

T.C.
KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

İSTATİSTİKSEL BİR MATRİSİN BAZI VARYANTLARININ
FAKTÖRİZASYONLARI

Harun ŞAHİN

AĞUSTOS - 2024

Harun ŞAHİN tarafından hazırlanan "İSTATİSTİKSEL BİR MATRİSİN BAZI VARYANTLARININ FAKTÖRİZASYONLARI" adlı tez çalışması, aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Gonca KIZILASLAN YILDIRIM

İmza

Matematik Anabilim Dalı, Kırıkkale Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

Başkan: Doç. Dr. Nil MANSUROĞLU

İmza

Matematik Anabilim Dalı, Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

Üye: Dr. Öğr. Üyesi Semih YILMAZ

İmza

Aktüerya Bilimleri Anabilim Dalı, Kırıkkale Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

Tez Savunma Tarihi:

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

Prof. Dr. Recep ÇALIN

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYANI

Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Harun ŞAHİN

12.08.2024

ÖZET

İSTATİSTİKSEL BİR MATRİSİN BAZI VARYANTLARININ FAKTÖRİZASYONLARI

ŞAHİN, Harun

Kırıkkale Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Gonca KIZILASLAN YILDIRIM

Ağustos 2024, 39 sayfa

Matris teorisi, uygulamalı matematik, bilgisayar bilimi, mühendislik, istatistik ve daha birçok disiplinde yaygın olarak kullanılmaktadır. Matris teorisinde ve doğrusal cebirde birçok özel ve kullanışlı matris bulunmaktadır. Helmert matrisi bu özel matrislerden birisidir. Helmert matrisi özellikle varyans analizi için matematiksel istatistikte kullanılan bir matristir. Bu tezde, Helmert matrisi ile ilişkili olan sekiz ortogonal matris tanımlanmıştır. Tanımlanan matrislerin LU ayrışmaları, L ve U matrislerinin girişlerinin kapalı formüllerinin açık bir şekilde yazılmasıyla elde edilmiştir. Ayrıca, elde edilen matrisleri bazı köşegen matrislerle ilişkilendirerek tanımlanan matrislerin yeni bir faktörizasyonu sunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Matrislerin faktörizasyonu, Matrisin tersi, Helmert matrisi, Ortogonal matrisler

ABSTRACT

FACTORIZATIONS OF SOME VARIANTS OF A STATISTICAL MATRIX

ŞAHİN, Harun

Kırıkkale University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics, Master Thesis

Supervisor: Dr. Öğr. Üyesi Gonca KIZILASLAN YILDIRIM

August 2024, 39 pages

Matrix theory is widely used in applied mathematics, computer science, engineering, statistics, and many other disciplines. There are many special and useful matrices in matrix theory and linear algebra. One of these special matrices is the Helmert matrix. The Helmert matrix is particularly used in mathematical statistics for variance analysis. In this thesis, eight orthogonal matrices associated with the Helmert matrix are defined. The LU decompositions of these matrices are obtained by explicitly writing the closed-form formulas of the entries of the L and U matrices. Additionally, a new factorization of the defined matrices is presented by relating them to certain diagonal matrices.

Key Words: Factorization of matrices, Matrix inverse, Helmert matrix, Orthogonal matrices

TEŞEKKÜR

İlk danışman hocamın vefatından sonra yüksek lisans döneminde tanımıő olduğum ancak uzun yıllardır hocam gibi hissettiğim, benden desteğini ve emeğini esirgemyen, aklıma takılan her soruda rahatça ulaőabildiđim danışman hocam Dr. Öğr. Üyesi Gonca KIZILASLAN YILDIRIM'a anlayıő ve tevazusundan dolayı sonsuz teşekkür ederim. Lisans eğitimi döneminden de hocam olan ilk danıőmanım, rahmetli Prof. Dr. İlker AKKUŐ hocamı ve yine lisans dönemi hocalarımdan rahmetli Prof. Dr. Recep ŞAHİN hocamı sayđı ve minnetle anıyorum. Desteklerini hep hissettiğim lisans ve yüksek lisans hocalarımdan Bölüm Baőkanımız Prof. Dr. Ali OLGUN'a, Prof. Dr. Halit GÜNDOĐAN, Prof. Dr. Hakan ŐİMŐEK, Prof. Dr. Ali ARAL ve tüm Matematik Bölümü hocalarıma teőekkürü bir borç bilirim.

Beni büyüten, hep destek olan anneme ve babama, kardeőlerime, bana her zaman destek olan, kararlarımın arkasında duran sevgili eőim Ezgi ve oğlum Mehmet Alp'e ve son olarak maddi desteğinden dolayı Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araőtırma Kurumu'na (TÜBİTAK) teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

ÖZET	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	vii
SİMGELER DİZİNİ	ix
1. GİRİŞ	1
1.1 Kaynak Özetleri	2
1.2 Çalışmanın Amacı	2
2. MATERYAL VE YÖNTEM	3
2.1 Matris İşlemleri	3
2.2 Helmert Matrisi	5
2.2.1 Helmert Matrisinin Bazı Özellikleri	7
2.2.2 Helmert Matrisinin Bazı q -genelleştirmeleri	8
3. İSTATİSTİKSEL BİR MATRİSİN BAZI VARYANTLARININ FAKTÖ- RİZASYONLARI	12
3.1 Helmert Matrisinin Bazı Varyantları	12
3.2 Helmert Matrisinin Varyantlarının Çarpanlarına Ayrılması	17
3.3 İspatlar	23
3.3.1 H_1 Matrisi	24
3.3.2 H_2 Matrisi	26
3.3.3 H_3 Matrisi	29

3.3.4 H_4 Matrisi	32
4. TARTIŞMA VE SONUÇ	35
KAYNAKLAR	36
ÖZGEÇMİŞ	39



SİMGELER DİZİNİ

\mathbb{N}	Doğal sayılar kümesi
\mathbb{R}	Reel sayılar kümesi
\mathbb{Z}	Tam sayılar kümesi
\mathbb{Z}^-	Negatif Tam sayılar kümesi
\mathbb{Z}^+	Pozitif Tam sayılar kümesi
I	Birim matris
A^{-1}	A matrisinin tersi
A^T	A matrisinin transpozu
$[n]_q$	q -tamsayı n
H_1	Klasik Helmert matrisi
H_q	Helmert matrisinin q -analogu
H'_q	Helmert matrisinin modifiye q -analogu
R	Yansıma matrisi

1 . GİRİŞ

Matris teorisinde birçok kullanışlı ve özel matris vardır, [1, 3, 4, 15, 17–19, 22, 23, 27]. Bu matrislerden birisi Pascal matrisidir. Pascal matrislerine dayanan cebirsel yaklaşım, cebirsel geometriden optimizasyona, matris teorisine ve kombinatoriğe kadar pek çok matematik alanında önemli bir yere sahiptir. Pascal matrislerinin belirli genelleştirmeleri birçok yazar tarafından detaylı bir şekilde tanıtılmış ve incelenmiştir, [3, 5, 6, 8–10, 13, 28–30].

Pascal üçgeninin farklı matris temsilleri de çağdaş literatürde sıkça karşılaşılan konulardandır. Pascal üçgeninin matris temsilleri bağımsız matematiksel varlıklar olarak sistemli bir şekilde incelenmiştir ve $n \geq 2$ doğal sayısı için Pascal üçgeninin n seviyesine genişletilmesinden elde edilen $n+1$ düzenindeki on iki üçgensel matris formundan oluşan, $G_{1,n}, G_{2,n}, \dots, G_{12,n}$, G -matrisleri ele alınmıştır, [7]. Örneğin $G_{1,n}$ ve $G_{12,n}$ ile başlayarak, Tanım 1.0.1 ile verilen R permutasyon matrisinin sol ve sağ işlemleriyle matris transpozisyonunu kullanarak kalan on bir G -matris elde edilebilmektedir.

Tanım 1.0.1 ([7]). $n + 1$ boyutlu $R = [R_{i,j}]$ yansıma matrisi δ_{n-i}^j Kronecker sembolü olmak üzere

$$R_{i,j} = \delta_{n-i}^j, \quad i, j = 0, 1, \dots, n$$

ile tanımlıdır.

Bundan sonra Pascal üçgeninin $2n$ seviyesine genişletilmiş olan n -en büyük romboit alt-blok olarak adlandırılan otuz altı tam matris konfigürasyonu çalışılmıştır, [12].

Helmert matrisi özellikle doğrusal regresyon ve varyans analizi gibi çeşitli istatistiksel analizlerde kullanılan belirli özelliklere sahip kare bir matristir. Adını, Alman jeodezist ve matematikçi Friedrich Robert Helmert'ten almıştır. Helmert matrisi, her bir satırın belirli koşulları sağladığı şekilde yapılandırılmıştır. Genellikle satırları toplamı sıfır olan katsayılar içeren ve belirli bir desene sahip olan koşulları içerir. ANOVA (Varyans Analizi) içinde, Helmert matrisleri kategorik bir değişkenin grupları veya

düzeyleleri arasında kontrast oluşturmak için kullanılır. Bu kontrastlar, grup ortalamaları arasındaki farklılıklar hakkında belirli hipotezleri test etmeye yardımcı olur. Helmert matrisleri ortogonal matrislerdir. Bu özellik istatistiksel prosedürlerde önemlidir, çünkü hesaplamaları basitleştirir ve kontrastların istatistiksel olarak bağımsız olmasını sağlar. Son zamanlarda Helmert matrisinin de çeşitli genelleştirmeleri üzerinde çalışmalar yapılmıştır. Ayrıca, Helmert matrisinin q -analogları üzerine dikkate değer araştırmalar bulunmaktadır, [2, 11, 14, 16, 23, 24, 26].

Doğrusal cebirde matrislerin çarpanlarına ayrılması bir matrisi bazı matrislerin çarpımı olarak temsil etme yöntemi olarak tanımlanır. Tekil değer ayrışımı, LU çarpanlarına ayırma, Cholesky çarpanlarına ayırma gibi çeşitli matris çarpanlarına ayırma türleri vardır. Bu yöntem, özellikle orijinal haliyle çözülmesi zor olan bir problemin çözümünde hesaplamaları basitleştirmek için kullanılır. Pascal matrisi ve Helmert matrisi ile bu matrislerin genelleştirmelerinin çeşitli şekillerde çarpanlara ayrılması üzerinde de çalışmalar yapılmıştır, [2, 3, 5, 6, 8–10, 13, 14, 28–30].

