

T.C.
YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

OYUN TEORİSİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN: Çiğdem İNCİ

DANIŞMAN: Prof. Dr. Bülent KARAKAŞ

VAN-2009

T.C.
YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

OYUN TEORİSİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN: Çiğdem İNCİ

DANIŞMAN: Prof. Dr. Bülent KARAKAŞ

VAN-2009

KABUL VE ONAY SAYFASI

..... Anabilim Dalı'nda
danışmanlığında, tarafından sunulan “.....
.....” isimli bu çalışma “Lisansüstü
Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği” ve “Fen Bilimleri Enstitüsü Yönergesi”nin ilgili
hükümleri gereğince / / tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu
ile başarılı bulunmuş ve tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan:

İmza:

Üye:

İmza:

Üye:

İmza:

Üye:

İmza:

Üye:

İmza:

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun / / tarih ve sayılı
kararı ile onaylanmıştır.

ÖZET

OYUN TEORİSİ VE GEOMETRİK YORUMU

İNCİ, Çiğdem

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Bülent KARAKAŞ

Nisan 2009, 69 sayfa

Etkileşimli karar verme durumlarında optimum karar seçeneğini bize sunan oyun teorisi, gerek günlük hayatımızda gerekse iş hayatında gün geçtikçe daha fazla yer almaktadır. Kullanıldığı alanlar ve bu alanlara uygulanmasıyla elde edilen sonuçların tutarlılığı görüldükçe, konuya olan ilgi daha da artmaktadır. Teorinin çok daha sık kullanacağı bir zamana yaklaştığımız görülecektir.

Bu çalışmada oyun teorisinin temel kavramları verilerek sıfır toplamlı olmayan 3 kişilik oyunlar için örneklendirmeler yapılmıştır.

Anahtar kelimeler: Oyun teorisi, Strateji

ABSTRACT

GAME THEORY AND THE GEOMETRICAL COMMENT

İNCİ, Çiğdem

Master of Science, Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Bülent KARAKAŞ

APRIL 2009, 69 pages

The game theory that provides us an optimum decision option in such a position an interaction decision is given, takes place more often both in our daily life and business life. The interest in this issue is increasing when the consistency between the results of the application and application territory is seen. It will be seen that we come close to a period that theory will be used more often.

In this research it has been given fundamental concept of game theories an it has been given examples on-non sum-zero game that is for there

Key words: Game theory, Strategy

ÖN SÖZ

Bu çalışmada, oyun teorisinin temel kavramları verilerek sıfır toplamlı olmayan 3 kişilik oyunlar için örneklendirmeler yapılmıştır.

Bu çalışmayı bana veren ve çalışmalarım süresince karşılaştığım güçlüklerde yakın ilgi ve önerileri ile beni yönlendiren danışman hocam, Sayın Prof. Dr. Bülent KARAKAŞ'a ve yine çalışmalarım boyunca yardımlarını benden esirgemeyen Sayın Yrd. Doç. Dr. Şenay BAYDAŞ'a teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Çiğdem İNCİ

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	i
ABSTRACT	iii
ÖN SÖZ	v
İÇİNDEKİLER	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ	ix
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK BİLDİRİŞLERİ	1
3. OYUN TEORİSİ VE OYUN TEORİSİNİN TARİHİ	3
3.1. Oyun Teorisinin Tanımı	3
3.2. Oyun Teorisinin Tarihi ve Gelişimi	3
3.3. Oyun Teorisi İle İlgili Kavramlar	6
3.4. Oyunların Sınıflandırılması	7
3.5. Denge Kavramı ve Nash Dengesi	10
3.6. Oyunların Gösterim Biçimleri	11
3.6.1. Normal form	11
3.6.2. Mahkûmlar çıkmazı	12
3.6.3. Oyun ağacı formu	13
4. 2x2 SIFIR TOPLAMLI OYUNLAR	18
4.1. Optimal Strateji	18
4.2. Stratejilerin Seçilişi	18

4.2.1. Minimaks prensibi matrisi	18
4.3. Eyer Noktası ve Çözümler	22
4.4. Eyer Noktası Olmayan Oyunlar	24
4.5. Karma Stratejilerin Kullanılması	25
4.6. 2×2 ve $2 \times n$ Oyunların Çözümü	27
4.6.1. Basit 2×2 oyunların çözümü	28
4.6.2. Blöflü 2×2 oyunların çözümü	32
5. 2×2 OYUNLAR İÇİN GEOMETRİK METOD	38
5.1. $2 \times n$ Oyunları İçin Geometrik Metot	42
5.2. Bir $3 \times n$ Oyunun Geometrik Çözümü	55
6. ÜÇ KİŞİLİK SIFIR TOPLAMLI OLMAYAN OYUNLAR ve GEOMETRİK GÖSTERİMİ	57
7. TARTIŞMA ve SONUÇ	67
KAYNAKLAR	68
ÖZ GEÇMİŞ	70

ŞEKİLLER DİZİNİ

	Sayfa
Şekil 3.1. Oyunların sınıflandırılması.	8
Şekil 3.2. Oyun ağacının gösterilmesi.	14
Şekil 3.3. Oyun ağacı örneği.	15
Şekil 3.4. Oyun ağacı problemi çözümü.	16
Şekil 5.1. 2×2 oyun için geometrik çizim.	38
Şekil 5.2. 2×2 oyun için geometrik çizim.	39
Şekil 5.3. 2×2 oyun için geometrik çizim.	40
Şekil 5.4. 2×2 oyun için geometrik çizim.	40
Şekil 5.5. 2×2 oyun için geometrik çizim.	41
Şekil 5.6. 2×2 oyun için geometrik çizim.	41
Şekil 5.7. 2×2 oyun için geometrik çizim.	42
Şekil 5.8. 2×2 oyun için geometrik çizim.	42
Şekil 5.9. $2 \times n$ oyun için geometrik çizim.	43
Şekil 5.10. $m \times 2$ oyun için geometrik çizim.	45
Şekil 5.11. Hedef-yollar.	48
Şekil 5.12. 2×2 oyun.	51
Şekil 5.13. 2×3 oyun.	54
Şekil 5.14. 2×4 oyun.	55
Şekil 5.15. $3 \times n$ oyunun düzlemi.	56

Şekil 6.1. 3 kişilik oyunlar için koordinat düzlemi.	57
Şekil 6.2. $A_1B_1C_1$ stratejisi.	59
Şekil 6.3. $A_1B_1C_2$ stratejisi.	60
Şekil 6.4. $A_1B_2C_1$ stratejisi.	60
Şekil 6.5. $A_2B_1C_1$ stratejisi.	61
Şekil 6.6. $A_2B_1C_1$ stratejisi.	61
Şekil 6.7. $A_2B_1C_1$ stratejisi.	62
Şekil 6.8. $A_2B_2C_1$ stratejisi.	62
Şekil 6.9. $A_2B_2C_2$ stratejisi.	63
Şekil 6.10. $3 \times 2 \times 2$ oyun stratejileri.	64
Şekil 6.11. 3 boyutlu matris.	65

1. GİRİŞ

Ekonomik alanda, işletme yönetiminin karşılaştığı en büyük sorun karar verme aşamasıdır. Bu nedenle, üretici veya tüketici konumundaki işletmelerin vermiş olduğu kararlar doğrudan doğruya tüketim veya üretim şekillerini etkilemektedir. İşletmeler karar verme aşamasında genellikle içsel koşullarına bağlı olarak geleceğe yönelik belirledikleri hedeflere ulaşmayı amaçlarlar. İşletmeler, bu nedenle karar verme aşamasında zaman serileri trend analizi, kesit veri regresyon modeller, matematiksel programlama (Yöneylem araştırmaları) gibi kantitatif karar verme teknikleri ile geçmiş dönemlerdeki elde edilen verilerle geleceği tahmin etme yoluna gitmektedirler.

Bu yöntemlerde çoğu kez değişkenler arasında karşılıklı etkileşim dikkate alınmaz ya da bunun otomatik olarak oluşturulan modellere yansıdığı kabul edilir. Ayrıca, sözü edilen bu kantitatif değişkenlerden elde edilen sonuçlarda bir çok sosyo-ekonomik değişkenin modele eklenmesinde zorluklar yaşanmaktadır (Özdil, 1998).

Oyun teorisi, karmaşık etkileşimli karar alma sürecinde çözüm için bir başlangıç sağlaması açısından güçlü bir yönetsel araçtır. Oyun kuramı rekabet halindeki karar verici açısından, rakip hangi stratejiyi oynarsa oynasın, “kazanç söz konusu ise maksimizasyon, kayıp söz konusu ise minizasyon amacına yönelik olarak optimal strateji ne olmalıdır?” sorusunun yanıtını vermektedir. Bu alanda oyun teorisi rekabetin yer aldığı ekonomik piyasalarda, ekonomik kararların almasında önemli puan sağlayabilmektedir. Oyun teoremi, çatışma ortamında rakiplerin de karar sürelerini dikkate alarak karar verme olayını inceleyen matematiksel bir yaklaşımdır. “Rakiplerin hangi davranışı seçeceği bilinmeden, olumlu hareket kararlarını alabilmek için en rasyonel davranış ne olmalıdır?” sorusu teoremin ortaya çıkmasına neden olmuştur Bu nedenle Oyun Teorisi, karmaşık çıkarların mücadelesini açıklayan matematiksel bir yaklaşımdır (Özdil, 1998).

2. KAYNAK BİLDİRİŞLERİ

Nash (1950), doktora tezinde nobel ödüllü çalışması ile Nash Dengesinin 2-kişilik oyunlarda dengesini ve 2 kişilik işbirlikçi oyunları tanıtmıştır. Ventsell (1965), oyun teorisinde 2×2 , $2 \times n$, $n \times 2$ ve $m \times n$ oyunlar için çözümler geliştirmiştir. Lineer programlama ile çözümden bahsetmiş ve yetersiz bilginin söz konusu olduğu oyunların çözümünü bulmuştur. Özden (1989), kantitatif karar verme teknikleri ile geçmiş dönemlerde elde edilen verilerle geleceği tahmin etme yoluna gitmiştir. Kreps (1991), oyun teorisiyle ekonomik modelleme yapmıştır. Mirowski (1992), ekonomi politikasının tarihini ve oyun teorisinin çıkışını incelemiştir. McMillan (1992), üst düzey yönetim için oyun ve strateji kullanışlarını oyun teorisi içinde örneklendirerek açıklamıştır. Özdil (1998), ekonomik problemlerin çözümünde oyun kuramının yerini finansal piyasalarda bir uygulamayla örneklendirmiştir. Esen (2001), oyun kuramı çerçevesinde tam bilgi statik oyunları inceleyip, oligopol maddeleri uygulamıştır. Çetin (2001), hukuki ve ekonomik bağımsızlığını koruyan iş birliklerini gerçekleştirmede ortaya çıkan sorunlar ve çözüm önerileri oyun teorisi çerçevesinde ele alınan tez çalışmasını yapmıştır. Çağlar (2002), Oyun teorisinin tarihi gelişimini inceleyip güncel örnekler oluşturmuştur. Kafadar (2002), stratejik dış ticaret politikaları ve teknoloji transveri alanında tez yazmıştır. Naeve (2004), oyun ağacında her dalın bir düğüme bir karara sahip olduğunu, bu nedenle her düğümün birden fazla stratejiye sahip olabildiğini göstermiş. Özer (2004), oyun teorisini tarımda uygulamıştır. Oran (2004), oyun teorisini güncel olaylarla örneklendirmiştir. Greif (2005), oyun teorisinin ekonomi için tarihsel analizini yapmıştır. Raghavan (2005), iki kişilik sıfır toplamli oyunlar oluşturmuştur. Sun ve Khan (2005), sıfır toplamli olmayan $n > 2$ kişilik oyunlar için karma stratejileri inceleyip, Nash dengesinde sabitlemiştir. Chartwringht (2009), çok kişilik oyunlarda sade stratejiler için dengeyi inceleyip örneklendirmiştir.

3. OYUN TEORİSİ VE OYUN TEORİSİNİN TARİHİ

3.1. Oyun Teorisinin Tanımı

Çatışma durumlarının analiz ihtiyacını karşılamak için oyunlar teorisi diye adlandırılan özel matematiksel teknikler geliştirmiştir. Bu teorinin gayesi, birbirine karşı olan taraflar için en mantıklı hareket yollarını incelemektir. Gerçek hayattaki çatışma durumları, çok sayıdaki faktörlerin varlığı dolayısıyla, son derece karışıktır ve analizi çok güçtür. Bu yüzden, matematiksel bir analizi mümkün kılmak için, tâli(yan) derecedeki faktörleri atmak ve basitleştirilmiş modeller inşa etmek gereklidir. (Ventsell, 1965). Oyun Teorisi iki ya da daha fazla rakibi belirli kurallar altında birleştirilerek karşılıklı olarak çelişen olasılıklar karşısında, birbirlerine karşı en doğru stratejiyi belirleme yöntemidir.

3.2. Oyun Teorisinin Tarihi ve Gelişimi

Oyun teorisi 160 yıllık bir geçmişe sahip olmakla beraber, teorinin son 70 yılda gelişiminden söz etmek mümkündür.

Oyun teorisi ekonomi alanına ilk olarak aksak rekabet piyasalarının ekonomik analizinde kullanılmıştır. Fransız ekonomist Augustin Cournot'un 1838 yılında yayınladığı "Researches Into Mathematical Principles Of The Theory Of Wealth" (Refah Teorisinin Matematiksel Prensipleri Konusundaki Araştırmalar) kitabı üretici rekabeti konusundadır (Çağlar, 2002).

1883 yılında Josepf Bertrand, Cournot'un yapmış olduğu çalışmayı eleştirerek, karar değişkeninin üretim değil, fiyatlarının olduğunu ileri sürerek kendi Duopol modelini yaratmıştır.

1913 yılında oyun teorisi açısından en önemli aşamayı E.Zermelo kat etmiştir. Bu aşaması ile Satranç oyununu inceleyen Zermelo, oyuncularından birinin, taşlar satranç tahtasının neresinde olursa olsun her zaman bir kazanma stratejisine sahip olduğunu bulmuştur. Bu nedenle satranç oyununun her zaman bir çözümünün olduğunu matematiksel olarak ortaya koymuştur. Bu çalışması ile oyun teorisinde günümüzde oyun ağacı formunda

olan sıralı oyunlarının çözümünde kullanılan geriye doğru çıkan (backwards induction) olarak adlandırılan yöntemi bu çalışması ile oluşturmuştur.

Saf “Pure” strateji ve karma stratejilerin minimax çözümde ilk olarak matematiksel tanımlamasını 1921–1927 yılları arasında yapmış olduğu çalışmalarla Emile Boral gerçekleştirmiştir. Bu çalışmasını saf strateji sayısının sınırlı olduğu iki kişilik oyunların minimax teoreminin ispatlanması, Von Neumann tarafından, 7 Aralık 1926 gününde Göttingen Matematik Topluluğu’na sunması ile gerçekleşmiştir (Çağlar, 2002). Günümüzdeki modern oyun teorisinin temeli olarak kabul edilen bu çalışma 1928 yılında John Von Neumann tarafından yayınlanmıştır.

John von Neumann ayrıca 1944 yılında Oskar Morgenstern ile birlikte “Oyun Teorisi ve Ekonomik Davranış” (Theory of Games and Economic Behavior)’ı Amerika’da yayınlamışlardır. Bu kitapla von Neumann ve Morgenstern oyun kavramını formalize etmelerinin yanı sıra, ekonomi alanına önemli katkıda bulunmuşlardır. Bunlardan birincisi, fayda teoremine getirilmiş olan aksiyon esaslı yaklaşımın getirilmesi; ikinci olarak, sıfır toplam oyunlar olarak adlandırılan ki oyuncudan birinin oyunu ancak ve ancak birinin kaybetmesi durumunda kazanabileceği durumlar için ortaya çıkacak optimal çözümlerin detaylı bir biçimde karakterize edilmesi ve üçüncüsü ise, oyuncuların işbirliği yaptığı ve ortaklaşa oynanan oyunlar (**cooperative game**) olarak adlandırılan oyunların oyun teorisine kazandırmasıdır (Kafadar, 2002).

Oyun teorisinde bir diğer önemli çalışma, 1950 yılında John Nash tarafından gerçekleştirilerek, çözüm ve denge noktası olarak da bilinen ve günümüzde en çok kullanılan Nash dengesini oluşturmuştur.

1950-1953 oyun teorisi hakkında dört makale yazan Nash, bu makalelerden ikisinde, Oligopolistik piyasalar konusundaki Cournot’un çalışması üzerine Nash Dengesi oluşturmuş diğer ikisi de pazarlık problemi üzerinedir. Bu dört makale, bilim dalının daha çok gelişmesinde büyük etkiye sahiptir. John Nash’ın yaklaşımı, oyun teorisinin, sıfır toplamı oyunlardan sıfır toplamı olmayan oyunlara doğru gelişmesini de sağladı. 1950 yılında, “N-kişili oyunlarda denge noktası” ve 1951 yılındaki “Anlaşmasız oyunlar” hakkındaki iki tebliğ ile Nash, anlaşmasız oyunlarda Nash dengesini sağlayan bir

Stratejisini varlığını kanıtlamıştır. Bu denge stratejisini anlaşmasız oyunlara indirgeme yoluyla anlamak oyunların çalışma prensibini ortaya koymuştur. 1950 yılında “Pazarlık Problemi” ve 1953 yılında “iki -kişilik anlaşmalı Oyunlar” adlı iki tebliğ ile aksiyomatik pazarlık teorisini ortaya koydu. Pazarlık çözümünün varlığını kanıtladı ve ilk olarak Nash programının uygulamasını yaptı. John Nash bunların hepsi ile 1994’de ekonomi anlamındaki Nobel ödülü ile ödüllendirildi (Mirowski ,1992).

Reinhard Selten, 1965’li yıllara dayanan çalışmalarında Nash dengesi kavramını dinamik oyunlara uyarlamayı başarmıştır. Bu tip oyunlarda oyuncunun mevcut durumda yapacağı bir hareket, oyunun sonraki aşamalarında ortaya çıkacak olan sonuçlarından önemli ölçüde etkilenmektedir. Selten bu noktadan hareketle akla uygun davranmayı öngören bir yöntem geliştirmiştir. Harsanyi ise, 1967-1968 yıllarında yapmış olduğu çalışmalarla Nash’in geliştirmiş olduğu fikirleri, oyuncuların birbirleriyle ilgili tam olarak bilgi sahibi olmadığı tipteki oyunlara adapte etmiştir (Kafadar, 2002)

1980’li yıllardan sonra oyun teorisi hızla gelişmiştir. Bu tarihlerden sonra David Kreps ve Robert Wilson (Yetersiz Bilginin Söz Konusu Olduğu Oyunların Çözümü, 1982), Rubinstein (Pazarlık Modelindeki Kusursuz Denge, 1982), Tan ve Werlang (Oyunların çözüm anlayışlarının Bayestan Temeli, 1988) gibi isimler oyun teorisine çok büyük katkılarda bulunmuşlardır (Çağlar, 2002).

