

ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BAZI ÖZEL DUAL GENELLEŞTİRİLMİŞ KOMPLEKS SAYI
DİZİLERİ VE ÖZELLİKLERİ

Nilay TUNA

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2024

Her hakkı saklıdır

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

BAZI ÖZEL DUAL GENELLEŞTİRİLMİŞ KOMPLEKS SAYI DİZİLERİ VE ÖZELLİKLERİ

Nilay TUNA

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Elif TAN

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde tez için gerekli olan temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde dual genelleştirilmiş kompleks sayılar ve genelleştirilmiş Fibonacci r -sayıları yardımıyla dual genelleştirilmiş kompleks sayıların yeni bir sınıfı olan genelleştirilmiş dual genelleştirilmiş kompleks Fibonacci ve Lucas r -sayıları tanımlanmıştır. Bu sayıların rekürans bağıntıları, üreteç fonksiyonları, Binet formülleri, genelleştirilmiş Honsberger özdeşliği ve toplam formülleri gibi bazı özellikleri elde edilmiştir. Ayrıca, bu sayılar için Cassini özdeşliğini elde etmeye yardımcı olan bir matris gösterimi geliştirilmiştir.

Dördüncü bölümde kuantum katsayılı dual genelleştirilmiş kompleks dizileri tanımlanarak bazı temel özellikleri incelenmiştir.

Beşinci bölüm tartışma ve sonuç kısmına ayrılmıştır.

Temmuz 2024, 38 sayfa

Anahtar Kelimeler: Fibonacci sayıları, Lucas sayıları, Fibonacci r -sayıları, Lucas r -sayıları, Dual genelleştirilmiş kompleks sayı, Kuantum tamsayı

ABSTRACT

Master Thesis

SOME SPECIAL DUAL GENERALIZED COMPLEX NUMBER SEQUENCES AND THEIR PROPERTIES

Nilay TUNA

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Elif TAN

This thesis consists of five chapters.

The first chapter is devoted to the introduction.

In the second chapter, the basic definitions, theorems and some properties required in the thesis are given.

In the third chapter, with the help of the dual-generalized complex numbers and generalized Fibonacci r -numbers, a new class of dual generalized complex numbers will be introduced. Some properties of these numbers such as recurrence relations, generating functions, Binet formulas, generalized Honsberger identity and sum formulas will be obtained. Moreover a matrix representation has been developed that helps to derive the Cassini identity for these numbers.

In the fourth chapter, dual generalized complex number sequences with quantum coefficients will be defined and their basic properties are introduced.

The fifth chapter is devoted to discussion and conclusion.

July 2024, 38 pages

Key Words: Fibonacci numbers, Lucas numbers, Fibonacci r -numbers, Lucas r -numbers, Dual generalized complex number, Quantum integer

TEŞEKKÜR

Lisans ve yüksek lisans eğitimim boyunca bilgileriyle ışık tutan, çalıőmamda bana yön gösteren, destek ve emeklerini esirgemeyen, öğrencisi olmaktan her zaman gurur duyacağım tez danışmanım Sayın Prof. Dr. Elif TAN(Ankara Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı)'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Beni hayata hazırlayan, her zaman yanımda olan, sabır ve sevgisiyle hayatımı güzelleştiren sevgili annem Gülay TUNA, sevgili babam Sedat TUNA ve bütün aileme teşekkür ederim. Sizin varlığınız ve desteğiniz olmadan bu süreci başarıyla tamamlayamazdım.

Ayrıca her zaman yanımda olduğu için ve beni teşvik ederek bu yolculukta en büyük destekçim olduğu için sevgili niőanlım Caner SÖNMEZ'e teşekkür ederim. Sevgin, cesaret verici sözlerin ve anlayışın benim için çok değerliydi.

Son olarak bu tez çalıőması boyunca "2210-A Genel Yurt İçi Yüksek Lisans Burs Programı" kapsamında maddi desteği esirgemeyen TÜBİTAK'a teşekkürlerimi sunuyorum.

Nilay TUNA
Ankara, Temmuz 2024

İÇİNDEKİLER

TEZ ONAY SAYFASI	
ETİK	i
ÖZET	ii
ABSTRACT.....	iii
TEŞEKKÜR.....	iv
SİMGELER DİZİNİ	vi
ÇİZELGELER DİZİNİ	vii
1. GİRİŞ	1
2. TANIM VE TEMEL KAVRAMLAR	3
2.1 Genelleştirilmiş Kompleks Sayılar ve Dual Genelleştirilmiş Kom- pleks Sayılar	3
2.2 Fibonacci ve Lucas Sayıları	5
2.3 Genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas r -Sayıları.....	7
2.4 Dual Genelleştirilmiş Kompleks Fibonacci Sayıları	8
2.5 Kuantum Tamsayıları.....	9
3. GENELLEŞTİRİLMİŞ DUAL GENELLEŞTİRİLMİŞ KOMPLEKS (DGC) FIBONACCI ve LUCAS r -SAYILARI	11
3.1 Genelleştirilmiş DGC Fibonacci ve Lucas r -Sayıları için Bazı Matris Gösterimleri	20
4. KUANTUM KATSAYILI DUAL GENELLEŞTİRİLMİŞ KOM- PLEKS SAYILAR	26
5. TARTIŞMA VE SONUÇ	35
KAYNAKLAR.....	36
ÖZGEÇMİŞ	38

SİMGELER DİZİNİ

\mathbb{R}	Reel Sayılar Kümesi
\mathbb{C}	Kompleks Sayılar Kümesi
\mathbb{D}	Dual Sayılar Kümesi
\mathbb{H}	Hiperbolik Sayılar Kümesi
\mathbb{C}_p	Genelleştirilmiş Kompleks Sayılar Kümesi
\mathbb{DC}	Dual Kompleks Sayılar Kümesi
\mathbb{DH}	Dual Hiperbolik Sayılar Kümesi
$\tilde{\mathbb{D}}$	Hiper Dual Sayılar Kümesi
\mathbb{DC}_p	Dual Genelleştirilmiş Kompleks Sayılar Kümesi
F_n	n -inci Fibonacci sayısı
$F_{r,n}$	n -inci Genelleştirilmiş Fibonacci r -sayısı
L_n	n -inci Lucas sayısı
$L_{r,n}$	n -inci Genelleştirilmiş Lucas r -sayısı
$F_{r,n}^{DGC}$	n -inci Genelleştirilmiş DGC Fibonacci r -sayısı
$L_{r,n}^{DGC}$	n -inci Genelleştirilmiş DGC Lucas r -sayısı
$\mathbb{F}_{n,(\gamma;q)}^{DGC}$	n -inci q -dual genelleştirilmiş kompleks Fibonacci sayısı
$\mathbb{L}_{n,(\gamma;q)}^{DGC}$	n -inci q -dual genelleştirilmiş kompleks Lucas sayısı

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 3.1	DGC Fibonacci r -Sayılarının Özel Durumları	13
Çizelge 4.1	q -Dual Genelleştirilmiş Kompleks Fibonacci Sayılarının Özel Durumları	27



1. GİRİŞ

Fibonacci sayıları Leonardo Fibonacci tarafından 13. yüzyılda yazılan Liber Abaci adlı kitaptaki "Bir bölgeye bir dişi bir erkek olmak üzere yeni doğmuş bir tavşan çifti konuluyor. Her tavşan çifti ikinci aydan itibaren yetişkin hale geliyor ve her ay yeni bir tavşan çifti doğuruyor. Tavşanların hiç ölmediği varsayılırsa bu bölgede 100 ay sonra kaç çift tavşan olur?" probleminin çözümü ile ortaya çıkmıştır. Problem çözüldükçe her ay doğan tavşan sayısı sırasıyla 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55 şeklinde elde edilir ve bu sayılar Fibonacci sayıları olarak adlandırılmaktadır. Görüldüğü üzere Fibonacci sayıları her terimi kendisinden önceki ardışık iki terimin toplamıyla elde edilir.

Fibonacci sayıları 6. yüzyıldan itibaren birçok Hintli matematikçi tarafından çalışma konusu olmuştur. Dizinin ardışık terimleri arasındaki oranların ise $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ sayısına yaklaştığı görülmektedir. Bu sayıya altın oran denir. Altın oran doğada, sanatta ve günlük hayatta görülen, estetik ile bağdaştırılan bir sayıdır. Fibonacci dizileri birçok bilim dalında uygulamaya sahiptir. Dolayısıyla Fibonacci dizileri ve genelleştirmeleri pek çok araştırmacı tarafından incelenmiştir. Örneğin, Fibonacci sayılarının bir genelleştirilmesi olan Fibonacci r -sayıları kodlama teorisinde uygulamalara sahiptir.

Dual genelleştirilmiş kompleks sayılar ise dual kompleks sayılar, dual hiperbolik sayılar ve hiper dual sayıların bir genelleştirmesi olarak tanımlanmıştır. Fizik, geometri, astronomi ve bilgisayar bilimi gibi birçok bilim dalında uygulamaya sahiptir. Son yıllarda dual genelleştirilmiş kompleks sayılar üzerine yapılan çalışmalar oldukça ilgi görmektedir.

Bu tezde ilk amacımız dual genelleştirilmiş kompleks sayılar ve genelleştirilmiş Fibonacci r -sayıları yardımıyla dual genelleştirilmiş kompleks sayıların yeni bir sınıfını tanımlamak ve temel özelliklerini incelemektir. Bu yeni genelleştirme, dual genelleştirilmiş kompleks Fibonacci sayılarının bir genellemesi olarak da görülebilir.

Bu sayıların rekürans bağıntıları, üretç fonksiyonları, Binet formülleri, geliştirilmiş Honsberger özdeşliği ve toplam formülleri gibi bazı özellikleri elde edilecektir. Ayrıca, bu sayılar için Cassini özdeşliğini elde etmeye yardımcı olan bir matris gösterimi elde edilecektir.

Bu tezde inceleyeceğimiz diğer bir sayı dizisi ise katsayıları kuantum tamsayılarından oluşan dual geliştirilmiş kompleks sayıların yeni bir sınıfıdır. Bu sayı dizileri için de benzer şekilde rekürans bağıntıları, üretç fonksiyonları ve toplam formülleri gibi özellikleri incelenecektir.

Bu tezde elde edilen sonuçlar, literatürde daha önce yapılmış birçok çalışmanın bir genellemesi olacaktır.

2. TANIM VE TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde ilk olarak genelleştirilmiş kompleks sayılar ve dual genelleştirilmiş kompleks sayılar verilecek ve temel özellikleri incelenecektir. Daha sonra Fibonacci dizilerinin bir genelleştirmesi olan Fibonacci r -sayıları ve Lucas r -sayıları tanımlanacak ve bazı özellikleri verilecektir.

2.1 Genelleştirilmiş Kompleks Sayılar ve Dual Genelleştirilmiş Kompleks Sayılar

Dual sayıların, kompleks sayıların ve hiperbolik sayıların bir genelleştirmesi olan genelleştirilmiş kompleks sayılar, Harkin ve Harkin (Harkin ve Harkin 2004) tarafından tanımlanmıştır.

Tanım 2.1 (Genelleştirilmiş Kompleks Sayılar) Genelleştirilmiş kompleks sayılar kümesi

$$\mathbb{C}_{\mathfrak{p}} = \{a_0 + a_1J \mid J^2 = \mathfrak{p}, a_0, a_1, \mathfrak{p} \in \mathbb{R}, J \notin \mathbb{R}\}$$

şeklinde tanımlanır (Harkin ve Harkin 2004).

Burada, J genelleştirilmiş kompleks birim olarak adlandırılmaktadır.

$\mathbb{C}_{\mathfrak{p}}$ kümesinin,

- $\mathfrak{p} = -1$ için kompleks sayılar kümesini

$$\mathbb{C} = \{a_0 + a_1i \mid i^2 = -1, a_0, a_1 \in \mathbb{R}, i \notin \mathbb{R}\},$$

- $\mathfrak{p} = 0$ için dual sayılar kümesini

$$\mathbb{D} = \{a_0 + a_1\varepsilon \mid \varepsilon^2 = 0, \varepsilon \neq 0, a_0, a_1 \in \mathbb{R}, \varepsilon \notin \mathbb{R}\},$$

- $\mathfrak{p} = 1$ için hiperbolik sayılar kümesini

$$\mathbb{H} = \{a_0 + a_1h \mid h^2 = 1, a_0, a_1 \in \mathbb{R}\}$$

verdiği bilinmektedir. Bu sayılar fizikte, mekanikte, cebirsel geometride ve kinematikte kullanılmıştır (Catoni vd. 2004, Clifford 1873, Cockle 1849, Yaglom 1968, Fjelstad ve Gal 2001).