Bu tezde, [7] de verilen yöntemle R yansıma matrisini kullanarak Helmert matrisinin sekiz varyantı tanımlanmıştır. Ayrıca tanımlanan matrislerin çeşitli faktörizasyonları üzerine sonuçlar elde edilmiştir.

1.1. Kaynak Özetleri

Matris teorisinde temel tanım ve kavramlar için [20, 25] kitapları kullanılmıştır. Helmert matrisi ve onun genelleştirmeleri ile ilgili cebirsel özellikler ve çeşitli uygulamalar üzerine yapılan literatür taramasında [2, 11, 14, 16, 23, 24, 26] kaynaklarından faydalanılmıştır.

1.2. Çalışmanın Amacı

Bu tez çalışmasında yansıma matrisini kullanarak klasik Helmert matrisinin bazı varyantlarını tanımlamak ve elde edilen matrislerin çeşitli faktörizasyonlarını elde etmek amaçlanmıştır.

2 . MATERYAL VE YÖNTEM

2.1. Matris İşlemleri

A bir halka, $X = \{1, 2, \dots, m\}$ ve $Y = \{1, 2, \dots, n\}$ olsun. $X \times Y$ kümesinden A halkasına giden bir fonksiyona, A halkası üzerinde $m \times n$ boyutlu bir matris denir. $M : X \times Y \rightarrow A$ fonksiyonu verilsin. Her $(i, j) \in X \times Y$ için $M(i, j) = a_{ij}$ olsun. A halkasının $\{a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1}, a_{12}, a_{22}, \dots, a_{m2}, \dots, a_{mn}\}$ şeklinde bir alt kümesi verildiğinde M fonksiyonu,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

biçiminde veya kısaca $M = [a_{ij}]_{m \times n}$ biçiminde yazılır. $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$ sıralı n -lisine M matrisinin i -yinci satırı denir. $(a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})$ sıralı m - lisine M matrisinin j -yinci sütunu denir.

M matrisi $m \times n$ boyutlu bir matris olsun. M matrisinin satırlarını sütunlara veya sütunlarını satırlara dönüştürerek elde edilen matrise M matrisinin devriği (transpoz) denir ve M^T ile gösterilir.

Bir matrisin satır sayısı, sütun sayısına eşitse bu matrise kare matris denir. $n \times n$ boyutlu bir kare matrise kısaca n -boyutlu matris denir. n -boyutlu bir matriste $(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$ n ' lisine matrisin köşegeni denir.

Bir kare matrisin ana köşegen dışında kalan girişlerinin hepsi sıfır ise bu matrise bir köşegen matris denir. n -boyutlu bir köşegen matrisin köşegenindeki elemanların tümü 1 ise, bu matrise n -boyutlu birim matris denir ve I_n ile gösterilir.

M , n -boyutlu bir kare matris olsun. $MN = I_n$ ve $NM = I_n$ olacak şekilde bir N matrisi varsa, bu N matrisine M matrisinin çarpmaya göre tersi denir ve M^{-1} ile gös-

terilir. Bir kare matrisin çarpmaya göre tersi varsa bu durumda matrise tersinir matris (regüler matris) aksi durumda tekil matris (singüler matris) denir.

Doğrusal cebirde, girişleri reel sayılar olan M kare matrisinin sütunları ve satırları dik birim vektörlerden oluşuyor ise bu matrise bir ortogonal matris denir. Dolayısıyla M matrisinin ortogonal olması için gerek ve yeter şart $MM^T = M^T M = I$ eşitliğinin sağlanmasıdır, [25].

A matrisi $m \times n$ ve B matrisi $p \times q$ boyutlu iki matris ise

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

şeklindeki $(m+p) \times (n+q)$ boyutlu blok matrise A ile B matrislerinin direkt toplamı denir ve $A \oplus B$ ile gösterilir.

F bir cisim, $n \in \mathbb{Z}^+$ ve $1 \leq i, j \leq n$ için $r_{ij} \in F$ olmak üzere

$$M(i,j) = \begin{cases} r_{ij}, & i \leq j \\ 0_F, & i > j \end{cases}$$

ile tanımlı M matrisine F cismi üzerinde üst üçgensel matris,

$$M(i,j) = \begin{cases} r_{ij}, & i \geq j \\ 0_F, & i < j \end{cases}$$

ile tanımlı ise, M matrisine F cismi üzerinde alt üçgensel matris denir, [20].

Bir matrisin alt üçgensel matris L ve üst üçgensel matris U cinsinden çarpanlarına ayrılmasına LU çarpanlarına ayırma denir. Bu çarpanlara ayırma Gauss eliminasyonu ile elde edilebilir. Çarpım bazen bir permütasyon matrisi P içerir ve PLU çarpımına dönüşür. Eğer L birim ana köşegenli bir alt üçgensel matris ve U bir üst üçgensel matris ise matrisin LU çarpanlarına ayrılması tektir.

2.2. Helmert Matrisi

Tanım 2.2.1. $H_n = [h_{ij}]$ mertebesi n olan bir ortogonal matris ve

$$j > i > 1 \text{ için } h_{ij} = 0$$

oluyorsa H_n matrisine standart Helmert matrisi denir.

Başka bir deyişle, bir standart Helmert matrisinde, ilk satırın altında ve ana köşegen üstünde yer alan üçgen içindeki elemanların hepsi sıfırdır.

Bir $n \times n$ ortogonal matris satırlarının ve sütunlarının yer değişimi, transpozisyonu ve satırlarının işaret değişimi ile bir standart Helmert matrisine dönüştürülebiliyorsa, bir genelleştirilmiş Helmert matrisi olarak adlandırılır. Eğer ayrıca $w_j > 0$ ve $\sum_{j=1}^n w_j = 1$ olmak üzere

$$h_{1j} = \sqrt{w_j}$$

ise H matrisine katı anlamda Helmertian denir. Dolayısıyla, ilk satırın elemanlarından biri sıfır olduğunda matris katı anlamda Helmertian olmayacaktır. İstatistikte, genellikle katı anlamda Helmertian matrisleri kullanılır. Helmert

$$h_{1j} = \sqrt{w_j} = n^{-\frac{1}{2}}$$

olan bir matrisi ele almıştır, [17]. Irwin ise daha genel bir pozitif w_j kümesi ile çalışmıştır, [19].

Örnek 2.1. n -boyutlu klasik Helmert matrisi

$$H_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{n}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{n}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & -\frac{3}{\sqrt{12}} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} & \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} & \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} & \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} & \cdots & -\frac{n-1}{\sqrt{n(n-1)}} \end{bmatrix}$$

şeklindedir, [17].

Örnek 2.2. (i) Birim matris standart bir Helmert matrisidir ancak katı anlamda Hermertian matrisi değildir.

(ii) $n = 2$ için,

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

matrisleri genellikle standart Helmert matrisleri olarak kabul edilir.

(iii)

$$\begin{bmatrix} 0.64 & 0.48 & 0.6 \\ 0.6 & -0.8 & 0 \\ 0.48 & 0.36 & -0.8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

matrisleri katı anlamda Hermertian matrisleridir.

(iv) Permutasyon matrisleri genelleştirilmiş Helmert matrisleridir; aynı şekilde, köşegen elemanları ± 1 olan köşegen matrisler de Helmert matrisleridir. Standart Helmert matrislerinin transpozları da genelleştirilmiş Helmert matrisleridir.

$D = [d_{ij}]$ matrisi köşegen elemanları $d_{ii}^2 = n, 1.2, 2.3, \dots, n.(n-1)$ olan bir köşegen matris olsun. Bu durumda Helmert'in orijinal matrisi

$$H_1 = D^{-1}H_0 = D^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & -(n-1) \end{bmatrix}$$

biçiminde tanımlanabilir. H_1 matrisi, H_0 matrisinin satırları karşılıklı olarak ortogonal olduğu için ortogonal bir matristir. Ayrıca d_{ii} girişleri H_0 matrisinin i -yinci satırının

normu olduğu için H_1 matrisinin her satırı birim norma sahiptir. İlk satırın her girişi $n^{-1/2}$ olan tüm ortogonal matrisler arasında kolay gösterilenlerden ve hesaplananlardan birisi H_1 matrisi olduğundan Helmert matrisi istatistikte sıkça kullanılır.

2.2.1. Helmert Matrisinin Bazı Özellikleri

İki koordinat eksenini düzlemindeki dönüşleri temsil eden matrisler

$$R_{k+1} = \begin{bmatrix} \cos \theta_k & 0^T & \sin \theta_k \\ 0 & 1_{k-2} & 0 \\ -\sin \theta_k & 0^T & \cos \theta_k \end{bmatrix} \oplus 1_{n-k} \quad (2.1)$$

olarak yazılır. $n = k$ durumunda 1_0 silinir. Bu durumda n -boyutlu standart Helmert matrisinin bir faktörizasyonu (2.1) ile verilen matrisler yardımıyla elde edilir.

Teorem 2.1. Her standart n -boyutlu Helmert matrisi $(n - 1)$ parametreye bağlıdır ve bu parametreler belirli dönüş açıları olarak alınabilir.

Teorem 2.1 kullanılırsa standart n -boyutlu Helmert matrisi H_1

$$H_1 = R_n^T R_{n-1}^T \dots R_2^T$$

şeklinde yazılır.

Herhangi bir n -boyutlu ortogonal matrisin $n(n - 1)/2$ parametrelerinin gösterilebileceği bir temsil bulmak da oldukça önemlidir.

Lemma 1 ([23]). Herhangi bir n -boyutlu ortogonal matris $A_n = [a_{ij}]$, birim ve boyutu $(n - 1)$ olan bir ortogonal matrisin direkt toplamı ile ilk satır elemanları a_{1j} olan bir Helmert matrisinin çarpımı olarak temsil edilebilir.