3.3. Oyun Teorisi İle İlgili Kavramlar

Oyun teorisini; “iki ya da daha fazla rakibi belirli kurallar altında birleştirerek karşılıklı olarak çelişen olasılıklar karşısında, birbirlerine karşı en doğru stratejiyi belirleme yöntemidir” şeklinde tanımlamıştık. Bu tanıma göre bir oyunda şu unsurların bulunması gerekmektedir.

- a) Oyuncular
- b) Oyunun kuralları ve stratejiler
- c) Oyunda elde edilen kazanç veya kayıplar
- d) Oyunun sonucu yâda denge noktası

Sözü edilen yukarıdaki dört unsura ek olarak geniş anlamda bir oyunun elemanları olarak hareketler ve bilgi durumu da dâhil edilebilir.

Tanım 3.1. Oyuncu: Bir oyunda her bir karar veren birime oyuncu denir. Yâda bir başka ifadeyle; oyunun taraflarına oyuncu denir. Bu oyuncular poker oyununda olduğu gibi bireyler, oligopol piyasalarda olduğu gibi firmalar veya askeri çatışmalarda olduğu gibi uluslar da olabilir. Bir oyunu oynayabilmek için en az iki oyuncuya ihtiyaç vardır. Her oyuncu kendi bilgi seti ve rakibinin bilgi seti doğrultusunda faydasını maksimize edecek şekilde rasyonel olarak hareket ettikleri varsayımı altında hareket ederler. Rasyonel olmayan hareketlerin hiçbiri oyun teorisi içinde yer alamaz. Kısacası her oyuncu sahip olduğu tercihler arasında, mümkün olan en büyük ödülü verecek tercihi seçerek oyunu bitirmek arzusundadır.

Tanım 3.2. Oyunun kuralları ve stratejiler: Bir oyunun oynanabilmesi için oyuna taraf olan oyuncuların belirli kurallar altında birleşmeleri gerekmektedir. Kuralların olmaması durumunda taraflar stratejilerini belirleyemeyeceklerdir. Bu kurallar satranç oyununda olduğu gibi her taşın nasıl hareket edeceği olabileceği gibi, şirketlerin ticaretini bir düzende tutan ticaret kanunu ya da uluslararası anlaşmalarla belirlenen kurallar olarak da ifade edilebilir. Stratejiler ise; her oyunda oyuncuların belli hareketler içerisinde çeşitli seçenekleri vardır. Oyuncuların belirli bir zaman dilimi içerisinde rakibinin olası hareketlerine karşı önceden belirlenen ve olanaklı alternatiflerden rakibin hareket tarzlarını

saptayan kurallar bütününe de strateji denir. Bir oyunda strateji sayısı sonlu ya da sonsuz olabilir (Özdil 1998). Yapılan hareketin diğer oyuncuyu etkilemesi ve etkileşim sürecinin sürekli olması, o sürecin oyun olmasını sağlayacaktır.

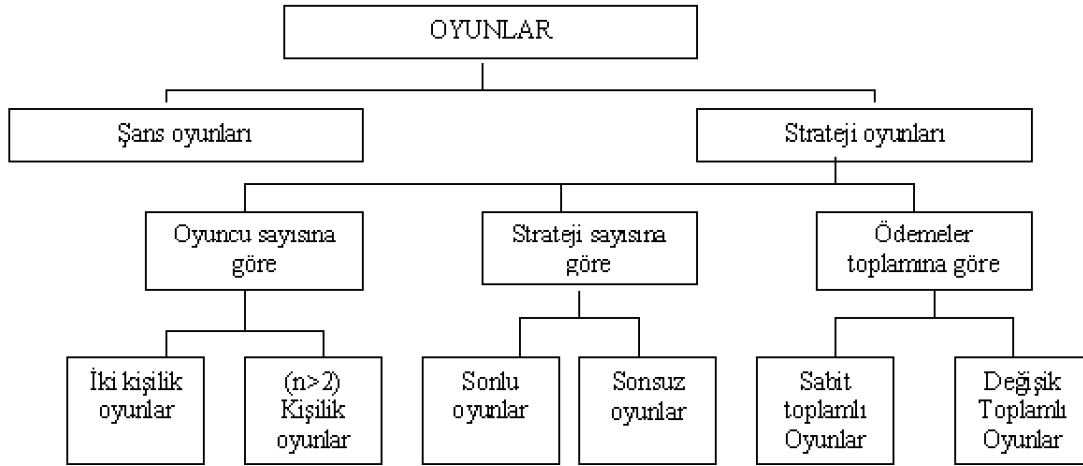
Tanım 3.3. Oyunda elde edilen kazanç ve kayıplar: Oyunun oynanması süresince her bir stratejiye karşılık gelen, her oyuncunun bir kazancı ya da bir kaybı söz konusudur. Bu kazanç ya da kayıplar artı sonsuz ile eksi sonsuz arasında yer alabilir. Bu değerler sayısal olarak ifade edilebileceği gibi, oransal olarak da ifade edilebilir. Kazançlar ya da kayıpların birimleri her durumda aynı ölçü biriminde olması gerekmektedir. Oyuncuların strateji seçimlerinden ortaya çıkan kazanç ve kayıpları göstermek için kullanılan matrise ise ödemeler matrisi adı verilmektedir.

Tanım 3.4. Oyunun sonucu ya da denge noktası: Her oyuncunun rasyonel olarak hareket ettikleri varsayımı altında, oyuncuların oyunu bitirmeleri sonucunda ulaştıkları noktaya, oyunun sonu ya da denge noktası adı verilir. Oyun teoreminde bu denge noktasına Nash dengesi adı verilmektedir. Bu noktada her oyuncunun oynayacağı strateji belli olup, sözü edilen bu stratejiyi kullanmak için karar verilen hareketler uygulanır.

3.4. Oyunların Sınıflandırılması

Oyunlar temelde iki farklı gruba ayrılırlar. Birincisi, şans oyunu olarak söz ettiğimiz oyunlar olup, oyunun sonucu ihtimal hesaplamaya dayanan oyunlardır. Bu oyunların sonucu matematiksel olarak olasılık ile ilgili hesaplamalarla çözülebilir. Örneğin, bir madeni paranın havaya atılması sonucunda yazı veya tura gelmesi sonucu elde edilecek olan kazanç veya kayıplar şansa bağlıdır. Bu tür şans oyunları, oyun teorisi içinde kabul edilen oyun kategorisi içinde yer almazlar. İkinci tür oyunlar, oyuncunun bilgi, beceri, zekâ vb. düzeyleri ile doğrudan ilgili strateji oyunları olarak adlandırdığımız oyunlardır. Strateji oyunlarının yapısına baktığımızda oyuncular, stratejiler, kazanç veya kayıplar ile denge noktasını içinde barındıran oyunlardır. Bu nedenle oyun teorisi, bu tür stratejik oyunlarla ilgilenmektedir.

Oyunları sınıflandırılmasını şematik olarak aşağıdaki gibi gösterebilir (Özden, 1989).



Şekil 3.1. Oyunların sınıflandırılması.

Oyuncu sayısına göre strateji oyunları iki kişilik ve n kişilik oyunlar olarak ikiye ayrılır. Oyun sadece iki kişi tarafından oynanıyorsa bu tür oyunlara iki kişilik oyun adı verilmektedir. İki firma arasındaki rekabet ve bu rekabet sonucu oluşturulan kurallar bütünü iki kişilik oyunlar olarak adlandırılabilir. Bununla beraber Satranç oyunu iki kişilik oyunlara verilebilecek en iyi örnektir. Oyuncu sayısı ikiden fazla olan oyunlara n kişilik oyunlar adı verilmektedir. Oyuncu sayısı arttıkça ödemeler matrisini oluşturmak ve bu oluşturulan matrisi çözümü oluşturmak teorik olarak yetersizdir. Çünkü insan beyni 3 boyuttan fazla boyutu algılayamamaktadır. Bu nedenle n kişilik oyunlarda, bir oyuncu diğer oyunculardan ayırarak geriye kalan oyuncuların tamamını bir oyuncu olarak kabul ederek oyun iki kişili oyunlar formuna dönüştürülebilir (Özer, 2004).

Oyuncular strateji sayılarına göre sonlu ya da sonsuz oyunlar olarak adlandırılmaktadır. Çözüm yöntemi uygulanabilirlik açısından oyunlar strateji sayılarına göre değerlendirilebilse de (2×2 , 2×3 , $2 \times n$, $m \times 2$, $m \times n$ gibi), genelde strateji sayısının belirli olup olmamasına göre sonlu ve sonsuz oyunlar olarak ikiye ayrılabilir (Ventsell, 1965). Fakat bir oyunun oynanabilmesi için stratejilerinin belli olması gerekmektedir. Eğer, stratejileri sonsuz bir oyun ile karşılaşırsa bu oyunun çözümü için gerekli olan ödemeler matrisinin oluşturulması mümkün olmayacaktır. Bu nedenle sonsuz bir oyunu oynanırken (sürekli tekrarlanan) matematikte yer alan limit kavramından yararlanarak ödemeler matrisi oluşturulabilir.

Oyun boyunca oyuncular seçtikleri stratejilere göre kazanç ya da kayıp elde ederler. Oyun boyunca seçilen her stratejide kazanç ve kayıplar değişmiyorsa, bu sabit toplamli oyunlar olarak adlandırılmaktadır. Bu toplam iki kişilik bir oyunda özel olarak sıfır ediyorsa, burada birinin kazancı diğerinin kaybı demektir. Bu tür oyunlara iki kişilik sıfır toplamli oyunlar adı verilmektedir. Bu oyunların temel özelliği çözümde seçilen stratejiyi vermesidir. Bu strateji her iki oyuncu için optimaldir. Değişik Toplamli oyunlarda oyun boyunca seçilen her farklı strateji çifti için farklı oyun değerleri söz konusudur (Özdil,1998).

Oyunun özellikleri bakımından farklılık göstermesi açısından da oyunları sınıflandırmamız mümkündür. Bu tür sınıflandırma yöntemi, oyunun kurallarından kaynaklanan farklılıklara göre sınıflandırma olarak da adlandırılmaktadır.

Tanım 3.5. Oyunların bilgi düzeyine göre sınıflandırılması: Oyunlar bilgi düzeyine göre tam bilgi altında oynanan oyunlar ile eksik bilgi altında oynanan oyunlar olarak da sınıflandırılabilir. Tam bilgi altında oynanan oyunlar da oyuncular karşılıklı olarak kazanç ve kayıplarını oyuna başlamadan önce bildikleri oyunlardır.

Eğer, oyuncular oyunun sonunda elde edecekleri kayıp ve kazançlarının bilmiyorlarsa veya birbirleri hakkında bilgi sahibi olmadıkları bu tür oyunlara eksik bilgili oyunlar adı verilmektedir. Eksik bilgili oyunlarda karşılıklı oynanan oyunlar defalarca oynanması durumunda, taraflar birbirleri hakkında elde edecekleri bilgi setleri her oynanan oyundan sonra artacaktır. Bu da oyuncuların birbirleri hakkında bilgiyi her oyun sonunda artırmaları yani birbirlerinin hareketlerini tamamen anlamaları anlamına gelecektir.

Tanım 3.6. Oyuncuların oyuna başlamadan önce anlaşmalı olup olmamaya bağlı oynanan oyunlar: Bu tür oyunlar işbirlikli oyunlar ya da işbiriksiz oyunlar olarak da adlandırılmaktadır. Oyuncuların, oyuna başlamadan önce işbirliğine girmeleri durumunda elde edecekleri kazanç, işbirliğine girdikten sonra elde edecekleri kazançtan daha yüksek olacaktır. İşbirliğine girmenin amacı, her oyuncunun kendi faydası maksimum düzeye yükseltme isteğinden doğmaktadır. Bir oyuncunun işbirliğini bozması durumunda, diğer oyuncunun buna karşı bir misilleme yapabileceği ihtimalini içinde bulunduran oyunlar olarak da ifade edilebilir.

İşbirliksiz oyunlarda, oyuncular arası işbirliğini kesin olarak yasaklayan ya da karşılıklı olarak rakiplerin birbirlerine karşı güvenlerinin olmadığı türde oynanan oyunlardır. Her oyuncu kendi çıkarına göre en iyisini yapma arzusu içindedir. Tam bir rekabet söz konusudur. İşbirliğine dayanmayan oyunlara örnek olarak; serbest piyasada her şirket kendi bağımsız fiyatın ve kendi bağımsız reklâm stratejilerini belirleme imkânına sahiptir. Şirketlerin rekabeti bozacak şekilde işbirliğine girmesi kesinlikle yasaktır şeklinde olan piyasalar verilebilir.

3.5. Denge Kavramı ve Nash Dengesi

Oyunun oynanması durumunda, her oyuncunun stratejisi olacaktır. Bu stratejiler içinde oyuncular kendilerinin baskın strateji (Dominant Action) olmasını arzularlar. Bu şekilde baskın stratejiye sahip olan oyuncular oyunun ne şekilde oynayacaklarını ve oyunun sonucunun ne şekilde biteceğini bilmek oldukça kolay hale getirmeyeceklerdir. Baskın stratejiyle bir oyuncunun karşıdaki oyuncu ya da oyuncular ne şekilde oynarlarsa oynasınlar tek bir biçimde oyuncunun hareket etmesi anlamına gelmektedir.

Çoğu oyunların hâkim stratejileri yoktur ve oyuncular kendi hareketlerini seçmek için diğer oyuncunun hareketlerini ortaya çıkarmak zorundadır. Bu bakımdan oyuncular, diğer oyuncular hakkında kararlar verirken yapabileceklerinin en iyisini yapacaklardır. Bu da hâkim strateji dengesini de içine alan ve daha geniş bir denge kavramı olan **Nash dengesidir**. Nash dengesi çok geniş oyunlar sınıfında çok kuvvetli tahminler üreten bir çözüm kavramıdır (Esen, 2001).

Nash dengesinde temel unsur, bir denge noktası düşüncesidir. Analizde Nash, von Neumann minimax teoremi genelleştirilmesinin temeli olarak en iyi cevap (a best-reply) yaklaşımını seçmiştir. Nash'e göre, iki kişilik bir oyunun çözümüne aday olacak bir strateji çifti, stratejinin her biri rakibinin oynayacağını tahmin ettiği diğerine, en iyi cevap verebilme niteliğini sağlaması gerekmektedir. Her bir oyuncu stratejilerinin oyuncunun kendi ödülünü maksimize ettiği durumu ifade etmektedir. Her oyuncunun stratejisi, diğer oyuncuların oynayacağını tahmin ettiği stratejilerine karşı optimaldir. Bu özellikleri olan bir strateji çifti (kombinasyonu) Nash dengesi olarak isimlendirilmekte ve işbirlikli oyunların temelini oluşturmaktadır (Çağlar, 2002).

Bu durumda oynanan herhangi bir durumda, oyunda oyuncular için baskın stratejilerin bulunması sonucunda ulaşılan denge durumunun aynı zaman da Nash dengesine karşılık geldiğini söylemek mümkündür. Buna karşılık her Nash dengesi baskın stratejiye sahip ortaya çıkaran dengeyi vermek zorunda değildir. Çünkü kimi oyunlarda birden fazla Nash dengesine ulaşılması mümkündür (Kafadar, 2002).

3.6. Oyunların Gösterim Biçimleri

Oyunların oynanış biçimlerini gösterebilmek için iki farklı yol vardır. Bunlar; normal form biçiminde oynanan oyunlar ve oyun ağacı formunda oynanan oyunlar olarak adlandırılabilir.

3.6.1. Normal form

Normal form yapısında gösterilen oyun biçimi, oyun teorisinde en çok rastlanan biçim olup, normal biçimde, her oyuncunun olası stratejileri ile oyuncuların farklı stratejilerinin kesişiminde elde edilecek ödül veya kayıpları gösteren bir formdadır.

Bir oyunun normal bir formda gösteriminde, her oyuncu, şans olarak stratejilerini seçerler. Eğer bir oyun eş zamanlı oynanıyorsa bu durumda oyunun biçimi normal formda olmalıdır ve oyun bu nedenle matris gösterimi ile gösterilmelidir. Buna göre oyunculardan birinin n tane, diğerinin m tane stratejiye sahip olduğu sıfır toplamlı oyunun normal formda gösterimi şekildeki gibidir.

		2. Oyuncu					
		B_1	B_2	B_3	.	.	B_n
1. Oyuncu	A_1	a_{11}	a_{12}	.	.	.	A_{1n}
	A_2	a_{21}	a_{22}	.	.	.	A_{2n}
	A_3	a_{31}	a_{32}	.	.	.	A_{3n}
	.	.	.	.	.	.	.
	.	.	.	.	.	.	.
	.	.	.	.	.	.	.
	.	.	.	.	.	.	.
	A_m	a_{m1}	B_{m2}	.	.	.	a_{mn}

Normal formda gösterilen bir oyunda her oyuncunun kazanç ve kayıplarının gösterildiği matrise ödemeler matrisi adı verilmektedir.

3.6.2. Mahkûmlar çıkmazı

Normal formda oynanan oyunları ve bu oyunlarda elde edilen dengeyi daha iyi anlatabilmek için mahkûmlar çıkmazı örneği üzerinden açıklamaya çalışırsak (Oran, 2004);

Bir soygun soruşturması sonucu iki şüpheli yakalanmış ve ayrı odalarda ilk sorgulamalarının yapılmasını beklemektedirler. Soruşturmayı yöneten savcı, bu iki tutukluya bir anlaşma paketi önerir. Bu öneriye göre ikisi de suçu itiraf ederse 6 yıl, ikisi de reddederse birer yıl hapis cezası yiyeceklerdir. Eğer birisi itiraf, diğeri reddederse itirafçı serbest kalacak ve arkadaşı on yıl hapis cezası yiyecektir. Oyunun tanımı bu bilgilere göre yapılabilir.

Buna göre oyunu kurarsak;

- 1) Oyuncu sayıları ve oyuncular tanımlanır; $I = \{\text{birinci şüpheli, ikinci şüpheli}\}$
- 2) Oyunun stratejileri tanımlanır; $A = \{\text{itiraf, Red}\}$, $i = \text{birinci şüpheli, ikinci şüpheli}$
- 3) Bu oyunun her olası sonucu için getirileri bir kazanç matrisi ile gösterilebilir:

		2. Oyuncu	
		İtiraf	Ret
1. Oyuncu	İtiraf	-6;-6	0;-10
	Ret	-10;0	-1;-1

Dikkat edilecek nokta, yukarıdaki getiri matrisindeki kazançların negatif olmasıdır. Çünkü bu oyunda getiriler hapisteye geçirilecek olan yıllardır. Taraflar en az hapisteye kalma stratejileri optimal strateji olarak düşünülebilir. Her hücredeki ilk rakam satır oyuncusunun, ikincisi ise kolon oyuncusunun getirileridir. Bu sorunun çözümünde Nash dengesinden faydalanabiliriz.

