LAPLACE VE HELMHOLTZ DENKLEMLERİ

Seda ZİLAN

Zonguldak Karaelmas Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalında

Yüksek Lisans Tezi

Olarak Hazırlanmıştır

ZONGULDAK

Ocak 2009

KABUL

Seda ZİLAN tarafından hazırlanan "LAPLACE VE HELMHOLTZ DENKLEMLERİ" başlıklı bu çalışma jürimiz tarafından değerlendirilerek, Zonguldak Karaelmas Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak oybirliğiyle kabul edilmiştir. 26/01/2009

Başkan: Yrd. Doç. Dr. Yüksel SOYKAN (ZKÜ) ....

Üye : Doç. Dr. Ertan İBİKLİ (AÜ) ....

Üye : Yrd. Doç. Dr. Yusuf KAYA (ZKÜ) ....

ONAY:

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım. .../.../2009

Prof. Dr. Kemal BÜYÜKGÜZEL
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

"Bu tezdeki tüm bilgilerin akademik kurallara ve etik ilkelere uygun olarak elde edildiğini ve sunulduğunu; ayrıca bu kuralların ve ilkelerin gerektirdiği şekilde, bu çalışmadan kaynaklanmayan bütün atıfları yaptığımı beyan ederim."

Seda ZİLAN

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

LAPLACE VE HELMHOLTZ DENKLEMLERİ

Seda ZİLAN

Zonguldak Karaelmas Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Yüksel SOYKAN

Ocak 2009, 63 sayfa

Bu tezde Laplace ve Helmholtz denklemlerinin çözümlerine ilişkin sınır integral operatörleri ele alınmaktadır.

Çembersel bir sınır boyunca tek katlı Laplacian potansiyel operatörünün spektral özellikleri ve teğetsel türevini ve ayrıca çift katlı Laplacian potansiyel operatörü ile bunun normal türevi, hipertekil operatörü üzerinde çalışacağız. Bu analizi Helmholtz potansiyel operatörlerine genişleteceğiz. Ayrık operatörlerin elemanları ve bunların özdeğerleri ve özvektörlerine ilişkin önemli analitik sonuçları elde edeceğiz.

Tezde Amini (1999) makalesinden detaylı olarak yararlanacağız.

Anahtar Sözcükler: Hipertekil operatör, Sınır integral denklemleri, Regülerleştirme, Laplace potansiyelleri, Helmholtz potansiyelleri.

Bilim Kodu: 403.03.01

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

LAPLACE AND HELMHOLTZ EQUATIONS

Seda ZİLAN

Zonguldak Karaelmas University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Thesis Advisor:Asst. Dr. Yüksel SOYKAN
January 2009, 63 pages

In this thesis, boundary integral operators for the solutions of Laplace and the Helmholtz equations are considered.

We study the spectral properties of the single layer Laplacian potential operator and its tangential derivative, and also the double layer Laplacian potential operator and its normal derivative, the hypersingular operator over a circle boundary. We obtain important analytical results for the elements of the discrete operators and their eigenvalues and eigenvectors.

In this theses, we use Amini (1999) in detail.

Key Words: Hypersingular operator, Boundary integral euations, Regularisation, Laplace potentials, Helmholtz potentials.

Science Code: 403.03.01

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın gerçekleşme sürecinin her aşamasında yardımını ve desteğini esirgemeyen birçok kişi olmuştur. Öncelikle çalışma boyunca sabırla danışmanlığımı yapan ve aynı zamanda bu süreçte karşılaştığım her türlü zorluklara dayanmamda yardımını ve desteğini esirgemeyen değerli hocam sayın Yrd. Doç. Dr. Yüksel SOYKAN'a teşekkür ederim. Bunun yanı sıra çalışma süresince her ihtiyaç duyduğumda yardımlarını ve ilgilerini esirgemeyen değerli hocam sayın Yrd. Doç. Dr. Can Murat DİKMEN'e içtenlikle teşekkür ederim.

Ayrıca hayatımın her aşamasında olduğu gibi çalışma sürecinde de her türlü ilgilerini, sevgilerini esirgemeyen ve problemli dönemlerimde sürekli bana destek olan aileme ve bana çalışmanın bir an önce bitirilmesi konusunda ivme kazandıran sevgili nişanlıma teşekkür ederim.

Seda ZİLAN

İÇİNDEKİLER

İÇİNDEKİLER (devam ediyor)

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{C}$	: Karmaşık sayılar kümesi
H	: Hilbert Uzayı
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\delta(x)$	: Dirac delta operatörü
$L^2[0,2\pi]$	: $[0,2\pi]$ üzerinde karesi integrallenebilir fonksiyonlar uzayı
$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathrm{H}^r[0,2\pi]$	: Sobolev Uzayı
k	: Dalga sayısı
$\Vert\cdot\Vert$	: Norm
(f_n)	: f_n dizisi
Γ	: Kapalı düzgün eğri
L(V,W)	: Lineer dönüşümler kümesi
l^2	: Karesi toplanabilir dizilerin uzayı
(X,d)	: X metrik uzayı
γ	: Euler sabiti
σ	: Yoğunluk fonksiyonu operatörü
$P(x,D)$	: Pseudodiferensiyel operatörü
∇^2	: Laplace operatörü
J_n	: Birinci çeşit Bessel fonksiyonu operatörü
Y_n	: İkinci çeşit Bessel fonksiyonu operatörü
H_n	: Hankel fonksiyonu operatörü
L	: Tek katlı potansiyel operatör
M	: Çift katlı potansiyel operatör
K	: Sınır integral operatörü
λ_m	: m. özdeğer

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ (devam ediyor)

P : Hilbert operatörü

N : Hipertekil operatörü

KISALTMALAR

P.V. : Cauchy esas değer

FP : Serinin genelleştirilmiş bir fonksiyonu ifade ettiğini ve alışılmış anlamda yakınsayamayabileceğini göstermektedir.