Dolayısıyla herhangi bir n -boyutlu ortogonal matris A_n ,

$$A_n = (1 \oplus A_{n-1})H_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0^T & A_{n-1} \end{bmatrix} H_n$$

biçiminde yazılır. Lemma 1 kullanılırsa herhangi bir n -boyutlu ortogonal matrisin standart Helmert matrisleri kullanılarak elde edilen bir faktörizasyonuna ulaşılır.

Teorem 2.2 ([23]). H_2, H_3, \dots, H_n sırasıyla $2, 3, \dots, n$ boyutlu standart Helmert matrisleri olsun. Bu durumda herhangi bir n -boyutlu ortogonal A_n matrisi

$$A_n = (\mathbf{1}_{n-2} \oplus H_2)(\mathbf{1}_{n-3} \oplus H_3) \dots (1 \oplus H_{n-1})H_n$$

şeklinde faktörize edilebilir.

Teorem 2.2 de verilen H_k matrislerine Teorem 2.1 uygulanırsa buradaki temel dönel matrislerin sayısı $\frac{n(n-1)}{2}$ olup her biri tek bir parametre ile temsil edilebilir. Böylelikle Teorem 2.3 elde edilir.

Teorem 2.3. Boyutu n olan herhangi bir ortogonal matris her biri bir çift koordinat eksenini düzleminde bir dönme olan $\frac{n(n-1)}{2}$ tane matrisin çarpımı olarak yazılabilir.

2.2.2. Helmert Matrisinin Bazı q -genelleştirmeleri

Son zamanlarda Helmert matrisinin genelleştirmeleri üzerinde çalışılmış ve Helmert matrisinin iki farklı q -analogu olan H_q ve H'_q matrisleri tanımlanmıştır, [2, 14]. Bu bölümde ele alınan matrisler n -boyutlu kare matrislerdir.

\mathcal{R} birimli ve birleşmeli bir halka ve q bu halkanın bir elemanı olsun. $n \in \mathbb{N}$ için quantum tamsayı n , veya basitçe q -tamsayı n ,

$$[n]_q = \sum_{i=0}^{n-1} q^i$$

olarak tanımlanır. $(-n)$ için ise q -tamsayı $[-n]_q = -\sum_{i=1}^n q^{-i}$ şeklindedir. Dolayısıyla $n \in \mathbb{Z}^-$ için $[n]_q = -q^n[-n]_q$ yazılabilir. Özel olarak, eğer $1 - q$ tersinir ise,

$$[n]_q = \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

elde edilir. Her $m, n \in \mathbb{Z}$ için

$$[m + n]_q = [m]_q + q^m[n]_q \quad \text{ve} \quad [mn]_q = [m]_q[n]_{q^m}$$

olarak yazılabilir. $\mathcal{R} = \mathbb{Z}$ ve $q = 1$ için $[n]_q$ sayısı klasik n tamsayısı olur.

$k \in \mathbb{Z}$ ve $0 \neq q \in \mathbb{R}$ ve $[k]_q > 0$ olsun. Girişleri x ve y değişkenleri ile $[k]_q > 0$

elemanlarından oluşan H_q matrisi

$$H_q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{[n]_q}} & \frac{y}{\sqrt{[n]_q}} & \frac{y^2}{\sqrt{[n]_q}} & \frac{y^3}{\sqrt{[n]_q}} & \cdots & \frac{y^{n-1}}{\sqrt{[n]_q}} \\ \frac{x}{\sqrt{[2]_q}} & -\frac{xy}{\sqrt{[2]_q}} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{x^2}{\sqrt{[6]_q}} & \frac{x^2y}{\sqrt{[6]_q}} & -\frac{[2]_q x^2 y^2}{\sqrt{[6]_q}} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{x^3}{\sqrt{[12]_q}} & \frac{x^3y}{\sqrt{[12]_q}} & \frac{x^3 y^2}{\sqrt{[12]_q}} & -\frac{[3]_q x^3 y^3}{\sqrt{[12]_q}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{x^{n-1}}{\sqrt{[n(n-1)]_q}} & \frac{x^{n-1}y}{\sqrt{[n(n-1)]_q}} & \frac{x^{n-1}y^2}{\sqrt{[n(n-1)]_q}} & \frac{x^{n-1}y^3}{\sqrt{[n(n-1)]_q}} & \cdots & -\frac{[n-1]_q x^{n-1} y^{n-1}}{\sqrt{[n(n-1)]_q}} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

şeklinde tanımlıdır, [2]. Dolayısıyla H_q matrisinin ilk satırı

$$\left[\frac{1}{\sqrt{[n]_q}}, \frac{y}{\sqrt{[n]_q}}, \frac{y^2}{\sqrt{[n]_q}}, \cdots, \frac{y^{n-1}}{\sqrt{[n]_q}} \right]$$

ve $2 \leq i \leq n$ için i -yinci satırı

$$\left[\underbrace{\frac{x^{i-1}}{\sqrt{[i(i-1)]_q}}, \cdots, \frac{x^{i-1}y^{j-2}}{\sqrt{[i(i-1)]_q}}}_{i-1 \text{ terim}}, -\frac{[i-1]_q x^{i-1} y^{j-1}}{\sqrt{[i(i-1)]_q}}, \underbrace{0, \cdots, 0}_{n-i \text{ kere}} \right]$$

şeklinindedir.

Teorem 2.4 ([2]). $J = [x_{ij}]$ matrisinin girişleri $x_{11} = 0$, $x_{i1} = \frac{\sqrt{[n]_q} x^{i-1}}{\sqrt{[i(i-1)]_q}}$ ve $j > 1$ için $x_{ij} = 0$ olsun. $U = [u_{ij}]$ matrisinin girişleri ise

$$\begin{cases} u_{ii} = -\frac{(1+[i-1]_q)x^{i-1}y^{i-1}}{\sqrt{[i(i-1)]_q}}, & i > 1, \\ u_{1j} = \frac{y^{j-1}}{\sqrt{[n]_q}}, & 1 \leq j \leq n, \\ u_{ij} = -\frac{x^{i-1}y^{j-1}}{\sqrt{[i(i-1)]_q}}, & j > i \geq 2. \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. $L = I_n + J$ olmak üzere $H_q = LU$ elde edilir.

Bir matrisin LU ayrışımı, onun yapısal özellikleri hakkında birçok bilgi sağlar. Örneğin, $H_q = LU$ olduğundan $\det(H_q) = \det(U)$ olur. Dolayısıyla Teorem 2.4 kullanılırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 1.

$$\det(H_q) = \frac{1}{\sqrt{[n]_q}} \prod_{i=2}^n \left(\frac{(1 + [i-1]_q)x^{i-1}y^{i-1}}{\sqrt{[i(i-1)]_q}} \right).$$

Eşitlik (2.2) ile verilen matrisin köşegen girişlerine bakıldığında klasik Helmert matrisinin köşegeninde görülen sayıların q -sayı formlarının alındığı görülmektedir. Helmert matrisinin bir diğer q -analogu Eşitlik (2.2) de verilen matristen yola çıkılarak tanımlanmıştır, [14]. H_q matrisinin köşegen girişlerinde pay kısmında görülen sayıları q -tamsayı olarak değil de klasik n -tamsayıları olarak

$$H'_q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{[n]_q}} & \frac{y}{\sqrt{[n]_q}} & \frac{y^2}{\sqrt{[n]_q}} & \frac{y^3}{\sqrt{[n]_q}} & \cdots & \frac{y^{n-1}}{\sqrt{[n]_q}} \\ \frac{x}{\sqrt{[2]_q}} & -\frac{xy}{\sqrt{[2]_q}} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{x^2}{\sqrt{[6]_q}} & \frac{x^2y}{\sqrt{[6]_q}} & -\frac{2x^2y^2}{\sqrt{[6]_q}} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{x^3}{\sqrt{[12]_q}} & \frac{x^3y}{\sqrt{[12]_q}} & \frac{x^3y^2}{\sqrt{[12]_q}} & -\frac{3x^3y^3}{\sqrt{[12]_q}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{x^{n-1}}{\sqrt{[n(n-1)]_q}} & \frac{x^{n-1}y}{\sqrt{[n(n-1)]_q}} & \frac{x^{n-1}y^2}{\sqrt{[n(n-1)]_q}} & \frac{x^{n-1}y^3}{\sqrt{[n(n-1)]_q}} & \cdots & -\frac{(n-1)x^{n-1}y^{n-1}}{\sqrt{[n(n-1)]_q}} \end{bmatrix}$$

matrisi tanımlanır, [14]. H'_q matrisi Helmert matrisinin modifiye q -analogu olarak adlandırılır.

Teorem 2.5 ([14]). H'_q matrisinin LU ayrışımı

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{\sqrt{[n]_q}x}{\sqrt{[2]_q}} & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{\sqrt{[n]_q}x^2}{\sqrt{[6]_q}} & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{\sqrt{[n]_q}x^3}{\sqrt{[12]_q}} & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\sqrt{[n]_q}x^{n-1}}{\sqrt{[n(n-1)]_q}} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{[n]_q}} & \frac{y}{\sqrt{[n]_q}} & \frac{y^2}{\sqrt{[n]_q}} & \frac{y^3}{\sqrt{[n]_q}} & \cdots & \frac{y^{n-1}}{\sqrt{[n]_q}} \\ 0 & -\frac{2yx}{\sqrt{[2]_q}} & -\frac{y^2x}{\sqrt{[2]_q}} & -\frac{y^3x}{\sqrt{[2]_q}} & \cdots & -\frac{y^{n-1}x}{\sqrt{[2]_q}} \\ 0 & 0 & -\frac{3y^2x^2}{\sqrt{[6]_q}} & -\frac{y^3x^2}{\sqrt{[6]_q}} & \cdots & -\frac{y^{n-1}x^2}{\sqrt{[6]_q}} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{4y^3x^3}{\sqrt{[12]_q}} & \cdots & -\frac{y^{n-1}x^3}{\sqrt{[12]_q}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{y^{n-1}x^{n-1}}{\sqrt{[n(n-1)]_q}} \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir.

Teorem 2.5 kullanılarak H'_q matrisinin determinanı da hesaplanabilir.

