

T.C.
MUĞLA SITKI KOÇMAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FİZİK ANABİLİM DALI

FRAKTAL ANALİZ KULLANILARAK DOĞRUSAL
OLMAYAN SİSTEMLERİN ANALİZİ: VAN DER POL
SALINICISI VE FİNANSAL İNCELEMESİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

OZAN KIYIKCI

EYLÜL 2024

MUĞLA

MUĞLA SITKI KOÇMAN ÜNİVERSİTESİ

Fen Bilimleri Enstitüsü

TEZ ONAYI

OZAN KIYIKCI tarafından hazırlanan **FRAKTAL ANALİZ KULLANARAK DOĞRUSAL OLMAYAN SİSTEMLERİN ANALİZİ: VAN DER POL OSİLATÖRÜ VE FİNANSAL İNCELEMESİ** başlıklı tezinin, 05/09/2024 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fizik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans derecesi için gerekli şartları sağladığı oybirliği ile kabul edilmiştir.

TEZ SINAV JURİSİ

Doç. Dr. Uğur ERKARSLAN (**Juri Başkanı**)

İmza:

Fizik Bölümü
Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi, Muğla

Doç. Dr. Görkem OYLUMLUOĞLU (**Danışman**)

İmza:

Fizik Bölümü
Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi, Muğla

Doç. Dr. Mustafa Burak ÇOBAN (**Üye**)

İmza:

Fizik Bölümü
Balıkesir Üniversitesi, Balıkesir

ANA BİLİM DALI BAŞKANLIĞI ONAYI

Prof. Dr. Rüştü EKE

İmza:

Fizik Ana Bilim Dalı Başkanı
Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi, Muğla

Doç. Dr. Görkem OYLUMLUOĞLU

İmza:

Fizik Bölümü
Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi, Muğla

Savunma Tarihi: 05/09/2024

Tez çalışmalarım sırasında elde ettiğim ve sunduğum tüm sonuç, doküman, bilgi ve belgelerin tarafımdan bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde edildiğini; akademik ve bilimsel etik kurallarına uygun olduğunu beyan ederim. Ayrıca, akademik ve bilimsel etik kuralları gereği bu tez çalışması sırasında elde edilmemiş başkalarına ait tüm orijinal bilgi ve sonuçlara atıf yapıldığını da beyan ederim.

Ozan KIYIKCI
05/09/2024

ABSTRACT

ANALYSIS OF NONLINEAR SYSTEMS USING FRACTAL CALCULUS: CASE STUDY ON VAN DER POL OSCILLATOR AND FINANCIAL MODELS

Ozan KIYIKCI

Master's Thesis

Fizik Bölümü

Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi

September 2024, 46 Pages

This thesis explores the application of fractal calculus in the analysis of nonlinear systems, with a focus on the Van der Pol oscillator and the Huang-Li nonlinear financial system. Traditional differential equations often fail to capture the complexity of such systems, particularly when dealing with phenomena such as chaotic behavior and memory effects. By incorporating the Caputo fractional derivative, this study extends the classical models, allowing for a more comprehensive analysis of the system dynamics. The Van der Pol oscillator is analyzed under both standard and fractional derivatives, revealing significant insights into its behavior across different parameter values. Similarly, the Huang-Li financial system is transformed into a fractional differential equation system, with a detailed examination of how varying the fractional order affects system stability and chaos. Numerical solutions are obtained using the kestir-doğrula method, and the Lyapunov exponents are calculated to assess the system's chaotic nature. The results demonstrate that fractional calculus not only enhances our understanding of these systems but also provides a powerful tool for modeling complex behaviors that are not adequately described by traditional calculus. This research contributes to the growing field of fractional calculus and its applications in physics and finance, offering valuable insights for future studies on chaotic dynamics and system stability.

Keywords: Fractal Calculus, Van der Pol Oscillator, Huang-Li Nonlinear Financial System, Caputo Fractional Derivative, Chaotic Behavior, Memory Effects, Lyapunov Exponents, kestir-doğrula Method, System Stability, Numerical Solutions.

ÖZET

FRAKTAL KALKÜLÜS KULLANARAK DOĞRUSAL OLMAYAN SİSTEMLERİN ANALİZİ: VAN DER POL SALINICISI VE FİNANSAL MODELLER ÜZERİNE BİR DURUM ÇALIŞMASI

Ozan KIYIKCI

Yüksek Lisans Tezi

Fizik Bölümü

Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi

Eylül 2024, 46 Sayfa

Bu tez, doğrusal olmayan sistemlerin analizinde fraktal kalkülüsün uygulanmasını, özellikle Van der Pol salınıcısı ve Huang-Li doğrusal olmayan finansal sistemi üzerine odaklanarak incelemektedir. Geleneksel diferansiyel denklemler, kaotik davranış ve bellek etkileri gibi durumlar söz konusu olduğunda bu tür sistemlerin karmaşıklığını yakalamakta yetersiz kalmaktadır. Bu çalışma, Caputo fraktal türevini kullanarak klasik modelleri genişletmekte ve sistem dinamiklerinin daha kapsamlı bir analizini sağlamaktadır. Van der Pol salınıcısı, hem standart hem de fraktal türevler altında analiz edilerek farklı parametre değerleri arasında sistemin davranışı hakkında önemli bilgiler sunmaktadır. Benzer şekilde, Huang-Li finansal sistemi de fraktal diferansiyel denklem sistemine dönüştürülmüş ve fraktal derecenin sistem kararlılığı ve kaos üzerindeki etkileri ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir. Sayısal çözümler Kestir-Doğrula yöntemi kullanılarak elde edilmiş ve sistemin kaotik yapısını değerlendirmek için Lyapunov üsteleri hesaplanmıştır. Sonuçlar, fraktal kalkülüsün bu sistemlerin anlaşılmasını artırmakla kalmayıp, aynı zamanda geleneksel analizlerle yeterince açıklanamayan karmaşık davranışları modellemek için güçlü bir araç sunduğunu göstermektedir. Bu araştırma, fraktal kalkülüsün fizik ve finans alanlarındaki uygulamalarına katkıda bulunarak, kaotik dinamikler ve sistem kararlılığı üzerine gelecekte yapılacak çalışmalar için değerli öngörüler sunmaktadır.

Anahtar Kelimeler: Fraktal Kalkülüs, Van der Pol Salınıcısı, Huang-Li Doğrusal Olmayan Finansal Sistem, Caputo Fraktal Türev, Kaotik Davranış, bellek Etkileri, Lyapunov Üsteleri, Kestir-Doğrula Yöntemi, Sistem Kararlılığı, Sayısal Çözümler.

ÖNSÖZ

Bu tez, fraktal kalkülüsün doğrusal olmayan sistemlerin analizine uygulanmasını, özellikle Van der Pol osilatörü ve doğrusal olmayan finansal sistemler üzerine odaklanarak incelemektedir. Burada sunulan çalışma, Doç. Dr. Gökem OYLUMLUOĞLU'nun danışmanlığında yürütülmüş olup, araştırmam boyunca sunduğu değerli rehberlik ve desteği için kendisine en içten teşekkürlerimi sunarım.



TEŞEKKÜR

Araştırmam boyunca bana rehberlik eden ve destekleyen Doç. Dr. Gökem Oylumluoğlu'na en derin teşekkürlerimi sunarım. Onun uzmanlığı ve teşvikleri, bu tezin tamamlanmasında çok önemli bir rol oynamıştır.

Özellikle, bir fizikçi olan, kız arkadaşım Sevda SALTİK'a da kaotik sistemleri anlamama yardımcı olduğu ve bu zorlu süreç boyunca bana sağladığı büyük duygusal destek için içten teşekkürlerimi sunuyorum. Onun içgörüler ve bana olan sarsılmaz inancı, bu süreci çok daha kolay hale getirdi.

Ayrıca, annem Zerrin Koyuncu'ya sonsuz desteği ve cesaretlendirmesi için kalpten teşekkür ederim. Onun yeteneklerime olan inancı, benim için sürekli bir motivasyon kaynağı olmuştur.

İçindekiler

Önsöz	vi
Teşekkür	vii
İçindekiler	viii
Şekiller Listesi	xi
Semboller ve Kısaltmalar	xi
1 GİRİŞ	1
2 LİTERATÜR TARAMASI	2
2.1 Diferansiyel Denklemler	2
2.1.1 Adi diferansiyel denklemler	2
2.1.2 Birinci dereceden doğrusal diferansiyel denklem	2
2.1.3 Birinci dereceden homojen doğrusal diferansiyel denklemler	2
2.1.4 Otonom ve otonom olmayan adi diferansiyel denklemler	3
2.2 Matris Cebiri	3
2.2.1 Toplama	3
2.2.2 Skaler çarpma	4
2.2.3 Matris çarpma	4
2.3 Fraktal Hesap	5
2.3.1 Fraktal hesaba giriş	5
2.3.2 Temel fraktal denklemler	5
2.3.3 Fraktal türev	6
2.3.4 Fraktal integral	6
2.3.5 Fraktal hesabın uygulamaları	7
2.4 Kestir-Doğrula Yöntemi	7
2.4.1 Kestir-Doğrula yöntemine genel bakış	7
2.4.2 Fraktal diferansiyel denklemlere uygulanması	8
2.4.3 Yöntemin uygulanması	8
2.4.4 Avantajlar ve uygulamalar	9
2.5 Dinamik Sistemlerde Kaosu Anlamak	9
2.5.1 Kaos nedir?	9
2.5.2 Kaos teorisinin kökenleri	9
2.5.3 Kaotik sistemlerin özellikleri	10
2.5.4 Kaos nerede başlar ve biter?	10

2.5.5	Bilim ve mühendislikte kaostun etkileri	10
2.6	Doğrusal Olmayan Sistemlerde Lyapunov Üsteleri	11
2.6.1	Lyapunov üstelerinin hesaplanması	11
2.6.2	Doğrusal sistemler için Lyapunov üstelerinin çıkarımı	11
2.6.3	Fraktal hesaplamada Lyapunov üsteleri	12
2.7	Bellek Etkisi	12
2.7.1	Fizikte bellek etkilerine örnekler	13
2.7.2	Finansal sistemlerde bellek etkilerine örnekler	14
2.7.3	Tarihte bellek etkileri örnekleri	16
3	VAN DER POL SALINICISININ ÇÖZÜMÜ İÇİN METOT	17
3.1	Van der Pol Osilatör Denklemi	17
3.2	Hamiltonyen Formülasyonu	17
3.3	Niteliksel Analiz	17
3.3.1	Denge noktaları	18
3.3.2	Kararlılık analizi	18
3.3.3	Kuvvet çizgileri ve simetriler	18
3.4	Sayısal Çözüm ve Başlangıç Koşulları	19
3.4.1	Başlangıç koşulları	19
3.4.2	<code>solve_ivp</code> kullanılarak sayısal Çözüm	19
3.4.3	Sonuçlar ve yorum	19
3.5	Fraktal Van der Pol Salıncısı	19
3.5.1	Fraktal-Dereceli diferansiyel denklemler için Kestir-Doğrula yöntemi	20
3.5.2	Sonuçlar ve tartışma	21
4	HUANG-LI DOĞRUSAL OLMAYAN FİNANSAL SİSTEMİNİN ÇÖZÜMÜ İÇİN METOT	23
4.1	ODT'lerin fraktal diferansiyel denklemlere dönüştürülmesi	23
4.1.1	Dönüştürülmüş denklemler	24
4.2	Fraktal Diferansiyel Denklemler İçin Kestir-Doğrula Yöntemi ile Sayısal Çözüm	24
4.2.1	Kestirme adımı	24
4.2.2	Doğrulama adımı	25
4.3	Pertürbasyon Analizi Kullanarak Lyapunov Üsteli Hesaplama	25
4.3.1	Yöntem: Pertürbasyon analizi	25
4.3.2	Sonuçların yorumu	26
4.3.3	Huang-Li doğrusal olmayan finansal sistemine uygulama	26
4.3.4	Lyapunov üstel hesaplamalarının sonuçları	27
4.3.5	Sonuçların görselleştirilmesi ve yorumlanması	28
4.3.6	Huang-Li doğrusal olmayan finansal sistemine uygulama	28
4.3.7	Lyapunov üstel hesaplamalarının sonuçları	29
5	BULGULAR ve SONUÇ	30
5.1	Bulguların Özeti	30
5.2	Grafiklerin Değerlendirilmesi	30
5.2.1	Yörünge grafiklerinin değerlendirilmesi (Şekil 5.1)	30
5.2.2	Zaman serisi grafiklerinin değerlendirilmesi (Şekil 5.2)	30
5.3	Önemli Bulgular	31

5.3.1	Lyapunov üsteli vs. gg (Şekil 5.3)	31
5.3.2	Farklı g değerleri üzerinde davranış	32
5.3.3	α , Bellek etkileri ve kaos arasındaki ilişki	35
5.4	Finansal Sistemler İçin Sonuçlar	36
5.5	Sonuç	36
5.6	Gelecek Çalışmalar	36
Kaynakça		37
A GENİŞLETİLMİŞ MATEMATİKSEL TÜRETİMLER		42
A.1	Caputo Fraktal Türevinin Türetilmesi	42
A.2	Adi Diferansiyel Denklemlerin Fraktal Diferansiyel Denklemlere Dönüştürülmesi	42
A.3	Kestir-Doğrula Yönteminin Türetilmesi	43
B GENİŞLETİLMİŞ BÖLÜM İÇİN KAYNAKLAR		44
C ÖZGEÇMİŞ		45

Şekiller Listesi

3.1	Standart Türev Kullanan Van der Pol Osilatörü: $x(t)$ ve $y(t)$ 'nin zamana göre grafiği (sol), ve faz uzayı diyagramı $y(t)$ 'ye karşı $x(t)$ (sağ).	22
3.2	fraktal Türev Kullanan Van der Pol Osilatörü ($\alpha = 0.99$): $x(t)$ ve $y(t)$ 'nin zamana göre grafiği (sol), ve faz uzayı diyagramı $y(t)$ 'ye karşı $x(t)$ (sağ).	22
5.1	$\alpha = 1$, $\alpha = 0.9$ ve $\alpha = 0.8$ için sistemin çözüm yörüngelerinin 3B ve 2B projeksiyonları. Grafikler $x(t)$, $y(t)$ ve $z(t)$ 'nin farklı düzlemlerdeki yörüngelerini göstermektedir.	31
5.2	$\alpha = 1$, $\alpha = 0.9$ ve $\alpha = 0.8$ için $x(t)$, $y(t)$ ve $z(t)$ 'nin zaman serisi. Bu grafikler, çözümlerin zaman içindeki kaotik doğasını göstermektedir. .	32
5.3	$\alpha = 1$ için Lyapunov Üstel vs g	32
5.4	$g = 1.3$ için Lyapunov Üstel vs α	33
5.5	$g = 1.7$ için Lyapunov Üstel vs α	33
5.6	$g = 2.3752$ için Lyapunov Üstel vs α	34
5.7	$g = 0.1169$ için Lyapunov Üstel vs α	34
5.8	$g = -2.6194$ için Lyapunov Üstel vs α	35
5.9	$g = 2.6194$ için Lyapunov Üstel vs α	35

Semboller ve Kısaltmalar

α	Türevdeki kesirli mertebe
γ	Sönümleme katsayısı
$\Gamma(\cdot)$	Gamma fonksiyonu
λ	Lyapunov Üssü
μ	Van der Pol Osilatöründeki doğrusal olmayanlık parametresi
FODE	Kesirli Dereceli Diferansiyel Denklem
GARCH	Genelleştirilmiş Otoregresif Koşullu Değişen Varyans modeli
ODE	Adi Diferansiyel Denklem
solve_ivp	Başlangıç değeri problemleri için Python'da sayısal çözücü
a, b, c, p, r, s, β	Huang-Li finansal sistemindeki parametreler
D^α	Caputo Kesirli Türev
g	Finansal sistemlerde kararlılığı etkileyen parametre
h	Sayısal yöntemlerde adım büyüklüğü
J	Jacobi matrisi
T	Toplam simülasyon süresi
t	Zaman
V	Van der Pol Osilatörü
$x(t)$	Van der Pol Osilatöründe durum değişkeni
$y(t)$	Van der Pol Osilatöründe hız
$z(t)$	Huang-Li finansal sisteminde fiyat endeksi

1. GİRİŞ

Fraktal analiz, klasik türev ve integral kavramlarını tam sayı olmayan derecelere genişleten bir analiz alanıdır. Fraktal türev kavramı, Leibniz (1695, 1697) ve Euler (1730) gibi bilim insanlarının çalışmalarına kadar uzansa da, fraktal analiz son yarım asırda bilim ve mühendislikte yaygın uygulamalar bulmuş, bu da özel çalışmaların ve metodolojilerin geliştirilmesine yol açmıştır.

Son gelişmeler, fraktal analizinin matematik, fizik ve mühendisliğin çeşitli dallarında, özellikle fraktal sistemlerin incelenmesinde etkili bir şekilde uygulanabileceğini göstermiştir. Özellikle Van der Pol salınıcısı ve doğrusal olmayan finansal sistemler ilgi konusu olmuştur. Geleneksel yöntemlerin aksine, fraktal analiz bu sistemlerin karmaşık dinamiklerini yakalamada daha esnek bir çerçeve sunmaktadır. Fraktal diferansiyel denklemlerin sayısal çözümünde, Van der Pol salınıcısı gibi sistemlerde kalıntı terimi yerine gamma fonksiyonu önemli bir rol oynamaktadır.

Geleneksel matematiksel yöntemler, doğrusal olmayan birçok sistemi açıklamakta güçlü ve yetenekli olsa da, fraktal analiz, bellek etkileri veya anormal davranış sergileyen sistemlerin anlaşılmasını zenginleştiren alternatif bir yaklaşım sunar. Bu tezde, klasik Van der Pol salınıcısı modeli ve Huang-Li doğrusal olmayan finansal sistem fraktal türevlerle genişletilerek, bu sistemlerin dinamikleri hakkında yeni anlayışlar sunulmaktadır.

