1!$$

$$\Gamma(3) = 2.\Gamma(2) = 2.1! = 2!$$

$$\Gamma(4) = 3.\Gamma(3) = 3.2! = 3!,$$

$\vdots$

$$\Gamma(n+1) = n.\Gamma(n) = n.(n-1)! = n!$$

olarak elde edilir [4]. Gamma fonksiyonunun bazı özel değerleri ise,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

şeklindedir.

2.1.2. Tanım

Bir $g : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t > 0$, $\alpha > 0$ olmak üzere,

$$I_{0+}^{\alpha} g(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} g(s) ds$$

integraline α . mertebeden Riemann Liouville kesirli integrali denir. Burada Γ , Gamma fonksiyonudur [20].

Örnek

$f(t) = t$ fonksiyonunun $\frac{1}{2}$. mertebeden integralini bulunuz.
 $\alpha = \frac{1}{2}$ için;

$$I_{\alpha+}^{1/2} f(t) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^t \frac{s}{(t-s)^{\frac{1}{2}}} ds$$

burada $t - s = u$ dönüşümü yapılarak gerekli işlemler yapıldığında $\frac{4}{3\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} t^{\frac{3}{2}}$ olarak

bulunur. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ olduğundan sonuç $\frac{4}{3\sqrt{\pi}} t^{\frac{3}{2}}$ olur.

2.1.3. Tanım

Bir $g : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu olmak üzere α . mertebeden Riemann Liouville kesirli türevi

$${}^L D_{0+}^{\alpha} g(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t \frac{g(s)}{(t-s)^{\alpha+1-n}} ds, \quad t > 0$$

şeklinde tanımlanır. Burada $n=[\alpha]+1$ olmak üzere $[\alpha]$, α nın tam sayı kısmıdır [20].

Örnek

$f(t) = t$ fonksiyonunun $\frac{1}{2}$. mertebeden Riemann Liouville kesirli türevini bulunuz.
 $\alpha = \frac{1}{2}$ ve $n = 1$ için;

$${}^L D_{0+}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma\left(1 - \frac{1}{2}\right)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{s}{(t-s)^{\frac{1}{2}}} ds$$

buradan gerekli işlemler yapıldığında sonuç $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{t}$ olarak bulunur.

2.1.4. Tanım

sürekli $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu n kez türevlenebilir bir fonksiyon ve $\alpha > 0, t > 0$ olmak üzere Caputo kesirli türevi,

$${}^C D_{0+}^{\alpha} g(t) = {}^L D_{0+}^{\alpha} \left[g(t) - \sum_{i=0}^n -1 \frac{g^{(i)}(0)}{i!} \right]$$

şeklinde tanımlanır. Burada $n=[\alpha]+1$ olmak üzere $[\alpha]$, α nın tam sayı kısmıdır [20].

Tanım 2.1.4 den $f(t) = t^p$ şeklindeki fonksiyonların genel formu,

$${}^C D^{\alpha} f(t) = \begin{cases} \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\alpha+1)} t^{p-\alpha}, & p > n-1, p \in \mathbb{R} \\ 0, & p \leq n-1, p \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (2.2)$$

şeklinde yazılabilir [21].

Örnek

$f(t) = t$ fonksiyonunun $\frac{1}{2}$. mertebeden Caputo kesirli türevini bulunuz.

Denklemden verilen $\alpha = \frac{1}{2}$ ve $n = 1$ olmak üzere;

$${}^C D_{0+}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma\left(1 - \frac{1}{2}\right)} \int_0^t \frac{1}{(t-s)^{\frac{1}{2}}} ds$$

buradan gerekli işlemler yapıldığında sonuç $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{t}$ olarak bulunur. Diğer taraftan verilen değerler (2.2) denkleminde yerine yazılırsa aynı sonuç çıkacaktır.

Örnek

$f(t) = t^2$ fonksiyonunun $\frac{4}{3}$. mertebeden Caputo kesirli türevini bulunuz.

Denklemden verilen $\alpha = \frac{4}{3}$ ve $n = 2$ olmak üzere;

$${}^C D_{0+}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma\left(2 - \frac{4}{3}\right)} \int_0^t \frac{2}{(t-s)^{\frac{1}{3}}} ds$$

buradan gerekli işlemler yapıldığında sonuç $\frac{3}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} \sqrt[3]{2}$ olarak bulunur. Diğer taraftan verilen değerler (2.2) denkleminde yerine yazılırsa aynı sonuç çıkacaktır.

2.1.5. Tanım

İmpulsif diferansiyel denklemlerin tanımını vermek için öncelikle adi diferansiyel denklemlere değinilmelidir. Adi diferansiyel denklemlerle modellenen sistemleri $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$ ve bir $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sürekli fonksiyonu için genellikle,

$$x' = f(t, x) \tag{2.3}$$

şeklinde ifade edilmektedir. Ancak, pratikte x durum değişkeninde anlık değişimlerin olduğu uygulamalar mevcuttur. Anlık değişim kavramından bahsedildiği için impulsif

kavramından bahsedebiliriz. Böyle uygulamalar için de impulsif diferansiyel denklemlerden yararlanılmaktadır.

Temel olarak impulsif diferansiyel denklemler, sabit zamanlı impulsif diferansiyel denklemler ve değişken zamanlı impulsif diferansiyel denklemler olmak üzere iki grupta sınıflandırılır. Bu çalışmada sabit zamanlı impulsif diferansiyel denklemlerden bahsedilecektir. Sabit zamanlı impulsif diferansiyel denklemler,

$$x' = f(t, x), t \neq \theta_i, \quad (2.4)$$

$$\Delta x|_{t=\theta_i} = I_i(x)$$

şeklinde tanımlanabilir [10]. Burada, $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$, f ve I_i ise n -boyutlu, sürekli fonksiyonlardır. θ_i , ardışık tam sayılardan oluşan bir J kümesi tarafından oluşturulan reel değerli ve artan belirli bir zaman dizisi olmak üzere $t = \theta_i$, $i \in J$, impulsların gerçekleştiği zamanları göstermektedir. θ_i dizisinin, boş kümeden farklı sonsuz bir küme veya $|i| \rightarrow \infty$ iken $|\theta_i| \rightarrow \infty$ olacak biçimde sonsuz bir küme olduğu kabul edilmektedir.

$$\Delta x|_{t=\theta_i} = x(\theta_i+) - x(\theta_i) \quad (2.5)$$

olup burada Δx impuls miktarını, $x(\theta_i^+)$ çözümün impulsdan sonraki değeri, $x(\theta_i)$ çözümün impulsdan önceki değerini göstermektedir. Diğer taraftan $x(\theta_i+) = \lim_{t \rightarrow \theta_i+} x(t)$ ve $x(\theta_i) = x(\theta_i-) = \lim_{t \rightarrow \theta_i-} x(t)$ olarak tanımlanmaktadır. Bu nedenle, çözümlerin impuls noktalarında soldan sürekli olduğu varsayılmaktadır [10].