Bölüm 1

Notasyon ve Hazırlık Bilgileri

Bu bölümde tezde çalışılacak konunun bir önbilgisi verilecektir. Bu bölümde gerekli olan bazı tanım ve teoremler yer almaktadır. Ayrıca, tezde kullanılacak notasyonları ve yazım dilini aşağıda özetleyeceğiz.
Tez boyunca

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &= \text{Reel sayılar kümesi,} \\ \mathbb{C} &= \text{Kompleks sayılar kümesi} \end{aligned}$$

standart gösterimlerini kullanacağız. Bu kısımda Soykan (2008) kaynağından yararlanılmıştır.
Her iki kümeninde kullanılabildiği durumlarda her bir kümeyi $\mathbb{F}$ ile göstereceğiz.

Tanım 1.0.1 *V bir vektör uzayı, $0 \neq U \subset V$ olsun. U kendisi bir vektör uzayı ise U'ya V'nin bir alt uzayı denir ve her $\alpha,\ \beta \in \mathbb{F}$ ve $x,\ y \in U$ için*

$$\alpha x + \beta y \in U$$

olma koşulu ile denktir.

Tanım 1.0.2 *V ve W, aynı $\mathbb{F}$ skaler cismi üzerinde vektör uzayları olsun. Bir*

$$T : V \to W$$

fonksiyonu (dönüşümü) her $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ ve $x, y \in V$ için

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$$

özelliğini sağlarsa veya buna denk olarak her $\alpha \in \mathbb{F}$ ve $x, y \in V$ için

$$T(x + y) = T(x) + T(y) \text{ ve } T(\alpha x) = \alpha T(x)$$

özelliğini sağlarsa T ye bir lineer dönüşüm adı verilir. Lineer dönüşüm yerine bazen transformasyon veya kısaca transform kullanılır. $T : V \to W$ lineer dönüşümlerinin tamamının oluşturduğu kümeyi $L(V, W)$ ile göstereceğiz. $V = W$ ise bu kümeyi $L(V)$ ile göstereceğiz.

Tanım 1.0.3 *V, W vektör uzayları ve $T \in L(V, W)$ olsun. T nin kerneli (çekirdeği) (T nin sıfır-uzayı olarakta söylenir)*

$$\operatorname{Ker} T = \{x \in V : T(x) = 0\} = T^{-1}(\{0\})$$

altuzayıdır.

Tanım 1.0.4 *V bir vektör uzayı ve $T \in L(V)$ olsun. Bir $\lambda \in \mathbb{F}$ skaleri için $T(x) = \lambda x$ denklemi sıfırdan farlı bir $x \in V$ çözümüne sahipse λ ya T nin bir özdeğeri denir ve sıfırdan farklı böyle bir x çözümüne özvektör adı verilir.*

$$\operatorname{Ker}(T - \lambda I) = \{x \in V : Tx = \lambda x\} \subset V$$

altuzayına (λ ya karşılık gelen) özuzay adı verilir (özuzayın elemanlarına özvektör denir ve bunlar fonksiyonsa özfonksiyon adını alırlar).

1.1 Metrik ve Normlu Uzaylar

Tanım 1.1.1 *Boş olmayan bir X kümesi ve bir $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+$, $(x, y) \longrightarrow d(x, y)$fonksiyonu verilsin. Eğer bu d fonksiyonu $\forall\ x, y, z \in X$ için*

(M1) $d(x, y) \geq 0$

(M2) $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$

(M3) $d(x, y) = d(y, x)$

(M4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ *(Üçgen Eşitsizliği)*

özelliklerini sağlıyorsa X üzerinde bir metrik adını alır. (X, d) ikilisine de metrik uzay denir.

Tanım 1.1.2 *Bir X vektör uzayı üzerinde tanımlı olup, bir $x \in X$ noktasındaki değeri $\|x\|$ ile gösterilen ve x, y, X de keyfi vektörler ve α bir skaler olmak üzere aşağıdaki özellikleri gerçekleyen reel-değerli bir fonksiyona bir norm denir:*

(N1) $\|x\| \geq 0$

(N2) $\|x\| = 0 \iff x = 0$

(N3) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$

(N4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *(Üçgen Eşitsizliği)*

X üzerindeki bir norm, X üzerinde

$d\,(x, y) = \|x - y\| \quad (x, y \in X)$

ile verilen bir d metriği tanımlar ve bu metrik, norm tarafından üretilen metrik olarak adlandırılır. Üzerinde bir norm tanımlanmış bir X vektör uzayına bir normlu uzay adı verilir. Normlu uzaylar $(X, \|.\|)$ ya da kısaca X ile gösterilir.

Önerme 1.1.3 $(X, \|.\|)$ *bir normlu vektör uzay olsun.*

$d(x, y) = \|x - y\|$

ile tanımlı $d : X \times X \to \mathbb{R}$ *fonksiyonu* X *üzerinde bir metrik tanımlar.*

Tanım 1.1.4 (M, d) *metrik uzayında bir dizi* $\{x_n\}$ *olsun.*

(a) $x \in M$ *olmak üzere her* $\varepsilon > 0$ *sayısına karşılık her* $n \geq N$ *için*

$d(x, x_n) < \varepsilon$

olacak biçimde bir $N \in \mathbb{N}$ *varsa* $\{x_n\}$ *dizisi* $x \in M$ *'ye yakınsar (yada* $\{x_n\}$ *dizisi yakınsaktır) denir. Bu durumda*

$\lim_{n \to \infty} x_n = x$

veya

$x_n \to x$

yazarız.