Salınıcı denklemlerinin analitik çözümlerine önemli ölçüde dikkat gösterilmiştir, çünkü bu denklemler uygulamalı matematik, fizik ve mühendislikte büyük bir öneme sahiptir [Khan et al., 2011]. Doğrusal olmayan salınıcıların incelenmesi, geniş uygulama alanlarına sahip yaklaşık frekans-genlik ilişkilerinin elde edilmesi açısından kritik öneme sahiptir [Khan et al., 2011]. Doğrusal olmayan salınıcı problemlerini çözmek için varyasyonel iterasyon yöntemi [Odibat and Momani, 2006], homotopi pertürbasyon yöntemi [He, 2010], Hamiltonian yaklaşımı [He, 2004], Lindstedt-Poincare yöntemi [Liu, 2005], parametre genişleme yöntemi [Özen Zengin et al., 2008], Max-Min yaklaşımı [He, 2008], iteratif homotopi harmonik denge yöntemi [Guo and Leung, 2010] ve diferansiyel dönüşüm yöntemi [Ebaid, 2011] gibi çeşitli yöntemler uygulanmıştır.

Bu çalışmada, literatürde geniş ölçüde incelenmiş olan relaksasyon salınıcıları ve salınıcı tipindeki problemleri tanımlayan adi diferansiyel denklemlerin fraktal türevlerle nasıl genelleştirilebileceği ve geliştirilebileceği üzerinde durulacaktır.

2. LİTERATÜR TARAMASI

2.1. Diferansiyel Denklemler

Diferansiyel denklemler, değişen büyüklükler ve bunların değişim hızları arasındaki ilişkileri tanımladıkları için birçok bilim ve mühendislik alanında temel bir rol oynar. Bu denklemler, tanımladıkları ilişkilerin doğasına bağlı olarak farklı biçimlerde ortaya çıkar. Diferansiyel denklemler, bağımsız değişkenin tek bir değişken mi yoksa birden fazla değişken mi olduğuna bağlı olarak adi diferansiyel denklemler ve kısmi diferansiyel denklemler olarak geniş çapta sınıflandırılabilir.

2.1.1. Adi diferansiyel denklemler

Diferansiyel denklemler üzerine yazılmış standart metinlerde tartışıldığı gibi [Braun, 1983, Boyce and DiPrima, 2012], adi diferansiyel denklemler (ODE'ler), bir tek bağımsız değişkenin ve onun türevlerinin fonksiyonlarını içeren denklemlerdir. Bu denklemler, sistemin durumunun bir tek parametre, örneğin zaman, tarafından belirlendiği dinamik sistemlerin davranışını modellemede kritik bir rol oynar. Genel bir n -inci mertebeli ODE, şu şekilde ifade edilebilir:

$$F(x, y, \dot{y}, \ddot{y}, \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (2.1)$$

burada $y^{(n)}$, y 'nin bağımsız değişken x 'e göre n -inci türevini ifade eder. Bu genel form, basit doğrusal denklemlerden karmaşık doğrusal olmayan sistemlere kadar geniş bir diferansiyel denklemler yelpazesini kapsar [Koca, 2013].

2.1.2. Birinci dereceden doğrusal diferansiyel denklem

Birinci dereceden doğrusal diferansiyel denklem, en temel diferansiyel denklemlerden biridir. Birinci dereceden doğrusal diferansiyel denklemin genel formu şu şekilde verilir:

$$\frac{dy}{dt} + a(t)y = b(t), \quad (2.2)$$

burada $a(t)$ ve $b(t)$, bağımsız değişken t 'nin sürekli fonksiyonlarıdır. Bu denklem, bağımlı değişken y ve türevi $\frac{dy}{dt}$ 'nin birinci kuvvet olarak görüldüğü ve birbirleriyle çarpılmadığı için doğrusal olarak adlandırılır. Doğrusal diferansiyel denklemler özellikle önemlidir çünkü genellikle açık şekilde çözülebilirler ve çözümleri, süperpozisyon gibi düzgün davranış özellikleri sergiler [Braun and Golubitsky, 1983].

2.1.3. Birinci dereceden homojen doğrusal diferansiyel denklemler

Birinci dereceden doğrusal diferansiyel denklem, eğer $b(t)$ fonksiyonu Denklem 2.2'de sıfıra homojen olarak adlandırılır. Bu durumda homojen birinci dereceden doğrusal

diferansiyel denklem şu şekilde yazılır:

$$\frac{dy}{dt} + a(t)y = 0. \quad (2.3)$$

Birinci dereceden homojen doğrusal denklemin genel çözümü, bir entegrasyon sabiti içerir. Bu entegrasyon sabiti, çözümlerin tek bir parametre etrafında değişen bir eğri ailesi oluşturduğunu gösterir. Başka bir deyişle, her çözüm bu sabite bağlıdır ve sistemin bütün çözümleri, sabitin farklı değerleri için elde edilen çözümlerden oluşan bir aile şeklinde ifade edilir. Eğer $b(t)$ sıfır değilse, denklem homojen olmayan birinci dereceden doğrusal diferansiyel denklem olarak adlandırılır [Braun and Golubitsky, 1983].

2.1.4. Otonom ve otonom olmayan adi diferansiyel denklemler

Otonom adi diferansiyel denklem, bağımsız değişkenin denklemde açıkça yer almadığı denklemdir. Bu tür denklemler, sistemin davranışını yöneten yasaların zamanla değişmediği fiziksel sistemlerde önemlidir. Örneğin, basit harmonik hareket denklemi $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$, çünkü zaman t denklemde açıkça yer almadığı için otonomdur. Buna karşılık, otonom olmayan adi diferansiyel denklem, bağımsız değişkenin açık bir şekilde denklemde yer aldığı denklemdir. Örneğin, $\ddot{Q} + t^2 Q = 0$ ve $x = t - x^2$ denklemleri, bağımsız değişken t 'nin açıkça yer aldığı otonom olmayan denklemlere örnektir [Chambers, 2004].

2.2. Matris Cebiri

Matris cebiri, matematik, fizik ve mühendislikte birçok hesaplama tekniğinin temelini oluşturur. Matrisler, satır ve sütunlara düzenlenmiş sayı dizileridir ve toplama, skaler çarpma ve matris çarpımı gibi çeşitli işlemlerle manipüle edilebilir. Bu işlemlerin özellikleri, doğrusal cebirin temelini oluşturan iyi tanımlanmış cebirsel kurallarla belirlenir.

2.2.1. Toplama

Matris toplama, eleman bazında gerçekleştirilen basit bir işlemdir. Aynı boyutlara sahip iki matris A ve B verildiğinde, toplam $A + B$ şu şekilde tanımlanır:

$$(A + B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}.$$

Matris toplama hem değişme özelliğine hem de birleşme özelliğine sahiptir, bu da matrislerin hangi sırayla toplandığının son sonucu etkilemediği anlamına gelir. Ayrıca, bir toplama birim elemanı (sıfır matris) ve toplama tersi (matrisin negatif hali) matris toplamının bir abelyen grup oluşturmasını sağlar [Adkins and Davidson, 2012].

Önerme:

A , B ve C aynı boyutlarda matrisler olsun. O halde:

- $A + B = B + A$ (değişme kanunu)
- $(A + B) + C = A + (B + C)$ (birleşme kanunu)
- $A + 0 = A$ (toplama birimi)

- $A + (-A) = 0$ (toplama tersi)

Bu özellikler, matrislerin toplama işlemine tabi tutulduğunda öngörülebilir bir şekilde davranmasını sağlar ve doğrusal cebirde daha karmaşık işlemlerin ve algoritmaların geliştirilmesine olanak tanır [Adkins and Davidson, 2012].

2.2.2. Skaler çarpma

Skaler çarpma, matris cebirinde temel bir diğer işlemdir ve her bir matris elemanının bir skalerle (tek bir sayı) çarpılmasını içerir. Bir matris A ve bir skaler $c \in \mathbb{R}$ verildiğinde, çarpım cA şu şekilde tanımlanır:

$$(cA)_{ij} = c \cdot A_{ij}.$$

Skaler çarpma, hem matris toplaması hem de skaler toplama üzerine dağılır ve skalerlere göre birleşme özelliği gösterir. Bu özellikler, skaler çarpmanın aritmetik kurallarla tutarlı olmasını sağlar ve daha yüksek boyutlu doğrusal dönüşümlerin temelini oluşturur [Adkins and Davidson, 2012].

Önerme:

A ve B matrisler ve c_1 ile c_2 skalerler olsun. O halde:

- $c_1(A + B) = c_1A + c_1B$ (matris toplaması üzerinde dağıtma kanunu)
- $(c_1 + c_2)A = c_1A + c_2A$ (skaler toplama üzerinde dağıtma kanunu)
- $c_1(c_2A) = (c_1c_2)A$ (skaler çarpmanın birleşme kanunu)
- $1A = A$ (çarpma birimi)
- $0A = 0$ (çarpma sıfırı)

Bu kurallar, skaler çarpmanın matris cebirinde iyi tanımlanmış bir işlem olmasını sağlar ve gerçek sayıların aritmetik özellikleriyle tutarlıdır [Adkins and Davidson, 2012].

2.2.3. Matris çarpma

Matris çarpma, matris toplama veya skaler çarpmadan daha karmaşık bir işlemdir. Bir satır vektör $v \in M_{1,n}$ ve bir sütun vektör $w \in M_{n,1}$ verildiğinde, çarpım vw şu şekilde tanımlanır:

$$vw = v_1w_1 + v_2w_2 + \cdots + v_nw_n.$$

Genel olarak, matris çarpma değişme özelliğine sahip değildir, yani AB her zaman BA 'ya eşit olmaz. Ancak birleşme özelliğine sahiptir ve matris toplaması üzerine dağılır. Bu özellikler, matris çarpmasını doğrusal cebirde güçlü bir araç haline getirir, özellikle doğrusal dönüşümler ve doğrusal denklemler sistemleri bağlamında [Adkins and Davidson, 2012].

Önerme:

A , B ve C matrisler ve $c_1 \in \mathbb{R}$ olsun. O halde:

- $A(BC) = (AB)C$ (birleşme kanunu)
- $A(cB) = (cA)B = c(AB)$ (skaler çarpmayla değişme özelliği)

- $A(B + C) = AB + AC$ (dağıtma kanunu)
- $(A + B)C = AC + BC$ (dağıtma kanunu)
- $IA = AI = A$ (çarpma birimi)

Matris çarpma, matematik ve mühendislikte birçok uygulamanın merkezinde yer alır, doğrusal denklemler sistemlerini çözme, geometrik şekilleri dönüştürme ve doğrusal dinamik sistemleri analiz etme gibi [Adkins and Davidson, 2012].

2.3. Fraktal Hesap

2.3.1. Fraktal hesaba giriş

Fraktal hesap, kendine benzerlik veya fraktal özellikler sergileyen fonksiyonları ve sistemleri analiz etmek için geliştirilen geleneksel hesap genişletmesidir. Geleneksel hesap, düzgün ve sürekli fonksiyonlarla ilgilenirken, fraktal hesap, düzensiz, süreksiz veya klasik anlamda türevlenemeyen fonksiyonlarla çalışmak için bir çerçeve sunar. Bu, fraktal hesaplamayı doğadaki karmaşık olguların, örneğin türbülanslı akışların, düzensiz yüzeylerin ve anormal yayılma süreçlerinin modellenmesi için özellikle uygun hale getirir.

Fraktal hesaptaki temel kavram, fraktal türevdir ve bu, türev kavramını fraktal kümeler veya düzensiz alanlarda tanımlanan fonksiyonlara geneller. Bu türevler, fraktalların karmaşık yapıları ve ölçeklenme özelliklerini yakalayarak, tam sayı mertebeli hesaplamalarla etkin bir şekilde tanımlanamayan sistemlerin hassas analizini mümkün kılar.

2.3.2. Temel fraktal denklemler

Fraktal hesap temelde fraktal ölçülere dayanır, burada türev ve integral süreçleri, fraktalların düzensiz, çoğu zaman kendine benzer yapısına göre uyarlanır. Fraktal hesabın iki temel yapısı, *fraktal türev* ve *fraktal integral*, klasik hesap kavramlarını fraktal benzeri alanlara genişletir. Bu yapılar, karmaşık, türevlenemeyen dinamiklere sahip sistemlerin modellenmesinde yardımcı olur.

Fraktal nesnelerin ölçekleme özelliğini temsil eden temel denklemlerden biri:

$$\frac{d^H f(t)}{dt^H} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{(\Delta t)^H}, \quad (2.4)$$

burada H , fraktal (veya Hausdorff) boyuttur. Bu denklem, fraktal hesapta merkezi bir rol oynar, çünkü bir fonksiyonun $f(t)$, fraktal bir alanda zaman veya uzayla nasıl ölçeklendiğini ifade eder. $H = 1$ olduğunda, bu ifade klasik birinci türeve indirgenir, ancak H 'nin tam sayı olmayan değerleri için fraktal özellikleri yakalar.

Fraktal bir kümede tanımlanan bir fonksiyonun genelleştirilmiş fraktal integrali şu şekilde yazılabilir:

$$I_f^\alpha[f(t)] = \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad (2.5)$$

burada α , fonksiyonun tanımlandığı alanın fraktal boyutuyla ilişkili bir parametredir. Bu integral, bir fraktal sistemdeki çeşitli ölçeklerin katkısını hesaba katar ve kendine

benzer özelliklere sahip sistemlerin analizinde temel bir araçtır.

2.3.3. Fraktal türev

Fraktal hesapta ana araçlardan biri, fraktal benzeri davranış sergileyen fonksiyonların türevini almayı sağlayan fraktal türevdir. Fraktal türevi tanımlamak için kullanılan iki yaygın yaklaşım, *Caputo fraksiyonel türevi* ve *Grünwald-Letnikov türevi*dir. Bu formlar, bellek ve kalıtsal özellikler gösteren karmaşık sistemlerin modellenmesinde temel öneme sahiptir.

2.3.3.1. Caputo fraktal türevi

Caputo fraktal türevi, fiziksel uygulamalarda başlangıç koşulları ve sınır değer problemleriyle başa çıkmada özellikle etkilidir. Caputo türevi, bellek etkilerini ve karmaşık sistemlerdeki kalıtsal özellikleri tanımlamak için fizik ve mühendislik gibi birçok disiplinde geniş çapta çalışılmış ve uygulanmıştır [Gorenflo and Mainardi, 1997, Podlubny, 1998].

Bir $f(t)$ fonksiyonunun α mertebesindeki Caputo türevi şu şekilde tanımlanır:

$${}^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} \frac{df(\tau)}{d\tau} d\tau, \quad (2.6)$$

burada $0 < \alpha < 1$ ve $\Gamma(\cdot)$, Gamma fonksiyonunu ifade eder. Bu tanım, özellikle başlangıç koşullarının tam sayı mertebeli türevler cinsinden belirtildiği durumlarda, fiziksel senaryolarda Riemann-Liouville türevinden daha uygulanabilir hale getirir.

2.3.3.2. Grünwald-Letnikov fraktal türevi

Grünwald-Letnikov türevi, fraktal hesapta bir diğer önemli formülasyondur. Sonlu farklara dayalı bir limit tanımı kullanarak klasik türevin daha doğrudan bir genellemesini sağlar. α mertebesindeki Grünwald-Letnikov türevi şu şekilde tanımlanır:

$${}^{GL} D_t^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{\lfloor t/h \rfloor} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(t - kh), \quad (2.7)$$

burada $\binom{\alpha}{k}$, genelleştirilmiş binom katsayısıdır, h zaman adımıdır ve $\lfloor t/h \rfloor$, t/h 'nin tam kısmını ifade eder. Grünwald-Letnikov türevi, doğası gereği ayrık olduğu için sayısal uygulamalarda faydalıdır ve zaman noktaları ızgarasında yaklaşımlar sağlar.

Caputo ve Grünwald-Letnikov formülasyonlarının her birinin güçlü ve zayıf yönleri vardır ve uygulanabilirlikleri, modellenen sistemin özel doğasına bağlıdır. Grünwald-Letnikov yaklaşımı, ayrık zaman sistemleri için uygulanabilirliğinden dolayı sayısal simülasyonlarda sıklıkla tercih edilir.

2.3.4. Fraktal integral

Fraktal türevi tamamlayan fraktal integral, fraktal kümeler üzerinde tanımlanan fonksiyonların entegrasyonunu genelleştirir. Fraktal integral, fraktal türevler içeren

diferansiyel denklemleri çözmeye hayati bir rol oynar çünkü düzensiz alanlar üzerinde büyüklüklerin birikimini sağlar.

Fraktal integral, klasik integral ile benzer şekilde tanımlanır, ancak alanın fraktal boyutunu yansıtan bir ölçekleme faktörü içerir. Bu, bir fraktal sistemdeki tüm ölçeklerin katkısını yakalamasını sağlar, en küçükten en büyüğe kadar.

Kaotik sistemlerin analizi ve anormal yayılmanın modellenmesi gibi birçok uygulamada, fraktal türevler ve integrallerin kombinasyonu, geleneksel hesap tarafından yakalanamayan karmaşık davranışları tanımlamak için güçlü bir matematiksel çerçeve sunar.

2.3.5. Fraktal hesabın uygulamaları

Fraktal hesap, fizik, biyoloji, finans ve mühendislik gibi çeşitli alanlarda uygulama bulmuştur. Fizikte, fraktal hesap, parçacıkların standart Brown hareketini takip etmediği, bunun yerine fraktal benzeri bir yörünge sergilediği anormal yayılma süreçlerini modellemek için kullanılmıştır. Finans alanında, fraktal hesap, finansal piyasaların düzensiz davranışlarını modellemek için uygulanır ve hisse fiyatlarında kaotik sistemlerin karakteristik özellikleri olan düzensizlikleri ve ani değişimleri yakalar.

Fraktal hesaplamanın en dikkat çekici uygulamalarından biri, kendiliğinden salınımlar sergileyen doğrusal olmayan bir sistem olan Van der Pol osilatörünün analizindedir. Fraktal türevlerin eklenmesiyle, araştırmacılar osilatörün dinamiklerinin daha doğru modellerini geliştirerek, pratik senaryolarda ortaya çıkan ince varyasyonları ve karmaşıklıkları yakalamayı başarmışlardır.

Genel olarak, fraktal hesap, karmaşık yapıları ve davranışları olan sistemlerin analizi ve modellenmesi için sağlam bir çerçeve sağlar ve klasik hesaplamanın ötesine geçen içgörüler sunar.