Sonuç 2.

$$\det(H'_q) = \frac{n!}{\sqrt{[n]_q}} \prod_{i=2}^n \left(\frac{x^{i-1}y^{i-1}}{\sqrt{[i(i-1)]_q}} \right).$$

H_q ve H'_q matrislerinde $q = 1$ ve $x = y = 1$ alınrsa H_1 klasik Helmert matrisinin elde edileceği kolaylıkla görülebilir.



3 . İSTATİSTİKSEL BİR MATRİSİN BAZI VARYANTLARININ FAKTÖRİZASYONLARI

Bu bölümde, sekiz kare matris tanımlanacaktır. Bu matrislerden birisi klasik Helmert matrisi olup diğer matrisler Helmert matrisi ile doğrudan ilişkilidir, [21]. Bölüm boyunca ele alınan matrisler n -boyutlu kare matrislerdir.

3.1. Helmert Matrisinin Bazı Varyantları

n -boyutlu klasik Helmert matrisi

$$H_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{n}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{n}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & -\frac{3}{\sqrt{12}} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} & \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} & \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} & \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} & \cdots & -\frac{n-1}{\sqrt{n(n-1)}} \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlıdır. H_1 matrisinin ilk satırı

$$\left[\frac{1}{\sqrt{n}} , \frac{1}{\sqrt{n}} , \frac{1}{\sqrt{n}} , \cdots , \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$$

olup $2 \leq i \leq n$ için i -yinci satırı

$$\left[\underbrace{\frac{1}{\sqrt{i(i-1)}} , \cdots , \frac{1}{\sqrt{i(i-1)}}}_{i-1 \text{ kere}} , -\frac{i-1}{\sqrt{i(i-1)}} , \underbrace{0 , \cdots , 0}_{n-i \text{ kere}} \right]$$

biçimindedir. R matrisi Tanım 1.0.1 de verilen yansıma matrisi ve

$$\begin{aligned}
f_1(H_1) &= H_1 \\
f_2(H_1) &= RH_1 = H_2 \\
f_3(H_1) &= H_1R = H_3 \\
f_4(H_1) &= RH_1R = H_4 \\
f_5(H_1) &= H_1^T = H_5 \\
f_6(H_1) &= RH_1^T = H_6 \\
f_7(H_1) &= H_1^TR = H_7 \\
f_8(H_1) &= RH_1^TR = H_8.
\end{aligned}$$

olmak üzere $\mathcal{F} = \{f_i \mid i = 1, \dots, 8\}$ olsun. Bu durumda \mathcal{F} kümesi fonksiyonlarda bileşke işlemi altında bir gruptur. Ayrıca $i = 1, 2, \dots, 8$ için H_i matrislerinin ortogonal olduğu görülür.

Matrislerin tanımından

$$H_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} & \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} & \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} & \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} & \dots & -\frac{n-1}{\sqrt{n(n-1)}} \\ \frac{1}{\sqrt{(n-1)(n-2)}} & \frac{1}{\sqrt{(n-1)(n-2)}} & \dots & \dots & -\frac{n-2}{\sqrt{(n-1)(n-2)}} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \ddots & \dots & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{n}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{n}} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

matrisinin $n-1$ inci satırı

$$\left[\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$$

olup $1 \leq i \leq n-1$ için H_2 'nin i -yinci satırı

$$\left[\underbrace{\frac{1}{\sqrt{(n-i+1)(n-i)}}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{(n-i+1)(n-i)}} \right]_{n-i \text{ kere}}, \quad -\frac{n-i}{\sqrt{(n-i+1)(n-i)}}, \quad \underbrace{0, \dots, 0}_{i-1 \text{ kere}} \right]$$

şeklindedir.

$$H_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{n}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{n}} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \cdots & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & -\frac{n-2}{\sqrt{(n-1)(n-2)}} & \frac{1}{\sqrt{(n-1)(n-2)}} & \frac{1}{\sqrt{(n-1)(n-2)}} & \frac{1}{\sqrt{(n-1)(n-2)}} & \frac{1}{\sqrt{(n-1)(n-2)}} \\ -\frac{n-1}{\sqrt{n(n-1)}} & \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} & \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} & \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} \end{bmatrix}$$

matrisinin ilk satırı

$$\left[\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}, \cdots, \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$$

şeklinde ve $2 \leq i \leq n$ için i -yinci satırı

$$\left[\underbrace{0, \cdots, 0}_{n-i \text{ kere}}, -\frac{i-1}{\sqrt{i(i-1)}}, \underbrace{\frac{1}{\sqrt{i(i-1)}}, \cdots, \frac{1}{\sqrt{i(i-1)}}}_{i-1 \text{ kere}} \right]$$

formundadır.

$$H_4 = \begin{bmatrix} -\frac{n-1}{\sqrt{n(n-1)}} & \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} & \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} & \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} \\ 0 & -\frac{n-2}{\sqrt{(n-1)(n-2)}} & \frac{1}{\sqrt{(n-1)(n-2)}} & \cdots & \cdots & \frac{1}{\sqrt{(n-1)(n-2)}} \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{n}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{n}} \end{bmatrix}$$

matrisinin n -inci satırı

$$\left[\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}, \cdots, \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$$

şeklinde $1 \leq i \leq n - 1$ için i -yinci satırı

$$\left[\underbrace{0, \dots, 0}_{i-1 \text{ kere}}, -\frac{n-i}{\sqrt{(n-i+1)(n-i)}}, \underbrace{\frac{1}{\sqrt{(n-i+1)(n-i)}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{(n-i+1)(n-i)}}}_{n-i \text{ kere}} \right]$$

biçimindedir.

$$H_5 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{(n-1)(n-2)}} & \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{(n-1)(n-2)}} & \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \vdots & \frac{1}{\sqrt{(n-1)(n-2)}} & \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & 0 & \dots & 0 & -\frac{n-2}{\sqrt{(n-1)(n-2)}} & \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & 0 & \dots & \dots & 0 & -\frac{n-1}{\sqrt{n(n-1)}} \end{bmatrix}$$

matrisinin ilk sütunu

$$\left[\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}} \right]^T$$

şeklinde ve $2 \leq j \leq n$ için j -yinci sütunu

$$\left[\underbrace{\frac{1}{\sqrt{j(j-1)}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{j(j-1)}}}_{j-1 \text{ kere}}, -\frac{j-1}{\sqrt{j(j-1)}}, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-j \text{ kere}} \right]^T$$

formundadır.

$$H_6 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} & 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{n-1}{\sqrt{n(n-1)}} \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & 0 & \dots & \ddots & -\frac{n-2}{\sqrt{(n-1)(n-2)}} & \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & \vdots & 0 & -\frac{n-3}{\sqrt{(n-2)(n-3)}} & \frac{1}{\sqrt{(n-1)(n-2)}} & \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{(n-1)(n-2)}} & \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{(n-1)(n-2)}} & \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} \end{bmatrix}$$

matrisinin ilk sütunu

$$\left[\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}} \right]^T$$

olup $2 \leq j \leq n$ için j -yinci sütunu

$$\left[\underbrace{0, \dots, 0}_{n-j \text{ kere}}, -\frac{j-1}{\sqrt{j(j-1)}}, \underbrace{\frac{1}{\sqrt{j(j-1)}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{j(j-1)}}}_{j-1 \text{ kere}} \right]^T$$

olur.

$$H_7 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} & \frac{1}{\sqrt{(n-1)(n-2)}} & \frac{1}{\sqrt{(n-2)(n-3)}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{n}} \\ \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} & \frac{1}{\sqrt{(n-1)(n-2)}} & \frac{1}{\sqrt{(n-2)(n-3)}} & \dots & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{n}} \\ \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} & \frac{1}{\sqrt{(n-1)(n-2)}} & \vdots & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} & -\frac{n-2}{\sqrt{(n-1)(n-2)}} & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{\sqrt{n}} \\ -\frac{n-1}{\sqrt{n(n-1)}} & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{\sqrt{n}} \end{bmatrix}$$

matrisinin n -inci sütunu

$$\left[\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}} \right]^T$$

formunda olup $1 \leq j \leq n-1$ için j -yinci sütunu

$$\left[\underbrace{\frac{1}{\sqrt{(n-j+1)(n-j)}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{(n-j+1)(n-j)}}}_{n-j \text{ kere}}, -\frac{n-j}{\sqrt{(n-j+1)(n-j)}}, \underbrace{0, \dots, 0}_{j-1 \text{ kere}} \right]^T$$

şeklindedir.

$$H_8 = \begin{bmatrix} -\frac{n-1}{\sqrt{n(n-1)}} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{\sqrt{n}} \\ \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} & -\frac{n-2}{\sqrt{(n-1)(n-2)}} & 0 & \cdots & \cdots & \frac{1}{\sqrt{n}} \\ \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} & \frac{1}{\sqrt{(n-1)(n-2)}} & -\frac{n-2}{\sqrt{(n-2)(n-3)}} & 0 & \cdots & \frac{1}{\sqrt{n}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} & \frac{1}{\sqrt{(n-1)(n-2)}} & \frac{1}{\sqrt{(n-2)(n-3)}} & \cdots & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{n}} \\ \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} & \frac{1}{\sqrt{(n-1)(n-2)}} & \frac{1}{\sqrt{(n-2)(n-3)}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{n}} \end{bmatrix}$$

matrisinin n -inci sütunu

$$\left[\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}, \cdots, \frac{1}{\sqrt{n}} \right]^T$$

olup $1 \leq j \leq n-1$ için j -yinci sütunu

$$\left[\underbrace{0, \cdots, 0}_{j-1 \text{ kere}}, -\frac{n-j}{\sqrt{(n-j+1)(n-j)}}, \underbrace{\frac{1}{\sqrt{(n-j+1)(n-j)}}, \cdots, \frac{1}{\sqrt{(n-j+1)(n-j)}}}_{n-j \text{ kere}} \right]^T$$

şeklindedir.