Mahkûmlar çıkmazı gibi 2x2 kazanç matrisi olan oyunlarda Nash dengesini bulmak çok kolaydır. Bunun için matrisin bütün hücrelerine tek tek bakmak yeterli olacaktır:

1. Oyuncu itiraf eylemi sabit tutulursa, 2. Oyuncunun yapabileceği en iyi seçim itiraf etmektir. Çünkü itiraf ederse 6, etmezse 10 yıl yatacaktır. 2. oyuncu Ret eylemi sabit tutulduğunda, 1. oyuncunun en iyi seçimi yine itiraf olacaktır. Çünkü birinci oyuncu serbest kalmayı, 1 yıl hapse yeğleyecektir. Yani, 2. oyuncu ne yaparsa yapsın itiraf etmek birinci oyuncu için dominant stratejidir. 2. oyuncu için de aynı durum söz konusudur. Akılcı oyuncular aynı odalarda, birbirlerinin nasıl davranacaklarını düşünürken ulaştıkları sonuç olan (itiraf, itiraf) gerçekten oyunun Nash dengesini verir, çünkü ne birinci ne de ikinci oyuncu rakibin itiraf stratejisi karşısında kendi itiraf stratejilerini değiştirmek istemezler. Oysa her ikisi de, beşer yıl yerine ikişer yıl hapis yatmayı tercih ederler. Bu tercihlerine rağmen, akılcı oldukları ve akılcılığın genel bilgi olduğu için işbirlikçi sonucu (Ret, Ret) elde edemezler. Oyunun ismindeki çıkmaz sözcüğü buradan kaynaklanmaktadır.

Eğer, oyuncular arasında işbirliği söz konusu olsaydı iki oyuncuda ret etme seçeneğini seçerek optimum faydalanma maksimum yapma yoluna gideceklerdi. Fakat bir kez oynanan oyunlarda işbirliğine girilmesi mümkün değildir. Çünkü karşılıklı olarak oyuncuların birbirine güvenleri tam olarak sağlanamaz ve bir oyuncunun yükümlülüğü yerine getirmemesi durumunda diğer oyuncunun yaptırımı söz konusu olmayacaktır.

3.6.3. Oyun ağacı formu

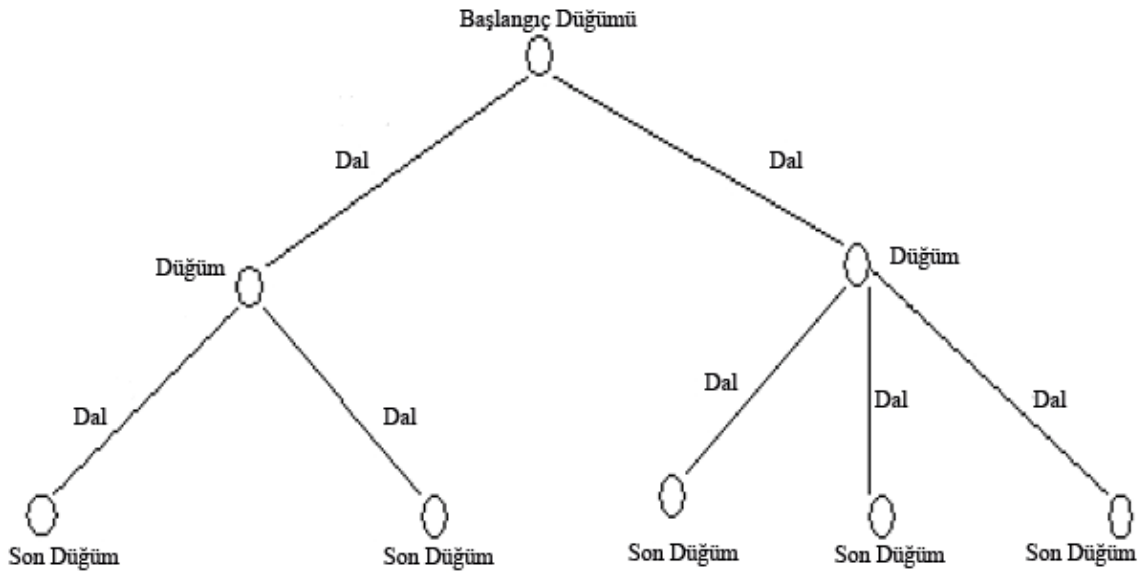
Oyun ağacı formunda bir oyunun oluşturulması, işbiriksiz oyunların gösteriminde kullanılmaktadır. Bu türlü oyunlar ayrıca sıralı olarak oynanan oyunlar olarak da adlandırılmaktadır.

Oyun ağacı biçiminde gösterilen oyunlarda, oyuncuların seçebilecekleri hareketlerin zamanlanması ve onların bu seçimi yaparken, sahip oldukları bilgileri ön plana çıkarır (Kreps, 1991).

Bu ağaç formunu detaylı olarak tanımlarsak, herhangi bir süre zarfında oyuncuların oyunu oynaması aşamasında, stratejilerinin ne olacağını gösteren biçimli oyunlardır. Bu tür oyunların normal formdan en büyük farkı, kurulan modellere zaman bileşeninin eklenmesidir. Bir oyun ağacında bu nedenle dallar ve düğümler yer almaktadır. Bunların yanında oyunun oynanması için bir ilk harekete ihtiyaç vardır. Bu hareketlerin bulunduğu

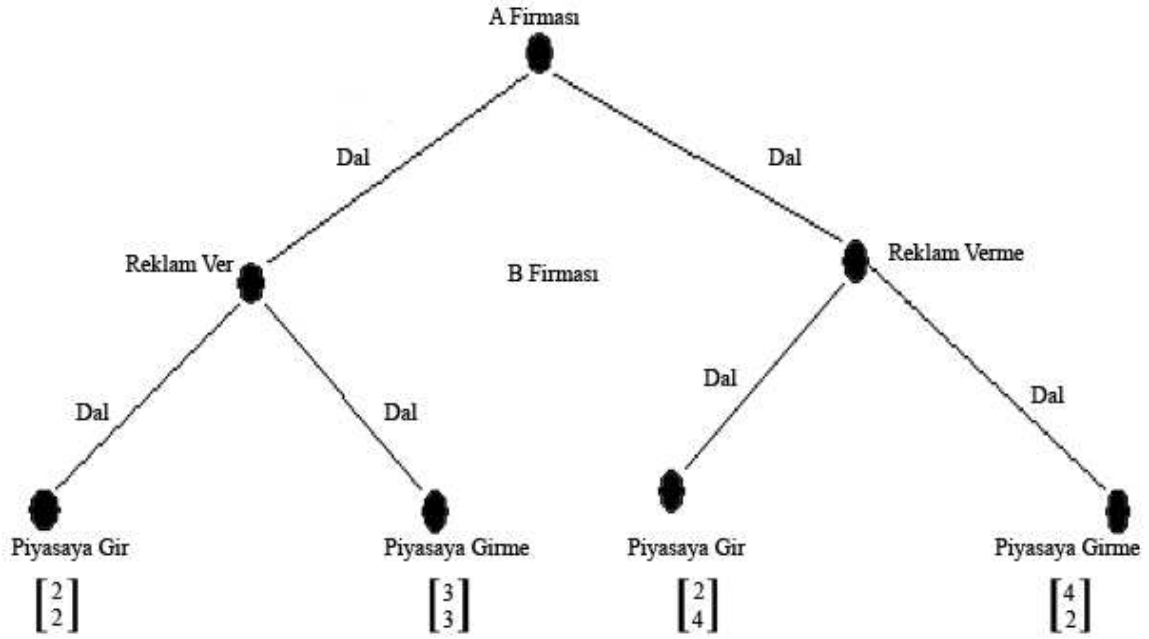
düğümüne başlangıç düğümü adı verilir. Her dal bir düğüme bir karara sahiptir. Bu nedenle her düğüm birden fazla stratejiye sahip olabilir. Bir düğüm dallara ayrılmıyorsa bu durumdaki düğüme son düğüm adı verilir (Naeve, 2004).

Oyun ağacı formundaki bir oyunun çözümü bilinen çözüm yöntemlerinden farklı olup, sondan başa doğru çözüm olarak adlandırılan (Geriye Doğru Çıkarım Yöntemi) yöntem kullanılmaktadır. Bu yöntemde son düğümde yer alan kayıp ya da kazanç değerleri üzerinden başlangıç düğümüne ulaşmak hedeflenmektedir. Bir örnek ile Oyun ağacı yöntemini incelersek;



Şekil 3.2. Oyun ağacının gösterilmesi.

Piyasada A ve B adı altında iki firma bulunmaktadır. Firma A, x ürününü piyasada bulundurmaktadır. B firması benzer bir ürününü piyasaya sokarak A firması ile rekabete girmeyi planlamaktadır. A firmasının reklâm vermek ve reklâm vermemek gibi iki hareketine karşılık, B firmasının piyasaya ürününü ile girip girmeme hareketi bulunmaktadır. Her iki firmanın son düğüm noktası kazanç ya da kayıp getirileri aşağıdaki oyun ağacında verilmiştir. Aşağıdaki şekilde her iki firmanın son düğümde elde ettikleri kazanç matrisleri yer almaktadır. Bu kazanç matrislerinde yer alan sayıların üstte yer alan sayı A firmasına ait olup, alttaki sayı B firmasına aittir.



Şekil 3.3. Oyun ağacı örneği.

Her iki şirkete ait stratejilerin ortaya konulması gerekir. Buna göre A firmasının stratejileri;

- 1) Reklâm vermek ve
- 2) Reklâm vermemek şeklinde olacaktır.

B firmasının stratejileri;

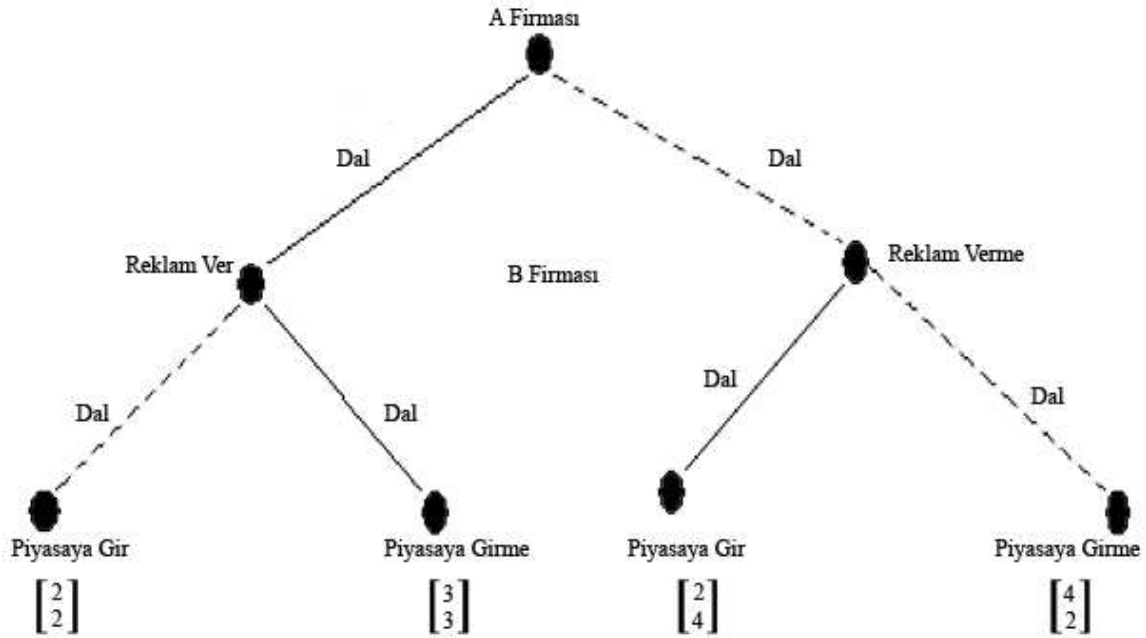
1) A firması reklâm verirse, B firması piyasaya girer ve A firması Reklâm vermezse B firması Piyasaya girer.

2) A firması reklâm verirse, B firması piyasaya girmez ve A firması Reklâm vermezse B firması Piyasaya girmez.

3) A firması reklâm verirse, B firması piyasaya girmez ve A firması Reklâm vermezse B firması Piyasaya girer.

4) A firması reklâm verirse, B firması piyasaya girer ve A firması Reklâm vermezse B firması Piyasaya girmez şeklinde sıralayabiliriz.

Bu aşamadan sonra oyun ağacının çözüm aşamalarından olan geriye doğru çözüm yöntemi ile oyunun denge noktası bulunur. Oyuna ait çözüm aşağıda verilmiştir.



Şekil 3.4. Oyun ağacı problemi.

Geriye doğru çözüm yolu incelendiğinde A firması eğer reklâm verirse bu durumda B firmasının iki seçeneği olacaktır. Ya piyasa ya girerek 2 birimlik getiri kazanacak yada piyasaya girmeyerek 3 birimlik getiri kazanacak. Her oyuncunun rasyonel hareket ettiği varsayımı altında B firması, A firması reklâm vermesi durumunda piyasaya girmeyecektir ($2 < 3$). A firması reklâm vermemesi yolunu seçerse bu durumda B firması rasyonel hareket ederek piyasaya girecektir. Çünkü piyasaya girmemeye karşılık kazanacağı getiri piyasaya girme yolunda kazanacağı getiriden küçüktür ($4 > 2$).

Şekilde büyük kesikli çizgi ile gösterilen dalla B oyuncusu oynamayacaktır. A oyuncusunun B oyuncusuna karşı iki stratejisi bulunmaktadır. Bunlardan birincisi, reklâm vermemek ve reklâm vermek. B oyuncusunun her iki duruma karşılık belli olan stratejilere karşılık A firması; ya reklâm vererek 3 birimlik getiriye kabul edecek ya da reklâm vermemekle 2 birimlik getiriye kabul edecektir. A firmasının da rasyonel bir oyuncu olduğunu kabul ettiğimize göre, A firması reklâm verme stratejisini seçecektir. Şekilde

küçük kesikli çizgi ile gösterilen stratejiyi A firması asla seçmeyecektir. Buna göre elde edilen Nash dengesi “A firması 1 stratejisine karşılık; B firması 3. stratejiyi seçer” şeklinde oluşur. Buna göre A ve B firmalarının oyun sonucu getirileri 3’e 3 dür.

Oyun ağacı ile normal formda oynanan oyunlar arasındaki en büyük fark; normal formda oynanan oyunlarda birden fazla Nash dengesi bulunabilirken, oyun ağacı formunda oynanan oyunlarda her zaman bir tek Nash dengesine ulaşır.

Oyun ağacı formunda yer alan bir oyun normal forma dönüştürülebilmesine karşılık, normal formda yazılan bir oyun ağacı, formunda yazılması ve bu formda oynanması mümkün değildir. Oyun ağacında oyuna kimin başladığına göre oyunun sonunda elde edilen Nash dengesi farklı şekillerde oluşabilir. Oyun ağacında sıra çok önemli bir husustur (Özer, 2004).

4. 2x2 SIFIR TOPLAMLI OYUNLAR

4.1. Optimal Strateji

Oyun teorisinin amacı bir çatışma durumunda oyuncular için rasyonel hareket yollarını incelemektir. Eğer bir oyun bir çok defalar tekrar edilirse, bir oyuncu için bir *optimal strateji* mümkün olan en büyük ortalama kazancı (veya aynı şey demek olan mümkün en küçük ortalama kaybı) *garanti* edecek strateji haline gelir. Burada şu önemli temel ilke kabul edilmektedir:

Her oyuncu, diğer oyuncu kadar akıldır. Bu yüzden bir stratejide mevcut tehlike unsurları hesaba katılmadığı gibi, oyuncuların herhangi birinin yapması mümkün hatalar veya yanlış hesaplar da dikkate alınmaz.

Karışık bir olayın herhangi bir matematiksel modelinde olduğu gibi, oyun teorisinde de önemli sınırlamalar vardır. En önemli kısıt, kazançları gösteren sayıların tek bir şekilde belli olmasıdır. Bir çok pratik çatışma durumlarında, sonucun değerinin tayini için tek bir kriter değil, birden fazla kriter mevcuttur ve bir kritere göre optimal olan bir strateji bir diğerine göre optimal olmayabilir. Gerçek çatışma durumlarında, eğer optimal değilse, kabul edilebilir stratejileri bulmak için, böyle stratejilerin gözü kapalı olarak izlenmemesi gerektiğini hatırlayalım.

4.2. Stratejilerin Seçilişi

4.2.1. Minimaks prensibi matrisi

$A \backslash B$	B_1	B_2	$\dots$	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}	$\dots$	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	$\dots$	a_{2n}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
A_m	a_{m1}	a_{m2}	$\dots$	a_{mn}

Matrisi, yukarıdaki gibi olan iki oyunculu bir $m \times n$ oyununu ele alıp optimal stratejimizi tayin ederek probleminin tetkikine başlayalım.

A_1 'den başlayarak açık olan stratejilerden her birini ard arda tahlil edelim.

A_i stratejisini seçerse, B buna a_{ij} kazancımızın mümkün olduğu kadar küçük olduğu B_j stratejisi ile cevap verecektir. Bu yüzden, tespit edilince, a_{ij} sayılarının en küçüğü üzerinde yoğunlaşılmalı Yani i -yinci satırdaki

$$a_{i1} \ a_{i2} \ a_{i3} \dots \dots a_{in}$$

Sayılarının en küçüğü bulunmalı. Bu sayı a_i ile gösterilirse

$$a_i = \min_j a_{ij}$$

yazılabilir. Yukarıdaki “ $\min_j$ ” ifadesiyle, i tesbit edildiğine göre, j 'nin mümkün bütün değerleri için a_{ij} 'lerin en küçük değeridir.

Kazanç matrisinin sağına ilave edilen bir sütuna a_i sayıları yazılsın.

A_i stratejisi seçildiğinde a_i den daha fazla kazanma beklenmez. Mümkün olduğu kadar ihtiyatlı davranılmalı. Bir riske girmek istenmiyorsa a_i 'lerin maksimum olduğu A_i stratejisi seçilmelidir. ‘ i ’ nin bu maksimum değerini kısaca

$$\alpha = \max_i a_i$$

veya

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij}$$

ile gösterelim. α değeri garanti edilebilecek en büyük kazançtır.

α sayısı matrisin belli bir sırasında bulunur. Buna karşı gelen stratejiye A için **Maksimin Strateji** denir. Bu A 'nın en ihtiyatlı stratejisidir. B ne yaparsa yapsın A , α kazancından emin olabilir ve α bunun doğru olduğu en büyük kazançtır. α ya oyunun alt değeri denmesinin sebebi şudur: A , son derece ihtiyatlı en garantili stratejisine bağlı kaldığı sürece bu daima emin olabileceği, garanti edilmiş bir minimumdur.