2.4. Kestir-Doğrula Yöntemi

Kestir-doğrula yöntemi, özellikle Caputo türevi gibi tam sayı olmayan mertebelerde türevler içeren fraksiyonel diferansiyel denklemleri çözmek için kullanılan güçlü bir sayısal tekniktir. Bu yöntem, çözümün ilk tahminini daha sonra düzeltme ile birleştirerek doğruluğu artırır ve bu da karmaşık sistemlerin çözümünde, yüksek hassasiyetin gerektiği durumlarda, yöntemi oldukça uygun hale getirir.

2.4.1. Kestir-Doğrula yöntemine genel bakış

Kestir-doğrula yöntemi iki ana adımda çalışır:

1. **Kestirme Adımı:** Bu adımda, bir sonraki zaman adımındaki çözümün başlangıçta bir yaklaşık tahmini yapılır. Bu kestirme genellikle bir Euler tipi yöntem kullanılarak gerçekleştirilir; bu yöntem basittir ancak daha az doğrudur.
2. **Düzeltilme Adımı:** Kestirmeden sonra, yöntem bu tahmini örtük bir yöntemle iyileştirir. Düzeltici adım genellikle trapezoidal kuralı veya benzeri bir yöntem içerir ve bu, tahmin edilen değeri dikkate alarak çözümün daha doğru bir tahminini sağlar.

Bu iki adımın birleşimi yöntemi hem kararlı hem de doğru hale getirir, bu da bellek etkileri ve uzun vadeli bağımlılıkların önemli olduğu fraksiyonel diferansiyel denklemlerin çözümü için idealdir.

2.4.2. Fraktal diferansiyel denklemlere uygulanması

Caputo türevini içeren fraksiyonel diferansiyel denklemi düşünelim:

$${}^C D_t^\alpha y(t) = f(t, y(t)),$$

başlangıç koşulu $y(0) = y_0$ olmak üzere, burada $0 < \alpha < 1$ 'dir.

Bu denklemi kestir-doğrula yöntemi ile sayısal olarak çözmek için aşağıdaki adımlar gerçekleştirilir:

2.4.2.1. Kestirme adımı

Adams-Bashforth yöntemi kullanılarak, kestirme adımı bir sonraki zaman adımındaki t_{n+1} 'deki çözümü tahmin eder:

$$\tilde{y}_{n+1} = y_n + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \sum_{j=0}^n b_j f(t_j, y_j),$$

burada h adım büyüklüğüdür ve b_j , Caputo türevinin ayrıklaştırılmasından türetilen katsayılarıdır.

2.4.2.2. Doğrulama adımı

Tahmin edilen değer $\tilde{y}_{n+1}$ 'yi elde ettikten sonra, yöntem bu değeri Adams-Moulton yöntemi kullanarak düzeltir:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \left[\frac{1}{2} f(t_{n+1}, \tilde{y}_{n+1}) + \sum_{j=0}^n a_j f(t_j, y_j) \right],$$

burada a_j , düzeltme adımına karşılık gelen katsayılarıdır [Koca, 2023]. Bu düzeltme adımı, tahmin edilen değeri ve yeni zaman adımındaki fonksiyon değerlendirmesini dikkate alarak doğruluğu artırır.

2.4.3. Yöntemin uygulanması

Kestir-doğrula yöntemini uygulamak için şu algoritma izlenebilir:

1. **Başlangıç:** Başlangıç koşulu $y(0) = y_0$ 'yı belirleyin ve adım büyüklüğünü h seçin.
2. **Zaman adımları döngüsü:** Her bir zaman adımı n için:
 - Kestirme formülünü kullanarak tahmin edilen değeri $\tilde{y}_{n+1}$ hesaplayın.
 - Düzeltme formülünü kullanarak düzeltilmiş değeri y_{n+1} hesaplayın.
3. **İterasyon:** Yukarıdaki adımları istenen zaman aralığına kadar tekrarlayın.

Bu yöntemin verimliliği, adım büyüklüğünün h doğru seçimine bağlıdır, zira çok büyük bir adım büyüklüğü doğruluk kaybına neden olabilirken, çok küçük bir adım büyüklüğü ise hesaplama maliyetini artırır [Ebaid, 2011] .

2.4.4. Avantajlar ve uygulamalar

Kestir-doğrula yöntemi, hesaplama verimliliği ile doğruluğu iyi bir şekilde dengelediği için fraksiyonel diferansiyel denklemler için özellikle avantajlıdır. Fizik, mühendislik ve finans gibi çeşitli alanlarda hafıza ve kalıtsal özellikler gösteren sistemleri modellemek için yaygın olarak kullanılır. Yöntemin fraksiyonel hesaplamanın karmaşıklıklarını ele alma yeteneği, onu doğrusal olmayan sistemlerin, anormal yayılmanın ve kaotik dinamiklerin analizinde vazgeçilmez kılar.

Bu tez bağlamında, kestir-doğrula yöntemi, Van der Pol osilatörünün dinamiklerini yöneten fraksiyonel diferansiyel denklemleri çözmek için uygulanmış ve bu karmaşık sistemlerin ince davranışlarını yakalamada yönteminin sağlamlığını göstermiştir [Guo and Leung, 2010] .

2.5. Dinamik Sistemlerde Kaosu Anlamak

Kaos, dinamik sistemlerde belirli kurallara göre hareket eden sistemlerin görünüşte rastgele ve tahmin edilemez davranışlarını ifade eder. Sistem kuralları iyi tanımlanmış olmasına rağmen, sistemin başlangıç koşullarına duyarlılığı nedeniyle sonuçlar rastgele görünebilir. Bu bölümde, kaosu kökenleri, özellikleri ve dinamik sistemlerdeki sonuçları incelenecektir.

2.5.1. Kaos nedir?

Kaos, dinamik sistemlerde, sistemin başlangıç koşullarına karşı aşırı duyarlılık göstermesi ve bu nedenle deterministik olmasına rağmen rastgele ve tahmin edilemez davranışlar sergilemesi anlamına gelir. Bu duyarlılık genellikle "kelebek etkisi" olarak adlandırılır; başlangıç koşullarındaki küçük değişiklikler zaman içinde büyük farklılıklara yol açabilir. Kaosun incelenmesi 20. yüzyılda başlamış olsa da, kökleri klasik mekanik ve gök mekaniğine dayanan daha eski çalışmalara kadar uzanır.

2.5.2. Kaos teorisinin kökenleri

Kaosun resmi çalışmaları, 19. yüzyılın sonlarında Henri Poincaré'nin çalışmaları ile başladı. Poincaré'nin üç cisim problemi üzerine yaptığı araştırmalar, üç gök cisminin birbirine karşı yerçekimsel çekim altındaki hareketlerinin başlangıç koşullarına son derece duyarlı olabileceğini ve öngörülemeyen yörüngelere yol açabileceğini ortaya koydu. Bu, deterministik sistemlerin karmaşık, tekrarlanmayan davranışlar sergileyebileceğine dair erken işaretlerden biriydi [Poincaré, 1892].

Kaos teorisi, 1960'larda Edward Lorenz'in atmosferik konveksiyonun basit bir matematiksel modelinde kaotik davranışlar keşfetmesiyle daha da gelişti. Lorenz'in çalışmaları, basit sistemlerin bile karmaşık, kaotik davranışlar sergileyebileceğini ve kaosu birçok doğal ve fiziksel sistemin temel bir özelliği olduğunu gösterdi [Lorenz, 1963].

2.5.3. Kaotik sistemlerin özellikleri

Kaotik sistemler, onları diğer dinamik sistemlerden ayıran birkaç temel özellik sergiler:

- **Başlangıç Koşullarına Duyarlılık:** Kaotik sistemler başlangıç koşullarına son derece duyarlıdır. Sistem başlangıcındaki çok küçük farklılıklar, zaman içinde büyük sonuçlara yol açabilir.
- **Topolojik Karışıklık:** Kaotik sistemlerde, faz uzayındaki noktaların yörüngeleri zamanla birbirine dolanır. Bu, faz uzayındaki herhangi bir küçük bölgenin zamanla tüm uzaya yayılacağı anlamına gelir ve sistemin davranışının düzenli bir desene oturmayacağını garanti eder.
- **Yoğun Periyodik Yörüngeler:** Kaotik sistemlerde sonsuz sayıda periyodik yörünge bulunur, ancak bu yörüngeler kararsızdır. Sonuç olarak, sistem periyodik bir yörüngeyi geçici olarak takip edebilir, ancak kararsızlık nedeniyle sonunda sapar ve sistemin kaotik davranışına katkıda bulunur.
- **Fraktallar ve Garip Çekiciler:** Kaotik sistemler genellikle faz uzayında fraktal yapılar, yani garip çekiciler sergiler. Bu çekiciler, sistemin evrildiği noktalar kümesidir, ancak yapıları son derece karmaşıktır ve farklı ölçeklerde kendine benzerlik gösterir.

2.5.4. Kaos nerede başlar ve biter?

Kaos genellikle bir dinamik sistemde, sistemin parametreleri belirli kritik değerlere ulaştığında başlar ve bu, bifurkasyon olarak bilinen niteliksel bir davranış değişimine yol açar. Örneğin, basit bir matematiksel popülasyon dinamiği modeli olan lojistik haritada, büyüme oranı parametresi belirli bir eşiği aştığında, karmaşık ve nihayetinde kaotik bir davranışa yol açar [May, 1976].

Bir sistemde kaosun sonu, parametrelerin sistemin periyodik veya sabit nokta davranışına geçtiği farklı bir rejime geçişi ile meydana gelebilir. Bu geçiş, kaotik bir çekicinin aniden kaybolduğu ve sistemin daha öngörülebilir bir desene oturduğu "kriz" olarak bilinen bir süreçle gerçekleşebilir [Strogatz, 2018]. Alternatif olarak, dışsal kuvvetler veya kısıtlamalar sistemi kararlı hale getirerek, başlangıç koşullarına duyarlılığı azaltabilir ve kaosun sonunu getirebilir.

2.5.5. Bilim ve mühendislikte kaosun etkileri

Kaosun keşfi, bilim ve mühendislikte birçok alanda derin etkiler yaratmıştır. Örneğin, meteorolojide, kaos uzun vadeli hava tahminlerinin yapılabilirliğini sınırlar, çünkü başlangıç ölçümlerindeki küçük belirsizlikler, tahminlerde büyük hatalara yol açabilir [Lorenz, 1963]. Mühendislikte ise, kaosu anlamak, sistemlerin küçük rahatsızlıklara karşı kararlı olacak şekilde tasarlanması açısından önemlidir ve işletme koşullarındaki küçük varyasyonlar altında sistemlerin tahmin edilemez davranışlar sergilememesini sağlar.

Ayrıca, kaos teorisi, fraktallar ve Lyapunov üsteleri gibi yeni matematiksel araçların ve kavramların geliştirilmesine yol açmıştır; bunlar, bir sistemdeki kaos derecesini ölçmek için kullanılır [Feigenbaum, 1980]. Bu araçlar, finansal sistemlerden sinir bilimine kadar karmaşık, doğrusal olmayan davranışların modellenmesi ve anlaşılması için geniş uygulama alanı bulmuştur.

2.6. Doğrusal Olmayan Sistemlerde Lyapunov Üsteleri

Lyapunov Üsteleri, dinamik sistemlerin kararlılığını ve kaotik doğasını analiz etmede kritik öneme sahiptir. Bu üstel, faz uzayında yakın yörüngelerin birbirinden ayrılma veya yaklaşma hızlarını ölçer. Özellikle, bir dinamik sistemdeki iki yakın yörüngenin zaman içinde ne kadar hızlı şekilde birbirinden uzaklaştığını (veya yakınlaştığını) üssel olarak ölçerek, sistemin başlangıç koşullarına duyarlılığı hakkında bilgi verir [Wolf et al., 1985, Ott, 2002a].

Bir diferansiyel denklemler kümesi ile tanımlanan bir dinamik sistem düşünelim:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)),$$

burada $\mathbf{x}(t)$, n -boyutlu bir faz uzayındaki durum vektörüdür. Lyapunov üsteleri λ_i ($i = 1, 2, \dots, n$ için) şu şekilde tanımlanır:

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{\delta \mathbf{x}(0) \rightarrow 0} \frac{1}{t} \ln \frac{|\delta \mathbf{x}_i(t)|}{|\delta \mathbf{x}_i(0)|},$$

burada $\delta \mathbf{x}_i(t)$, i -inci yöndeki küçük bir bozulmayı temsil eder. Spektrumda en az bir pozitif Lyapunov üssü bulunması, sistemde kaotik davranış olduğunu gösterir; çünkü küçük bozulmalar zamanla üssel olarak büyür ve yörüngelerin sapmasına yol açar [Wolf et al., 1985].

2.6.1. Lyapunov üstelerinin hesaplanması

Lyapunov üsteleri genellikle dinamik sistemin bir yörünge etrafında doğrusallaştırılması yoluyla hesaplanır. Bir yörünge $\mathbf{x}(t)$ etrafındaki küçük bir bozulma $\delta \mathbf{x}(t)$ düşünelim. Bu bozulmanın evrimi varyasyon denklemleri ile yönetilir:

$$\frac{d\delta \mathbf{x}}{dt} = \mathbf{J}(\mathbf{x}(t))\delta \mathbf{x},$$

burada $\mathbf{J}(\mathbf{x}(t))$, $\mathbf{x}(t)$ yörüngesi boyunca $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 'in Jacobian matrisidir. Lyapunov üsteleri, bu varyasyon denklemlerinin çözümündeki büyüme oranları analiz edilerek elde edilir [Dieci and Vleck, 1997].

Sayısal hesaplamalar için, QR yöntemi veya Gram-Schmidt ortonormalizasyon süreci sıklıkla kullanılır. Temel fikir, bir dizi ortogonal vektörün evrimini izlemek ve bunların zaman içindeki gerilme ve sıkışma davranışlarını izlemektir [Gottwald and Melbourne, 2004].

2.6.2. Doğrusal sistemler için Lyapunov üstelerinin çıkarımı

Bir doğrusal sistem için:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x},$$

burada $\mathbf{A}$ sabit bir matristir, çözüm $\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0)$ olur. Bir bozulma $\delta \mathbf{x}(t)$ şu şekilde

evrilir:

$$\delta \mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \delta \mathbf{x}(0).$$

Lyapunov üsteleri, $\mathbf{A}$ 'nın özdeğerlerinin doğal logaritmalarıdır ve zamanla ölçeklenir:

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln |\mu_i|,$$

burada μ_i , $\mathbf{A}$ 'nın özdeğerleridir [Ott, 2002a].

2.6.3. Fraktal hesaplamada Lyapunov üsteleri

Fraktal türevler için içine girdiğinde, örneğin fraksiyonel Van der Pol osilatöründe olduğu gibi, Lyapunov üstelerinin hesaplanması, fraksiyonel türevlerin yerel olmayan doğası nedeniyle daha karmaşık hale gelir. Fraksiyonel türevler, genellikle Caputo formunda temsil edilir ve fonksiyonun geçmişine dair bir integral içerir, bu da sistemin kararlılığını ve dinamiklerini etkileyen hafıza etkileri getirir [Podlubny, 1999].

Fraksiyonel türevlerle tanımlanan bir sistem için:

$$D^\alpha \mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)),$$

burada D^α , α mertebesinde Caputo fraksiyonel türevidir, bozulma $\delta \mathbf{x}(t)$ şu fraksiyonel varyasyonel denklemle evrilir:

$$D^\alpha \delta \mathbf{x}(t) = \mathbf{J}(\mathbf{x}(t)) \delta \mathbf{x}(t).$$

Bu tür sistemler için Lyapunov üstelerinin hesaplanması, bu fraksiyonel varyasyon denkleminin sayısal olarak çözülmesini gerektirir ve genellikle kestir-doğrula yöntemi gibi tekniklerle ortogonalizasyon prosedürleri birleştirilerek yapılır [Li et al., 2010].

2.7. Bellek Etkisi

Bellek etkileri, çeşitli bilimsel disiplinlerde temel bir kavramdır ve bir sistemin evriminin yalnızca mevcut durumu tarafından değil, aynı zamanda geçmişteki durumları ve etkileşimleri tarafından da belirlendiği fikrini temsil eder. Geçmiş olayların bir sistemde izler bırakarak gelecekteki davranışını etkilediği bu fenomen, geleceğin yalnızca mevcut durumdan bağımsız olarak geçmişle ilişkili olmadığı Markov varsayımından sapar.

Bellek etkisi gösteren sistemlerde, geçmişe bağımlılık çeşitli mekanizmalarla kendini gösterebilir. Bu mekanizmalar arasında gecikmeli tepkiler, geri besleme döngüleri veya önceki durumlar hakkında bilgi tutan karmaşık iç yapılar bulunur. Bu bellek etkileri, histerezis, uzun vadeli korelasyonlar ve Markov olmayan süreçler gibi zengin ve bazen beklenmedik dinamiklere yol açabilir.

Fizikte, bellek etkileri dış kuvvetlere veya uyarıcılara verilen tepkilerin sistemin geçmişine bağlı olduğu malzemelerde ve sistemlerde gözlemlenir. Örneğin, viskoelastik malzemeler, gerilme-gerinim ilişkisinin geçmişe bağlı olduğu viskoz ve elastik

davranışların bir kombinasyonunu sergiler. Benzer şekilde, spin camlar, yaşlanma ve canlanma gibi fenomenlerle sonuçlanan karmaşık manyetik davranışlar sergiler ve bu davranışlar geçmiş termal ve manyetik geçmişlerine bağlıdır.

Finansta, bellek etkileri piyasa verimliliği ve rastgele yürüyüş gibi klasik varsayımlara meydan okur. Finansal piyasalar genellikle geçmiş volatilité, fiyat hareketleri veya ekonomik koşulların gelecekteki piyasa davranışını etkilediği uzun vadeli bağımlılıklar sergiler. Bu, yüksek veya düşük volatilité dönemlerinin devam ettiği volatilité kümelenmesi gibi olgularda görülebilir.

Tarihsel bir perspektiften bakıldığında, bellek etkileri, toplumların ve kültürlerin evriminde gözlemlenir. Savaşlar, ekonomik krizler veya kültürel değişimler gibi tarihsel olaylar, kolektif hafızada kalıcı izler bırakarak toplumların gelecekteki yönünü etkiler. Bu bellek etkileri, bir toplumun veya ekonominin mevcut seçeneklerinin geçmişteki kararlar ve olaylar tarafından şekillendiği bir patika bağımlılığına yol açabilir.

