ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

KOMPAKT İRTİBATLI LİE GRUPLARI ÜZERİNDE DEMETLER VE HOMOTOPİ NORMALİTE

MUSTAFA DOĞAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2008

Her Hakkı Saklıdır

ÖZET

DOKTORA TEZİ

KOMPAKT İRTİBATLI LİE GRUPLARI
ÜZERİNDE DEMETLER VE HOMOTOPİ NORMALİTE

Mustafa DOĞAN

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Sabahattin BALCI

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde tez için gerekli olan tarif ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, homotopi ve demet teorisi ele alınmıştır.

Dördüncü bölümde, Lie grupları ve manifoldlar incelenerek bazı sonuçlar takdim edilmiştir.

Son olarak beşinci bölümde ise Kompakt İrtibatlı Lie grupları üzerinde demetler teşkil edilerek bazı karakterizasyonlar verilmiş ve Homotopi Normalite tarif edilerek demet morfizmi altında homotopi normalliğin korunduğu gösterilmiştir.

Nisan 2008, 57 sayfa

Anahtar Kelimeler: Homotopi, Demet teorisi, Homotopi Normalite, Kompakt irtibatlı Lie grubu

ABSTRACT

Ph. D. Thesis

SHEAVES ON COMPACT CONNECTED LIE GROUPS
AND HOMOTOPY NORMALITY

Mustafa DOĞAN

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Sabahattin BALCI

This thesis consists of five chapters. The first chapter has been devoted to the introduction. In the second chapter, it was given fundamental definitions and theorems that will be needed for this thesis.

In the third chapter, homotopy and sheaf theory were included.

In the fourth chapter, investigating Lie groups some corollaries were established.

Finally in the fifth chapter, by constructing sheaves on compact connected Lie groups, some characterizations were given and by defining homotopy normality, it was shown that homotopy normality is preserved under sheaves morphisms.

April 2008, 57 pages

Key Words: Homotopy, Sheaf Theory, Homotopy normality, compact connected Lie group.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmayı veren, gerekli ikazları yaparak, böyle güçlü bir konuya eğilmeme, mümkün olan ölçüde konuyu anlamama yardımcı olan Sayın Hocam Prof.Dr. Sabahattin BALCI'ya şükranlarımı sunmayı bir borç bilirim.

Ayrıca çalışmalarım sırasında bana destek olan Sayın Yrd. Doç. Dr. Erdal GÜNER ve Sayın Doç.Dr. Ayhan ŞERBETÇİ'ye, yazıların yazılmasında emeği geçen Oğlum Seyfullah Fazlı'ya çalışmalarım süresince bir çok fedakarlıklar göstererek beni destekleyen Eşim Zerrin ile Kızım Ayyüce'ye ve manevi desteğini üstümden eksik etmeyen Değerli Hocam Sayın Ertuğrul Zekai ÖKTE'ye en derin duygularımla teşekkür ederim.

Mustafa DOĞAN
Ankara, Nisan 2008

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

Kerϕ	ϕ grup homomorfizminin çekirdeği
G/H	Bölüm grubu
~	Homotopi bağıntısı
$[\alpha]$	α nın homotopi sınıfı
π_1 (Y,y_0)	Y Topolojik uzayının y_0 noktasındaki esas grubu
S_x	S demetinin x noktası üzerindeki sapı
$\Gamma(W,S)$	S'nin W üzerindeki bütün kesitlerinin cümlesi
s	Kesit
$S^* = S_1 \oplus \ldots \oplus S_L$	Whitney toplamı
H	X üzerindeki esas grupların demeti
H(X)	Kompakt irtibatlı Lie grubu üzerindeki demet
Q_H	Bölüm demeti
$\{ X, M_w, \gamma_{w,v}\}$	Ön demet

1.GİRİŞ

Sürekli gruplar teorisi veya şimdiki adıyla Lie grupları, diferensiyel denklem sistemlerinin integrasyonuyla ilgili olarak Sophus Lie (1842-1899) tarafından geliştirildi. Bu gruplar ilk defa dönüşümlerin grupları olarak ortaya çıktı. Şu anda ise soyut gruplar olarak gözönüne alınmaktadır.

Cebirsel topolojinin amacı, çözümü güç olan topolojik problemleri daha kolay çözülebileceği ümit edilen cebirsel problemlere dönüştürmektir. Bununla beraber cebirsel topoloji, analitik fonksiyonlar teorisi, geometri ve diferensiyel geometri gibi matematiğin ana dallarında çok önemli roller üstlenmektedir, ayrıca pek çok temel bilim ve mühendislik alanında da önemli uygulamalara sahiptir. Özellikle son 20 yıldaki gelişmeler sonucunda, cebirsel topolojinin bir multidisipliner bilim dalı olduğu açık olarak görülmüştür. Homotopi teorisi ise cebirsel topolojiyi oluşturan temel iki alandan biri olup (diğeri homoloji teorisi), cebirsel topolojinin multidisipliner olmasında belki de en önemli rolü üstlenmiştir.

Demet teorisi, öncelikle teorik olarak cebirsel topoloji içerisinde geliştirilmiştir. Cebirsel Geometri'de ve manifoldlar üzerindeki fonksiyonlar teorisinde çok kullanışlı bir araç olup disiplinler arası bir alandır. Literatürde, homotopi ve demet teorisi birlikte ele alınarak pek çok yeni kavram ortaya çıkartılmış ve birçok önemli probleme çözümler bulunmuştur. Homotopi teorisi ve çok kompleks değişkenli fonksiyonlar teorisi demet teorisi bakış açısından ele alınarak, kavramlar ve teoremler ile problemler bu anlayışa göre yeniden ifade edilmiş, adeta teori yeniden yazılmıştır.

Lie grupları ise 100 yıl kadar bir geçmişe sahiptir. Önceleri geometri içerisinde (diferensiyel geometri) yer almakla birlikte, analiz, topoloji ve cebir gibi matematiğin diğer dalları içerisinde kolaylıkla uygulama sahaları bulabilmiştir ve çok verimli bir çalışma alanı olarak görülmektedir.

Son 20 yıl içerisinde, Lie gruplarının homotopi teorisi içerisinde dikkate değer bir şekilde yer aldığı görülmekte, hatta homotopi teorisi yaklaşımı ile Lie grupları teorisinin oluşturulduğu gözlenmektedir. Konunun gelişimi henüz yeni olmakla birlikte disiplinler arası bir kavram olan demetin de bu yaklaşımda etkin bir rol alacağı tahmin edilmektedir. Literatürde bunu destekleyen çalışmalara rastlanmıştır.

Kompakt irtibatlı Lie grupları, Lie grupları teorisinde yapılan araştırmaların büyük çoğunluğunu oluşturmaktadır. Sözkonusu araştırmalarda kompakt irtibatlı Lie gruplarının homotopik yapısı ilgiyle incelenmektedir.

Bu çalışmada ilk dört bölümde çalışma ile ilgili hazırlık yapılmıştır. İkinci bölümde topolojik ve cebirsel kavramlar, üçüncü bölümde homotopi, esas grup ve demet teorisi, dördüncü bölümde manifoldlar ve Lie grupları verilmiştir. beşinci bölümde ise kompakt irtibatlı Lie grupları üzerinde demetler oluşturulmuş ve homotopi normalite konusu ele alınmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Bazı Topolojik ve Bazı Cebirsel Kavramlar

Tarif 2.1.1 X boş olmayan bir cümle ve τ, X in kuvvet cümlesi olan P(X) in bir altcümlesi olsun. Aşağıdaki özelikleri sağlayan τ ailesine X üzerinde bir ***topoloji*** (veya topolojik yapı) denir.

(i) $\varnothing$ ve X, τ ya aittir.

(ii) τ ya ait herhangi sayıda cümlelerin birleşimi τ ya aittir.

(iii) τ ya ait sonlu sayıda cümlelerin arakesiti τ ya aittir.

Bu takdirde (X,τ) ikilisine bir ***topolojik uzay*** denir ve kısaca X ile gösterilir. Eğer (X,τ) bir topolojik uzay ise τ nun elemanlarına X in ***açık altcümleleri*** denir (Bourbaki 1966).

Tarif 2.1.2 X bir topolojik uzay ve $A\subset X$ olsun. Eğer X-A cümlesi açık ise, bu durum da A ya ***kapalı cümle*** denir.

Tarif 2.1.3 X bir topolojik uzay ve $A\subset X$ olsun. Eğer A nın bir x elemanı için $x\in U\subset A$ olacak biçimde bir U açık cümlesi varsa, bu durumda A ya x in bir ***komşuluğu***, x'e de A nın bir ***iç noktası*** denir.

Tarif 2.1.4 X bir topolojik uzay ve $A\subset X$ olsun. A nın bütün açık altcümlelerinin birleşimine A nın ***içi*** denir ve A° ile gösterilir. A yı kapsayan bütün kapalı cümlelerinin arakesitine A nın ***kapanışı*** denir ve $\overline{A}$ ile gösterilir.

Teorem 2.1.1 X bir topolojik uzay ve $A\subset X$ olsun. A nın açık olması için gerek ve yeter şart $A= A^\circ$ olmasıdır (Gemignani 1967).

Teorem 2.1.2 X bir topolojik uzay ve $A\subset X$ olsun. A nın kapalı olması için gerek ve yeter şart $A=\overline{A}$ olmasıdır (Gemignani 1967).

Tarif 2.1.5 X bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Bir A cümlesinin tümleyeninin içine A cümlesinin ***dışı*** denir ve ($[A)^o$ ile gösterilir.

Tarif 2.1.6 Hem $\overline{A}$ ve hem de A nın tümleyeninin kapanışına ait olan noktaların cümlesine A nın ***sınırı*** denir.

Tarif 2.1.7 X bir topolojik uzay ve $x \in X$ olsun. A, X in herhangi bir altcümlesi olmak üzere eğer x in her komşuluğu A nın x den farklı en az bir noktasını içeriyorsa, bu durumda x'e A nın bir ***yığılma noktası*** denir. A nın yığılma noktası olmayan noktalarına ***ayrık nokta*** denir.

Tarif 2.1.8 (X, τ) bir topolojik uzay ve $\beta \subset \tau$ olsun. τ topolojisinin her elemanı β nın elemanlarının herhangi bir birleşimi olarak yazılabiliyor ise, β ya τ topolojisinin bir ***tabanı*** denir. Yani,

β, τ için bir taban $\Leftrightarrow$ her $A \in \tau$ için en az bir $\theta \subset \beta$ alt ailesi vardır öyleki $A = \bigcup_{B \in \theta} B$ dir.

Tarif 2.1.9 (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A cümlesini kapsayan bir U açık cümlesinin her N üst cümlesine A cümlesinin bir ***komşuluğu*** denir. Yani,

$$N,\ A \subset X \text{ nin bir komşuluğu} \Leftrightarrow \exists U \in \tau \text{ vardır öyleki } A \subset U \subset N$$

dir. $A = \{x\}$ ise

$$N,\ x \in X \text{ noktasının bir komşuluğu } \Leftrightarrow \exists U \in \tau \text{ vardır öyleki } x \in U \subset N$$

dir. x noktasını içeren U açık altcümlesine de x in ***açık komşuluğu*** denir. Ayrıca N sadece x in komşuluğu değil, U içindeki her noktanın da komşuluğudur.

Herhangi bir $x \in X$ noktasının bütün komşuluklar ailesi N(x) ile gösterilir.

Tarif 2.1.10 X ve Y iki topolojik uzay ve $f : X \rightarrow Y$ üzerine bir fonksiyon olsun. Eğer Y nin herbir V açık altcümlesi için $f^{-1}(V)$ cümlesi X in bir açık altcümlesi ise, bu durumda f ye X üzerinde ***süreklidir*** denir.

Tarif 2.1.11 X ve Y iki topolojik uzay ve f:X→Y içine bir fonksiyon olsun. Eğer X in herbir U açık alcümlesi için f(U),Y nin bir açık altcümlesi ise, bu durumda f ye ***açık dönüşüm*** denir.

Tarif 2.1.12 X, Y iki topolojik uzay ve f:X→Y bire-bir ve üzerine bir fonksiyon olsun. Eğer f ve f^{-1} fonksiyonları sürekli ise, bu durumda f ye bir ***homeomorfizm*** (topolojik dönüşüm) adı verilir. X, Y uzaylarına da ***homeomorf uzaylar*** denir.

Tarif 2.1.13 X bir topolojik uzay olsun. Eğer X in farklı noktalarının her x,y çifti için $U \cap V = \varnothing$ olacak biçimde X de enaz bir $U \in N(x)$ ve $V \in N(y)$ cümleleri varsa , bu durumda X topolojik uzayına ***Hausdorff uzayı*** denir.

Tarif 2.1.14 X bir topolojik uzay olsun. X in altcümlelerinin bir $(A_i)_{i \in I}$ ailesi verilsin. $X = \bigcup_{i \in I} A_i$ ise $(A_i)_{i \in I}$ ailesine X uzayının bir ***örtüsü*** denir. Her $i \in I$ için A_i cümleleri, X uzayının açık altcümleleri ise, $(A_i)_{i \in I}$ ailesine X uzayının bir ***açık örtüsü*** denir. $J \subset I$ sonlu ise X cümlesinin $(A_i)_{i \in J}$ örtüsüne X cümlesinin ***sonlu örtüsü*** denir. Eğer $(A_i)_{i \in I}$ ailesinin bir alt ailesi, X uzayını örterse bu alt aileye X in bir ***alt örtüsü*** denir.

Tarif 2.1.15 X bir topolojik uzay olsun. Eğer X in herbir açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa, X uzayına ***kompakt uzay*** denir.

Teorem 2.1.3 Bir kompakt uzayın her bir kapalı altcümlesi kompakttır (Yıldız 1999).

Tarif 2.11.6 X bir topolojik uzay olsun. Eğer X, kendisinden ve boştan farklı ayrık ve açık iki cümlenin bileşimi olarak yazılamıyor ise X uzayına ***irtibatlıdır*** denir.

Teorem 2.1.4 X irtibatlı bir topolojik uzay olsun. Bu durumda X deki hem açık hem de kapalı olan altcümleler, boş cümle ve X in kendisidir (Yıldız 1999).

Teorem 2.1.5 X, Y iki topolojik uzay, X irtibatlı(veya kompakt) ve f:X→Y sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda f(X) cümlesi Y de irtibatlıdır(veya kompakttır).

Tarif 2.1.17 (X,τ) topolojik uzay, $I=[0,1]\subset R$ birim kapalı aralık öyleki üzerinde R den indirgenen alışılmış topoloji olsun. $x,y\in X$ olmak üzere $\alpha(0)=x$ ve $\alpha(1)=y$ olacak şekilde bir $\alpha:I\to X$ sürekli tasviri varsa, α tasvirine x den y ye bir ***eğri***(yol) denir. x noktasına eğrinin başlangıç noktası, y noktasına da eğrinin bitim noktası denir. $\alpha(0)=\alpha(1)$ ise eğriye kapalı eğri denir. Eğer $\alpha:I=[0,1]\to X$ fonksiyonu sabit ise, α eğrisine X de ***sabit eğri*** denir.

Tarif 2.1.18 (X,τ) topolojik uzay olsun. Her $x,y\in X$ için x ve y noktalarını birleştiren bir eğri var ise X e ***eğrisel irtibatlı uzay*** denir.

Örnek 2.1.1 R, üzerindeki alışılmış topoloji ile birlikte eğrisel irtibatlıdır. Çünkü R de alınan herhangi iki nokta reel doğrunun bir parçası ile birleştirilebilir. Aynı şekilde (R^n,τ) alışılmış topolojik uzay, eğrisel irtibatlıdır. Gerçekten $x=(x_1,x_2,...,x_n)$, $y=(y_1,y_2,...,y_n)\in R^n$ ve $\alpha:[0,1]\to R^n$ fonksiyonu

$t\to\alpha(t)=(1-t)x+ty=((1-t)x_1+ty_1,(1-t)x_2+ty_2,...,(1-t)x_n+ty_n)$ şeklinde tarif edilmiş olsun. Bu durumda $\alpha([0,1])$ eğrisi x noktasını y noktasına birleştiren bir eğridir. O halde R^n eğrisel irtibatlıdır.

Teorem 2.1.6 Eğrisel irtibatlı bir uzay, irtibatlı bir topolojik uzaydır (Dugundji 1966).

Teorem 2.1.7 Eğrisel irtibatlı bir uzayın sürekli bir tasvir altındaki görüntüsü de eğrisel irtibatlıdır.

Sonuç 2.1.1 Eğrisel irtibatlı olma özeliği bir topolojik özeliktir.

Tarif 2.1.19 Eğer X uzayı her noktasında lokal eğrisel irtibatlı ise, X e ***lokal eğrisel irtibatlı uzay*** denir.

Teorem 2.1.8 Bir topolojik uzay irtibatlı ve lokal eğrisel irtibatlı ise eğrisel irtibatlıdır.

İspat $a\in X$ ve A, a noktasının bir eğri ile birleştirilebilen X in bütün noktalarının cümlesi olsun. $a\in A$ olduğundan $A\neq\varnothing$ dır. Eğer A cümlesinin hem açık hemde kapalı olduğunu gösterirsek, X in irtibatlı olmasından A=X olur.

$b\in A$ olsun. $b\in X$ ve X lokal eğrisel irtibatlı olduğundan b nin X de eğrisel irtibatlı bir U komşuluğu vardır. Bu durumda herhangi bir $z\in U$ noktası bir eğri ile b noktasına birleştirilebilir. b noktası da A da bir eğri ile a noktasına birleştirilebildiğinden z noktası a noktasına birleştirilebilirdir. O halde $U\subset A$ dır. Böylece A açıktır.

$b\in \overline{A}$ olsun. $b\in X$ ve X lokal irtibatlı olduğundan b nin X de eğrisel irtibatlı bir U komşuluğu vardır. Bu durumda $U\cap A\neq\varnothing$ dır. $z\in U\cap A$ alalım. b noktası z ye bir eğri ile birleştirilebilir ve z de a ya bir eğri ile birleştirilebilirdir. Dolayısıyla b, a ya bir eğri ile birleştirilebilir. O halde $b\in A$ dır. Bu ise $\overline{A}\subset A$ demektir. $A\subset\overline{A}$ olduğundan $A=\overline{A}$ elde edilir. Dolayısıyla A kapalıdır.

Sonuç olarak A=X olup X eğrisel irtibatlı topolojik bir uzaydır.

Tarif 2.1.20 Elemanlarına nesne adı verilen, yani cümle ve üzerinde tarifli tasvirlerden oluşan bir sisteme ***kategori*** adı verilir. Katagorilere bir örnek olarak, topolojik uzaylar ve sürekli tasvirler kategorisi verilebilir.

Tarif 2.1.21 M ve N iki kategori ve F:M→N bir tasvir olsun. Eğer M ye ait herbir X nesnesine N de bir F(X) nesnesi,M deki herbir f:X→Y morfizmine ise N de $F(f):F(X)\to F(Y)$ morfizmi karşılık getiriliyor ve

1) $F(1_X)=1_{F(X)}$

2) $F(gf)=F(g)F(f)$

şartları sağlanıyor ise F ye bir funktor veya kovaryant funktor denir. Eğer 2) de $F(gf)=F(f)F(g)$ oluyorsa F ye ***kontravaryant funktor*** adı verilir.

Örnek 2.1.2 Kompakt Hausdorff uzayları ve sürekli tasvirlerinin kategorisinden, reel değerli sürekli fonksiyonların normlu halkası ve sürekli homomorfizmleri kategorisine bir kontravaryant funktor vardır.