B için benzer durumu göz önüne alalım. B , A 'nın kazançlarını minimum yapmak istediğinden önce stratejilerinden her biri için maksimum kazancı bulması gerekir. Halbuki, B_j stratejisi için maksimum kazanç

$$B_j = \max_i a_{ij}$$

ve B_j lerin en küçük değeri

$$\beta = \min_j \beta_j = \min_j \max_i a_{ij}$$

dır. β 'ya oyunun *üst değeri* veya *minimaksı* denir; B için buna karşı gelen stratejiye *minimaks strateji* denir. Minimaks strateji B 'nin en garantili stratejisidir; B her zaman bunu kullanırsa, A ne yaparsa yapsın, kazancı β 'dan daha fazla olamayacağını garanti etmiş olur.

En garantili stratejileri (A için maksimin strateji, B için minimaks strateji) kabul etmek ilkesine “**minimaks ilkesi**” denir ve her iki stratejiye de bazen **minimaks stratejiler** denir.

Örnek 4.1. Kazanç matrisi aşağıdaki gibi olan bir para oyunun kazanç matrisine α_i ve β_j sütununu ve satırını ekleyelim.

$A \setminus B$	B_1	B_2	α
A_1	1	-1	-1
A_2	-1	1	-1
β	β_1	β_2	

Çözüm: α_1, α_2 'nin her ikisi de -1'dir ve oyunun alt değeri -1'dir; β_1 ve β_2 'nin her ikisi de +1'dir ve oyunun üst değeri +1'dir. O halde

$$\alpha = -1 \text{ ve } \beta = +1 \text{ 'dir.}$$

A oyuncusu için her bir strateji için bir maksimin strateji, B oyuncusu için her bir strateji bir minimaks stratejidir. Sonuç basittir: Mümkün iki stratejiden birine bağlandığı takdirde, her oyuncu 1'den fazla kaybedemeyeceğinden emindir.

Örnek 4.2. Kazanç matrisi farklı olan bir oyunun matrisine α_i ve β_j sütununu ve satırını ekleyelim;

A/B	B ₁	B ₂	B ₃	α
A ₁	2	-3	4	-3
A ₂	-3	4	-5	-5
A ₃	4	-5	6	-5
β	4	4	6	

Çözüm: Oyunun alt değeri -3'tür; üst değeri ise 4'tür. A için Maksimin strateji A₁'dir; devamlı olarak bunu kullanırsa kazancı -3'den daha küçük olmayacağından, başka bir deyişle kaybı 3'den büyük olmayacağından emin olabilir.

B'nin minimaks stratejileri B₁ ve B₂'dir. Bunlardan birini devamlı olarak kullanarak her defasında 4'den daha fazla kaybetmeyeceğinden emin olabilir. A maksimin strateji yerine, örneğin A₂ stratejisini kullanırsa, bu takdirde B₁, B₂ stratejisini kullanarak A'nın kazancını -5'e indirebilir. Benzer şekilde, B minimaks stratejilerinden biri olmayan B₃ stratejisini seçerse, kaybı 6'ya yükselebilir.

Örnek 4.3. Farklı bir oyunun daha matrisine α_i ve β_j sütununu ve satırını ekleyelim;

A/B	B ₁	B ₂	B ₃	α_i
A ₁	0,9	0,4	0,2	0,2
A ₂	0,3	0,6	0,8	0,3
A ₃	0,5	0,7	0,1	0,1
β_j	0,9	0,7	0,8	

Çözüm: Oyunun alt değeri 0.3'tür, üst değeri ise 0.7'dir. A₂, A'nın en garantili (maksimin) stratejisidir. Bunu kullanarak uçağı tahrip etme umudunun en az 0,3

olduğundan emin olabilir. B_2 , B 'nin en garantili (minimaks) stratejisidir; bunu kullanarak, uçağının düşürülme olasılığının 0.7'den daha fazla olamayacağından emin olabilir.

Minimaks stratejilerinin önemli bir özelliğini açıklamak üzere bu örneğimizi kullanabiliriz. Bu özellik bunların kararsızlığıdır. A 'nın A_2 maksimin stratejisini kullandığını ve B 'nin B_2 minimaks stratejisini kullandığını varsayalım. Her iki taraf bu stratejilere bağlı kaldığı sürece ortalama kazanç 0.6 olacaktır. Bu ise oyunun alt değerinden büyük ve üst değerinden küçüktür. Şimdi B 'nin A 'nın A_2 'yi seçtiğini bir şekilde öğrendiğini varsayalım. Bu takdirde derhal B_1 stratejisi seçecek ve kazancı 0.3 sayısına indirecektir. Fakat A , B 'nin B_1 'i seçtiğini bilirse A_1 'i kullanabilir ve kazancı 0.9'a çıkartabilir. Şu halde her iki taraf da minimaks stratejilerini kullanırsa, durum kararsızdır ve taraflardan biri diğer tarafın seçtiği strateji hakkında bilgi edinirse durum değişebilir.

4.3. Eyer Noktası ve Çözümler

Minimaks stratejilerin **kararlı** olduğu bazı oyunlar vardır. Bunlar alt ve üst değerleri birbirine eşit olan oyunlardır.

$$\text{Eğer } \alpha = \beta$$

ise bu takdirde bunların ortak değerine **oyunun değeri** denir. Bu değeri v harfi ile gösterilir. Matrisi aşağıda gösterilen bir 4×4 oyununu göz önüne alalım.

A/B	B_1	B_2	B_3	B_4	α_i
A_1	0,4	0,5	0,9	0,3	0,3
A_2	0,8	0,4	0,3	0,7	0,3
A_3	0,7	0,6	0,8	0,9	0,6
A_4	0,7	0,2	0,7	0,6	0,2
β_j	0,8	0,6	0,9	0,9	

Oyunun alt değeri $\alpha = 0.6$ 'dır; üst değeri ise $\beta = 0.6$ 'dır. Bunlar birbirine eşit olduklarından oyun için bir değer vardır. bu da;

$$\alpha = \beta = 0,6$$

'dır . A_3 ve B_2 stratejilerine karşı gelen 0.6 elemanı *kendi satırında en küçük sayı ve kendi sütununda en büyük sayıdır*. Geometride bir yüzey üzerinde böyle özelliklere (bir doğrultuda minimum ve diğer doğrultuda maksimum olan) olan bir noktaya **eyer noktası** denir. Benzetme yolu ile aynı terim oyunlar teorisinde de kullanılır. Eğer bir oyun matrisin bir elemanı böyle bir özelliğe sahip ise buna **oyunun bir eyer noktası** denir.

Oyunun bir eyer noktası varsa bunu veren minimaks strateji çiftine (bu oyunda A_3 ve B_2) **optimal strateji** denir. Her ikisi birlikte **oyunun çözümünü** teşkil ederler. Bu çözüm aşağıdaki dikkate değer özelliği haizdir. Oyunculardan biri optimal stratejisine bağlı kaldığı halde öteki böyle yapmazsa, bu takdirde optimal stratejisinden ayrılan oyuncu böyle yapmakla *asla kazanamaz*. En iyi halde kazancı aynı kalır, en kötü halde kaybı daha büyük olur. Şu halde, A optimal stratejisine bağlı kalırsa, B Kendi stratejisini değiştirerek A 'nın kazancını asla azaltamaz. Kazanç ya aynı kalır veya artar. Benzer şekilde, B kendi optimal stratejisini kullanır ve A kendisinininkini kullanmazsa, kazanç asla artamaz. Oyuncu bu oyun için bu ifadelerin doğruluğunu göstermelidir.

Şu halde görüyoruz ki, eyer noktası olan bir oyun için minimaks stratejilerin bir kararlılığı vardır. Optimal stratejiler çifti bu anlamda bir “denge konumu” dur. Bu halde ön bilginin bir oyuncuya hiç bir fayda sağlamadığını kaydedelim. Hasminin bir optimal stratejiyi kabul ettiğini bilse bile, onun yine de kendi optimal stratejisini kullanması gerekir. Bir eyer noktası olan oyunda her iki taraf da kendi optimal stratejilerine bağlanırsa, ortalama kazanç oyunun değeri olan ve hem alt, hem de üst değere eşit olan v olacaktır.

Bu demektir ki, her iki taraf için bir optimal stratejiler çifti vardır ve bunlar için ortalama kazanç oyunun değerine eşittir. *Eğer* mükemmel bilgili bir oyun sadece kişisel hareketleri içeriyorsa, optimal stratejilerin kullanılması kazancı tek bir şekilde belirler ve bu kazanç oyunun değerine eşittir. Mükemmel bilgili bir oyun örneği olarak aşağıdaki oyunu göz önüne alalım.

Örnek 4.4. Geniş bir daire çiziliyor ve iki oyuncu birbirinin üstüne gelmemek şartıyla dairenin içinde herhangi bir yere sıra ile birbirinin aynı olan madeni paralar koyuyorlar. En sonunda daire içinde artık para koyacak yer kalmayacak ve son parayı koyan oyuncu bütün paraları kazanacaktır. Bu oyun için ilk parayı koyan oyuncunun daima

kazanmasını garanti eden bir optimal strateji vardır. Bunu yapmak için ilk parayı dairenin tam merkezine koyar; sonra, hasmının her oyunu için, onun son koyduğu paranın merkeze göre simetriği olan konumu seçer. İkinci oyuncu hangi konumları seçerse seçsin, birinci oyuncu daima oyunu kazanır. Aşıkarak, bu oyun sadece optimal stratejiyi bilmeyen oyuncular için oynanmağa değer.

Satranç gibi diğer mükemmel bilgili oyunlar için benzer bir durum vardır. Genel teoreme göre, satrancın bir eyer noktası vardır ve bu yüzden her iki tarafın optimal stratejilerini tamamıyla belirleyen bir çözümü olması gerekir. Bununla beraber, pratik bir mesele olarak bir satranç oyununda hareketlerin mümkün kombinezonlarının sayısı o kadar büyüktür ki, şimdilik kazanç matrisini kurmak ve eyer noktasını bulmak imkânsızdır.

4.4. Eyer Noktası Olmayan Oyunlar

Karma Stratejiler, belirli bir oranda kullanılmış ardışık sade stratejilerin rasgele bir sıralanışından ibaret bileşik stratejilere **karma stratejiler** denir.

Bir sade strateji, stratejilerinden birinin kullanılma oranı 1 ve ötekilerden her birinin kullanılma oranı sıfır olan bir karma stratejinin özel bir hali olarak da düşünülebilir.

Sade stratejilerle birlikte karma stratejiler de kullanılırsa, her sonlu oyunun bir çözümü olduğu görülür. Bu demektir ki her sonlu oyun için bir optimal stratejiler (çok defa karma stratejiler) çifti o şekilde vardır ki, ortalama kazanç oyunun değerine eşittir ve öteki kendi optimal stratejisine bağlı kaldığı halde oyunculardan biri kendi optimal stratejisinden ayrılırsa, böyle yapmakla sadece kaybedebilir.

Bu iddia, ilk defa 1928 yılında **John Von Neumann** tarafından ispat edilen ve **oyunlar teorisinin esas teoremi** denilen teoremin ifadesidir.

Aşağıdaki çözüm strateji ile elde edilen ortalama kazanç, oyunun değeri adını alır. Esas teoremden her sonlu oyunun bir değeri olduğu görülür. “Bir oyunun α değeri” oyunun alt ve üst değerleri arasında bulunmalıdır, yani

$$\alpha \leq v \leq \beta$$

olmalıdır. Bu husus şu şekilde görülür α yalnız sade stratejileri kullanarak garanti edilen maksimum kazançtır. Sade stratejiler karma stratejilerin özel halleri olduklarından, karma stratejileri de kullansak kazancımızı azaltamayız. Bu sebepten;

$$\alpha \leq v$$

olmalıdır. Benzer düşünce ile hasmımızın durumunu göz önüne alırsak;

$$v \leq \beta$$

olduğu görülür; bu ise $\alpha \leq v \leq \beta$ olması demektir. Bu sonuç, daha önce v sembolünü ve

$$\alpha = \beta = (v)$$

Özel halinde “oyunun değeri” deyimini kullanışımızı doğrulamaktadır.

4.5. Karma Stratejilerin Kullanılması

P’ler

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1$$

olacak şekilde normalize edilmek şartıyla, A’nın karma stratejisi A_1, A_2, A_3 sade stratejilerinin $p_1: p_2: p_3$ oranlarında kullanılmasından ibaret olduğunu varsayalım. Bu takdirde stratejiyi;

$$S_A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix}$$

ile göstereceğiz. Benzer şekilde;

$$S_B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ q_1 & q_2 & q_3 & q_4 \end{pmatrix}$$

B’nin bir karma stratejisini gösterebiliriz; burada $B_1 B_2 B_3 B_4$ sade stratejileri $q_1: q_2: q_3: q_4$ oranlarında kullanılmışlardır ve

$$q_1 + q_2 + q_3 + q_4 = 1$$

’dir.

Bir oyunun S_A^* ve S_B^* gibi iki optimal karma stratejiden ibaret bir çözümünün olduğunu varsayalım. Genel olarak, bir oyuncunun kullanabileceği sade stratejilerden hepsi onun optimal karma stratejisinde kullanılmaz. Kullanılan stratejilere “**faydalı**” stratejiler diyeceğiz. Bir oyunun çözümü aşağıda ispat edeceğimiz dikkate değer başka bir özelliği haizdir.

Teorem 4.1. Eğer oyunculardan biri kendi optimal karma stratejisine bağlanırsa, bu takdirde, diğer oyuncu yalnız “faydalı” stratejileri kullanmak şartıyla ne yaparsa yapsın, kazanç oyunun v değerine eşit kalır.

İspat: Şu halde, ikinci oyuncu “faydalı” stratejilerinden herhangi birini bir sade strateji olarak kullanabilir veya bunlardan keyfi oranlarda karma yapabilir. İspatta işlemleri basitleştirmek için, S_A^* optimal stratejisinin A_1, A_2, A_3 gibi üç faydalı stratejinin bir karması ve S_B^* ’nin B_1, B_2, B_3 gibi üç faydalı stratejinin bir karması olduğunu varsayalım ve $p_1+p_2+p_3=1$ ve $q_1+q_2+q_3=1$ olmak üzere

$$S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix}$$

ve

$$S_B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{pmatrix}$$

karma stratejileri kullandıklarını kabul edelim (ispat içerisinde de görülecek ki bu kabuller ispatın genelliğine zarar vermez ancak ileriye kolaylaştırır).

Aslında şunu ispat edeceğiz. A, S_A^* stratejisine bağlanırsa, B ’de, B_1, B_2, B_3 stratejilerinden istediği oranda karmalar yapabilir ve bu takdirde kazanç değişmez ve oyunun değeri olan v ye eşit kalır.

İspata geçelim. A, S_A^* stratejisine karşılık B, B_1, B_2, B_3 stratejileri oynadığı zaman kazançlar sırasıyla v_1, v_2 ve v_3 olsun. Optimal stratejinin tanımı gereğince, B ’nin S_B^*

optimal stratejisinden herhangi bir ayrılmasının onun kazançlarını arttırmadığı bilinmektedir. Şu halde;

$$v_1 \geq v, v_2 \geq v, v_3 \geq v \quad (1)$$

'dür. Simdi (1)'deki eşitsizlik işaretlerinin olmayacağını gösterelim. v 'nün q_1, q_2, q_3 oranlarında karılmış v_1, v_2 ve v_3 'ü gösterdiği hatırlanırsa;

$$\begin{aligned} v &= v_1 q_1 + v_2 q_2 + v_3 q_3 \\ q_1 + q_2 + q_3 &= 1 \end{aligned} \quad (2)$$

yazılabilir.

(1)' den görülür ki, v_1, v_2, v_3 'den herhangi biri v 'den büyük olsaydı,

(2)'ın sağ tarafı da v 'den büyük olurdu, bu ise olamaz. O halde

$$v_1 = v_2 = v_3 = v$$

olur ve v_1, v_2 ve v_3 nasıl karılırsa karılsın, bunların ortalama değeri v 'ye eşit olur.

Sonlu oyunların çözümlerini bulmada optimal stratejilerin bu önemli özelliğini devamlı olarak kullanacağız.

4.6. 2x2 ve 2xn Oyunların Çözümü

Eğer bir $m \times n$ oyununun eyer noktası yoksa, özellikle m ve n 'nin büyük değerleri için bir çözüm bulmak genellikle güçtür. Fakat bazen kazanç matrisindeki stratejilerin sayısını önceden azaltarak bu iş basitleştirilebilir. Bir matristen atılabilecek iki çeşit strateji vardır.

A/B	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄
A ₁	1	2	4	3
A ₂	0	2	3	2
A ₃	1	2	4	3
A ₄	4	3	1	0

Önce eş stratejileri bulalım. A_1 ve A_3 stratejileri için kazançların terim terime aynı olduklarını görmek kolaydır; bunlardan biri ötekine tercih edilemez; bu yüzden birini, örneğin A_3 'ü atmak mümkündür.

Şimdi hâkim stratejileri araştıralım. A_2 satırının her elemanı A_1 satırının karşı gelen elemanından ya küçüktür veya ona eşittir. Aşikâr olarak A_2 stratejisini asla kullanmayız. Çünkü bu daima A_1 'den daha az karlıdır. Bu yüzden A_2 'yi de atabiliriz. A_1 stratejisi A_2 stratejisine hâkimdir veya A_2 stratejisi A_1 stratejisine mahkûmdur, denir.

A_1 ve A_2 stratejilerini attıktan sonra aşağıdaki daha basit matris kalır:

A/B	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	1	2	4	3
A_4	4	3	1	0

Ayrıca kaydedelim ki, hasmımızın B_3 stratejisi B_4 stratejisine mahkûmdur, zira bu sonuncunun elemanları daha küçüktür, o halde B_3 stratejisini atabiliriz. Böylece başlangıçtaki 4×4 matrisini aşağıdaki 2×3 matrisine indirgemiş oluyoruz:

A/B	B_1	B_2	B_4
A_1	1	2	3
A_4	4	3	0

Genel olarak, bir çözüme başlamadan önce bütün eş ve mahkûm stratejiler atılmalıdır.

4.6.1. Basit 2×2 oyunların çözümü

Elemanter metotlarla daima çözülebilen en basit sonlu oyunlar 2×2 ve $2 \times n$ ($m \times 2$) oyunlarıdır. Matrisi aşağıda görülen 2×2 oyununu göz önüne alalım. Eğer bu oyunun bir eyer noktası varsa, çözüm eyer noktasında kesişen sade stratejiler çiftinden ibarettir.

Kolayca gösterebilir ki bir 2×2 oyunundaki eyer noktası daima önceden atılması gerekli hiç olmazsa bir mahkûm stratejinin varlığına tekabül eder.