Sonuç olarak, (2.4) sisteminin çözümleri parçalı sürekli bir fonksiyondur ve $t = \theta_i$ impuls anlarında birinci tür süreksizliklere sahiptir. (2.4) ile verilen impulsif diferansiyel denklemin ne anlama geldiğinin basitçe açıklanması için $J = 1, 2, \dots, p$, $p \in \mathbb{N}$, $t_0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_p$ ve başlangıç değerinin $x(t_0) = x_0$ olduğunu kabul edelim. (2.4) sisteminin bir çözümü (faz noktası) $t \neq \theta_i$, $i = 1, 2, \dots, p$ için (2.3) adi diferansiyel denkleminin bir yörüngesi boyunca hareket eder. Ancak $t = \theta_i$ olduğunda bu çözüm (2.5) denkleminin değeri kadar değişime uğrar. $\phi(t, \sigma, v)$, (2.3) adi diferansiyel denkleminin $\phi(\sigma) = v$ başlangıç koşulunu sağlayan çözümünü gösterebilir. Buna göre (2.4) impulsif diferansiyel denkleminin $[t_0, \theta_1]$ aralığında çözümü, (2.3) diferansiyel denklemi çözülerek

bulunur. O halde, $[t_0, \theta_1]$ aralığında (2.4) sisteminin çözümü $x(t) = \phi(t, t_0, x_0)$ olur. Bu çözüm $t = \theta_1$ değerine geldiğinde, bu çözümde;

$$\Delta x|_{t=\theta_i} = x(\theta_i+) - x(\theta_i) = I_i(x(\theta_i))$$

değeri kadar bir değişime uğrar. Buradan,

$$x(\theta_1^+) = I_i(x(\theta_i)) + x(\theta_1)$$

olduğu görülür.

Genel olarak $x(\theta_1+) \neq x(\theta_1)$ olduğundan yörüngeyi $t = \theta_1$ impuls anında değiştir. İmpalsdan sonra sistemin yörüngesi hareketine $(\theta_1, x(\theta_1+))$ noktasından başlayarak, (2.3) adi diferansiyel denkleminin çözümü boyunca bir sonraki süreksizlik zamanı olan $t = \theta_2$ anına kadar devam eder. Böylelikle, $(\theta_1, \theta_2]$ aralığında (2.4) impulsif denklem sisteminin çözümü $x(t) = \phi(t, \theta_1, x(\theta_1+))$ şeklinde bulunur [10].

Örnek

$$u' = 0, t \neq i, \quad (2.6)$$

$$\Delta u|_{t=i} = 1$$

$u \in \mathbb{R}, i \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $u\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ başlangıç koşulunu sağlaması için gerekli olan (2.6) impulsif diferansiyel denkleminin çözümünü bulunuz.

$u' = 0$ adi diferansiyel denkleminin (ρ, v) noktasından başlayan çözümü,

$$\phi(t, \rho, v) = v$$

olmaktadır.

$t \neq i$ olmak üzere $u' = 0$ olduğu göz önünde bulundurulursa, $t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ aralığında (2.6)

sisteminin çözümü,

$$u(t) = \phi\left(t, \frac{1}{2}, 1\right) = 1$$

bulunur. O halde $u(1) = 1$ olur. $t = 1$ süreksizlik değerinde bu çözümde impals olacaktır. İmpals miktarı,

$$\Delta u|_{t=1} = u(1+) - u(1) = 1$$

şeklinde olduğu görülebilir. Buradan da $u(1+) = u(1) + 1 = 2$ olduğu söylenebilir. Bu durumda impalsdan sonra, $1 < t \leq 2$ için çözümü

$$u(t) = \phi(t, 1, u(1+)) = 2$$

olur. Böylece $u(2) = 2$ eşitliğine ulaşılır. Benzer şekilde devam edilirse, $u(2+) = 3$ ve bunu genelleyerek, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ için,

$$u(n) = n$$

ve

$$u(n+) = n + 1$$

eşitliği elde edilir. Her $u \in \mathbb{R}$ için $\Delta u|_{t=i} = 1 > 0$ olduğundan tüm çözümlerin artan olduğu açıktır. Ayrıca, $u\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ için çözümün sola devam etmesi için $0 < t \leq \frac{1}{2}$ olmak üzere $u(t) = 1$ ve süreksizlik değeri olan $t = 0$ anında soldan sürekli olduğundan

$$u(0+) = 1$$

sonucuna ulaşılır. $t = 0$ anında impalsdan sonraki değer bilindiğine göre, impalsdan önceki $u(0)$ değeri de $u(0+) - u(0) = 1$ eşitliği kullanılarak hesaplandığında $u(0) = 0$ elde edilir. Böylelikle, $-1 < t \leq 0$ için $u(t) = 0$ olduğu görülür. $u(-1+) = 0$ eşitliğinden $u(-1) = -1$ elde edilir. İşlemler bu şekilde yapıldığında, çözüm sola doğru devam ettirebilir.

Sonuç olarak, (2.6) impulsif diferansiyel denkleminin $u\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ başlangıç değerini sağlayan çözümü

$$u(t) = \lceil t \rceil = \min\{n \in \mathbb{Z} : n \geq t\}$$

şeklinde tanımlanan en küçük tam sayı fonksiyonudur [10].

2.1.6. Tanım

$$PC(J, \mathbb{R}) = \left\{ u : u, J \text{ den } \mathbb{R} \text{ ye bir gönderim öyle ki } k = 1, \dots, m \text{ olmak üzere } t \neq t_k \text{ iken } u(t) \text{ sürekli, } u(t_k^+), u(t_k^-) \text{ mevcut ve } u(t_k^-) = u(t_k) \right\}$$

şeklinde tanımlanır. Benzer olarak ;

$$PC^{n-1}(J, \mathbb{R}) = \left\{ PC(J, \mathbb{R}) : t \neq t_k, k = 1, \dots, m \text{ iken } u^{(n-1)}(t) \text{ mevcut ve sürekli } u^{(n-1)}(t_k^-) = u^{(n-1)}(t_k) \right\}$$

şeklinde tanımlanır.

2.1.7. Lemma

$f : J \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sürekli ve $n - 1 < \alpha < n$ olsun. $u \in \mathcal{AC}^n(J, \mathbb{R})$ nun

$${}^C D_{0+}^\alpha u(t) = f(t, u(t)), t \in J$$

denklemini sağlaması için gerek ve yeter şart $u \in PC^{n-1}(J, \mathbb{R})$ ve $t \in J$ için

$$u(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{u^{(i)}(0)}{i!} t^i + \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sum_{0 < t_k < t} \frac{1}{i!} \Delta u^{(i)}(t_k) (t - t_k)^i \right) + \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(s, u(s)) ds \quad (2.7)$$

olmasıdır [22].

2.1.8. Teorem (Banach Sabit Nokta Teoremi)

X bir tam metrik uzay ve $T : X \longrightarrow X$ bir daralma dönüşümü olsun. Bu durumda T dönüşümünün X uzayında tek bir sabit noktası vardır [23].

2.1.9. Teorem (Schaefer'ın Sabit Nokta Teoremi)

$\mathcal{B}$ bir Banach uzayı, ve $T : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}$ tamamen sürekli bir operatör olsun. Eğer,

$$D(\mathcal{B}) = \left\{ u \in \mathcal{B} : \lambda \in [0, 1] \text{ iken } u = \lambda Tu \right\}$$

kümesi sınırlıysa T nin en az bir sabit noktası vardır [24].

2.1.10. Lemma (PC-type Ascoli-Arzela teoremi)

$\Omega \subset PC(J, \mathbb{R})$ olsun. Eğer,

(i) Ω düzgün sınırlıdır.

(ii) Ω $k = 0, 1, \dots, m$ iken J_k da eş süreklidir.

koşulları sağlanıyorsa o zaman Ω , $PC(J, \mathbb{R})$ nin bağıl kompakt alt kümesidir [25].