Tarif 2.1.22 G bir grup ve N, G nin bir altgrubu olsun. Eğer her $a \in G$ için $aN=Na$ oluyorsa, bu durumda N ye G nin ***normal altgrubu*** denir.

Aşağıdaki teorem normal altgruplar için bir kriter özeliğindedir.

Teorem 2.1.9 N nin, G nin bir normal altgrubu olabilmesi için gerek ve yeter şart her $a \in G$ için $aNa^{-1} \subset N$ olmasıdır (James and Liebeck 1993).

Tarif 2.1.23 G bir grup ve N, G nin bir normal altgrubu olsun. $G/N=\{aN : a \in G\}$ üzerinde $\oplus$ işlemini her $aN, bN \in G/N$ için $aN \oplus bN=(ab)N$ olarak tarif edelim. $(G/N, \oplus)$ bir gruptur.

Bu gruba G nin N ile bölünmesinden elde edilen ***bölüm grubu*** denir.

Tarif 2.1.24 G ve H herhangi iki grup ve ϕ, G den H içine bir dönüşüm olsun. Eğer her $a,b \in G$ için $\phi(ab)=\phi(a)\phi(b)$ oluyorsa, bu durumda ϕ ye bir ***homomorfizm*** denir.

Tarif 2.1.25 Eğer $\phi : G \to G'$ homomorfizmi bire-bir ve üzerine ise, bu durumda ϕ ye bir ***izomorfizm*** denir. ϕ, G den G ye bir izomorfizm ise ϕ ye ***otomorfizm*** adı verilir.

Tarif 2.1.26 G ve H iki grup ve $\phi : G \to H$ bir homomorfizm olsun. e', H nin özdeş elemanı olmak üzere

$$\ker\phi=\{a \in G : \phi(a)=e'\}$$

cümlesine ϕ nin çekirdeği denir. Açık olarak $\ker\phi$, G nin bir normal altgrubudur.

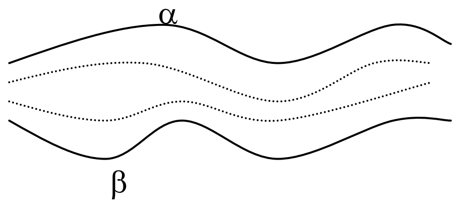
Teorem 2.1.10 G, H iki grup ve $\phi : G \to H$ üzerine bir homomorfizm olsun. Bu durumda $G/\ker\phi \cong H$ dir (James and Liebeck 1993).

3. HOMOTOPİ VE DEMET TEORİSİ

3.1 Homotopi

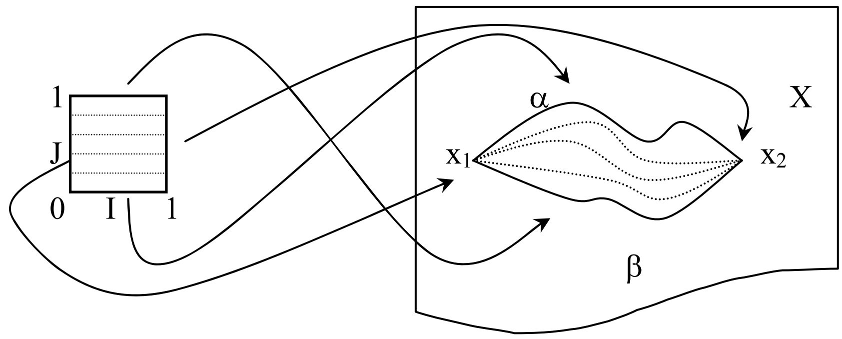
Tarif 3.1.1. X bir topolojik uzay olsun. X uzayı üzerindeki herbir kapalı eğri sürekli olarak X deki bir noktaya büzülebiliyorsa X uzayına ***basit irtibatlıdır*** denir.
Buna göre küre basit irtibatlıdır. Fakat tor basit irtibatlı değildir. Basit irtibatlı uzayları basit irtibatlı olmayan uzaylardan ayıran önemli özellik, küre üzerindeki herhangi basit kapalı bir eğri diğeri üzerine sürekli olarak deforme edilirken, tor için bu doğru değildir. Bu homotopi kavramının ana düşüncesidir.

Tarif 3.1.2. α, β X topolojik uzayında iki eğri olsun. Eğer α, β ya sürekli olarak deforme oluyorsa bu iki eğriye ***homotoptur*** denir. Bu durum $\alpha \sim \beta$ şeklinde gösterilir.



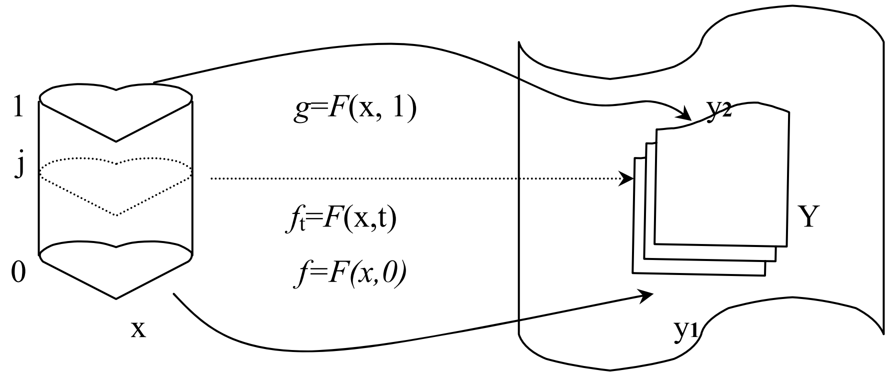
Şekil 3.1

Tarif 3.1.3. $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow X$ iki eğri, $\alpha(0)=\beta(0)=x_1$ ve $\alpha(1)=\beta(1)=x_2$ olsun. Bu durumda $F(x, 0)=\alpha$, $F(x, 1)=\beta$, $F(0, t)=x_1$,$F(1, t)=x_2$ olacak şekilde tarif edilen $F(x, t) : I x J \rightarrow X$ sürekli tasvire α dan β ya sürekli bir deformasyon denir. Bu deformasyon birinci düşey ekseni x_1 ve ikinci düşey ekseni de x_2 ye dönüştürür .



Şekil 3.2

Tarif 3.1.4. X, Y iki topolojik uzay ve f, g : X$\to$Y iki sürekli tasvir olsun. Eğer F(x, 0)= f, F(x, 1)= g, F(x, t)= f_t olacak şekilde bir F=F(x, t) :XxJ $\to$Y sürekli tasviri varsa,bu durumda f,g ye homotoptur denir ve f~g ile gösterilir. F tasvirine de f den g ye bir homotopi denir.



Şekil 3.3

Teorem 3.1.1. Homotopi bağıntısı bir eşdeğerlik bağıntısıdır.

İspat. i) ~ bağıntısı yansımalıdır. Yani f~f dir. Çünkü F(x, t) : XxJ $\to$ Y homotopisini F(x, t)=f(x) şeklinde tarif edersek F(x, t) süreklidir ve F(x, 0)=F(x, 1)=f dir.

ii) ~ bağıntısı simetriktir. Gerçekten, f~g ise F(x, 0)=f, F(x, 1)=g olacak şekilde sürekli bir F(x, t):XxJ$\to$Y tasviri vardır. Bu durumda G(x, t):XxJ$\to$Y tasviri G(x,t)=F(x, 1-t) şeklinde tarif edilirse G fonksiyonu süreklidir ve G(x, 0)=F(x, 1)=g, G(x,1)=F(x, 0)=f dir. Bu ise g~f demektir.

iii) ~ bağıntısı geçişmelidir. Gerçekten, f~g ise F(x,0)=f, F(x, 1)=g olacak şekilde sürekli bir F(x, t):XxJ$\to$Y fonksiyonu ve g~h ise G(x,0)=g, G(x, 1)=h olacak şekilde sürekli bir G(x, t):XxJ$\to$Y fonksiyonu vardır. Şimdi

H(x, t): XxJ$\to$Y tasviri $H(x, t)= \begin{cases} F(x,2t) & , \quad 0 \leq t \leq 1/2 \\ G(x,2t-1) & , \quad 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$

şeklinde tarif edilirse, H süreklidir ve H(x, 0)=F(x, 0)=f, H(x, 1)=G(x, 1)=h dir. Dolayısıyla f~h dır.

Tarif 3.1.5. X, Y iki topolojik uzay $X_0 \subset X$ herhangi bir altcümle ve *f*, g:X→Y, her $x_0 \in X_0$ için $f(x_0)=g(x_0)$ şartını sağlayan sürekli tasvirler olsun. Eğer

i) Her $x \in X$ için $F(x,0)=f(x)$, $F(x, 1)=g(x)$

ii) Her $x_0 \in X_0$ için $F(x_0, t)=f(x_0)=g(x_0)$

ise f tasviri X_0 göre g ye homotoptur denir ve f~g rel X_0 ile gösterilir. $X_0=\varnothing$ alınırsa adi homotopi rölatif homotopinin özel bir halidir.

Rölatif homotopi bağıntısı bir eşdeğerlik bağıntısıdır. Dolayısıyla X topolojik uzayından Y topolojik uzayına bütün f : X→Y sürekli tasvirlerin cümlesi ~ rölatif homotopi bağıntısı altında eşdeğerlik sınıflarına ayrılır.Bu eşdeğerlik sınıflarına ***homotopi sınıfları*** denir ve bütün homotopi sınıflarının cümlesi

$$[X:Y] =\{[f] \mid f:X\to Y \text{ sürekli } \}$$

ile gösterilir.

Tarif 3.1.6. X,Y iki topolojik uzay, *f*,g: X→Y sürekli iki tasvir ve *f*~g olsun. Eğer g sabit tasvir ise, *f* ye bir ***sabite homotoptur*** denir.

Tarif 3.1.7. Eğer 1_X : X→X özdeş tasviri bir sabite homotop ise bu takdirde X topolojik uzayına ***büzülebilir*** veya ***bir noktaya deforme edilebilir*** denir.

Teorem 3.1.2. X,Y,Z topolojik uzaylar olmak üzere *f*,g:X→Y sürekli tasvirler ve *f*~g olsun. h: Y→Z sürekli bir tasvir ise h*f*, hg : X→Z tasvirleri süreklidir ve h*f*~hg dir (Balcı 1978).

Teorem 3.1.3. X,Y,Z topolojik uzaylar, *f* : X→Y , g,h:Y→Z sürekli tasvirler ve g~h olsun. Bu durumda g*f*, h*f* : X→Z tasvirleri süreklidir ve g*f*~h*f* dir.

İspat. *f*,g ve h sürekli olduğundan gf ve hg tasvirleri süreklidir. g~h olduğundan $F(y,0)=g$, $F(y,1)=h$ olacak şekilde bir F: YxJ→Z sürekli tasviri vardır. Şimdi

G : XxJ→ Z tasvirini $x \in X$ olmak üzere

$G(x, t)=F(f(x),t)$ olarak tarif edelim. F ve f sürekli olduğundan $G=F\circ f$ süreklidir. Üstelik $G(x,0)=F(f(x),0)=gf(x)$, $G(x,1)=F(f(x),1)=hf(x)$ dır. Dolayısıyla g*f* ~h*f* dir.

Homotopi Eşdeğerlik

Tarif 3.1.8. X,Y iki topolojik uzay ve $f: X \rightarrow Y$ sürekli bir tasvir olsun. $ff' \sim 1_Y$ ve $f'f \sim 1_X$ olacak şekilde sürekli bir f' :Y→X tasviri mevcut ise bu takdirde f tasvirine bir ***homotopi eşdeğerlik*** denir.

Bir X topolojik uzayından Y topolojik uzayına homotopi eşdeğerlik bir f tasvirinin varlığı halinde X ve Y uzayları homotopik eşdeğerdirler veya X ve Y ***aynı homotopi tipindendir*** denir ve X~Y sembolü ile gösterilir.

Teorem 3.1.4. Aynı homotopi tipinden olma bağıntısı bir eşdeğerlik bağıntısıdır (Balcı 1978).

Dolayısıyla, yukarıda tarifi verilen "homotopi eşdeğerlik" bağıntısı ile topolojik uzayları ayrık sınıflara ayırmak mümkündür. Bu sınıflar, topolojik eşdeğer uzayların sınıfından daha geniştirler, çünki topolojik eşdeğerlik, homotopik eşdeğerlikten daha kuvvetlidir. Şöyle ki, bir homotopi invaryant, yani homotopik eşdeğer uzayların taşıdığı bir değer aynı zamanda bir topolojik invaryanttır. Aksine bir topolojik invaryant bir homotopi invaryant olmayabilir. Bu homotopi invaryantları arasında en önemlileri esas grup ile homotopi gruplarıdır. İleride bunlar incelenecektir.

Teorem 3.1.5. X ve Y topolojik eşdeğer iki uzay olsun. Bu takdirde X ve Y homotopi eşdeğerdirler.

İspat. X, Y topolojik eşdeğer olduklarından f:X→Y sürekli, bire-bir ve üzerinedir. f nin f^{-1} :Y→X inversi de süreklidir. Dolayısıyla $ff^{-1}=1_Y$, $f^{-1}f=1_X$. ~ bağıntısı bir eşdeğerlik bağıntısı olduğundan $ff^{-1} \sim 1_Y$, $f^{-1}f \sim 1_X$ dir. Böylece X~Y dir.

Teorem 3.1.6. Bir uzay büzülebilirdir yalnız ve yalnız tek nokta uzayı ile homotopik eşdeğer ise (Balcı 1978).

Topolojik Uzaylarda Eğriler

Tarif 3.1.9. $I=[0,1]\subset R$ ve Y herhangi bir topolojik uzay olsun. $\alpha,\beta:I\to Y$ eğrileri verilsin. $\alpha(1)=\beta(0)$, yani α nın bitim noktası ile β nın başlangıç noktası çakışsın. Bu takdirde

$$\gamma(x)=\begin{cases} \alpha(2x) & ,0 \leq x \leq 1/2 \\ \beta(2x-1) & ,1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

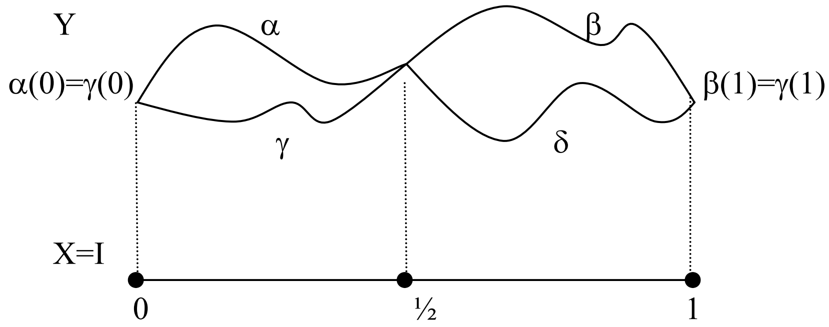
şeklinde tarif edilen $\gamma:I\to Y$ tasviri süreklidir. Dolayısıyla γ, Y de bir eğridir. Tarif olarak, γ ya α ile β nın çarpımı denir ve $\gamma=\alpha\beta$ geometrik olarak, β eğrisi α eğrisini takip ediyor demektir.

Tarif 3.1.10. α sabit bir tasvir ise, yani $\alpha(I)$ Y de birtek noktadan ibaret ise α eğrisine ***sıfır eğri*** denir.

Tarif 3.1.11. α eğrisinin iki uç noktası çakışıyor, yani $\alpha(0)=\alpha(1)$ ise α eğrisine ***kapalı eğri*** denir. Örneğin $\alpha\alpha^{-1}$ ve $\alpha^{-1}\alpha$ kapalı eğrilerdir.

Teorem 3.1.7. $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ Y topolojik uzayında eğriler olsun. Kabul edelim ki $\alpha\sim\gamma$, $\beta\sim\delta$ ve $\alpha\beta$ tariflidir. Bu takdirde $\gamma\delta$ tariflidir ve $\alpha\beta\sim\gamma\delta.\text{rel}(0,1)$ dir.

İspat. $\alpha\beta$ tarifli olduğundan $\alpha(1)=\beta(0)$ dır. Diğer taraftan $\alpha\sim\gamma$, $\beta\sim\delta$ olduğundan sırasıyla $\alpha(1)=\gamma(1)$, $\beta(0)=\delta(0)$ dır. Buradan $\gamma(1)=\delta(0)$ elde edilir. Yani $\gamma\delta$ tariflidir.



Şekil 3.4

$\alpha \sim \gamma$ olduğundan $F(x,0)=\alpha(x)$, $F(x,1)=\gamma(x)$, $F(0,t)=\alpha(0)=\gamma(0)$, $F(1,t)=\alpha(1)=\gamma(1)$ olacak şekilde sürekli bir F:IxJ→Y tasviri vardır. Aynı şekilde, $\beta \sim \delta$ olduğundan $G(x,0)=\beta(x)$, $G(x,1)=\delta(x)$, $G(0,t)=\beta(0)=\delta(0)$, $G(1,t)=\beta(1)=\delta(1)$ olacak şekilde sürekli bir G:IxJ→Y tasviri vardır. Şimdi,

I yı ikiye parçalamak suretiyle bir H:IxJ→Y tasvirini

$$H(x,t)=\begin{cases} F(2x,t) & ,0 \le x \le 1/2 \\ G(2x-1,t) & ,1/2 \le x \le 1 \end{cases}$$

şeklinde tarif edelim. H, IxJ de süreklidir. Üstelik

$$H(x,0)=\begin{cases} \alpha(2x) & ,0 \le x \le 1/2 \\ \beta(2x-1) & ,1/2 \le x \le 1 \end{cases}, \quad H(x,1)=\begin{cases} \gamma(2x) & ,0 \le x \le 1/2 \\ \delta(2x-1) & ,1/2 \le x \le 1 \end{cases}$$

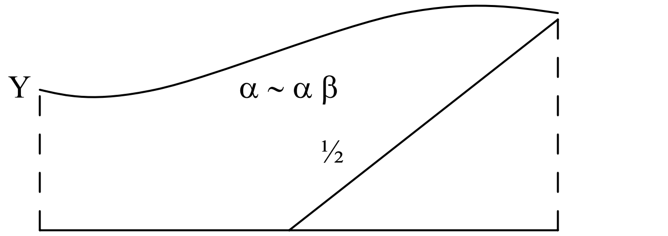
dir. Yani $H(x,0)=\alpha\beta(x)$ ve $H(x,1)=\gamma\delta(x)$ dir. Diğer taraftan

$H(0,t)=F(0,t)=\alpha(0)=\gamma(0)$, $H(1,t)=G(1,t)=\beta(1)=\delta(1)$

dir. Dolayısıyla $\alpha\beta \sim \gamma\delta$.rel(0,1) dir.

Teorem 3.1.8. α bir eğri ve β sıfır eğri, öyle ki $\alpha\beta$ tarifli olsun. Bu takdirde $\alpha\beta \sim \alpha$. Aynı şekilde γ bir sıfır eğri öyle ki $\gamma\alpha$ tarifli olsun. Bu takdirde $\gamma\beta \sim \alpha$.

İspat. $\alpha\beta$ tarifli ve β sıfır eğri olduğundan her $x \in I$ için $\alpha(1) = \beta(x)$. Şimdi bir F: I x J → Y tasvirini aşağıdaki şekilde tarif edelim.