(b) *Her* $\varepsilon > 0$ *sayısına karşılık her* $m, n \geq N$ *için*

$d(x_m, x_n) < \varepsilon$

olacak biçimde bir $N \in \mathbb{N}$ *varsa* $\{x_n\}$ *dizisine bir Cauchy dizisi denir.*

Reel sayıların bir dizisinin yakınsaklığının fikrini kullanarak yukarıdaki tanımların sırasıyla

$n \to \infty$ için $d(x, x_n) \to 0$

ve

$m, n \geq N$ için $d(x_m, x_n) \to 0$

ye denk oldukları görülür.

Tanım 1.1.5 *Bir X metrik uzayında her Cauchy dizisi, X içinde bir limite yakınsıyorsa X uzayına tam uzay denir.*

Tanım 1.1.6 *X bir metrik uzay olmak üzere bir $M \subset X$ kümesinin kapanışı, yani X uzayında M'yi içeren en küçük kapalı küme olan $\overline{M}$, M'ye eşit ise M kümesine kapalıdır denir*

Teorem 1.1.7 *(M, d) bir metrik uzay ve $A \subset M$ olsun. O zaman;*

(a) *A tam ise o zaman kapalıdır.*

(b) *M tam ise o zaman A tamdır ancak ve ancak A kapalıdır.*

(c) *A kompakt ise o zaman kapalı ve sınırlıdır.*

Teorem 1.1.8 *X sonlu-boyutlu bir normlu vektör uzay, Y herhangi bir normlu vektör uzay ve $T : X \to Y$ lineer bir dönüşüm olsun. O zaman T süreklidir (bu nedenle sınırlıdır).*

Tanım 1.1.9 *$(X, \|.\|_X)$ ve $(Y, \|.\|_Y)$ normlu uzaylar ve $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun.*

(a) *$x \in X$ olsun. Eğer her $y \in X$ için her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık*

$$\|x - y\|_X < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\|_Y < \varepsilon$$

olacak biçimde bir $\delta > 0$ varsa f 'ye x noktasında süreklidir denir (yani δ sayısı hem $x \in M$ 'ye bağlı hemde ε 'na bağlı olabilir);

(b) *Eğer f fonksiyonu X in her noktasında sürekli ise f (X üzerinde) süreklidir denir;*

(c) *Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık her $x, y \in X$ için*

$$\|x - y\|_X < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\|_Y < \varepsilon$$

olacak biçimde bir $\delta > 0$ varsa f ye (X üzerinde) düzgün süreklidir denir (yani δ sayısı $x, y \in X$ den bağımsız olarak seçilebilir).

Tanım 1.1.10 *Üzerindeki iç çarpımla tanımlı metriğe göre tam olan bir iç çarpım uzayına Hilbert Uzayı denir.*

Birim çember üzerinde yay uzunluğunun ölçümü ile karesi integrallenebilir ölçülebilir fonksiyonların (denklik sınıflarının) Lebesgue uzayını alışıldığı gibi L^2 ile ve kompleks dizilerin (tek taraflı) karesi toplanabilir olanlarının uzayını l^2 ile göstereceğiz.

Tanım 1.1.11 *ℓ^2 uzayı $\mathbb{F}$ üzerinde karesi toplanabilir yani*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$$

eşitsizliğini sağlayan tüm

$$x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$$

karmaşık dizilerinin bir vektör uzayını gösterir. Her $x \in \ell^2$ için

$$\|x\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

ile tanımlı fonksiyon ℓ^2 uzayı üzerinde bir norm tanımlar.

Örneğin

$$x = \left(\frac{1}{n} \right)_{n=1}^{\infty}$$

dizisi ℓ^2 uzayının bir elemanıdır.
$L^2(a, b)$ uzayı

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}dt$$

iç çarpımı ile bir Hilbert uzayıdır.

Tanım 1.1.12 *X boş olmayan bir fonksiyonlar kümesi ve $f_n : X \longrightarrow \mathbb{F}$, $n \in \mathbb{N}$ şeklinde fonksiyonlar olsun.*

(a) Eğer $\forall x \in X$ için $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ oluyorsa yani $\forall x \in X$ ve $\varepsilon > 0$ için

$$\exists N = N(x, \varepsilon)$$

varsa ve

$$\forall n \geq N$$

için

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

oluyorsa (f_n) fonksiyonlar dizisi f 'ye noktasal yakınsar denir.

(b) $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\exists N = N(\varepsilon)$$

varsa $\forall x \in X$ ve

$$\forall n \geq N$$

için

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

oluyorsa (f_n) fonksiyonlar dizisi f 'ye düzgün yakınsar denir.

Tanım 1.1.13 *X ve Y normlu uzaylar olsun ve $T \in L(X, Y)$ bir lineer dönüşüm olsun. Eğer X içindeki her sınırlı $\{x_n\}$ dizisi için Y içindeki $\{Tx_n\}$ dizisi yakınsak bir alt dizi içerirse (sahipse) T ye kompakttır denir.*

Tanım 1.1.14 *$\alpha \in \mathbb{Z}$ için*

$$z^2 \frac{d^2y}{d^2z} + z\frac{dy}{dz} + (z^2 - \alpha^2)y = 0$$

ifadesine Bessel eşitliği denir.