A/B	B ₁	B ₂
A ₁	a ₁₁	a ₁₂
A ₂	a ₂₁	a ₂₂

Oyunun eyer noktasının olmadığını ve oyunun alt ve üst değerlerinin eşit olmadığını kabul edelim. Şimdi A 'nın

$$S^*_A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix}$$

optimal karma stratejisini bulalım. Bu stratejinin şu özelliği olduğunu biliyoruz: B yalnız “faydalı” stratejilerini kullanmak şartıyla ne yaparsa yapsın, ortalama kazanç oyunun değeri olan v 'ye eşit olacaktır. Eyer noktası olmayan bir 2×2 oyununda B 'nin her iki stratejisi de “faydalıdır. Aksi takdirde çözüm sade stratejilerden ibaret olurdu. Bu ise oyunun bir eyer noktası olduğu anlamına gelirdi. Bu sebepten, A optimal stratejisine bağlanırsa, B ortalama kazancını değiştirmeksizin kendi B_1, B_2 sade stratejilerinden birini kullanabilir.

Böylece aşağıdaki denklem yazılabilir.

$$a_{11}p_1 + a_{22}p_2 = v$$

Oyunun v değeri p_1 ve p_2 nin değerlerini denklemlerinden birinde yerine koyarak bulunur. Oyunun değeri bilinince karşı tarafın

$$S^*_B = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ q_1 & q_2 \end{bmatrix}$$

optimal stratejisini bulmak için sadece bir denkleme, örneğin

$$a_{11}q_1 + a_{12}q_2 = v$$

denklemine ihtiyaç vardır. $q_1 + q_2 = 1$ olduğundan

$$q_1 = \frac{v - a_{12}}{a_{11} - a_{12}}, \quad q_2 = 1 - q_1$$

elde edilir.

Örnek 4.5. Matrisi

A/B	B ₁	B ₂
A ₁	1	-1
A ₂	-1	1

olan 2x2 oyunu ele alalım. Bu oyunun eğer noktası yoktur. $\alpha = -1$ ve $\beta = +1$ dir. Dolayısıyla;

$$S_A^* = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ p_1 & p_2 \end{bmatrix}, S_B^* = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ q_1 & q_2 \end{bmatrix}$$

karma stratejileri seçilebilir. p_i, q_i 'leri hesaplayalım.

Çözüm: p_1 için

$$1p_1 + (-1)p_2 = (-1)p_1 + 1p_2$$

'den, ve $p_2 = 1 - p_1$ 'den

$$p_1 = \frac{1}{2}, p_2 = \frac{1}{2}, v = 0$$

bulunur. Benzer işlemlerle $q_1 = \frac{1}{2}, q_2 = \frac{1}{2}$ elde edilir. Sonuç olarak, her oyuncu için optimal strateji, sade stratejilerden her ikisini rast gele ama sonuç itibariyle eşit sayıda seçmektir.

$$a_{11}p_1 + a_{21}p_2 = v$$

$$a_{12}p_1 + a_{22}p_2 = v \quad (3)$$

$$\text{ve } p_1 + p_2 = 1 \text{ den}$$

$$a_{11}p_1 + a_{21}(1 - p_1) = a_{12}p_1 + a_{22}(1 - p_1)$$

$$p_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}$$

$$p_2 = 1 - p_1$$

elde edilir. p_1 ve p_2 'nin bulunan değerleri, (3) eşitliklerinden birinde yerine yazılarak oyunun v değeri bulunur. Oyunun değeri, karşı tarafın,

$$S_B^* = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ q_1 & q_2 \end{bmatrix}$$

optimal stratejisi için,

$$a_{11}q_1 + a_{21}q_2 = v$$

veya

$$a_{21}q_1 + a_{22}q_2 = v$$

$$'den ve \quad q_1 + q_2 = 1'den,$$

$$a_{11}q_1 + a_{12}(1 - q_1) = v$$

$$a_{11}q_1 - a_{12}q_1 = v - a_{12}$$

$$q_1 = \frac{v - a_{12}}{a_{11} - a_{12}}$$

ve

$$q_2 = 1 - q_1$$

'den q_1 ve q_2 hesaplanabilir.

Örnek 4.6. Yazı-tura atma oyununu ve 2×2 matrisini hatırlayalım. Bu oyunun eyer (denge) noktası yoktur. Bu yüzden

çözüm;

$$S_A^* = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ p_1 & p_2 \end{bmatrix}, S_B^* = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ q_1 & q_2 \end{bmatrix}$$

gibi bir karma strateji çifti gerektirir. p_1, p_2, q_1 ve q_2 'yi hesaplayalım.

$$1.p_1 - (1 - p_1) = -1.p_1 + 1(1 - p_1)$$

$$p_1 + p_1 + p_1 + p_1 = 1 + 1$$

$$p_1 = \frac{1}{2}$$

ve

$$p_2 = \frac{1}{2}$$

ve

$$1.p_1 - 1.p_2 = v$$

'den $v = 0$ elde edilir. $v = 0$ 'dan,

$$1.q_1 - (1 - q_1) = 0$$

$$2q_1 = 1 \Rightarrow q_1 = \frac{1}{2} \quad \text{ve} \quad q_2 = \frac{1}{2}$$

elde edilir. Oyunun strateji değerleri eşittir. Oyunun ortalama değeri sıfırdır ve böyle oyunlara insafli oyun denir.

4.6.2. Blöflü 2x2 oyunların çözümü

Simdi çözümü o kadar aşikar olmayan daha karmaşık bir oyun göz önüne alalım. Bu blöf ihtiva eden basit fakat öğretici bir oyun örneğidir. Pratik çatışma durumlarında karşı tarafı yanıltmak için birçok metot kullanılır (Yanlış bilgi verme, amaçların yanlış gösterilmesi vs).

Örnek 4.7. Biri as, öteki ikili olmak üzere yüzleri masanın üzerine kapatılmış iki kart vardır. A oyuncusu B oyuncusuna göstermeden bunlardan birini rasgele alır. Eğer kart as ise A'nın "ası çektim" diyerek B den 1 lira istemesi gerekir. Çekilen kart ikili ise A oyuncusu ya "ikiliyi çektim" diyerek B'ye 1 lira öder veya "ası çektim" diyerek B'den 1 lira ister.

Eğer B'ye 1 lira verilirse onu almaya mecburdur. Eğer B'den 1 lira istenirse, ya A'nın as tuttuğuna inanır ve ona 1 lira öder veya o da inanmaz ve kartı görmek ister. Eğer A'nın elini göstermesini ister ve onun da gerçekten ası varsa, A'ya 2 lira ödemesi gerekir.

Eğer B , A 'nın elini göstermesini ister ve A 'nın da ikilisi varsa, A 'nın B 'ye 2 lira ödemesi gerekir. Bu oyunu inceleyip taraflardan her biri için optimal stratejiyi bulalım.

Çözüm: Oyunun yapısı nispeten karışıktır ve bir mecburi kişisel hareket - Anın bir kart seçisi - ile hiç biri mecburi olmayan iki kişisel hareketten ibarettir. Eğer A ası çekerse, seçme hakkı yoktur, sadece B 'den 1 lira isteyebilir. Bu takdirde B 'nin bir kişisel hareketi vardır: A 'ya inanmak veya ona inanmamak (yani ona 1 lira ödemek veya elini göstermesini istemek). Eğer A yerden ikiliyi çekerse, bu takdirde bir seçim yapması gerekir: Blöf yapmak veya yapmamak. Blöf yaparsa, B için yine aynı seçim vardır: A 'ya inanmak veya inanmamak (yani A 'ya 1 lira ödemek veya elini göstermesini istemek). A blöf yapmazsa, B 'nin 1 lirayı kabul etmekten başka yapacağı bir şey yoktur. İki oyuncunun stratejileri kişisel hareketlerini tayin etmek için kabul edecekleri kurallar olacaktır. Aşikâr olarak A 'nın sadece iki stratejisi vardır:

A_1 : blöf yapmak, A_2 : blöf yapmamak.

B 'nin de iki stratejisi vardır:

B_1 A 'ya inanmak, B_2 elini göstermesini istemek.

Oyunun matrisini teşkil etmek amacıyla her strateji kombinezonu için kazancın ortalama değerini hesap etmemiz gerekmektedir.

A_1B_1 (A blöf yapıyor, B ona inanıyor).

a_{11} ortalama kazancını hesaplayalım.

Eğer A ası çekerse (bunun ihtimali $\frac{1}{2}$ 'dir), yapacak bir kişisel hareketi yoktur.

B 'den 1 lira ister, B bunu öder. A 'nın kazancı lira cinsinden 1 liradır.

Eğer A ikiliyi çekerse (bunun ihtimali de $\frac{1}{2}$ 'dir), blöf yapar ve B 'den 1 lira ister,

B 'de bunu öder. Kazanç yine 1'dir. Ortalama kazanç;

$$a_{11} = \left(\frac{1}{2}\right)(1) + \left(\frac{1}{2}\right)(1) = 1 \text{ 'dir.}$$

(A blöf yapıyor, B elini göstermesini ister).

a_{12} 'yi hesaplayalım.

Eğer A ası çekerse, yapacak bir kişisel hareketi yoktur, sadece B 'den 1 lira istemesi gerekir. B elini göstermesini ister ve sonunda A 'ya 2 lira ödemeye mecbur kalır. A 'nın kazancı 2'dir.

A ikiliyi çekerse, blöf yapar ve B 'den 1 lira ister. B elini göstermesini ister ve sonunda A 'dan 2 lira alır. A 'nın kazancı -2 'dir.

Ortalama kazanç;

$$a_{12} = \left(\frac{1}{2}\right)(+2) + \left(\frac{1}{2}\right)(-2) = 0 \text{ 'dir.}$$

A_2B_1 (A blöf yapar, B meydan okur).

a_{21} ortalama kazancını hesap edelim.

Eğer A ası çekerse, 1 lira ister. B bunu öder, A 'nın kazancı 1'dir.

Eğer A ikiliyi çekerse, B 'ye 1 lira öder ve B 'de bunu kabul eder. A 'nın kazancı -1 'dir.

4. A blöf yapar, B meydan okur). a_{22} 'yi hesap edelim.

Eğer A ası çekerse, 1 lira ister. B elini göstermesini ister ve sonunda 2 lira ödemeye mecbur kalır. A 'nın kazancı $+2$ 'dir.

Eğer A ikiliyi çekerse, B 'ye 1 lira öder, B 'de bunu kabule mecburdur. Kazanç -1 'dir.

Ortalama kazanç;

$$a_{22} = \left(\frac{1}{2}\right)(+2) + \left(\frac{1}{2}\right)(-1) = \frac{1}{2} \text{ 'dir. Oyunun matrisi aşağıda gösterilmiştir. Oyunun}$$

alt değeri $\alpha = 0$ ve üst değeri $\beta = \frac{1}{2}$ 'dir ve oyunun eyer noktası yoktur. Oyunun matrisi şöyledir.

A/B	B ₁ (inanıyor)	B ₂ (İnanmıyor)
A ₁ (Blöf yapıyor)	1	0
A ₂ (Blöf yapmıyor)	0	1/2

Bu yüzden çözümün karma stratejilerden teşekkül etmesi gerekir.

$$p_1 = \frac{(a_{22} - a_{12})}{(a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12})}$$

'den ve $p_1 + p_2 = 1$ 'den

$$p_1 = \frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

$$p_2 = \frac{2}{3}$$

$$S_A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

elde edilir. Bu demektir ki, A oyuncusu $\frac{1}{3}$ oranında blöf yapmalı, $\frac{2}{3}$ oranında blöf yapmamalıdır. Ortalama kazanç veya oyunun değeri hesaplanırsa

$$\begin{aligned} v &= a_{11}p_1 + a_{21}p_2 \\ &= 1 \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

olduğu görülür. $v = \frac{1}{3}$ 'ün sıfırdan büyük olması oyunun B için insafsız olduğu anlamına

gelir. Optimal stratejisini kullanarak A daima $\frac{1}{3}$ ortalama kazancını elde edeceğinden emin olabilir. Kaydedelim ki A en ihtiyatlı (maksimin) stratejisini (bu oyunda A₁ ve A₂'nin her

ikisi de maksimindir) kullanarak sadece 0 kazancını garanti edebilir. Hâlbuki karma bir strateji kullanarak oyunun kuralları altında B üzerinde bir avantaj sağlar.

B 'nin optimal stratejisini bulalım.

$$a_{11}q_1 + a_{12}q_2 = \frac{1}{3}$$

$$1.q_1 + 0.q_2 = \frac{1}{3}$$

'den

$$q_1 = \frac{1}{3}$$

ve $q_1 + q_2 = 1$ 'den

$$q_2 = \frac{2}{3}$$

elde edilir.

$$S_B = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

bulunur. Bu demektir ki, B oyuncusu A 'nın sözlerine $\frac{1}{3}$ oranında inanmalı ve $\frac{2}{3}$ oranında elini göstermesini istemelidir. Bu takdirde ortalama $\frac{1}{3}$ kaybeder.

Eğer B oyuncusu B_2 sade minimaks stratejisini kullansaydı, yani her defasında A 'nın elini göstermesini isteseydi, ortalama $\frac{1}{2}$ kaybederdi.

Tüm bu işlemleri, tekrardan ama bir arada görünmesini sağlamak amacıyla tablolastıralım.

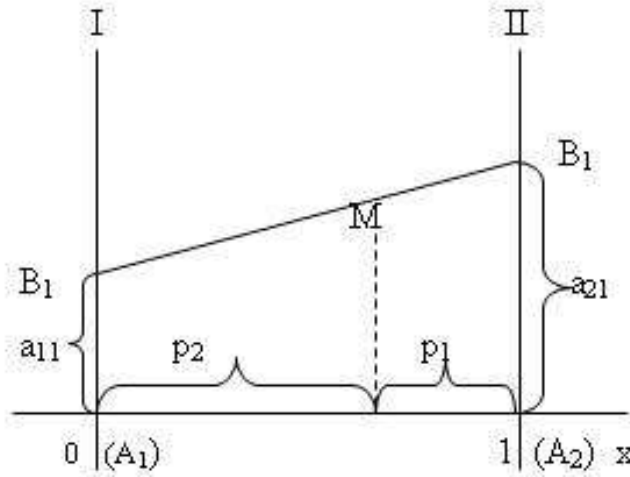
	$B_1(\text{inanır})$	$B_1(\text{inanmaz})$
A_1 (blöf yapar)	A as çeker. İhtimal $\frac{1}{2}$. Kişisel hareketi yok. B 'den 1 lira ister. B öder. A 1 lira kazanır. A 2'li çeker. İhtimal $\frac{1}{2}$. Blöf yapar. B inanır. 1 lira öder. Kazanç 1 lira. Ortak Kazanç. $a_{11} = 1/2 \cdot 1 + 1/2 \cdot 1 = 1$	A as çeker. İhtimal $\frac{1}{2}$. Kişisel hareketi yok. B 'den 1 lira ister. B inanmaz. A 'nın kazancı 2 lira. 2'li çeker. İhtimal $\frac{1}{2}$. Blöf yapar. B inanmaz. A 'nın kazancı -2 lira. Ortak kazanç. $a_{12} = 1/2 \cdot 2 + 1/2 \cdot (-2) = 0$
A_2 (blöf yapmaz)	A as çeker. İhtimal $\frac{1}{2}$. Blöf yapmaz. B 'ye 1 lira öder. A 'nın kazancı 1 lira. A 2'li çeker. İhtimal $\frac{1}{2}$. A blöf yapmaz. B 'ye 1 lira öder. Ortak kazanç $a_{21} = 1/2 \cdot 1 + 1/2 \cdot (-1) = 0$	A as çeker. İhtimal $\frac{1}{2}$. Blöf yapmaz. B inanmaz. A 'nın kazancı 2 lira. A 2'li çeker. İhtimal $\frac{1}{2}$. A blöf yapmaz. B ye 1 lira öder. A 'nın kazancı -1 lira. Ortak kazanç $a_{22} = 1/2 \cdot 2 + 1/2 \cdot (-1) = 1/2$

5. 2x2 OYUNLAR İÇİN GEOMETRİK METOD

Bir 2x2 oyunun çözümü için basit geometrik bir yorum verilebilir. Matrisi yanda görülen bir 2x2 oyunu göz önüne alalım ve xy düzleminde aşağıdaki diyagramı çizelim. Bizim stratejilerimizi x ekseninde göstericeğiz. A_1 stratejimizi $x=0$ ile ve A_2 'yi $x=1$ ile gösterelim. A_1 ve A_2 noktalarından sırasıyla I ve II dikmelerini çizelim. A_1 stratejisi için kazançları I ekseninde ve A_2 için kazançları II ekseninde işaretleyeceğiz.

A/B	B_1	B_2
a_1	a_{11}	a_{12}
a_2	a_{21}	a_{22}

İlk olarak hasmımızın B_1 stratejisini kullandığını kabul edelim. Bu, I üzerinde ordinatı a_{11} olan bir nokta ve II üzerinde ordinatı a_{21} olan bir nokta tarif eder.



Şekil 5.1. 2x2 oyun için geometrik çizim.

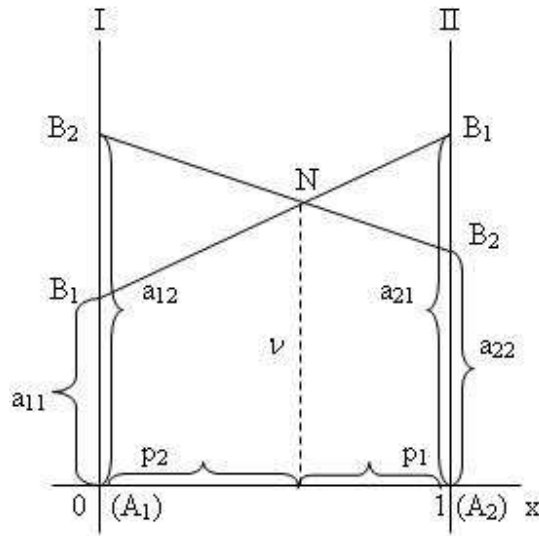
Bu noktalar da B_1B_1 doğrusunu tarif eder. Eğer hasmımızın B_1 stratejisine karşı

$$S_A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix}$$

karma stratejisini kullanırsak,

$$a_{11}p_1 + a_{21}p_2$$

Ortalama kazancı B_1 B_1 doğrusu üzerinde apsisi p_2 olan M noktasının ordinatıyla verilir. B_1 stratejisi için kazançları gösteren B_1 B_1 doğrusuna B_1 stratejisi diyeceğiz. Tamamıyla aynı şekilde B_2 stratejisini çizeriz.



Şekil 5.2. 2x2 oyun için geometrik çizim.

Bir S_A^* optimal stratejisi, yani herhangi bir B_j stratejisi için minimum kazancın maksimum olacağı bir strateji bulmak istiyoruz. Bunu yapmak amacıyla B_1 ve B_2 stratejileri için alt sınırı çizeriz. Şekil 5.2’de bu sınır B_1NB_2 kırık çizgisidir. Bu alt sınır bütün karma stratejilerimiz için minimum kazançlar verir. Bu minimumun, bir maksimum olduğu N noktası oyunun çözümüdür.