Şekil 3.5

$$F\,(x,t) = \begin{cases} \alpha(\dfrac{2x}{1+t}) & , \quad 0 \le x \le \dfrac{1+t}{2} \\ \alpha(1) = \beta(x) & , \quad \dfrac{1+t}{2} \le x \le 1 \end{cases}$$

F süreklidir. Üstelik ;

$$F(x,0) = \begin{cases} \alpha(2x) & , \quad 0 \le x \le \dfrac{1}{2} \\ \alpha(1) = \beta(x) & , \quad \dfrac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases}$$

$$= \alpha\ \beta(x)$$

$$F(x,1) = \begin{cases} \alpha(x) & , \quad 0 \le x \le 1 \\ \alpha(1) & , \quad x = 1 \end{cases}$$

$$= \alpha(x)$$

Diğer taraftan $F\,(0,t) = \alpha\ (0)$, $F\,(1,t) = \alpha\ (1)$ dir. Dolayısıyla $\alpha\ \beta \sim \alpha$ dır.

Benzer şekilde $\gamma\alpha{\sim}\alpha$ olduğu gösterilebilir.

Teorem 3.1.9. $\alpha \sim \beta$ ise $\alpha^{-1} \sim \beta^{-1}$ dir.

İspat. $\alpha \sim \beta$ ise $F(x,0) = \alpha(x)$, $F(x,1) = \beta(x)$ olacak şekilde bir F: I x J $\rightarrow$ Y sürekli tasviri vardır. Üstelik $F(0,t) = \alpha\ (0) = \beta(0)$, $F(1,t) = \alpha(1) = \beta(1)$ dir. Şimdi bir,

G(x,t): I x J $\rightarrow$ Y tasvirini G(x,t)= F(1-x, t) şeklinde tarif edersek, G sürekli olup

$G(x,0) = F(1\text{-}x,0) = \alpha(1\text{-}x) = \alpha^{-1}(x)$,

$G(x,1) = F(1\text{-}x\ ,\ 1) = \beta(1\text{-}x) = \beta^{-1}(x)$

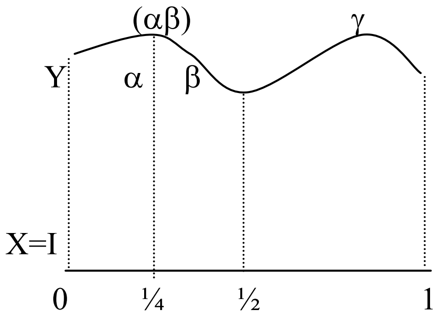
$G(0,t) = F(1,t) = \alpha(1) = \beta(1) = \alpha^{-1}(0) = \beta^{-1}(0)$

$G(1,t) = F(0,t) = \alpha(0) = \beta(0) = \alpha^{-1}(1) = \beta^{-1}(1)$

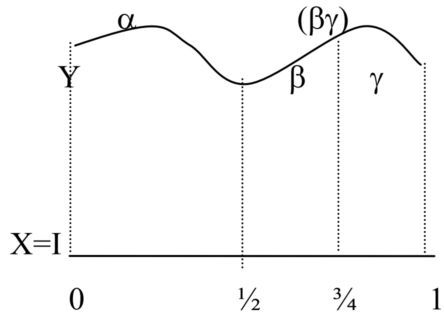
dir. Dolayısıyla $\alpha^{-1} \sim \beta^{-1}$dır.

Teorem 3.1.10. α,β,γ Y de üç eğri öyle ki $\alpha\ \beta$ ve $\beta\gamma$ tarifli olsun. Bu takdirde $(\alpha\ \beta)\gamma$, $\alpha\ (\beta\gamma)$ tariflidir ve $(\alpha\ \beta)\gamma \sim \alpha(\beta\gamma)$.

İspat. F: I x J $\rightarrow$ Y aşağıdaki şekilde tarif edilmiş olsun.



Şekil 3.6



Şekil 3.7

$$F\,(x,t) = \begin{cases} \alpha\left(\dfrac{4x}{1+t}\right) & , \quad 0 \le x \le \dfrac{1+t}{4} \\ \beta(4x - 1 - t) & , \quad \dfrac{1+t}{4} \le x \le \dfrac{2+t}{4} \\ \gamma\left(1 - \dfrac{4-4x}{2-t}\right) & , \quad \dfrac{2+t}{4} \le x \le 1 \end{cases}$$

F(x,t) tasviri süreklidir. Diğer taraftan

$$F(x,0) = \begin{cases} \alpha(4x) & , \quad 0 \le x \le \dfrac{1}{4} \\ \beta(4x - 1) & , \quad \dfrac{1}{4} \le x \le \dfrac{1}{2} \\ \gamma(2x - 1) & , \quad \dfrac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases}$$

ve

$$F(x,1) = \begin{cases} \alpha(2x) & , \quad 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ \beta 2(2x-1)) & , \quad \frac{1}{2} \le x \le \frac{3}{4} \\ \gamma(4x-3) & , \quad \frac{3}{4} \le x \le 1 \end{cases}$$

dir. Buradan $F(x,0) = (\alpha\ \beta\ )\ \gamma(x)$ ve $F(x,1) = \alpha\ (\beta\gamma)(x)$ elde edilir.

Üstelik $F(0,t) = \alpha(0) = F(0,0)$, $F(1,t) = \gamma\ (1) = F(1,1)$. Dolayısıyla , $(\ \alpha\ \beta)\gamma \sim\ \alpha\ (\beta\gamma)$ dir.

Teorem 3.1.11. α , Y de herhangi bir eğri ise $\alpha\ \alpha^{-1}$ ve $\alpha^{-1}\ \alpha$ sıfır eğriye homotoptur.

İspat. F: I x J $\rightarrow$ Y tasvirini şu şekilde tarif edelim:

$$F(x,t) = \begin{cases} \alpha(2x(1-t)) & , \quad 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ \alpha(2(1-x)(1-t)) & , \quad \frac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases}$$

Bu takdirde, F süreklidir ve

$$F(x,0) = \begin{cases} \alpha(2x) & , \quad 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ \alpha(2-2x) & , \quad \frac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases}$$

$$F(x,1) = \begin{cases} \alpha(0) & , \quad 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ \alpha(0) & , \quad \frac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases}$$

dır. Dolayısıyla $F\ (x,0) = \alpha\alpha^{-1}$, $F(x,1) = \alpha\ (0)$. Diğer taraftan, $F(0,t) = \alpha\ (0)$, $F\ (1,t)=\alpha(0)$ dır . O halde $\alpha\ \alpha^{-1}$, resmi $\alpha\ (0)$ olan sıfır eğriye homotoptur.

Yukarıdaki teoremlerin bir sonucu olarak aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 3.1.1. α , β Y de iki eğri öyle ki $\alpha\ \beta^{-1}$ tarifli ve kapalı olsun. Bu takdirde $\alpha\beta^{-1}$nın sıfır eğriye homotop olması için gerek ve yeter şart $\alpha \sim \beta$ olmasıdır.(Balcı 1978)

İspat. $\alpha\beta^{-1}$ tarifli olduğundan $\alpha(1)=\beta^{-1}(0)=\beta(1)$. $\alpha\beta^{-1}$ kapalı olduğundan $\alpha(0)=\beta(0)$. Şimdi kabul edelim ki $\alpha\ \beta^{-1}$ bir sıfır eğriye homotoptur. Bu takdirde $(\alpha\ \beta^{-1})\beta\sim\beta$ dır. Halbuki $(\alpha\ \beta^{-1})\beta\sim\alpha(\beta^{-1}\beta)$ dir. Buradan $\alpha(\beta^{-1}\beta)\sim\alpha$ dir. Dolayısıyla $\beta\sim\alpha$ elde edilir.
$\sim$ bağıntısı bir eşdeğerlik bağıntısı olduğundan $\alpha \sim \beta$ dır.
Karşıt olarak kabul edelim ki $\alpha \sim \beta$ olsun. Buradan $\alpha\ \beta^{-1} \sim \beta\ \beta^{-1}$ dir. Halbuki $\beta\ \beta^{-1}$ sıfır eğriye homotoptur. Dolayısıyla, $\alpha\ \beta^{-1}$ sıfır eğriye homotoptur.

3.2 Esas Grup

Y bir topolojik uzay ve $y_0\in Y$ sabit bir nokta olsun. Y de, y_0 da başlayan ve y_0 da biten bütün kapalı eğrilerin cümlesini göz önüne alalım. y_0 noktasına, eğriler için taban nokta, eğrilere ise y_0 da kapalı eğriler denir. α, y_0 da bir kapalı eğri ise , α ya homotop y_0 da bütün kapalı eğrilerin sınıfını $[\alpha]$ ile gösterelim. $[\alpha]$, $[\beta]$ gibi iki sınıfın çarpımı $[\alpha][\beta] = [\alpha\ \beta]$ ile tarif edilir. Bu şekilde tarif edilen çarpım, sınıfların temsilci elemanlarına bağlı değildir. Gerçekten $\alpha \sim \gamma$ ve $\beta \sim \delta$ ise $\alpha\beta \sim\gamma\delta$ olduğundan $[\gamma]\ [\delta] =[\gamma\delta]=[\alpha\beta]$ dır. Dolayısıyla $[\alpha][\beta]$ çarpımı $[\alpha]$ ve $[\beta]$ tarafından bir tek olarak tarif edildiğinden iyi tariflidir.
Yukarıda tarif edilen çarpım operasyonu ise homotopi sınıflarının cümlesinde bir grup yapısı tarif eder. Gerçekten

1. y_0 da kapalı eğrilerin homotopi sınıflarının cümlesi çarpım operasyonuna göre kapalıdır.

2. Her $[\alpha]$, $[\beta]$, $[\gamma]$ sınıfları için $([\alpha]\ [\beta])\ [\gamma] = [\alpha\beta]\ [\gamma] = [(\alpha\beta)\gamma]$ ve
   $[\alpha]\ ([\beta]\ [\gamma])= [\alpha]\ [\beta\gamma] = [\alpha(\beta\gamma)]$

dir. $(\alpha\beta)\gamma\sim \alpha(\beta\gamma)$ olduğundan $[(\alpha\beta)\gamma] = [\alpha(\beta\gamma)]$ ve $([\alpha][\beta])[\gamma] = [\alpha]([\beta][\gamma])$ dir. Dolayısıyla birleşme özelliği sağlanır.

3. y_0 da sıfır eğrilerin homotopi sınıfını $[1]$ ile gösterelim. Her $[\alpha]$ sınıfı için $[\alpha]\ [1]= [\alpha]=[1].\ [\alpha]$ dır. O halde $[1]$ özdeş elemandır.

4. Her $[\alpha]$ sınıfı için $[\alpha].[\alpha^{-1}]=[1]=[\alpha^{-1}].[\alpha]$ olduğundan $[\alpha]^{-1}=[\alpha^{-1}]$dir. Dolayısıyla, ters eleman özelliği sağlanır.

Böylece, y_0 da kapalı eğrilerin bütün homotopi sınıflarının cümlesi tarif edilen çarpma işlemine göre bir gruptur. Bu gruba y_0 da ***esas grup*** denir ve $\pi_1(Y,y_0)$ ile gösterilir, yani

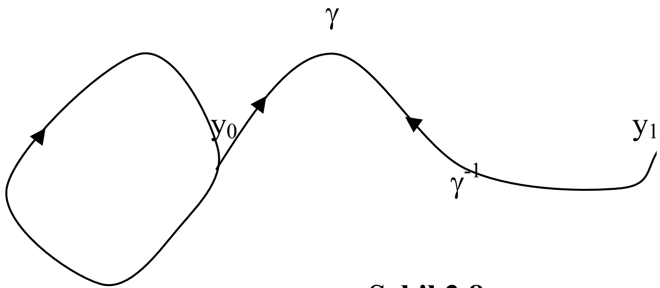
$$\pi_1(Y, y_0) = \{[\alpha]: \alpha \text{ , } y_0 \text{ da bir kapalı eğri}\}$$

dır.

Şimdi göstereceğiz ki, eğrisel irtibatlı topolojik uzaylarda esas grup taban noktasına bağlı değildir.

Teorem 3.2.1. Y eğrisel irtibatlı bir topolojik uzay ve $y_0, y_1 \in Y$ herhangi iki nokta olsun. Bu takdirde $\pi_1(Y, y_0) \cong \pi_1(Y, y_1)$ dir.

İspat. α, y_0 da bir kapalı eğri olsun. Y eğrisel irtibatlı olduğundan y_0 başlangıç ve y_1 bitim noktası olan bir γ eğrisi vardır. Bu takdirde $\beta = (\gamma^{-1}\alpha\gamma)$, y_1 de bir eğridir.



Şekil 3.8

Diğer taraftan $\alpha_1$ve α_2 , y_0 da kapalı eğriler ve $\alpha_1 \sim \alpha_2 \Rightarrow \gamma^{-1}\alpha_1 \sim \gamma^{-1}\alpha_2$

$$\Rightarrow (\gamma^{-1}\alpha_1)\gamma \sim (\gamma^{-1}\alpha_2)\gamma$$

$$\Rightarrow \beta_1 \sim \beta_2$$

Burada $\beta_1 = (\gamma^{-1}\alpha_1)\gamma \sim \beta_2 = (\gamma^{-1}\alpha_2)\gamma$ dır.

Karşıt olarak, β_1, β_2 y_1 de iki eğri ve $\alpha_1 = (\gamma\, \beta_1)\, \gamma^{-1}$ $\alpha_2 = (\gamma\beta_2)\, \gamma^{-1}$ y_0 da karşılık gelen eğriler iken $\beta_1 \sim \beta_2 \Rightarrow \alpha_1 \sim \alpha_2$ dir. Görülmektedir ki, π_1 (Y, y_0) ın her bir $[\alpha]$ homotopi sınıfı $\pi_1(Y, y_1)$ de bir tek şekilde bir $[\beta]$ homotopi sınıfını belirtmektedir. Karşıt olarak $\pi_1(Y, y_1)$ de her bir $[\beta]$ homotopi sınıfı $\pi_1(Y_1, y_0)$ da bir tek olarak bir $[\alpha]$ homotopi sınıfını göstermektedir.

Dolayısıyla bir ϕ: $\pi_1(Y, y_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_1)$ tasvirini her $[\alpha] \in \pi_1$ (Y, y_0) için $\phi\ ([\alpha]) = [(\gamma^{-1}\ \alpha)\gamma\ ]$ şeklinde tarif edilirse, kolaylıkla gösterilebilir ki ϕ bir izomorfizmdir. Çünkü ϕ nin oluşumundan, birebir ve üzerine olduğu açıkça görülebilir. Üstelik herhangi bir $[\alpha_1]$, $[\alpha_2] \in \pi_1(Y, y_o)$ için

$$\begin{aligned}
\phi([\alpha_1][\alpha_2] &= \phi\ ([\alpha_1\ \alpha_2]) = [(\gamma^{-1}\ \alpha_1\ \alpha_2)\ \gamma] \\
&= [(\gamma^{-1}\alpha_1\ (\gamma\ \gamma^{-1}\ )\alpha_2)\ \gamma] \\
&= [((\gamma^{-1}\alpha_1)\ \gamma)\ ((\gamma^{-1}\ \alpha_2)\ \gamma)] \\
&= [(\gamma^{-1}\alpha_1)\ \gamma]\ [(\gamma^{-1}\ \alpha_2)\ \gamma] \\
&= \phi([\alpha_1])\ \phi\ ([\alpha_2])
\end{aligned}$$

dir.Dolayısıyla $\pi_1(Y, y_0) \cong \pi_1\ (Y, y_1)$ dir.

Tarif 3.2.1. Y bir topolojik uzay ve $y_0 \in Y$ olsun. Bu takdirde (Y, y_0) çiftine bir ***noktalı topolojik uzay*** denir.

Notasyon. Y de tabanı y_0 olan bütün kapalı eğrilerin cümlesini $L(Y, y_0)$ ile göstereceğiz.

Teorem 3.2.2. (X, x_0) ve (Y, y_0) uzaylarının çarpımının esas grubu, esas gruplarının direkt çarpımına izomorftur. Yani

$$\pi_1\ (X \times Y,\ x_0 \times y_0) \cong \pi_1(\ X, x_0) \otimes \pi_1(Y, y_0)$$

dir (Balcı 1978).

Teorem 3.2.3. Y_0 ,Y_1 iki topolojik uzay, $y_0 \in Y_0$ herhangi bir sabit nokta ve f: $Y_0 \to Y_1$ bir sürekli tasvir olsun. Bu takdirde bir

$$f^*: \pi_1(Y_0,y_0) \to \pi_1(Y_1,y_1 = f(y_0))$$

homomorfizmi vardır.

İspat. α,β $y_0 \in Y_0$ da iki eğri olsun. Y_1 de γ ve δ eğrileri, $\gamma = fo\alpha$, $\delta = fo\beta$ şeklinde tarif edilsin. Bu takdirde γ , δ Y_1 de taban noktası $y_1 = f(y_0)$ olan kapalı eğrilerdir. Şayet $\alpha \sim \beta$ ise bir $F = F(x,t)$: I x J $\to Y_0$ sürekli tasviri vardır öyle ki $F(x,0) = \alpha(x)$, $F(x,1) = \beta(x)$, $F(0,t) = \alpha(0) = \beta(0) = y_0$, $F(1,t) = \alpha(1) = \beta(1) = y_0$ dır. Şimdi bir G(x,t): I x J $\to$ Y tasvirini G(x,t) = (f oF) (x,t) şeklinde tarif edelim. Açık olarak G sürekli olup bir homotopidir. Dolayısıyla $\alpha \sim \beta \Rightarrow f\, o\alpha = \gamma \sim f\, o\beta = \delta$ dır. O halde bir

$$\phi: \pi_1(Y_0 , y_0) \to \pi_1(Y_1 , y_1 = F(y_0))$$

tasvirini $\phi([\alpha]) = [fo\alpha]$ şeklinde tarif edilirse kolaylıkla gösterilebilir ki ϕ bir homomorfizmdir.

Şimdi aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz.

Teorem 3.2.4. Noktalı topolojik uzaylar ve sürekli tasvirleri kategorisinden, gruplar ve homomorfizmleri kategorisine bir funktor (kovaryant funktor) vardır öyle ki bu funktor her bir (Y_0 , y_0) noktalı topolojik uzayına (Y_0 , y_0) esas grubunu, her bir f: $(Y_0 , y_0) \to (Y_1, y_1)$ sürekli tasvirine de

$$\pi_1(f) = f^*: \pi_1 (Y_0 , y_0) \to \pi_1 (Y_1, y_1 = f(y_0))$$

homomorfizmini karşılık tutar. Burada π_1' e ***esas grup funktoru*** denir.

Teorem 3.2.5. (Y_0 , y_0) , (Y_1, y_1) noktalı topolojik uzayları ve f: $(Y_0 , y_0) \to (Y_1, y_1)$ ve g: $(Y_0 , y_0) \to (Y_1, y_1)$ sürekli tasvirleri verilmiş olsun. Şayet $f \sim g$ ise bu takdirde $f^* = g^*$ dır (Balcı, 1978).

Teorem 3.2.6. (Y_0,y_0) ,(Y_1,y_1), (Y_2,y_2) noktalı topolojik uzayları ve f:$(Y_0 , y_0) \to (Y_1,y_1)$ g:$(Y_1, y_1) \to (Y_2, y_2)$ sürekli tasvirleri verilmiş olsun. Bu takdirde $(g\, f)^* = g^*\, f^*$ dır.