Bellek etkileri genellikle geleneksel diferansiyel denklemlerin ötesine geçen matematiksel çerçeveler kullanılarak modellenir. Örneğin, fraktal analiz, tarihsel bağımlılıkları doğal olarak sisteme dahil eden fraktal türevler sunarak bellek etkilerini yakalamak için güçlü bir araç sağlar. Bu matematiksel yaklaşım, malzemelerin viskoelastik davranışlarını modellemekten, finansal piyasalardaki uzun vadeli bağımlılıkları analiz etmeye kadar birçok disiplinde uygulanmıştır.

Bellek etkilerini anlamak, fiziksel bilimlerde, finansal sistemlerde ve toplumsal dinamiklerde karmaşık sistemlerin davranışını doğru bir şekilde modellemek ve tahmin etmek için çok önemlidir. Geçmişin etkisini hesaba katarak, modeller gerçek dünya fenomenlerini daha iyi yansıtır ve geçmiş olaylarla gelecek sonuçlar arasındaki karmaşık etkileşimleri yakalar. Bu bölüm, çeşitli alanlarda bellek etkisi örneklerine değinerek, bu fenomenin yaygın doğasını ve teorik ve uygulamalı araştırmalar için etkilerini vurgulayacaktır.

2.7.1. Fizikte bellek etkilerine örnekler

2.7.1.1. *Nikel-Kadmiyum (NiCd) piller*

Nikel-kadmiyum (NiCd) piller, taşınabilir elektroniklerde ve elektrikli aletlerde bir zamanlar yaygın olarak kullanılmıştır, çünkü yüksek boşaltma oranları sağlayabilirler ve zorlu koşullarda dayanıklıdır. Ancak, NiCd pillerin en büyük dezavantajlarından biri, bellek etkisine yatkın olmalarıdır.

NiCd Pillerde Bellek Etkisi: NiCd pillerde bellek etkisi, pilin tekrar tekrar kısmen boşaltılması ve ardından yeniden şarj edilmesiyle ortaya çıkar. Zamanla, pil kısmi boşalma noktasını yeni boş seviyesi olarak "hatırlar" ve kullanılabilir kapasitesinde azalmaya yol açar. Bu fenomen, pil içinde kadmiyum kristallerinin oluşmasıyla ortaya çıkar ve bu da tam boşalma için gerekli kimyasal reaksiyonları engeller [Brodd, 2001].

Örnek: NiCd pillerde bellek etkisinin tipik bir örneği, eski kablosuz elektrikli aletlerde görülür. Sık sık yapılan kısmi şarjlar, pil ömründe belirgin bir azalmaya yol açar. Kullanıcılar, pil tam olarak boşalmamış olsa bile aletlerinin daha sık şarj edilmesi gerektiğini fark ederler [McCoy, 1995].

NiCd pillerdeki bellek etkisi kapsamlı bir şekilde incelenmiştir ve düzenli olarak tam boşaltma yapılması ile bu etki kısmen hafifletilebilse de, bu pil teknolojisinin

sınırlamalarından biri olarak kalmıştır.

2.7.1.2. Viskoelastik malzemeler

Viskoelastik malzemeler, deformasyona maruz kaldıklarında hem viskoz hem de elastik davranış sergilerler. Bu malzemelerdeki gerilme, sadece mevcut gerinime değil, aynı zamanda gerinim geçmişine de bağlıdır ve bu durum bir bellek etkisi gösterir. Bu davranış genellikle, geçmişteki deformasyonları hesaba katan fraktal diferansiyel denklemlerle modellenir [Mainardi, 1997].

Örnek: Polimerler gibi viskoelastik malzemelerdeki gerilme gevşemesi, malzemenin önceki deformasyonlarını "hatırladığı" ve bu durumun malzemenin mevcut tepkisini etkilediği bir bellek etkisi gösterir [Bagley and Torvik, 1983].

2.7.1.3. Spin camları

Spin camları, düzensiz manyetik sistemlerdir ve birçok yerel minimum ile karmaşık enerji manzaraları sergilerler. Bu sistemler, geçmiş durumlarına bağlı olan bellek etkileri gösterir ve bu da yaşlanma fenomenlerine ve geçmişe bağımlı davranışlara yol açar [Vincent et al., 1997].

Örnek: Spin camlarının manyetizasyonu, uygulanan manyetik alanın ve sıcaklığın tüm geçmişine bağlıdır ve bu, canlanma ve bellek etkileri gibi fenomenlere yol açabilir [Jonason et al., 1998].

2.7.1.4. Termal histerezis

Termal histerezis, bir sistemin sıcaklık değişimlerine verdiği tepkinin sistemin termal geçmişine bağlı olduğu durumlarda ortaya çıkar. Bu bellek etkisi, faz geçişlerine uğrayan malzemelerde yaygındır, burada belirli bir faza ulaşmak için izlenen yol malzemenin özelliklerini etkileyebilir [Goodstein, 2014].

Örnek: Ferromanyetik malzemelerde, manyetizasyon eğrisi, malzemenin ısıtılıp soğutulduğuna bağlı olarak değişir ve bu durum malzemenin termal geçmişini hatırladığını gösterir [Binder and Young, 1986].

2.7.1.5. Camımsı sistemlerde gevşeme

Camımsı sistemler, amorf katılar veya kolloidal süspansiyonlar gibi, yavaş gevşeme dinamikleri sergilerler. Bu gevşeme davranışı, sistemin ne kadar süre dengesizlikte kaldığına bağlıdır. Bu bellek etkisi, camımsı malzemelerdeki yaşlanma ve yavaş dinamiklerin anlaşılmasında merkezidir [Cugliandolo and Kurchan, 2002].

Örnek: Camımsı bir malzemenin gevşeme süresi, ne kadar süre boyunca yaşlandığına bağlıdır ve bu, sistemin dengesizlik durumunda kaldığı süreci "hatırladığı" anlamına gelir [Bouchaud et al., 1998].

2.7.2. Finansal sistemlerde bellek etkilerine örnekler

2.7.2.1. Volatilité kümelenmesi

Finansal piyasalar, yüksek volatilité dönemlerinin yüksek volatilitéyi, düşük volatilité dönemlerinin ise düşük volatilitéyi takip ettiği periyotlar sergiler. Bu fenomen,

volatilite kümelenmesi olarak bilinir ve geçmiş volatilitenin gelecekteki volatilitiyi etkilediğini gösterir; bu, belirgin bir bellek etkisidir [Engle, 1982].

Örnek: Bu bellek etkisini yakalamak için GARCH (Genelleştirilmiş Otoregresif Koşullu Değişen Varyans) modeli kullanılır. Bu modelde, mevcut volatilite seviyesi, geçmiş getiri karelerinin ve geçmiş volatilitenin bir fonksiyonu olarak modellenir [Bollerslev, 1986].

2.7.2.2. *Hisse senedi fiyatlarındaki uzun vadeli bağımlılık*

Bazı çalışmalar, hisse senedi fiyatlarının uzun vadeli bağımlılık gösterdiğini ve geçmiş fiyat hareketlerinin gelecekteki fiyatlar üzerinde uzun süreli etkiler bırakabileceğini öne sürmektedir. Bu durum, hisse senedi fiyatlarının rastgele ve birbirinden bağımsız olduğunu varsayan Etkin Piyasa Hipotezi'ne aykırıdır [Lo, 1991].

Örnek: Zaman serisi verilerinde uzun vadeli bellek derecesini ölçmek için Hurst üssü kullanılır. 0.5'ten büyük bir Hurst üssü, uzun vadeli pozitif otokorelasyonu gösterir [Hurst, 1951].

2.7.2.3. *Faiz oranı modelleri*

Faiz oranı modellerinde, mevcut faiz oranının tarihsel ortalama faiz oranı tarafından etkilendiği bellek etkileri gözlemlenebilir. Bu genellikle, faiz oranının uzun vadeli ortalamaya geri döndüğü ortalama geri dönüş süreçleriyle modellenir ve bu, geçmiş değerlerin hatırlanmasını ifade eder [Vasicek, 1977].

Örnek: Vasicek faiz oranı modeli, faiz oranının zaman içinde tarihsel bir ortalamaya geri döndüğünü varsayar ve bu da bellek etkilerini işaret eder [Vasicek, 1977].

2.7.2.4. *Kredi riski modelleri*

Borçluların kredi değerliliği, geçmişteki temerrütler veya ödeme davranışlarının mevcut kredi notlarını ve borç verme risk algısını etkilemesiyle bellek etkileri gösterebilir [Merton, 1974].

Örnek: Kredi derecelendirme kuruluşları, geçmiş temerrütler ve geri ödemelere dair tarihsel verileri kullanarak kredi notlarını ayarlar ve bu, geçmiş davranışların hatırlandığını ifade eder [Altman, 1968].

2.7.2.5. *Piyasa duyarlılığı*

Yatırımcı duyarlılığı, geçmiş piyasa olaylarının (örneğin finansal krizler veya yükseliş dönemleri) mevcut yatırımcı davranışını etkilediği bellek etkileri gösterebilir. Bu, sürü davranışı ya da panik satışlarına yol açabilir [Shiller, 2000].

Örnek: Bir piyasa çöküşünden sonra, yatırımcılar uzun bir süre boyunca temkinli olabilir ve bu da ticaret hacimlerinin azalmasına ve piyasa volatilitésinin düşmesine yol açar [De Long et al., 1987].

2.7.2.6. *Emir akışı ve likidite*

Finansal piyasalardaki emir akışı (alım ve satım emirlerinin sırası) genellikle bellek etkileri sergiler. Büyük emirler, likidite sağlayıcılarının geçmiş emir akışına

dayalı stratejilerini ayarlamasıyla birlikte zamanla devam eden fiyat etkilerine yol açabilir [Almgren and Chriss, 2001].

Örnek: Almgren-Chriss modeli gibi piyasa etki maliyetlerini hesaba katan modeller, geçmiş ticaret faaliyetlerinin gelecekteki fiyat hareketlerini etkilediği bellek etkilerini içerir [Almgren and Chriss, 2001].

2.7.3. Tarihte bellek etkileri örnekleri

2.7.3.1. Kültürel bellek

Kültürel bellek, toplumların bilgiyi, gelenekleri ve uygulamaları nesiller boyunca nasıl hatırladığını ve aktardığını ifade eder. Savaşlar, devrimler veya önemli kültürel değişimler gibi tarihsel olaylar, kolektif bellek üzerinde kalıcı bir etkiye sahip olabilir ve toplumsal davranışları ve kimlikleri etkileyebilir [Assmann, 2011].

Örnek: İkinci Dünya Savaşı'nın kolektif belleği, birçok ülkenin siyasi ve kültürel manzarasını şekillendirmeye devam etmekte ve ulusal kimliklerini ve politikalarını etkilemektedir [Halbwachs, 1992].

2.7.3.2. Ekonomik tarih ve yol bağımlılığı

Ekonomide yol bağımlılığı, herhangi bir zamanda mevcut olan kararların, geçmişte alınan kararlarla sınırlı olduğu fikrini ifade eder. Sanayi devrimleri veya ekonomik krizler gibi tarihsel olaylar, geçmiş gelişmelerin belleği nedeniyle zamanla devam eden belirli ekonomik yönelimler oluşturabilir [David, 1985].

Örnek: Amerika Birleşik Devletleri ve Birleşik Krallık gibi ülkelerin ekonomik gelişim yolları, sanayi devrimlerinden büyük ölçüde etkilenmiş olup, bu etkiler ekonomik yapılarında ve politikalarında uzun süreli etkiler bırakmıştır [Arthur, 1989].

2.7.3.3. Yasal içtihatlar

Hukuk sistemlerinde, geçmiş mahkeme kararlarıyla belirlenen içtihatlar genellikle gelecekteki davaların sonuçlarını etkiler. Bu bellek etkisi, hukuk sisteminin zaman içinde tutarlılığı korumasını sağlar; geçmiş kararlar, mevcut davalarda yasaların yorumlanmasına yön verir [Goodhart, 1987].

Örnek: Ortak hukuk sistemlerindeki stare decisis doktrini, mahkemelerin benzer davalarda önceki kararlara bağlı olduğu bu bellek etkisini somutlaştırır [Merryman, 1954].

3. VAN DER POL SALINICISININ ÇÖZÜMÜ İÇİN METOT

3.1. Van der Pol Osilatör Denklemi

Van der Pol osilatörü, ilk kez 1920’lerde Balthasar van der Pol tarafından tanıtılan [van der Pol, 1926], kendi kendine sürdürülebilir salınımlar sergileyen doğrusal olmayan bir sistemdir. Yönetici denklem şudur:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \mu (1 - x^2) \frac{dx}{dt} + x = 0, \quad (3.1)$$

burada $x(t)$ durum değişkenini ve μ doğrusal olmayanlık ve sönümlemeyi kontrol eden bir parametreyi temsil eder.

Bu denklem, $y = \frac{dx}{dt}$ değişkeni tanıtilarak birinci dereceden diferansiyel denklemler sistemine yeniden yazılabilir:

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad (3.2)$$

$$\frac{dy}{dt} = \mu (1 - x^2) y - x. \quad (3.3)$$

Van der Pol bu osilatörü, özellikle elektrik devreleri ve diğer fiziksel sistemler üzerindeki uygulamaları açısından kapsamlı olarak incelemiştir [University,].

3.2. Hamiltonyen Formülasyonu

Van der Pol osilatörü genellikle muhafazakar değildir, yani doğrudan bir Hamiltonyen’e sahip değildir. Ancak, aşağıdaki gibi bir değiştirilmiş Hamiltonyen inşa edilebilir:

$$H(x, y) = \frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} + \mu \left(\frac{x^2 y}{2} - \frac{x^4}{4} \right), \quad (3.4)$$

bu, enerji ile doğrusal olmayan sönümleme arasındaki dengeyi yakalayarak dinamikleri tarif eder [Galley, 2012, Aranson and Kramer, 1997].

3.3. Niteliksel Analiz

Van der Pol denklemi:

$$y'' + \mu(y^2 - 1)y' + y = 0, \quad \mu > 0, \quad (3.5)$$

ikinci dereceden doğrusal olmayan özerk denklemlerin daha genel bir sınıfı olan Liénard denklemlerinin özel bir durumudur:

$$y'' + W(y)y' + Z(y) = 0. \quad (3.6)$$

Bu denklemler, sönüm kuvvetinin $W(y)$ pozisyona bağlı olduğu ve yay sabitinin $Z(y)$ yay ne kadar gerilirse ona bağlı olduğu bir yay-kütle sistemini modelleyebilir.

μ parametresi, sönümleme kuvvetinin gücünü gösterir. Eğer $y \gg 1$, hem geri kazandırıcı hem de sönüm kuvvetleri büyüktür, bu nedenle $|y(t)|$ zamanla azalır, güçlü sönümlenmiş bir osilatör gibi davranır. Eğer $|y| \ll 1$, sönüm kuvveti negatif hale gelir ve $|y(t)|$ 'yi arttırarak sistem enerjisinin büyümesine neden olur. Bu davranış, tüm yakın çözümlerin $t \rightarrow +\infty$ iken ulaştığı eşsiz kararlı periyodik bir çözüm olan bir limit çevriminin varlığını önerir [Girotti, 2024].

3.3.1. Denge noktaları

Sistemin yalnızca bir denge noktası vardır: $y = v = 0$. Bu nokta etrafında doğrusallaştırma yapıldığında, Jacobi matrisi elde edilir:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \mu \end{pmatrix},$$

özdeğerlerle birlikte:

$$\lambda_{1,2} = \frac{\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4}}{2}.$$

3.3.2. Kararlılık analizi

Dengenin kararlılığı μ 'ya bağlıdır:

- $\mu = 0$: Özdeğerler tamamen imgeseldir, $\lambda_{1,2} = \pm i$, bu da sistemin merkezi bir yapıya (nötr kararlılık) sahip olduğunu gösterir.
- $0 < \mu < 2$: Özdeğerlerin pozitif bir reel kısmı ve imgesel bir kısmı vardır, bu da denge noktasının kararsız bir spiral nokta olduğunu gösterir.
- $\mu = 2$: Özdeğerler gerçektir ve eşittir, $\lambda_{1,2} = 1$, bu da kararsız bir dejeneratif düğüme karşılık gelir.
- $\mu > 2$: Özdeğerler gerçek ve pozitifdir, bu da sistemin kararsız bir düğüme sahip olduğunu gösterir.

3.3.3. Kuvvet çizgileri ve simetriler

Faz düzleminde (y, v) , kuvvet çizgileri $y' = 0$ olduğunda dikey, $v' = 0$ olduğunda yatay hale gelir:

$$v = \frac{y}{\mu(1 - y^2)}.$$

Sistem, $(y, v) \rightarrow (-y, -v)$ dönüşümü altında simetriktir, bu da faz diyagramının orijin $(0,0)$ 'ya göre simetrik olduğunu gösterir.

3.4. Sayısal Çözüm ve Başlangıç Koşulları

3.4.1. Başlangıç koşulları

Van der Pol osilatörünün simülasyonunda, aşağıdaki başlangıç koşulları kullanılmıştır:

$$x(0) = 1.0, \quad \frac{dx}{dt}(0) = y(0) = 0.0, \quad (3.7)$$

Bu başlangıç koşulları, sistemin başlangıç durumunu temsil eder. Bu durumda, konum x 1.0'a ayarlanmış ve hız y $t = 0$ anında 0.0 olarak alınmıştır.

3.4.2. `solve_ivp` kullanılarak sayısal Çözüm

Birinci dereceden diferansiyel denklemler sistemi, Python'daki `scipy.integrate` kütüphanesinin `solve_ivp` fonksiyonu kullanılarak sayısal olarak çözülmüştür. Simülasyon için aşağıdaki temel parametreler tanımlanmıştır:

- $\mu = 1.0$: Doğrusal olmayanlığı ve osilasyonların doğasını belirleyen parametre.
- $T = 20$: Simülasyonun toplam zaman aralığı.
- $N = 500$: Sayısal entegrasyon için kullanılan zaman noktalarının sayısı.
- $\Delta t = \frac{T}{N}$: Zaman adımı büyüklüğü.

Sayısal çözücü `solve_ivp`, $t = 0$ ile $t = T$ arasında denklemler sistemini entegre ederek, durum değişkeni $x(t)$ ve hız $y(t)$ 'nin zamanla evrimini üretir. Sonuçlar daha sonra sistemin zaman içindeki davranışını görselleştirmek için çizilir.