Tanım 1.1.15 *n periyot sayısı, dT zaman aralığı olmak üzere*

$$\begin{aligned} J_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(nT - z\sin T)dT \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(nT - z\sin T)}dT \end{aligned}$$

ifadesine birinci çeşit Bessel fonksiyonu denir.

Tanım 1.1.16 $\alpha \notin \mathbb{Z}$ *ise*

$$Y_\alpha(z) = \frac{J_\alpha(z)\cos(\alpha\pi) - J_{-\alpha}(z)}{\sin(\alpha\pi)}$$

$$Y_n(z) = \lim_{\alpha \to n} Y_\alpha(z)$$

ifadesine ikinci çeşit Bessel fonksiyonu denir.

Tanım 1.1.17

$$H_n^{(1)}(z) = J_n(z) + iY_n(z)$$

$$H_n^{(2)}(z) = J_n(z) - iY_n(z)$$

ifadelerine Hankel fonksiyonu denir.

Tanım 1.1.18

$$\Delta = \nabla^2 = \sum_{t=1}^{n} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_t^2}$$

operatörüne Laplace operatörü veya Laplacian denir.

Tanım 1.1.19

$$\Delta\phi = \nabla^2\phi = 0$$

denklemine Laplace denklemi veya potansiyel denklemi denir. Bu denklemin çözümlerine potansiyel fonksiyonları veya harmonik fonksiyonlar denir.

Tanım 1.1.20 n *değişkenli birden fazla fonksiyonlarla meşgul olduğumuzda ki bu fonksiyonlar*

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ y_2 &= f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ \vdots &= \vdots \\ y_m &= f_m(x_1, x_2, \cdots, x_n) \end{aligned}$$

şeklinde olabilirler. Bu fonksiyonların $\mathbb{R}^n$ *deki bir* D *bölgesinde sürekli kısmi türevlere* *sahip iseler bunların diferansiyeli*

$$\begin{aligned} dy_1 &= \frac{\partial f_1}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n}dx_n \\ &\vdots \\ dy_m &= \frac{\partial f_m}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f_m}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \frac{\partial f_m}{\partial x_n}dx_n \end{aligned}$$

denklem sistemi ile verilir. Bu sistemi

$$\begin{bmatrix} dy_1 \\ dy_2 \\ \vdots \\ dy_m \end{bmatrix}_{m\times 1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{m\times n} . \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \vdots \\ dx_n \end{bmatrix}_{n\times 1}$$

şeklinde ifade edebiliriz. $\begin{pmatrix} dy_1 & dy_2 & \cdots & dy_m \end{pmatrix}$ *sütunu* $1 \leq i \leq m$ *ve* $1 \leq j \leq n$ *olmak üzere,*

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

matrisi ile $\begin{pmatrix} dx_1 & dx_2 & \cdots & dx_m \end{pmatrix}$ *sütunuyla çarpımından elde ederiz.* $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$ *mat risine* $y_1, y_2, \cdots, y_m$ *fonksiyonlarının Jakobien matrisi adı verilir.*

1.2 $\mathcal{H}^r[0, 2\pi]$ Sobolev Uzayı

Sobolev uzayının temeli olarak, klasik Fourier serisi açılımının kısa bir tekrarı ile başlayabiliriz.

$$a_m = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(t)e^{-imt}dt$$

olmak üzere bir $\varphi \in \mathcal{L}^2[0, 2\pi]$ fonksiyonu için

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m e^{imt}$$

serisine φ nın Fourier serisidir denir. Burada a_m katsayıları, φ nın Fourier katsayıları olarak adlandırılır. $\mathcal{L}^2[0,2\pi]$ de karesel norm

$$(\varphi,\psi)=\int_0^{2\pi}\varphi(t)\overline{\psi(t)}dt$$

ile verilen iç çarpım tarafından üretilir. $t\in\mathbb{R}$ ve $m\in\mathbb{Z}$ için

$$f_m(t)=e^{imt}$$

ile tanımlı trigonometrik tek terimlisini gözönüne alalım. $\{f_m:m\in\mathbb{Z}\}$ kümesi orto gonal sistemdir. Weierstrass yaklaşım teoreminden, trigonometrik polinomlar, 2π peri yotlu sürekli fonsiyonların uzayı içinde maksimum norma göre yoğundur ve $C[0,2\pi]$ ortalama kare normundaki $\mathcal{L}^2[0,2\pi]$ de yoğundur. Ortogonal sistem tamdır ve Fourier serisi ortalama kare normunda yakınsaktır. $\|f_m\|_2^2=2\pi$ ortonormallik faktöründen dolayı, Parseval eşitliği

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}|a_m|^2=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\varphi(t)|^2\,dt=\frac{1}{2\pi}\|\varphi\|_2^2$$

şeklindedir.

Şimdi, a_m Fourier katayılarının $|m|\to\infty$ iken kesin olarak azalmasını ön koşul kabul ederek, $\mathcal{L}^2[0,2\pi]$ nin $\mathcal{H}^r[0,2\pi]$ alt uzayını tanımlayacağız.