İspat. Açık olarak gf: $(Y_0,y_0) \to (Y_2,y_2)$ olup $(gf)^*: \pi_1(Y_0,y_0) \to \pi_1(Y_2,y_2)$ dir. Göstereceğiz ki $\pi_1(g\ f) = \pi_1(g) \circ \pi_1(f)$ dir. Şimdi $\alpha: I \to Y_0$, $y_0 \in Y_0$ da bir kapalı eğri olsun. Bu takdirde $(g\ f)\alpha$, $g(f\ \alpha): I \to Y_2$ sürekli tasvirleri $y_2 \in Y_2$ de kapalı eğriler olup $(gf)\alpha \sim g(f\ \alpha)$ rel.(0,1) dir. Gerçekten bir $F = F(x,t) : I \times J \to Y_2$ tasviri

$$F(x,t) = \begin{cases} (gf)(\alpha(x)) & , 0 \le x \le 1-t \\ g(f\alpha(x)) & , 1-t \le x \le 1 \end{cases}$$

şeklinde tarif edilirse görülebilir ki $(g\ f)\ \alpha \sim g(f\ \alpha)$ rel.(0,1) . Dolayısıyla $[(g\ f)\ \alpha] = [g(f(\alpha))]$ yazılabilir. Bu ise $(gf)^*([\alpha]) = g^*([f\alpha]) = g^*(f^*[\alpha])$ demektir. Dolayısıyla $(gf)^* = g^* f^*$ dır.

Şimdi de $(Y_0\ ,\ y_0)$ ve $(Y_1,\ y_1)$ noktalı topolojik uzayları arasında $f(y_0)=y_1$ şartını sağlayan bir $f: Y_0 \to Y_1$ verildiğinde buna karşılık gelen f^*ın hangi şartlar altında bir izomorfizm olduğunu araştıracağız.

Teorem 3.2.7. Y_0, Y_1 topolojik uzayları verilmiş olsun. Kabul edelim ki

i) $y_0 \in Y_0$ sabit bir nokta ise $f(y_0) = y_1 \Rightarrow g(y_1) = y_0$

ii) $g\ f \sim 1_{Y_0}$ rel y_0

iii) $f\ g \sim 1_{Y_1}$ rel y_1

olacak şekilde $f: Y_0 \to Y_1$ ve $g: Y_1 \to Y_0$ sürekli tasvirleri mevcut olsun.
Bu takdirde $\pi_1(Y_0, y_0) \cong \pi_1(Y_1, y_1)$ dir. Yani f^* bir izomorfizimdir.

İspat. $f:(Y_0,y_0) \to (Y_1,y_1)$, $g: (Y_1,y_1) \to (Y_0,y_0)$, $gf: (Y_0,y_0) \to (Y_0,y_0)$, $fg:(Y_1,y_1) \to (Y_1,y_1)$ sürekli tasvirleri sırası ile f^*, g^* , $(g\ f)^*$, $(f\ g)^*$ homomorfizmlerini belirtirler. Göstereceğiz ki $(gf)^* = g^*\ f^*$ ve $(f\ g)^* = f^* g^*$ dır.

$\alpha: I \to Y_0$, $y_0 \in Y_0$ da bir eğri olsun. Bu takdirde $(gf)\alpha$ de y_0 da bir eğridir ve $(gf)\alpha \sim \alpha$ dır. Gerçekten $gf \sim 1_{y_0}$ rel y_0 olduğundan

$G(y,0) = gf$, $G(y,1) = 1_{y_0}$, $G(y_0,t) = y_0$, $(gf)(y_0) = 1_{y_0}(y_0)$

olacak şekilde bir $G: Y_0 \times J \to Y_0$ sürekli tasviri vardır.

Şimdi bir $F = F(x,t) = I \times J \to Y_0$ tasvirini

$$F(x,t) = \begin{cases} G(\alpha(x), t), & 0 \leq x \leq 1-t \\ \alpha(x), & 1-t \leq x \leq 1 \end{cases}$$

şeklinde tarif edelim.

Bu takdirde F sürekli olup $F(x,0) = (gf)\,\alpha(x)$, $F(x,1) = \alpha(x)$, $F(0,t) = y_0 = (gf)\,((\alpha)(0)) = \alpha(0) = F(1,t)$ ve $F(1,t) = y_0 = (gf)(\alpha(1)) = \alpha(1)$. Dolayısıyla $(g\,f)\alpha \sim \alpha$ dır. Diğer taraftan her $[\alpha] \in \pi_1(Y_0, y_0)$ için

$(g\,f)^*([\alpha]) = [(g\,f)(\alpha)]$ olduğundan $(g\,f)^*([\alpha]) = [\alpha]$ dır. Bundan dolayı $(g\,f)^* = g^* f^* = 1_{\pi_1(Y_0, y_0)}$. Benzer şekilde $(f\,g)^* = f^*\,g^* = 1_{\pi_1(Y_1, y_1)}$ dir. Şimdi f^* ın bir izomorfizm olduğunu gösterelim.

i) f^* birebirdir. Çünkü $[\alpha_1]$, $[\alpha_2] \in \pi_1(Y_0, y_0)$ herhangi iki eleman ve $f^*([\alpha_1]) = f^*([\alpha_2])$ ise $g^*(f^*([\alpha_1])) = g^*(f^*([\alpha_2])) \Rightarrow [\alpha_1] = [\alpha_2]$ olduğundan f^* birebirdir.

ii) f^* üzerinedir. Gerçekten $[\beta] \in \pi_1(Y_1, y_1)$ herhangi bir eleman olsun. Bu takdirde $\beta: I \to Y_1$, $y_1 \in Y_1$ bir kapalı eğridir ve $g(y_1) = y_0$ olduğundan $g\beta$, y_0 da bir kapalı eğridir. Buradan $g\beta = \alpha$ kabul edilirse

$$f^*([\alpha]) = f^*([g\,\beta]) = f^*(g^*([\beta])) = (f^*\,g^*)([\beta]) = [\beta]$$

olduğundan f^* üzerinedir. f^* ın bir homomorfizim olduğu kolaylıkla sağlanır. O halde f^* bir izomorfizmdir. Aynı şekilde g^*ın da bir izomorfizm olduğu gösterilebilir. Esasen $(f^*)^{-1} = g^*$ dır.

Bu teoremin bir neticesi olarak aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 3.2.8. (Y_0, y_0) , (Y_1, y_1) noktalı topolojik uzaylar ve $f : (Y_0, y_0) \to (Y_1, y_1)$ bir homeomorfizm ise bu takdirde $f^*: \pi_1(Y_0, y_1) \to \pi_1(Y_1, y_1)$ bir izomorfizmdir.

İspat. Teorem 2.2.7 de $g = f^{-1}$ alınırsa ispat elde edilir.

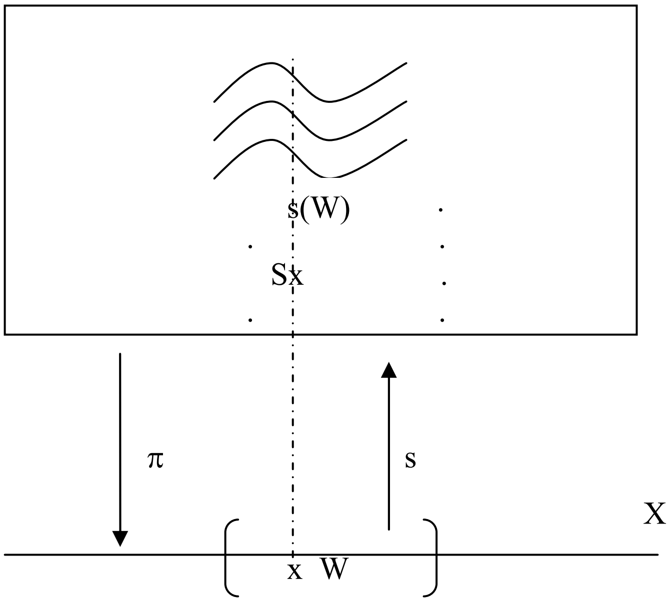
3.3 Demet Teorisi

Tarif 3.3.1. X, S iki topolojik uzay ve $\pi : S \to X$ lokal topolojik bir tasvir olsun. Bu takdirde, (S, π) ikilisine veya sadece S ye X üzerinde bir ***demet*** denir.
Her $x \in X$ için $S_x = \pi^{-1}(x)$ e x üzerinde (S, π) nin veya sadece S nin ***sapı*** denir.

Tarif 3.3.2. (S, π) , X üzerinde bir demet olsun. $S^* \subset S$ açık bir cümle ve $\pi^* = \pi \mid S^*$ ise bu takdirde, (S^*, π^*) ikilisine S nin ***altdemeti*** denir.

Açık olarak herbir altdemet bir demettir. Gerçekten, her $\sigma \in S$ noktası için π lokal topolojik olduğundan $U(\sigma) \subset S$ açık cıvarı ve bir $V(\pi(\sigma)) \subset X$ açık cıvarı vardır öyleki $\pi : U \to V$ tasviri topolojiktir. Fakat $U^* = U \cap S^*$ ve $V^* = \pi\ (U^*)$ sırasıyla, σ ve $\pi(\sigma)$ nın S^* ve X de açık cıvarları olup $\pi^*|U^* : U^* \to V^*$ topolojiktir. O halde π^*, S^* üzerinde topolojiktir. Dolayısıyla (S^*, π^*), X üzerinde bir demettir.
Şimdi, $W \subset X$ açık ve $\pi^{-1}(W) = S|W$ ise, bu takdirde, $S|W$ açıktır ve $(S|W, \pi|(S|W))$, S nin bir altdemetidir. Üstelik $S \mid W$, X üzerinde bir demettir.

Tarif 3.3.3. (S, π), X üzerinde bir demet, $W \subset X$ açık bir cümle ve $s : W \to S$, $\pi o s = 1_W$ şartını sağlayan sürekli bir tasvir olsun. Bu takdirde s ye S nin W üzerinde bir ***kesiti*** denir. S nin W üzerindeki bütün kesitlerinin cümlesini $\Gamma(W,S)$ ile göstereceğiz (Grauret and Fritzsche 1976).



Şekil 3.9

Teorem 3.3.1. (S,π), X üzerinde bir demet, $W \subset X$ bir açık cümle ve $s \in \Gamma(W,S)$ olsun. Bu takdirde π: $s(W) \rightarrow W$ topolojiktir ve $s=(\pi|s(W))^{-1}$ dir.

İspat. Her $x \in W$ için $\pi \circ s=1_w$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$s \circ (\pi|s(W)) \circ s(x)=s \circ (\pi \circ s)(x)=s(x)$$

olduğundan $s \circ (\pi|s(W)) \circ =1$ dir. Dolayısıyla $s=(\pi|s(W))^{-1}$ dir.

Teorem 3.3.2. (S,π), X üzerinde bir demet, $W \subset X$ bir açık cümle ve $s:W \rightarrow S$, $\pi \circ s=1_w$ şartını sağlayan bir tasvir olsun. $s \in \Gamma(W,S)$ olabilmesi için gerek ve yeter şart s(W) in S de açık olmasıdır.

İspat. $s \in \Gamma(W,S)$ olsun. Kabul edelim ki, s süreklidir. $\sigma_0 \in s(W)$ herhangi bir nokta olsun. Bu noktanın bir iç nokta olduğunu göstereceğiz. $x_0=\pi(\sigma_0)$, $s(x_0)=\sigma_0$ olsun. (S,π) bir demet olduğundan $V(x_0) \subset W$, $U(\sigma_0) \subset S$ açık civarı vardır $\ni$ $\pi|U : U \rightarrow V \cap W$ topolojiktir.s sürekli olduğundan $s(V') \subset U$ olacak şekilde $V'(x_0) \subset V$ vardır. Buradan, $(\pi|U)o(s|V') =(\pi os)|V'=1_{V'}$ dir. Böylece $(\pi|U)^{-1}(V') =s(V) \subset s(W)$, σ_0 ın bir açık civarıdır. Yani σ_0, s(W) nin bir iç noktasıdır. Karşıt olarak, s(W) S de açık olsun. Göstereceğiz ki $s \in \Gamma(W,S)$ sürekli bir tasvirdir. Hipotezden $\pi \circ s=1_W$ olup dolayısıyla, $(\pi|s(W))^{-1}=s$ dir. Böylece s süreklidir.

Teorem 3.3.3. (S,π), X üzerinde bir demet ve $V\subset X$ bir açık olsun. Bu takdirde $\sigma\in s(V)$ şartını sağlayan bir $s\in\Gamma(V,S)$ kesiti vardır (Grauret and Fritzsche 1976).

Teorem 3.3.4. (S,π), X üzerinde bir demet ve $W\subset X$ bir açık cümle olsun. Eğer $s_1,s_2\in\Gamma(W,S)$ kesitleri bir $x\in W$ noktasında eşit iseler, bu takdirde bir $V(x)\subset W$ açık civarında da eşittirler.

İspat. Kabul edelim ki $\sigma=s_1(x)=s_2(x)$ olsun. Bu takdirde $U=s_1(W_1)\cap s_2(W_2)$, σ nın açık bir civarıdır ve $\pi|U : U\rightarrow V=\pi(U)\subset W$ tasviri topolojiktir. Dolayısıyla

$$s_1|V=(\pi|U)^{-1}=s_2|V$$

dir.

Tarif 3.3.4. (S_1,π_1), (S_2,π_2), X üzerinde iki demet olsun.

1. $\pi_2 o\varphi=\pi_1$ özelliğini sağlayan $\varphi:S_1\rightarrow S_2$ tasvirine **sapları muhafaza ediyor** denir.
2. Sapları muhafaza eden sürekli bir $\varphi:S_1\rightarrow S_2$ tasvirine **demet morfizmi** denir.
3. Sapları muhafaza eden bir topolojik $\varphi:S_1\rightarrow S_2$ tasvirine **demet izomorfizmi** denir. Bu takdirde S_1 ve S_2 demetlerine izomorfiktir veya izomorftur denir.

Teorem 3.3.5. (S_i,π_i), $_{i=1,2}$, X üzerinde iki demet ve $\varphi:S_1\rightarrow S_2$ sapları muhafaza eden bir tasvir olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktirler:

1. φ bir demet morfizmidir.
2. Herbir $W\subset X$ açık cümlesi ve herbir $s\in\Gamma(W,S_1)$ kesiti için, $\varphi os\in\Gamma(W,S_2)$.
3. Herbir $\varphi\in S_1$ için bir $W\subset X$ açık cümlesi ve bir $s\in\Gamma(W,S_1)$ kesiti vardır öyleki $\varphi\in s(W)$ ve $\varphi os\in\Gamma(W,S_2)$.

İspat. (1)$\Rightarrow$(2) φ bir demet morfizmi ise süreklidir. $W\subset X$ açık ve $s\in\Gamma(W,S_1)$ ise, bu takdirde, φos de süreklidir üstelik $\pi_2 o(\varphi os)=(\pi_2 o\varphi)os=\pi_1 os=1_W$. Dolayısıyla $\varphi os\in\Gamma(W,S_2)$.

(2)$\Rightarrow$(3) $\sigma\in S_1$ ise, bu takdirde bir $W\subset X$ açık cümlesi ve bir $s\in\Gamma(W,S_1)$ vardır öyleki $\sigma\in s(W)$ dir. (2) deki şartlar sağlandığından dolayı $\varphi os\in\Gamma(W,S_2)$.

(3)$\Rightarrow$(1) (3) deki şartlar altında, $s : W \to s(W)$ topolojiktir. Dolayısıyla,

$\varphi | s(W) = (\varphi o s) o s^{-1} : s(W) \to S_2$

süreklidir ve dolayısıyla φ, σ da süreklidir.

Tarif 3.3.5. Kabul edelim ki, herbir $W \subset X$ açık cümlesine bir M_W cümlesi ve herbir (V,W), $V \subset W$, açık cümle çifti için bir $\gamma_{W,V} : M_W \to M_V$ tasviri verilsin.

Eğer,

1.Her $W \subset X$ açık için, $\gamma_{W,W} = 1_{M_W}$

2.$U \subset V \subset W \Rightarrow \gamma_{V,U} \, o \, \gamma_{W,V} = \gamma_{W,U}$

şartları sağlanıyor ise, $\{X, M_W, \gamma_{W,V}\}$ kolleksiyonuna **öndemet** ve $\gamma_{W,V}$ tasvirlerine **tahdit edici tasvirler** denir.

Herbir (S,π) demetine tabii bir şekilde bir öndemet tekabül eder. Gerçekten V,W X in açık cümleleri $\ni$ $V \subset W$, $M_W = \Gamma(W,S)$ ve $\gamma_{W,V}(s) = s|V$, $s \in M_W$ şeklinde tarif edilirse $\{X, \Gamma(W,S), \gamma_{W,V}\}$ bir öndemettir. Bu öndemete, S demetinin ***kanonik öndemeti*** denir.

Teorem 3.3.6. Herbir $\{X, M_W, \gamma_{W,V}\}$ öndemetine bir demet karşılık getirilebilir (Grauret and Fritzsche 1976).

Tarif 3.3.6. $(S_1,\pi_1),...,(S_L,\pi_L)$, X üzerinde demetler olsun. $W \subset X$ açık cümlesi için, $M_W = \Gamma(W,S_1) x....x \Gamma(W,S_L)$ kartezyen çarpımını teşkil edelim. $s = (s_1,...,s_L) \in M_W$ ve $V \subset W$ açık alt cümlesi için $\gamma_{W,V}(s) = (s_1|V,...,s_L|V)$ olsun. Bu takdirde, $\{X, M_W, \gamma_{W,V}\}$ bir öndemettir. Bu öndemetin tarif ettiği demete, $S^* = S_1 \oplus ... \oplus S_L$, ***Whitney toplamı*** denir.

Teorem 3.3.7. $(S_1,\pi_1),...,(S_L,\pi_L)$, X üzerinde demetler ve $S^* = S_1 \oplus ... \oplus S_L$ Whitney toplamı olsun. Bu takdirde her $x \in X$ için $(W,(s_1,...,s_L))_x \to (s_1(x),...,s_L(x))$ şeklinde tarifli bir γ: $S_x^* \to (S_1)_x x...x(S_L)_x$ bijeksiyonu vardır.

İspat. a. $\lambda=1,2$, $x\in W_1\cap W_2$ için $s_\lambda=(s_1^\lambda,...,s_L^\lambda)\in\Gamma(W_\lambda,S)$ olsun. $(W_1,s_1)\sim(W_2,s_2)$ dir, yalnız ve yalnız $\exists V(x)\subset W_1\cap W_2$ öyleki,

$(s_1^1|V,...,s_L^1|V)=(s_2^2|V,...,s_L^2|V)$ dir. Bu ise, $i=1,2,...,L$ için $s_i^1(x)=s_i^2(x)$ demektir. Dolayısıyla, $(W,(s_1,...,s_L))_x\to(s_1(x),...,s_L(x))$ şeklinde tarifli tasvir injektiftir.

b. Şayet $\sigma=(\sigma_1,...,\sigma_L)\in(S_1)_x x...x(S_L)_x$ ise ve $\sigma_i=s_i^*(x)\ni s_i^*\in\Gamma(W_i,S_i)$ ise, bu takdirde $W=\bigcap_{i=1}^{L}W_i$, x in bir civarıdır ve $s_i^*|W=s_i\in\Gamma(W,S_i)$ dir.

Netice olarak $s=(s_1,...,s_L)\in M_W$ dir ve γs, $\gamma s(x)=(W,s)_x\to s(x)=\sigma$ olacak şekilde S demetinin bir kesitidir. Dolayısıyla da yukarıda tarif edilen tasvir surjektiftir.