Gürses vd. (Gürses vd. 2021) genelleştirilmiş kompleks sayıların katsayılarını reel sayılar yerine dual sayılar olarak yeni bir sayı sistemi elde etmişlerdir ve bu sayılar dual genelleştirilmiş kompleks sayılar olarak adlandırılmıştır.

Tanım 2.2 (Dual Genelleştirilmiş Kompleks Sayılar) Dual genelleştirilmiş kompleks sayılar kümesi

$$\mathbb{DC}_p = \{a_0 + a_1J + a_2\varepsilon + a_3J\varepsilon \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$$

şeklinde tanımlanır (Gürses vd. 2021).

Burada, ε dual birim, J genelleştirilmiş kompleks birim ve $J\varepsilon$ dual genelleştirilmiş kompleks birimdir ve bu birimler aşağıdaki çarpım kuralını sağlarlar:

$$J^2 = p, -\infty < p < \infty, \varepsilon^2 = 0, \varepsilon \neq 0, \varepsilon J = J\varepsilon. \quad (2.1)$$

\mathbb{DC}_p kümesi

- $p = -1$ için dual-kompleks sayılar kümesini

$$\mathbb{DC} = \{a_0 + a_1i + a_2\varepsilon + a_3i\varepsilon \mid \varepsilon^2 = 0, i^2 = -1\},$$

- $p = 0$ için hiper-dual sayılar kümesini

$$\tilde{\mathbb{D}} = \{a_0 + a_1\varepsilon + a_2J + a_3J\varepsilon \mid \varepsilon^2 = J^2 = (\varepsilon J)^2 = 0, \varepsilon \neq J \neq 0\},$$

- $p = 1$ için dual-hiperbolik sayılar kümesini

$$\mathbb{DH} = \{a_0 + a_1\varepsilon + a_2J + a_3J\varepsilon \mid J^2 = 1, \varepsilon^2 = 0\}$$

vermektedir. Dual genelleştirilmiş kompleks sayılar \mathbb{R} üzerinde dört boyutlu bir vektör uzayı oluşturmaktadır ve (2.1) ifadesinde verilen çarpım kuralından dual genelleştirilmiş kompleks sayıların değişmeli olduğu açıkça görülmektedir.

2.2 Fibonacci ve Lucas Sayıları

Fibonacci sayıları ve genelleştirmeleri, sanat ve bilimde çeşitli uygulamalara sahiptir. Bu bölümde Fibonacci ve Lucas sayıları ile ilgili bazı temel tanım ve teoremlere yer verilecektir. Bu bölümde yer alan temel tanım ve teoremler (Koshy 2001) ve (Vajda 1989) kitaplarında yer almaktadır.

Tanım 2.3 (Fibonacci Sayıları) Başlangıç koşulları $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ olmak üzere n -inci Fibonacci sayısı

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n \geq 2$$

şeklinde tanımlanır. (Koshy 2001).

Tanım 2.4 (Lucas Sayıları) Başlangıç koşulları $L_0 = 2$, $L_1 = 1$ olmak üzere n -inci Lucas sayısı

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}, \quad n \geq 2$$

şeklinde tanımlanır (Koshy 2001).

Fibonacci ve Lucas dizilerinin karakteristik denklemi olan $x^2 - x - 1 = 0$ denkleminin kökleri $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ şeklindedir. Şimdi bu kökler yardımıyla Fibonacci ve Lucas dizisinin n -inci terimini veren genel terim formülü verilecektir. Bu formül ilk olarak Fransız matematikçi Binet tarafından bulunduğu için literatürde Binet formülü olarak adlandırılmaktadır.

Teorem 2.1 Fibonacci sayıları için Binet formülü,

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

şeklindedir (Koshy 2001).

Teorem 2.2 Lucas sayıları için Binet formülü,

$$L_n = \alpha^n + \beta^n$$

şeklindedir (Koshy 2001).

Teorem 2.3 Fibonacci sayıları için üreteç fonksiyonu,

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = \frac{x}{1-x-x^2}$$

şeklindedir (Koshy 2001).

Teorem 2.4 Lucas sayıları için üreteç fonksiyonu,

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n x^n = \frac{2-x}{1-x-x^2}$$

şeklindedir (Koshy 2001).

Tanım 2.5 (Horadam Dizisi) s, t sıfırdan farklı tamsayılar ve $W_0 = a, W_1 = b$ keyfi başlangıç koşulları olmak üzere Horadam dizisi

$$W_n = sW_{n-1} + tW_{n-2}, \quad n \geq 2$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanır (Horadam 1961).

Horadam dizisinde başlangıç koşulları $W_0 = 0, W_1 = 1$ ve $s = t = 1$ alındığında Fibonacci dizisi, $W_0 = 2, W_1 = 1$ ve $s = t = 1$ alındığında Lucas dizisi, $W_0 = 0, W_1 = 1, s = 2$ ve $t = 1$ alındığında Pell dizisi, $W_0 = W_1 = 2, s = 2$ ve $t = 1$ alındığında Pell-Lucas dizisi, $W_0 = 0, W_1 = 1, s = k$ ve $t = 1$ alındığında k -Fibonacci dizisi, $W_0 = 0, W_1 = 1, s = 1$ ve $t = 2$ alındığında Jacobsthal dizisi elde edilmektedir. Horadam dizisinin karakteristik denklemi $x^2 - sx - t = 0$ dir. Bu karakteristik denklemin kökleri $\gamma = \frac{s+\sqrt{s^2+4t}}{2}$ ve $\delta = \frac{s-\sqrt{s^2+4t}}{2}$ şeklindedir.

Teorem 2.5 Horadam dizisinin Binet formülü

$$W_n = \left(\frac{b - a\delta}{\gamma - \delta} \right) \gamma^n - \left(\frac{b - a\gamma}{\gamma - \delta} \right) \delta^n$$

şeklindedir (Horadam 1961).

Teorem 2.6 Horadam dizisi için üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} W_n x^n = \frac{W_0 + (W_1 - sW_0)x}{1 - sx - tx^2}$$

şeklindedir (Horadam 1961).

2.3 Genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas r -Sayıları

Bu bölümde Stakhov ve Rozin (Stakhov ve Rozin 2006) tarafından tanımlanan Fibonacci r -sayıları ve genelleştirmeleri hakkında bazı temel tanım ve teoremlere yer verilecektir. Özellikle Fibonacci sayılarının bir genellemesi olan Fibonacci r -sayıları kodlama teorisinde uygulamalara sahiptir. Fibonacci r -sayılarının çeşitli genellemeleri vardır ve bunlardan biri Koçer vd. tarafından tanımlanmış olan genelleştirilmiş Fibonacci r -sayılarıdır (Koçer vd. 2009).

Tanım 2.6 (Genelleştirilmiş Fibonacci r -Sayıları) r pozitif tamsayı, m pozitif reel sayı ve başlangıç koşulları $F_{r,0} = 0$, $F_{r,k} = m^{k-1}$ olmak üzere, $k = 1, 2, \dots, r$ için n -inci genelleştirilmiş Fibonacci r -sayısı

$$F_{r,n} = mF_{r,n-1} + F_{r,n-r-1}, \quad n > r \quad (2.2)$$

şeklinde tanımlanır (Koçer vd. 2009).

Lemma 2.1 k ve n pozitif tamsayılar olmak üzere, genelleştirilmiş Fibonacci r -sayıları için genelleştirilmiş Honsberger özdeşliği

$$F_{r,k+n} = F_{r,k}F_{r,n+1} + \sum_{j=1}^r F_{r,k-j}F_{r,n-r+j} \quad (2.3)$$

şeklindedir (Tuğlu vd. 2011).

Tanım 2.7 (Genelleştirilmiş Lucas r -Sayıları): r pozitif tamsayı, m pozitif reel sayı ve başlangıç koşulları $L_{r,0} = r + 1$, $L_{r,k} = m^k$ olmak üzere, $k = 1, 2, \dots, r$ için n -inci genelleştirilmiş Lucas r -sayısı

$$L_{r,n} = mL_{r,n-1} + L_{r,n-r-1}, \quad n > r \quad (2.4)$$

şeklinde tanımlanır (Koçer vd. 2009).

(2.2) ve (2.4) eşitliklerinde $m = 1$ alındığında Stakhov ve Rozin (Stakhov ve Rozin 2006) tarafından tanımlanan Fibonacci r -sayıları ve Lucas r -sayıları elde edilmektedir. $r = m = 1$ alındığında ise, sırasıyla Fibonacci sayıları ve Lucas sayıları elde edilmektedir.

Ayrıca, genelleştirilmiş Fibonacci r -sayıları ve genelleştirilmiş Lucas r -sayıları sırasıyla,

$$F_{r,-n} = F_{r,-n+r+1} - mF_{r,-n+r} \quad (2.5)$$

ve

$$L_{r,-n} = F_{r,-n+r} + rF_{r,-n-r} \quad (2.6)$$

şeklinde negatif indislere genişletilebilir (Abbad vd. 2019).

Genelleştirilmiş Fibonacci r -dizisi ve Lucas r -dizisinin Binet formülleri sırasıyla,

$$F_{r,n} = \sum_{k=1}^{r+1} \frac{\alpha_k^n}{(r+1)\alpha_k - rm} \quad (2.7)$$

ve

$$L_{r,n} = \sum_{k=1}^{r+1} \alpha_k^n \quad (2.8)$$

şeklindedir (Koçer vd. 2009). Burada $\alpha_k, x^{r+1} - mx^r - 1 = 0$ denkleminin kökleridir.

2.4 Dual Genelleştirilmiş Kompleks Fibonacci Sayıları

Birçok yazar, Fibonacci sayı bileşenlerine sahip özel tip dual genelleştirilmiş kompleks sayılar üzerinde çalışmıştır. Cihan vd. (Cihan vd. 2019) dual hiperbolik Fibonacci ve Lucas sayılarını tanımlamışlardır. Güngör ve Azak (Güngör ve Azak 2017) dual kompleks Fibonacci ve Lucas sayılarını, Torunbalcı Aydın (Torunbalcı Aydın 2018) dual kompleks k -Fibonacci sayılarını incelemişlerdir.

Tan vd. (Tan vd. 2021) bileşenleri Fibonacci, Lucas, Pell, Pell-Lucas, Jacobsthal, Jacobsthal-Lucas sayılarının genelleştirilmesi olan Horadam sayılarından oluşan hiper dual sayıları tanımlamışlardır. Prasad (Prasad 2021) dual kompleks Fibonacci r -sayılarını tanımlamıştır. Şentürk vd. (Şentürk vd. 2022) dual genelleştirilmiş kompleks Fibonacci sayılarını tanımlayıp özelliklerini incelemişlerdir.

Şimdi bu tezde göz önüne alacağımız dual genelleştirilmiş kompleks Fibonacci ve Lucas sayılarının tanımlarını verelim.

Tanım 2.8 (Dual Genelleştirilmiş Kompleks Fibonacci Sayıları) n -inci dual genelleştirilmiş kompleks Fibonacci sayısı

$$F_n^{DGC} = F_{n-1} + F_{n+1}J + F_{n+2}\varepsilon + F_{n+3}J\varepsilon \quad (2.9)$$

şeklinde tanımlanır (Gürses vd. 2022).

Tanım 2.9 (Dual Genelleştirilmiş Kompleks Lucas Sayıları) n -inci dual genelleştirilmiş kompleks Lucas sayısı

$$L_n^{DGC} = L_{n-1} + L_{n+1}J + L_{n+2}\varepsilon + L_{n+3}J\varepsilon \quad (2.10)$$

şeklinde tanımlanır (Gürses vd. 2022).

Burada, ε dual birim, J genelleştirilmiş kompleks birim ve $J\varepsilon$ dual genelleştirilmiş kompleks birimdir.

2.5 Kuantum Tamsayıları

Kuantum analiz kuramı (q -analiz), limit kavramını kullanmadan matematiksel nesnelerin q -analoglarını elde etme çabasıyla ortaya çıkmıştır. Fizik, kombinatorik ve sayı teorisi gibi birçok uygulamada kullanılan kuantum analiz kuramına günümüzde birçok matematikçi ve fizikçi tarafından katkıda bulunulmuştur. Tarihsel olarak, Euler 18. yüzyılda q -analizi kuramının temel formülünü elde etmiştir. Ancak, Jackson (Jackson 1910), q -türevi kavramını geliştiren ilk kişi olarak bilinir.

Bir n pozitif tamsayısı için; n kuantum tamsayısı (q -tamsayısı)

$$[n]_q = \frac{1 - q^n}{1 - q} = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} \quad (2.11)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $q \neq 1$ olmak üzere bir kompleks sayıdır.

Negatif tamsayılar için ise

$$[-n]_q = \frac{1 - q^{-n}}{1 - q}$$

şeklinde tanımlanır.