3. YÜKSEK MERTEBEDEN KESİRLİ İMPALSİF SINIR DEĞER PROBLEMİNİN ÇÖZÜMLERİNİN VARLIĞI VE TEKLİĞİ

Tezin bu bölümünde,

$$\left\{ \begin{array}{l} {}^C D_{0+}^{\alpha} u(t) = f(t, u(t)), t \in J' \\ \Delta u(t_k) = I_k(u(t_k)), k = 1, 2, \dots, m \\ \Delta u^{(j)}(t_k) = I_k^{(j)}(u(t_k)), j = 1, 2, \dots, n-1. \\ au(0) + bu'(0) = \sum_{i=1}^{p-2} c_i u(\xi_i), \\ cu(1) + du'(1) = \sum_{i=1}^{p-2} d_i u(\xi_i), u^{(l)}(0) = 0, l = 2, 3, \dots, n-1. \end{array} \right. \quad (3.1)$$

formundaki impulsif sınır değer problemini ele alacağız. Burada ${}^C D_0^{\alpha}$, $\alpha \in (n-1, n)$ mertebeden Caputo kesirli türevdir. a, b, c ve d reel sabitlerdir. $f : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu ve $j = 1, 2, \dots, n-1$, $k = 1, 2, \dots, m$ iken $I_k^{(j)} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları süreklidir. $0 < \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_{p-2} < 1$, her $i = 1, \dots, p-2$ için $c_i, d_i \in \mathbb{R}$, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k < \dots < t_m < t_{m+1} = 1$, $J = [0, 1]$, $J' = J \setminus \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$, $\Delta u(t_k) = u(t_k^+) - u(t_k^-)$ ve $u(t_k^+) = \lim_{t \rightarrow t_k^+} u(t)$. $j = 1, 2, \dots, n-1$ iken $\Delta u^{(j)}(t_k)$, $\Delta u(t_k)$ tanımına benzer şekilde tanımlanabilir.

Bu bölümde (3.1) yüksek mertebeden kesirli impulsif diferansiyel denkleminin çözümlerinin varlığı araştırılacaktır. Banach sabit nokta teoremi kullanılarak çözümlerin varlığı ve teklığı, Schaefer'in sabit nokta teoremi kullanılarak ise en az bir çözümünün varlığı ispatlanacaktır. Daha sonra, elde edilen teorik sonuçları desteklemek için örnekler verilecektir.

3.1. Problemin Çözümü

Bu bölümde (3.1) probleminin çözümü için eşdeğer bir integral denklem bulunacaktır. Bu integral denklem yardımıyla bir T operatörü tanımlanarak, bu operatörün tamamen sürekli olduğu ispatlanacaktır.

$$\lambda : = ac + ad - bc - \sum_{i=1}^{p-2} d_i \xi_i \left(a - \sum_{i=1}^{p-2} c_i \right) + \sum_{i=1}^{p-2} d_i \left(b - \sum_{i=1}^{p-2} c_i \xi_i \right)$$

$$+c \sum_{i=1}^{p-2} c_i \xi_i \neq 0$$

olduğunu kabul edelim.

3.1.1. Lemma

Yüksek mertebeden kesirli impulsif sınır değer probleminin (3.1) bir çözümü olan $u(t)$ fonksiyonu aşağıdaki integral denkleme denktir:

$$u(t) = \begin{cases} \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(s, u(s)) ds + \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{p-2} c_i \mathcal{D}_u \xi_i \\ \times \left[\left(c + d - \sum_{i=1}^{p-2} d_i \xi_i - \left(c - \sum_{i=1}^{p-2} d_i \right) t \right) \right] \\ + \frac{1}{\lambda} \left(\sum_{i=1}^{p-2} d_i \mathcal{D}_u \xi_i - \mathcal{K}_u \right) \\ \times \left(-b + \sum_{i=1}^{p-2} d_i \mathcal{D}_u \xi_i + \left(a - \sum_{i=1}^{p-2} c_i \right) t \right), \quad t \in J_0, \\ \mathcal{D}_u(t) + \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{p-2} c_i \mathcal{D}_u \xi_i \left[\left(c + d - \sum_{i=1}^{p-2} d_i \xi_i \right) - \left(c - \sum_{i=1}^{p-2} d_i \right) t \right] \\ + \frac{1}{\lambda} \left(\sum_{i=1}^{p-2} d_i \mathcal{D}_u \xi_i - \mathcal{K}_u \right) \left(-b + \sum_{i=1}^{p-2} c_i \xi_i + \left(a - \sum_{i=1}^{p-2} c_i \right) t \right) \\ t \in J_k, k = 1, 2, \dots, m. \end{cases} \quad (3.2)$$

Burada $\mathcal{D}_u(t)$ ve $\mathcal{K}_u$ aşağıda tanımlandığı gibidir.

$$\mathcal{D}_u(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(s, u(s)) ds + \sum_{j=0}^{n-1} \left(\sum_{0 < t_k < t} I_k^{(j)}(u(t_k)) \frac{(t-t_k)^j}{j!} \right) \quad (3.3)$$

ve

$$\mathcal{K}_u = \int_0^1 \left(\frac{c(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{d(1-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \right) f(s, u(s)) ds + c \left(\sum_{0 < t_k < 1} I_k(u(t_k)) \right) \quad (3.4)$$

$$+ \sum_{0 < t_k < 1} \left(\sum_{j=1}^{n-1} I_k^{(j)}(u(t_k)) \left(\frac{c(1-t_k)^j}{j!} + \frac{d(1-t_k)^{j-1}}{(j-1)!} \right) \right)$$

İspat

$u(t)$ nin (3.1) denkleminin bir çözümü olsun. Bu durumda Lemma 2.7 yardımıyla:

$$\begin{aligned} u(t) = & e_1 + e_2 t + e_3 t^2 + \dots + e_{n-1} t^{n-1} + \sum_{j=1}^n \left(\sum_{0 < t_k < t} I_k^{(j)}(u(t_k)) \frac{(t-t_k)^{j-1}}{(j-1)!} \right) \\ & + \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(s, u(s)) ds \end{aligned} \quad (3.5)$$

şeklinde olduğu elde edilir.

$$\begin{aligned} u'(t) = & e_2 + 2e_3 t + \dots + (n-1)e_{n-1} t^{n-2} + \sum_{j=1}^{n-1} \left(\sum_{0 < t_k < t} I_k^{(j)}(u(t_k)) \frac{(t-t_k)^{j-1}}{(j-1)!} \right) \\ & + \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} f(s, u(s)) ds \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} u''(t) = & 2e_3 + \dots + (n-1)(n-2)e_{n-1} t^{n-3} + \sum_{j=1}^{n-2} \left(\sum_{0 < t_k < t} I_k^{(j)}(u(t_k)) \frac{(t-t_k)^{j-1}}{(j-1)!} \right) \\ & + \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-3}}{\Gamma(\alpha-2)} f(s, u(s)) ds \end{aligned} \quad (3.7)$$