Dolayısıyla $S_1\oplus...\oplus S_L$ sapını $(S_1)_x x...x(S_L)_x$ ile özdeşleyebiliriz. Aynı şekilde $\Gamma(W,S_1\oplus...\oplus S_L)$ ile $\Gamma(W,S_1)x...x\Gamma(W,S_L)$ cümleleri özdeşlenebilir. Gerçekten $s_i\in\Gamma(W,S_i)$, $i=1,2,...,L$ için $s_1\oplus s_2\oplus...\oplus s_L:W\to S^*=S_1\oplus...\oplus S_L$ tasvirini her $x\in W$ için $(s_1\oplus s_2\oplus...\oplus s_L)(x)=(s_1(x),s_2(x),...,s_L(x))$ şeklinde tarif edelim. Açık olarak $(s_1,s_2,...,s_L)\in M_W$ ve $\gamma s=\gamma(s_1,s_2,...,s_L)=(W,(s_1,...,s_L))_x=(s_1(x),...,s_L(x))=(s_1\oplus s_2\oplus...\oplus s_L)(x)$. Böylece, $s_1\oplus s_2\oplus...\oplus s_L=\gamma s=\gamma(s_1,s_2,...,s_L)\to(s_1,s_2,...,s_L)$ şeklinde tarifli

$\gamma:\Gamma(W,S_1\oplus...\oplus S_L)\to\Gamma(W,S_1)x...x\Gamma(W,S_L)$ tasviri bijeksiyondur.

Netice olarak S nin herbir elemanına S ye ait kesitlerin birer nüvesi gözüyle bakılabilir.

Tarif 3.3.7. (S,π), X üzerinde bir demet olsun.

Eğer,

(i) π bir lokal topolojik tasvir,

(ii) Her $x\in X$ için $\pi^{-1}(x)=S_x$ sapı bir Abel grubu,

(iii) $S\oplus S\xrightarrow{+}S$ (yani $(\sigma_1,\sigma_2)\to\sigma_1+\sigma_2$) işlemi sürekli,

şartları sağlanıyorsa (S,π) ye X üzerinde Abelyen Grupların bir demeti denir.

Tarif 3.3.8. (S,π), X üzerinde Abelyen grupların bir demeti ve $S'\subset S$ altcümlesi verilsin.

Eğer

(i) $S'\subset S$ bir açık cümle

(ii) $\pi(S')=X$

(iii) Her $x\in X$ için $S'_x\subset S_x$ bir altgrup

ise S' ye , S **Abelyen grupların bir alt demeti** denir.

Tarif 3.3.9. Bir X topolojik uzayı üzerinde ***Abelyen grupların bir öndemeti*** diye, $\{X,M_W,\gamma_{W,V}\}$ öndemetine denir öyleki,

(i) (W), X in bir topoloji tabanıdır.

(ii) Herbir $W\subset X$ açık cümlesine bir M_W Abelyen grubu karşılık gelir.

(iii) Herbir (V,W), $V\subset W$, çifti için bir $\gamma_{W,V}:M_W\rightarrow M_V$ homomorfizmi tarif edilmiştir öyleki, $U\subset V\subset W$ için $\gamma_{V,U}\circ\gamma_{W,V}=\gamma_{W,U}$ dur.

Teorem 3.3.8. Abelyen grupların herbir öndemetine, Abelyen grupların bir demeti karşılık getirilebilir (Grauret and Fritzsche 1976).

3.4 Esas Grupların Demeti

X irtibatlı, lokal eğrisel irtibatlı bir topolojik uzay olsun. Herbir $x\in X$ için $H_x=\pi_1(X,x)$ esas gruplarının ayrık birleşimlerinin cümlesini

$$H=\bigvee_{x\in X} H_x$$

ile gösterelim. H, X üzerinde bir cümledir ve herbir $\sigma_x=[\alpha]_x\in H_x$ için $\varphi(\sigma_x)=\varphi([\alpha]_x)=x$ ile tarif edilen $\varphi:H\rightarrow X$ tasviri üzerinedir. Şimdi H cümlesi üzerinde, φ tasvirini lokal topolojik kılan ve herbir $H_x=\pi_1(X,x)$ üzerinde diskret topoloji oluşturan bir tabii topoloji inşaa edelim: $x\in X$ keyfi sabit bir nokta olsun. X eğrisel irtibatlı olduğundan $W=W(x)\subset X$ açık olmak üzere her $y\in W$ için başlangıç noktası x, bitim noktası y olan ve tamamen W de bulunan bir γ eğrisi daima vardır. Diğer taraftan, x deki α kapalı eğrisi için $(\gamma^{-1}\alpha)\gamma$ da y de bir kapalı eğridir. Eğer $\alpha_1\sim\alpha_2$ ise $(\gamma^{-1}\alpha_1)\gamma\sim(\gamma^{-1}\alpha_2)\gamma$
ve $[(\gamma^{-1}\alpha_1)\gamma]=[(\gamma^{-1}\alpha_2)\gamma]$ dır.

O halde, $W=W(x)$ için x deki kapalı eğrilerden faydalanarak, bir $s:W\rightarrow H$ tasvirini her $y\in W$ için α, x de bir kapalı eğri olmak üzere, $s(y)=[(\gamma^{-1}\alpha)\gamma]_y\in\pi_1(X,y)\subset H$ şeklinde tarif edebiliriz. Açıktır ki, bu şekilde tarifi yapılan s tek anlamlıdır ve aşağıdaki şartları sağlar:

1. Her $y\in W$ için, $(\varphi o s)(y)=\varphi(s(y))=\varphi([(\gamma^{-1}\alpha)\gamma]_y)=y$. O halde, $\varphi o s=1_W$.
2. $W=W(x)$ için α x de kapalı bir eğri, γ x de sıfır eğri, yani $\gamma:I\rightarrow X$ öyleki her $t\in I$ için $\gamma(t)=x$, ise bu takdirde $(\gamma^{-1}\alpha)\gamma\sim\alpha$, dolayısıyla $s(x)=[(\gamma^{-1}\alpha)\gamma]_x=[\beta]_x\in s(W)$ dir.

Şimdi, $W=W(x)$, α x de bir kapalı eğri ve $y\in W$ herhangi bir nokta olsun. γ başlangıç noktası x, bitim noktası y olan ve tamamen W de bulunan keyfi sabit bir eğri olmak üzere $(\gamma^{-1}\alpha)\gamma=\beta$ diyelim. Dolayısıyla $[(\gamma^{-1}\alpha)\gamma]_y=[\beta]_y$ ve buradan, $s(W)=\bigcup_{y\in W}[\beta]_y$ olarak yazılabilir. s(W) yi açık cümle olarak tarif edersek, gösterilebilir ki,

$$B=\{s(W):\ W=W(x)\subset X \text{ açık}\}$$

ailesi H üzerinde bir topoloji tabanıdır. Bunun için $s_1(W_1)$, $s_2(W_2)\in B$ olmak üzere $s_1(W_1)\cap s_2(W_2)\in B$ olduğunu göstermek yeterlidir. Gerçekten,

(i) $s_1(W_1)\cap s_2(W_2)\neq\varnothing$ ise enaz bir $[\alpha]_y\in s_1(W_1)\cap s_2(W_2)$ vardır
ve $\varphi[(\alpha)_y]=y\in(W_1\cap W_2)$ dir.O halde $[\alpha]_y\in s_1(W_1)$ ve $[\alpha]_y\in s_2(W_2)$ olup,
$[\alpha]_y=s_1(y), y\in W_1$ ve $[\alpha]_y=s_2(y), y\in W_2$ yazılabilir. Buradan
$s_1(y)=s_2(y), y\in(W_1\cap W_2)$ ve dolayısıyla
$s_1\big|W_1\cap W_2=s_2\big|W_1\cap W_2$ ve $s(W_1)=s(W_2)$ dır. Böylece
$s_1=s_2$ ve $s_1\big|W_1=s_2\big|W_2$ dir. O halde $s_1(W_1)\cap s_2(W_2)=s_1(W_1)=s_2(W_2)\in B$
(ii) $s_1(W_1)\cap s_2(W_2)=\varnothing$ ise, $\varnothing\in B$ olduğundan, $s_1(W_1)\cap s_2(W_2)\in B$. Dolayısıyla B, H üzerinde bir topoloji tabanıdır ve H nın açık cümleleri B nin elemanlarının keyfi birleşimleridir. Böylece, bu topoloji ile birlikte H bir topolojik uzaydır.

Şimdi gösterelim ki, $\varphi:H\rightarrow X$ tabii tasviri bir lokal topolojik tasvirdir. Bunun için göstermeliyiz ki, her $\sigma=[\beta]_y\in H$, $y\in X$, için bir $U(\sigma)\subset H$ ve $W(y=\varphi(\sigma))\subset X$ açık civarı vardır öyle ki $\varphi|U:U\rightarrow W$ bir topolojik tasvirdir. Halbuki $\sigma=[\beta]_y\in H$ için $\varphi(\sigma)=\varphi([\beta]_y)=y$ dir. Bu durumda, y yi ihtiva eden W eğrisel irtibatlı açık civarı için bir $s:W\rightarrow H$ tasviri vardır öyle ki $s(y)=\sigma$. Ayrıca, $U(\sigma)=s(W)$ ve $\varphi|U=\varphi^*$ diyelim.

1. $\varphi^*=\varphi|U(=s(W)):U\to W$ birebirdir. Gerçekten, $x\in X$ ve s tasviri x deki kapalı eğriler yardımıyla tarif edildiğinden, herhangi $\sigma_1,\sigma_2\in s(W)$için başlangıç noktası x, bitim noktası sırasıyla $y_1,y_2\in W$ olan W de γ_1,γ_2 eğrileri vardır öyle ki $\sigma_1=s(y_1)=\left[\left(y_1^{-1}\alpha\right)\gamma_1\right]_{y_1}=\left[\beta_1\right]_{y_1}$, $\sigma_2=s(y_2)=\left[\left(y_2^{-1}\alpha\right)\gamma_2\right]_{y_2}=\left[\beta_2\right]_{y_2}$.Şimdi, $\varphi^*(\sigma_1)=\varphi^*(\sigma_2)$ ise, $y_1=y_2$ dir. Bu durumda $\gamma_1\sim\gamma_2$ ve dolayısıyla $\varphi_1=\varphi_2$ dir. O halde φ^* birebirdir.

2. $\varphi^*=\varphi|U:U\to W$ süreklidir. Gerçekten, $\sigma\in U=s(W)$ herhangi bir nokta $\varphi^*(\sigma)=y\in W$ ve $V=V(y)\subset W$ herhangi bir civar olmak üzere $s(V)\subset U=s(W)$, σ nın bir civarıdır ve $\varphi^*(s(V))=V\subset W$ dir. Dolayısıyla, φ^* süreklidir.

3. $(\varphi^*)^{-1}W\to U$ süreklidir. Gerçekten, $y\in W$ herhangi bir nokta, $s(y)=\sigma\in U$ ve $U'=U'(\sigma)\subset U$ de σ nın bir civarı ise, bu takdirde $\varphi^*(U')\subset W$, y nin W de bir civarıdır ve $s(\varphi^*(U'))=U'$. O halde s süreklidir.

Sonuç olarak aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz.

Teorem 3.4.1. X irtibatlı lokal eğrisel irtibatlı bir topolojik uzay ve herbir $x\in X$ e tekabül eden esas grup $\pi_1(X,x)$ olmak üzere $H=\bigvee_{x\in X}\pi_1(X,x)$ ve $x\in X$ için $\varphi(\sigma)=\varphi([\alpha]_x)=x$, olarak tanımlanan $\varphi:H\to X$ tabii tasviri verilsin. Bu takdirde, (H,φ) ikilisi X üzerinde bir demettir.

Tarif 3.4.1. Teorem 3.4.1 ile elde edilen (H,φ) demetine X üzerinde ***esas grupların demeti*** denir.

Herbir $x\in X$ için $\pi_1(X,x)=\varphi^{-1}(x)$ esas grubuna demetin x üzerindeki sapı denir.
Biliyoruz ki, $x\in X$ herhangi bir nokta ise, X eğrisel irtibatlı olduğundan, x i ihtiva eden bir $W=W(x)$ eğrisel irtibatlı açık civarı ve bu civar üzerinde $\pi\circ s=1_W$ şartını sağlayan bir $s:W\to H$ tasviri vardır. Bu s tasvirine H nın W üzerindeki bir kesiti denir. H nın W üzerinde ki bütün kesitlerinin cümlesi de $\Gamma(W,H)$ ile gösterilir.

Teorem 3.4.2. X irtibatlı, lokal eğrisel irtibatlı bir topolojik uzay, (H,φ) X in esas gruplarının demeti ve $\Gamma(W,H)$, W üzerindeki bütün kesitlerin cümlesi olsun. Bu takdirde $\Gamma(W,H)$ cümlesi, noktasal çarpma işlemiyle birlikte bir gruptur.

İspat. Herhangi $s_1,s_2\in\Gamma(W,H)$ ve $y\in W$ için $\Gamma(W,H)$daki noktasal çarpma işlemini $(s_1.s_2)(y)= s_1(y).s_2(y)$ şeklinde tarif edelim. İddia ediyoruzki $s_1.s_2\in\Gamma(W,H)$ için $s_1.s_2\in\Gamma(W,H)$ dır. Gerçekten; $s_1,s_2 \in\Gamma(W,H)$ için $x\in W$ de kapalı α_1,α_2 eğrileri vardır öyle ki γ, x noktasını y ye birleştiren keyfi sabit eğri olmak üzere $s_1(y)=[(\gamma^{-1}\alpha_1)\gamma]$, $s_2(y)=[(\gamma^{-1}\alpha_2)\gamma]$. O halde, $s_1(y).\ s_2(y)=[(\gamma^{-1}\alpha_1)\gamma].[(\gamma^{-1}\alpha_2)\gamma]=[(\gamma^{-1}\alpha_1\alpha_2)\gamma] \in\pi_1(X,y)$dir. Dolayısıyla, $s_1.s_2\in\Gamma(W,H)$ dir.

1. Asosyatiflik: Her s_1, s_2, $s_3\in\Gamma(W,H)$ için, $s_1.(s_2.s_3)=(s_1.s_2).s_3$ olduğu kolaylıkla görülebilir.
2. Özdeş Eleman: Her $s \in\Gamma(W,H)$ ve $y\in W$ için; δ, $x\in W$ de sıfır eğri olmak üzere $I(y)= [(\gamma^{-1}\delta)\gamma]$ şeklinde tarifli $I\in\Gamma(W,H)$ kesitini gözönüne alalım. Bu takdirde

$(I.s)(y)=I(y).s(y)=[1][(\gamma^{-1}\alpha)\gamma]=[\gamma^{-1}.(\delta\alpha)\gamma]=[(\gamma^{-1}\alpha)\gamma]=s(y)$

$(s.I)(y)=s(y).I(y)=[(\gamma^{-1}\alpha)\gamma][1]=[(\gamma^{-1}(\alpha\delta)\gamma).1]=[(\gamma^{-1}\alpha)\gamma]=s(y)$

dır.Dolayısıyla $I\in\Gamma(W,H)$ özdeş elemandır.

3. Ters Eleman: $s\in\Gamma(W,H)$ herhangi bir kesit ve her $y\in W$ için $s(y)= [(\gamma^{-1}\alpha)\gamma]$ olsun. Şimdi $\delta=\alpha^{-1}$ olmak üzere her $y\in W$ için $s^{-1}(y) = [(\gamma^{-1}\delta)\gamma]$ şeklinde tarifli $s^{-1}:W\rightarrow H$ tasvirini göz önüne alalım. $s^{-1}\in\Gamma(W,H)$ ve

$$(s.s^{-1})(y)=s(y).s^{-1}(y)=[(\gamma^{-1}\alpha)\gamma].[(\gamma^{-1}\delta)\gamma]=[(\gamma^{-1}\alpha)\gamma.(\gamma^{-1}\delta)\gamma]$$
$$=[(\gamma^{-1}\alpha\delta)\gamma]=[\gamma^{-1}\gamma]=[1]=I(y).$$
$$(s^{-1}.s)(y)=s^{-1}(y).s(y)=[(\gamma^{-1}\delta)\gamma].[(\gamma^{-1}\alpha)\gamma]=[(\gamma^{-1}\delta)\gamma.(\gamma^{-1}\alpha)\gamma]=[(\gamma^{-1}\delta\alpha)\gamma]$$
$$=[\gamma^{-1}\gamma]=[1]=I(y)$$

dir.

O halde $s.s^{-1}=s^{-1}.s = I$ dir. Dolayısıyla $s^{-1}\in\Gamma(W,H)$, s nin tersidir.

Dolayısıyla $\Gamma(W,H)$ bir gruptur.

Teorem 3.4.3. $f : X_1 \to X_2$ sürekli tasvir olsun. Bu durumda sapları muhafaza eden bir $f^*: H_1 \to H_2$ demet morfizmi vardır.

İspat. $x_1 \in X_1$ herhangi bir nokta ve α, x_1 de kapalı bir eğri olsun. $x_2 \in X_2$ için $f \circ \alpha$, $f(x_1)=x_2$ noktasında kapalı bir eğridir ve $[f \circ \alpha] \in (H_2)_{x_2}$ dir. Diğer taraftan, α_1 ve α_2, $x_1 \in X_1$ noktasında kapalı eğriler öyleki $\alpha_1 \sim \alpha_2$ ise $f \circ \alpha_1 \sim f \circ \alpha_2$ dir. Böylece her $[\alpha]_{x_1} = \sigma_{x_1} \in (H_1)_{x_1} \subset H_1$ için bir $f^*: H_1 \to H_2$ vardır öyleki
$f^*(\sigma_{x_1}) = f^*([\alpha]_{x_1}) = [f \circ \alpha]_{f(x_1)=x_2}$ dir. f^* tasviri iyi tanımlıdır.

Şimdi de f^* ın sürekli olduğunu gösterelim. $U_2 \subset f^*(H_1) \subset H_2$ açık bir altcümle olsun. Genelliği kaybetmeden, kabul edelim ki $W_2 \subset X_2$ açık cümlesi için
$U_2 = t(W_2)$, $t \in \Gamma(W_2, H_2)$ olsun. Bu durumda $\varphi_2(t(W_2)) = W_2$ olur. f nin sürekliliğinden dolayı $f^{-1}(W_2) = W_1 \subset X_1$ bir açık cümledir. Şimdi kabul edelim ki $\sigma_{x_2} \in U_2$ olsun. $f^*(\sigma_{x_1}) = \sigma_{x_2}$ olacak şekilde en az $\sigma_{x_1} \in U_1 = (f)^{-1}(U_2)$ elemanı vardır. $s(x_1) = \sigma_{x_1}$ ve $s(W_1) \subset H_1$ açık cümlesi için $\varphi(\sigma_{x_1}) = x_1 \in W_1$ olmak üzere $s \in \Gamma(W_1, H_1)$ kesiti vardır. Dolayısıyla $s(W_1) \subset U_1$ dir. Kolaylıkla gösterilebilir ki $U_1 = \bigcup_{i \in I} s_i(W_1)$ dir. Burada, $U_1 \subset H_1$ bir açık cümledir ve f^* sürekli bir tasvirdir.

Sonuç 3.4.1. $f: X_1 \to X_2$ topolojik bir tasvir olsun. Bu takdirde X_1 ve X_2 üzerindeki H_1 ve H_2 demetleri izomorftur.