3.2. Helmert Matrisinin Varyantlarının Çarpanlarına Ayrılması

H_1 matrisinin bir faktörizasyonu Eşitlik (2.2) ile verilmiştir. Benzer bir düşünce ile Helmert matrisinin tanımlanan varyantlarının da bir faktörizasyonu elde edilebilir. Tablo 3.1 de $2 \leq i \leq 4$ için $H_i = D_i^{-1}S_i$ ve $5 \leq i \leq 8$ için $H_i = S_i D_i^{-1}$ koşulunu sağlayan D_i ve S_i matrisleri verilmiştir.

i	D_i^2	S_i
2	$d_{2,ii}^2 = n(n-1), (n-1)(n-2), \dots, 2.3, 1.2, n$	$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & -(n-1) \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -(n-2) & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & -(n-3) & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{matrix}$
3	$d_{3,ii}^2 = n, 1.2, 2.3, \dots, (n-1)(n-2), n(n-1)$	$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & -(n-2) & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -(n-1) & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{matrix}$
4	$d_{4,ii}^2 = n(n-1), (n-1)(n-2), \dots, 2.3, 1.2, n$	$\begin{matrix} -(n-1) & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -(n-2) & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -(n-3) & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{matrix}$
5	$d_{5,ii}^2 = n, 1.2, 2.3, \dots, (n-1)(n-2), n(n-1)$	$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \vdots & \vdots & 0 & -(n-2) & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -(n-1) \end{matrix}$

6	$d_{6,ii}^2 = n, 1.2, 2.3, \dots, (n-1)(n-2), n(n-1)$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -(n-1) \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -(n-2) & 1 \\ 1 & 0 & \vdots & -(n-3) & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & -1 & 1 & \vdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix}$
7	$d_{7,ii}^2 = n(n-1), (n-1)(n-2), \dots, 2.3, 1.2, n$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -1 & 1 \\ 1 & 1 & \vdots & -2 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & -(n-2) & 0 & \vdots & 0 & 1 \\ -(n-1) & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$
8	$d_{8,ii}^2 = n(n-1), (n-1)(n-2), \dots, 2.3, 1.2, n$	$\begin{bmatrix} -(n-1) & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & -(n-2) & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -(n-3) & 0 & \vdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \vdots & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Tablo 3.1: D_i^2 ve S_i matrislerinin açık formları.

Bu bölümde, $i = 1, 2, \dots, 8$ için tanımlanan H_i matrislerinin PLU faktörizasyonları verilecektir. H_1 matrisinin LU faktörizasyonu Teorem 2.5 kullanılarak $q = 1$ için elde edilir. $i = 2, 3, \dots, 8$ durumunda H_i matrislerinin PLU faktörizasyonları da [14] te verilen yöntemle elde edilebilir. Matrislerin faktörizasyonları $P_i L_i U_i$ ile gösterilecektir.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olmak üzere H_2, H_3, H_6, H_7 matrislerinin çarpanlara ayrışımı PL_iU_i formundadır. $i = 2, 3, \dots, 8$ için H_i matrislerinin PL_iU_i faktörizasyonları Tablo 3.2 ve Tablo 3.3 te verilmektedir.

i	L_i
2	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{\sqrt{n(n-1)}}{\sqrt{2}} & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \frac{\sqrt{n(n-1)}}{\sqrt{6}} & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \frac{\sqrt{n(n-1)}}{\sqrt{(n-1)(n-2)}} & 0 & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ \sqrt{(n-1)} & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$
3	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ -\sqrt{n-1} & -\frac{\sqrt{n(n-1)}}{\sqrt{(n-1)(n-2)}} & \cdots & \cdots & -\frac{\sqrt{n(n-1)}}{\sqrt{2}} & 1 \end{bmatrix}$
4	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n(n-1)}} & -\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{(n-1)(n-2)}} & \cdots & \cdots & -\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}} & 1 \end{bmatrix}$
5	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 & \vdots & \vdots & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n-1} & 1 \end{bmatrix}$
6	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \vdots & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 1 \end{bmatrix}$
7	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \vdots & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ -(n-1) & -1 & -1 & \cdots & -1 & 1 \end{bmatrix}$

8	$\begin{bmatrix} \frac{1}{n-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{1}{n-1} & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -\frac{1}{n-1} & -\frac{1}{n-2} & 1 & \vdots & \vdots & 0 \\ -\frac{1}{n-1} & -\frac{1}{n-2} & -\frac{1}{n-3} & 1 & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -\frac{1}{n-1} & -\frac{1}{n-2} & \dots & \dots & -1 & 1 \end{bmatrix}$
---	--

Tablo 3.2: L_i matrislerinin açık formları.

i	U_i
2	$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} & \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} & \dots & \dots & \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} & -\frac{n-1}{\sqrt{n(n-1)}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \dots & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{n-1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \dots & \frac{n-1}{\sqrt{6}} \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & \ddots & -\frac{n-1}{\sqrt{(n-1)(n-2)}} & \frac{n-1}{\sqrt{(n-1)(n-2)}} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \sqrt{n} \end{bmatrix}$
3	$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{n}} & \dots & \dots & \dots & \frac{1}{\sqrt{n}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{(n-1)(n-2)}} & \frac{1}{\sqrt{(n-1)(n-2)}} & \dots & \dots & \frac{1}{\sqrt{(n-1)(n-2)}} \\ 0 & 0 & -\frac{n-3}{\sqrt{(n-2)(n-3)}} & \frac{1}{\sqrt{(n-2)(n-3)}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{(n-2)(n-3)}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & 0 & -\frac{2}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \sqrt{n(n-1)} \end{bmatrix}$
4	$\begin{bmatrix} -\frac{n-1}{\sqrt{n(n-1)}} & \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} & \dots & \dots & \dots & \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} \\ 0 & -\frac{n-2}{\sqrt{(n-1)(n-2)}} & \frac{1}{\sqrt{(n-1)(n-2)}} & \dots & \dots & \frac{1}{\sqrt{(n-1)(n-2)}} \\ 0 & 0 & -\frac{n-3}{\sqrt{(n-2)(n-3)}} & \frac{1}{\sqrt{(n-2)(n-3)}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{(n-2)(n-3)}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & -\frac{2}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \sqrt{n} \end{bmatrix}$
5	$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \dots & \dots & \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{2}} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{\sqrt{6}} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & -\frac{n-1}{\sqrt{(n-1)(n-2)}} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -\frac{n}{\sqrt{n(n-1)}} \end{bmatrix}$
6	$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} & 0 & 0 & \dots & \dots & -\frac{n-1}{\sqrt{n(n-1)}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{(n-1)(n-2)}} & \frac{n}{\sqrt{n(n-1)}} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{(n-1)(n-2)}} & \frac{n}{\sqrt{n(n-1)}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & -\frac{n-2}{\sqrt{(n-1)(n-2)}} & \frac{n}{\sqrt{n(n-1)}} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \sqrt{n(n-1)} \end{bmatrix}$

7	$\frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$	$\frac{1}{\sqrt{(n-1)(n-2)}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{n}}$
	0	$-\frac{n-1}{\sqrt{(n-1)(n-2)}}$	$-\frac{1}{\sqrt{(n-2)(n-3)}}$...	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0
	\vdots	0	\ddots	\vdots	\vdots	\vdots
	\vdots	\vdots	0	$-\frac{3}{\sqrt{6}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0
	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	$-\frac{2}{\sqrt{2}}$	0
	0	0	\sqrt{n}
8	$-\frac{n-1}{\sqrt{n(n-1)}}$	0	0	...	0	$\frac{\sqrt{n}}{n}$
	0	$-\frac{n-2}{\sqrt{(n-1)(n-2)}}$	0	$\frac{\sqrt{n}}{n-1}$
	0	0	$-\frac{n-3}{\sqrt{(n-2)(n-3)}}$	0	...	$\frac{\sqrt{n}}{n-2}$
	\vdots	\vdots	\ddots	\ddots	\vdots	\vdots
	\vdots	\vdots	\vdots	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{n}}{2}$
	0	0	\sqrt{n}

Tablo 3.3: U_i matrislerinin açık formları.

$i = 2, 3, \dots, 8$ için L_i ve U_i matrislerinin tersleri Tablo 3.4 te görülmektedir.

i	L_i^{-1}	U_i^{-1}
2	$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{\sqrt{n(n-1)}}{\sqrt{2}} & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -\frac{\sqrt{n(n-1)}}{\sqrt{6}} & 0 & 1 & \vdots & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & \vdots & \vdots \\ -\frac{\sqrt{n(n-1)}}{\sqrt{(n-1)(n-2)}} & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -\sqrt{(n-1)} & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \sqrt{n(n-1)} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{(n-1)(n-2)}} & \frac{1}{\sqrt{n}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \vdots & \frac{1}{\sqrt{(n-1)(n-2)}} & \frac{1}{\sqrt{n}} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \vdots & \vdots & \frac{1}{\sqrt{n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & -\frac{n-2}{\sqrt{(n-1)(n-2)}} & \frac{1}{\sqrt{n}} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \frac{1}{\sqrt{n}} \end{bmatrix}$
3	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \sqrt{n-1} & \frac{\sqrt{n(n-1)}}{\sqrt{(n-1)(n-2)}} & \dots & \dots & \frac{\sqrt{n(n-1)}}{\sqrt{2}} & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \sqrt{n} & \frac{n-1}{\sqrt{(n-1)(n-2)}} & \frac{n-1}{\sqrt{(n-2)(n-3)}} & \dots & \frac{n-1}{\sqrt{2}} & -\frac{n-1}{\sqrt{n}} \\ 0 & -\frac{n-1}{\sqrt{(n-1)(n-2)}} & -\frac{1}{\sqrt{(n-1)(n-2)}} & \dots & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -\frac{3}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} \\ 0 & \vdots & \vdots & 0 & -\frac{2}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} \end{bmatrix}$
4	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n(n-1)}} & \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{(n-1)(n-2)}} & \dots & \dots & \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}} & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n(n-1)}} & -\frac{1}{\sqrt{(n-1)(n-2)}} & -\frac{1}{\sqrt{(n-2)(n-3)}} & \dots & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{n}} \\ 0 & -\frac{n-1}{\sqrt{(n-1)(n-2)}} & -\frac{1}{\sqrt{(n-1)(n-2)}} & -\frac{1}{\sqrt{(n-2)(n-3)}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{n}} \\ 0 & 0 & -\frac{n-2}{\sqrt{(n-2)(n-3)}} & -\frac{1}{\sqrt{(n-2)(n-3)}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & -\frac{2}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{n}} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \frac{1}{\sqrt{n}} \end{bmatrix}$