3.4.3. Sonuçlar ve yorum

Simülasyon sonuçları iki grafikte sunulmuştur:

1. İlk grafik, $x(t)$ ve $y(t)$ 'nin zaman fonksiyonları olarak gösterimini içerir ve osilatörün konum ve hızının zaman içindeki evrimini göstermektedir.
2. İkinci grafik, $y(t)$ 'nin $x(t)$ 'ye karşı olan faz uzayı diyagramıdır. Bu diyagram, sistemin dinamik davranışına, özellikle bir limit çevriminin varlığına dair içgörü sağlar.

Bu grafikler, Van der Pol osilatörünün karakteristik davranışını göstermektedir; doğrusal olmayanlık parametresi μ 'nun etkisiyle sönümlenmiş osilasyonlardan sürdürülen bir limit çevrimine geçişi içermektedir 3.1 .

3.5. Fraktal Van der Pol Salıncısı

Van der Pol osilatörü, bilim ve mühendisliğin çeşitli alanlarında uygulamaları olan iyi bilinen bir doğrusal olmayan osilatördür. Bu çalışmada, klasik Van der Pol osilatörünü, sisteme yeni bir karmaşıklık boyutu kazandıran α derecesinde bir fraktal türev ekleyerek genişletiyoruz. Sistemi yöneten denklem şu şekilde verilmektedir:

$$D^\alpha x(t) + \mu (x^2(t) - 1) \dot{x}(t) + x(t) = 0, \quad (3.8)$$

burada D^α fraktal türevi α derecesinde, μ doğrusal olmayanlık parametresini ve $x(t)$ ise durum değişkenini temsil eder. fraktal türev, Grünwald-Letnikov yaklaşımı kullanılarak yaklaşık olarak hesaplanmıştır [Podlubny, 1998].

Fraktal kalkülüste türev kavramı tam sayı olmayan derecelere genişletilir, bu da diferansiyel denklemlere daha esnek ve genel bir yaklaşım sağlar. Bu, özellikle bellek etkileri veya tam sayı dereceli türevlerle yeterince yakalanamayan yerel olmayan etkileşimleri modellemede yararlıdır. fraktal kalkülüs çerçevesinde değiştirilmiş Van der Pol denklemi şu şekildedir:

$$D_t^\alpha x(t) - \mu(1 - x(t)^2)D_t^\beta x(t) + x(t) = 0, \quad (3.9)$$

burada $D_t^\alpha x(t)$ ve $D_t^\beta x(t)$, $x(t)$ 'nin sırasıyla α ve β derecesinde zaman t 'ye göre fraktal türevlerini temsil eder.

3.5.1. Fraktal-Dereceli diferansiyel denklemler için Kestir-Doğrula yöntemi

İncelenen fraktal-dereceli diferansiyel denklem (FODE) şu şekildedir:

$$D^{2\alpha} x(t) - \mu(1 - x(t)^2)D^\alpha x(t) + x(t) = 0,$$

burada D^α , α derecesinde Caputo fraktal türevini temsil eder.

3.5.1.1. Sayısal Şema

FODE'yi çözmek için aşağıdaki adımlardan oluşan bir kestir-doğrula şeması kullanıyoruz:

- **Kestir:** Bir sonraki zaman adımındaki çözümü tahmin etmek için fraktal Adams-Bashforth yöntemi gibi açık bir sayısal şema kullanılır.
- **Doğrula:** Tahmin edilen çözümü düzeltmek için fraktal Adams-Moulton yöntemi gibi örtük bir sayısal şema kullanılır.

FODE'yi iki bağlı denklem sistemine dönüştürmek için iki yeni değişken tanıtlıyoruz:

$$\begin{aligned} y(t) &= D^\alpha x(t), \\ z(t) &= D^\alpha y(t) = D^{2\alpha} x(t). \end{aligned}$$

Orijinal FODE şu hale gelir:

$$\begin{aligned} z(t) - \mu(1 - x(t)^2)y(t) + x(t) &= 0, \\ D^\alpha x(t) &= y(t), \\ D^\alpha y(t) &= z(t). \end{aligned}$$

3.5.1.2. Ayrıklaştırma ve Uygulama

Zaman aralığını eşit aralıklı noktalara ayırıyoruz: $t_n = n \cdot h$, burada h zaman adımı büyüklüğüdür. Caputo fraktal türevleri L1 şeması kullanılarak yaklaşık olarak hesaplanır:

$$D^\alpha x(t_n) \approx \frac{1}{h^\alpha \Gamma(2-\alpha)} \sum_{j=0}^{n-1} b_{n-j-1} (x_{j+1} - x_j),$$

burada

$$b_j = (j+1)^{1-\alpha} - j^{1-\alpha}.$$

Tahmin adımı, fraktal Adams-Bashforth yöntemi kullanılarak yapılır:

$$\begin{aligned} x_{n+1}^p &= x_0 + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \sum_{j=0}^n a_{n-j} y_j, \\ y_{n+1}^p &= y_0 + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \sum_{j=0}^n a_{n-j} z_j, \end{aligned}$$

burada

$$a_j = (j+1)^\alpha - j^\alpha.$$

Düzeltilme adımı fraktal Adams-Moulton yöntemi kullanılarak gerçekleştirilir:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_0 + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \left[(1-\alpha)y_{n+1} + \sum_{j=0}^n a_{n-j} y_j \right], \\ y_{n+1} &= y_0 + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \left[(1-\alpha)z_{n+1} + \sum_{j=0}^n a_{n-j} z_j \right], \\ z_{n+1} &= \mu(1 - x_{n+1}^2)y_{n+1} - x_{n+1}. \end{aligned}$$

3.5.2. Sonuçlar ve tartışma

Fraktal Adams-Bashforth ve Adams-Moulton yöntemlerini uygulayarak elde edilen sonuçlar, Şekil 3.1 ve Şekil 3.2’de sunulmuştur. Bu şekiller, standart ve fraktal türevler ile sistemin davranışını karşılaştırır. Aynı başlangıç koşulları denklem 3.7’de verilmiştir.

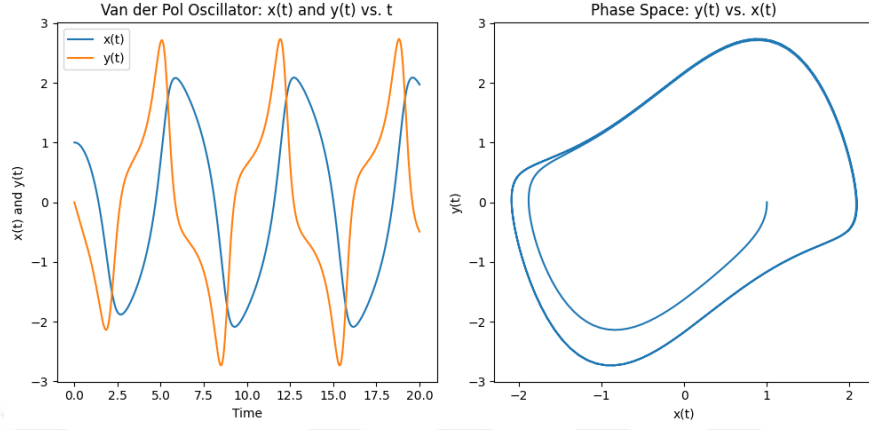


Figure 3.1: Standart Türev Kullanan Van der Pol Osilatörü: $x(t)$ ve $y(t)$ 'nin zamana göre grafiği (sol), ve faz uzayı diyagramı $y(t)$ 'ye karşı $x(t)$ (sağ).

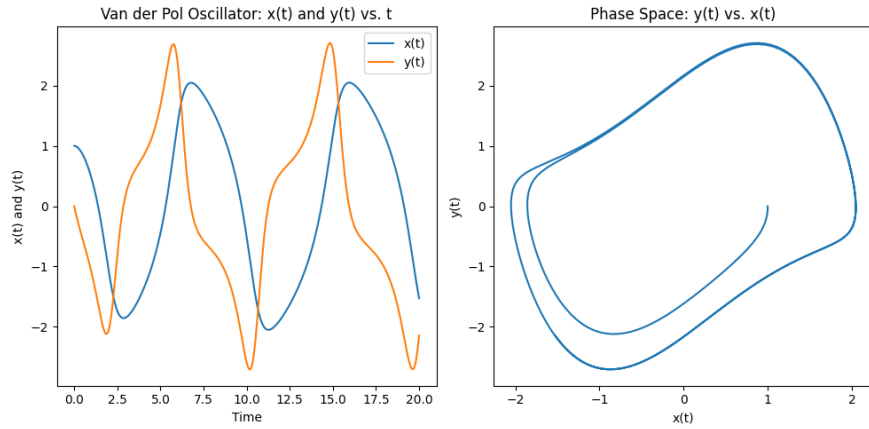


Figure 3.2: fraktal Türev Kullanan Van der Pol Osilatörü ($\alpha = 0.99$): $x(t)$ ve $y(t)$ 'nin zamana göre grafiği (sol), ve faz uzayı diyagramı $y(t)$ 'ye karşı $x(t)$ (sağ).

4. HUANG-LI DOĞRUSAL OLMAYAN FİNANSAL SİSTEMİNİN ÇÖZÜMÜ İÇİN METOT

Huang-Li doğrusal olmayan finansal sistemi, özellikle kaotik davranışla ilgili olarak, finansal piyasaların karmaşık dinamiklerini yakalamak için tasarlanmış bir matematiksel modeldir. İlk olarak Huang ve Li tarafından tanıtılan [Huang and Li, 2003], bu sistem, finansal bağlamda faiz oranı, yatırım talebi ve fiyat endeksi arasındaki etkileşimleri ele alır. Sistem aşağıdaki diferansiyel denklemlerle yönetilir:

$$\frac{dx}{dt} = gz + (y - a)x, \quad (4.1)$$

$$\frac{dy}{dt} = -by^2 - sx^2 + r, \quad (4.2)$$

$$\frac{dz}{dt} = -cz - \beta x - py, \quad (4.3)$$

burada $x(t)$ faiz oranını, $y(t)$ yatırım talebini ve $z(t)$ fiyat endeksini temsil eder. Sabitler a , b , c , p , r , s ve β , bu değişkenler arasındaki etkileşimleri karakterize eder ve sistemin genel dinamiklerini etkiler. Denklemler, yatırım talebi gibi bir faktördeki değişikliklerin faiz oranı ve fiyat endeksi gibi diğer faktörleri nasıl önemli ölçüde etkileyebileceğini yansıtır.

Bu tezde, sistemi, Caputo fraktal türevini kullanarak bir fraktal diferansiyel denklem sistemine dönüştürerek bellek etkileri ve uzun vadeli bağımlılıklar hakkında daha kapsamlı bir anlayış sunuyoruz.

4.1. ODT'lerin fraktal diferansiyel denklemlere dönüştürülmesi

Aşağıdaki adi diferansiyel denklemler verildiğinde:

$$\frac{dx}{dt} = gz + (y - a)x, \quad (4.4)$$

$$\frac{dy}{dt} = -by^2 - sx^2 + r, \quad (4.5)$$

$$\frac{dz}{dt} = -cz - \beta x - py, \quad (4.6)$$

bunları Caputo fraktal türev tanımı kullanarak fraktal diferansiyel denklemlere dönüştürüyoruz:

$${}^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} \frac{df(\tau)}{d\tau} d\tau,$$

burada $0 < \alpha < 1$.

4.1.1. Dönüştürülmüş denklemler

$x(t)$ için:

$${}^C D_t^\alpha x(t) = gz(t) + (y(t) - a)x(t)$$

bu şuna dönüşür:

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} \frac{dx(\tau)}{d\tau} d\tau = gz(t) + (y(t) - a)x(t)$$

$y(t)$ için:

$${}^C D_t^\alpha y(t) = -by(t)^2 - sx(t)^2 + r$$

bu şuna dönüşür:

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} \frac{dy(\tau)}{d\tau} d\tau = -by(t)^2 - sx(t)^2 + r$$

$z(t)$ için:

$${}^C D_t^\alpha z(t) = -cz(t) - \beta x(t) - py(t)$$

bu şuna dönüşür:

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} \frac{dz(\tau)}{d\tau} d\tau = -cz(t) - \beta x(t) - py(t)$$

4.2. Fraktal Diferansiyel Denklemler İçin Kestir-Doğrula Yöntemi ile Sayısal Çözüm

fraktal diferansiyel denklemleri sayısal olarak çözmek için kestir-doğrula yöntemini kullanıyoruz. Adımlar şu şekildedir:

4.2.1. Kestirme adımı

$$x_p(t_{n+1}) = x_n + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} f_n, \quad (4.7)$$

$$y_p(t_{n+1}) = y_n + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} g_n, \quad (4.8)$$

$$z_p(t_{n+1}) = z_n + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} h_n, \quad (4.9)$$

burada

$$f_n = gz_n + (y_n - a)x_n, \quad (4.10)$$

$$g_n = -by_n^2 - sx_n^2 + r, \quad (4.11)$$

$$h_n = -cz_n - \beta x_n - py_n. \quad (4.12)$$

4.2.2. Doğrulama adımı

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \left(\frac{f_n + f_{n+1}}{2} \right), \quad (4.13)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \left(\frac{g_n + g_{n+1}}{2} \right), \quad (4.14)$$

$$z_{n+1} = z_n + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \left(\frac{h_n + h_{n+1}}{2} \right), \quad (4.15)$$

burada

$$f_{n+1} = gz_{n+1} + (y_{n+1} - a)x_{n+1}, \quad (4.16)$$

$$g_{n+1} = -by_{n+1}^2 - sx_{n+1}^2 + r, \quad (4.17)$$

$$h_{n+1} = -cz_{n+1} - \beta x_{n+1} - py_{n+1}. \quad (4.18)$$

4.3. Pertürbasyon Analizi Kullanarak Lyapunov Üsteli Hesaplama

Bu bölümde, fraktal diferansiyel denklem sistemine dönüştürülen Huang-Li doğrusal olmayan finansal sistemi için Lyapunov üstel değerlerini hesaplıyoruz. Lyapunov üstel, bir sistemin kararlılığını ve kaotik doğasını belirlemek için temel bir ölçüdür. Lyapunov üstel değerlerini tanımlamak, küçük pertürbasyonların zamanla nasıl evrildiğini ve kararlı mı yoksa kaotik bir davranışa mı yol açtığını anlamak açısından önemlidir.

4.3.1. Yöntem: Pertürbasyon analizi

Lyapunov üstel, sistemin başlangıç koşullarına küçük bir pertürbasyon eklenerek ve pertürbe edilmiş ve edilmemiş yörüngeler arasındaki sapmanın zamanla nasıl geliştiği gözlemlenerek hesaplanır. Bu süreçte izlenen adımlar şunlardır:

1. **Başlangıç Kurulumu:** Sistem için x_0 , y_0 ve z_0 başlangıç koşulları ile birlikte sistem parametreleri $g, a, b, s, r, c, \beta, p$ ayarlanır. Zaman adımı h ve toplam simülasyon süresi T ile zaman aralığı ayrıklaştırılır.
2. **Sistem Evrimi:** Sistem, başlangıç koşulları kullanılarak zamanla evrimleştirilir ve $x(t)$, $y(t)$ ve $z(t)$ yörüngeleri elde edilir.
3. **Pertürbasyonun Eklenmesi:** Başlangıç koşullarına küçük bir pertürbasyon eklenir, örneğin $x_0 + \varepsilon$, $y_0 + \varepsilon$, $z_0 + \varepsilon$, burada ε küçük bir pozitif değerdir.
4. **Pertürbe Edilmiş Sistem Evrimi:** Pertürbe edilmiş sistem aynı zaman dilimi boyunca simüle edilerek pertürbe edilmiş yörüngeler $x'(t)$, $y'(t)$ ve $z'(t)$ elde

edilir.

5. **Mesafe Hesaplama:** Her bir zaman adımında pertürbe edilmiş ve edilmemiş yörüngeler arasındaki mesafe hesaplanır:

$$d(t_n) = \sqrt{(x(t_n) - x'(t_n))^2 + (y(t_n) - y'(t_n))^2 + (z(t_n) - z'(t_n))^2}$$

6. **Lyapunov Üstel Tahmini:** Bu mesafenin zamanla nasıl büyüdüğü (ya da küçüldüğü) analiz edilerek Lyapunov üstel tahmin edilir. Özellikle, şu şekilde hesaplanır:

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left(\frac{d(t)}{d(0)} \right)$$

Pratikte, bu, yörüngeler arasındaki mesafenin zaman aralığı boyunca ortalama büyüme oranı kullanılarak yaklaşık olarak hesaplanır.

4.3.2. Sonuçların yorumu

Hesaplanan Lyapunov üstel, sistemin kararlılığı hakkında bilgi sağlar:

- **Pozitif Lyapunov Üstel:** Bu, sistemin başlangıç koşullarına duyarlı olduğunu ve küçük pertürbasyonların zamanla üssel olarak büyüdüğünü, dolayısıyla kaotik davranışa yol açtığını gösterir.
- **Sıfır Lyapunov Üstel:** Bu, sistemin nötr kararlılık sergilediğini, yani küçük pertürbasyonların ne üssel olarak büyüdüğünü ne de küçüldüğünü gösterir. Bu, periyodik veya yarı-periyodik sistemlerin karakteristiğidir.
- **Negatif Lyapunov Üstel:** Bu, küçük pertürbasyonların zamanla küçüldüğünü, sistemin orijinal durumuna geri döndüğünü ve bu nedenle kararlı olduğunu gösterir.

4.3.3. Huang-Li doğrusal olmayan finansal sistemine uygulama

Huang-Li doğrusal olmayan finansal sistemi, çeşitli g parametreleri için Lyapunov üstel değerleri hesaplanarak incelenmiştir. Bu parametre, sistem içindeki etkileşimleri etkiler ve sistemin davranışını belirlemede kritik bir rol oynar.

- **Kurulum:** Kullanılan başlangıç koşulları $x_0 = 1.2$, $y_0 = 1.5$, $z_0 = 1.6$ olup, diğer parametreler sabit tutulurken g belirli bir aralıkta değiştirilmiştir.
- **Sonuçlar:** Her g değeri için Lyapunov üstel değerleri hesaplanmış ve bu, sistemin kararlılığının g 'ye bağlı olarak nasıl değiştiğini gösteren bir spektrum sunmuştur. Belirli g aralıklarında pozitif üstel değerler kaotik davranış doğrularken, negatif üstel değerler kararlılığı göstermektedir.