Kuantum toplama ve kuantum çarpma işlemleri ise sırasıyla

$$[r]_q +_q [n]_q = [r]_q + q^r [n]_q \text{ ve } [r]_q \times_q [n]_q = [r]_q [n]_{q^r}$$

şeklinde tanımlanır.

Akkuş ve Kızılaslan (Akkuş ve Kızılaslan 2019), bileşenleri kuantum tamsayılarından oluşan q -Fibonacci ve q -Lucas kuaterniyonlarını sırasıyla

$$Q_n = \alpha^{n-1} [n]_q + \alpha^n [n+1]_q i + \alpha^{n+1} [n+2]_q j + \alpha^{n+2} [n+3]_q k$$

$$V_n = \alpha^n \frac{[2n]_q}{[n]_q} + \alpha^{n+1} \frac{[2n+2]_q}{[n+1]_q} i + \alpha^{n+2} \frac{[2n+4]_q}{[n+2]_q} j + \alpha^{n+3} \frac{[2n+6]_q}{[n+3]_q} k$$

şeklinde tanımlamışlardır. Burada i, j ve k birimleri

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = -ji = k, \quad ki = -ik = j, \quad jk = -kj = i$$

kuaterniyon çarpımını sağlar.

3. GENELLEŞTİRİLMİŞ DUAL GENELLEŞTİRİLMİŞ KOMPLEKS (DGC) FIBONACCI VE LUCAS R-SAYILARI

Bu bölümde, öncelikle bileşenleri genelleştirilmiş Fibonacci r -sayıları ve genelleştirilmiş Lucas r -sayıları olan dual genelleştirilmiş kompleks sayıları tanımlanacak ve bu sayılar sırasıyla genelleştirilmiş DGC Fibonacci r -sayıları ve genelleştirilmiş DGC Lucas r -sayıları olarak adlandırılacaktır. Daha sonra bu sayıların rekürans bağıntıları, üreteç fonksiyonları, toplam formülleri gibi bazı temel özellikleri verilecektir. Bu bölümde yer alan sonuçlar Tan vd. (Tan vd. 2021) çalışmasında yer almakta olup tezimizin orijinal sonuçlarıdır.

Tanım 3.1 (Genelleştirilmiş DGC Fibonacci r -Sayıları) n -inci genelleştirilmiş DGC Fibonacci r -sayısı

$$F_{r,n}^{DGC} = F_{r,n} + F_{r,n+1}J + F_{r,n+2}\varepsilon + F_{r,n+3}J\varepsilon$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 3.2 (Genelleştirilmiş DGC Lucas r -Sayıları) n -inci genelleştirilmiş DGC Lucas r -sayısı

$$L_{r,n}^{DGC} = L_{r,n} + L_{r,n+1}J + L_{r,n+2}\varepsilon + L_{r,n+3}J\varepsilon$$

şeklinde tanımlanır.

Burada $F_{r,n}$ ve $L_{r,n}$ sırasıyla n -inci genelleştirilmiş Fibonacci r -sayısı ve n -inci genelleştirilmiş Lucas r -sayısıdır. Ayrıca ε dual birim, J genelleştirilmiş kompleks birim ve $J\varepsilon$ dual genelleştirilmiş kompleks birimdir ve (2.1) ifadesindeki çarpım kurallarını sağlarlar.

Negatif indisli genelleştirilmiş DGC Fibonacci ve DGC Lucas r -sayıları sırasıyla

$$F_{r,-n}^{DGC} = F_{r,-n} + F_{r,-n+1}J + F_{r,-n+2}\varepsilon + F_{r,-n+3}J\varepsilon$$

ve

$$L_{r,-n}^{DGC} = L_{r,-n} + L_{r,-n+1}J + L_{r,-n+2}\varepsilon + L_{r,-n+3}J\varepsilon$$

şeklinde tanımlanırlar.

Teorem 3.1 Negatif indisli genelleştirilmiş DGC Fibonacci ve genelleştirilmiş DGC Lucas r -sayıları sırasıyla

$$F_{r,-n}^{DGC} = F_{r,-n+r+1}^{DGC} - mF_{r,-n+r}^{DGC}$$

ve

$$L_{r,-n}^{DGC} = F_{r,-n+1}^{DGC} + rF_{r,-n-r}^{DGC}$$

bağıntılarını sağlarlar.

İspat. (2.5) eşitliği kullanılarak,

$$\begin{aligned} F_{r,-n}^{DGC} &= F_{r,-n} + F_{r,-n+1}J + F_{r,-n+2}\varepsilon + F_{r,-n+3}J\varepsilon \\ &= (F_{r,-n+r+1} - mF_{r,-n+r}) + (F_{r,-n+r+2} - mF_{r,-n+r+1})J \\ &\quad + (F_{r,-n+r+3} - mF_{r,-n+r+2})\varepsilon + (F_{r,-n+r+4} - mF_{r,-n+r+3})J\varepsilon \\ &= (F_{r,-n+r+1} + F_{r,-n+r+2}J + F_{r,-n+r+3}\varepsilon + F_{r,-n+r+4}J\varepsilon) \\ &\quad - m(F_{r,-n+r} + F_{r,-n+r+1}J + F_{r,-n+r+2}\varepsilon + F_{r,-n+r+3}J\varepsilon) \\ &= F_{r,-n+r+1}^{DGC} - mF_{r,-n+r}^{DGC} \end{aligned}$$

elde edilir.

Benzer şekilde (2.6) eşitliği kullanılarak,

$$\begin{aligned} L_{r,-n}^{DGC} &= L_{r,-n} + L_{r,-n+1}J + L_{r,-n+2}\varepsilon + L_{r,-n+3}J\varepsilon \\ &= (F_{r,-n+r} + rF_{r,-n-r}) + (F_{r,-n+r+1} + rF_{r,-n-r+1})J \\ &\quad + (F_{r,-n+r+2} + rF_{r,-n-r+2})\varepsilon + (F_{r,-n+r+3} + rF_{r,-n-r+3})J\varepsilon \\ &= (F_{r,-n+r} + F_{r,-n+r+1}J + F_{r,-n+r+2}\varepsilon + F_{r,-n+r+3}J\varepsilon) \\ &\quad + r(F_{r,-n-r} + F_{r,-n-r+1}J + F_{r,-n-r+2}\varepsilon + F_{r,-n-r+3}J\varepsilon) \\ &= F_{r,-n+1}^{DGC} + rF_{r,-n-r}^{DGC} \end{aligned}$$

elde edilir. ■

Çizelge 3.1'de, genelleştirilmiş DGC Fibonacci r -sayılarının bazı özel durumları belirtilmiştir.

Çizelge 3.1 DGC Fibonacci r -Sayılarının Özel Durumları

m	r	\mathfrak{p}	$F_{r,n}^{DGC}$
1	1	-1	Dual kompleks Fibonacci sayıları
1	1	1	Dual hiperbolik Fibonacci sayıları
1	1	0	Hiper-dual Fibonacci sayıları
k	1	-1	Dual kompleks k -Fibonacci sayıları
1	1	\mathfrak{p}	DGC Fibonacci sayıları
1	r	\mathfrak{p}	DGC Fibonacci r -sayıları
2	r	\mathfrak{p}	DGC Pell r -sayıları
k	1	\mathfrak{p}	DGC k -Fibonacci sayıları

$F_{r,n}^{DGC}$ ve $F_{r,k}^{DGC}$ genelleştirilmiş DGC Fibonacci r -sayılarının toplamı, farkı ve çarpımı

$$F_{r,n}^{DGC} \pm F_{r,k}^{DGC} = (F_{r,n} \pm F_{r,k}) + (F_{r,n+1} \pm F_{r,k+1})J \\ + (F_{r,n+2} \pm F_{r,k+2})\varepsilon + (F_{r,n+3} \pm F_{r,k+3})J\varepsilon$$

$$F_{r,n}^{DGC} F_{r,k}^{DGC} = (F_{r,n}F_{r,k} + \mathfrak{p}F_{r,n+1}F_{r,k+1}) + F_{r,n}F_{r,k+1} + F_{r,n+1}F_{r,k})J \\ + F_{r,n}F_{r,k+2} + F_{r,n+2}F_{r,k} + \mathfrak{p}F_{r,n+1}F_{r,k+3} + \mathfrak{p}F_{r,n+3}F_{r,k+1}\varepsilon \\ + F_{r,n}F_{r,k+3} + F_{r,n+1}F_{r,k+2} + F_{r,n+2}F_{r,k+1} + F_{r,n+3}F_{r,k}J\varepsilon$$

şeklindedir.

Gürses vd.'nin (Gürses vd. 2021) DGC Fibonacci sayıları için vermiş oldukları eşlenik ve norm tanımları yardımıyla genelleştirilmiş DGC Fibonacci r -sayıları için aşağıdaki eşlenik ve norm tanımları verilebilir.

1. Genelleştirilmiş kompleks eşlenik:

$$F_{r,n}^{DGC*1} = (F_{r,n} - F_{r,n+1}J) + (F_{r,n+2} - F_{r,n+3}J)\varepsilon.$$

2. Dual eşlenik:

$$F_{r,n}^{DGC*2} = (F_{r,n} + F_{r,n+1}J) - (F_{r,n+2} + F_{r,n+3}J)\varepsilon.$$

3. Çift eşlenik:

$$F_{r,n}^{DGC*3} = (F_{r,n} - F_{r,n+1}J) - (F_{r,n+2} - F_{r,n+3}J)\varepsilon.$$

4. Dual genelleştirilmiş kompleks eşlenik:

$$F_{r,n}^{DGC*4} = (F_{r,n} - F_{r,n+1}J) \left(1 - \frac{(F_{r,n+2} + F_{r,n+3}J)}{F_{r,n} + F_{r,n+1}J} \varepsilon \right).$$

Burada , $F_{r,n} + F_{r,n+1}J$ sıfır bölen değildir.

5. Anti-dual eşlenik:

$$F_{r,n}^{DGC*5} = (F_{r,n+2} + F_{r,n+3}J) - (F_{r,n} + F_{r,n+1}J)\varepsilon.$$

Yukarıdaki eşlenikler yardımıyla genelleştirilmiş DGC Fibonacci r -sayıları için aşağıdaki normlar verilebilir:

1. Genelleştirilmiş kompleks norm:

$$\begin{aligned} |F_{r,n}^{DGC}|_{*1}^2 &= F_{r,n}^{DGC} F_{r,n}^{DGC*1} \\ &= F_{r,n}^2 - \mathfrak{p}F_{r,n+1}^2 + 2(F_{r,n}F_{r,n+2} - F_{r,n+1}F_{r,n+3})\varepsilon. \end{aligned}$$

2. Dual norm:

$$\begin{aligned} |F_{r,n}^{DGC}|_{*2}^2 &= F_{r,n}^{DGC} F_{r,n}^{DGC*2} \\ &= F_{r,n}^2 + \mathfrak{p}F_{r,n+1}^2 + 2F_{r,n}F_{r,n+1}J. \end{aligned}$$

3. Çift norm:

$$\begin{aligned} |F_{r,n}^{DGC}|_{*3}^2 &= F_{r,n}^{DGC} F_{r,n}^{DGC*3} \\ &= F_{r,n}^2 - \mathfrak{p}F_{r,n+1}^2 + 2\mathfrak{p}F_{r,n+1}F_{r,t+3}\varepsilon \\ &\quad + 2(F_{r,n}F_{r,t+3} - F_{r,n+1}F_{r,t+2})J\varepsilon. \end{aligned}$$

4. Dual genelleştirilmiş kompleks norm:

$$\begin{aligned} |F_{r,n}^{DGC}|_{*4}^2 &= F_{r,n}^{DGC} F_{r,n}^{DGC*4} \\ &= F_{r,n}^2 - \mathfrak{p}F_{r,n+1}^2. \end{aligned}$$

5. Anti-dual norm:

$$\begin{aligned} |F_{r,n}^{DGC}|_{*5}^2 &= F_{r,n}^{DGC} F_{r,n}^{DGC*5} \\ &= (F_{r,n}F_{r,n+2} + \mathfrak{p}F_{r,n+1}F_{r,n+3}) - 2F_{r,n}F_{r,n+1}J \\ &\quad + (F_{r,n+2}^2 - F_{r,n}^2 + \mathfrak{p}(F_{r,n+3}^2 - F_{r,n+1}^2))\varepsilon \\ &\quad + 2(F_{r,n+3}F_{r,n+2} - F_{r,n}F_{r,n+1})J\varepsilon. \end{aligned}$$

Yukarıdaki norm tanımları kullanılarak

$$\begin{aligned} (i) \quad F_{r,n}^{DGC} + F_{r,n}^{DGC*1} &= 2(F_{r,n} + F_{r,n+2}\varepsilon), \\ (ii) \quad F_{r,n}^{DGC} + F_{r,n}^{DGC*2} &= 2(F_{r,n} + F_{r,n+1}J), \\ (iii) \quad F_{r,n}^{DGC} + F_{r,n}^{DGC*3} &= 2(F_{r,n} + F_{r,n+3}J\varepsilon), \\ (iv) \quad F_{r,n}^{DGC*5} + \varepsilon F_{r,n}^{DGC} &= F_{r,n+2} + F_{r,n+3}J, \\ (v) \quad F_{r,n}^{DGC} - \varepsilon F_{r,n}^{DGC*5} &= F_{r,n} + F_{r,n+1}J, \\ (vi) \quad (F_{r,n} + F_{r,n+1}J) F_{r,n}^{DGC*4} &= (F_{r,n} - F_{r,n+1}J) F_{r,n}^{DGC*2} \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir.