5	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & \vdots & \vdots & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{n-1} & -\frac{1}{n-1} & -\frac{1}{n-1} & \dots & -\frac{1}{n-1} & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \sqrt{n} & \frac{\sqrt{n}}{2} & \frac{\sqrt{n}}{3} & \dots & \dots & \dots & \frac{\sqrt{n}}{n} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & -\frac{n-2}{\sqrt{(n-1)(n-2)}} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & -\frac{n-1}{\sqrt{n(n-1)}} \end{bmatrix}$
6	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \vdots & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ -(n-1) & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \sqrt{n} & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \frac{1}{\sqrt{n}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \dots & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \dots & \dots & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & -\frac{n-1}{\sqrt{(n-1)(n-2)}} & \frac{1}{\sqrt{(n-1)(n-2)}} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} \end{bmatrix}$
7	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \vdots & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \sqrt{n(n-1)} & \frac{\sqrt{n(n-1)}}{n-1} & \frac{\sqrt{n(n-1)}}{n-1} & \dots & \dots & \dots & -\frac{\sqrt{n(n-1)}}{n} \\ 0 & -\frac{n-2}{\sqrt{(n-1)(n-2)}} & \frac{1}{\sqrt{(n-1)(n-2)}} & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \frac{1}{\sqrt{n}} \end{bmatrix}$
8	$\begin{bmatrix} \frac{1}{n-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{1}{n-1} & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \frac{1}{n-2} & \frac{1}{n-2} & 1 & \vdots & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{2} & \dots & \dots & \dots & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 1 & \dots & \dots & \dots & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\frac{n}{\sqrt{n(n-1)}} & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} \\ 0 & -\frac{n-1}{\sqrt{(n-1)(n-2)}} & 0 & \dots & \dots & \dots & \frac{1}{\sqrt{(n-1)(n-2)}} \\ 0 & 0 & -\frac{n-2}{\sqrt{(n-2)(n-3)}} & 0 & \dots & \dots & \frac{1}{\sqrt{(n-2)(n-3)}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & -\frac{2}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \frac{1}{\sqrt{n}} \end{bmatrix}$

Tablo 3.4: L_i^{-1} ve U_i^{-1} matrislerinin açık formları.

3.3. İspatlar

Bu bölümde Helmert matrisi ve tanımlanan varyantlarının faktörizasyonları için δ_{ij} Kronecker delta ve $m = 1, 2, 3, 4$ olmak üzere

$$\sum_{1 \leq k \leq n} L_{m,ik} L_{m,kj}^{-1} = \delta_{ij}$$

$$\sum_{1 \leq k \leq n} U_{m,ik} U_{m,kj}^{-1} = \delta_{ij}$$

olduğu gösterilecektir. $m = 5, 6, 7, 8$ için de sonuçlar benzer şekilde elde edilebilir. Burada öncelikle $m = 1, 2, \dots, 4$ için $L_{m,ij}$, $L_{m,ij}^{-1}$ ve $U_{m,ij}$, $U_{m,ij}^{-1}$ matrislerinin girişleri belirlenecektir. L_m ve L_m^{-1} matrisleri köşegen girişlerinin hepsi 1 olan alt üçgensel

matrisler olduğundan $L_m L_m^{-1}$ matrisi de köşegen girişleri 1 olan alt üçgensel bir matristir. Dolayısıyla $\sum_{1 \leq k \leq n} L_{m,ik} L_{m,kj}^{-1} = \delta_{ij}$ olduğunu gösterirken $i \neq j$ için bakmak yeterlidir.

3.3.1. H_1 Matrisi

H_1 matrisi için,

$$L_{1,ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ \frac{\sqrt{i(i-1)\sqrt{n}}}{i(i-1)}, & i > j = 1 \\ 0, & 1 < i < j \end{cases}, \quad L_{1,ij}^{-1} = \begin{cases} 1, & i = j \\ -\frac{\sqrt{i(i-1)\sqrt{n}}}{i(i-1)}, & i > j = 1 \\ 0, & 1 < i < j \end{cases}$$

şeklindedir. Diğer taraftan

$$U_{1,ij} = \begin{cases} \frac{\sqrt{n}}{n}, & i = 1 \\ -\frac{\sqrt{i}}{\sqrt{i-1}}, & 1 \neq i = j \\ -\frac{\sqrt{i(i-1)}}{i-1}, & j > i \neq 1 \\ 0, & i > j \end{cases}, \quad U_{1,ij}^{-1} = \begin{cases} \sqrt{n}, & i = j = 1 \\ -\frac{\sqrt{i(i-1)}}{i}, & i = j > 1 \\ \frac{\sqrt{j(j-1)}}{j(j-1)}, & 1 < i < j \\ 0, & i > j \end{cases}$$

olarak bulunur. Öncelikle

$$\sum_{1 \leq k \leq n} L_{1,ik} L_{1,kj}^{-1} = \delta_{ij}$$

olduğu gösterilecektir. $i \neq j = 1$ için,

$$\sum_{1 \leq k < i} L_{1,ik} L_{1,k1}^{-1} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{i(i-1)}} - \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{i(i-1)}} = 0$$

olup istenen sonuç elde edilir. Şimdi

$$\sum_{1 \leq k \leq n} U_{1,ik} U_{1,kj}^{-1} = \delta_{ij}$$

olduğu ispatlanacaktır. $U_1 U_1^{-1}$ matrisinin köşegen girişleri $i = 1$ için,

$$U_{1,11} U_{1,11}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{n} = 1$$

ve $i > 1$ için,

$$\left(-\frac{\sqrt{i}}{\sqrt{i-1}} \right) \left(-\frac{\sqrt{i-1}}{\sqrt{i}} \right) = 1$$

olarak bulunur. $U_1 U_1^{-1}$ matrisinin diğer girişleri $i = 1$ için,

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq k \leq j} U_{1,1k} U_{1,kj}^{-1} &= U_{1,11} U_{1,1j}^{-1} + U_{1,1j} U_{1,jj}^{-1} + \sum_{2 \leq k \leq j-1} U_{1,ik} U_{1,kj}^{-1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{\sqrt{j(j-1)}}{j(j-1)} \right) + \frac{1}{\sqrt{n}} \left(-\frac{\sqrt{j(j-1)}}{j} \right) + \\ &\quad \sum_{2 \leq k \leq j-1} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{\sqrt{j(j-1)}}{j(j-1)} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \left((-j+2) \frac{\sqrt{j(j-1)}}{j(j-1)} \right) + \frac{1}{\sqrt{n}} \left((j-2) \frac{\sqrt{j(j-1)}}{j(j-1)} \right) = 0 \end{aligned}$$

ve $i > 1$ için,

$$\begin{aligned} \sum_{i \leq k \leq j} U_{1,ik} U_{1,kj}^{-1} &= U_{1,ii} U_{1,ij}^{-1} + U_{1,ij} U_{1,jj}^{-1} + \sum_{i+1 \leq k \leq j-1} U_{1,ik} U_{1,kj}^{-1} \\ &= \left(-\frac{i}{\sqrt{i(i-1)}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{j(j-1)}} \right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{i(i-1)}} \right) \left(-\frac{j-1}{\sqrt{j(j-1)}} \right) + \\ &\quad (j-i-1) \left(-\frac{1}{\sqrt{i(i-1)}} \frac{1}{\sqrt{j(j-1)}} \right) \\ &= \left(\frac{j-i-1}{\sqrt{i(i-1)j(j-1)}} \right) + \left(-\frac{j-i-1}{\sqrt{i(i-1)j(j-1)}} \right) = 0 \end{aligned}$$

olduğu görülür.

3.3.2. H_2 Matrisi

H_2 matrisi için,

$$L_{2,ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ \frac{\sqrt{n(n-1)}}{\sqrt{i(i-1)}}, & n \neq i > j = 1 \\ \sqrt{n-1}, & n = i > j = 1 \\ 0, & 1 < i < j \end{cases}, \quad L_{2,ij}^{-1} = \begin{cases} 1, & i = j \\ -\frac{\sqrt{n(n-1)}}{\sqrt{i(i-1)}}, & n \neq i > j = 1 \\ -\sqrt{n-1}, & n = i > j = 1 \\ 0, & 1 < i < j \end{cases}$$

şeklindedir. Diğer taraftan

$$U_{2,ij} = \begin{cases} -\frac{i}{\sqrt{i(i-1)}}, & 1 < i = j < n \\ \sqrt{n}, & i = j = n \\ \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}, & 1 = i \leq j < n \\ -\frac{n-1}{\sqrt{n(n-1)}}, & 1 = i, j = n \\ -\frac{1}{\sqrt{i(i-1)}}, & n > j > i \neq 2 \\ \frac{n-1}{\sqrt{i(i-1)}}, & 1 < i < n = j \\ 0, & i > j \end{cases}$$

ve

$$U_{2,ij}^{-1} = \begin{cases} -\frac{i-1}{\sqrt{i(i-1)}}, & 1 < i = j < n \\ \sqrt{n(n-1)}, & i = j = 1 \\ \frac{1}{\sqrt{j(j-1)}}, & 1 = i < j < n \text{ ve } n > j > i \neq 2 \\ \frac{1}{\sqrt{n}}, & 1 \leq i \leq n = j \\ 0, & i > j \end{cases}$$

olarak bulunur. L_2 ve L_2^{-1} matrisleri için,

$$\sum_{1 \leq k \leq n} L_{2,ik} L_{2,kj}^{-1} = \delta_{ij}$$

olduğu gösterilecektir. $n \neq i > j = 1$ için,

$$\sum_{1 \leq k < i} L_{2,ik} L_{2,k1}^{-1} = \frac{\sqrt{n(n-1)}}{\sqrt{i(i-1)}} - \frac{\sqrt{n(n-1)}}{\sqrt{i(i-1)}} = 0$$