(3.7) numaralı denkleme $u''(0) = 0$ koşulunu uygulayarak $e_3 = 0$ elde ederiz. Buna benzer olarak $u^{(l)}(0) = 0$, ($l = 2, 3, \dots, n-1$), koşulunu kullanarak $e_4 = e_5 = e_6 = \dots = e_{n-1} = 0$

elde edilir. Bu sonucu göz önüne alarak $u(t)$ ve $u'(t)$ fonksiyonu tekrardan yazılırsa,

$$u(t) = e_1 + e_2 t + \sum_{j=1}^n \left(\sum_{0 < t_k < t} I_k^{(j)}(u(t_k)) \frac{(t - t_k)^{j-1}}{(j-1)!} \right) + \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(s, u(s)) ds \quad (3.8)$$

$$u'(t) = e_2 + \sum_{j=1}^{n-1} \left(\sum_{0 < t_k < t} I_k^{(j)}(u(t_k)) \frac{(t - t_k)^{j-1}}{(j-1)!} \right) + \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} f(s, u(s)) ds \quad (3.9)$$

şeklinde bulunur. Şimdi $au(0) + bu'(0) = \sum_{i=1}^{p-2} c_i u(\xi_i)$ ve $cu(1) + du'(1) = \sum_{i=1}^{p-2} d_i u(\xi_i)$ koşulları kullanılarak,

$$u(0) = e_1$$

$$u'(0) = e_2$$

$$u(1) = e_1 + e_2 + \sum_{j=0}^{n-1} \left(\sum_{0 < t_k < 1} I_k^{(j)}(u(t_k)) \frac{(1 - t_k)^j}{j!} \right) + \int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(s, u(s)) ds$$

$$u'(1) = e_2 + \sum_{j=1}^{n-1} \left(\sum_{0 < t_k < 1} I_k^{(j)}(u(t_k)) \frac{(1 - t_k)^{j-1}}{(j-1)!} \right) + \int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} f(s, u(s)) ds$$

olarak bulunur. Sınır koşulları kullanılarak;

$$\left(a - \sum_{i=1}^{p-2} c_i \right) e_1 + \left(b - \sum_{i=1}^{p-2} c_i \xi_i \right) e_2 = \sum_{i=1}^{p-2} c_i \mathcal{D}_u(\xi_i) \quad (3.10)$$

ve

$$\left(c - \sum_{i=1}^{p-2} d_i \right) e_1 + \left(c + d - \sum_{i=1}^{p-2} d_i \xi_i \right) e_2 = \sum_{i=1}^{p-2} d_i \mathcal{D}_u(\xi_i) - \mathcal{H}_u \quad (3.11)$$

denklemleri elde edilir. e_1 ve e_2 için (3.10) ve (3.11) doğrusal denklemleri çözüldüğünde ;

$$e_1 = \frac{1}{\lambda} \left[\left(c + d - \sum_{i=1}^{p-2} d_i \xi_i \right) \sum_{i=1}^{p-2} c_i \mathcal{D}_u(\xi_i) + \left(-b + \sum_{i=1}^{p-2} c_i \xi_i \right) \left(\sum_{i=1}^{p-2} d_i \mathcal{D}_u(\xi_i) - \mathcal{K}_u \right) \right] \quad (3.12)$$

ve

$$e_2 = \frac{1}{\lambda} \left[\left(a - \sum_{i=1}^{p-2} c_i \right) \left(\sum_{i=1}^{p-2} d_i \mathcal{D}_u(\xi_i) - \mathcal{K}_u \right) - \left(c - \sum_{i=1}^{p-2} d_i \right) \sum_{i=1}^{p-2} c_i \mathcal{D}_u(\xi_i) \right] \quad (3.13)$$

elde edilir. Bulunan e_1 ve e_2 değerleri (3.8) denkleminde yerine yazılarak (3.2) denklemi elde edilir. $\square$

Şimdi bir T operatörü tanımlanırsa: $T : PC(J, \mathbb{R}) \longrightarrow PC(J, \mathbb{R})$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} Tu(t) = & \mathcal{D}_u(t) + \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{p-2} c_i \mathcal{D}_u(\xi_i) \left[\left(c + d - \sum_{i=1}^{p-2} d_i \xi_i \right) - \left(c - \sum_{i=1}^{p-2} d_i \right) t \right] \\ & + \frac{1}{\lambda} \left(\sum_{i=1}^{p-2} d_i \mathcal{D}_u(\xi_i) - \mathcal{K}_u \right) \left(-b + \sum_{i=1}^{p-2} c_i \xi_i + \left(a - \sum_{i=1}^{p-2} c_i \right) t \right) \end{aligned} \quad (3.14)$$

Burada $\mathcal{D}_u(t)$ ve $\mathcal{K}_u$ sırasıyla (3.3) ve (3.4) de tanımlandığı gibidir. T operatörünün sabit noktaları (3.1) probleminin çözümleri olduğu açıktır.

İşlemlerde kolaylık sağlamak için aşağıdaki kısaltmaları verelim:

$$\gamma_1 = \sup_{t \in [0, 1]} \frac{\left| \left(c + d - \sum_{i=1}^{p-2} d_i \xi_i \right) - \left(c - \sum_{i=1}^{p-2} d_i \right) t \right|}{|\lambda|}$$

$$\gamma_2 = \sup_{t \in [0, 1]} \frac{\left| \left(-b + \sum_{i=1}^{p-2} c_i \xi_i \right) + \left(a - \sum_{i=1}^{p-2} c_i \right) t \right|}{|\lambda|}$$

$$A_1 = \frac{\left| c - \sum_{i=1}^{p-2} d_i \right|}{|\lambda|}, \quad A_2 = \frac{\left| a - \sum_{i=1}^{p-2} c_i \right|}{|\lambda|}$$

şeklinde tanımlanır.

3.1.2. Lemma

$T : PC(J, \mathbb{R}) \longrightarrow PC(J, \mathbb{R})$ operatörü tamamen süreklidir.

İspat

$f, I_k^{(j)}, j = 0, 1, 2, \dots, n-1$ fonksiyonlarının sürekli olduğundan T operatörü de süreklidir. $\Omega, PC(J, \mathbb{R})$ 'nin sürekli bir alt kümesi olsun. Her $u \in \Omega$ için $|f(t, u)| \leq M_1, j = 0, 1, \dots, n-1$ iken $|I_k^{(j)}(u)| \leq M_{j+2}$, olacak şekilde M_j pozitif sabitleri vardır. Böylece $u \in \Omega$ için;

$$\begin{aligned} |\mathcal{D}_u(\xi_i)| &\leq \int_0^{\xi_i} \frac{(\xi_i - s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} |f(s, u(s))| ds + \sum_{j=0}^{n-1} \left(\sum_{0 < t_k < \xi_i} |I_k^{(j)}(u(t_k))| \frac{(\xi_i - t_k)^j}{j!} \right) \\ &\leq \frac{\xi_i^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} M_1 + m \left(\sum_{j=0}^{n-1} M_{j+2} \frac{\xi_i^j}{j!} \right) \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} |\mathcal{H}_u| &\leq \int_0^1 \left(\frac{c(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{d(1-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \right) |f(s, u(s))| ds + c \left(\sum_{0 < t_k < 1} |I_k(u(t_k))| \right) \\ &\quad + \sum_{0 < t_k < 1} \left(\sum_{j=1}^{n-1} |I_k^{(j)}(u(t_k))| \left| \frac{c(1-t_k)^j}{j!} + \frac{d(1-t_k)^{j-1}}{(j-1)!} \right| \right) \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\leq \left(\frac{|c|}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{|d|}{\Gamma(\alpha)} \right) M_1 + m|c|M_2 + m \left(\sum_{j=1}^{n-1} M_{j+2} \left(\frac{|c|}{j!} + \frac{|d|}{(j-1)!} \right) \right)$$

Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} |T_u(t)| &\leq \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} |f(s, u(s))| ds + \sum_{j=0}^{n-1} \left(\sum_{0 < t_k < t} |I_k^{(j)}(u(t_k))| \frac{(t-t_k)^j}{j!} \right) \\ &+ \frac{1}{|\lambda|} \left(\sum_{i=1}^{p-2} |c_i| |\mathcal{D}_u(\xi_i)| \right) \left| \left(c + d - \sum_{i=1}^{p-2} d_i \xi_i \right) - \left(c - \sum_{i=1}^{p-2} d_i \right) t \right| \\ &+ \frac{1}{|\lambda|} \left(\sum_{i=1}^{p-2} |d_i| |\mathcal{D}_u(\xi_i)| - |\mathcal{K}_u| \right) \left| -b + \sum_{i=1}^{p-2} c_i \xi_i + \left(a - \sum_{i=1}^{p-2} c_i \right) t \right| \\ &\leq \frac{M_1}{\Gamma(\alpha+1)} + m \left(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{M_{j+2}}{j!} \right) \\ &+ \sum_{i=1}^{p-2} (\gamma_1 |c_i| + \gamma_2 |d_i|) \left[\frac{\xi_i^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} M_1 + m \left(\sum_{j=0}^{n-1} M_{j+2} \frac{\xi_i^j}{j!} \right) \right] \\ &+ \gamma_2 M_1 \left(\frac{|c|}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{|d|}{\Gamma(\alpha)} \right) M_1 \\ &+ \gamma_2 m |c| M_2 + \gamma_2 m \left(\sum_{j=1}^{n-1} M_{j+2} \left(\frac{|c|}{j!} + \frac{|d|}{(j-1)!} \right) \right) \end{aligned} \quad (3.17)$$

eşitsizlikleri sağlandığı için T operatörü düzgün sınırlıdır. Diğer taraftan herhangi bir $t \in j_k$ için $0 \leq k \leq m$ dir. Ayrıca,

$$\begin{aligned} |(T_u)'(t)| &\leq \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} |f(s, u(s))| ds + \sum_{j=1}^{n-1} \left(\sum_{0 < t_k < t} |I_k^{(j)}(u(t_k))| \frac{(t-t_k)^j}{(j-1)!} \right) \\ &+ \frac{1}{|\lambda|} \left(\sum_{i=1}^{p-2} |c_i| |\mathcal{D}_u(\xi_i)| \right) \left| c - \sum_{i=1}^{p-2} d_i \right| \\ &+ \frac{1}{|\lambda|} \left(\sum_{i=1}^{p-2} |d_i| |\mathcal{D}_u(\xi_i)| - |\mathcal{K}_u| \right) \left| a - \sum_{i=1}^{p-2} c_i \right| \end{aligned} \quad (3.18)$$

olduğu görülür. Bu nedenle,

$$\begin{aligned}
|(T_u)'(t)| &\leq \frac{M_1}{\Gamma(\alpha)} + m \left(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{M_{j+3}}{j!} \right) + \sum_{i=1}^{p-2} (A_1 |c_i| + A_2 |d_i|) \\
&+ \frac{\xi_i^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} M_1 + m \left(\sum_{j=0}^{n-1} M_{j+2} \frac{\xi_i^j}{j!} \right) \\
&+ A_2 M_1 \left(\frac{|c|}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{|d|}{\Gamma(\alpha)} \right) \\
&+ A_2 m |c| M_2 + A_2 m \left(\sum_{j=1}^{n-1} M_{j+2} \left(\frac{|c|}{j!} + \frac{|d|}{(j-1)!} \right) \right)
\end{aligned} \tag{3.19}$$

son eşitsizlik $T(\Omega)$ nin J_k , ($k = 0, 1, \dots, m$) üzerinde eş zamanlı süreklilik durumunu belirtir. PC tipi Arzela-Ascoli teoremine göre $T(\Omega)$, $PC(J, \mathbb{R})$ içinde kompakttır. Sonuç olarak $T : PC(J, \mathbb{R}) \longrightarrow PC(J, \mathbb{R})$ operatörü tamamen sürekli dir. $\square$

3.2. Çözümlerin Varlığı ve Tekliği

Bu bölümde, T operatörü ve Banach sabit nokta teoremi yardımıyla yüksek mertebeden kesirli sınır değer probleminin çözümünün varlığı ve tekliği gösterilecektir. Daha sonra Schaefer'in sabit nokta teoremi kullanılarak problemin en az bir çözümünün olduğu gösterilecektir.

İlk olarak, çözümlerin varlığı ve tekliğini göstermek için aşağıdaki koşullara ihtiyaç duyulmaktadır.

(C1) Her $t \in J$ ve $u, v \in \mathbb{R}$ için $|f(t, u) - f(t, v)| \leq N|u - v|$ olacak şekilde bir N sayısı vardır.

(C2) $N_1, N_2, N_3, \dots, N_n$ pozitif reel sayıları vardır öyle ki tüm $u, v \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \dots, m$ ve $j = 1, 2, \dots, n-1$ için $|I_k(u) - I_k(v)| \leq N_1|u - v|$, $|I_k^{(j)}(u) - I_k^{(j)}(v)| \leq N_{j+1}|u - v|$ eşitsizlikleri sağlanır.

3.2.1. Teorem

(C1) ve (C2) koşulları sağlansın ve

$$N < \frac{1}{n+1} \left(\frac{1 + \gamma_2|c| + \sum_{i=1}^{p-2} (\gamma_1|c_i| + \gamma_2|d_i|)\xi_i^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{\gamma_2|d|}{\Gamma(\alpha)} \right)^{-1},$$

$$N_j < \frac{(j-1)!}{m(n+1)} \left(\sum_{i=1}^{p-2} (\gamma_1|c_i| + \gamma_2|d_i|)\xi_i^{j-1} + 1 + \gamma_2(|c| + (j-1)|d|) \right)^{-1}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

olsun. O zaman (3.1) denkleminin tek bir çözümü vardır.