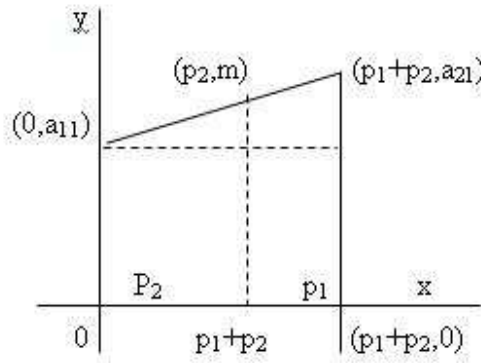
Bu çizimlerin sebepleri aşağıdaki genel şekilden açıkça görülmektedir. Burada;

$$\frac{m - a_{11}}{p_2} = \frac{a_{21} - a_{11}}{p_1 + p_2}$$

veya

$$m = \frac{a_{11}p_1 + a_{21}p_2}{p_1 + p_2}$$

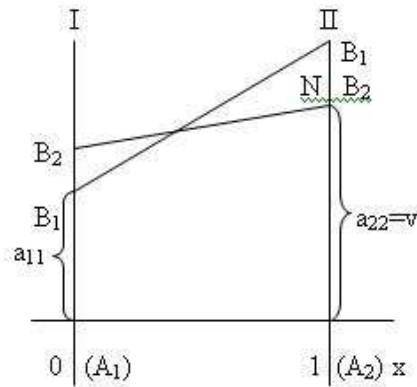
olur. $p_1 + p_2 = 1$ olduğu zaman $m = a_{11}p_1 + a_{21}p_2 = v$



Şekil 5.3. 2x2 oyun için geometrik çizim.

hem çözümünü, hem de değerini tarif eder. N noktasının ordinatı oyunun v değeridir. p_2 apsisi S_A^* optimal karma stratejimizde A_2 stratejisinin kesridir.

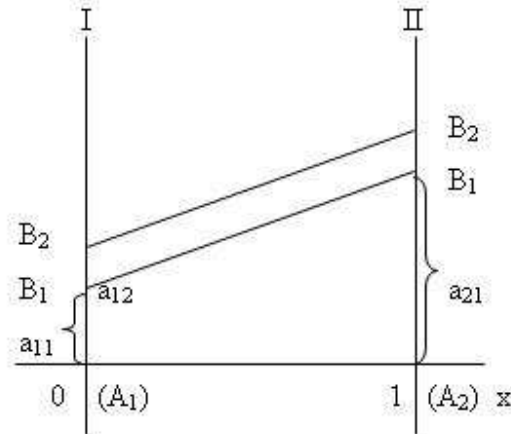
Aşağıda görülen hal için çözüm stratejilerin kesişme noktasıyla tarif edilmiştir. Bununla beraber, çözüm daima bu noktada bulunmaz.



Şekil 5.4. 2x2 oyun için geometrik çizim.

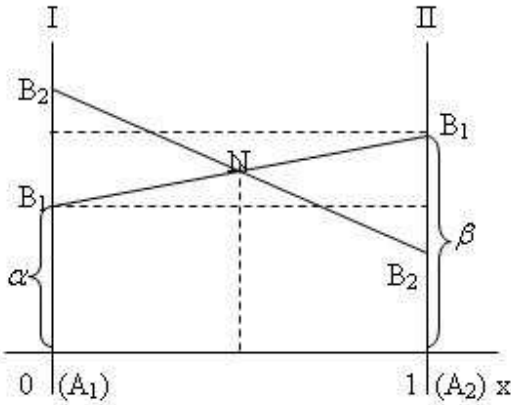
Şekil 5.4’de görülen halde stratejiler kesişmekle beraber oyunun çözümü her oyuncu için bir sade stratejidir (A_2 ve B_2) ve oyunun değeri $v = a_{22}$ ’dir. Bu halde oyunun bir

eyer noktası vardır ve A_2 stratejisi A_1 stratejisine hâkimdir. Hasmımız hangi stratejiyi kullanırsa kullansın, A_1 stratejisinin kullanılması A_2 stratejisinin kullanılmasından daha küçük bir kazanç sağlar.



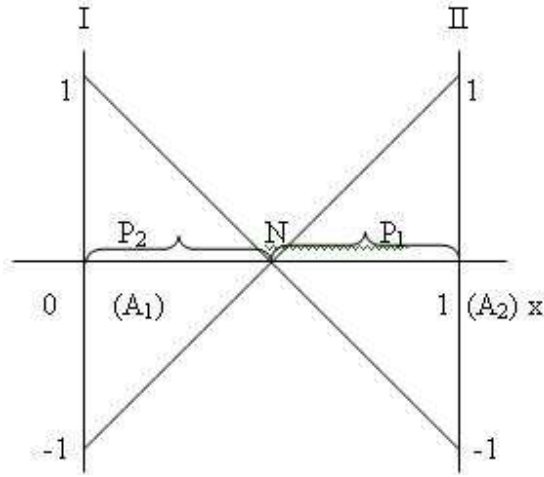
Şekil 5.5. 2x2 oyun için geometrik çizim.

Hasmımızın hâkim bir stratejisi olması hali için diyagramın yukarıda görülen şekli haizdir. Bu halde alt sınır B_2 ye hâkim olan B_1 stratejisidir.



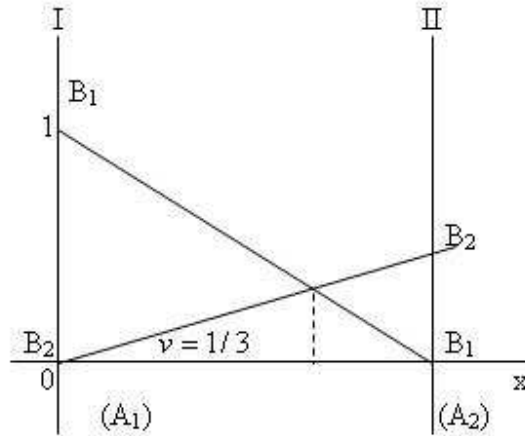
Şekil 5.6. 2x2 oyun için geometrik çizim.

Geometrik bir diyagramdan bir oyunun α alt değeri ve β üst değerini de bulabiliriz. 2x2 oyunları için diyagramları vererek bu geometrik metodu daha da açıklıyoruz.



Şekil 5.7. 2x2 oyun için geometrik çizim.

Yukarıda yazı tura oyununun diyagramı verilmiştir.



Şekil 5.8. 2x2 oyun için geometrik çizim.

Blöflü 2x2 oyununun diyagramı da yukarıdaki gibidir.

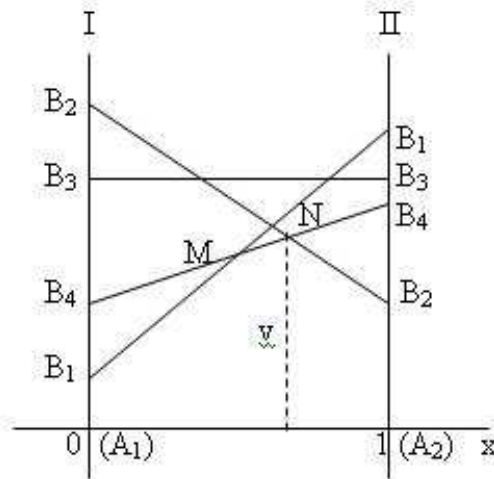
5.1. 2xn Oyunları İçin Geometrik Metot

Herhangi bir 2x2 oyununun basit bir diyagram kullanarak çözülebildiğini gördük. Aynı metodu kullanarak oyunculardan birinin iki stratejisi, ötekinin keyfi bir n sayısı kadar

stratejisinin olduğu bir $2 \times n$ oyununu da çözebiliriz. Bizim A_1 ve A_2 gibi iki stratejimiz ve hasmımızın $B_1, B_2, \dots, B_n$ gibi n tane stratejisi olduğunu farz edelim. $\|a_{ij}\|$ matrisinin malûm olduğunu kabul ediyoruz. Bu matrisin iki satırı ve n tane sütunu vardır. 2×2 halinde olduğu gibi hasmımızın n stratejisi n tane doğru tarif eder (Şekil 5.9, burada $n=4$). Alt sınırı ($B_1 MNB_2$ kırık çizgisi) çizelim ve bunun üzerinde ordinatı maksimum olan N noktasını bulalım. Bu nokta oyunun çözümünü, yani

$$S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix}$$

stratejisini verir. Gerçekten, N 'nin ordinatı oyunun v değeridir ve apsisi bizim S_A^* optimal stratejimizde A_2 stratejisinin p_2 kesridir.



Şekil 5.9. $2 \times n$ oyun için geometrik çizim.

Bu halde hasmımızın optimal stratejisi, N noktasında kesişen B_2 ve B_4 faydalı stratejilerinin bir karmasıdır. Eğer biz optimal stratejimize bağlanırsak, ortalama kazanç B 'nin iki faydalı stratejisinin herhangi bir kombinasyonu için değişmez. Bununla beraber, eğer B oyuncusu B_1 veya B_2 stratejisini kullanırsa ortalama kazanç değişir. B_3 stratejisi B_4 stratejisine mahkumdur, B_1 stratejisi ise biz S_A^* optimal stratejimizi kullanırsak mahkûm olur.

Oyunlar teorisinde ispat edilmiştir ki, taraflardan her birinin faydalı stratejilerinin sayısı m ve n sayılarından daha küçük olanına eşit veya bundan küçük olan her sonlu $m \times n$ oyununun bir çözümü vardır. Buradan şu sonuca varılır: Taraflardan her birinin en fazla iki faydalı stratejisi olduğundan bir $2 \times n$ veya $m \times 2$ oyununun daima bir çözümü vardır.

Diyagram tekniğini kullanarak herhangi bir $2 \times n$ oyununun çözümünü bulabiliriz. Diyagramdan daima N noktasında kesişen B_j ve B_k gibi bir faydalı strateji çifti bulabiliriz. Eğer N noktasında ikiden fazla strateji kesişiyorsa, bunlardan herhangi ikisini alabiliriz. Biliyoruz ki, eğer biz optimal stratejimizi kullanırsak, v ortalama kazancı B_j ve B_k 'nin herhangi bir kombinasyonu için aynı olacaktır ve aşağıdaki denklemler yazılabilir:

$$\begin{aligned} a_{1j} p_1 + a_{2j} p_2 &= v, \\ a_{1k} p_1 + a_{2k} p_2 &= v. \end{aligned}$$

Bu denklemlerden ve $p_1 + p_2 = 1$ şartından p_1 , p_2 ve oyunun değerini bulabiliriz. Oyunun değeri bilinince, B oyuncusunun

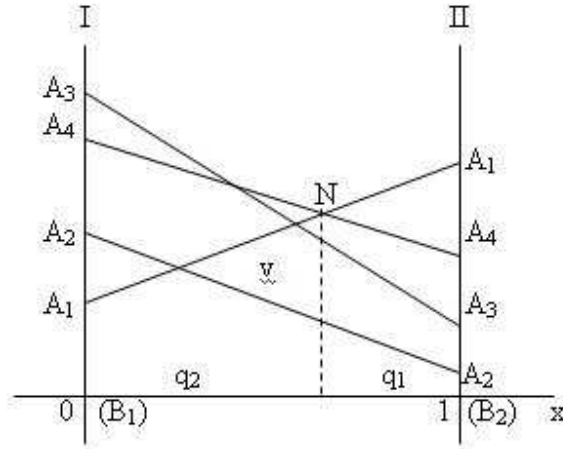
$$S_B^* = \begin{pmatrix} B_j & B_k \\ q_j & q_k \end{pmatrix}$$

optimal stratejisini derhal hesaplayabiliriz. Bunun için, örneğin

$$\begin{aligned} a_{1j} q_j + a_{1k} q_k &= v, \\ q_j + q_k &= 1 \end{aligned}$$

denklemlerini kullanabiliriz.

Bizim m tane stratejimiz ve hasmımızın sadece iki tane stratejisi olduğu bir $m \times 2$ oyunu için problem tamamıyla benzer bir şekilde çözülebilir; sadece şunu kaydetmeliyiz ki, matriste her kazancın işaretini değiştirmek A' 'yı kazanan yerine kaybeden durumuna sokar. Böyle bir oyun kazançların işaretini değiştirmeden de çözülebilir. Bu kazançların alt sınırı yerine üst sınırını çizmek suretiyle problemi doğrudan doğruya çözerek yapılır. Oyunun v değerini tarif eden N noktası şimdi üst sınır üzerinde en aşağıdaki noktadır.



Şekil 5.10. $m \times 2$ oyun için geometrik çizim.

Şimdi basitleştirilmiş çatışma durumları modelleri olan bazı 2×2 ve $2 \times m$ oyun örneklerini inceleyip çözeceğiz.

Örnek 5.1. Hasmı B' 'ye karşı bir görevle A iki bombardıman uçağı uçuruyor. Bunlara I ve II diyelim. Uçak I daima önde ve uçak II arkada uçuyor. Uçaklardan biri (hangisi olduğu önceden bilinmiyor) bir bomba taşıyor ve öteki muhafız görevi yapıyor. B' 'nin arazisi üzerinde bomba uçakları B' 'nin av uçaklarından birinin taarruzuna uğruyor. Bomba uçakları o şekilde uçuyorlar ki, av uçağı II'ye hücum ederse sadece II'nin silahlarının ateşi altına geliyor, halbuki I bomba uçağına hücum ederse her iki bomba uçağının silahlarının ateşi altına giriyor. Birinci halde av uçağının düşürülmesi ihtimali 0.3, ikinci halde ise 0.7'dir.

Eğer av uçağı düşürülmezse, hücum ettiği bomba uçağını düşürmesi ihtimali 0.6'dır (tabiatıyla, bomba uçağını düşürmemesi ihtimali $1 - 0.6 = 0.4$ 'tür). Bomba uçaklarının amacı bombayı atmaktır; av uçağının amacı ise buna mani olmak, yani bomba taşıyan uçağı düşürmektir. Her iki taraf için optimal stratejileri bulalım.

(a) A tarafı için: Hangi uçak bombayı taşımalıdır?

(b) B tarafı için: Hangi bomba uçağına hücum edilmelidir?

Çözüm: Bir 2x2 oyununun en basit hali ile karşı karşıya bulunuyoruz. A'nın kazancı bomba taşıyıcının düşürülmemesi ihtimalidir.

A'nın stratejileri şunlardır:

A_1 : Bombayı I uçağının taşıması,

A_2 : Bombayı II uçağının taşıması.

Hasmın stratejileri ise şunlardır:

B_1 : I bomba uçağına hücum etmek,

B_2 : II bomba uçağına hücum etmek.

Şimdi kazanç matrisini teşkil edelim, yani her strateji çifti için ortalama kazancı bulalım.

1. A_1B_1 (I bomba taşıyıcıdır; I hücumu uğramaktadır).

Bomba aşağıdaki iki halden birinde hedefe atılabilir: 1. I uçağına hücum eden av uçağı düşürülürse, 2. Av uçağı düşürülemez ve fakat hedefini vuramazsa, şu halde

$$a_{11} = 0.7 + (0.3)(0.4) = 0.82$$

elde edilir.

2. $A_2 B_1$ (II bomba taşıyıcıdır; I hücumu uğramaktadır).

$$a_{21} = 1$$

olur.

3. A_1B_2 (I bomba taşıyıcıdır; II hücumu uğramaktadır).

$$a_{12} = 1$$

olur.

4. A_2B_2 (II bomba taşıyıcıdır; II hücumu uğramaktadır).

$$a_{22} = 0.3 + (0.7)(0.4) = 0.58$$

olur.

Matris aşağıda görülmektedir. Oyunun alt değeri 0.82 ve üst değeri 1'dir. Matrisin bir eyer noktası yoktur ve bu yüzden çözüm bir karma strateji çifti olmalıdır.

A/B	B ₁	B ₂
A ₁	0,82	1
A ₂	1	0,58

Aşağıdaki denklemler yazılabilir.

$$(0,82)p_1 + (1)p_2 = v,$$

$$(1)p_1 + (0,58)p_2 = v,$$

fazla olarak

$$p_1 + p_2 = 1$$

'dir. Bu denklemlerden

$$p_1 = 0,7, p_2 = 0,3$$

bulunur. A'nın optimal stratejisi

$$S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0,7 & 0,3 \end{pmatrix}$$

'dır. Bu demektir ki, II bomba uçağından ziyade I bomba uçağı bombayı taşımalıdır. Oyunun değeri

$$v = 0,874$$

olarak bulunur. Şu halde, problemde görüldüğü üzere durum B için "insafsız" dır ve bomba taşıyıcının düşürülmemesi ihtimali

0,874'dür. v bilince, B'nin S_B^* optimal stratejisinde B₁ve B₂'nin kullanılma oranları olan

q_1 ve q_2 'yi bulabiliriz. Gerçekten,

$$\begin{aligned}(0,82)q_1 + (1)q_2 &= 0.874, \\ q_1 + q_2 &= 1\end{aligned}$$

elde edilir ve buradan

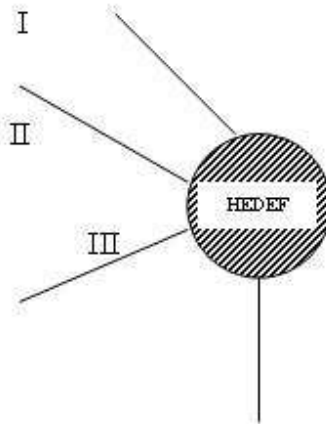
$$q_1 = 0.7, \quad q_2 = 0.3$$

bulunur, yani B 'nin optimal stratejisi

$$S_B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 0.7 & 0.3 \end{pmatrix}$$

olur.

Örnek 5.2. A tarafı B tarafının savunduğu bir hedefi tahrip etmek istemektedir. A 'nın iki uçağı, B 'nin de üç tane uçaksavar topu vardır. Uçaklardan her biri tek başına hedefi tahrip etmek için yeteri kadar patlayıcı madde taşımaktadır. Bir uçağın hedefe ulaşabileceği sadece mümkün üç yaklaşma alanı vardır. Bunları I, II ve III ile gösterelim.



Şekil 5.11. Hedef-yollar.

B uçaksavar toplarından herhangi birini yaklaşma alanlarından herhangi birinde mevzilendirebilir, fakat bir top sadece mevzilendirildiği yaklaşma alanını ateşiyle örtbilmektedir. Her top sadece bir uçağa hücum edebilir, fakat bir uçağa hücum ederse, onu düşürmesi muhakkaktır. A tarafı topların nasıl mevzilendirildiğini bilmiyor, B tarafı da

uçakların hangi yaklaşma alanlarını kullanacağını bilmiyor. A 'nın amacı hedefi tahrip etmektir, B 'nin amacı ise buna mani olmaktır.

özüm: Bu problem bir 2×3 oyunu ile temsil edilebilir. Kazanç hedefin tahribi ihtimalidir. A 'nın mümkün stratejileri şunlardır:

A_1 : her uçağı ayrı bir yaklaşma alanında göndermek,

A_2 : her iki uçağı aynı bir yaklaşma alanından göndermek.