ve $n = i > j = 1$ için,

$$\sum_{1 \leq k < i} L_{2,ik} L_{2,k1}^{-1} = \sqrt{n-1} - \sqrt{n-1} = 0$$

olup istenen sonuç elde edilir. Şimdi

$$\sum_{1 \leq k \leq n} U_{2,ik} U_{2,kj}^{-1} = \delta_{ij}$$

olduğu ispatlanacaktır. $U_2 U_2^{-1}$ matrisinin köşegen girişleri $i = 1$ için,

$$U_{2,11} U_{2,11}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} \sqrt{n(n-1)} = 1$$

ve $i > 1$ için,

$$\left(-\frac{\sqrt{i}}{\sqrt{i(i-1)}} \right) \left(-\frac{\sqrt{i-1}}{\sqrt{i(i-1)}} \right) = 1$$

olarak bulunur. $U_2 U_2^{-1}$ matrisinin diğer girişleri $i = 1, j < n$ için,

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq k \leq j} U_{2,1k} U_{2,kj}^{-1} &= U_{2,1j} U_{2,jj}^{-1} + \sum_{1 \leq k \leq j-1} U_{2,1k} U_{2,kj}^{-1} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} \frac{j-1}{\sqrt{j(j-1)}} + \sum_{1 \leq k \leq j-1} \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} \frac{1}{\sqrt{j(j-1)}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} \frac{j-1}{\sqrt{j(j-1)}} + (j-1) \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} \frac{1}{\sqrt{j(j-1)}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

ve $i = 1, j = n$ için,

$$\begin{aligned}
\sum_{i \leq k \leq n} U_{2,1k} U_{2,kn}^{-1} &= U_{2,1n} U_{2,nn}^{-1} + \sum_{1 \leq k \leq n-1} U_{2,1k} U_{2,kn}^{-1} \\
&= -\frac{n-1}{\sqrt{n(n-1)}} \frac{1}{\sqrt{n}} + \sum_{1 \leq k \leq j-1} \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} \frac{1}{\sqrt{n}} \\
&= -\frac{n-1}{\sqrt{n(n-1)}} \frac{1}{\sqrt{n}} + (n-1) \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} \frac{1}{\sqrt{n}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

olduğu görülür.

$i > 1$ ve $j < n$ için,

$$\begin{aligned}
\sum_{i \leq k \leq j} U_{2,ik} U_{2,kj}^{-1} &= \left(-\frac{i}{\sqrt{i(i-1)}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{j(j-1)}} \right) + \\
&\quad \left(-\frac{1}{\sqrt{i(i-1)}} \right) \left(-\frac{j-1}{\sqrt{j(j-1)}} \right) + \\
&\quad \sum_{i+1 \leq k \leq j-1} \left(-\frac{1}{\sqrt{i(i-1)}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{j(j-1)}} \right) \\
&= \left(-\frac{j-i-1}{\sqrt{ij(i-1)(j-1)}} \right) + (j-i-1) \left(\frac{1}{\sqrt{ij(i-1)(j-1)}} \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

ve $i > 1$ ve $j = n$ için ise

$$\begin{aligned}
\sum_{i \leq k \leq n} U_{2,ik} U_{2,kn}^{-1} &= \left(-\frac{i}{\sqrt{i(i-1)}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) + \left(\frac{n-1}{\sqrt{i(i-1)}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) + \\
&\quad \sum_{i+1 \leq k \leq n-1} \left(-\frac{1}{\sqrt{i(i-1)}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) \\
&= \left(\frac{n-i-1}{\sqrt{in(i-1)}} \right) - (n-i-1) \left(\frac{1}{\sqrt{in(i-1)}} \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

elde edilir.

3.3.3. H_3 Matrisi

H_3 matrisi için,

$$L_{3,ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ -\frac{\sqrt{n(n-1)}}{\sqrt{(n-j)(n-j+1)}}, & i = n, n \neq j > 1 \\ -\sqrt{n-1}, & i = n, j = 1 \\ 0, & 1 < i < j \text{ ve } j < i < n \end{cases}$$

ve

$$L_{3,ij}^{-1} = \begin{cases} 1, & i = j \\ \frac{\sqrt{n(n-1)}}{\sqrt{(n-j)(n-j+1)}}, & i = n, 1 < j < n \\ \sqrt{n-1}, & i = n, j = 1 \\ 0, & 1 < i < j \text{ ve } j < i < n \end{cases}$$

şeklindedir. Diğer taraftan

$$U_{3,ij} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{n}}, & 1 = i, 1 \leq j \leq n \\ \sqrt{n(n-1)}, & i = j = n \\ -\frac{n-i}{\sqrt{(n-i)(n-i+1)}}, & 1 < i = j < n \\ \frac{1}{\sqrt{(n-i)(n-i+1)}}, & n \neq j > i > 1 \\ 0, & i > j \end{cases}, \quad U_{3,ij}^{-1} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}, & 1 < i, j = n \\ \sqrt{n}, & i = j = 1 \\ -\frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}}, & i = 1, j = n \\ -\frac{\sqrt{n-i+1}}{\sqrt{n-i}}, & 1 < i = j < n \\ -\frac{1}{\sqrt{(n-j)(n-j+1)}}, & i \neq 1, 2 < j < n \\ \frac{n-1}{\sqrt{(n-j)(n-j+1)}}, & i = 1, 2 < j < n \\ 0, & i > j \end{cases}$$

olarak bulunur. L_3 ve L_3^{-1} matrisleri için

$$\sum_{1 \leq k \leq n} L_{3,ik} L_{3,kj}^{-1} = \delta_{ij}$$

olduğu gösterilecektir.

(i) $i = n, j > 1$ için,

$$\sum_{j \leq k \leq n} L_{3,nk} L_{3,kj}^{-1} = 0,$$

(ii) $i = n, j = 1$ için,

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq k \leq n} L_{3,nk} L_{3,k1}^{-1} &= L_{3,n1} L_{3,11}^{-1} + L_{3,n2} L_{3,21}^{-1} + \dots + L_{3,nn} L_{3,n1}^{-1} \\ &= -\sqrt{(n-1)} - \frac{\sqrt{n(n-1)}}{\sqrt{(n-1)(n-2)}} \cdot 0 + \dots + 0 + \sqrt{n-1} \\ &= 0, \end{aligned}$$

(iii) $n > i > j$ için,

$$\sum_{j \leq k \leq i} L_{3,ik} L_{3,kj}^{-1} = L_{3,ij} L_{3,jj}^{-1} + L_{3,ii} L_{3,ij}^{-1} + \sum_{j+1 \leq k \leq i-1} L_{3,ik} L_{3,kj}^{-1} = 0.1 + 1.0 + 0 = 0$$

olduğu görülür. Şimdi

$$\sum_{1 \leq k \leq n} U_{3,ik} U_{3,kj}^{-1} = \delta_{ij}$$

olduğu ispatlanacaktır.

(i) $i = 1, j = 1$ için,

$$U_{3,11} U_{3,11}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{n} = 1$$

(ii) $j > i > 1, j \neq n$ için,

$$\begin{aligned} \sum_{i \leq k \leq j} U_{3,ik} U_{3,kj}^{-1} &= U_{3,ii} U_{3,ij}^{-1} + U_{3,ij} U_{3,jj}^{-1} + \sum_{i+1 \leq k \leq j-1} U_{3,ik} U_{3,kj}^{-1} \\ &= -\frac{\sqrt{(n-i)(n-i+1)}}{(n-i+1)} \left(-\frac{\sqrt{(n-j)(n-j+1)}}{(n-j)(n-j+1)} \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\sqrt{(n-i)(n-i+1)}}{(n-i)(n-i+1)} \left(-\frac{\sqrt{(n-j)(n-j+1)}}{(n-j)(n-j+1)} \right) + \dots + \\
& \frac{\sqrt{(n-i)(n-i+1)}}{(n-i)(n-i+1)} \left(-\frac{\sqrt{(n-j)(n-j+1)}}{(n-j)(n-j+1)} \right) \\
& = -\frac{\sqrt{(n-j)(n-j+1)}}{(n-j)(n-j+1)} \times \\
& \left(-\frac{\sqrt{(n-i)(n-i+1)}}{(n-i+1)} + (n-i)\frac{\sqrt{(n-i)(n-i+1)}}{(n-i)(n-i+1)} \right) \\
& = 0
\end{aligned}$$

(iii) $i \neq j$, $j > i > 1$, $j = n$ için,

$$\begin{aligned}
\sum_{i \leq k \leq n} U_{3,ik} U_{3,kn}^{-1} &= \frac{\sqrt{n(n-1)}}{n(n-1)} \times \\
& \left(-\frac{\sqrt{(n-i)(n-i+1)}}{(n-i+1)} + \frac{\sqrt{(n-i)(n-i+1)}}{(n-i)(n-i+1)}(n-i) \right) \\
& = 0
\end{aligned}$$

(iv) $i = j > 1$ için

$$U_{3,ii} U_{3,ii}^{-1} = \left(-\frac{\sqrt{(n-i)(n-i+1)}}{(n-i+1)} \right) \left(-\frac{\sqrt{(n-i)(n-i+1)}}{(n-i)} \right) = 1$$

(v) $i = 1$, $1 < j < n$ için,

$$\begin{aligned}
\sum_{1 \leq k \leq n} U_{3,1k} U_{3,kj}^{-1} &= \frac{\sqrt{n}}{n} (n-1) \left(\frac{\sqrt{(n-j)(n-j+1)}}{(n-j)(n-j+1)} \right) + \\
& \frac{\sqrt{n}}{n} \left(-\frac{\sqrt{(n-j)(n-j+1)}}{(n-j)(n-j+1)} \right) + \dots + \\
& \frac{\sqrt{n}}{n} \left(-\frac{\sqrt{(n-j)(n-j+1)}}{(n-j)(n-j+1)} \right) \\
& = 0
\end{aligned}$$

(vi) $i = 1, j = n$ için,

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq k \leq n} U_{3,1k} U_{3,kn}^{-1} &= \frac{\sqrt{n}}{n} \left(-\frac{\sqrt{n(n-1)}}{n} \right) + \frac{\sqrt{n}}{n} \left(\frac{\sqrt{n(n-1)}}{n(n-1)} \right) + \\ &\frac{\sqrt{n}}{n} \left(\frac{\sqrt{n(n-1)}}{n(n-1)} \right) + \dots + \frac{\sqrt{n}}{n} \left(\frac{\sqrt{n(n-1)}}{n(n-1)} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olduğu görülür.