Şimdi genelleştirilmiş DGC Fibonacci r -sayıları ve genelleştirilmiş DGC Lucas r -sayıları için bazı rekürans bağıntıları verilecektir.

Teorem 3.2 Genelleştirilmiş DGC Fibonacci ve Lucas r -sayıları aşağıdaki rekürans bağıntılarını sağlarlar.

$$\begin{aligned} (i) \quad F_{r,n}^{DGC} &= mF_{r,n-1}^{DGC} + F_{r,n-r-1}^{DGC}, \\ (ii) \quad L_{r,n}^{DGC} &= mL_{r,n-1}^{DGC} + L_{r,n-r-1}^{DGC}, \\ (iii) \quad L_{r,n}^{DGC} &= F_{r,n+1}^{DGC} + rF_{r,n-r}^{DGC}. \end{aligned}$$

İspat. (i) Genelleştirilmiş DGC Fibonacci r -sayıları ve Fibonacci r -sayıları tanımından,

$$\begin{aligned}
mF_{r,n-1}^{DGC} + F_{r,n-r-1}^{DGC} &= m(F_{r,n-1} + F_{r,n}J + F_{r,n+1}\varepsilon + F_{r,n+2}J\varepsilon) \\
&\quad + F_{r,n-r-1} + F_{r,n-r}J + F_{r,n-r+1}\varepsilon + F_{r,n-r+2}J\varepsilon \\
&= (mF_{r,n-1} + F_{r,n-r-1}) + (mF_{r,n} + F_{r,n-r})J \\
&\quad + (mF_{r,n+1} + F_{r,n-r+1})\varepsilon + (mF_{r,n+2} + F_{r,n-r})J\varepsilon \\
&= F_{r,n} + F_{r,n+1}J + F_{r,n+2}\varepsilon + F_{r,n+3}J\varepsilon = F_{r,n}^{DGC}
\end{aligned}$$

elde edilir.

(ii) (i) bağıntısına benzer şekilde ispatlanabilir.

(iii) $L_{r,n} = F_{r,n+1} + rF_{r,n-r}$, ilişkisi kullanılarak,

$$\begin{aligned}
F_{r,n+1}^{DGC} + rF_{r,n-r}^{DGC} &= F_{r,n+1} + F_{r,n+2}J + F_{r,n+3}\varepsilon + F_{r,n+4}J\varepsilon \\
&\quad + rF_{r,n-r} + rF_{r,n-r+1}J + rF_{r,n-r+2}\varepsilon + rF_{r,n-r+3}J\varepsilon \\
&= L_{r,n} + L_{r,n+1}J + L_{r,n+2}\varepsilon + L_{r,n+3}J\varepsilon = L_{r,n}^{DGC}
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

Şimdi DGC Fibonacci r -dizileri ve Lucas r -dizileri için üreteç fonksiyonları verilecektir.

Teorem 3.3 Genelleştirilmiş DGC Fibonacci r -dizisi ve genelleştirilmiş DGC Lucas r -dizisinin üreteç fonksiyonları sırasıyla,

$$\begin{aligned}
G(x) &= \frac{J + m\varepsilon + m^2J\varepsilon + x + J\varepsilon x^{r-1} + (\varepsilon + mJ\varepsilon)x^r}{1 - mx - x^{r+1}} \\
&\quad L_{r,0}^{DGC} - mrx + (r+1)J\varepsilon x^{r-2} + ((r+1)\varepsilon + mJ\varepsilon)x^{r-1} \\
H(x) &= \frac{+((r+1)J + m\varepsilon + m^2J\varepsilon)x^r}{1 - mx - x^{r+1}}
\end{aligned}$$

şeklindedir.

İspat. Genelleştirilmiş DGC Fibonacci r -dizisi için formal kuvvet serisi

$G(x) := \sum_{n=0}^{\infty} F_{r,n}^{DGC} x^n$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
(1 - mx - x^{r+1}) G(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} F_{r,n}^{DGC} x^n - m \sum_{n=0}^{\infty} F_{r,n}^{DGC} x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} F_{r,n}^{DGC} x^{n+r+1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} F_{r,n}^{DGC} x^n - m \sum_{n=1}^{\infty} F_{r,n-1}^{DGC} x^n - \sum_{n=r+1}^{\infty} F_{r,n-r-1}^{DGC} x^n \\
&= \sum_{n=0}^r F_{r,n}^{DGC} x^n - m \sum_{n=1}^r F_{r,n-1}^{DGC} x^n \\
&\quad - \sum_{n=r+1}^{\infty} (F_{r,n}^{DGC} - mF_{r,n-1}^{DGC} - F_{r,n-r-1}^{DGC}) x^n \\
&= \sum_{n=0}^r F_{r,n}^{DGC} x^n - m \sum_{n=1}^r F_{r,n-1}^{DGC} x^n \\
&= F_{r,0}^{DGC} + \sum_{n=1}^r (F_{r,n}^{DGC} - mF_{r,n-1}^{DGC}) x^n
\end{aligned}$$

elde edilir.

Genelleştirilmiş DGC Fibonacci r -dizisinin tanımını kullanarak ve Fibonacci r -sayılarının başlangıç koşulları yerine yazıldığında istenen eşitlik elde edilir.

Benzer şekilde, $H(x) := \sum_{n=0}^{\infty} L_{r,n}^{DGC} x^n$ olmak üzere genelleştirilmiş DGC Lucas r -dizisinin türeteç fonksiyonu

$$\begin{aligned}
H(x) &= \frac{L_{r,0}^{DGC} + \sum_{n=1}^r (L_{r,n}^{DGC} - mL_{r,n-1}^{DGC}) x^n}{1 - mx - x^{r+1}} \\
&\quad \frac{L_{r,0}^{DGC} - mrx + (r+1)J\varepsilon x^{r-2} + ((r+1)\varepsilon + mJ\varepsilon) x^{r-1}}{1 - mx - x^{r+1}} \\
&= \frac{L_{r,0}^{DGC} - mrx + (r+1)J\varepsilon x^{r-2} + ((r+1)\varepsilon + mJ\varepsilon) x^{r-1}}{1 - mx - x^{r+1}}
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. ■

Şimdi DGC Fibonacci r -dizileri ve Lucas r -dizileri için Binet formülü verilecektir.

Teorem 3.4 Genelleştirilmiş DGC Fibonacci r -dizisi ve genelleştirilmiş DGC Lucas r -dizisi için Binet formülleri sırasıyla

$$F_{r,n}^{DGC} = \sum_{k=1}^{r+1} \frac{\alpha_k^* \alpha_k^n}{(r+1) \alpha_k - rm} \quad (3.1)$$

ve

$$L_{r,n}^{DGC} = \sum_{k=1}^{r+1} \alpha_k^* \alpha_k^n \quad (3.2)$$

şeklindedir. Burada $\alpha_k^* = 1 + \alpha_k J + \alpha_k^2 \varepsilon + \alpha_k^3 J \varepsilon$ dir.

İspat. Genelleştirilmiş DGC Fibonacci r -sayılarının tanımı ve (2.7) eşitliği kullanılarak,

$$\begin{aligned} F_{r,n}^{DGC} &= F_{r,n} + F_{r,n+1}J + F_{r,n+2}\varepsilon + F_{r,n+3}J\varepsilon \\ &= \sum_{r=1}^{r+1} \frac{\alpha_k^n + \alpha_k^{n+1}J + \alpha_k^{n+2}\varepsilon + \alpha_k^{n+3}J\varepsilon}{(r+1)\alpha_k - rm} \\ &= \sum_{r=1}^{r+1} \frac{\alpha_k^n (1 + \alpha_k J + \alpha_k^2 \varepsilon + \alpha_k^3 J \varepsilon)}{(r+1)\alpha_k - rm} = \sum_{r=1}^{r+1} \frac{\alpha_k^* \alpha_k^n}{(r+1)\alpha_k - rm} \end{aligned}$$

elde edilir.

Benzer şekilde (2.8) eşitliği kullanılarak, genelleştirilmiş DGC Lucas r -dizisinin Binet formülü elde edilir. ■

Şimdi DGC Fibonacci r -dizileri ve Lucas r -dizileri için bir toplam formülü verilecektir.

Teorem 3.5 $t \geq 0$ için,

$$\sum_{n=0}^t F_{r,n}^{DGC} = \sum_{r=1}^{r+1} \frac{\alpha_k^* (\alpha_k^{t+1} - 1)}{(r+1)\alpha_k^2 - (r(m+1) + 1)\alpha_k + rm}$$

ve

$$\sum_{n=0}^t L_{r,n}^{DGC} = \sum_{r=1}^{r+1} \alpha_k^* \left(\frac{\alpha_k^{t+1} - 1}{\alpha_k - 1} \right)$$

sağlanır.

İspat. (3.1) de verilen Binet formülü kullanılarak,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^t F_{r,n}^{DGC} &= \sum_{n=0}^t \sum_{r=1}^{r+1} \frac{\alpha_k^* \alpha_k^n}{(r+1)\alpha_k - rm} \\ &= \sum_{r=1}^{r+1} \frac{\alpha_k^*}{(r+1)\alpha_k - rm} \left(\sum_{n=0}^t \alpha_k^n \right) \\ &= \sum_{r=1}^{r+1} \frac{\alpha_k^*}{(r+1)\alpha_k - rm} \left(\frac{\alpha_k^{t+1} - 1}{\alpha_k - 1} \right) \\ &= \sum_{r=1}^{r+1} \frac{\alpha_k^* (\alpha_k^{t+1} - 1)}{(r+1)\alpha_k^2 - (r(m+1) + 1)\alpha_k + rm} \end{aligned}$$

elde edilir.

Benzer şekilde, (3.2) de verilen Binet formülü kullanılarak,

$$\sum_{n=0}^t L_{r,n}^{DGC} = \sum_{n=0}^t \sum_{r=1}^{r+1} \alpha_k^* \alpha_k^n = \sum_{r=1}^{r+1} \alpha_k^* \left(\sum_{t=0}^t \alpha_k^n \right) = \sum_{r=1}^{r+1} \alpha_k^* \left(\frac{\alpha_k^{t+1} - 1}{\alpha_k - 1} \right)$$

elde edilir. ■

Şimdi DGC Fibonacci r -dizileri için genelleştirilmiş Honsberger özdeşliği verilecektir.

Teorem 3.6 (Genelleştirilmiş Honsberger Özdeşliği) k ve n pozitif tam sayılar olmak üzere,

$$F_{r,k+n}^{DGC} = F_{r,k} F_{r,n+1}^{DGC} + \sum_{j=1}^r F_{r,k-j} F_{r,n-r+j}^{DGC}$$

eşitliği sağlar.

İspat. (2.3) eşitliği ile verilen genelleştirilmiş Fibonacci r -sayıları için genelleştirilmiş Honsberger özdeşliği kullanılarak,

$$\begin{aligned} F_{r,k+n}^{DGC} &= F_{r,k+n} + F_{r,k+n+1}J + F_{r,k+n+2}\varepsilon + F_{r,k+n+3}J\varepsilon \\ &= F_{r,k}F_{r,n+1} + \sum_{j=1}^r F_{r,k-j}F_{r,n-r+j} \\ &\quad + \left(F_{r,k}F_{r,n+2} + \sum_{j=1}^r F_{r,k-j}F_{r,n-r+j+1} \right) J \\ &\quad + \left(F_{r,k}F_{r,n+3} + \sum_{j=1}^r F_{r,k-j}F_{r,n-r+j+2} \right) \varepsilon \\ &\quad + \left(F_{r,k}F_{r,n+4} + \sum_{j=1}^r F_{r,k-j}F_{r,n-r+j+3} \right) J\varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\begin{aligned} F_{r,k+n}^{DGC} &= F_{r,k} (F_{r,n+1} + F_{r,n+2}J + F_{r,n+3}\varepsilon + F_{r,n+4}J\varepsilon) \\ &\quad + \sum_{j=1}^r F_{r,k-j}F_{r,n-r+j} + F_{r,n-r+j+1}J \\ &\quad + F_{r,n-r+j+2}\varepsilon + F_{r,n-r+j+1}J\varepsilon \\ &= F_{r,k}F_{r,n+1}^{DGC} + \sum_{j=1}^r F_{r,k-j}F_{r,n-r+j}^{DGC} \end{aligned}$$

elde edilir. ■

Teorem 3.7 k ve n pozitif tamsayıları için,

$$F_{r,k+n}^{DGC} = F_{r,k}^{DGC} F_{r,n+1} + \sum_{j=1}^r F_{r,k-j}^{DGC} F_{r,n-r+j}$$

eşitliği sağlar.