Tanım 1.2.1 $0\le r<\infty$ *olsun.* φ *nin* a_m *Fourier katsayıları için*

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left(1+m^2\right)^r|a_m|^2<\infty$$

özelliğine sahip tüm $\varphi\in\mathcal{L}^2[0,2\pi]$ *fonksiyonlarının uzayını* $\mathcal{H}^r[0,2\pi]$ *ile göstereceğiz.* $\mathcal{H}^r[0,2\pi]$ *uzayına Sobolev uzayıdır denir. Bu uzayı kısaca* $\mathcal{H}^r=\mathcal{H}^r[0,2\pi]$ *ile göstere- ceğiz.* $\mathcal{H}^0[0,2\pi]$ *ile* $\mathcal{L}^2[0,2\pi]$ *uzayları çakışıktır, yani bu ikisi de aynı uzayı gösterir.*

Teorem 1.2.2 $\mathcal{H}^r[0,2\pi]$ *Sobolev uzayı, sırasıyla* a_m,b_m *Fourier katsayılı*

$$\varphi,\psi\in\mathcal{H}^r[0,2\pi]$$

için

$$(\varphi,\psi)_r=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left(1+m^2\right)^r a_m\overline{b}_m$$

ile tanımlı iç çarpım ile bir Hilbert uzayıdır. $\mathcal{H}^r[0,2\pi]$ *nin normu*

$$\|\varphi\|_r = \left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(1+m^2\right)^r |a_m|^2 \right\}^{1/2}$$

ile verilir. Trigonometrik polinomlar $\mathcal{H}^r[0,2\pi]$ *içinde yoğundur.*

İspat: $(.,.)_r$ nin iyi-tanımlılığı

$$\left| \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(1+m^2\right)^r a_m \bar{b}_m \right|^2 \leq \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(1+m^2\right)^r |a_m|^2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(1+m^2\right)^r |b_m|^2$$

ile verilen Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden elde edilebilir.
$\mathcal{H}^r$ nin tam olduğunu kanıtlamak için, φ_n bir Cauchy dizisi olsun, yani $\varepsilon > 0$ ve rildiğinde her n, $k \geq N(\varepsilon)$ için $\|\varphi_n - \varphi_k\|_r < \varepsilon$ olacak şekilde ya da φ_n nin $a_{m,n}$ Fourier katsayılarının terimleri içinde, her n, $k \geq N(\varepsilon)$ için

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(1+m^2\right)^r |a_{m,n} - a_{m,k}|^2 < \varepsilon^2$$

olacak şekilde $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ var olsun. Buradan her $M_1, M_2 \in \mathbb{N}$ ve her $n, k \geq N(\varepsilon)$ için

$$\sum_{m=-M_1}^{M_2} \left(1+m^2\right)^r |a_{m,n} - a_{m,k}|^2 < \varepsilon^2 \tag{1.1}$$

bulunur. Bu yüzden $\mathbb{C}$ tam olduğundan, her bir $m \in \mathbb{Z}$ için $n \to \infty$ iken $a_{m,n} \to a_m$ olacak şekilde $\mathbb{C}$ içinde bir (a_m) dizisi vardır. (1.1) için $k \to \infty$ limite geçilirse, her $M_1, M_2 \in \mathbb{N}$ ve her $n \geq N(\varepsilon)$ için

$$\sum_{m=-M_1}^{M_2} \left(1+m^2\right)^r |a_{m,n} - a_m|^2 \leq \varepsilon^2$$

elde edilir. Buna göre her $n \geq N(\varepsilon)$ için

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(1+m^2\right)^r |a_{m,n} - a_m|^2 \leq \varepsilon^2$$

olur. Buradan

$$\varphi = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m f_m,$$

$n \to \infty$ için $\|\varphi - \varphi_n\|_r \to 0$ özelliğini sağlayan bir $\varphi \in \mathcal{H}^r$ fonksiyonunu tanımlar.

Dolayısıyla $\mathcal{H}^r$ tamdır.
Fourier katsayıları a_m olan $\varphi \in \mathcal{H}^r$ yi göz önüne alalım. Bu durumda,

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(1+m^2\right)^r |a_m|^2$$

serisi yakınsak olduğundan, Fourier serisinin $\varphi_n = \sum_{m=-n}^{n} a_m f_m$ kısmi toplamları için $n \to \infty$ iken

$$\|\varphi - \varphi_n\|_r^2 = \sum_{|m|=n+1}^{\infty} \left(1+m^2\right)^r |a_m|^2 \to 0$$

elde edilir. Sonuç olarak, trigonometrik polinomlar $\mathcal{H}^r$ içinde yoğundur.

1.3 $\mathcal{O}$ Notasyonu

$\{f_n\}$ ve $\{g_n\}$ reel sayıların dizileri olsunlar. Yeterince büyük her n için $|f_n| \leq K\,|g_n|$ olacak şekilde bir K sabiti varsa $|f_n| = \mathcal{O}\,(g_n)$ yazarız.Bu notasyonun kullanımının bir örneği aşağıdaki gibidir. Eğer $g_n = 2n^2 + 9n - 3$ ise $n \to \infty$ için $g_n = \mathcal{O}(n^2)$ yazabiliriz.

$$f_n = \frac{4n^2+5}{n^2+n+7}$$

olduğunda notasyonun küçük bir değişimi ile

$$f_n = 4 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$$

yazılabilir. Dolayısıyla burada $\mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$, "$\frac{1}{n}$ nin en azından sabit bir katı kadar hızla sıfıra yaklaşması" demektir.
Aynı notasyon bir reel değişkenli fonksiyonlar için kullanılır. Bu nedenle $x \to \infty$ davranışıyla ilgilendiğimizde $a < x < \infty$ için

$$|f\,(x)| \leq A\,|g\,(x)|$$

olacak şekilde $A \geq 0$ ve a reel sabitlerinin var olduğunu ifade etmek için

$$f\,(x) = \mathcal{O}\,(g\,(x))$$

yazabiliriz. Bu gösterimin muhtemelen en sık kullanımı bir fonksiyonun bir seriye açılımı durumundadır. O notasyonu aynı zamanda bir matematiksel işlev için gelişti rilen yaklaşık işlevin hata terimini tarif etmek için de kullanılabilir. Örneğin,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3) \qquad x \to 0 \text{ iken}$$

ifadesi hatanın (yani $e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)$ farkının) mutlak değer bakımından, sıfıra yeterince yakın x değerleri için bir sabit çarpı $|x^3|$ değerinden daha küçük olduğunu belirtir. Aynı şekilde $x \to \infty$ için