Teorem 3.4.4. $f : X_1 \to X_2$ sürekli bir tasvir olsun. Bu takdirde bir
$f_*: \Gamma(X_1, H_1) \to \Gamma(X_2, H_2)$ homomorfizmi vardır.

İspat. $f: (X_1, c_1) \to (X_2, f(c_1) = c_2)$ sürekli tasvirler olsun. Biliyoruz ki $f^* : H_1 \to H_2$ bir demet homomorfizmidir. Her $\sigma_{c_1} = [\alpha]_{c_1} \in (H_1)_{c_1}$, X_1 üzerinde birtek s kesiti tanımlar öyleki her $x_1 \in X_1$ için $s(x_1) = [(\gamma^{-1}\alpha)\gamma]_{x_1}$ dir. Diğer taraftan, $f^*\left([\alpha]_{c_1}\right) = [f \circ \alpha]_{c_2} \in (H_2)_{c_2}$ ve
$[f \circ \alpha]_{c_2}$, X_2 üzerinde bir t kesitini tanımlar öyleki herhangi $x_2 \in X_2$ için

$t(x_2)=[(\delta^{-1}\, f\circ\alpha)\delta]_{x_2}$ dir. Bu durumda $(H_1)_{c_1}$ ve $(H_2)_{c_2}$ arasındaki $[\alpha]_{c_1}\leftrightarrow[f\circ\alpha]_{c_2}$ eşlemesi $\Gamma(W_1,H_1)$ ve $\Gamma(W_2,H_2)$ arasında $s\leftrightarrow t$ eşlemesini verir. Eğer bu eşlemeyi $(f_*(s(x_1)) = f^*[(\gamma^{-1}\alpha)\gamma]_{x_1} =[(\delta^{-1}\; f\circ\alpha)\delta]_{x_2} =t(x_2)$ şeklinde tanımlarsak, bu durumda $f_*:\Gamma(X_1,H_1)\rightarrow \Gamma(X_2,H_2)$ tasviri bir homomorfizmdir.

Sonuç 3.4.2. $f : X_1\rightarrow X_2$ bir topolojik tasvir olsun. Bu takdirde, $\Gamma(W_1,H_1)$ ve $\Gamma(W_2,H_2)$ grupları izomorftur.

4. MANİFOLDLAR VE LİE GRUPLARI

Bu bölümde, çalışmalarımızın bundan sonraki kısmında taban uzay olarak kullancağımız manifoldlar ve Lie gruplarını inceleyeceğiz.

4.1 Manifoldlar

Tarif 4.1.1. M bir topolojik uzay olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan M ye n-boyutlu bir ***topolojik manifold*** (veya kısaca topolojik n-manifold) denir.

M.1) M bir Hausdorff uzaydır.
M.2) M nin herbir açık altcümlesi E^n ye veya E^n nin bir açık altcümlesine homeomorftur.
M.3) M sayılabilir çoklukta açık cümlelerle örtülebilir.

Örnek 4.1.1. E^n nin kendisi bir topolojik n-manifolddur.
Örnek 4.1.2. E^n nin herbir açık altcümlesi bir topolojik manifolddur.

Tarif 4.1.2. M n-boyutlu bir topolojik manifold ve U, M de bir açık altcümle olsun. Eğer U bir ψ homeomorfizmi ile E^n nin bir W açık altcümlesine eşlenebiliyorsa, yani.

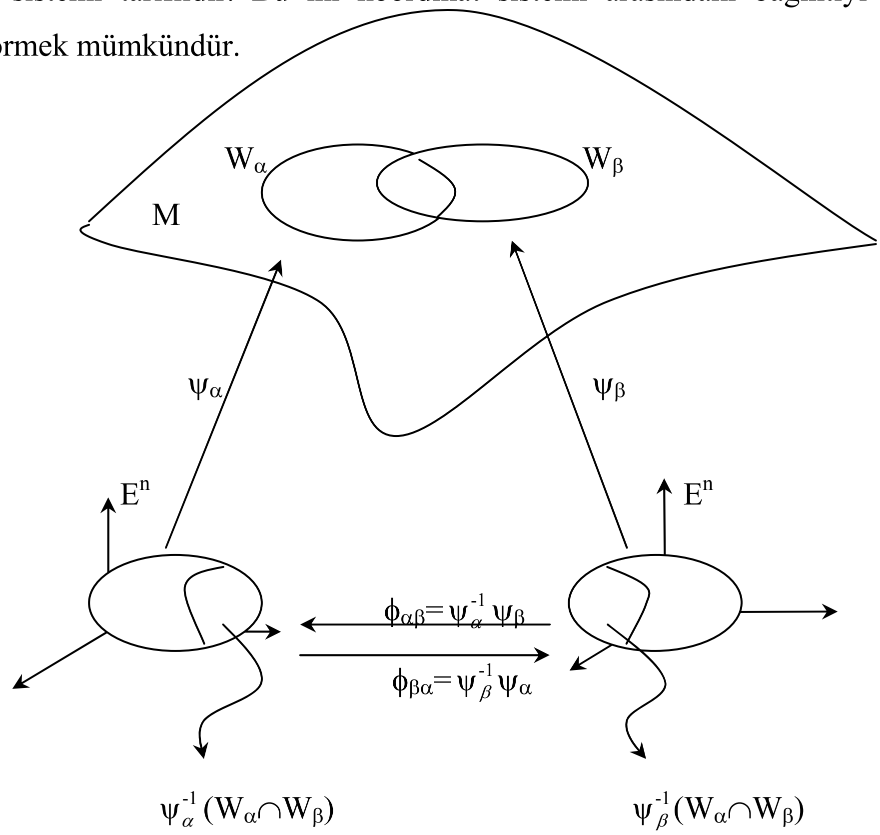
$$\psi : U \rightarrow W$$

bir homeomorfizm ise (ψ,U) ikilisine M de bir ***koordinat komşuluğu*** veya ***harita*** denir. $u \in U$ için $\psi(u) \in E^n$ ve $\psi(u)=(x_1(u),...,x_n(u))$, $x_i(u) \in R$, $1 \leq i \leq n$ dir. $x_i(u)$ reel sayısına $\psi(u)$ noktasının i-inci koordinatı ve $u_i : U \rightarrow R$ fonksiyonuna da U nun ***i-inci Öklid koordinat fonksiyonu*** denir.

Tarif 4.1.3. M bir topolojik n-manifold ve $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ M nin bir açık örtüsü olsun. Burada A, α indislerinin cümlesidir. E^n de U_α ya bir ψ_α homeomorfizmi altında homeomorf olan açık cümle V_α olsun. Böylece ortaya çıkan (ψ_α,U_α) haritalarının $\{(\psi_\alpha,U_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ koleksiyonuna M nin bir ***atlası*** denir.

Şimdi bir manifold üzerinde diferensiyellenebilir yapıyı tarif edelim;

M bir topolojik n-manifold ve bir $p \in M$ noktasının açık komşulukları da W_α ve W_β olsun. $W_\alpha \cap W_\beta \neq \emptyset$ ise $W_\alpha \cap W_\beta$ nın her noktasında $(x_1^\alpha,...,x_n^\alpha)$ ve $(x_1^\beta,...,x_n^\beta)$ gibi iki koordinat sistemi tariflidir. Bu iki koordinat sistemi arasındaki bağıntıyı aşağıdaki şekilde görmek mümkündür.



Şekil 4.1

$\psi_\alpha^{-1}(W_\alpha \cap W_\beta) \subset U_\alpha \subset E^n$ ve $\psi_\beta^{-1}(W_\alpha \cap W_\beta) \subset U_\beta \subset E^n$ altcümleleri ikişer açık cümlenin, birer homomorfizm altında görüntüleri olduklarından açık cümlelerdir. Ayrıca

$$\psi_\beta^{-1} o\, \psi_\alpha : \psi_\alpha^{-1}(W_\alpha \cap W_\beta) \to \psi_\beta^{-1}(W_\alpha \cap W_\beta) \quad \text{ile}$$

$$\psi_\alpha^{-1} o\, \Psi_\beta : \psi_\beta^{-1}(W_\alpha \cap W_\beta) \to \psi_\alpha^{-1}(W_\alpha \cap W_\beta)$$

fonksiyonları da iki homeomorfizmin bileşkesi olduklarından birer homeomorfizmlerdir. Kısalık olması bakımından

$$\phi_{\beta\alpha} = \psi_\beta^{-1} o \psi_\alpha \quad \text{ve} \quad \phi_{\alpha\beta} = \psi_\alpha^{-1} o \psi_\beta$$

gösterimi kullanılır. Tarif gereğince $\phi_{\alpha\beta}$ nın diferensiyellenebilir olması demek $(\phi_{\alpha\beta})_i$ bileşenlerinin diferensiyellenebilir olmasını gerektirir. Aynı şey $\phi_{\alpha\beta}$ fonksiyonu için de söylenebilir.
Böylece şu tarifi verebiliriz.

Tarif 4.1.4. M bir topolojik n- manifold ve M nin bir atlası $S = \{(\psi_\alpha, W_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ olsun. Eğer S atlası için, $W_\alpha \cap W_\beta \neq \emptyset$ olmak üzere $\alpha\ \beta \in A$ ya karşılık $\phi_{\alpha\beta}$ ve $\phi_{\beta\alpha}$ fonksiyonları C^k sınıfından diferensiyellenebilir ise S ye C^k sınıfından diferensiyellenebilirdir denir. S atlası M üzerinde C^k sınıfından olduğu zaman S ye M üzerinde C^k sınıfından ***diferensiyellenebilir yapı*** dır denir.

Tarif 4.1.5. M bir topolojik n- manifold olsun. M üzerinde C^k sınıfından bir diferensiyellenebilir yapı tarif edebiliyosa M ye C^k sınıfından ***diferensiyellenebilir bir manifold*** denir (Hacısalihoğlu 2000).

Örnek 4.1.3. $S^n = \{ x = (x_1, x_2, ..., x_{n+1}) \in E^{n+1} \mid \Sigma x_i^2 = r^2 \} \subset E^{n+1}$ cümlesine n- boyutlu küre (n- küre) denir. Bu küre bir diferensiyelenebilir n- manifolddur.

4.2 Lie Grupları

Tarif 4.2.1. Bir $G \neq 0$ cümlesi aşağıdaki şartları sağladığı takdirde G ye bir Lie grubu denir.
1.G bir analitik manifolddur.
2.G bir gruptur.
3.μ:GxG$\rightarrow$G ,$\mu(x, y) = xy^{-1}$ olarak tarif edilen μ tasviri analitiktir (Adams 1982).

Şayet G hem bir grup hem de bir topolojik uzay olmak üzere yukarıdaki 3. şartındaki tasvir sürekli ise G ye bir ***topolojik grup*** denir.

Bu tarife göre her Lie grubu bir topolojik gruptur. Literatürde bazen Lie grupları analitik gruplar diye de adlandırılır.

Örnek 4.2.1. G=R^n bir Lie grubudur. Gerçekten de;

1.G nin özdeşlik tasviri yardımıyla analitik manifold olduğu kolayca gösterilir..

2.(G,+) bir gruptur.

3.μ:GxG$\rightarrow$G ,$\mu(x,y)= xy^{-1}=x-y$ tasviri analitiktir.

Örnek 4.2.2. S^1=R/Z olmak üzere S^1 birim çemberi bir Lie grubudur.

Gerçekten, (R,+) bir Abel grubu ve Z, R nin normal altgrubudur.

$$\pi : R \rightarrow R \mid Z$$

ve

$$F : R \rightarrow S^1$$

$f(t)=(cos2\pi t,sin2\pi t)$ olarak tarif edilirse f bir epimorfizm ve Çek$f$=Z dir. Dolayısıyla 1. İzomorfizm teoreminden $R/Z \cong S^1$ dir. Açık olarak R bir Lie grubu ve Z bir diskret normal altgruptur. Z diskret olduğundan R/Z, R üzerinde bir manifold yapısına sahiptir. Z, R/Z grubunda normal olup, analitiklik lokal bir özelik olduğundan R/Z nin analitikliği elde edilir. Dolayısıyla S^1 analitik manifolddur.

$u=(x_1,y_1)$, $v=(x_2,y_2) \in S^1$, $u.v=(x_1x_2-y_1y_2,\ x_1y_2+x_2y_1)$ olarak tarifli işlemle (S^1, .) bir gruptur. $u^{-1}=(x_1,-y_1)$dir. Dolayısıyla $\mu(u,v)=u.v$ ve $\lambda(u)= u^{-1}$ tasvirleri analitiktir. O halde S^1 bir Lie grubudur (Fegan 1991).

Örnek 4.2.3. $T^n= S^1 x\, S^1 x ... x S^1=R^n/Z^n$ n-boyutlu tor grubu bir Lie grubudur.

Örnek 4.2.4. Lie grubuna en başta gelen örneklerinden biri

$$SU(2)=\{A: \overline{A}^{\,t}=A^{-1} \text{ ve } \det A=1\}$$

dir. Burada A, 2x2 tipinde kompleks matristir. SU(2) nin elemanları z ve w $|z|^2+|w|^2=1$ şartını sağlayan kompleks sayılar olmak üzere

$$A=\begin{pmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix}$$

şeklindedir.

z=x+iy ve w=u+iv ve $x^2+y^2+u^2+v^2=1$ olsun. SU(2) üzerindeki haritaları aşağıdaki gibi tarif edebiliriz:

$$U_1=\{A: x>0\}, \qquad U_2=\{A: x<0\}$$
$$U_3=\{A: y>0\}, \qquad U_4=\{A: y<0\}$$
$$U_5=\{A: u>0\}, \qquad U_6=\{A: u<0\}$$
$$U_7=\{A: v>0\}, \qquad U_8=\{A: v<0\}$$

Eşlenilen tasvirler ise,

$$\varphi_1(A)=(y,u,v), \qquad \varphi_2(A)=(y,u,v)$$
$$\varphi_3(A)=(x,u,v), \qquad \varphi_4(A)=(x,u,v)$$
$$\varphi_5(A)=(x,y,v), \qquad \varphi_6(A)=(x,y,v)$$
$$\varphi_7(A)=(x,y,u), \qquad \varphi_8(A)=(x,y,u)$$

ile verilir. Kolayca görülebilir ki bu tasvirler analitiktir.

Şimdi φ: $SU(2)\to R^4$, $\varphi(A)=(x,y,u,v)$ ve A_1, A_2 ,(z_1,w_1) ve (z_2,w_2) ile verilen iki matris öyleki $\varphi(A_i)=(x_i,y_i,u_i,v_i)$ olsun. Bu takdirde $\varphi(A_1A_2)=(x_3,y_3,u_3,v_3)$ dir.
Burada,

$$\left.\begin{aligned} x_3&=x_1x_2-y_1y_2-u_1u_2-v_1v_2\\ y_3&=x_1y_2+x_2y_1+u_1v_2-u_2v_1\\ u_3&=x_1u_2+x_2u_1-y_1v_2+y_2v_1\\ v_3&=x_1v_2+x_2v_1+y_1u_2-y_2u_1 \end{aligned}\right\}$$

dir. π_i, R^4 ün 3-boyutlu altuzayı üzerine izdüşümü olmak üzere $\varphi_i=\pi_i\ \varphi|U_i$ olduğundan, matris çarpımı bir analitik tasvirdir. Ayrıca $\varphi(A^{-1})=(x,-y,-u,-v)$ dir.
Böylece SU(2) 3-boyutlu bir Lie grubudur.

Tarif 4.2.2: Lie grubunun temelindeki manifold kompakt ise Lie grubuna kompakt Lie grubu ve benzer şekilde temeldeki manifold irtibatlı ise Lie grubuna irtibatlı Lie grubu denir (Fegan 1991).

5. KOMPAKT İRTİBATLI LİE GRUPLARI ÜZERİNDE DEMETLER VE HOMOTOPİ NORMALİTE

5.1 Kompakt İrtibatlı Lie Grupları Üzerinde Demetler

Bu kesimde taban cümle olarak, kompakt, irtibatlı bir X Lie grubu göz önüne alınmıştır. Her farklı x_i,i∈I ve x_j,j∈J noktaları için (X, x_i) ve (X,x_j) noktalı kompakt, irtibatlı Lie grupları aynı homotopi tipinden olsun. (X, x_i) Lie grubu iken aynı homotopi tipine sahip (X, x_j) nin de Lie grubu olduğu gösterilebilir. Ayrıca (X,x_i), i∈I Lie gruplarının her birine farklı [(X, x_i);(P,p)] grupları tekabül etmektedir (Yıldız 1982). (Burada P, herhangi bir noktalı, kompakt, irtibatlı Lie grubu ve [(X, x_i);(P,p)] de (X, x_i) den (P,p) ye taban noktalarını muhafaza eden sürekli bütün tasvirlerin homotopi sınıflarının cümlesidir).

Gösterilebilir ki ∀x∈ X için [(X, x);(P,p)] cümlesi, P Lie grubunun intac ettiği işlemle birlikte bir grup teşkil eder.

Gerçekten,$[f]_x$,$[g]_x$ ∈[(X,x);(P,p)] herhangi elemanlar olmak üzere $[f]_x$ $[g]_x$ =$[fog]_x$ şeklinde tarif edilirse bu işlem iyi tariflidir ve bu işlemle birlikte [(X, x);(P,p)] bir gruptur.

Her bir (X, x) Lie grupları için [(X, x);(P,p)]gruplarının H(X)= $\bigvee_{x\in X}$ [(X, x);(P,p)] ayrık birleşimi, X kompakt irtibatlı Lie grubu üzerinde bir cümledir.

φ : H(X) → X tabii tasvirini
her δ∈H(X) için (δ∈H(X) ⇒ ∃ x∈X için δ∈ $H(X)_x$ = [(X, x);(P,p)]   ise δ = $[f]_x$)

φ(δ) = φ($[f]_x$) = x şeklinde tarif edelim.

Şimdi H(X) cümlesi üzerinde , φ tasvirini lokal topolojik kılan ve her bir $H(X)_x$ = $[(X,x);(P,p)]$sapında diskret topoloji meydana getiren, bir tabii topolojinin inşasını verelim.

$\delta=[f]_x \in H(X)_x \subset H(X)$ ise $\varphi(\delta)=\varphi([f]_x) = x$ ve $W \subset X$ keyfi bir açık ve W de bir keyfi x_0 noktası seçelim. O halde $W = W(x_0)$ olarak göz önüne alabiliriz. Şimdi $s : W \to H(X)$ tasvirini şöyle tarif edelim: $x_0 \in X$ olmak üzere $[(X, x_0);(P,p)] \subset H(X)$ grubu verilsin. $[f]_{x_o} \in [(X, x_0);(P,p)]$ olsun.

Bu durumda $y \in W$ herhangi bir nokta ise (X,y) ve (X,x_0) homotopik eşdeğer olduklarından, $\phi : (X,y) \to (X,x_0)$ homotopi eşdeğerlik tasviri vardır.

Dolayısıyla

$$\begin{tikzcd}
(X, x_0) \arrow[r, "f"] & (P,p) \\
(X,y) \arrow[u, "\phi"] \arrow[ur, "f \circ \phi"'] &
\end{tikzcd}$$

üçgen diagramında da görüldüğü gibi $f \circ \phi$: $(X,y) \to (P,p)$ tasviri süreklidir ve taban noktasını muhafaza eder. $f \circ \phi$ tasvirinin homotopi sınıfı $[f \circ \phi]_y \in [(X,y);(P,p)]$dir.