İspat

$u, v \in PC(J, \mathbb{R})$ olsun. Her $t \in J$ için

$$\begin{aligned} |T_u(t) - T_v(t)| &\leq |\mathcal{D}_u(t) - \mathcal{D}_v(t)| \\ &+ \frac{1}{|\lambda|} \left(\sum_{i=1}^{p-2} |c_i| |\mathcal{D}_u(\xi_i) - \mathcal{D}_v(\xi_i)| \right) \\ &\quad \left| \left(c + d - \sum_{i=1}^{p-2} d_i \xi_i \right) - \left(c - \sum_{i=1}^{p-2} d_i \right) t \right| \\ &+ \frac{1}{|\lambda|} \left(\sum_{i=1}^{p-2} |d_i| |\mathcal{D}_u(\xi_i) - \mathcal{D}_v(\xi_i)| - |\mathcal{K}_u - \mathcal{K}_v| \right) \\ &\quad \left| -b + \sum_{i=1}^{p-2} c_i \xi_i + \left(a - \sum_{i=1}^{p-2} c_i \right) t \right| \\ &\leq \left[\left(\frac{1 + \gamma_2|c| + \sum_{i=1}^{p-2} (\gamma_1|c_i| + \gamma_2|d_i|)\xi_i^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{\gamma_2|d|}{\Gamma(\alpha)} \right) N \right. \\ &\quad + \left(\sum_{i=1}^{p-2} (\gamma_1|c_i| + \gamma_2|d_i|) + 1 + \gamma_2|c| \right) mN_1 \\ &\quad + \left(\sum_{i=1}^{p-2} (\gamma_1|c_i| + \gamma_2|d_i|)\xi_i + 1 + \gamma_2(|c| + |d|) \right) mN_2 \\ &\quad \left. + \left(\sum_{i=1}^{p-2} (\gamma_1|c_i| + \gamma_2|d_i|)\xi_i^2 + 1 + \gamma_2(|c| + 2|d|) \right) \frac{m}{2!} N_3 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\sum_{i=1}^{p-2} (\gamma_1 |c_i| + \gamma_2 |d_i|) \xi_i^3 + 1 + \gamma_2 (|c| + 3|d|) \right) \frac{m}{3!} N_4 \\
& \vdots \\
& + \left(\sum_{i=1}^{p-2} (\gamma_1 |c_i| + \gamma_2 |d_i|) \xi_i^{n-1} + 1 + \gamma_2 (|c| + (n-1)|d|) \right) \frac{m}{(n-1)!} N_n \Big] \|u - v\|
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{1 + \gamma_2 |c| + \sum_{i=1}^{p-2} (\gamma_1 |c_i| + \gamma_2 |d_i|) \xi_i^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{\gamma_2 |d|}{\Gamma(\alpha)} \right) N \\
& + \left(\sum_{i=1}^{p-2} (\gamma_1 |c_i| + \gamma_2 |d_i|) + 1 + \gamma_2 |c| \right) m N_1 \\
& + \left(\sum_{i=1}^{p-2} (\gamma_1 |c_i| + \gamma_2 |d_i|) \xi_i + 1 + \gamma_2 (|c| + |d|) \right) m N_2 \\
& + \left(\sum_{i=1}^{p-2} (\gamma_1 |c_i| + \gamma_2 |d_i|) \xi_i^2 + 1 + \gamma_2 (|c| + 2|d|) \right) \frac{m}{2!} N_3 \\
& + \left(\sum_{i=1}^{p-2} (\gamma_1 |c_i| + \gamma_2 |d_i|) \xi_i^3 + 1 + \gamma_2 (|c| + 3|d|) \right) \frac{m}{3!} N_4 \\
& \vdots \\
& + \left(\sum_{i=1}^{p-2} (\gamma_1 |c_i| + \gamma_2 |d_i|) \xi_i^{n-1} + 1 + \gamma_2 (|c| + (n-1)|d|) \right) \frac{m}{(n-1)!} N_n < 1
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlandığından T bir daralma dönüşümüdür. Teorem 2.1.8 Banach sabit nokta teoreminden T nin $PC(J, \mathbb{R})$ içinde tek bir sabit noktası vardır ve bu nokta (3.1) problemi için bir çözümdür. $\square$

Şimdi, (3.1) probleminin en az bir çözümünün varlığını Schaefer'ın sabit nokta teoremini kullanarak gösterelim. Bunun için aşağıdaki koşullara ihtiyaç vardır:

(C3) Negatif olmayan ρ ve σ sabitleri vardır öyle ki, $|f(t, u)| \leq \rho + \sigma|u|$, $t \in J, u \in \mathbb{R}$ eşitsizliği sağlanır.

(C4) $u \in \mathbb{R}$ için $k = 1, 2, \dots, m$ ve $j = 1, 2, \dots, n-1$ iken $|I_k(u)| \leq \rho_k + \sigma_k|u|$, $|I_k^{(j)}(u)| \leq \rho_k^{(j)} + \sigma_k^{(j)}|u|$ eşitsizlikleri sağlanacak şekilde negatif olmayan $\rho_k, \sigma_k, \rho_k^{(j)}, \sigma_k^{(j)}$ reel sabitleri vardır .

koşulları verilsin.

İşlemlerde kolaylık sağlamak için K^* aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$\begin{aligned}
 K^* &= \left(\frac{1 + \gamma_2|c|}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{\gamma_2|d|}{\Gamma(\alpha)} + \sum_{i=1}^{p-2} (\gamma_1|c_i| + \gamma_2|d_i|) \frac{\xi_i^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \right) \sigma \\
 &+ \sum_{k=1}^m (1 + \gamma_2|c|) \sigma_k + \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=1}^m \left(\frac{1}{j!} + \gamma_2 \left(\frac{|c|}{j!} + \frac{|d|}{(j-1)!} \right) \right) \sigma_k^{(j)} \\
 &+ \sum_{i=1}^{p-2} (\gamma_1|c_i| + \gamma_2|d_i|) \left(\sum_{0 < t_k < \xi_i} \sigma_k + \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{0 < t_k < \xi_i} \frac{\xi_i^j}{j!} \sigma_k^{(j)} \right)
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

(3.20) ile tanımlanan K^* ifadesi aşağıdaki teoremde kullanılacaktır.

3.2.2. Teorem

(C3) ve (C4) koşulları sağlansın. Eğer $K^* < 1$ ise (3.1) probleminin en az bir çözümü vardır.

İspat

T operatörünün tamamen sürekli olduğunu 3.1.2 Lemma ile elde ettik. Şimdi, $0 \leq \mu \leq 1$ iken

$$u = \mu T_u \tag{3.21}$$

denklemini ele alalım. Eğer u , (3.21) denkleminin bir çözümü ise o zaman $t \in J$ için,

$$\begin{aligned}
|\mathcal{D}_u(\xi_i)| &\leq \int_0^{\xi_i} \frac{(\xi_i - s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} (\rho + \sigma |u(s)|) ds + \sum_{0 < t_k < \xi_i} (\rho_k + \sigma_k |u(t_k)|) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{n-1} \left(\sum_{0 < t_k < \xi_i} (\rho_k^{(j)} + \sigma_k^{(j)} |u(t_k)|) \frac{(\xi_i - t_k)^j}{j!} \right) \\
&\leq \frac{\xi_i^\alpha \rho}{\Gamma(\alpha+1)} + \sum_{0 < t_k < \xi_i} \rho_k + \sum_{j=1}^{n-1} \left(\sum_{0 < t_k < \xi_i} \frac{\xi_i^j \rho_k^{(j)}}{j!} \right) + \frac{\xi_i^\alpha \sigma}{\Gamma(\alpha+1)} \|u\| \\
&\quad + \sum_{0 < t_k < \xi_i} \sigma_k \|u\| + \sum_{j=1}^{n-1} \left(\sum_{0 < t_k < \xi_i} \frac{\xi_i^j \sigma_k^{(j)}}{j!} \right) \|u\|
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
|\mathcal{H}_u| &\leq \int_0^1 \left(\frac{|c|(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{|d|(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha-2)} \right) |f(s, u(s))| ds \\
&\quad + |c| \sum_{k=1}^m |I_k(u(t_k))| + \sum_{j=1}^{n-1} \left(\sum_{k=1}^m |I_k^{(j)}(u(t_k))| \left| \frac{c(1-t_k)^j}{j!} + \frac{d(1-t_k)^{j-1}}{(j-1)!} \right| \right) \\
&\leq \left(\frac{|c|}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{|d|}{\Gamma(\alpha)} \right) (\rho + \sigma \|u\|) \\
&\quad + \sum_{k=1}^m |c| \rho_k + \sum_{j=1}^{n-1} \left(\sum_{k=1}^m \left(\frac{|c|}{j!} + \frac{|d|}{(j-1)!} \right) \rho_k^{(j)} \right) \\
&\quad + \sum_{k=1}^m |c| \sigma_k \|u\| + \sum_{j=1}^{n-1} \left(\sum_{k=1}^m \left(\frac{|c|}{j!} + \frac{|d|}{(j-1)!} \right) \sigma_k^{(j)} \right) \|u\|
\end{aligned}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Buradan,