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to 1$$

ise bu durumu ifade etmek için $x \to \infty$ iken

$$f(x) \sim g(x)$$

notasyonunu kullanabiliriz.

$$f(x) \sim g(x)$$

ise buradan

$$f(x) = \mathcal{O}(g(x))$$

elde edilir. Fakat

$$f(x) \sim g(x)$$

ifadesi

$$f(x) = \mathcal{O}(g(x))$$

ifadesinden çok daha kesin bir bilgi ifade eder.

1.4 Temel Bazı Tanımlar

Tanım 1.4.1 (Toeplitz Matris) *Asal köşegeni ve bu köşegene paralel doğrultular boyunca elemanları sabit olan kare matrislerdir. Şöyle ki Toeplitz matris olan a mat risinin i. satır, j. sutundaki elemanı a_{ij} olsun. Eğer $i - j = k - l$ ise $a_{ij} = a_{kl}$ dir.*

Yani elemanların değerleri sadece indislerin farkına bağlıdır. Bu durumda

$$\begin{bmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \cdots & a_{-n+1} \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_1 & a_0 & \ddots & a_{-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{-1} \\ a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix}$$

oluşur. Bu formdaki bir matrise Toeplitz matris denir.

Tanım 1.4.2 (Dolanır (Circulant) Matris) *Toeplitz matrislerinin ortak özel durumlarından biri (önemli bir sadeleşme ile sonuçlanan daha genel sonuçlar oluşturmada temel rol oynayan) matrisin her sırasının bir üstteki sıranın sağ döngüsel kayması olduğunda sonuçlanır, bu nedenle* $k = 1, 2, \ldots, n-1$ *için* $t_k = t_{-(n-k)} = t_{k-n}$ *dir. Bu durumda*

$$C_n = \begin{bmatrix} t_0 & t_{-1} & t_{-2} & \cdots & t_{-(n-1)} \\ t_{-(n-1)} & t_0 & t_{-1} & \ddots & \\ t_{-(n-2)} & t_{-(n-1)} & t_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ t_{-1} & t_{-2} & & \cdots & t_0 \end{bmatrix}$$

oluşur. Bu formdaki bir matrise dolanır(circulant) matris denir.

Tanım 1.4.3 *Matematiksel analizde bir pseudodiferensiyel operatörü, diferensiyel o peratör kavramının bir genişlemesidir. Pseudodiferensiyel operatörler, kısmi diferensiyel denklemler ve kuantum alanı teorisinde sıklıkla kullanılır.* $\mathbb{R}^n$ *de kompakt destekli düzgün* u *fonksiyonları üzerinde üzerinde tanımlı sabit katsayılı bir*

$$P(D) := \sum_{\alpha} a_\alpha D^\alpha$$

lineer diferensiyel operatörünü ele alalım. Bu operatör bir Fourier dönüşümünün, (sembol olarak adlandırılan)

$$P(\xi) = \sum_{\alpha} a_\alpha \xi^\alpha$$

polinom fonksiyonu ile basit bir çarpımın bileşkesi olarak yazılabilir ve bir ters Fourier dönüşümü

$$P(D)u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-y)\xi} P(\xi) u(y) dy d\xi$$

formunda yazılabilir.

Burada $a = (a_1, \ldots, a_n)$ çoklu indeks, a_a kompleks sayılar ve ∂_j, j inci değişkene göre kısmi türev olmak üzere

$$D^\alpha = (-i\partial_1)^{\alpha_1} \ldots (-i\partial_n)^{\alpha_n}$$

bir tekrarlamalı (iterated) kısmi türevdir.
Benzer olarak, $\mathbb{R}^n$ deki bir pseudodiferensiyel $P(x, D)$ operatörü, integrantındaki P fonksiyonu belirtilen kesin özelliklere sahip daha genel fonksiyonlar olmak üzere

$$P(x, D)u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-y)\xi} P(x, \xi)u(y)dyd\xi$$

formunda bir operatördür.

Tanım 1.4.4

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty & , \quad x = 0 \\ 0 & , \quad x \neq 0 \end{cases}$$

ve

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1$$

ile tanımlı genelleştirilmiş fonksiyona Dirac delta fonksiyonu denir.

Tanım 1.4.5 *$a \leq c \leq b$ için*

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = PV \int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon \to 0^+} \left[\int_a^{c-\epsilon} f(x)dx + \int_{c+\epsilon}^b f(x)dx \right]$$

ifadesine Cauchy esas değer denir.

Bölüm 2

Bazı Eşitlikler ve Özdeşlikler

Bu kısımda tezde kullanacağımız bazı eşitlikleri elde edeceğiz.
Önce bazı temel özdeşlikler vereceğiz.

$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

$$\begin{aligned} \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ &= 2\cos^2 x - 1 \\ &= 1 - 2\sin^2 x \end{aligned}$$

ve $2x = t$ alınırsa

$$\sin^2 (t/2) = \frac{1 - \cos t}{2} \tag{2.1}$$

olur.