Sonuçlar, sistemin kararlı ve kaotik davranışlar arasında geçiş yaptığı bölgeleri vurgulayan, g 'ye karşı Lyapunov üstel grafiğinde görselleştirilmiştir.

4.3.4. Lyapunov üstel hesaplamalarının sonuçları

Lyapunov üstel hesaplamaları, özellikle sistemin başlangıç koşullarına duyarlılığını ve kaotik davranış potansiyelini anlamada Huang-Li doğrusal olmayan finansal sisteminin dinamik davranışları hakkında değerli bilgiler sağlar. Lyapunov üstel analizinden elde edilen sonuçlar birkaç önemli çıkarım içermektedir:

4.3.4.1. Kaos ve kararlılığın karakterizasyonu

Lyapunov üstel, sistemdeki kaosu tanımlamak için kesin bir ölçü görevi görür. Belirli parametre aralıklarındaki pozitif Lyapunov üstel değerleri, sistemin kaotik davranış sergilediğini gösterir, bu da başlangıç koşullarındaki küçük farklılıkların zamanla büyük sonuçlara yol açabileceği anlamına gelir [Ott, 2002b]. Bu özellik, başlangıç koşullarına duyarlılık nedeniyle uzun vadeli davranışın tahmin edilmesinin zorlaştığı finansal sistemler için kritik öneme sahiptir.

Buna karşılık, negatif Lyapunov üstel değerleri, sistemin kararlı olduğunu ve başlangıçtaki küçük pertürbasyonlara daha az duyarlı olduğunu, zamanla denge durumuna geri döndüğünü gösterir. Bu kararlılık, küçük rahatsızlıklardan sonra sistemin güvenilir bir şekilde dengeye dönmesini anlamak açısından finansal modelleme için önemlidir [Strogatz, 2018].

4.3.4.2. Bifurkasyon analizi ve kritik noktalar

Lyapunov üstel spektrumu, sistemin kararlı davranıştan kaotik davranışa geçtiği kritik değerler olan bifurkasyon noktalarını belirlemek için daha fazla analiz edilebilir. Bu bifurkasyonlar, sistemdeki yeni dinamik rejimlerin başlangıcını işaret eder [Kuznetsov, 2013].

g sistematik olarak değiştirilerek, farklı dinamik davranışlara karşılık gelen parametre uzayındaki bölgeler haritalanabilir. Bu analiz, sistem parametrelerindeki değişikliklerin (örneğin, g 'yi etkileyen dış ekonomik faktörler gibi) finansal dinamiklerde ani ve öngörülemez değişimlere nasıl yol açabileceğini öngörmek açısından temeldir [Guckenheimer and Holmes, 2002].

4.3.4.3. Finansal modellemede uygulamalar

Huang-Li sisteminin Lyapunov spektrumunu anlamak, özellikle risk değerlendirmesi ve sağlam finansal sistemlerin tasarımında finansal modellemeye doğrudan uygulamalara sahiptir. Örneğin, kaotik davranışa yol açan parametre uzayındaki bölgeleri tanımlamak, bu bölgelerden kaçınma stratejileri geliştirmek veya bunların etkilerini kontrol mekanizmalarıyla hafifletmek için yardımcı olabilir [Spratt, 2003].

Ayrıca, Lyapunov üstel değerleri ile sağlanan duyarlılık analizi, finansal piyasalar için senaryo planlaması açısından kritik öneme sahiptir. Kaos potansiyelini tanıyarak, finansal kurumlar yüksek oynaklık ve belirsizlik dönemlerine daha iyi hazırlanabilir ve daha dayanıklı finansal planlama ve karar alma süreçlerini sağlayabilir [Peters, 1991].

4.3.4.4. Gelecek araştırma yönleri

Lyapunov üstel analizleri, gelecekteki araştırmalar için birkaç kapı açmaktadır. Potansiyel bir araştırma yönü, diğer fraktal derecelerin α 'nın, sistemin kararlılık

ve kaotik dinamikleri üzerindeki etkisini incelemektir. α 'nın değiştirilmesiyle, araştırmacılar Huang-Li sistemindeki bellek etkilerinin rolünü ve bu etkilerin sistemin pertürbasyonlara verdiği yanıtı nasıl değiştirdiğini daha derinlemesine anlayabilirler [Podlubny, 1998].

Ayrıca, benzer analizlerin diğer finansal modellere uygulanması veya Huang-Li sisteminin daha karmaşık etkileşimleri içerecek şekilde genişletilmesi, gerçek dünyadaki finansal piyasaların davranışları hakkında daha fazla içgörü sağlayabilir. Bu bulguların ampirik verilerle birleştirilmesi, bu tür modellerin öngörü gücünü de artırabilir [Mantegna and Stanley, 1999].

4.3.4.5. *Pratik hususlar*

Teorik analiz, sistemin dinamikleri hakkında net bir anlayış sağlarken, hesaplama maliyeti ve doğruluk gibi pratik hususlar da ele alınmalıdır. Özellikle fraktal türevli sistemlerde Lyapunov üstel hesaplamaları için kullanılan sayısal yöntemler, zaman adımı h ve pertürbasyon büyüklüğü ε gibi parametrelerin dikkatli bir şekilde kalibre edilmesini gerektirir [Diethelm, 2010].

Ayrıca, pratik uygulamalarda, sonuçların sayısal hatalara karşı dayanıklı olduğundan ve hesaplamaların makul zaman dilimlerinde gerçekleştirilebildiğinden emin olmak, bu yöntemlerin finansal analizde yaygın olarak benimsenmesi için önemlidir [Bastani et al., 2015].

4.3.5. **Sonuçların görselleştirilmesi ve yorumlanması**

Lyapunov üstel hesaplamalarının sonuçları genellikle g parametresi ile ilgili Lyapunov üstel değerlerini gösteren grafiklerde görselleştirilir. Bu grafikler, sistemin farklı parametre rejimlerinde davranışını net bir şekilde ortaya koyar.

Örneğin, g 'ye bağlı Lyapunov üstelini gösteren bir grafik genellikle pozitif üstelin kaosu gösterdiği ve negatif üstelin kararlılığı gösterdiği bölgeler içerir. Bu bölgeler arasındaki geçiş noktaları, sistemin dinamiklerindeki bifurkasyonları ve kritik eşikleri işaret ettiği için özellikle önemlidir.

4.3.6. **Huang-Li doğrusal olmayan finansal sistemine uygulama**

Huang-Li doğrusal olmayan finansal sistemi, çeşitli g parametreleri için Lyapunov üstel değerleri hesaplanarak incelenmiştir. Bu parametre, sistem içindeki etkileşimleri etkiler ve sistemin davranışını belirlemede kritik bir rol oynar.

- **Kurulum:** Kullanılan başlangıç koşulları $x_0 = 1.2$, $y_0 = 1.5$, $z_0 = 1.6$ olup, diğer parametreler sabit tutulurken g belirli bir aralıkta değiştirilmiştir.
- **Sonuçlar:** Her g değeri için Lyapunov üstel değerleri hesaplanmış ve bu, sistemin kararlılığının g 'ye bağlı olarak nasıl değiştiğini gösteren bir spektrum sunmuştur. Belirli g aralıklarında pozitif üstel değerler kaotik davranışı doğrularken, negatif üstel değerler kararlılığı göstermektedir.

Sonuçlar, sistemin kararlı ve kaotik davranışlar arasında geçiş yaptığı bölgeleri vurgulayan, g 'ye karşı Lyapunov üstel grafiğinde görselleştirilmiştir.

4.3.7. Lyapunov üstel hesaplamalarının sonuçları

Lyapunov üstel hesaplamaları, özellikle sistemin başlangıç koşullarına duyarlılığını ve kaotik davranış potansiyelini anlamada Huang-Li doğrusal olmayan finansal sisteminin dinamik davranışları hakkında değerli bilgiler sağlar. Lyapunov üstel analizinden elde edilen sonuçlar birkaç önemli çıkarım içermektedir:

4.3.7.1. *Kaos ve kararlılığın karakterizasyonu*

Lyapunov üstel, sistemdeki kaosu tanımlamak için kesin bir ölçü görevi görür. Belirli parametre aralıklarındaki pozitif Lyapunov üstel değerleri, sistemin kaotik davranış sergilediğini gösterir, bu da başlangıç koşullarındaki küçük farklılıkların zamanla büyük sonuçlara yol açabileceği anlamına gelir [Ott, 2002b]. Bu özellik, başlangıç koşullarına duyarlılık nedeniyle uzun vadeli davranışın tahmin edilmesinin zorlaştığı finansal sistemler için kritik öneme sahiptir.

Buna karşılık, negatif Lyapunov üstel değerleri, sistemin kararlı olduğunu ve başlangıçtaki küçük pertürbasyonlara daha az duyarlı olduğunu, zamanla denge durumuna geri döndüğünü gösterir. Bu kararlılık, küçük rahatsızlıklardan sonra sistemin güvenilir bir şekilde dengeye dönmesini anlamak açısından finansal modelleme için önemlidir [Strogatz, 2018].

4.3.7.2. *Bifurkasyon analizi ve kritik noktalar*

Lyapunov üstel spektrumu, sistemin kararlı davranıştan kaotik davranışa geçtiği kritik değerler olan bifurkasyon noktalarını belirlemek için daha fazla analiz edilebilir. Bu bifurkasyonlar, sistemdeki yeni dinamik rejimlerin başlangıcını işaret eder [Kuznetsov, 2013].

g sistematik olarak değiştirilerek, farklı dinamik davranışlara karşılık gelen parametre uzayındaki bölgeler haritalanabilir. Bu analiz, sistem parametrelerindeki değişikliklerin (örneğin, g 'yi etkileyen dış ekonomik faktörler gibi) finansal dinamiklerde ani ve öngörülemez değişimlere nasıl yol açabileceğini öngörmek açısından temeldir [Guckenheimer and Holmes, 2002].

4.3.7.3. *Finansal modellemede uygulamalar*

Huang-Li sisteminin Lyapunov spektrumunu anlamak, özellikle risk değerlendirmesi ve sağlam finansal sistemlerin tasarımında finansal modellemeye doğrudan uygulamalara sahiptir. Örneğin, kaotik davranışa yol açan parametre uzayındaki bölgeleri tanımlamak, bu bölgelerden kaçınma stratejileri geliştirmek veya bunların etkilerini kontrol mekanizmalarıyla hafifletmek için yardımcı olabilir [Sprott, 2003].

Ayrıca, Lyapunov üstel değerleri ile sağlanan duyarlılık analizi, finansal piyasalar için senaryo planlaması açısından kritik öneme sahiptir. Kaos potansiyelini tanıyarak, finansal kurumlar yüksek oynaklık ve belirsizlik dönemlerine daha iyi hazırlanabilir ve daha dayanıklı finans

5. BULGULAR ve SONUÇ

5.1. Bulguların Özeti

Bu çalışmada, Huang-Li doğrusal olmayan finansal sistemini Caputo fraktal türevini kullanarak fraktal diferansiyel denklem sistemine dönüştürerek derinlemesine bir analiz sağlandı. Ana hedef, fraktal derecenin (α) sistemin kararlılığı ve kaotik davranışı üzerindeki etkilerini incelemektir. α değerleri olarak 0.8, 0.9 ve 1.0 ele alındı ve sistemin dinamikleri tutarlı parametreler altında analiz edildi. Zaman adımı $h = 0.0001$ ve toplam simülasyon süresi $T = 800$ olarak alındı, başlangıç koşulları ise $x_0 = 1.2$, $y_0 = 1.5$ ve $z_0 = 1.6$ olarak belirlendi.

5.2. Grafiklerin Değerlendirilmesi

5.2.1. Yörünge grafiklerinin değerlendirilmesi (Şekil 5.1)

Farklı α değerleri için yörünge grafiklerinde, fraktal derecenin değişmesiyle birlikte davranışta belirgin bir model ortaya çıkmaktadır:

- $\alpha = 1$: Sistem, faz uzayında daha fazla yayılmış ve belirli bölgelerde yoğunlaşan klasik bir kaotik çekici sergiler. Bu, standart bir diferansiyel sistemden beklenen bellek etkileri olmadan tipik kaotik bir davranışı gösterir.
- $\alpha = 0.9$: fraktal derece azaldıkça, özellikle $x - z$ düzleminde yörüngeler daha sıkı bir şekilde kümelenmeye başlar. Bu, bellek etkilerinin kaotik davranışı hafifçe stabilize ettiğini ve sistemin kısa aralıklar boyunca daha öngörülebilir hale geldiğini gösterir.
- $\alpha = 0.8$: α 'nın daha da azalmasıyla birlikte, yörüngeler, özellikle $x - y$ ve $x - z$ düzlemlerinde daha sıkı bağlanmış hale gelir. Bu, bellek etkilerinin daha belirgin bir etkiye sahip olduğunu ve kaotik yayılmayı azalttığını gösterir, ancak kaos hala mevcuttur.

5.2.2. Zaman serisi grafiklerinin değerlendirilmesi (Şekil 5.2)

Zaman serisi grafiklerinde farklı α değerleri için sistemin zaman içindeki davranışı daha ayrıntılı olarak ortaya konulmaktadır:

- $\alpha = 1$: Zaman serileri, $x(t)$, $y(t)$ ve $z(t)$ için oldukça düzensiz, kaotik bir model sergilemektedir. Salınım genlikleri önemli ölçüde değişir ve bu, bellek etkileri olmayan bir sistemde tipik olan güçlü kaotik dinamikleri gösterir.

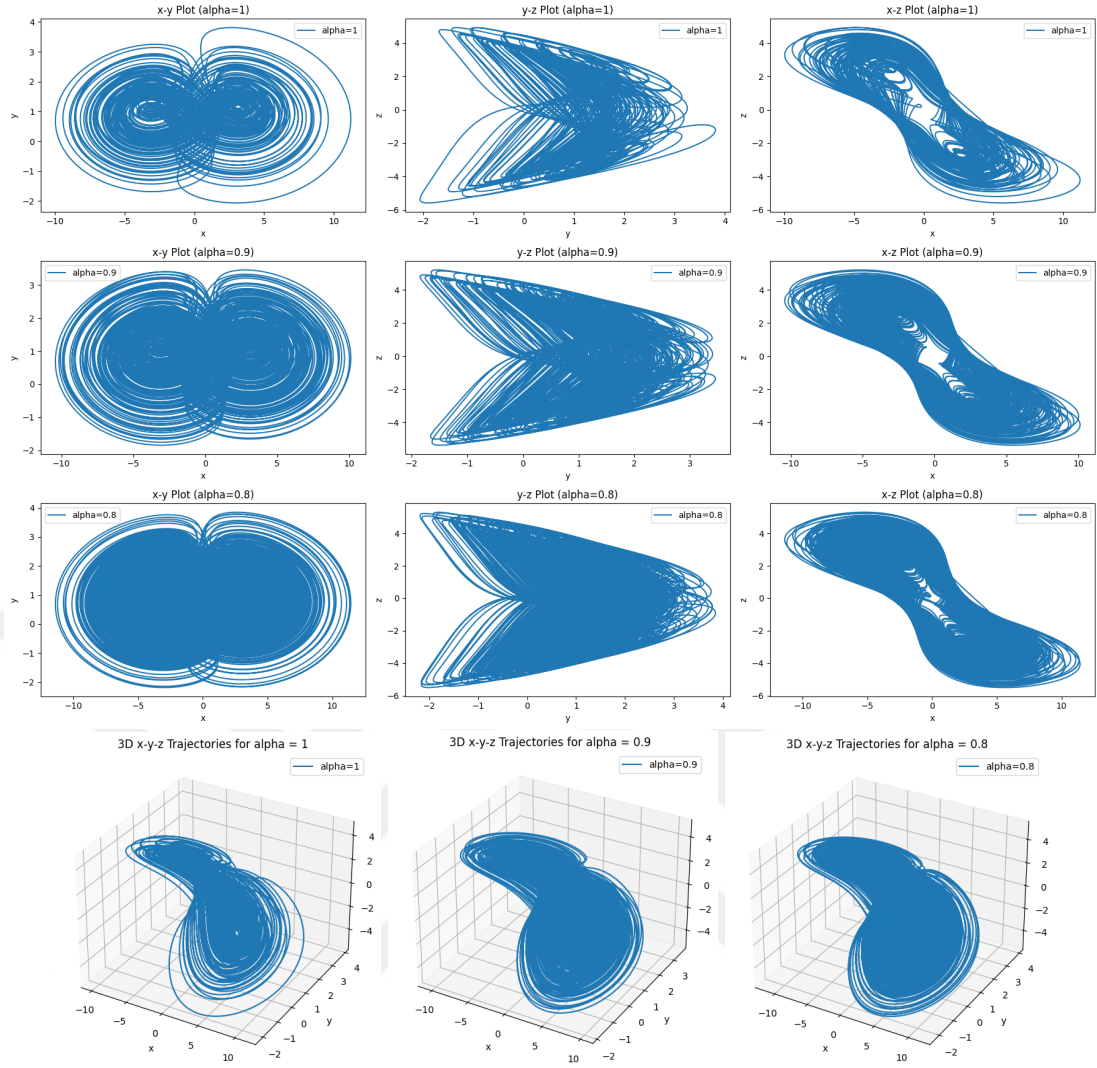


Figure 5.1: $\alpha = 1$, $\alpha = 0.9$ ve $\alpha = 0.8$ için sistemin çözüm yörüngelerinin 3B ve 2B projeksiyonları. Grafikler $x(t)$, $y(t)$ ve $z(t)$ 'nin farklı düzlemlerdeki yörüngelerini göstermektedir.

- $\alpha = 0.9$: Salınım frekansları biraz artar, bu da bellek etkilerinin sistemin dinamiklerini etkilemeye başladığını gösterir.
- $\alpha = 0.8$: Salınım frekansları daha da artar ve bu, bellek etkilerinin daha güçlü bir etkisi olduğunu ve zaman içinde daha kısıtlı ve öngörülebilir bir davranışa yol açtığını yansıtır.