$$\begin{aligned}
|u(t)| = \mu |T_u(t)| &\leq \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} (\rho + \sigma |u(s)|) ds + \sum_{0 < t_k < t} (\rho_k + \sigma_k |u(t_k)|) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{n-1} \left(\sum_{0 < t_k < t} (\rho_k^{(j)} + \sigma_k^{(j)} |u(t_k)|) \frac{(t-t_k)^j}{j!} \right) + \gamma_1 \sum_{i=1}^{p-2} |c_i| |\mathcal{D}_u(\xi_i)|
\end{aligned}$$

$$+ \gamma_2 \sum_{i=1}^{p-2} |d_i| |\mathcal{D}_u(\xi_i)| + \gamma_2 |\mathcal{K}_u|$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} |u(t)| \leq & \left(\frac{1 + \gamma_2 |c|}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{\gamma_2 |d|}{\Gamma(\alpha)} + \sum_{i=1}^{p-2} (\gamma_1 |c_i| + \gamma_2 |d_i|) \frac{\xi_i^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \right) \rho \\ & + \sum_{i=1}^{p-2} (\gamma_1 |c_i| + \gamma_2 |d_i|) \left(\sum_{0 < t_k < \xi_i} \rho_k + \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{0 < t_k < \xi_i} \frac{\xi_i^j}{j!} \rho_k^{(j)} \right) \\ & + \sum_{k=1}^m (1 + \gamma_2 |c| \rho_k) + \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=1}^m \left(\frac{1}{j!} + \gamma_2 \left(\frac{|c|}{j!} + \frac{|d|}{(j-1)!} \right) \right) \rho_k^{(j)} \\ & + \left[\left(\frac{1 + \gamma_2 |c|}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{\gamma_2 |d|}{\Gamma(\alpha)} + \sum_{i=1}^{p-2} (\gamma_1 |c_i| + \gamma_2 |d_i|) \frac{\xi_i^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \right) \sigma \right. \\ & + \sum_{k=1}^m (1 + \gamma_2 |c|) \sigma_k + \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=1}^m \left(\frac{1}{j!} + \gamma_2 \left(\frac{|c|}{j!} + \frac{|d|}{(j-1)!} \right) \right) \sigma_k^{(j)} \\ & \left. + \sum_{i=1}^{p-2} (\gamma_1 |c_i| + \gamma_2 |d_i|) \left(\sum_{0 < t_k < \xi_i} \sigma_k + \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{0 < t_k < \xi_i} \frac{\xi_i^j}{j!} \sigma_k^{(j)} \right) \right] \|u\| \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlikten

$$\begin{aligned} K = & \left(\frac{1 + \gamma_2 |c|}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{\gamma_2 |d|}{\Gamma(\alpha)} + \sum_{i=1}^{p-2} (\gamma_1 |c_i| + \gamma_2 |d_i|) \frac{\xi_i^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \right) \rho \\ & + \sum_{i=1}^{p-2} (\gamma_1 |c_i| + \gamma_2 |d_i|) \left(\sum_{0 < t_k < \xi_i} \rho_k + \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{0 < t_k < \xi_i} \frac{\xi_i^j}{j!} \rho_k^{(j)} \right) \\ & + \sum_{k=1}^m (1 + \gamma_2 |c| \rho_k) + \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=1}^m \left(\frac{1}{j!} + \gamma_2 \left(\frac{|c|}{j!} + \frac{|d|}{(j-1)!} \right) \right) \rho_k^{(j)} \end{aligned}$$

olmak üzere $t \in J$ için $|u(t)| \leq K + K^* \|u\|$ elde edilir. $K^* < 1$ olduğundan ve son eşitsizlikten $\|u\| \leq \frac{K}{1 - K^*}$ olduğu görülür. Bu nedenle (3.21) in herhangi bir çözümü μ nün

değerinden bağımsız olarak sınırlıdır. Sonuç olarak 2.1.9 Teoreminin tüm koşulları sağlandığından (3.1) sınır değer probleminin en az bir çözümü vardır. $\square$

3.3. Örnekler

Örnek

Aşağıdaki $\frac{9}{2}$. mertebeden Caputo kesirli impulsif sınır değer problemini ele alalım:

$$\left\{ \begin{array}{l} {}^C D_{0+}^{\frac{9}{2}} u(t) = \cos^3 t + \frac{3}{40} \arctan(u(t)), \quad t \in [0, 1] \setminus \left\{ \frac{1}{4} \right\} \\ \Delta u\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{80} u\left(\frac{1}{4}\right), \quad \Delta u'\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{100} \sin u\left(\frac{1}{4}\right), \\ \Delta u''\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{20} \cos u\left(\frac{1}{4}\right), \quad \Delta u'''\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{50} u\left(\frac{1}{4}\right), \\ u(0) - \frac{1}{2} u'(0) = 6u\left(\frac{1}{3}\right) - 3u\left(\frac{1}{2}\right), \\ 2u(1) + u'(1) = -6u\left(\frac{1}{3}\right) - 2u\left(\frac{1}{2}\right), \quad u''(0) = 0, \quad u'''(0) = 0, \quad u^{(4)}(0) = 0. \end{array} \right. \quad (3.22)$$

(3.22) denkleminin $\alpha = \frac{9}{2}, t_1 = \frac{1}{4}, p = 4, a = 1, b = -\frac{1}{2}, c = 2, d = 1, c_1 = 6, c_2 = -3, d_1 = -6, d_2 = -2, \xi_1 = \frac{1}{3}, \xi_2 = \frac{1}{2}, f(t, u) = \cos^3 t + \frac{3}{40} \arctan(u(t)), I_k(u) = \frac{1}{80} u, I_k^{(1)}(u) = \frac{1}{100} \sin u, I_k^{(2)}(u) = \frac{1}{20} \cos u$ ve $I_k^{(3)}(u) = \frac{1}{50} u$ ile denklem (3.1) formunda olduğu açıktır. Denklem (3.22) için $\lambda = 7, \gamma_1 = \frac{6}{7}$ ve $\gamma_2 = \frac{1}{7}$ değerleri elde edilir. $N = 0.15, N_1 = 0.025, N_2 = 0.01, N_3 = 0.05$ ve $N_4 = 0.02$ değerleri için (C1) ve (C2) koşulları sağlanır. Ayrıca, 3.2.1 Teoreminin tüm koşulları sağlandığından (3.22) impulsif kesirli sınır değer probleminin tek bir çözümü vardır.