$e^{it} = \cos t + i \sin t$

ve

$e^{-it} = \cos t - i \sin t$

dir. Buradan

$$\sin^2 (t/2) = (1/4) \left(-e^{it} + 2 - e^{-it}\right) \tag{2.2}$$

olur.

Önerme 2.0.6

$$\int_0^{2\pi} \ln\left(4\sin^2\frac{\theta}{2}\right) e^{im\theta} d\theta = \begin{cases} 0 & , \quad m = 0 \\ -\dfrac{2\pi}{|m|} & , \quad m \neq 0 \end{cases} \tag{2.3}$$

İspat.

$$1 + 2\sum_{k=1}^{m-1} e^{ik\theta} + e^{im\theta} = i\left(1 - e^{im\theta}\right)\cot\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad 0 < \theta < 2\pi$$

geometrik toplamının integralini alırsak, Cauchy esas değer manasında

$$\int_0^{2\pi} e^{im\theta}\cot\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta = 2\pi i, \quad m = 1, 2, \ldots \tag{2.4}$$

elde ederiz.

$$\frac{d}{d\theta}\left\{\left[e^{im\theta} - 1\right]\ln\left(4\sin^2\frac{\theta}{2}\right)\right\} = ime^{im\theta}\ln\left(4\sin^2\frac{\theta}{2}\right) + \left[e^{im\theta} - 1\right]\cot\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

özdeşliğin integralini alırsak, $m = 1, 2, \ldots$ için

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} e^{im\theta}\ln\left(4\sin^2\frac{\theta}{2}\right) d\theta &= -\frac{1}{im}\int_0^{2\pi} e^{im\theta}\cot\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta \\ &= -\frac{2\pi}{m} \end{aligned}$$

bulunur. İspat $m \neq 0$ için tamamlanmış olur. Şimdi $m = 0$ için ispatı yapacağız.

$$I := \int_0^{2\pi} \ln\left(4\sin^2\frac{\theta}{2}\right) d\theta$$

diyelim.

$$\begin{aligned} 2I &= \int_0^{2\pi} \ln\left(4\sin^2\frac{\theta}{2}\right) d\theta + \int_0^{2\pi} \ln\left(4\cos^2\frac{\theta}{2}\right) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\ln\left(4\sin^2\frac{\theta}{2}\right) d\theta + \ln\left(4\cos^2\frac{\theta}{2}\right)\right] d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \ln\left(4\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) 4\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \ln\left(4\sin^2\theta\right) d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{4\pi} \ln\left(4\sin^2\frac{\theta}{2}\right) d\theta = I \end{aligned}$$

olur ve $I = 0$ dır.

Önerme 2.0.7

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 \frac{t}{2} e^{imt} dt = \begin{cases} \pi & , \quad m = 0 \\ -\pi/2 & , \quad m = \pm 1 \\ 0 & , \quad \textit{aksi halde} \end{cases} \tag{2.5}$$

İspat. (2.2) özdeşliğini kullanacağız.

$m = 0$ için

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin^2 \left(\frac{t}{2}\right) e^{imt} dt &= (1/4) \left[- \int_0^{2\pi} e^{it} dt + 2 \int_0^{2\pi} dt - \int_0^{2\pi} e^{-it} dt \right] \\ &= (1/4) \left[- \left(-ie^{it} \right) \Big|_0^{2\pi} + 2t\Big|_0^{2\pi} - ie^{-it}\Big|_0^{2\pi} \right] \\ &= (1/4) \left[i.0 + 2.2\pi - 2.0 - i.0 \right] \\ &= (1/4) 4\pi \\ &= \pi \end{aligned}$$

dir. $m = 1$ için

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin^2 \left(\frac{t}{2}\right) e^{imt} dt &= (1/4) \left[- \int_0^{2\pi} e^{2it} dt + 2 \int_0^{2\pi} e^{it} dt - \int_0^{2\pi} e^{0} dt \right] \\ &= (1/4) \left[\frac{i}{2} e^{2it} \Big|_0^{2\pi} + 2ie^{it}\Big|_0^{2\pi} - t\Big|_0^{2\pi} \right] \\ &= (1/4) \left[\frac{i}{2}.0 - 2.0 - (2\pi - 0) \right] \\ &= (1/4) \left(-2\pi \right) \\ &= -\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

dir. $m = -1$ için

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin^2 \left(\frac{t}{2}\right) e^{imt} dt &= (1/4) \left[- \int_0^{2\pi} e^{0} dt + 2 \int_0^{2\pi} e^{-it} dt - \int_0^{2\pi} e^{-2it} dt \right] \\ &= (1/4) \left[-t\Big|_0^{2\pi} + 2ie^{-it}\Big|_0^{2\pi} - \frac{i}{2} e^{-2it} \Big|_0^{2\pi} \right] \\ &= (1/4) \left[-2\pi + 0 + 2i.0 - \frac{i}{2}.0 \right] \\ &= (1/4) \left(-2\pi \right) \\ &= -\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