O halde $s(y) = [f \circ \phi]_y$ diyelim. Bu şekilde tarif edilen s tasviri tek anlamlıdır ve

$\forall y \in W$ için $(\varphi \circ s)(y) = \varphi(s(y)) = \varphi[f \circ \phi]_y = y \Rightarrow \varphi \circ s = 1_W$.

şartını sağlar.

O halde herhangi bir $y \in W$ için $s(y) = [f \circ \phi]_y$ olduğundan $f \circ \phi = h$ dersek $s(y)=[f \circ \phi]_y = [h]_y$ dir. Bu durumda $s(W) = \bigcup_{y \in W} [h]_y$ olarak yazılabilir.

s (W) yi açık cümle olarak tarif edersek, gösterebiliriz ki

$$B = \{s\,(W) \mid W = W(y) \subset X\}$$

ailesi H(X) üzerinde bir topoloji tabanıdır. Bunun için

$s_1(W_1), s_2(W_2) \in B$ olmak üzere, $s_1(W_1) \cap s_2(W_2) \in B$ olduğunu göstermek yeterlidir.

Halbuki;

i) $s(W) = s_1(W_1) \cap s_2(W_2) \neq \emptyset$ ise, herhangi bir $y \in W(y) = (W_1 \cap W_2)\,(y)$ için en az bir $\delta_y \in s_1(W_1) \cap s_2(W_2)$ vardır. Buradan $\delta_y \in s_1(W_1)$ ve $\delta_y \in s_2(W_2)$ dir. Dolayısıyla $\delta_{y=} s_1(y)$, $y \in W_1$ ve $\delta_{y=} s_2(y)$, $y \in W_2$ yazılabilir Böylece $s_1(y)= s_2(y)$, $y \in W_1 \cap W_2$ ve $s_1 \mid W_1 \cap W_2 = s_2 \mid W_1 \cap W_2$ dir. Dolayısıyla $s : W = W_1 \cap W_2 \rightarrow H$ kesiti $s(W) = s(W_1 \cap W_2) = s_1 \mid W_1 \cap W_2 = s_2 \mid W_1 \cap W_2$ şeklinde tarif edilirse $s(W) = s(W_1 \cap W_2) = s_1(W_1) \cap s_2(W_2)$ dir.

ii) $s_1(W_1) \cap s_2(W_2) = \emptyset$ ise; $\emptyset \in B$ olduğundan $s_1(W_1) \cap s_2(W_2) \in B$ dir.

Dolayısıyla B, H(X) üzerinde bir topoloji tabanıdır ve H(X) in açık cümleleri B nin elemanlarının keyfi birleşimleridir. Bundan dolayı H(X) bu topolojiyle birlikte bir topolojik uzaydır.

Şimdi gösterelim ki $\varphi : H(X) \rightarrow X$ tabii tasviri bir lokal topolojik tasvirdir.

Bunun için göstermeliyiz ki her $\delta = [h]_y \in H(X)$, $y \in X$ için bir $U(\delta) \subset H(X)$ ve $W(y = \varphi\,(\delta)) \subset X$ açık civarları vardır öyle ki $\varphi \mid U : U \rightarrow W$ bir topolojik tasvirdir.

Halbuki $\delta = [h]_y \in H(X)$ için $\varphi(\delta) = \varphi\,([h]_y) = y$ idi. Bu durumda y noktasını ihtiva eden W açık civarı için bir $s : W \rightarrow H(X)$ tasviri vardır $\ni$ $s(y) = \delta$. Ayrıca $U(\delta) = s(W)$ ve $\varphi \mid U = \varphi^*$ olduğunu kabul edelim.

1. $\varphi^* = \varphi \mid s(W) : U \to W$ bire-birdir. Çünkü $y \in W$ ve s tasviri (X,y) dan (P,p) ye taban noktalarını muhafaza eden sürekli tasvirlerin homotopi sınıfı olarak tarif edildiğinden; herhangi $\delta_1, \delta_2 \in s\,(W)$ için W de sırasıyla $y_1, y_2 \in W$ olan noktalar vardır öyleki

$$\delta_1 = s\,(y_1) = [\,f\, o\phi]_{y_1} \qquad\qquad \delta_2 = s(y_2) = [\,f\, o\phi'\,]_{y_2}$$

olmak üzere

$$\begin{tikzcd} (X, x_0) \arrow[r, "f"] & (P,p) \\ (X, y_1) \arrow[u, "\phi"] \arrow[ur, "f\, o\, \phi"'] & \end{tikzcd} \qquad\qquad \begin{tikzcd} (X, x_0) \arrow[r, "f"] & (P,p) \\ (X, y_2) \arrow[u, "\phi'"] \arrow[ur, "f\, o\, \phi'"'] & \end{tikzcd}$$

diagramı verilebilir.

Şimdi $\varphi^*\,(\delta_1) = \varphi^*\,(\delta_2) \Rightarrow \varphi^*\;(s(\,y_1)) = \varphi^*\,(s\,(\,y_2\,))$

$$\Rightarrow \varphi^*\,(\,[\,f\, o\,\phi]\;\, y_1) = \varphi^*\,([\,f\, o\,\phi'\,]\, y_2\,)$$

$$\Rightarrow y_1 = y_2$$

dır. Dolayısıyla $\phi \sim \phi' \Rightarrow f\, o\,\phi \;\sim\; f\, o\,\phi' \Rightarrow \;[\,f\, o\,\phi]\, y_1 \,=\, [\,f\, o\,\phi'\,]\, y_2$

$$\Rightarrow \delta_1 = \delta_2$$

O halde φ^* bire-birdir.

2. $\varphi^* = \varphi \mid U : U \to W$ süreklidir. Çünkü $\delta \in U = s\,(W)$ herhangi bir eleman ve $\varphi^*\,(\delta) = y \in W$ ve $V = V(y) \subset W$ herhangi bir civar olmak üzere $s(V) \subset U = s(W)$, δ nın bir civarıdır ve $\varphi^*\,(s(V)) = V \subset W$ olduğundan, φ^* süreklidir.

3. $(\varphi^*)^{-1} = (\varphi \mid U)^{-1} = s : W \to U = s\,(W)$ süreklidir. Çünkü $y \in W$ herhangi bir nokta, $s(y) = \delta \in U$ ve $U' = U'\,(\delta) \subset U$ de δ nın bir civarı ise $(\varphi \mid U)\,(U') \subset W$, y nin W de bir civarıdır ve $s\,((\varphi \mid U)\,(U')) = U'$dir. O halde s süreklidir.

O halde aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz.

Teorem 5.1.1. X kompakt irtibatlı Lie grubu, H(X)= $\underset{x\in X}{\vee}$ [(X, x);(P,p)] ve φ:H(X)$\rightarrow$X ∍ her $\delta = ([f]_x) \in$[(X, x);(P,p)], $x \in$X için φ (δ)=$\varphi([f]_x) = x$ tabii tasviri verilsin. Bu takdirde (H(X) , φ) ikilisi X üzerinde bir demettir

Tarif olarak bu demete kompakt irtibatlı Lie grubu üzerindeki demet denir.

Tarif 5.1.1. Her bir x$\in$X için $H(X)_x$ = φ^{-1} (x) grubuna (H(X) ,φ) demetinin x üzerindeki sapı denir.

x$\in$X herhangi bir nokta ise (X,x) kompakt irtibatlı Lie grubunda x i içeren W = W(x) açık civarı ve bu civar üzerinde φ os = 1_w şartını sağlayan bir s:W$\rightarrow$ H(X) sürekli tasviri vardır. Bu s tasvirine H(X) demetinin W üzerindeki bir kesiti denir. H(X) nin W üzerindeki bütün kesitlerinin cümlesi Γ (W,H(X)) ile gösterilir.

Teorem 5.1.2. (X, x) , x$\in$X aynı homotopi tipinde Kompakt, irtibatlı Lie grupları; (H(X),φ) , X in intac ettiği grupların demeti ve Γ (W,H(X)), W üzerindeki bütün kesitlerin cümlesi olsun.$\forall$ $s_1,s_2 \in$ Γ (W,H(X)) ve y$\in$W için, $(s_1.s_2)$ (y) = s_1(y) . s_2 (y) şeklinde tarif edilen çarpma işlemiyle birlikte Γ (W,H(X)) bir gruptur.

İspat. Kapalılık: $\forall$ bir $s_1,s_2 \in$ Γ (W,H(X)) için $s_1 \circ s_2 \in$ Γ(W,H(X)) dir.

Gerçekten y$\in$W olmak üzere,

$s_1(y) . s_2(y) = [f \text{ o } \phi]_y . [f \text{ o } \phi']_y = [(f \text{ o } \phi). (f \text{ o } \phi')]_y = [f \text{ o } \phi.\phi']_y$

$= (s_1.s_2)(y)$

Dolayısıyla $s_1.s_2(y)= [f \text{ o } \phi{\circ}\phi']_y \in\Gamma$(W,H(X) dir.

1. Asosyatiflik: Her $s_1,s_2,s_3 \in$ Γ (W,H(X)) ve y$\in$W için,

$((s_1.(s_2.s_3))(y) = s_1(y).((s_2(y).s_3(y))$

$= [f \text{ o } \phi]_y .([f \text{ o } \phi']_y . [f \text{ o } \phi'']_y)$

$= [f \circ \phi]_y . [f \circ (\phi.'\phi'')]_y$

$= [f \circ (\phi.(\phi'.\phi'')]$

$= [\ f \circ ((\phi.\phi').\phi'')]_y$

$= [(f \circ \phi.\phi').(f \circ \phi'')]_y$

$= [(f \circ \phi).(f \circ \phi')]_y.[f \circ \phi'']_y$

$= ([f \circ \phi]_y.[f \circ \phi']_y).[f \circ \phi'']_y$

$= (s_1 . s_2)(y) . s_3(y)$

$= ((s_1 . s_2) . s_3)(y).$

Bu ise $(s_1 . s_2) .s_3 = s_1.(s_2.s_3)$ demektir.

2. Özdeş Eleman : $y \in W$ için $I(y) = [f \circ I]_y$ şeklinde tarif edilen $I : W \to H(X)$ tasviri çarpma işlemine göre özdeş elemandır. Gerçekten,

$(I.s)(y) = I(y) . s(y)$

$= [f \circ I]_y . [f \circ \phi]_y = [f \circ \phi.I]_y$

$= [f \circ \phi]_y = s(y) \Rightarrow (I . s) = s$

dır.

Benzer şekilde s. I = s dir.

3. Ters Eleman: Her $s \in \Gamma(W,H(X))$ nin tersi

$s^{-1}(y) = [f \circ \phi]^{-1}_y = [f \circ \phi^{-1}]_y$

şeklinde tarif edilen $s^{-1} : W \to H(X)$ tasviridir. Gerçekten,

$(s . s^{-1})(y) = s(y) . s^{-1}(y) = [f \circ \phi]_y . [f \circ \phi^{-1}]_y$

$= [f \circ \phi.\phi^{-1}]_y = [f \circ I]_y = I(y).$

O halde $s. s^{-1} = I$ dır.

Benzer şekilde $s^{-1} .s = I$ dır.

Dolayısıyla verilen çarpma işlemiyle birlikte $\Gamma(W,H(X))$ bir gruptur.

Şimdi $s \in \Gamma(X,H(X))$ global bir kesit olsun. $s(X) \subset H(X)$ bir Lie grubudur. Dolayısıyla $H(s(X)) = \bigvee_{s \in \Gamma(X,H(X))} s(X)$, $s(X)$ Lie gruplarının ayrık bir birleşimidir.

φ : H(s(X)) $\rightarrow$ X tabii tasvirini her s(x) $\in$ H(s(X)) için φ(s(x)) = x şeklinde tarif edelim.
Gösterilebilir ki (H(s(x), φ) bir demettir.

Teorem 5.1.3. X kompakt irtibatlı bir Lie grubu, (H(X), φ) X üzerindeki demet ve W, X in bir açık alt cümlesi olsun. Bu takdirde $H_x \cong \Gamma$ (W,H) dır.

İspat. W$\subset$X açık bir cümle ve s$\in \Gamma$ (W,H) olsun. Bu takdirde bir $\delta_x = [f]_x \in H_x$ vardır öyle ki her y$\in$ W için s(y) = $[f \text{ o } \phi]_y$ dir. Yani H_x in her elemanına Γ (W,H) da yalnız bir eleman karşılık gelir. Yani φ :$H_x \rightarrow \Gamma$ (W,H) dönüşümü her $\delta_x \in H_x$ için
φ (δ_x)=s(y)= $[f \text{ o } \phi]_y$ şeklinde tarif edilebilir.

1. φ bire-birdir: Gerçekten, δ^1_x, δ^2_x sırasıyla s_1, $s_2 \in \Gamma$ (W,H) kesitlerini belirlesin.
   Bu takdirde her y $\in$W için,

$$s_1(y) = [f_1 \text{ o } \phi]_y \quad \text{ve} \quad s_2(y) = [f_2 \text{ o } \phi]_y$$

dir. Eğer $\delta^1_x \neq \delta^2_x$ ise $s_1(y) \neq s_2(y)$ dir. Dolayısıyla φ bire-birdir. φ nin tarifinden dolayı φ üzerindedir. Böylece φ bir bijeksiyondur.
Şimdi de φ nin bir homomorfizm olduğunu gösterelim: $\delta^1_x = [f_1]_x$,$\delta^2_x = [f_2]_x \in H_x$ ise

$$\delta^1_x . \delta^2_x = [f_1]_x . [f_2]_x = [f_1 . f_2]_x$$

dir. Böylece $\delta^1_x . \delta^2_x \in H_x$ bir s $\in \Gamma$ (W,H) kesitini tarif eder.

$$\begin{aligned}
\varphi(\delta^1_x . \delta^2_x) &= \varphi([f_1]_x . [f_2]_x) = \varphi([f_1 . f_2]_x) \\
&= [f_1 . f_2 \text{ o } \phi]_x = [(f_1 \text{ o } \phi). (f_2 \text{ o } \phi)]_x \\
&= [f_1 \text{ o } \phi]_x . [f_2 \text{ o } \phi]_x = \varphi([f_1]_x) . \varphi([f_2]_x) \\
&= s_1(y) . s_2(y) = \varphi(\delta^1_x) . (\delta^2_x)
\end{aligned}$$

dir. Böylece φ bir izomorfizimdir.

Sonuç 5.1.1. H_x sapı W üzerindeki kesitlerin grubunu tamamiyle belirler.
Eğer W = X alınırsa H_x sapı tamamiyle X üzerinde global kesitlerin grubunu belirler yani $H_x \cong \Gamma$ (X,H) dır.

Teorem 5.1.4. X kompakt irtibatlı Lie grubu ve x_0, $y_0 \in$X herhangi iki nokta olsun. Bu takdirde $H_{x_0} \cong H_{y_0}$ dır.

İspat. $\prod : H_{x_0} \to H_{y_0}$, $\prod([f]_{x_0}) = [fo\phi]_{y_0}$ şeklinde tarif edilen $\prod$ tasviri iyi tariflidir, burada ϕ: (X, y_0) → (X, x_0) sürekli bir tasvirdir, yani

$$\phi \in [\phi] \in \hom[(X, y_0), (X, x_0)]$$

Gerçekten,

$$[f_1]_{x_0} = [f_2]_{x_0} \Rightarrow f_1 \in [f_2]_{x_0} \Rightarrow f_1 \sim f_2$$
$$\Rightarrow f_1 o \phi \sim f_2 o \phi$$
$$\Rightarrow f_1 o \phi \in [f_2 o\phi]_{y_0}$$
$$\Rightarrow [f_1 o\phi]_{y_0} = [f_2 o\phi]_{y_0}$$

1. $\prod$ bire-birdir: Gerçekten, her $[f_1]_{x_0}$, $[f_2]_{x_0} \in H_{x_0}$ için,

$$\prod([f_1]_{x_0}) = \prod([f_2]_{x_0}) \Rightarrow [f_1 o\phi]_{y_0} = [f_2 o\phi]_{y_0}$$
$$\Rightarrow f_1 o \phi \sim f_2 o \phi$$
$$\Rightarrow f_1 \sim f_2$$
$$\Rightarrow f_1 \in [f_2]_{x_0}$$
$$\Rightarrow [f_1]_{x_0} = [f_2]_{x_0}.$$

2. $\prod$ örtendir: Gerçekten, her $[f]_{x_0} \in H_{x_0}$ homotopi sınıfı $[fo\phi]_{y_0} \in H_{x_0}$ homotopi sınıfını belirtir.

   Karşıt olarak her $[fo\phi]_{y_0} \in H_{y_0}$ homotopi sınıfı $[f]_{x_0} \in H_{x_0}$ homotopi sınıfını Belirtir

3. ϕ bir homomorfizimdir: Gerçekten, her $[f_1]_{x_0}$, $[f_2]_{x_0} \in H_{x_0}$ için,

$$\prod([f_1]_{x_0} . [f_2]_{x_0}) = [f_1 . f_2]_{x_0}$$
$$= [f_1 . f_2 o\phi]_{y_0}$$
$$= [(f_1 o\phi).(f_2 o\phi)]_{y_0}$$
$$= \prod([f_1]_{x_0}).\prod([f_2]_{x_0}).$$

5.2 Karakterizasyonlar

X_1, X_2 Kompakt irtibatlı Lie grupları ve $H(X_1)$, $H(X_2)$ de sırasıyla bu kompakt irtibatlı Lie gruplarına karşılık gelen demetler olsun. Notasyon olarak $(X_1, H(X_1))$ ve $(X_2, H(X_2))$ ile gösterelim.

Tarif 5.2.1. $(X_1, H(X_1))$ ve $(X_2, H(X_2))$ çiftleri verilmiş olsun. Bu çiftler arasında bir homomorfizm vardır denir ve $F = (\alpha,\alpha^*) : (X_1, H(X_1)) \to (X_2, H(X_2))$ yazılır, şayet bir $F = (\alpha,\alpha^*)$ çifti varsa öyleki

1. $\alpha: X_1 \to X_2$ süreklidir.
2. $\alpha^*: H(X_1) \to H(X_2)$ süreklidir.
3. α^*,α ya nazaran sapları muhafaza eder. Yani kare diagramı komutatiftir.

$$\begin{tikzcd} H(X_1) \arrow[r, "\alpha^*"] \arrow[d, "\varphi_1"'] & H(X_2) \arrow[d, "\varphi_2"] \\ X_1 \arrow[r, "\alpha"] & X_2 \end{tikzcd}$$

4. Her $x_1 \in X_1$ için $\alpha^*\big|H(X_1)_{x_1} : H(X_1)_{x_1} \to H(X_2)_{\alpha(x_1)}$ bir homomorfizmdir.

Tarif 5.2.2. $(X_1, H(X_1))$ ve $(X_2, H(X_2))$ çiftler olmak üzere
$F = (\alpha,\alpha^*) : (X_1, H(X_1)) \to (X_2, H(X_2))$ bir homomorfizmi verilsin. Eğer α ve α^* topolojik iseler $F = (\alpha,\alpha^*)$ tasvirine bir izomorfizm denir.
Bu takdirde $(X_1, H(X_1))$ ve $(X_2, H(X_2))$ çiftlerine de izomorfiktirler denir.

Teorem 5.2.1. $(X_1, H(X_1))$ ve $(X_2, H(X_2))$ çiftleri verilmiş olsun. Eğer $\alpha : X_1 \to X_2$ sürekli bir tasvir ise, bu takdirde $(X_1, H(X_1))$ ve $(X_2, H(X_2))$ çiftleri arasında bir homomorfizm vardır.