İspat. Genelleştirilmiş DGC Fibonacci sayısının tanımı kullanılarak,

$$\begin{aligned} F_{r,k+n}^{DGC} &= F_{r,k+n} + F_{r,k+n+1}J + F_{r,k+n+2}\varepsilon + F_{r,k+n+3}J\varepsilon \\ &= F_{r,n+1}F_{r,k} + \sum_{j=1}^r F_{r,k-j}F_{r,n-r+j} \\ &\quad + [F_{r,n+1}F_{r,k+1} + \sum_{j=1}^r F_{n-r+j}F_{r,k-j+1}]J \\ &\quad + [F_{r,n+1}F_{r,n+2} + \sum_{j=1}^r F_{n-r+j}F_{r,k-j+2}]\varepsilon \\ &\quad + [F_{r,n+1}F_{r,k+3} + \sum_{j=1}^r F_{n-r+j}F_{r,k-j+3}]J\varepsilon \\ &= F_{r,n+1}[F_{r,k} + F_{r,k+1}J + F_{r,k+2}\varepsilon + F_{r,k+3}J\varepsilon] \\ &\quad + \sum_{j=1}^r F_{r,n-r+j}[F_{r,k-j} + F_{r,k-j+1}J + F_{r,k-j+2}\varepsilon + F_{r,k-j+3}J\varepsilon] \\ &= F_{r,n+1}F_{r,k}^{DGC} + \sum_{j=1}^r F_{r,n-r+j}F_{r,k-j}^{DGC} \end{aligned}$$

elde edilir. ■

3.1 Genelleştirilmiş DGC Fibonacci ve Lucas r -Sayıları için Bazı Matris Gösterimleri

Bu bölümde, genelleştirilmiş DGC Fibonacci ve Lucas r -sayıları için bazı matris gösterimleri elde edilecektir.

Fibonacci r -sayıları için Koçer vd. (Koçer vd. 2009)

$$Q_r := \begin{bmatrix} m & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisini kullanarak,

$$Q_r^n = \begin{bmatrix} F_{r,n+1} & F_{r,n} & \cdots & F_{r,n-r+1} \\ F_{r,n-r+1} & F_{r,n-r} & & F_{r,n-2r+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{r,n-1} & F_{r,n-2} & \cdots & F_{r,n-r-1} \\ F_{r,n} & F_{r,n-1} & \cdots & F_{r,n-r} \end{bmatrix}$$

matrisini elde etmişlerdir.

Benzer şekilde $(r+1) \times (r+1)$ tipindeki

$$\mathcal{F}(n) := \begin{bmatrix} F_{r,n+r+1}^{DGC} & F_{r,n+r}^{DGC} & \cdots & F_{r,n+1}^{DGC} \\ F_{r,n+r}^{DGC} & F_{r,n+r-1}^{DGC} & & F_{r,n}^{DGC} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{r,n+2}^{DGC} & F_{r,n+1}^{DGC} & \cdots & F_{r,n-r+2}^{DGC} \\ F_{r,n+1}^{DGC} & F_{r,n}^{DGC} & \cdots & F_{r,n-r+1}^{DGC} \end{bmatrix}$$

ve

$$\mathcal{F} := \begin{bmatrix} F_{r,r+1}^{DGC} & F_{r,r}^{DGC} & \cdots & F_{r,1}^{DGC} \\ F_{r,r}^{DGC} & F_{r,r-1}^{DGC} & & F_{r,0}^{DGC} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{r,2}^{DGC} & F_{r,1}^{DGC} & \cdots & F_{r,-r+2}^{DGC} \\ F_{r,1}^{DGC} & F_{r,0}^{DGC} & \cdots & F_{r,-r+1}^{DGC} \end{bmatrix}$$

matrislerini göz önüne alalım.

Teorem 3.8 $n \geq 1$ için,

$$\mathcal{F}(n) = \mathcal{F}Q_r^n \tag{3.3}$$

eşitliği elde edilir.

İspat. n üzerinden tümevarım ile ispatlayalım. $n = 1$ için eşitlik doğrudur.

$n > 1$ için doğru olsun. $n + 1$ eşitliğinin doğruluğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}Q_r^{n+1} &= \mathcal{F}Q_r^n Q_r \\
&= \mathcal{F}(n)Q_r \\
&= \begin{bmatrix} F_{r,n+r+1}^{DGC} & F_{r,n+r}^{DGC} & \cdots & F_{r,n+1}^{DGC} \\ F_{r,n+r}^{DGC} & F_{r,n+r-1}^{DGC} & & F_{r,n}^{DGC} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{r,n+2}^{DGC} & F_{r,n+1}^{DGC} & \cdots & F_{r,n-r+2}^{DGC} \\ F_{r,n+1}^{DGC} & F_{r,n}^{DGC} & \cdots & F_{r,n-r+1}^{DGC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} F_{r,n+r+2}^{DGC} & F_{r,n+r+1}^{DGC} & \cdots & F_{r,n+2}^{DGC} \\ F_{r,n+r+1}^{DGC} & F_{r,n+r}^{DGC} & & F_{r,n+1}^{DGC} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{r,n+3}^{DGC} & F_{r,n+2}^{DGC} & \cdots & F_{r,n-r+3}^{DGC} \\ F_{r,n+2}^{DGC} & F_{r,n+1}^{DGC} & \cdots & F_{r,n-r+2}^{DGC} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

olur. Böylece $\mathcal{F}(n) = \mathcal{F}Q_r^n$ eşitliği sağlanır. ■

Genelleştirilmiş DGC Fibonacci r -sayılarının matris gösterimine benzer şekilde, genelleştirilmiş DGC Lucas r -sayıları için de matris gösterimi elde edilir.

$$\mathcal{L}(n) := \begin{bmatrix} L_{r,n+r+1}^{DGC} & L_{r,n+r}^{DGC} & \cdots & L_{r,n+1}^{DGC} \\ L_{r,n+r}^{DGC} & L_{r,n+r-1}^{DGC} & & L_{r,n}^{DGC} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{r,n+1}^{DGC} & L_{r,n}^{DGC} & \cdots & L_{r,n-r+1}^{DGC} \end{bmatrix}$$

ve

$$\mathcal{L} := \begin{bmatrix} L_{r,r+1}^{DGC} & L_{r,r}^{DGC} & \cdots & L_{r,1}^{DGC} \\ L_{r,r}^{DGC} & L_{r,r-1}^{DGC} & & L_{r,0}^{DGC} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{r,1}^{DGC} & L_{r,0}^{DGC} & \cdots & L_{r,-r+1}^{DGC} \end{bmatrix}$$

olmak üzere,

$$\mathcal{L}(n) = \mathcal{L}Q_r^n \tag{3.4}$$

eşitliği sağlanır.

Ayrıca, \mathcal{F} matrisini kullanarak, genelleştirilmiş DGC Lucas r -sayıları için başka bir matris özdeşliği elde edebiliriz.

$$L_r^n := \begin{bmatrix} L_{r,n+1} & L_{r,n} & \cdots & L_{r,n-r+1} \\ L_{r,n-r+1} & L_{r,n-r} & & L_{r,n-2r+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{r,n-1} & L_{r,n-2} & \cdots & L_{r,n-r-1} \\ L_{r,n} & L_{r,n-1} & \cdots & L_{r,n-r} \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$\mathcal{L}(n) = \mathcal{F}L_r^n \quad (3.5)$$

şekindedir.

Örnek 3.1 $r = 2$ ve $n = 3$ olsun. $\mathcal{F}Q_2^3 = \mathcal{F}(3)$ matris özdeşliği göz önüne alınırsa, genelleştirilmiş DGC Fibonacci r -sayıları için

$$\begin{bmatrix} F_{r,3}^{DGC} & F_{r,2}^{DGC} & F_{r,1}^{DGC} \\ F_{r,2}^{DGC} & F_{r,1}^{DGC} & F_{r,0}^{DGC} \\ F_{r,1}^{DGC} & F_{r,0}^{DGC} & F_{r,-1}^{DGC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{r,4} & F_{r,3} & F_{r,2} \\ F_{r,2} & F_{r,1} & F_{r,0} \\ F_{r,3} & F_{r,2} & F_{r,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{r,6}^{DGC} & F_{r,5}^{DGC} & F_{r,4}^{DGC} \\ F_{r,5}^{DGC} & F_{r,4}^{DGC} & F_{r,3}^{DGC} \\ F_{r,4}^{DGC} & F_{r,3}^{DGC} & F_{r,2}^{DGC} \end{bmatrix}$$

matris gösterimi elde edilir.

$\mathcal{L}Q_2^3 = \mathcal{L}(3)$ matris özdeşliği göz önüne alınırsa, genelleştirilmiş DGC Lucas r -sayıları için

$$\begin{bmatrix} L_{r,3}^{DGC} & L_{r,2}^{DGC} & L_{r,1}^{DGC} \\ L_{r,2}^{DGC} & L_{r,1}^{DGC} & L_{r,0}^{DGC} \\ L_{r,1}^{DGC} & L_{r,0}^{DGC} & L_{r,-1}^{DGC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{r,4} & F_{r,3} & F_{r,2} \\ F_{r,2} & F_{r,1} & F_{r,0} \\ F_{r,3} & F_{r,2} & F_{r,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{r,6}^{DGC} & L_{r,5}^{DGC} & L_{r,4}^{DGC} \\ L_{r,5}^{DGC} & L_{r,4}^{DGC} & L_{r,3}^{DGC} \\ L_{r,4}^{DGC} & L_{r,3}^{DGC} & L_{r,2}^{DGC} \end{bmatrix}$$

matris gösterimi elde edilir.

Ayrıca $\mathcal{F}L_2^2 = \mathcal{L}(3)$ matris özdeşliği için

$$\begin{bmatrix} F_{r,3}^{DGC} & F_{r,2}^{DGC} & F_{r,1}^{DGC} \\ F_{r,2}^{DGC} & F_{r,1}^{DGC} & F_{r,0}^{DGC} \\ F_{r,1}^{DGC} & F_{r,0}^{DGC} & F_{r,-1}^{DGC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{r,4} & L_{r,3} & L_{r,2} \\ L_{r,2} & L_{r,1} & L_{r,0} \\ L_{r,3} & L_{r,2} & L_{r,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{r,6}^{DGC} & L_{r,5}^{DGC} & L_{r,4}^{DGC} \\ L_{r,5}^{DGC} & L_{r,4}^{DGC} & L_{r,3}^{DGC} \\ L_{r,4}^{DGC} & L_{r,3}^{DGC} & L_{r,2}^{DGC} \end{bmatrix}$$

matris gösterimi elde edilir.

Aşağıdaki teoremdе, genelleştirilmiş DGC Fibonacci r -sayıları ve genelleştirilmiş DGC Lucas r -sayıları için genelleştirilmiş Cassini özdeşlikleri verilecektir.

Teorem 3.9 r pozitif tamsayısı için,

$$\det \mathcal{F}(n) = (-1)^{nr} \det \mathcal{F} \text{ ve } \det \mathcal{L}(n) = (-1)^{nr} \det \mathcal{L}$$

dir.

İspat. (3.3) ve (3.4) matris eşitliklerinde her iki tarafının determinantı alınarak istenen sonuç elde edilir. ■

Sonuç 3.1 Eğer Teorem 3.9'da $r = 1$ alınırsa, DGC Fibonacci ve Lucas sayıları için Cassini özdeşliği sırasıyla

$$F_{n+2}^{DGC} F_n^{DGC} - F_{n+1}^{DGC^2} = (-1)^n \left(F_2^{DGC} F_0^{DGC} - F_1^{DGC^2} \right)$$

ve

$$L_{n+2}^{DGC} L_n^{DGC} - L_{n+1}^{DGC^2} = (-1)^n \left(L_2^{DGC} L_0^{DGC} - L_1^{DGC^2} \right)$$

şeklindedir.