B 'nin stratejileri ise şunlardır:

B_1 : toplarından her birini ayrı bir yaklaşma alanını örtmek üzere yerleştirmek $(1+1+1)$,

B_2 : iki topu bir yaklaşma alanını ve üçüncüsünü ayrı bir yaklaşma alanını örtmek üzere yerleştirmek $(2+1+0)$,

B_3 : toplardan üçünü de tek bir yaklaşma alanını örtecek şekilde mevzilendirmek $(3+0+0)$.

Şimdi oyunun matrisini teşkil edelim.

1. A_1B_1 (uçaklar farklı yaklaşma alanlarında uçuyorlar, her top ayrı bir yaklaşma alanını örtüyor). Aşkar olarak, uçaklardan hiçbirisi hedefe ulaşamaz. Kazanç

$$a_{11}=0$$

olacaktır.

2. A_2B_1 (uçaklar bir yaklaşma alanında birlikte uçuyorlar, her top farklı bir yaklaşma alanını örtüyor) bu takdirde, uçaklardan biri hasara uğramadan hedefe ulaşacaktır ve kazanç

$$a_{21}=1$$

olacaktır.

3. A_1B_2 (uçaklar farklı yaklaşma alanlarında uçuyorlar, bir yaklaşma alanında iki top, ötekinde bir top vardır, üçüncüsü ise savunmasızdır). Uçaklardan birinin hedefe ulaşmasını ihtimali bunlardan birinin savunmasız yaklaşma alanını seçmesi ihtimaline eşittir. Şu halde;

$$a_{12} = \frac{2}{3}$$

olur.

4. $A_2 B_2$ (uçaklar bir yaklaşma alanında birlikte uçuyorlar, iki top bir yaklaşım alanını, üçüncü top ötekini örtmektedir, üçüncü yaklaşma alanı savunmasız bırakılmıştır; bu demektir ki, gerçekte sadece bir yaklaşma alanı örtülüp diğer ikisi savunmasız bırakılmıştır). Uçaklardan hiç olmazsa birinin hedefe ulaşabilmesi ihtimali seçilen yaklaşma alanının iki topla örtüleni olmaması ihtimaline eşittir. Şu halde;

$$a_{22} = \frac{2}{3}$$

olur.

5. $A_1 B_3$ (uçaklar farklı yaklaşma alanlarında uçuyorlar, bütün toplar tek bir yaklaşma alanını örtüyor). Uçaklardan birinin hedefe ulaşması muhakkaktır. Şu halde

$$a_{12} = 1$$

olur.

6. $A_2 B_3$ (uçaklar bir yaklaşma alanında birlikte uçuyorlar, bütün toplar tek bir yaklaşma alanını örtüyorlar). Hedefin tahrip edilebilmesi için uçakların savunmasız yaklaşma bölgelerinden birini seçmesi gerekir. Şu halde;

$$a_{23} = \frac{2}{3}$$

olur.

2×3 matrisi aşağıda görülmektedir. Matristen görüldüğü ve önceden de tahmin edilebileceği üzere B_3 stratejisi B_2 stratejisine mahkûmdur. Bu sebepten, B_3 stratejisini atabilir ve oyunu bir 2×2 oyununa indirgeyebiliriz.

A/B	B ₁	B ₂	B ₃
A ₁	0	$\frac{2}{3}$	1
A ₂	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$

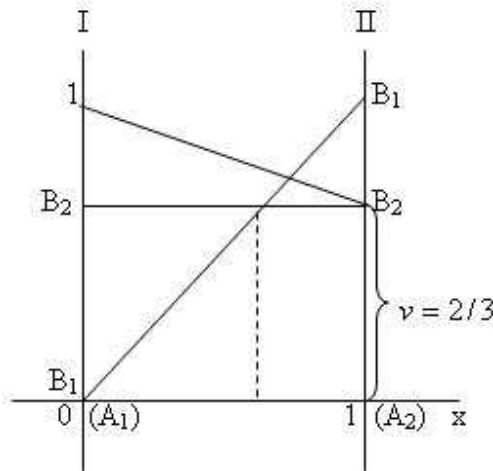
2x2 matrisi aşağıda görülmektedir. Bu matrisin bir eyer noktası vardır, oyunun alt ve üst değerleri aynı olup

$$v = \frac{2}{3}$$

bulunur..

A_1 stratejisinin A_2 'ye mahkûm olduğuna dikkat ediniz. Oyunun çözümü tarafların A_2 ve B_2 sade stratejilerini kullanmalarından ibarettir. Bu demektir ki, A özel yaklaşma alanını rastgele seçerek her iki uçağını da daima birlikte uçurmalıdır ve B rastgele seçtiği iki yaklaşma alanından birini iki topla, ötekini de üçüncü topla örtmelidir. Bu oyunda sade stratejilerin bile şansa bağlı seçimler ihtiva ettiklerini kaydedelim.

Bu çözüm tek değildir. Aşağıda kolayca görülebileceği üzere, A için optimal olan ve $p_1=0$ 'dan $p_1=\frac{1}{3}$ 'e kadar devam eden sürekli bir karma stratejiler bölgesi vardır.



Şekil 5.12. 2x2 oyun.

Örneğin, eğer A_1 ve A_2 stratejilerini $\frac{1}{3}$ oranlarında kullanırsak kazancın yine $\frac{2}{3}$ olacağını doğrudan doğruya görmek kolaydır. Bununla beraber, B_2 optimal sade stratejisi tektir. B oyuncusu B_2 ye bağlanmalıdır. Ortalama kazanç oyunun değerine yani,

$$v = \frac{2}{3}$$

değerine eşittir.

Örnek 5.3. Şartlar son örnektekinin aynıdır, şu farkla ki, şimdi dört yaklaşma alanı vardır ve B oyuncusunun dört uçak savar topu vardır.

Çözüm: Önceki gibi A 'nın mümkün aynı iki stratejisi vardır:

A_1 : Uçakları farklı yaklaşma alanlarından göndermek,

A_2 : Uçakları aynı bir yaklaşma alanından birlikte göndermek. Hasmin beş mümkün stratejisi vardır:

B_1 : Yaklaşma alanlarından her birini bir topla örtmek

(1+1+1+1),

B_2 : Yaklaşma alanlarından her ikisini iki topla örtmek

(2+2+0+0),

B_3 : Yaklaşma alanlarından birini iki topla, birini de bir topla örtmek (2+1+1+0),

B_4 : Yaklaşma alanlarından birini üç topla, birini de bir topla örtmek (3+1+0+0),

B_5 : Dört topu da yaklaşma alanlarından birini örtmek için kullanmak (4+0+0+0).

B_4 ve B_5 stratejileri aşikâr olarak mahkûmdurlar, zira yaklaşma alanlarından birinde ikiden fazla top bulundurmanın hiçbir faydası yoktur.

Son örnekteki benzer bir şekilde kazanç matrisini teşkil edebiliriz. Bu matrisin eyer noktası yoktur, alt değeri $\frac{1}{3}$ ve üst değeri $\frac{3}{4}$ 'dür. Çözüm bir karma stratejidir.

p_1 ve p_2 değerlerini

$$(0)p_1 + (1)(1 - p_1)v,$$

$$\left(\frac{5}{6}\right)p_1 + \left(\frac{1}{2}\right)(1 - p_1) = v$$

denklemlerinden elde edebiliriz.

A/B	B ₁	B ₂	B ₃
A ₁	0	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{2}$
A ₂	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$

sonuçlar

$$S_A^* = \frac{3}{8}, p_2 = 1 - p_1 = \frac{5}{8}, v = \frac{5}{8}$$

bulunur. A'nın optimal stratejisi

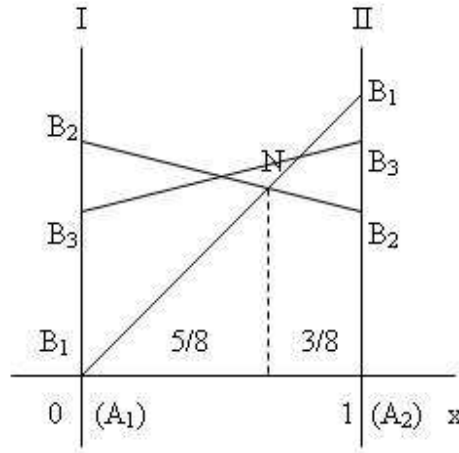
$$S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ \frac{3}{8} & \frac{5}{8} \end{pmatrix}$$

bulunur. Bu stratejiyi kullanarak, A oyuncusu

$$v = \frac{5}{8}$$

ortalama kazancını garanti eder.

Bir diyagram kullanarak (Şekil 5.13), hasmın B_1 ve B_2 faydalı stratejilerini ayrabiliriz.



Şekil 5.13. 2x3 oyun.

$$v = \frac{5}{8}$$

değerini kullanarak, B 'nin "faydalı" stratejilerinin q_1 ve q_2 kesirlerini hesaplayabiliriz. Gerçekten,

$$(0)q_1 + \left(\frac{5}{6}\right)(1 - q_1) = \frac{5}{8}$$

elde edilir. Buradan;

$$q_1 = \frac{1}{4}, q_2 = 1 - q_1 = \frac{3}{4}$$

bulunur. Şu halde, B 'nin optimal stratejisi

$$S_B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

'dir.

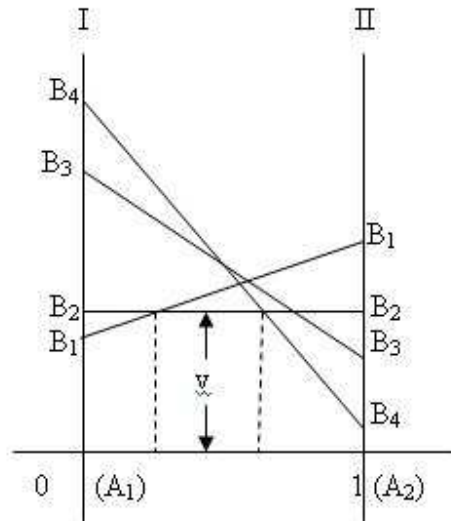
Örnek 5.4. A 'nın A_1 ve A_2 gibi iki stratejisi ve B 'nin B_1, B_2, B_3, B_4 gibi dört stratejisi olsun. Oyunun matrisi;

A/B	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄
A ₁	3	4	10	12
A ₂	8	4	3	2

olduğuna göre, oyunun çözümünü bulunuz.

Çözüm: Oyunun eyer noktası yoktur, alt değeri 3, üst değeri de 4'dür. Keza, atılacak eş veya mahkûm stratejiler de yoktur. Oyunun diyagramı göstermektedir ki, *B* oyuncusunun “faydalı” stratejileri *B*₁ ve *B*₂ veya *B*₂ ve *B*₄ karma stratejileri veya *B*₂ sade stratejisi olabilir.

A oyuncusunun sonsuz sayıda optimal karma stratejisi vardır ve bu stratejilerde p_2 kesri $\frac{1}{5}$ ile $\frac{4}{5}$ arasında herhangi bir sayı olabilir.

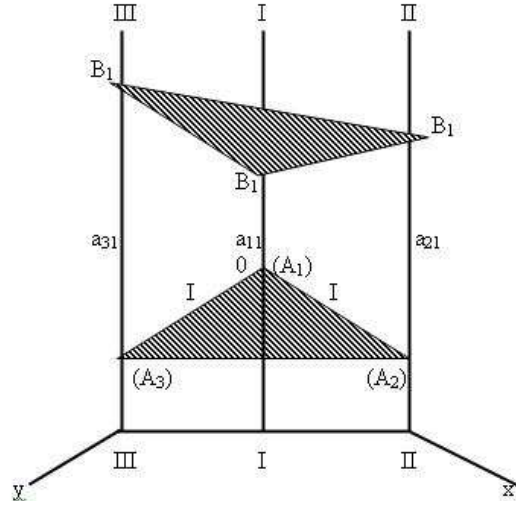


Şekil 5.14. 2x4 oyun.

oyunun değeri $v=4$ dür. *B* oyuncusunun bir optimal sade stratejisi vardır: *B*₂'dir.

5.2. Bir 3 x n Oyunun Geometrik Çözümü

Bir 3x*n* oyunu için *A*₁, *A*₂ ve *A*₃ stratejilerimizi *xy* düzlemindeki üç noktaya tekabül ettirelim. Birincisi koordinatların



Şekil 5.15. $3 \times n$ oyunun diyagramı.

0 başlangıç noktasına, ikincisi $x=1, y=0$ noktasına, üçüncüsü ise $x=0, y=1$ noktasına tekabül etsin.

A_1, A_2 ve A_3 noktalarından xy düzlemine dikey olan I-I, II-II ve III-III eksenlerini geçirelim. B için bir B_j stratejisi verildiği takdirde bu üç eksen üzerinde xy düzleminden uzaklıkları A 'nın mütekebil stratejileri için kazançlara eşit olan noktaları bulalım. Hasmımızın her B_j stratejisi, xy düzleminden itibaren I-I eksinini bir a_{1j} uzaklığında, II-II eksenini bir a_{2j} uzaklığında ve III-III eksenini bir a_{3j} uzaklığında kesen bir düzlem tarif eder. Yukarıda B_1 için çizilen düzlemin $A_1A_2A_3$ üçgeni üstünde bulunan kısmını göstermektedir.

6. ÜÇ KİŞİLİK SIFIR TOPLAMLI OLMAYAN OYUNLAR ve GEOMETRİK GÖSTERİMİ

Herhangi bir 2 kişilik oyunun basit koordinat sistemi kullanılarak çözülebildiğini gördük. Aynı genel metodu kullanarak sıfır toplamlı olmayan oyunlarda oyuncu sayısının 3'e çıktığı bir oyunu kartezyen koordinat sisteminde gösterip çözebiliriz.

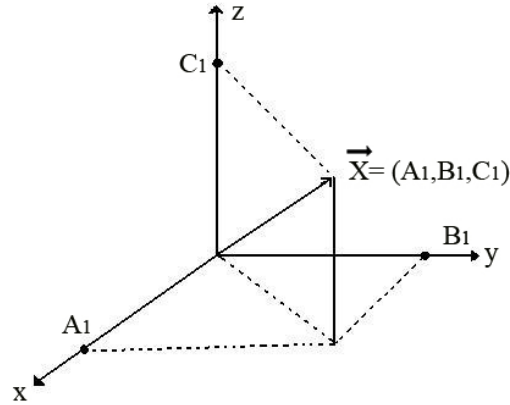
Sıfır toplamlı olmayan bir oyunda A, B, C gibi üç tarafın olduğunu farz edelim.

A 'nın $A_1, A_2, \dots, A_m$ gibi m

B 'nin $B_1, B_2, \dots, B_n$ gibi n

C 'nin $C_1, C_2, \dots, C_k$ gibi k

tane stratejisi olan oyunu göz önüne alalım ve her strateji üçlüsü için aşağıdaki çizim yapılır.



Şekil 6.1. 3-kişilik oyunlar için koordinat düzlemi.

İlk olarak A 'nın A_1 , B 'nin B_1 bunlara karşılık C 'nin de C_1 stratejisini kullandığını farz edelim.

Bu;

$$A = (A_1, 0, 0) \quad B = (0, B_1, 0) \quad C = (0, 0, C_1)$$

alındığında $\vec{X} = (A_1, B_1, C_1)$ şeklinde yazılabilir.

Sıfır toplamalı oyunlarda kazanç matrisleri her zaman A tarafından yazıldığı halde sıfır toplamalı olmayan oyunlarda her taraf için ayrı ayrı kazançlar yazılır. Oyunun çözümü 3 taraf içinde en az zararın olduğu stratejidir.

Şimdi 3- kişilik çatışma durumları modellenen bir örnek inceleyip çözelim.

Örnek 6.1. I. Dünya Savaşı başlarken İngiltere itilaf, İtalya ittifak gurubundayken Yunanistan tarafsız kalmıştır. İngiltere her iki devleti de kendi yanına çekmek istemekteydi ve her iki tarafa da savaşa kendileri yanında devam etme şartıyla İzmir ve civarını vaat etmiştir.

Çözüm:

A: İngiltere B: Yunanistan C:İtalya
olsun.

A'nın A_1 : İzmir ve civarını İtalya'ya vermek

A_2 : İzmir ve civarını Yunanistan'a vermek

B'nin B_1 : Savaşa itilaf tarafından girmek

B_2 : Savaşa girmemek

C'nin C_1 : İttifak tarafında kalmak

C_2 : İtilaf tarafına geçmek

gibi ikişer stratejileri olsun.

Oyun 3 kişilik $2 \times 2 \times 2$ oyundur. Yani 8 tane olası durum vardır.

İngiltere İzmir'i, İtalya'ya verirse daha da güçlenen bir İtalya yaratacak ve ilerisi için tehlike oluşturacaktı bu yüzden daha güçsüz ve cılız olan Yunanistan'a vermek daha karlı bir işti. Bu yüzden;

A_1 stratejisi +1 kazanç getirirken

A_2 stratejisi +2 kazanç getirir diye farz edelim.

B ; yani Yunanistan savaşa İzmir karşılığında girerse senelerce hasretini çektiği Ege'ye kavuşacak, savaşa girmez tarafsız kalır ise ne kaybı ne kazancı olacak

B_1 : stratejisi +2 getirirken

B_2 : stratejisi 0 getirir.

C ; İtalya için ittifak devletleriyle kalmak, yani Almanya gibi güçlü bir devletin yanından İngilizler gibi güçlü bir devletin yanına geçmek kâr ya da zarar getirmezken, İzmir ve Ege adalarını alarak geçmek büyük kârıdır.

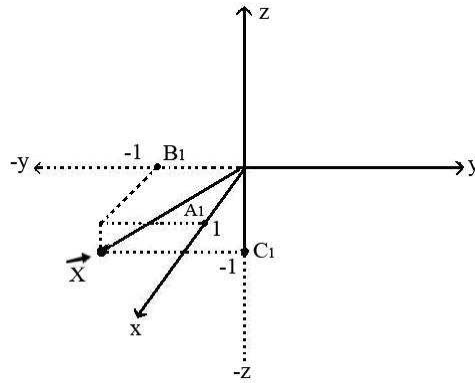
C_1 stratejisi 0 getirirken

C_2 stratejisi +1 getirir.

Şimdi her durum için tarafların stratejilerine karşılık gelen değerlerimizi yazıp koordinat düzleminde diyagramlarını çizelim.

$$A_1B_1C_1: \left(\begin{array}{l} \text{İngiltere İzmir'i İtalya'ya verir, İtalyanlar savaşa ittifak} \\ \text{tarafında devam eder, Yunanistan itilaf tarafında savaşa girer.} \end{array} \right)$$

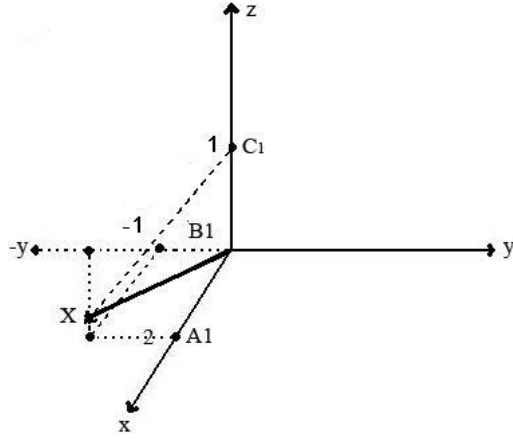
A: 1
B: -1
C: -1



Şekil 6.2. $A_1B_1C_1$ stratejisi.