İspat. $x_1 \in X_1$ keyfi sabit bir nokta olsun. Bu takdirde $\alpha(x_1) \in X_2$ olup,

$(H(X_1))_{x_1} \subset H(X_1)$, $(H(X_2))_{\alpha(x_1)} \subset (H(X_2))$ mütekabil saplardır. Şimdi f_1 ve f_2 ,

x_1 de homotopik tasvirler ise $\alpha(x_1)$ deki $f_1^{/}$, $f_2^{/}$ tasvirlerini

$f_1^{/} = \alpha \text{ o } f_1$, $f_2^{/} = \alpha \text{ o } f_2$ şeklinde tarif edelim.

Eğer $f_1 \sim f_2 \Rightarrow \exists$ F (x,t):X x J $\rightarrow$ X $\ni$ F sürekli ve F (x,0) = f_1 (x), F (x,1) = f_2 (x).

Şimdi

$$G = G(x,t) : X \text{ x } J \rightarrow X$$

tasvirini

$$G(x,t) = \alpha(F(x,t))$$

olarak tarif edersek, G süreklidir. Üstelik

$$G(x, 0) = \alpha(F(x,0)) = (\alpha \text{ o } f_1)(x)$$

$$G(x, 1) = \alpha(F(x,1)) = (\alpha \text{ o } f_2)(x)$$

dir. O halde

$$\alpha \text{ o } f_1 \sim \alpha \text{ o } f_2$$

dır. Dolayısyla $[f]_{x_1} \leftrightarrow [\alpha \text{ o} f]_{\alpha(x_1)}$ eşlemesi tek anlamlıdır. Yani bu eşleme her bir

$[f]_{x_1}$ elemanına bir tek $[\alpha \text{ o} f]_{\alpha(x_1)}$ elemanını karşılık tutmaktadır. Böylece bir

$$\alpha^* : H(X_1) \rightarrow H(X_2)$$

tasvirini her $[f]_{x_1} \in H(X_1)$ için,

$$\alpha^*\left([f]_{x_1}\right) = [\alpha \circ f]_{\alpha(x_1)} \in H(X_2)$$

şeklinde tarif edebiliriz.

1. α^* süreklidir: Eğer $U_2 \subset H(X_2)$ herhangi açık cümle ise $(\alpha^*)^{-1}(U_2) = U_1 \subset H(X_1)$ bir açık cümledir. Gerçekten, $U_2 \subset H(X_2)$ açık ise W_i açık bir civar olmak üzere

$$U_2 = \bigcup_{i \in I} s^2_i(W_i)$$

$$\varphi_2(U_2) = \bigcup_{i \in I} W_i$$

dir. Burada $s^2_i : W_i \rightarrow H(X_2)$ birer kesittir. Dolayısıyla $\bigcup_{i \in I} W_i \subset X_2$ açıktır. α sürekli olduğundan

$$\alpha^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} W_i\right) = \bigcup_{i \in I} \alpha^{-1}(W_i) \subset X_1$$

açıktır. Ayrıca $\alpha^{-1}(W_i)$, X_1 de eğrisel irtibatlı bir açık civar olduğundan bir

$$s^1_i : \alpha^{-1}(W_i) \rightarrow H(X_1)$$

kesiti vardır. Böylece $\bigcup_{i \in I} s^1_i(\alpha^{-1}(W_i)) \subset H(X_1)$ bir açıktır. Göstereceğiz ki

$$U_1 = \bigcup_{i \in I} s^1_i(\alpha^{-1}(W_i))$$

dir. Eğer $\sigma_1 = [f_1]_{x_1} \in U_1 = (\alpha^*)^{-1}(U_2)$ ise bu durumda $\sigma_2 = [\alpha \circ f_1]_{\alpha(x_1)}$ vardır öyle ki $\alpha^*(\sigma_1) = \sigma_2$ ve $\varphi_2(\sigma_2) = \varphi_2([\alpha \circ f_1]_{\alpha(x_1)}) = \alpha(x_1)$ dir. Dolayısıyla $\alpha(x_1) \in W_i$ ise $x_1 \in \alpha^{-1}(W_i)$ ve $\sigma_1 = [f_1]_{x_1} \in \bigcup_{i \in I} s^1_i(W_i)$ dir. Böylece $U_1 \subset \bigcup_{i \in I} s^1_i(\alpha^{-1}(W_i))$ dir.

Diğer taraftan, $\sigma_1 \in \bigcup_{i \in I} s^1_i(\alpha^{-1}(W_i))$ ise bir $i \in I$ için $\sigma_1 \in s^1_i(\alpha^{-1}(W_i))$ dir. Buradan $\sigma_1 = [f_1]_{x_1}$ ise, $\varphi_1(\sigma_1) = x_1$ ve $[\alpha \circ f_1]_{\alpha(x_1)} = \sigma_2 \in U_2$ dir. Böylece, $\bigcup_{i \in I} s^1_i(\alpha^{-1}(W_i)) \subset U_1$ dir. O halde,

$$U_1 = \bigcup_{i\in I} s'_i \ (\alpha^{-1} \ (W_i \ ) \ ) \text{ dir.}$$

2. α^* , α ya göre sapları korur: Gerçekten, herhangi $\sigma_1 = [f]_{x_1} \in H(X_1)$ için

$$(\alpha \circ \varphi_1)([f]_{x_1}) = \alpha(\varphi_1([f]_{x_1}) = \varphi(x_1)$$

$$(\varphi_2 \circ \alpha^*)([f_1]_{x_1}) = \varphi_2(\alpha^*([f]_{x_1})) = \varphi_2([\alpha \circ f_1]_{\alpha(x_1)} = \alpha(x_1)$$

dir.

3. Her $x_1 \in X_1$ için,

$$\alpha^* \mid H(x_1)_{x_1} : H(x_1)_{x_1} \to H(x_1)_{\alpha(x_1)}$$

tasviri bir homomorfizmdir: Gerçekten f_1 ve f_2 $x_1 \in X_1$ de homotopik tasvirler ise $f_1' = \alpha \circ f_1$, $f_2' = \alpha \circ f_2$ de $\alpha(x_1) \in X_2$ de homotopik tasvirlerdir.

Dolayısıyla $\alpha^*([f_1]_{x_1}).\alpha^*([f_2]_{x_1}) = [\alpha \circ f_1]_{\alpha(x_1)} . [\alpha \circ f_2]_{\alpha(x_1)}$

$$= [\alpha \circ f_1 . f_2]_{\alpha(x_1)} = \alpha^*([f_1 . f_2]_{x_1}) \text{ dir.}$$

O halde $F = (\alpha \ \alpha^*)$ bir homomorfizmdir.

Teorem 5.2.2. $(X_1, H(X_1))$, $(X_2, H(X_2))$, $(X_3, H(X_3))$ çiftleri ve $\alpha_1 : X_1 \to X_2$, $\alpha_2 : X_2 \to X_3$ sürekli tasvirleri verilmiş olsun. Bu takdirde, $\alpha = \alpha_2 \circ \alpha_1$, $\alpha^* = \alpha_2^* \circ \alpha_1^*$ olacak şekilde bir $F = (\alpha,\alpha^*) : (X_1, H(X_1)) \to (X_3, H(X_3))$ homomorfizmi vardır.

İspat. $\alpha_2 \circ \alpha_1: X_1 \to X_3$ sürekli olduğundan Teorem 5.2.1 den dolayı $F = (\alpha,\alpha^*) : (X_1, H(X_1)) \to (X_3, H(X_3))$ homomorfizmi vardır. Her $[f] \in H(X_1)$ için $\alpha^*([f])=[\alpha \circ f]= [(\alpha_2 \circ \alpha_1) \circ f] = \alpha_2^*([\alpha_1 \circ f]) = (\alpha_2^* \circ \alpha_1^*)([f])$

olduğundan

$\alpha^* = (\alpha_2 \text{ o } \alpha_1)^* = \alpha_2^* \text{ o } \alpha_1^*$

dır.

Şimdi,

C: Kompakt irtibatlı Lie grupları ve sürekli tasvirler kategorisi,

D: Demetler ve demet homomorfizmlerinin kategorisi

olsun.

Bir $T : C \to D$ tasvirini,her X ve $\alpha : X_1 \to X_2$ için $T(X) = H(X)$ ve $T(\alpha) : H(X_1) \to H(X_2)$ şeklinde tarif edelim.

1. $X_1 = X_2$ ve $\alpha = 1_{X_1} \Rightarrow T(1_{X_1}) = 1_{H(X1)}$.Çünkü $T(1_{X_1}) = (1_{X_1})^*$ ve her $[f] \in H(X_1)$ için $(1_{X_1})^*([f]) = [1_{X_1} \text{o } f] = [f] \Rightarrow (1_{X_1})^* = 1_{H(X_1) = T(X_1)}$

2. $\alpha_1 : X_1 \to X_2$ ve $\alpha_2 : X_2 \to X_3 \ni \alpha_2 \text{ o } \alpha_1 : X_1 \to X_3$ ve α_1, α_2 sürekli olduğundan $\alpha_2 \text{o} \alpha_1$ de süreklidir.Dolayısıyla,$T(\alpha_2 \text{o} \alpha_1) : H(X_1) \to H(X_3)$ bir homomorfizmdir.

Üstelik

$T(\alpha_2 \text{ o } \alpha_1) = (\alpha_2 \text{ o } \alpha_1)^* = \alpha^*_2 \text{ o } \alpha^*_1 = T(\alpha_2) . T(\alpha_1)$.

Böylece $T : C \to D$ bir funktordur.

O halde aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 5.2.3. Kompakt irtibatlı Lie grupları ve sürekli tasvirler kategorisinden, demetler ve demet homomorfizmleri kategorisine bir funktor vardır.

5.3 Homotopi Normalite

Bu bölümde $H'(X)$,$H(X)$ in bir alt demeti olmak üzere $H'(X)$ in $H(X)$ de homotopi normalliğini tarif ederek demet morfizmi altında homotopi normalliğin korunduğunu göstereceğiz.

Tarif 5.3.1. (McCarty) G bir homotopi grup, H G nin bir alt grubu olsun. Eğer, $g\in G$, $h\in H$ için $f_0(g,h)=ghg^{-1}$ ve $f_1(GxH)\subset H$ olacak şekilde bir

$$f_t:(GxH\ ,\ HxH)\to(G,H)$$

homotopisi varsa, H ye G de homotopi normal denir (Furukawa 1995).

Şimdi bu tariften yararlanarak demetler için homotopi normaliteyi aşağıdaki şekilde tarif edeceğiz.

Tarif 5.3.2. S, X üzerinde grupların bir demeti , $S'\subset S$ bir alt demet olsun. $S_x'\subset S_x$ altgrup olmak üzere $S=\bigvee_{x\in X} S_x$, $S'=\bigvee_{x\in X} S_x'$ yazılabilir.

Buna göre

$$S\oplus S'=\bigcup_{x\in X} S_x \,x\, S_x' \text{ olmak üzere}$$

$$f_t(S\oplus S',S'\oplus S')\to(S,S')$$

tasviri için

$$f_0(\delta_x,\delta'_x)=\delta_x\,\delta'_x\,\delta_x^{-1} \text{ ve } f_1(S\oplus S')\subset S'$$

şeklinde tarif edilen bir f_t homotopisi varsa $S'\subset S$ alt demetine S de homotopi normaldir denir.

S yerine özel olarak X üzerinde inşa ettiğimiz kompakt irtibatlı Lie gruplarının demeti olan $H(X)$ i ve S' yerinde $H'(X)$ altdemetini alarak $H'(X)\subset H(X)$ altdemeti için de homotopi normaliteden bahsedebiliriz.

Teorem 5.3.1. X_1, X_2 kompakt irtibatlı Lie grupları; $H(X_1)$, $H(X_2)$ bu Lie grupları üzerindeki demetler ve $k: H(X_1)\to H(X_2)$ örten demet morfizmi olsun

(i) Eğer $H'(X_1)$, $H(X_1)$ de homotopi normal ise $k(H'(X_1))$ de $H(X_2)$ de homotopi normaldir.

(ii) Eğer $H'(X_2)$, $H(X_2)$ de homotopi normal ise $k^{-1}(H'(X_2))$ de $H(X_1)$ de homotopi normaldir.

İspat .

(i) $H'(X_1)$, $H(X_1)$ de homotopi normal olduğundan $\sigma_x = [f]_x \in H(X_1)$, $b \in H'(X_1)$ için

$$h_0(\sigma_x, b) = \sigma_x\, b\, (\sigma_x)^{-1} \text{ ve}$$
$$h_1(H(X_1) \oplus H'(X_1)) \subset H'(X_1)$$

olacak şekilde bir

$$h_t: (H(X_1) \oplus H'(X_1)),\ H'(X_1) \oplus H'(X_1) \rightarrow (H(X_1), H'(X_1))$$

homotopisi vardır. Dolayısıyla

$$\sigma_x\, H'(X_1)\, (\sigma_x)^{-1} \sim H'(X_1)$$

yazılabilir.

k bir demet morfizmi olduğundan sapları koruyan sürekli bir tasvirdir. Dolayısıyla $k(H'(X_1))$, $H(X_2)$ nin bir alt demetidir.

$k(\sigma_x) = k([f]_x) = [kof]_{k(x)} = \mu_{k(x)}$ ile gösterilirse $\mu_{k(x)} \in H(X_2)$ dır.

$$\begin{aligned}\sigma_x\, H'(X_1)\, (\sigma_x)^{-1} \sim H'(X_1) &\Rightarrow k(\sigma_x\, H'(X_1)\, (\sigma_x)^{-1}) \sim k(H'(X_1))\\ &\Rightarrow k(\sigma_x)\, k(H'(X_1))\, k(\sigma_x)^{-1} \sim k(H'(X_1))\\ &\Rightarrow \mu_{k(x)}\, k(H'(X_1))\, \mu^{-1}_{k(x)} \sim k(H'(X_1))\end{aligned}$$

dir.

Böylece $k(H'(X_1))$, $H(X_2)$ de homotopi normaldir.

(ii) $H'(X_2)$, $H(X_2)$ de homotopi normal iken $k^{-1}(H'(X_2))$ nin $H(X_1)$ de homotopi normal olduğu yukardaki ispata benzer şekilde gösterilir.

KAYNAKLAR

Adams, F. J. 1982. Lectures on Lie Groups, The University of Chicago Press.

Adams, F. J. 1996. Lectures on Exceptional Lie Groups, The University of Chicago Press.

Baez, J. C. 2002. The octonions, Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.) No.2; 145–205.

Balcı, S. 1978. Homotopi ve Bir Uzayın Esas Grubu, Y.L.Tezi, Ankara Üniversitesi,

Balcı, S. 1981. Bir Topolojik Uzayın Esas Gruplarının Demeti ve İlgili Karakterizasyonlar, Ph. D. Tezi, Ankara Üniversitesi, Ankara.

Balcı, S. 1982. The Sheaf of The Fundamental Groups, Commun. Fac. Sci. Univ. Ankara, Ser. A1 Mathématiques, Tome 31; 59–65.

Balcı, S. 1983. On the Sheaf of The Fundamental Groups, Commun. Fac. Sci. Univ. Ankara, Ser A1 Mathématiques, Tome 32; 41–47.

Balcı, S. 1993. Characterization of Abelianized Normal Covering Spaces Via Global Sections, Jour. Inst. Math. and Comp. Sci. Math. Ser. Vol 6; No. 2; 129–135.

Balcı, S. 1994. On the Solution of the Lifting Problem on Abelian Covering Spaces, Pure and AppLied Mathematica Sciences, Vol. 39, No. 1–2; pp. 69–77.

Balcı, S. and Güner, E. 1998. On The Sheaf H_n of Higher Homotopy Groups as an Abelian Covering Space, Commun. Fac. Sci. Univ. Ankara, Ser. A1, V 47; 35–44.

Bourbaki, N. 1966. General Topology, part 1–2, Adisson-Wesley publ. Co.

Çitil, M. 2003. Kompakt İstisnai Lie Gruplarının Homotopi Gruplarını Demeti ,Ph. D. Tezi, Ankara Üniversitesi, Ankara.

Dugundji, J. 1996, Topology, Allyn and Bacon, inc, Boston,

Fegan, H. D. 1991. An Introduction to Compact Lie Groups, Series in Pure Math, V;13.

Furukawa, Y. 1995. Homotopy- Normality of Lie Groups III, Hiroshima Math.J. Vol.25, 83-96.

Gemignani, M.C. 1967 Elemantry Topology, Addison-Wesley Publ. Co. Reading, Mass, London

Grauret, H. and Fritzsche, K. 1976.Several Complex Variables, Springer-Verlag.

Güner, E. 1996. Yüksek Homotopi Gruplarının Demeti, Ph. D. Tezi, Ankara Üniversitesi, Ankara.

Hacısalihoğlu, H.H. 1980. Yüksek Diferensiyel Geometriye Giriş, Fırat Ünv. Yayınları.

Hacısalihoğlu, H.H. 2000. Diferensiyel Geometri, Cilt 1; baskı 4.

James, G. and Liebeck, M. 1993. Representations and characters of Groups, Cambridge University Pres.

Kachi, H. and Mimura, M. 1999. Homotopy groups of compact Exceptional Lie groups, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 75, no 4; 47–49.

Price, J. F. 1977. Lie Groups and Compact Groups, London Math. Soc. Lecture Note Series, 25.

Uluçay, C. 1972. Modern Topolojiye Giriş ve Grup Temsilleri, İstanbul Teknik Üniversitesi Kütüphanesi, Şirketi Mürettibiye Basımevi, Sayı 868; 287 s. , İstanbul.

Uluçay, C. 1978. Fonksiyonlar Teorisi ve Riemann Yüzeyleri, KTÜ. Temel Bil. Fak. Yayını, 2. Baskı.

Yıldız, C. 1982. H- Gruplar Üzerinde Demetler ve Bazı Karakterizasyonlar, Ph. D. Tezi, İ. Ü. Fen-Edebiyat Fakültesi, Ankara.

Yıldız, C. 1999. Genel Topoloji, Gazi Üniv. Yayını, Ankara.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Mustafa DOĞAN

Doğum Yeri : Kaşoba / ADANA

Doğum Tarihi : 27.03.1948

Medeni Hali : Evli

Yabancı Dili :İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve yıl)

Lise :Adana Erkek Lisesi 1971

Lisans :a) Karadeniz Teknik Üniversitesi Temel Bilimler Fakültesi Matematik Bölümü, 1975

b) Karadeniz Teknik Üniversitesi Temel Bilimler Fakültesi Matematik Mühendislik Bölümü, 1977

Yüksek Lisans : T.C. Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Yüksek Lisansı 1982

Çalıştığı Kurum / Kurumlar ve yıl

T.C. Başbakanlık Devlet İstatistik Enstitüsü Başkanlığı/Programcı–Matematikçi 1976-1978

Hava Kuvvetleri Komutanlığı, yedeksubay 1978-1979

T.C. Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü Asistanı 1980-1983

Yerfiskobirlik Genel Müdürlüğü/Genel Müdürü ve Yönetim Kurulu Başkanı 1984-1987

Elazığ Gübre Sanayi A.Ş. Genel Müdürlüğü /Genel Müdür Yrd. 1991-1992

Türkiye Gübre Sanayi A.Ş. Genel Müdürlüğü / Müşavir 1993-1996

Türkiye Zirai Donatım Kurumu / Genel Müdürü ve Yönetim Kurulu Başkanı 1997-2002