3.3.4. H_4 Matrisi

H_4 matrisi için

$$L_{4,ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ -\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{(n-j)(n-j+1)}}, & i = n, i > j \\ 0, & i < j \text{ ve } j < i < n \end{cases}$$

ve

$$L_{4,ij}^{-1} = \begin{cases} 1, & i = j \\ \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{(n-j)(n-j+1)}}, & i = n, 1 < j < n \\ 0, & i < j \text{ ve } j < i < n \end{cases}$$

şeklindedir. Diğer taraftan

$$U_{4,ij} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}, & 1 = i < j \\ \sqrt{n}, & i = j = n \\ -\frac{\sqrt{(n-i)(n-i+1)}}{n-i+1}, & i = j < n, \\ \frac{1}{\sqrt{(n-i)(n-i+1)}}, & i < j \\ 0, & i > j \end{cases} \quad U_{4,ij}^{-1} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{n}}, & j = n \\ -\frac{\sqrt{(n-i)(n-i+1)}}{n-i}, & i = j < n \\ -\frac{1}{\sqrt{(n-j)(n-j+1)}}, & i < j < n \\ 0, & i > j \end{cases}$$

olarak bulunur. L_4 ve L_4^{-1} matrisleri için

$$\sum_{1 \leq k \leq n} L_{4,ik} L_{4,kj}^{-1} = \delta_{ij}$$

olduğu gösterilecektir.

(i) $j > i$ için

$$\begin{aligned} \sum_{i \leq k \leq j} L_{4,ik} L_{4,kj}^{-1} &= L_{4,ii} L_{4,ij}^{-1} + L_{4,ij} L_{4,jj}^{-1} + \sum_{i+1 \leq k \leq j-1} L_{4,ik} L_{4,kj}^{-1} \\ &= 1.0 + 0.1 + 0 = 0, \end{aligned}$$

(ii) $j < i < n$ için

$$\sum_{j \leq k \leq i} L_{4,jk} L_{4,ki}^{-1} = 0,$$

(iii) $i = n, i > j$ için

$$\sum_{j \leq k \leq n} L_{4,nk} L_{4,kj}^{-1} = 0$$

olduğu görülür.

Şimdi

$$\sum_{1 \leq k \leq n} U_{4,ik} U_{4,kj}^{-1} = \delta_{ij}$$

olduğu ispatlanacaktır.

(i) $i > j$ için

$$\begin{aligned} \sum_{j \leq k \leq i} U_{4,ik} U_{4,kj}^{-1} &= U_{4,ii} U_{4,ij}^{-1} + U_{4,ij} U_{4,jj}^{-1} + \sum_{j+1 \leq k \leq i-1} U_{4,ik} U_{4,kj}^{-1} \\ &= \left(-\frac{\sqrt{(n-i)(n-i+1)}}{n-i+1} \right).0 + \end{aligned}$$

$$0. \left(\frac{\sqrt{(n-j)(n-j+1)}}{n-j} \right) + 0 = 0,$$

(ii) $i = j < n$ için

$$U_{4,ii}U_{4,ii}^{-1} = \left(-\frac{\sqrt{(n-i)(n-i+1)}}{n-i+1} \right) \left(-\frac{\sqrt{(n-i)(n-i+1)}}{n-i} \right) = 1,$$

(iii) $i = j = n$ için

$$U_{4,nn}U_{4,nn}^{-1} = \sqrt{n} \frac{\sqrt{n}}{n} = 1,$$

(iv) $i < j$ için,

$$\sum_{1 \leq k \leq n} U_{4,ik}U_{4,kj}^{-1} = 0$$

olduğu görülür.

4 . TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tezde R yansıma matrisi kullanılarak klasik Helmert matrisinin sekiz ortogonal varyantı oluşturulmuştur. Tanımlanan matrislerin çeşitli faktörizasyonları elde edilmiştir. Bu faktörizasyonlardan birisi LU faktörizasyonlarıdır. Matrislerin LU faktörizasyonları L ve U matrislerinin girişleri açık bir şekilde yazılarak elde edilmiştir. Matrislerin bir diğer faktörizasyonu için bazı köşegen matrisler tanımlanmış ve matrislerle ilişkilendirilerek sunulmuştur.

KAYNAKLAR

- [1] Akbıyık, M., Yamaç Akbıyık, S., Yılmaz, F. (2022). On linear algebra of one type of symmetric matrices with harmonic Fibonacci entries. *Notes on Number Theory and Discrete Mathematics*.
- [2] Akkus, I., Kizilaslan, G. (2021). Generalization of a statistical matrix and its factorization. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 50(4), 963-978.
- [3] Akkus, I., Kizilaslan, G., Verde-Star, L. (2023). A unified approach to generalized Pascal-like matrices: q-analysis. *Linear Algebra and its Applications*, 673, 138-159.
- [4] Anđelić, M., da Fonseca, C. M., Yılmaz, F. (2022). The bi-periodic Horadam sequence and some perturbed tridiagonal 2-Toeplitz matrices: A unified approach. *Heliyon*, 8(2).
- [5] Bayat, M., Teimoori, H. (1999). The linear algebra of the generalized Pascal functional matrix. *Linear algebra and its applications*, 295(1-3), 81-89.
- [6] Bayat, M., Teimoori, H. (2000). Pascal k-eliminated functional matrix and its property. *Linear Algebra and Its Applications*, 308(1-3), 65-75.
- [7] Birregah, B., Doh, P.K., Adjallah, K.H., A systematic approach to matrix forms of the Pascal triangle: The twelve triangular matrix forms and relations, *European Journal of Combinatorics*, 31(5)(2010), 1205–1216.
- [8] Brawer, R. (1990). Potenzen der Pascalmatrix und eine Identität der Kombinatorik. *Elemente der Mathematik*, 45, 107-110.
- [9] Brawer, R., Pirovino, M. (1992). The linear algebra of the Pascal matrix. *Linear Algebra and Its Applications*, 174, 13-23.

- [10] Call, G. S., Velleman, D. J. (1993). Pascal's matrices. *The American Mathematical Monthly*, 100(4), 372-376.
- [11] Clarke, B. R. (2008). *Linear models: The theory and application of analysis of variance*. John Wiley Sons.
- [12] Doh, P. K., Adjallah, K. H., Birregah, B. (2021). Thirty-six full matrix forms of the Pascal triangle: derivation and symmetry relations. *Scientific African*, 13, e00932.
- [13] Edelman, A., Strang, G. (2004). Pascal matrices. *The American Mathematical Monthly*, 111(3), 189-197.
- [14] Farhadian, R. (2021). A note on a generalization of a statistical matrix. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 50(12), 2938-2946.
- [15] da Fonseca, C. M., Kizilates, C., Terzioglu, N. (2024). A new generalization of min and max matrices and their reciprocals counterparts. *Filomat*, 3, 421-435.
- [16] Gentle, J. E., Gentle, J. E. (1998). Applications in Statistics. *Numerical Linear Algebra for Applications in Statistics*, 161-182.
- [17] Helmert, F. R. (1876). Die genauigkeit der formel von peters zur berechnung des wahrscheinlichen beobachtungsfehlers director beobachtungen gleicher genauigkeit. *Astronomische Nachrichten*, volume 88, Issue 8, p. 113, 88, 113.
- [18] Hürlimann, W. (2013). Generalized Helmert-Ledermann orthogonal matrices and ROM simulation. *Linear Algebra and Applications*, 439 (7), 1716-1729.
- [19] Irwin, J. O. (1942). On the distribution of a weighted estimate of variance and on analysis of variance in certain cases of unequal weighting. *Journal of the Royal Statistical Society*, 105(2), 115-118.
- [20] Kandamar, H. ve Aydın, N. (2020). *Doğrusal Cebir*. Ankara: Paradigma Akademi.
- [21] Kızılaslan, G., Şahin, H. (2024). Factorizations of Some Variants of a Statistical Matrix. *Turkish Journal of Mathematics and Computer Science*, 16(1), 229-239.

- [22] Kızılateş, C., Terzioğlu, N. (2022). On r-min and r-max matrices. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 68(6), 4559-4588.
- [23] Lancaster, H. O. (1965). The helmert matrices. *The American Mathematical Monthly*, 72(1), 4-12.
- [24] Pearson, K. (1900). X. On the criterion that a given system of deviations from the probable in the case of a correlated system of variables is such that it can be reasonably supposed to have arisen from random sampling. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 50(302), 157-175.
- [25] Sabuncuoğlu, A (2004). *Lineer Cebir (2. baskı)*. Ankara: Nobel Yayın Dağıtım.
- [26] Seber, G. A. (2008). *A matrix handbook for statisticians*. John Wiley Sons.
- [27] Shi, B., Kızılateş, C. (2024). A new generalization of the Frank matrix and its some properties. *Computational and Applied Mathematics*, 43(1), 19.
- [28] Strum, J. E. (1977). Binomial matrices. *The Two-Year College Mathematics Journal*, 8(5), 260-266.
- [29] Verde-Star, L. (2004). Groups of generalized Pascal matrices. *Linear algebra and its applications*, 382, 179-194.
- [30] Zhang, Z. (1997). The linear algebra of the generalized Pascal matrix. *Linear Algebra and Its Applications*, 250, 51-60.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Harun ŞAHİN

Yabancı Dil : İngilizce

Eğitim Durumu

Lisans : Kırıkkale Üniversitesi,
Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü, 2003-2007

Çalıştığı Kurum ve Yıllar :

- 1.) Kırıkkale Çözüm Dergisi Dershaneleri, Seviye Dershanesi, 2006-2009.
- 2.) Ardahan Mehmetçik Dershaneleri, 2009.
- 3.) Ankara/Kazan Pi Kazanım Dershanesi, 2010-2011.

Yayımları :

- 1.) Kızılaslan, G., Şahin, H. (2024). Factorizations of Some Variants of a Statistical Matrix. Turkish Journal of Mathematics and Computer Science, 16(1), 229-239.
<https://doi.org/10.47000/tjmcs.1428063>