$A_1B_1C_2$: $\left(\begin{array}{l} \text{İzmir, İtalya'ya verilir, Yunanistan itilafa katılır İtalya itilaf} \\ \text{tarafına geçer.} \end{array} \right)$

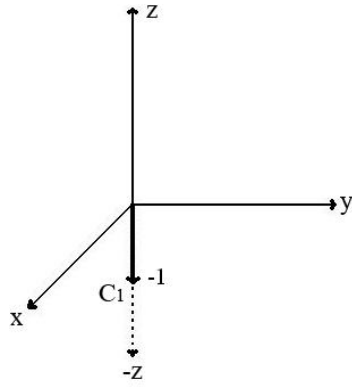
A: +2
B: -1
C: +1



Şekil 6.3. $A_1B_1C_2$ stratejisi.

$A_1B_2C_1$: $\left(\begin{array}{l} \text{İzmir, İtalya'ya verilir, Yunanistan savaşa girmez İtalya ittifak} \\ \text{tarafında kalır.} \end{array} \right)$

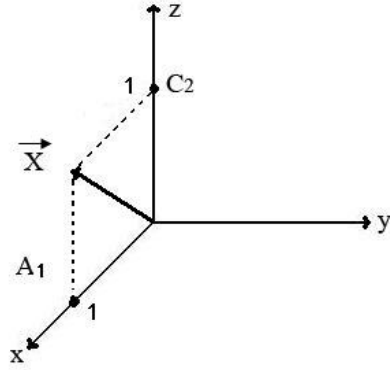
A: 0
B: 0
C: -1



Şekil 6.4. $A_1B_2C_1$ stratejisi.

$$A_1B_2C_2: \left(\begin{array}{l} \text{İzmir, İtalya'ya verilir, Yunanistan savaşa girmez. İtalya itilafa} \\ \text{geçer.} \end{array} \right)$$

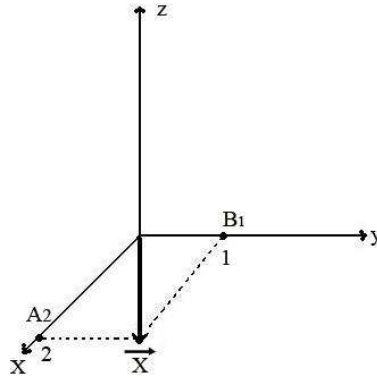
A: +1
B: 0
C: +1



Şekil 6.5. $A_2B_1C_1$ stratejisi.

$$A_2B_1C_1: - \left(\begin{array}{l} \text{İzmir, Yunanistan'a verilir, Yunanistan itilafa katılır, İtalya} \\ \text{ittifakta kalır.} \end{array} \right)$$

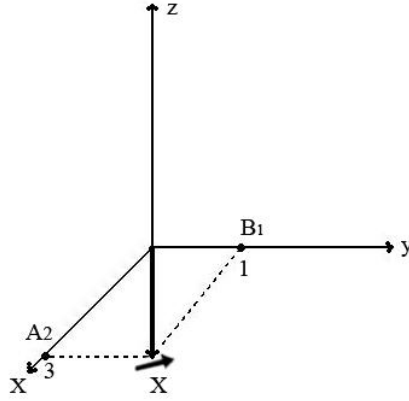
A: +2
B: +1
C: 0



Şekil 6.6. $A_2B_1C_1$ stratejisi.

$A_2B_1C_2$: $\left(\begin{array}{l} \text{İzmir, Yunanistan'a verilir, Yunanistan itilafa katılır, İtalya} \\ \text{itilaf tarafına geçer.} \end{array} \right)$

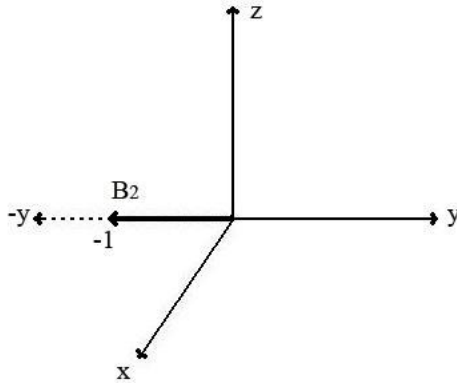
A: +3
B: 1
C: 0



Şekil 6.7. $A_2B_1C_1$ stratejisi.

$A_2B_2C_1$: $\left(\begin{array}{l} \text{İzmir, Yunanistan'a verilir, Yunanistan savaşa girmez, İtalya} \\ \text{ittifakta kalır.} \end{array} \right)$

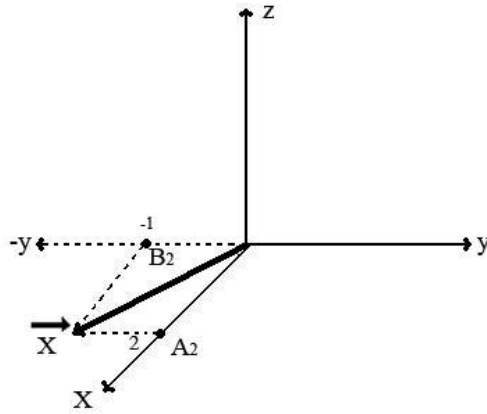
A: 0
B: -1
C: 0



Şekil 6.8. $A_2B_2C_1$ stratejisi.

$A_2B_2C_2$: $\left(\begin{array}{l} \text{İzmir, Yunanistan'a verilir, Yunanistan savaşa girmez, İtalya} \\ \text{ittifakta kalır.} \end{array} \right)$

A: +2
B: -1
C: 0



Şekil 6.9. $A_2B_2C_2$ stratejisi.

Oyununun çözümü için her taraf en az zararla bu işten çıkabilecek stratejiler seçmelidir. I. Dünya Savaşı'nda $A_2B_1C_1$ stratejisi uygulanmış ve nitekim bu işten bu kârlı çıkan devlet İngiltere olmuştur.

3 kişilik bu oyunda Nash dengesini bozmadan her üç taraf içinde en uygun stratejilerin olduğu durum seçilmiştir.

Sıfır toplamlı oyunlar için 3 kişilik oyundan bahsetmemiz mümkün değildir.

Sıfır toplamlı oyunlarda kazanan tarafın kaybı, diğer tarafın kazancına eşittir. 3 kişilik oyunlarda artık sadece biz ve hasmımız yokuz, oyuna 3. bir şahıs daha girmiş ve oyun ben – sen – o'dan olmuştur. Kârı eşit olarak paylaştırsak bile benim zararım diğerlerinin kazancından fazla olacaktır.

A tarafı x kâr

B tarafı x kâr

C tarafı x kâr etsin

B 'nin kaybı $2x$ iken, hasımlarımızın kârları x 'ler liradır. $2x \neq x$ olduğundan oyun sıfır toplamlı olamaz.

Şimdi de denge noktası olan başka bir 3 kişilik oyun inceleyelim.

Örnek 6.2. Sebze halinde 2 kabzımal aynı ürünlerden satmaktadır ve bir tane de alıcımız olsun. Alıcımız ya malları ayrı ayrı kabzımallardan alacak ya da ikisinden ortak alacaktır.

Çözüm: A alıcı B ve C 'de kabzımallarımız olsun.

A 'nın A_1 : malı B 'den almak,

A_2 : malı C den almak,

A_3 : malı 2 kabzımalıdan eşit şekilde olmak gibi 3;

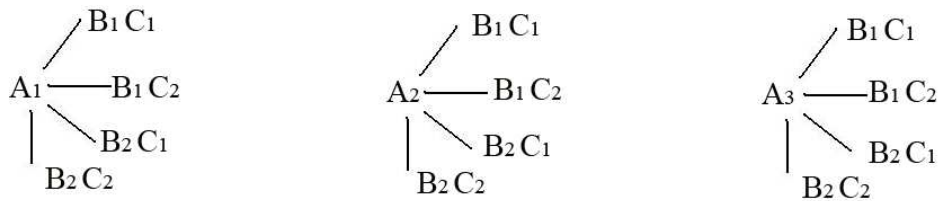
B 'nin B_1 : C ile anlaşıp A 'ya malları %25 indirimle ortak var.

B_2 : Anlaşma yapmamak.

C 'nin C_1 : B ile anlaşıp %25 indirim yapmak

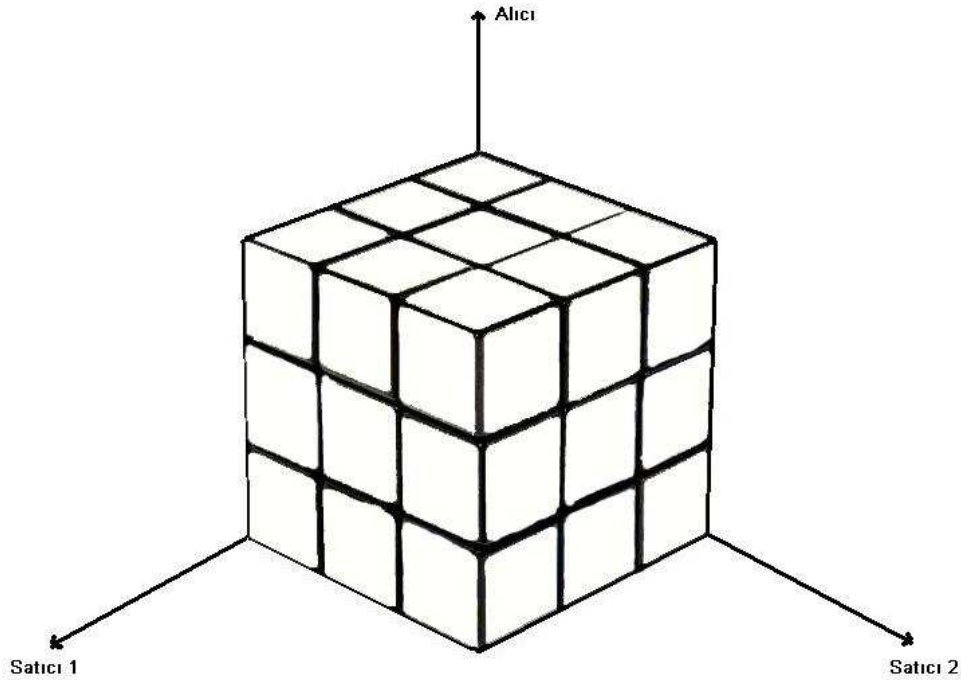
C_2 : A 'ya ondan aldığı taktirde %10 indirim yapmak.

Oyunumuz 3 kişilik $3 \times 2 \times 2$ oyundur. Olası 12 durum vardır. Bunlar Şekil.7.10'da gösterilmiştir.



Şekil 6.10. $3 \times 2 \times 2$ oyun stratejileri.

Bütün durumlar içinde Nash'inde dediği gibi anlaşma yoluna gitmek her üç taraf içinde en akılcı olandır. Bu da bize $A_3B_1C_1$ strateji üçlüsünü işaret ediyor. Yani 2 kabzımalın anlaşıp alıcıya %25 indirim yapması durumunda alıcının A_3 stratejisini kullanması.



Şekil 6.11. 3 boyutlu diyagram.

3 kişilik oyunlar için şekildeki gibi bir 3 boyutlu matris tablosu kullanabiliriz. z-düzlemine alıcı, x-düzlemine 1. kabzımal, y-düzlemine de 2. kabzımal deyip stratejilerini 3 boyutlu matrisimizde gösterebiliriz.

Örnek 6.3. Şimdi de bir zar oyununu ele alalım. A , B , C oyuncularından her biri eş zamanlı olarak ellerindeki zarı yere koyacaklardır. Zarların üst yüzlerinin toplamı;

- 1) 3'ün dışındaki 3'ün katları olan sayılarsa A kazanır.
- 2) 3'ün katları dışındaki çift sayılar sayılarsa B kazanır.
- 3) 3'ün katları dışındaki tek sayılarsa C kazanır.

Çözüm: Bu oyunda sadece 3 hareket vardır. Bu 3 harekette kişisel harekettir. Bu tam bilgili bir oyun değildir, zira oyunculardan hiç biri diğerinin ne yaptığını bilemez.

Oyunda her taraf için 6 strateji vardır.

Oyun 3 kişilik $6 \times 6 \times 6$ oyunudur.

Oyundaki olası durumlar şöyledir:

- 1) Zarların üst yüzey toplamaları: 6,9,12, 15, 18 ise A kazanır.
- 2) Zarların üst yüzey toplamaları: 4, 8, 10,14, 16 ise B kazanır.
- 3) Zarların üst yüzey toplamaları: 5, 7, 11, 13, 17 ise C kazanır.

Her defasında kaybetmekten kurtulmak için tarafların birbirlerinin stratejilerini keşfetmemeleri lazımdır. Yani kendimiz bile bir sonraki aşamada ne yapacağımızı bilmeyelim. Bunu zarı yere bırakmadan önce havaya fırlatmak suretiyle temin edebiliriz.

Böylece oyunlar teorisinin ana kavramlarından birini, karma stratejiler kavramını sezgi ile elde etmiş oluruz.

Burada A için çözüm mümkün sade stratejilerin ($A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$) rasgele ve belli bir oranda karıldığı stratejidir.

7. TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu çalışmada ilk olarak 1838 yılında temeli atılan ve daha sonra oldukça ilgi toplayıp üzerinde çok çalışılan oyun teorisi ele alınıp incelendi.

Gelişen bilimle ve birlikte gelen teknolojiyle insanoğlunun bilgi seviyesinde ulaştığı son noktada, artık daha fazla şeyin farkında olması ve yaşamak için bunları dikkate alma zorunluluğu hayattaki her bir adımını daha da karmaşıktırmıştır.

Artık herhangi bir konuda karar verirken, kendi dışımızdaki değişkenleri de dikkate almak durumundayız. Oyun teorisi, bireyleri, sadece kendi durumlarını dikkate alarak tek gözle yapılan bir değerlendirmeden, onu etkileyebilecek kendi dışındaki değişkenleri de hesaplayarak iki gözlü bir değerlendirme yapmaları yönünde genişletmektedir. Verilecek karar, uygulanacak davranış, kendinden başka birinin ne yaptığı veya yapacağına göre değişebilecekse, iste bu durumların çözümünü oyun teorisi vermektedir. Hakkında karar verilmek istenen konuya, normal göz yerine büyüteçle bakıldığında, kişinin daha sağlıklı ve doğru kararlar vermesi için pratik bir aparat görevi görür. Oldukça karmaşık durumların analizini kolaylaştırdığından, kalabalıklaşan hem günlük hem de iş hayatı için elzem bir bilgidir.

Bu çalışmada Oyun Teorisi'nin temel kavram ve varsayımlarıyla, çeşitlerine değinilmiş, iki kişilik sıfır toplamli oyunlar ve en genel kabul görmüş çözüm yöntemleri üzerinde durulmuştur. Bununla birlikte 3 kişilik sıfır toplamli olmayan oyunlar tanımlanarak örneklendirilmiştir.

KAYNAKLAR

- Chartwringt, E., Wooders, M., 2009. On Equilibrium in Pure Strategies in Game with Many Players. *International Journal of Game Theory*, 38 (1):137-153.
- Çağlar, M., 2002. “*Oligopolistik Piyasalarda Karar Alma Süreçleri ve Oyun Teorisi*” Gazi Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, Doktora Tezi, Ankara
- Çetin, D., 2001. “*İşbirliğine Oyun Teorisi Yaklaşımı*” Akdeniz Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Antalya.
- Esen, E., 2001. “*Oyun Kuramı Çerçevesinde Tam Bilgili Oyunlar*” Anadolu Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Eskişehir.
- Greif, A., 2002. Economic History and Game Theory, Chap 52. *Handbook of Game Theory with Economic Applications*, Vol. 3: 1989 – 2024
- Kafadar, T., 2002. “*Stratejik Dış Ticaret Politikaları ve Teknoloji Transveri*”, İstanbul Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Y.Lisans Tezi, İstanbul
- Khan, M. A., Sun, Y., 2002. Non – Cooperative Game with Many Players, Chap, 46. *Handbook of Game Theory with Economic Applications*, Vol. 3: 1761 – 1808
- Kreps, D., 1991. *Game Theory And Economic Modelling*, Oxford University Press 13.
- McMillian, J., 1992. *Games, Strategies and Managers*. Oxford University Press. Oxford. 264.
- Mirowski, P., 1992. “*What Were von Neumann and Morgenstern Trying to Accomplish?*”, R. Weintraub (eb) *Toward a History of Game Theory*, Vol:24.
- Naeve, J., 2004.Oyunların Sınıflandırılması <http://www.rescoitans.it/main.php?articleid=330> Yaz Dönemi Seminer Notları, Stuttgart/Almanya Erişim Tarihi: 05.10.2008
- Nash, J. F., 1950. *Non-Cooperative Games*, Presented to the Faculty of Princetan University in Candidaoy for the Degree of Doctor of Philosophy.

- Oran, A., 2004. Oyun mu Teori mi?. <http://www.ba.metu.edu.tr/~adil/BA-web/oyunteorisi.htm> Erişim tarihi: 24.10.2008
- Özden, K., 1989 Yöneylem Araştırması, Hava harp Okulları Yayınları, İstanbul.
- Özdil, T., 1998. **“Ekonomik Problemlerin Çözümünde Oyun Kuramının Yeri: Finansal Piyasalarda Bir Uygulama”** Dokuz Eylül Üniversitesi, Sosyal bilimler Enstitüsü, İktisat Anabilim Dalı , Doktora tezi, İzmir
- Özer, O, O., 2004. Oyun Teorisi ve Tarımda Uygulanması. http://paribus.tr.googlepages.com/o_ozar.pdf. Doktora Semineri, Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara. Erişim Tarihi: 09.01.2009
- Raghavan, T.E.S., 2002. Non – Zero – Sum Two – Person Games, Chap.44. **Handbook of Game Theory with Economic Applications**, vol. 3: 1687 – 1712.
- Ventsell E.S., (çeviren: Halil Yüksel), 1965. **Oyunlar Teorisine Giriş**, Türk Matematik Derneęi Yayınları No:27, İstanbul, 196.

ÖZ GEÇMİŞ

Çiğdem İNCİ 25.04.1982 tarihinde Hatay'da doğdu. İlköğrenimini Hatay'ın Kırıkhan İlçesi kurtuluş İlköğretim Okulu'nda, orta öğrenimini Van'da, Van Gölü Anadolu Lisesinde tamamladı. Yüksek öğrenimini Yüzüncü Yıl Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği Bölümünde yaptı. 2006 yılında Yüzüncü Yıl Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı Geometri Bilim Dalında yüksek lisansa başladı.

2 yıl matematik öğretmeni olarak görev yaptı. Halen öğrenimine ve öğretmenlik görevine devam etmektedir.