5.3. Önemli Bulgular

5.3.1. Lyapunov üsteli vs. gg (Şekil 5.3)

Lyapunov üsteli ile parametre g arasındaki ilişki, $\alpha = 1$ sabitken incelendi. Bu analiz, g değiştiğinde sistemin davranışında belirgin değişimler olduğunu ortaya koydu:

- Düşük g değerlerinde, sistem kararlı olma eğilimindedir ve Lyapunov üsteli değerleri sıfıra yakın veya negatiftir, bu da kaotik bir davranış olmadığını gösterir.

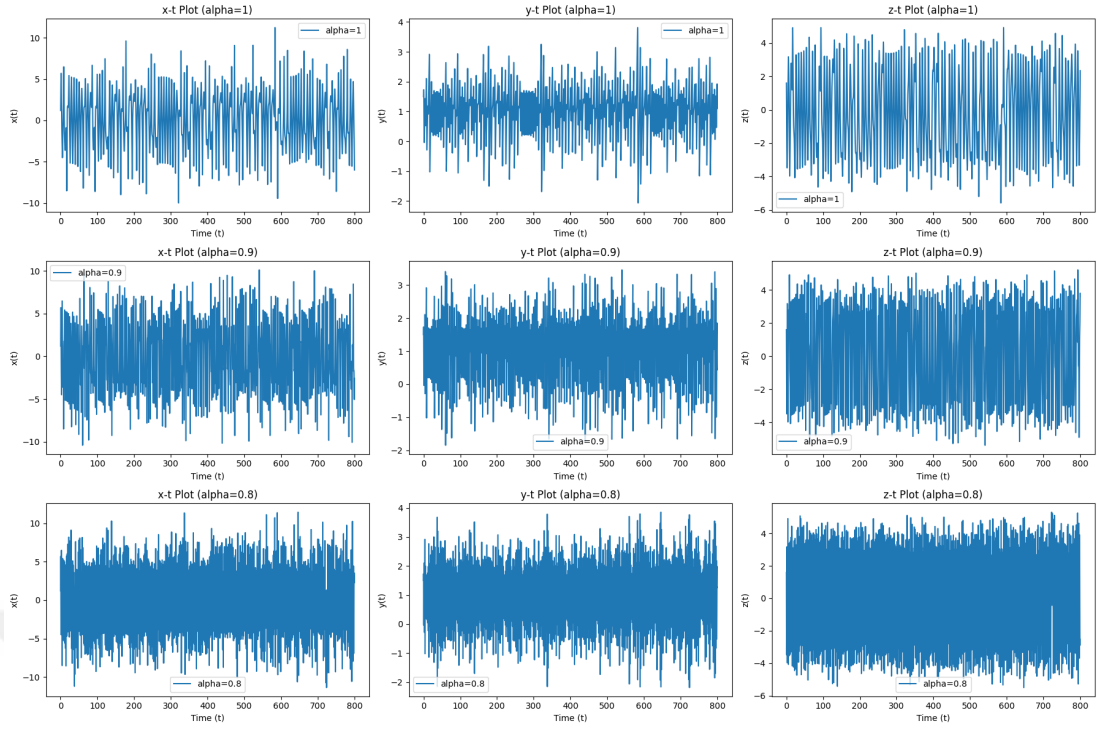


Figure 5.2: $\alpha = 1$, $\alpha = 0.9$ ve $\alpha = 0.8$ için $x(t)$, $y(t)$ ve $z(t)$ 'nin zaman serisi. Bu grafikler, çözümlerin zaman içindeki kaotik doğasını göstermektedir.

- g arttıkça, özellikle $0.6 \leq g \leq 1.7$ aralığında, Lyapunov üstel pozitif hale gelir ve bu da sistemin kaotik bir rejime geçtiğini işaret eder.

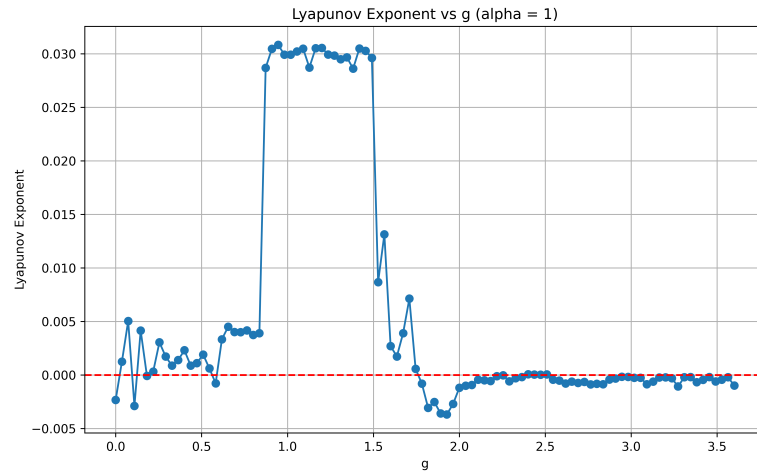


Figure 5.3: $\alpha = 1$ için Lyapunov Üstel vs g .

5.3.2. Farklı g değerleri üzerinde davranış

Sistemin davranışının, α değıştikçe nasıl değıştiğini anlamak için belirli g değeri üzerinde daha fazla araştırma yapılmıştır. Bu yaklaşım, fraktal kalkülüs yaklaşımıyla tanımlan bellek etkilerinin sistem üzerindeki etkilerini ortaya koydu:

- $g = 1.3$: Sistem, tüm α değerlerinde tutarlı kaotik davranış sergiler ve Lyapunov üstel değerleri pozitifdir. Kaosun büyüklüğü çok az değişir, bu da g parametresinin, α 'dan bağımsız olarak kaotik dinamikleri sürdüren güçlü bir etkisi olduğunu gösterir (Şekil 5.4).

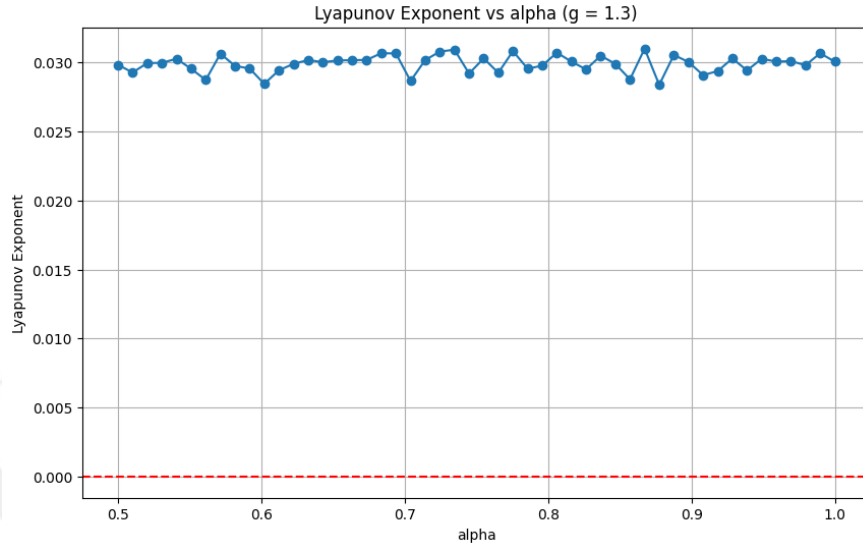


Figure 5.4: $g = 1.3$ için Lyapunov Üstel vs α .

- $g = 1.7$: $g = 1.3$ 'e benzer şekilde, sistem, değişen α değerlerinde sürekli kaos sergiler. Ancak, Lyapunov üstel değerleri biraz daha fazla dalgalanır, bu da fraktal derecenin tanıttığı bellek etkilerinin bu g değerinde daha belirgin bir etkisi olduğunu gösterir. (Şekil 5.5).

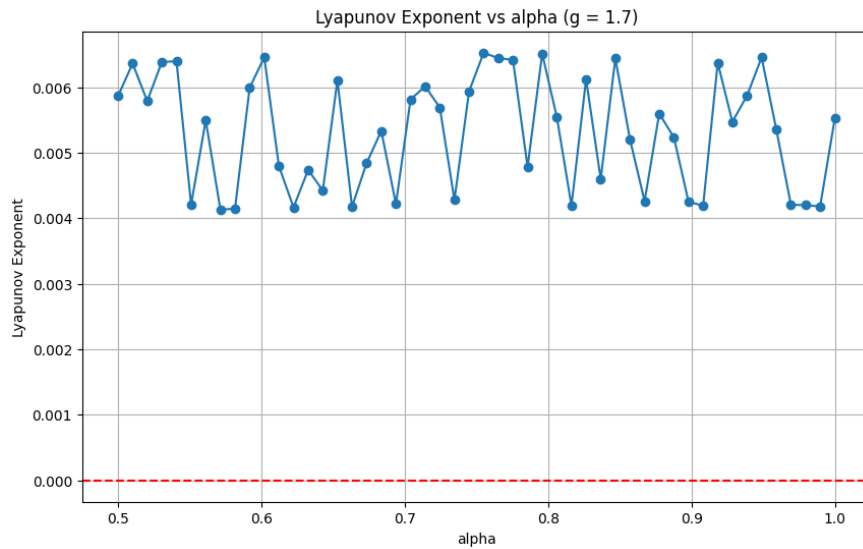


Figure 5.5: $g = 1.7$ için Lyapunov Üstel vs α .

- $g = 2.3752$: Sistem kararlılığın sınırında kalır ve Lyapunov üstel değerleri sıfıra yakın dalgalanır. Bu rejimde α 'nın etkisi, sistemi kararlı ve neredeyse kaotik durumlar arasında değiştirmesine neden olur. (Şekil 5.6).

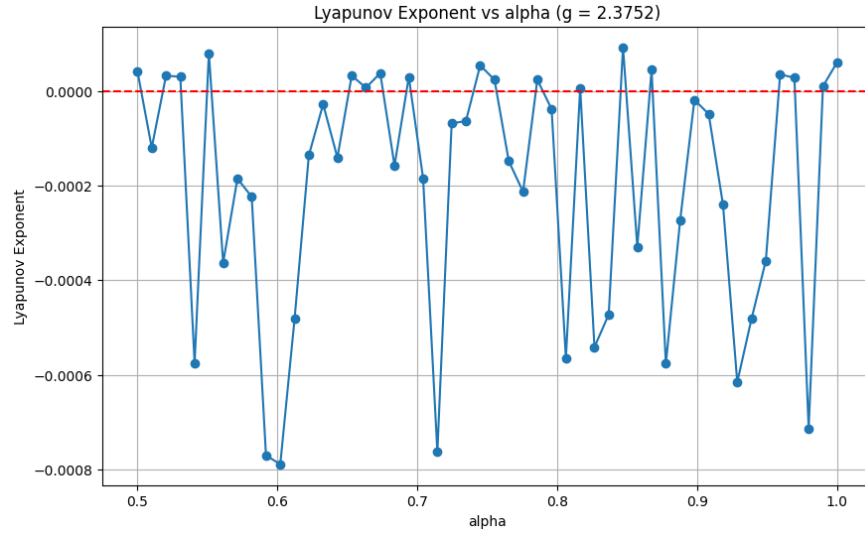


Figure 5.6: $g = 2.3752$ için Lyapunov Üstel vs α .

- $g = 0.1169$: Lyapunov üstel değerleri, α 'daki değişikliklere karşı yüksek hassasiyet gösterir ve bu da sistemin bellek etkilerine karşı kaotik tepkisini yansıtır. Bu davranış, düşük g değerlerinde fraktal türevlerin sistemin tepkisine olan karmaşıklığını vurgular (Şekil 5.7).

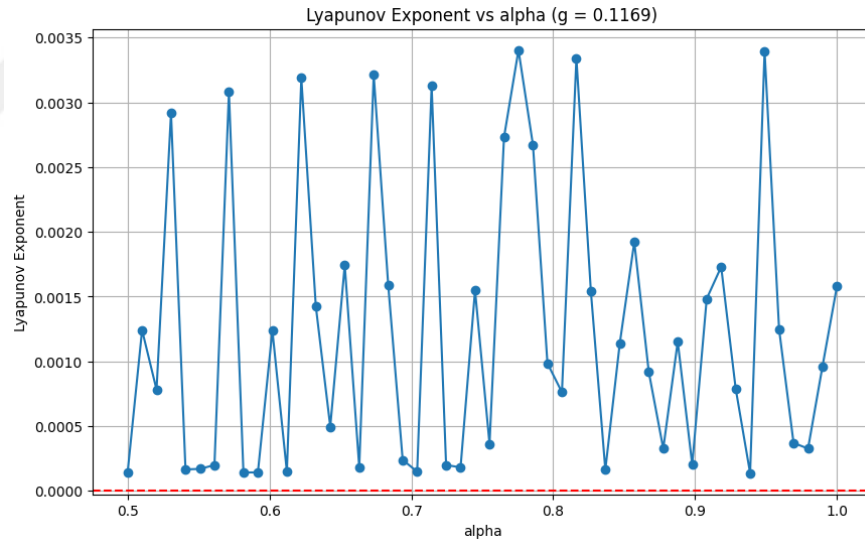


Figure 5.7: $g = 0.1169$ için Lyapunov Üstel vs α .

- $g = -2.6194$: Sistem, çoğu α değeri için kararlı kalır ve bu negatif Lyapunov üstel değerleriyle gösterilir. Ancak, α arttıkça sistem daha az kararlı hale gelir ve üstel değerler sıfıra yaklaştıkça kaotik davranışa yaklaşır (Şekil 5.8).
- $g = 2.6194$: Sistem, farklı α değerlerinde kaotik davranış sergiler, ancak Lyapunov üstel değerleri önemli ölçüde değişir ve bu da bellek etkilerine güçlü bir bağımlılığı gösterir. fraktal derecenin kaotik doğası, α azaldıkça artar ve bu, kaosun modülasyonunda fraktal derecenin kritik rolünü vurgular (Şekil 5.9).

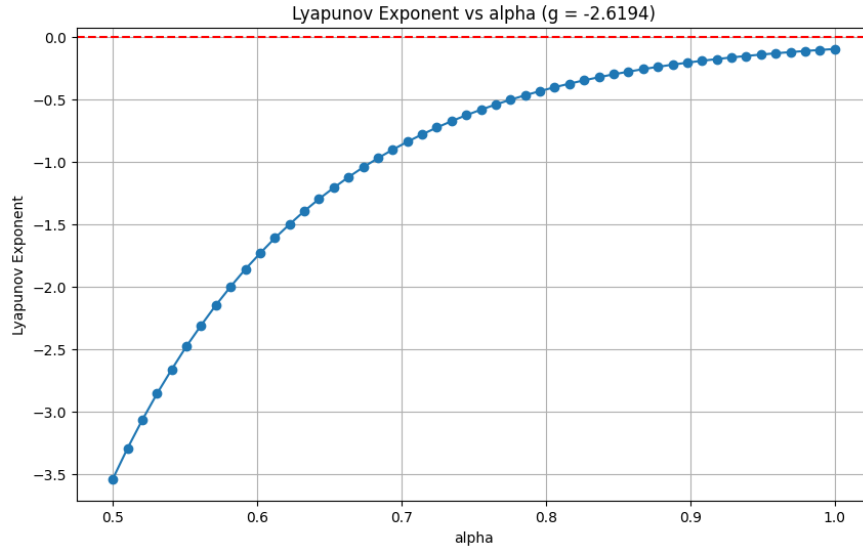


Figure 5.8: $g = -2.6194$ için Lyapunov Üstel vs α .

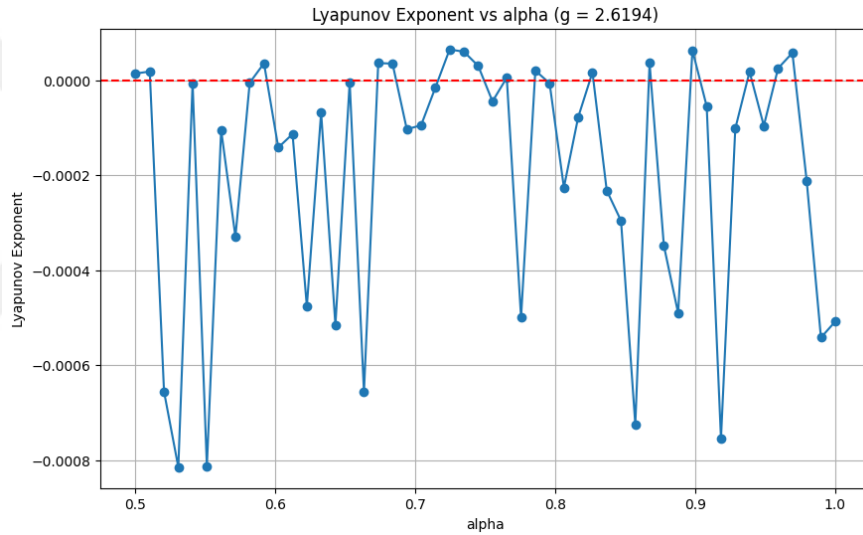


Figure 5.9: $g = 2.6194$ için Lyapunov Üstel vs α .

5.3.3. α , Bellek etkileri ve kaos arasındaki ilişki

Fraktal derecesi olan α , sisteme bellek etkilerini tanıtır ve bu, kaotik davranışı önemli ölçüde etkiler. Çalışma şu sonuçları ortaya koymaktadır:

- α , kaosu ya artıran ya da azaltan bir ayarlama parametresi olarak işlev görür. Bazı g değerlerinde, düşük α (güçlü bellek etkileri) kaosu artırırken, diğerlerinde sistemi stabilize eder.
- α ve g arasındaki bu karmaşık ilişki, bellek etkilerinin sistemin parametrelerine bağlı olarak kaotik dalgalanmaları ya teşvik edebileceğini ya da bastırabileceğini öne sürmektedir. Bu bulgu, finansal sistemlerin dinamiklerini ve başlangıç koşullarına duyarlılıklarını anlamak için önemlidir.

5.4. Finansal Sistemler İçin Sonuçlar

Bu çalışmanın bulguları, finansal sistemlerin karmaşık dinamiklerini modellemede fraktal kalkülüsün, özellikle Caputo fraktal türevinin değerini vurgulamaktadır. α ve kaotik davranış arasındaki ilişki, bellek etkilerinin daha belirgin kaotik dalgalanmalara yol açtığı, daha zayıf bellek etkilerine sahip sistemlerin ise daha kararlı olduğu hakkında daha derin bir anlayış sağlar.