Örnek

Aşağıdaki $\frac{8}{3}$. mertebeden kesirli impulsif sınır değer problemini ele alalım:

$$\left\{ \begin{array}{l} {}^C D_{0+}^{\frac{8}{3}} u(t) = \frac{1}{3} \sin(\sqrt{t}) + \frac{1}{20} \tanh(u(t)), \quad t \in [0, 1] \setminus \{t_1, t_2\} \\ \Delta u(t_k) = \frac{(-1)^k}{4} + \frac{3}{200} u(t_k), \quad \Delta u'(t_k) = \frac{1}{5} \cos(u(t_k)), \\ \Delta u''(t_k) = \frac{1}{25} \sin(u(t_k)), \\ 2u(0) - 3u'(0) = -6u\left(\frac{2}{5}\right) + 4u\left(\frac{4}{5}\right), \\ -u(1) + 2u'(1) = 7u\left(\frac{2}{5}\right) - 8u\left(\frac{4}{5}\right), \quad u''(0) = 0. \end{array} \right. \quad (3.23)$$

Burada $t_1 = \frac{1}{10}$ ve $t_2 = \frac{3}{5}$ dir.

(3.23) denkleminin $\alpha = \frac{8}{3}$, $p = 4$, $a = 2$, $b = -3$, $c = -1$, $d = 2$, $c_1 = -6$, $c_2 = 4$, $d_1 = 7$, $d_2 = -8$, $\xi_1 = \frac{2}{5}$, $\xi_2 = \frac{4}{5}$, $f(t, u) = \frac{1}{3} \sin(\sqrt{t}) + \frac{1}{20} \tanh(u(t))$, $I_k(u) = (-1)^k + \frac{3}{200} u$, $I_k^{(1)}(u) = \frac{1}{5} \cos u$ ve $I_k^{(2)}(u) = \frac{1}{25} \sin u$ ile denklemin (3.1) formunda olduğu açıktır. Denklem (3.23) için $\lambda = \frac{82}{5}$, $\gamma_1 = \frac{23}{82}$ ve $\gamma_2 = \frac{19}{82}$ değerleri elde edilir. 3.2.2 Teoreminin (C3) ve (C4) koşullarındaki $\rho = \frac{1}{3}$, $\sigma = \frac{1}{20}$, $\rho_1 = \rho_2 = \frac{1}{4}$, $\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{3}{200}$, $\rho_1^{(1)} = \rho_2^{(1)} = \frac{1}{5}$, $\sigma_1^{(1)} = \sigma_2^{(1)} = 0$, $\rho_1^{(2)} = \rho_2^{(2)} = \frac{1}{25}$, $\sigma_1^{(2)} = \sigma_2^{(2)} = 0$ değerleri olup, $K^* \approx 0.2306$ olarak hesaplanır. Böylelikle $K^* < 1$ koşulu da sağlanmış olur. Sonuç olarak, (3.23) probleminin en az bir çözümü vardır.



4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde, $n - 1 < \alpha \leq n$ olmak üzere α . mertebeden Caputo kesirli türev içeren p -nokta impulsif sınır değer problemi üzerinde durulmuştur. Çözümlerin varlığı ve tekliği Banach sabit nokta teoremiyle, en az bir çözümün varlığı ise Schaefer'ın sabit nokta teoremiyle ispatlanmıştır. Daha sonra, elde edilen teorik sonuçları desteklemek için örnekler verilmiştir. Bu çalışma kesirli diferansiyel denklemler ve impulsif diferansiyel denklemler çalışan araştırmacılar için kaynak olabilir. İleride bu çalışmadan yararlanılarak Riemann Liouville kesirli mertebeden ya da hem Riemann Liouville hem de Caputo kesirli türev içeren impulsif sınır değer problemi için çözümlerin varlığı ve tekliğinin araştırılması planlanmaktadır.



KAYNAKLAR

1. Karcı, A. (2015). Kesir dereceli türevin yeni yaklaşımının özellikleri. *Gazi Üniversitesi Mühendislik Mimarlık Fakültesi Dergisi*, Ankara, 30(3), 487-501.
2. Dalir, M., Bashour, M. (2010). Applications of Fractional Calculus, *Applied Mathematical Sciences*. 4(21), 1021-1032.
3. Loverro, A. (2004). *Fractional Calculus. History, Defination and Applications for the Engineer*. Department of Aerospace and Mechanical Engineering, USA, 1-28.
4. Podlubny, I. (1999). *Fractional Differential Equations*. California: Academic Press, Inc., USA, 199-223.
5. Hilfer, R. (2000). *Applications of Fractional Calculus in Physics*. Germany: World Scientific Singapore, 29-45.
6. Magin, R.L. (2004). Fractional Calculus in Bioengineering. *Critical Reviews in Biomedical Engineering*, 101615, 32-33.
7. Mainardi, F. (1997). Fractional Calculus: Some basic problems in continuum and statistical mechanics. *Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics*, Udine, Italy, 378(1), 291-348.
8. Distefano, J. J., Stubberud, A.R., Williams, I. J. (1995). *Schaum's outline of theory and problems of feedback and control systems*. California, McGrawHill, 39-57.
9. Giona, M., Cerbelli, S., Roman, H.E. (1992). Fractional diffusion equation and relaxation in complex viscoelastic materials. *Physica A*, 191(1), 449-450.
10. Aruğaslan Çinçin, D. (2015). *İmpulsif Diferansiyel Denklemlere Giriş*. Ankara: Palme Yayınevi, 1-10.
11. Daşbaşı, B. (2017). İmpulsif Diferansiyel Denklemler Hakkında. *Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 33(1), 29-32.
12. Lundstrom, B., Higgs, M., Spain, W. and Fairhall, A. (2008). Fractional differentiation by neocortical pyramidal neurons. *Nature Neuroscience*, 11, 1335-1342.
13. Mainardi, F. (2010). *Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity*. London: Imperial College Press, 1-9.
14. Tarasov, V. E. (2008). Fractional vector calculus and fractional Maxwell's equations. *Annals of Physics*, 323(11), 2756-2778.
15. Uchaikin, V. V. (2013). *Fractional Derivatives for Physicists and Engineers*. Volume I. Higher Education Press, Beijing; Springer, Heidelberg, 199-205.

16. Ahmed, E., El-Sayed, A. M. A. and El-Saka, H. A. A. (2007). Equilibrium points, stability and numerical solutions of fractional-order predator-prey and rabies models. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 325(1), 542-553.
17. Akhmet, M. and Fen, M. O. (2016). *Replication of Chaos in Neural Networks*. Economics and Physics. Higher Education Press, Beijing; Springer, Heidelberg, 1-15.
18. Akhmet, M. (2010). *Principles of Discontinuous Dynamical Systems*. Springer, New York, 1-2.
19. Tokmak Fen, F. (2017). On the solutions of a multi-point BVP for fractional differential equations with impulses. *Miskolc Mathematical Notes*, 19(2), 847-863.
20. Kilbas, A. A., Srivastava, H. M. and Trujillo, J. J. (2006). *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. Elsevier Science B.V., Amsterdam, 204-205.
21. Sikora, B. (2023). Remarks on the Caputo fractional derivative. *Silesian University of Technology, MINUT*, 5, 76-84.
22. Rehman, M. U. and Eloe, P. W. (2013). Existence and uniqueness of solutions for impulsive fractional differential equations. *Applied Mathematics and Computation*, 224, 422-431.
23. Banach, S. (1922) Sur les operations dans les ensembles abstraits et leur applications aux equations integrals. *Fundamenta Mathematicae*, 3, 133-181.
24. Smart, D.R. (1974). *Fixed point theorems*. London: Cambridge University Press, New York, 8-112.
25. Guo, D., Sun, J. and Liu, Z. (1995). *Functional Method for Nonlinear Ordinary Differential Equation*. Jinan: Shandong Science and Technolog Press, 8-9.



Gazili olmak ayrıcalıktır