(3.3) matris özdeşliği kullanılarak, genelleştirilmiş DGC Fibonacci r -sayıları ve Lucas r -sayıları için Honsberger formülünün bir genellemesi olarak da görülebilen aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 3.10 Negatif olmayan $s, t \geq r$ tam sayıları için,

$$F_{r,s+t}^{DGC} = F_{r,t-r+1} F_{r,s+r}^{DGC} + \sum_{j=1}^r F_{r,t-r+1-j} F_{r,s-1+j}^{DGC}$$

ve

$$L_{r,s+t}^{DGC} = F_{r,t-r+1} F_{r,s+r}^{DGC} + \sum_{j=1}^r F_{r,t-r+1-j} L_{r,s-1+j}^{DGC}$$

elde edilir.

İspat. Matris eşitlikleri göz önünde bulundurularak,

$$\mathcal{F}(s+t) = \mathcal{F}Q_r^{s+t} = (\mathcal{F}Q_r^s) Q_r^t = \mathcal{F}(s)Q_r^t$$

ve

$$\mathcal{L}(s+t) = \mathcal{L}Q_r^{s+t} = (\mathcal{L}Q_r^s)Q_r^t = \mathcal{L}(s)Q_r^t$$

ardından matris eşitliklerinin $(2, r+1)$ 'inci bileşenleri eşitlenerek istenen sonuçlar elde edilir. ■

Sonuç 3.2 Teorem 3.10 da $r = 1$ alınırsa,

$$F_{s+t}^{DGC} = F_t F_{s+1}^{DGC} + F_{t-1} F_s^{DGC}$$

ve

$$L_{s+t}^{DGC} = F_t L_{s+1}^{DGC} + F_{t-1} L_s^{DGC}$$

elde edilir.

4. KUANTUM KATSAYILI DUAL GENELLEŞTİRİLMİŞ KOM- PLEKS SAYILAR

Bu bölümde, dual genelleştirilmiş kompleks sayılar ve kuantum tam sayılar bir araya getirilerek dual genelleştirilmiş kompleks Fibonacci ve Lucas sayılarını genelleştiren q -dual genelleştirilmiş kompleks Fibonacci sayıları ve q -dual genelleştirilmiş kompleks Lucas sayıları tanımlanacaktır. Bu sayıların üreteç fonksiyonları, Binet for-
mülleri ve toplam formülleri gibi bazı temel özellikleri elde edilecektir. Ayrıca, bu sayılar için bazı özdeşlikleri genelleyen Vajda özdeşliği elde edilecektir. Bu bölümde elde edilen sonuçlar tezimizin orijinal sonuçlarıdır.

Tanım 4.1 (q -Dual Genelleştirilmiş Kompleks Fibonacci Sayıları) n -inci q -dual genelleştirilmiş kompleks Fibonacci sayısı

$$\mathbb{F}_{n,(\gamma;q)}^{DGC} = \gamma^{n-1} [n]_q + \gamma^n [n+1]_q J + \gamma^{n+1} [n+2]_q \varepsilon + \gamma^{n+2} [n+3]_q J\varepsilon$$

bağıntısı ile tanımlanır. Burada $\gamma = \frac{s+\sqrt{s^2+4t}}{2}$ şeklindedir.

Tanım 4.2 (q -Dual Genelleştirilmiş Kompleks Lucas Sayıları) n -inci q -dual genelleştirilmiş kompleks Lucas sayısı

$$\mathbb{L}_{n,(\gamma;q)}^{DGC} = \gamma^n \frac{[2n]_q}{[n]_q} + \gamma^{n+1} \frac{[2n+2]_q}{[n+1]_q} J + \gamma^{n+2} \frac{[2n+4]_q}{[n+2]_q} \varepsilon + \gamma^{n+3} \frac{[2n+6]_q}{[n+3]_q} J\varepsilon$$

bağıntısı ile tanımlanır.

Burada γ , Horadam dizisinin karakteristik denkleminin köküdür. Ayrıca, ε dual birim, J genelleştirilmiş kompleks birim ve $J\varepsilon$ dual genelleştirilmiş kompleks birimdir.

Çizelge 4.1'de q -dual genelleştirilmiş kompleks Fibonacci sayıları için bazı özel durumlar belirtilmiştir.

Çizelge 4.1. q -Dual Genelleştirilmiş Kompleks Fibonacci Sayılarının Özel Durumları

q	γ	\mathfrak{p}	q -DGC Fibonacci sayıları
$\frac{-1}{\gamma^2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	\mathfrak{p}	DGC Fibonacci sayıları (Gürses vd. 2022)
$\frac{-1}{\gamma^2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	-1	Dual kompleks Fibonacci sayıları
$\frac{-1}{\gamma^2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	0	Hiper dual Fibonacci sayıları
$\frac{-1}{\gamma^2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	1	Dual hiperbolik Fibonacci sayıları
$\frac{-1}{\gamma^2}$	$1 + \sqrt{2}$	\mathfrak{p}	DGC Pell sayıları
$\frac{-1}{2}$	2	\mathfrak{p}	DGC Jacobsthal sayılar
$\frac{-1}{\gamma^2}$	$\frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}$	\mathfrak{p}	DGC k -Fibonacci sayıları

$\mathbb{F}_{n,(\gamma;q)}^{DGC}$ ve $\mathbb{F}_{m,(\gamma;q)}^{DGC}$ iki q -dual genelleştirilmiş kompleks Fibonacci sayıları olmak üzere, bu sayıların toplamı ve farkı

$$\begin{aligned}
 \mathbb{F}_{n,(\gamma;q)}^{DGC} \pm \mathbb{F}_{m,(\gamma;q)}^{DGC} &= (\gamma^{n-1} [n]_q + \gamma^n [n+1]_q J + \gamma^{n+1} [n+2]_q \varepsilon + \gamma^{n+2} [n+3]_q J\varepsilon) \\
 &\quad \pm (\gamma^{m-1} [m]_q + \gamma^m [m+1]_q J + \gamma^{m+1} [m+2]_q \varepsilon + \gamma^{m+2} [m+3]_q J\varepsilon) \\
 &= [\gamma^n (\frac{1-q^n}{\gamma-\gamma q}) \pm \gamma^m (\frac{1-q^m}{\gamma-\gamma q})] \\
 &\quad + [\gamma^{n+1} (\frac{1-q^{n+1}}{\gamma-\gamma q}) \pm \gamma^{m+1} (\frac{1-q^{m+1}}{\gamma-\gamma q})] J \\
 &\quad + [\gamma^{n+2} (\frac{1-q^{n+2}}{\gamma-\gamma q}) \pm \gamma^{m+2} (\frac{1-q^{m+2}}{\gamma-\gamma q})] \varepsilon \\
 &\quad + [\gamma^{n+3} (\frac{1-q^{n+3}}{\gamma-\gamma q}) \pm \gamma^{m+3} (\frac{1-q^{m+3}}{\gamma-\gamma q})] J\varepsilon
 \end{aligned}$$

şeklinde ve çarpımı ise

$$\mathbb{F}_{n,(\gamma;q)}^{DGC} \mathbb{F}_{m,(\gamma;q)}^{DGC} = \begin{bmatrix} \gamma^{n-1} [n]_q & \mathfrak{p}\gamma^n [n+1]_q & 0 & 0 \\ \gamma^n [n+1]_q & \gamma^{n-1} [n]_q & 0 & 0 \\ \gamma^{n+1} [n+2]_q & \mathfrak{p}\gamma^{n+2} [n+3]_q & \gamma^{n-1} [n]_q & \mathfrak{p}\gamma^n [n+1]_q \\ \gamma^{n+2} [n+3]_q & \gamma^{n+1} [n+2]_q & \gamma^n [n+1]_q & \gamma^{n-1} [n]_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma^{m-1} [m]_q \\ \gamma^m [m+1]_q \\ \gamma^{m+1} [m+2]_q \\ \gamma^{m+2} [m+3]_q \end{bmatrix}$$

şeklinde dir.

q -dual genelleştirilmiş kompleks Fibonacci sayıları için aşağıdaki eşlenikler verilebilir:

1. Genelleştirilmiş kompleks eşlenik:

$$\mathbb{F}_{n,(\gamma;q)}^{DGC^*1} = (\gamma^{n-1} [n]_q - J\gamma^n [n+1]_q + \varepsilon\gamma^{n+1} [n+2]_q - J\varepsilon\gamma^{n+2} [n+3]_q).$$

2. Dual eşlenik:

$$\mathbb{F}_{n,(\gamma;q)}^{DGC^*2} = (\gamma^{n-1} [n]_q + J\gamma^n [n+1]_q - \varepsilon\gamma^{n+1} [n+2]_q - J\varepsilon\gamma^{n+2} [n+3]_q).$$

3. Çift eşlenik:

$$\mathbb{F}_{n,(\gamma;q)}^{DGC^*3} = (\gamma^{n-1} [n]_q - J\gamma^n [n+1]_q - \varepsilon\gamma^{n+1} [n+2]_q + J\varepsilon\gamma^{n+2} [n+3]_q).$$

4. Dual genelleştirilmiş kompleks eşlenik:

$$\mathbb{F}_{n,(\gamma;q)}^{DGC^*4} = (\gamma^{n-1} [n]_q - J\gamma^n [n+1]_q) \left(1 - \frac{\gamma^{n+1} [n+2]_q + J\gamma^{n+2} [n+3]_q}{\gamma^{n-1} [n]_q + J\gamma^n [n+1]_q} \varepsilon \right).$$

Burada $\gamma^{n-1} [n]_q + J\gamma^n [n+1]_q$ sıfır bölen değildir.

5. Anti-dual eşlenik:

$$\mathbb{F}_{n,(\gamma;q)}^{DGC^*5} = \left(\gamma^{n+1} [n+2]_q + J\gamma^{n+2} [n+3]_q \right) - \left(\gamma^{n-1} [n]_q + J\gamma^n [n+1]_q \right) \varepsilon.$$

Böylece, q -dual genelleştirilmiş kompleks Fibonacci sayıları için aşağıdaki normlar verilir:

1. Genelleştirilmiş kompleks norm:

$$\left| \mathbb{F}_{n,(\gamma;q)}^{DGC} \right|_{*1}^2 = \mathbb{F}_{n,(\gamma;q)}^{DGC} \mathbb{F}_{n,(\gamma;q)}^{DGC^*1}.$$

2. Dual norm:

$$\left| \mathbb{F}_{n,(\gamma;q)}^{DGC} \right|_{*2}^2 = \mathbb{F}_{n,(\gamma;q)}^{DGC} \mathbb{F}_{n,(\gamma;q)}^{DGC^*2}.$$

3. Çift norm:

$$\left| \mathbb{F}_{n,(\gamma;q)}^{DGC} \right|_{*3}^2 = \mathbb{F}_{n,(\gamma;q)}^{DGC} \mathbb{F}_{n,(\gamma;q)}^{DGC^*3}.$$

4. Dual genelleştirilmiş kompleks norm:

$$\left| \mathbb{F}_{n,(\gamma;q)}^{DGC} \right|_{*4}^2 = \mathbb{F}_{n,(\gamma;q)}^{DGC} \mathbb{F}_{n,(\gamma;q)}^{DGC*4}.$$

5. Anti-dual norm:

$$\left| \mathbb{F}_{n,(\gamma;q)}^{DGC} \right|_{*5}^2 = \mathbb{F}_{n,(\gamma;q)}^{DGC} \mathbb{F}_{n,(\gamma;q)}^{DGC*5}.$$

Teorem 4.1 q -dual genelleştirilmiş kompleks Fibonacci sayıları ve q -dual genelleştirilmiş kompleks Lucas sayıları için Binet formülleri sırasıyla

$$\mathbb{F}_{n,(\gamma;q)}^{DGC} = \frac{\gamma^n \gamma^* - (\gamma q)^n \delta^*}{\sqrt{\Delta}} \quad \text{ve} \quad \mathbb{L}_{n,(\gamma;q)}^{DGC} = \gamma^n \gamma^* + (\gamma q)^n \delta^*$$

şekindedir. Burada $\gamma^* = 1 + \gamma J + \gamma^2 \varepsilon + \gamma^3 J \varepsilon$, $\delta^* = 1 + (\gamma q) J + (\gamma q)^2 \varepsilon + (\gamma q)^3 J \varepsilon$ ve $\Delta = (\gamma - \gamma q)^2$ 'dir.