5.5. Sonuç

Sonuç olarak, Huang-Li doğrusal olmayan finansal sisteminin fraktal genişletmesi, finansal piyasalardaki kaotik davranışları analiz etmek için etkili bir çerçeve sunmaktadır. fraktal derece α ayarlanarak, bellek etkilerini modelleyebilir ve bu karmaşık sistemlerdeki kararlılık ve kaos hakkında daha incelikli bir anlayışa ulaşabiliriz, bu da finansal modelleme ve tahmin için değerli içgörüler sunmaktadır.

5.6. Gelecek Çalışmalar

Gelecek araştırmalar, Lyapunov üstel değerleri ve Huang-Li doğrusal olmayan finansal sisteminin genel dinamikleri üzerindeki fraktal derece α ve diğer sistem parametrelerinin etkisini daha fazla keşfedebilir. Ayrıca, sistemin farklı başlangıç koşulları ve parametre değerleri altında nasıl davrandığının incelenmesi, düzenli, kaotik ve hiperkaotik rejimler arasındaki geçişler hakkında değerli içgörüler sağlayabilir. Bu tür çalışmalar, kaotik davranışın dayanıklılığı ve finansal modelleme ve tahmin üzerindeki etkileri hakkındaki anlayışımızı geliştirecektir.

Kaynakça

- [Adkins and Davidson, 2012] Adkins, W. A. and Davidson, M. G. (2012). *Ordinary Differential Equations*. Springer Science & Business Media.
- [Almgren and Chriss, 2001] Almgren, R. and Chriss, N. (2001). Optimal execution of portfolio transactions. *Journal of Risk*, 3(2):5–40.
- [Altman, 1968] Altman, E. I. (1968). Financial ratios, discriminant analysis and the prediction of corporate bankruptcy. *The journal of finance*, 23(4):589–609.
- [Aranson and Kramer, 1997] Aranson, I. S. and Kramer, L. (1997). Novel dissipative lagrange-hamilton formalism for lc/van der pol oscillator. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 44(6):536–548.
- [Arthur, 1989] Arthur, W. B. (1989). Competing technologies, increasing returns, and lock-in by historical events. *The Economic Journal*, 99(394):116–131.
- [Assmann, 2011] Assmann, J. (2011). *Cultural Memory and Western Civilization: Functions, Media, Archives*. Cambridge University Press.
- [Bagley and Torvik, 1983] Bagley, R. L. and Torvik, P. J. (1983). Fractional calculus—a different approach to the analysis of viscoelastically damped structures. *AIAA journal*, 21(5):741–748.
- [Bastani et al., 2015] Bastani, A. S., Pourasghar, M., and Zolhavarieh, S. M. (2015). Fuzzy group method of data handling: An application to reliability analysis of complex systems. *Fuzzy Information Processing Society (NAFIPS), 2015 Annual Conference of the North American*, pages 1–5.
- [Binder and Young, 1986] Binder, K. and Young, A. P. (1986). Spin glasses: Experimental facts, theoretical concepts, and open questions. *Reviews of Modern Physics*, 58(4):801.
- [Bollerslev, 1986] Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of econometrics*, 31(3):307–327.
- [Bouchaud et al., 1998] Bouchaud, J.-P., Cugliandolo, L. F., Kurchan, J., and Mezard, M. (1998). Out of equilibrium dynamics in spin-glasses and other glassy systems. *Spin glasses and random fields*, 12:161.
- [Boyce and DiPrima, 2012] Boyce, W. E. and DiPrima, R. C. (2012). *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. John Wiley & Sons.
- [Braun, 1983] Braun, M. (1983). *Differential Equations and Their Applications*. Springer.
- [Braun and Golubitsky, 1983] Braun, M. and Golubitsky, M. (1983). *Differential Equations and Their Applications*, volume 2. Springer.

- [Brodd, 2001] Brodd, R. J. (2001). *Nickel-Cadmium Batteries*. Springer.
- [Chambers, 2004] Chambers, L. L. G. (2004). Differential equations: Linear, non-linear, ordinary, partial, by a. c. king, j. billingham and s. otto. pp. 541. £24.95, 40(*pb*).70.00,100 (hb). 2003. isbn 0 521 01687 8; 0 521 01658 0 (cambridge university press). *The Mathematical Gazette*, 88(512):366–367.
- [Cugliandolo and Kurchan, 2002] Cugliandolo, L. F. and Kurchan, J. (2002). Dynamics of glassy systems. *arXiv preprint cond-mat/0201604*.
- [David, 1985] David, P. A. (1985). Clio and the economics of qwerty. *The American Economic Review*, 75(2):332–337.
- [De Long et al., 1987] De Long, J. B., Shleifer, A., Summers, L. H., and Waldmann, R. J. (1987). Stock market crashes and trading volume. *Journal of Economic perspectives*, 4(2):3–3.
- [Dieci and Vleck, 1997] Dieci, L. and Vleck, E. S. V. (1997). Computation of lyapunov exponents for continuous dynamical systems. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 34(1):402–423.
- [Diethelm, 2010] Diethelm, K. (2010). *The Analysis of Fractional Differential Equations: An Application-Oriented Exposition Using Differential Operators of Caputo Type*. Springer Science & Business Media.
- [Ebaid, 2011] Ebaid, A. E. (2011). A reliable aftertreatment for improving the differential transformation method and its application to nonlinear oscillators with fractional nonlinearities. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 16(1):528–536.
- [Engle, 1982] Engle, R. F. (1982). Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of united kingdom inflation. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, pages 987–1007.
- [Feigenbaum, 1980] Feigenbaum, M. J. (1980). Quantitative universality for a class of nonlinear transformations. *Journal of Statistical Physics*, 19(1):25–52.
- [Galley, 2012] Galley, M. (2012). The classical mechanics of non-conservative systems. *Physical Review Letters*, 110:174301.
- [Girotti, 2024] Girotti, M. (2024). The van der pol oscillator. MATH 3406 Differential Equations II.
- [Goodhart, 1987] Goodhart, A. L. (1987). Legal precedents in common law and civil law systems: The concept of stare decisis. *Michigan Law Review*, 86(4):1146–1155.
- [Goodstein, 2014] Goodstein, D. L. (2014). *States of matter*. Courier Corporation.
- [Gorenflo and Mainardi, 1997] Gorenflo, R. and Mainardi, F. (1997). The caputo fractional derivative: origins, properties and applications. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 1(2):209–240.
- [Gottwald and Melbourne, 2004] Gottwald, G. A. and Melbourne, I. (2004). A new test for chaos in deterministic systems. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 460(2042):603–611.
- [Guckenheimer and Holmes, 2002] Guckenheimer, J. and Holmes, P. (2002). *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Springer.

- [Guo and Leung, 2010] Guo, Z. and Leung, A. Y. T. (2010). The iterative homotopy harmonic balance method for conservative helmholtz–duffing oscillators. *Applied Mathematics and Computation*, 215(9):3163–3169.
- [Halbwachs, 1992] Halbwachs, M. (1992). *On Collective Memory*. University of Chicago Press.
- [He, 2004] He, J.-H. (2004). The homotopy perturbation method for nonlinear oscillators with discontinuities. *Applied Mathematics and Computation*, 151(1):287–292.
- [He, 2008] He, J. H. (2008). Max-min approach to nonlinear oscillators. *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 9(2):207–210.
- [He, 2010] He, J.-H. (2010). Hamiltonian approach to nonlinear oscillators. *Physics Letters A*, 374(23):2312–2314.
- [Huang and Li, 2003] Huang, X. and Li, C. (2003). Chaos in a new system with a hyperbolic sine function. *Applied Mathematics and Computation*, 147(2):699–707.
- [Hurst, 1951] Hurst, H. E. (1951). Long-term storage capacity of reservoirs. *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, 116(1):770–799.
- [Jonason et al., 1998] Jonason, K., Vincent, E., Hammann, J., Bouchaud, J., and Nordblad, P. (1998). Memory and chaos effects in spin glasses. *Physical Review Letters*, 81(15):3243.
- [Khan et al., 2011] Khan, N. A., Jamil, M., Ali, S. A., and Khan, N. A. (2011). Solutions of the force-free duffing-van der pol oscillator equation. *International Journal of Differential Equations*, 2011:852919.
- [Koca, 2023] Koca, I. (2023). Financial model with chaotic analysis. *Results in Physics*, 51:106633.
- [Koca, 2013] Koca, K. (2013). *Kısmi Türevli Denklemler*. Gazi Kitabevi, Beşevler, Ankara.
- [Kuznetsov, 2013] Kuznetsov, Y. A. (2013). *Elements of Applied Bifurcation Theory*. Springer.
- [Li et al., 2010] Li, C., Duan, J., and Wang, X. (2010). Computation of the largest lyapunov exponent for stochastic differential equations. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 239(5):335–341.
- [Liu, 2005] Liu, H.-M. (2005). Approximate period of nonlinear oscillators with discontinuities by modified lindstedt–poincare method. *Chaos, Solitons & Fractals*, 23(2):577–579.
- [Lo, 1991] Lo, A. W. (1991). Long-term memory in stock market prices. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, pages 1279–1313.
- [Lorenz, 1963] Lorenz, E. N. (1963). Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 20(2):130–141.
- [Mainardi, 1997] Mainardi, F. (1997). Fractional calculus: some basic problems in continuum and statistical mechanics. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 2(4):285–302.
- [Mantegna and Stanley, 1999] Mantegna, R. N. and Stanley, H. E. (1999). *An Intro-*

- duction to Econophysics: Correlations and Complexity in Finance*. Cambridge University Press.
- [May, 1976] May, R. M. (1976). Simple mathematical models with very complicated dynamics. *Nature*, 261(5560):459–467.
- [McCoy, 1995] McCoy, E. (1995). Memory effect in nickel-cadmium batteries. *Journal of Power Sources*, 56(2):33–37.
- [Merryman, 1954] Merryman, J. H. (1954). The authority of authority: What the california supreme court said in 1954 about stare decisis. *Stanford Law Review*, 6(3):613–619.
- [Merton, 1974] Merton, R. C. (1974). On the pricing of corporate debt: The risk structure of interest rates. *The Journal of finance*, 29(2):449–470.
- [Odibat and Momani, 2006] Odibat, Z. M. and Momani, S. (2006). Application of variational iteration method to nonlinear differential equations of fractional order. *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 7(1):27–34.
- [Ott, 2002a] Ott, E. (2002a). *Chaos in Dynamical Systems*. Cambridge University Press, 2nd edition.
- [Ott, 2002b] Ott, E. (2002b). *Chaos in Dynamical Systems*. Cambridge University Press.
- [Peters, 1991] Peters, E. E. (1991). *Chaos and Order in the Capital Markets: A New View of Cycles, Prices, and Market Volatility*. John Wiley & Sons.
- [Podlubny, 1998] Podlubny, I. (1998). *Fractional Differential Equations*. Academic Press.
- [Podlubny, 1999] Podlubny, I. (1999). *Fractional Differential Equations*. Academic Press.
- [Poincaré, 1892] Poincaré, H. (1892). *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*. Gauthier-Villars.
- [Shiller, 2000] Shiller, R. J. (2000). *Irrational exuberance*. Princeton University Press.
- [Sprott, 2003] Sprott, J. C. (2003). *Chaos and Time-Series Analysis*. Oxford University Press.
- [Strogatz, 2018] Strogatz, S. H. (2018). *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*. Westview Press.
- [University,] University, B. Matlab tutorial on van der pol oscillator. <https://www.cfm.brown.edu>. Accessed: 2024-08-10.
- [van der Pol, 1926] van der Pol, B. (1926). On relaxation-oscillations. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 2(11):978–992.
- [Vasicek, 1977] Vasicek, O. A. (1977). An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of financial economics*, 5(2):177–188.
- [Vincent et al., 1997] Vincent, E., Hammann, J., Ocio, M., Bouchaud, J.-P., and Cugliandolo, L. (1997). Slow dynamics and aging in spin glasses. *Lecture Notes in Physics*, 492:184–219.

- [Wolf et al., 1985] Wolf, A., Swift, J. B., Swinney, H. L., and Vastano, J. A. (1985). Determining lyapunov exponents from a time series. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 16(3):285–317.
- [Özen Zengin et al., 2008] Özen Zengin, F., Kaya, M. O., and Demirbağ, S. A. (2008). Application of parameter expanding methods to nonlinear oscillators with discontinuities. *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 9(3):267–270.



A. GENİŞLETİLMİŞ MATEMATİKSEL TÜRETİMLER

A.1. Caputo Fraktal Türevinin Türetilmesi

Bir $f(t)$ fonksiyonunun α derecesindeki Caputo fraktal türevi şu şekilde tanımlanır:

$${}^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{f'(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau, \quad 0 < \alpha < 1$$

Bu bölümde, Caputo türevinin detaylı türetimi sunulmaktadır ve Riemann-Liouville fraktal integrali tanımından başlanarak türetilmiştir:

$$I^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau, \quad \alpha > 0$$

Caputo türevini türetmek için, Riemann-Liouville fraktal integrali ile standart türev arasındaki ilişkiyi dikkate alıyoruz:

$${}^C D_t^\alpha f(t) = I^{1-\alpha} \left(\frac{d}{dt} f(t) \right)$$

Bu denkleme $I^{1-\alpha}$ integral ifadesini yerine koyduğumuzda:

$${}^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{f'(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau$$

Bu, Caputo fraktal türevinin türetimini tamamlar.

A.2. Adi Diferansiyel Denklemlerin Fraktal Diferansiyel Denklemlere Dönüştürülmesi

Adi diferansiyel denklemi ele alalım:

$$\frac{dx}{dt} = gz + (y-a)x$$

Bu denklemi Caputo türevini kullanarak bir fraktal diferansiyel denkleme dönüştürmek için, adi türevi fraktal türev ${}^C D_t^\alpha$ ile değiştiriyoruz:

$${}^C D_t^\alpha x(t) = gz(t) + (y(t) - a)x(t)$$

Bu dönüşüm, modeldeki bellek etkilerini, fraktal derece α ile yakalayarak sisteme

dahil eder.

A.3. Kestir-Doğrula Yönteminin Türetilmesi

fraktal diferansiyel denklemleri çözmek için kullanılan kestir-doğrula yöntemi, fonksiyonun bir sonraki zaman adımındaki değerini tahmin etmeyi ve ardından bu tahmini düzeltmeyi içerir. Tahmin adımı Adams-Bashforth yöntemi kullanılarak yapılır:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \sum_{j=0}^n b_j f(t_j, y_j)$$

Düzeltilme adımı ise Adams-Moulton yöntemi kullanılarak bu tahmini iyileştirir:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \left[\frac{1}{2} f(t_{n+1}, y_{n+1}) + \sum_{j=0}^n a_j f(t_j, y_j) \right]$$

Burada, b_j ve a_j katsayıları, Caputo türevinin ayrıklaştırılmasından türetilmiş olup, yöntemin fraktal diferansiyel denklemler için hem kararlı hem de doğru olmasını sağlar.

B. GENİŞLETİLMİŞ BÖLÜM İÇİN KAYNAKLAR

Bu tezde ele alınan konuları daha fazla keşfetmek isteyen okuyucular için aşağıdaki kaynaklar önerilmektedir:

- **Fraktal Analiz:** - I. Podlubny, *Fractional Differential Equations*, Academic Press, 1998. - R. Gorenflo and F. Mainardi, *The Caputo Fractional Derivative: Origins, Properties, and Applications*, Fractional Calculus and Applied Analysis, 1997.
- **Diferansiyel Denklemler:** - M. Braun, *Differential Equations and Their Applications*, Springer, 1983. - W.E. Boyce and R.C. DiPrima, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, John Wiley & Sons, 2012.
- **Sayısal Metodlar:** - J.D. Lambert, *Numerical Methods for Ordinary Differential Systems: The Initial Value Problem*, Wiley, 1991. - R.L. Burden and J.D. Faires, *Numerical Analysis*, Brooks Cole, 2010.

C. ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı: Oz** K1***
Doğum Tarihi: *1/**/***0
Doğum Yeri: Bi***s, Türkiye
Uyruğu: Türkiye Cumhuriyeti
Telefon Numarası: +90 530 *****
E-posta: oza*****@***.com
Yabancı Diller: İngilizce (Yeterlilik: 75/100, 2018)

Eğitim

- **Lisans: Fizik**, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, 2018
- **Yüksek Lisans: Fizik**, Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi, 2024

Yüksek Lisans Tezi

Başlık: Fraktal Kalkülüs ile Doğrusal Olmayan Finansal Sistemlerin İncelenmesi
Danışman: Doç. Dr. Görkem Oylumluoğlu

Yayınlar

Uluslararası Hakemli Dergiler

- O. Kıyıkçı, K. Kaçmaz, M. Tuğrul, G. Oylumluoğlu, *A Spin-1 Ising Model Investigation of the Magnetic System within the Context of Generalized Statistical Mechanics*, Usak University Journal of Engineering Sciences, 6(2), 67-73, 2023.
DOI: <https://doi.org/10.47137/uujes.1300516><https://doi.org/10.47137/uujes.1300516>
- D. A. Kara, O. Kıyıkçı, G. Oylumluoğlu, *Effect of Magnetic Field on Germanium P-N Homojunction*, Mugla Journal of Science and Technology, 7(2), 1-5, 2021.
DOI: <https://doi.org/10.22531/muglajsci.987733><https://doi.org/10.22531/muglajsci.987733>

Posterler ve Sözlü Sunumlar

- O. Kıyıkçı, *Production of Composite Materials Using Lignin and Waste Fabrics, and Cost Analysis.*
- O. Kıyıkçı, *Characterization of Silicon Solar Cells and Determination of Optimal Device Parameters Through Numerical Simulation Assistance.*

- O. K1y1kc1, *Fabrication and Characterization of Polycrystalline Silicon Solar Cells Created on Ceramic Substrates via Aluminum-Induced Crystallization*.
- O. K1y1kc1, *The Analysis of Nonlinear Financial Systems Using Fractional Calculus*, Turkish Physical Society 39th International Physics Congress, August 31-September 4, 2023, Bodrum, Turkey.
- O. K1y1kc1, *Advanced Methodologies in Solving Fractional Differential Equations: Applications in Dynamic Systems and Financial Models*, Turkish Physical Society 40th International Physics Congress, September 2-6, 2024, Bodrum, Turkey.