İspat. q -dual genelleştirilmiş kompleks Fibonacci sayılarının tanımından,

$$\begin{aligned} \mathbb{F}_{n,(\gamma;q)}^{DGC} &= \gamma^{n-1} [n]_q + \gamma^n [n+1]_q J + \gamma^{n+1} [n+2]_q \varepsilon + \gamma^{n+2} [n+3]_q J \varepsilon \\ &= \gamma^n \frac{1-q^n}{(\gamma-\gamma q)} + \gamma^{n+1} \frac{1-q^{n+1}}{(\gamma-\gamma q)} J + \gamma^{n+2} \frac{1-q^{n+2}}{(\gamma-\gamma q)} \varepsilon + \gamma^{n+3} \frac{1-q^{n+3}}{(\gamma-\gamma q)} J \varepsilon \\ &= \frac{\gamma^n - (\gamma q)^n}{(\gamma-\gamma q)} + \frac{\gamma^{n+1} - (\gamma q)^{n+1}}{(\gamma-\gamma q)} J + \frac{\gamma^{n+2} - (\gamma q)^{n+2}}{(\gamma-\gamma q)} \varepsilon + \frac{\gamma^{n+3} - (\gamma q)^{n+3}}{(\gamma-\gamma q)} J \varepsilon \\ &= \frac{\gamma^n}{(\gamma-\gamma q)} (1 + \gamma J + \gamma^2 \varepsilon + \gamma^3 J \varepsilon) - \frac{(\gamma q)^n}{(\gamma-\gamma q)} (1 + (\gamma q) J + (\gamma q)^2 \varepsilon + (\gamma q)^3 J \varepsilon) \\ &= \frac{\gamma^n \gamma^* - (\gamma q)^n \delta^*}{(\gamma-\gamma q)} \end{aligned}$$

elde edilir.

Benzer şekilde, q -dual genelleştirilmiş kompleks Lucas sayılarının tanımından,

$$\begin{aligned} \mathbb{L}_{n,(\gamma;q)}^{DGC} &= \gamma^n \frac{1-q^{2n}}{1-q} + \gamma^{n+1} \frac{1-q^{2n+2}}{1-q} J + \gamma^{n+2} \frac{1-q^{2n+4}}{1-q} \varepsilon + \gamma^{n+3} \frac{1-q^{2n+6}}{1-q} J \varepsilon \\ &= \gamma^n (1+q^n) + \gamma^{n+1} (1+q^{n+1}) J + \gamma^{n+2} (1+q^{n+2}) \varepsilon + \gamma^{n+3} (1+q^{n+3}) J \varepsilon \\ &= \gamma^n (1 + \gamma J + \gamma^2 \varepsilon + \gamma^3 J \varepsilon) + (\gamma q)^n (1 + (\gamma q) J + (\gamma q)^2 \varepsilon + (\gamma q)^3 J \varepsilon) \\ &= \gamma^n \gamma^* + (\gamma q)^n \delta^* \end{aligned}$$

elde edilir. ■

Teorem 4.2 q -dual genelleştirilmiş kompleks Fibonacci sayıları için üstel türeteç fonksiyonları sırasıyla,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{F}_{n,(\gamma;q)}^{DGC} \frac{x^n}{n!} = \frac{e^{\gamma x} \gamma^* - e^{(\gamma q)x} \delta^*}{(\gamma - \gamma q)} ve \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{L}_{n,(\gamma;q)}^{DGC} \frac{x^n}{n!} = \gamma^* e^{\gamma x} + \delta^* e^{(\gamma q)x}$$

şeklindedir.

İspat. q -dual genelleştirilmiş kompleks Fibonacci sayıları için Binet formülü yardımıyla,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{F}_{n,(\gamma;q)}^{DGC} \frac{x^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\gamma^n \gamma^* - (aq)^n \delta^*}{(\gamma - \gamma q)} \right) \frac{x^n}{n!} \\ &= \frac{\gamma^*}{(\gamma - \gamma q)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma x)^n}{n!} - \frac{\delta^*}{(\gamma - \gamma q)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(aqx)^n}{n!} = \frac{\gamma^* e^{\gamma x} - \delta^* e^{(\gamma q)x}}{(\gamma - \gamma q)} \end{aligned}$$

elde edilir.

Benzer bir şekilde, q -dual genelleştirilmiş Lucas sayılarının üstel türeteç fonksiyonu

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{L}_{n,(\gamma;q)}^{DGC} \frac{x^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} (\gamma^n \gamma^* + (aq)^n \delta^*) \frac{x^n}{n!} \\ &= \gamma^* \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma x)^n}{n!} + \delta^* \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma q x)^n}{n!} = \gamma^* e^{\gamma x} + \delta^* e^{(\gamma q)x} \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. ■

Teorem 4.3 Herhangi pozitif n ve m tamsayıları için, q -dual genelleştirilmiş kompleks Fibonacci sayıları için Honsberger özdeşliği

$$\mathbb{F}_{n,(\gamma;q)}^{DGC} \mathbb{F}_{m,(\gamma;q)}^{DGC} + \mathbb{F}_{n+1,(\gamma;q)}^{DGC} \mathbb{F}_{m+1,(\gamma;q)}^{DGC} = \frac{\gamma^{n+m}}{\Delta} [(\gamma^*)^2(1 + \gamma^2) - \gamma^* \delta^* (q^n + q^m) (1 + \gamma(\gamma q)) + (\delta^*)^2(1 + (\gamma q)^2)(q^{n+m})]$$

şeklindedir.

İspat. q -dual genelleştirilmiş kompleks Fibonacci sayılarının Binet formülü kullanılarak,

$$\begin{aligned}
\mathbb{F}_{n,(\gamma;q)}^{DGC} \mathbb{F}_{m,(\gamma;q)}^{DGC} + \mathbb{F}_{n+1,(\gamma;q)}^{DGC} \mathbb{F}_{m+1,(\gamma;q)}^{DGC} &= \left(\frac{\gamma^n \gamma^* - (\gamma q)^n \delta^*}{(\gamma - \gamma q)} \right) \left(\frac{\gamma^m \gamma^* - (\gamma q)^m \delta^*}{(\gamma - \gamma q)} \right) \\
&\quad + \left(\frac{\gamma^{n+1} \gamma^* - (\gamma q)^{n+1} \delta^*}{(\gamma - \gamma q)} \right) \left(\frac{\gamma^{m+1} \gamma^* - (\gamma q)^{m+1} \delta^*}{(\gamma - \gamma q)} \right) \\
&= \frac{\gamma^{n+m}}{(\gamma - \gamma q)^2} [(\gamma^* - q^n \delta^*)(\gamma^* - q^m \delta^*)] \\
&\quad + \frac{\gamma^{n+m+2}}{(\gamma - \gamma q)^2} [(\gamma^* - q^{n+1} \delta^*)(\gamma^* - q^{m+1} \delta^*)] \\
&= \frac{\gamma^{n+m}}{(\gamma - \gamma q)^2} [(\gamma^*)^2 (1 + \gamma^2) - \gamma^* \delta^* (q^n (1 + \gamma(\gamma q)) \\
&\quad + q^m (1 + \gamma(\gamma q)) + (\delta^*)^2 q^{n+m} (1 + (\gamma q)^2)] \\
&= \frac{\gamma^{n+m}}{(\gamma - \gamma q)^2} [(\gamma^*)^2 (1 + \gamma^2) - \gamma^* \delta^* (q^n + q^m) \\
&\quad (1 + \gamma(\gamma q)) + (\delta^*)^2 q^{n+m} (1 + (\gamma q)^2)]
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. ■

Burada, $\gamma^* \delta^* = \delta^* \gamma^*$ eşitliği kullanılmıştır.

Teorem 4.4 a, b, c, d herhangi pozitif tamsayılar, $a \geq b$, $c \geq d$ ve $a + b = c + d$ olsun. q -dual genelleştirilmiş kompleks Fibonacci sayıları,

$$\mathbb{F}_{a,(\gamma;q)}^{DGC} \mathbb{F}_{b,(\gamma;q)}^{DGC} - \mathbb{F}_{c,(\gamma;q)}^{DGC} \mathbb{F}_{d,(\gamma;q)}^{DGC} = \frac{\gamma^* \delta^* (\gamma^{a+b} (-q^a - q^b + q^c + q^d))}{\Delta}$$

eşitliğini sağlar.

İspat. q -dual genelleştirilmiş kompleks Fibonacci sayılarının Binet formülü kullanılarak,

$$\begin{aligned}
\mathbb{F}_{a,(\gamma;q)}^{DGC} \mathbb{F}_{b,(\gamma;q)}^{DGC} - \mathbb{F}_{c,(\gamma;q)}^{DGC} \mathbb{F}_{d,(\gamma;q)}^{DGC} &= \frac{1}{\Delta} \left[\left(\frac{\gamma^a \gamma^* - (\gamma q)^a \delta^*}{(\gamma - \gamma q)} \right) \left(\frac{\gamma^b \gamma^* - (\gamma q)^b \delta^*}{(\gamma - \gamma q)} \right) \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{\gamma^c \gamma^* - (\gamma q)^c \delta^*}{(\gamma - \gamma q)} \right) \left(\frac{\gamma^d \gamma^* - (\gamma q)^d \delta^*}{(\gamma - \gamma q)} \right) \right] \\
&= \frac{1}{\Delta} [(\gamma^{a+b} (\gamma^*)^2 - \gamma^{a+b} q^b \gamma^* \delta^* - \gamma^{a+b} q^a \gamma^* \delta^* + (\gamma q)^{a+b} (\delta^*)^2) \\
&\quad - (\gamma^{c+d} (\gamma^*)^2 - \gamma^{c+d} q^d \gamma^* \delta^* - \gamma^{c+d} q^c \gamma^* \delta^* + (\gamma q)^{c+d} (\delta^*)^2)] \\
&= \frac{\gamma^* \delta^* (\gamma^{a+b} (-q^a - q^b + q^c + q^d))}{\Delta}
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

Sonuç 4.1 Herhangi pozitif tam sayılar n , m ve k için, q -dual genelleştirilmiş kompleks Fibonacci sayıları için Vajda özdeşliği,

$$\mathbb{F}_{n+m,(\gamma;q)}^{DGC} \mathbb{F}_{n+k,(\gamma;q)}^{DGC} - \mathbb{F}_{n,(\gamma;q)}^{DGC} \mathbb{F}_{n+m+k,(\gamma;q)}^{DGC} = \frac{\gamma^* \delta^* (\gamma^{2n+m+k} (1-q^k) (q^n - q^{n+m}))}{\Delta}$$

şeklindedir.

İspat. Eğer $a = n + m$, $b = n + k$, $c = n$ ve $d = n + m + k$ alınırsa, Teorem 4.4'ten istenilen sonuç elde edilir. ■

Sonuç 4.2 Herhangi pozitif tam sayılar n , m ve $n \geq m$ için, q -dual genelleştirilmiş kompleks Fibonacci sayıları için Catalan özdeşliği,

$$\mathbb{F}_{n+m,(\gamma;q)}^{DGC} \mathbb{F}_{n-m,(\gamma;q)}^{DGC} - \mathbb{F}_{n,(\gamma;q)}^{DGC^2} = \frac{\gamma^{2n} \gamma^* \delta^* (1-q^m) (q^n - q^{n-m})}{\Delta}$$

şeklindedir.

İspat. Eğer $a = n + m$, $b = n - m$, $c = d = n$ alınırsa, Teorem 4.4'ten istenilen sonuç elde edilir. ■

Sonuç 4.3 Herhangi pozitif tam sayı n için, q -dual genelleştirilmiş kompleks Fibonacci sayıları için Cassini özdeşliği,

$$\mathbb{F}_{n-1,(\gamma;q)}^{DGC} \mathbb{F}_{n+1,(\gamma;q)}^{DGC} - \mathbb{F}_{n,(\gamma;q)}^{DGC^2} = \frac{\gamma^{2n} \gamma^* \delta^* (1-q^{-1}) (q^n - q^{n+1})}{\Delta}$$

şeklindedir.

İspat. Eğer $a = n - 1$, $b = n + 1$ ve $c = d = n$ alınırsa, Teorem 4.4'ten istenilen sonuç elde edilir. ■

Sonuç 4.4 Herhangi pozitif tam sayılar n ve m için, q -dual genelleştirilmiş kompleks Fibonacci sayıları için d'Ocagne özdeşliği,

$$\mathbb{F}_{n,(\gamma;q)}^{DGC} \mathbb{F}_{m+1,(\gamma;q)}^{DGC} - \mathbb{F}_{n+1,(\gamma;q)}^{DGC} \mathbb{F}_{m,(\gamma;q)}^{DGC} = \frac{\gamma^{n+m+1} \gamma^* \delta^* (1-q) (q^m - q^n)}{\Delta}$$

şeklindedir.

İspat. Eğer $a = n$, $b = m + 1$, $c = n + 1$ ve $d = m$ alınırsa, Teorem 4.4'ten istenilen sonuç elde edilir. ■

Sonuç 4.5 Herhangi pozitif tam sayılar n , m ve k için, q -dual genelleştirilmiş kompleks Fibonacci sayıları için Halton özdeşliği,

$$\mathbb{F}_{m+k,(\gamma;q)}^{DGC} \mathbb{F}_{n,(\gamma;q)}^{DGC} - \mathbb{F}_{k,(\gamma;q)}^{DGC} \mathbb{F}_{m+n,(\gamma;q)}^{DGC} = \frac{\gamma^{m+n+k} \gamma^* \delta^* (1 - q^m)(q^k - q^n)}{\Delta}$$

şeklindedir.

İspat. Eğer $a = m + k$, $b = n$, $c = k$ ve $d = m + n$ alınırsa, Teorem 4.4'ten istenilen sonuç elde edilir. ■

Teorem 4.5 n ve k pozitif tamsayıları için

$$\begin{aligned} (i) \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-\gamma^2 q)^{n-i} \mathbb{F}_{2i+k,(\gamma;q)}^{DGC} &= \begin{cases} \sqrt{\Delta}^n \mathbb{F}_{n+k,(\gamma;q)}^{DGC}, & n \text{ çift ise,} \\ \sqrt{\Delta}^{k-1} \mathbb{L}_{k+m,(\gamma;q)}^{DGC}, & n \text{ tek ise,} \end{cases} \\ (ii) \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-\gamma^2 q)^{n-i} \mathbb{L}_{2i+k,(\gamma;q)}^{DGC} &= \begin{cases} \sqrt{\Delta}^n \mathbb{L}_{n+k,(\gamma;q)}^{DGC} & n \text{ çift ise,} \\ \sqrt{\Delta}^{n+1} \mathbb{F}_{n+k,(\gamma;q)}^{DGC}, & n \text{ tek ise,} \end{cases} \\ (iii) \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^i (-\gamma^2 q)^{n-i} \mathbb{F}_{2i+k,(\gamma;q)}^{DGC} &= (-\gamma[2]_q)^n \mathbb{F}_{n+k,(\gamma;q)}^{DGC}, \\ (iv) \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^i (-\gamma^2 q)^{n-i} \mathbb{L}_{2i+k,(\gamma;q)}^{DGC} &= (-\gamma[2]_q)^n \mathbb{L}_{n+k,(\gamma;q)}^{DGC}, \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat. q -dual genelleştirilmiş kompleks Fibonacci ve Lucas sayılarının Binet formülleri kullanılarak,

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-\gamma^2 q)^{n-i} \mathbb{F}_{2i+k,(\gamma;q)}^{DGC} \\ &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-\gamma^2 q)^{n-i} \left(\frac{\gamma^{2i+k} \gamma^* - (\gamma q)^{2i+k} \delta^*}{(\gamma - \gamma q)} \right) \\ &= \frac{1}{(\gamma - \gamma q)} \left(\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-\gamma^2 q)^{n-i} \gamma^{2i+k} \gamma^* - \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-\gamma^2 q)^{n-i} (\gamma q)^{2i+k} \delta^* \right) \\ &= \frac{1}{(\gamma - \gamma q)} \left(\gamma^k \gamma^* (\gamma^2 - \gamma^2 q)^n - (\gamma q)^k \delta^* (\gamma^2 q^2 - \gamma^2 q)^n \right) \\ &= \frac{1}{(\gamma - \gamma q)} \left(\gamma^k \gamma^* (\gamma \sqrt{\Delta})^n - (\gamma q)^k \delta^* (-\gamma q \sqrt{\Delta})^n \right) \end{aligned}$$

elde edilir. n çift ise,

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-\gamma^2 q)^{n-i} \mathbb{F}_{2i+k,(\gamma;q)}^{DGC} &= \frac{1}{(\gamma - \gamma q)} \left(\gamma^k \gamma^* \left(\gamma \sqrt{\Delta} \right)^n - (\gamma q)^k \delta^* \left(-\gamma q \sqrt{\Delta} \right)^n \right) \\ &= \frac{\sqrt{\Delta}^n \gamma^{n+k} \gamma^* - (\gamma q)^{n+k} \delta^*}{(\gamma - \gamma q)} \\ &= \sqrt{\Delta}^n \mathbb{F}_{n+k,(\gamma;q)}^{DGC} \end{aligned}$$

şeklindedir. n tek ise,

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-\gamma^2 q)^{n-i} \mathbb{F}_{2i+m,(\gamma;q)}^{DGC} &= \frac{1}{(\gamma - \gamma q)} \left(\gamma^k \gamma^* \left(\gamma \sqrt{\Delta} \right)^n + (\gamma q)^k \delta^* \left(\gamma q \sqrt{\Delta} \right)^n \right) \\ &= \frac{\sqrt{\Delta}^n \gamma^{n+k} \gamma^* + (\gamma q)^{n+k} \delta^*}{(\gamma - \gamma q)} \\ &= \sqrt{\Delta}^{n-1} \mathbb{L}_{n+k,(\gamma;q)}^{DGC} \end{aligned}$$

şeklindedir. ■

Teorem 4.6 Herhangi pozitif n tam sayısı için,

$$\begin{aligned} (i) \sum_{i=0}^n \binom{n}{2i} (-\gamma^2 q)^{n-i} \mathbb{F}_{4i,(\gamma;q)}^{DGC} &= \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\sqrt{\Delta}^n + \gamma^n [2]_q^n \right) \mathbb{F}_{k,(\gamma;q)}^{DGC}, & n \text{ çift ise,} \\ \frac{1}{2} \left(\sqrt{\Delta}^{n-1} \mathbb{L}_{k,(\gamma;q)}^{DGC} - \gamma^n [2]_q^n \mathbb{F}_{n,(\gamma;q)}^{DGC} \right), & n \text{ tek ise,} \end{cases} \\ (ii) \sum_{i=0}^n \binom{n}{2i} (-\gamma^2 q)^{n-i} \mathbb{L}_{4i,(\gamma;q)}^{DGC} &= \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\sqrt{\Delta}^n + \gamma^n [2]_q^n \right) \mathbb{L}_{n,(\gamma;q)}^{DGC}, & n \text{ çift ise,} \\ \frac{1}{2} \left(\sqrt{\Delta}^{n+1} \mathbb{F}_{n+k,(\gamma;q)}^{DGC} - \gamma^n [2]_q^n \mathbb{L}_{n+k,(\gamma;q)}^{DGC} \right) & n \text{ tek ise,} \end{cases} \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlar.

İspat. Teorem 4.5'ten

$$\begin{aligned} &\sum_{i=0}^n \binom{n}{2i} (-\gamma^2 q)^{n-i} \mathbb{F}_{4i,(\gamma;q)}^{DGC} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \left(1 + (-1)^i \right) (-\gamma^2 q)^{n-i} \mathbb{F}_{2i,(\gamma;q)}^{DGC} \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-\gamma^2 q)^{n-i} \mathbb{F}_{2i,(\gamma;q)}^{DGC} + \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^i (-\gamma^2 q)^{n-i} \mathbb{F}_{2i,(\gamma;q)}^{DGC} \right) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\sqrt{\Delta}^n + \gamma^n [2]_q^n \right) \mathbb{F}_{n,(\gamma;q)}^{DGC}, & n \text{ çift ise,} \\ \frac{1}{2} \left(\sqrt{\Delta}^{n-1} \mathbb{L}_{n,(\gamma;q)}^{DGC} - \gamma^n [2]_q^n \mathbb{F}_{n,(\gamma;q)}^{DGC} \right), & n \text{ tek ise,} \end{cases} \end{aligned}$$

elde edilir. ■

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tezde, bileşenleri genelleştirilmiş Fibonacci r -sayıları ve genelleştirilmiş Lucas r -sayıları olan dual genelleştirilmiş kompleks sayılar tanımlanmıştır. Bu yeni sayı sistemini tanıtmamızın en önemli avantajı, bileşenleri Fibonacci, Lucas, k -Fibonacci, Pell ve Pell-Lucas sayıları olan dual genelleştirilmiş kompleks sayıların bu sayıları özel durumları olarak elde edilebilmesidir.

Diğer yandan bileşenleri kuantum katsayılarından oluşan dual genelleştirilmiş kompleks sayıları tanımlayarak yeni bir dual genelleştirilmiş kompleks sayı dizisi tanımlanmıştır. $q = -\frac{1}{\gamma^2}$ ve $\gamma = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ durumunda bu sayı dizileri DGC Fibonacci dizilerine dönüşür.

Dual genelleştirilmiş kompleks sayılara benzer olarak Gurses vd. (Gürses vd. 2021), hiperbolik genelleştirilmiş kompleks sayıları

$$\mathbb{PC}_p = \{z_0 + z_1 h \mid h^2 = -1, z_0, z_1 \in \mathbb{C}_p\}$$

ve kompleks genelleştirilmiş kompleks sayıları

$$\mathbb{CC}_p = \{z_0 + z_1 i \mid i^2 = -1, z_0, z_1 \in \mathbb{C}_p\}$$

tanımlamışlardır.

Bu tezde elde edilen sonuçları, hiperbolik-genelleştirilmiş kompleks sayılar ve kompleks-genelleştirilmiş kompleks sayılar için de incelemeyi hedeflemekteyiz.

KAYNAKLAR

- Abbad, S., Belbachir, H., Benzaghou, B. 2019. Companion sequences associated to the r -Fibonacci sequence: algebraic and combinatorial properties. *Turkish Journal of Mathematics*, 43(3): 1095-1114.
- Akkus, I., Kızılaslan, G. 2019. Quaternions: Quantum calculus approach with applications. *Kuwait Journal of Science*, 46(4): 1-13.
- Aydin, F.T. 2018. Dual complex k -Fibonacci numbers. *Chaos Solitons Fractals*, 115: 1-6.
- Catoni, F., Cannata, R., Catoni, V., Zampetti, P. 2004. Two-dimensional hypercomplex numbers and related trigonometries and geometries. *Adv. Appl. Clifford Algebra*, 14: 47-68.
- Cihan, A., Azak, A.Z., Gungor, M.A., and Tosun, M. 2019. A Study on Dual Hyperbolic Fibonacci and Lucas numbers. *An. S t. Univ. Ovidius Constanta Vol.*, 27(1): 35-48.
- Clifford, W.K. 1873. Preliminary sketch of biquaternions. *Proceedings of London Mathematical Society*; 4, 361-395.
- Cockle, J. 1849. On a New Imaginary in Algebra. *Philosophical magazine. London-Dublin-Edinburgh*, 3(34): 37-47.
- Fjelstad, P., Gal S.G. 2001. Two-dimensional geometries, topologies, trigonometries and physics generated by complex-type numbers. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 11(1): 81.
- Gungor, M.A., Azak A.Z. 2017. Investigation of Dual-Complex Fibonacci, Dual-Complex Lucas numbers and Their Properties. *Adv. Appl. Clifford Algebras*, 27: 3083-3096.
- Gurses, N., Senturk, G.Y., Yuce, S. 2021. A Study on Dual-Generalized Complex and Hyperbolic-Generalized Complex Numbers. *GU J Sci*, 34(1): 180-194.
- Gurses, N., Senturk, G.Y., Yuce, S. 2022. A Comprehensive Survey of Dual-Generalized Complex Fibonacci and Lucas Numbers, *Sigma Journal of Engineering and Natural Sciences*, 40(1), 179–187.
- Harkin, A.A., Harkin, J.B. 2004. Geometry of generalized complex numbers. *Mathematics Magazine*, 77(2): 118-129.
- Horadam, A.F. 1961. A generalized Fibonacci sequence, *Amer. Math Monthly*, 68(5), 455-459.
- Jackson, F.H. 1910. On a q -definite integrals. *Q J Pure Appl Math.* 41:193–203.
- Kocer, E.G., Tuglu, N., Stakhov, A. 2009. On the m -extension of the Fibonacci and Lucas p -numbers. *Chaos, Solitons and Fractals*, 40; 1890-1906.

- Koshy, T. 2001. Fibonacci and Lucas Numbers with Applications, Wiley, 672p., New York..
- Prasad, B. 2021. Dual complex Fibonacci p-numbers. Chaos, Solitons & Fractals, 145: 109922.
- Senturk, G.Y., Gurses, N., Yuce, S. 2022. Construction of Dual-Generalized Complex Fibonacci and Lucas Quaternions. Appear in Carpathian Mathematical Publications.
- Stakhov, A., Rozin, B. 2006. Theory of Binet formulas for Fibonacci and Lucas p-numbers. Chaos, Solitons & Fractals, 27(5): 1162-77.
- Tan, E., Ait-Amrane, N.R., Gok, I. 2021. Hyper-dual Horadam quaternions. Miskolc Mathematical Notes, 22(2), 903-913.
- Tan, E., Tuna, N., Yilmaz, S. 2021. Dual Generalized Complex Fibonacci p-numbers. Submitted.
- Tuğlu, N., Kocer, E.G., Stakhov, A. 2011. Bivariate Fibonacci like p-polynomials, Applied Mathematics and Computation, 217: 10239-10249.
- Vajda, S. 1989. Fibonacci & Lucas Numbers and The Golden Section, Theory and Applications, Ellis Horwood Ltd. Chichester.
- Yaglom, I.M. 1968. Complex Numbers in Geometry, Academic Press, New York.