dir. Şimdi $m \neq 0$, $m \neq 1$, $m \neq -1$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
e^{it}\Big|_0^{2\pi} &= (\cos t + i\sin t)\Big|_0^{2\pi} \\
&= \cos 2\pi + i\sin 2\pi - \cos 0 - i\sin 0 \\
&= 1 + 0 - 1 - 0 \\
&= 1
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
e^{-it}\Big|_0^{2\pi} &= (\cos t - i\sin t)\Big|_0^{2\pi} \\
&= \cos 2\pi - i\sin 2\pi - \cos 0 + i\sin 0 \\
&= 1 - 0 - 1 + 0 \\
&= 1
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
& \int_0^{2\pi} \sin^2\left(\frac{t}{2}\right) e^{imt}dt \\
= \ & \int_0^{2\pi} (1/4)\left(-e^{it} + 2 - e^{-it}\right) e^{imt}dt \\
= \ & (1/4)\left[-\int_0^{2\pi} e^{it(1+m)}dt + 2\int_0^{2\pi} e^{imt}dt - \int_0^{2\pi} e^{it(-1+m)}dt\right] \\
= \ & (1/4)\left[\frac{1}{1+m}e^{it(1+m)}\Big|_0^{2\pi} + 2\left(\frac{-i}{m}\right)e^{imt}\Big|_0^{2\pi} - \left(\frac{-i}{-1+m}\right)e^{it(-1+m)}\Big|_0^{2\pi}\right] \\
= \ & (1/4)\left[\frac{1}{1+m}.0 - \frac{2i}{m}.0 + \frac{i}{-1+m}.0\right] \\
= \ & 0
\end{aligned}$$

bulunur.

Önerme 2.0.8

$$c_m := \int_0^{2\pi} \ln\left(\frac{4}{e}\sin^2\frac{t}{2}\right) e^{imt}dt = -\frac{2\pi}{\max(1, |m|)} \tag{2.6}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
\gamma_m \quad : \ &= \int_0^{2\pi} \sin^2\left(\frac{t}{2}\right) \ln\left(\frac{4}{e}\sin^2\frac{t}{2}\right) e^{imt}dt \\
&= \frac{1}{4}\left(-c_{m-1} + 2c_m - c_{m+1}\right)
\end{aligned}$$

dir.

İspat. (2.3) yi kullanacağız.

$m = 0$

için

$$\begin{aligned}
c_m &= \int_0^{2\pi} \ln\left(\frac{4}{e}\sin^2\frac{t}{2}\right) e^{imt}dt \\
&= \int_0^{2\pi} \ln\left(\frac{4}{e}\sin^2\frac{t}{2}\right) dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left[\ln\left(\frac{1}{e}\right) + \ln\left(4\sin^2\frac{t}{2}\right)\right] dt \\
&= \int_0^{2\pi} \ln\left(\frac{1}{e}\right) dt - \int_0^{2\pi} \ln\left(4\sin^2\frac{t}{2}\right) dt \\
&= \int_0^{2\pi} (-1)dt - 0 \\
&= -2\pi
\end{aligned}$$

olur. Ayrıca $m \neq 0$ için

$$\begin{aligned}
c_m &= \int_0^{2\pi} \ln\left(\frac{4}{e}\sin^2\frac{t}{2}\right) e^{imt}dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left[\ln\left(\frac{1}{e}\right) + \ln\left(4\sin^2\frac{t}{2}\right)\right] e^{imt}dt \\
&= \int_0^{2\pi} \ln\left(\frac{1}{e}\right) e^{imt}dt + \int_0^{2\pi} \ln\left(4\sin^2\frac{t}{2}\right) e^{imt}dt \\
&= \ln\left(\frac{1}{e}\right)\left(-\frac{i}{m}\right)\left(e^{imt}\Big|_0^{2\pi}\right) - \frac{2\pi}{|m|} \\
&= \ln\left(\frac{1}{e}\right)\left(-\frac{i}{m}\right)\left(e^{im.2\pi} - e^{im.0}\right) - \frac{2\pi}{|m|} \\
&= \ln\left(\frac{1}{e}\right)\left(-\frac{i}{m}\right)(1-1) - \frac{2\pi}{|m|} \\
&= 0 - \frac{2\pi}{|m|} \\
&= -\frac{2\pi}{|m|}
\end{aligned}$$

bulunur. Bu nedenle

$$c_m = \int_0^{2\pi} \ln\left(\frac{4}{e}\sin^2\frac{t}{2}\right) e^{imt}dt = -\frac{2\pi}{\max(1, |m|)}$$

olur.

(2.2) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\gamma_m &= \int_0^{2\pi} \sin^2\left(\frac{t}{2}\right) \ln\left(\frac{4}{e}\sin^2\frac{t}{2}\right) e^{imt}dt \\
&= \int_0^{2\pi} (1/4)\left(-e^{it}+2-e^{-it}\right) \ln\left(\frac{4}{e}\sin^2\frac{t}{2}\right) e^{imt}dt \\
&= (1/4)[-\int_0^{2\pi} \ln\left(\frac{4}{e}\sin^2\frac{t}{2}\right) e^{it(1+m)}dt + 2\int_0^{2\pi} \ln\left(\frac{4}{e}\sin^2\frac{t}{2}\right) e^{imt}dt \\
&\quad -\int_0^{2\pi} \ln\left(\frac{4}{e}\sin^2\frac{t}{2}\right) e^{it(m-1)}dt] \\
&= \frac{1}{4}\left(-c_{m+1}+2c_m-c_{m-1}\right)
\end{aligned}$$

bulunur.

Önerme 2.0.9

$$\gamma_0 = 0 \ \gamma_1 = \gamma_{-1} = -\pi/4 \ ve \ \gamma_m = \frac{1}{2\left|m\right|\left(m^2-1\right)}, \quad |m| \geq 2 \tag{2.7}$$

İspat. (2.6) denkleminden

$$\begin{aligned}
c_{-1} &= -\frac{2\pi}{\max\left(1,|-1|\right)} = -2\pi \\
c_0 &= -\frac{2\pi}{\max\left(1,0\right)} = -2\pi \\
c_1 &= -\frac{2\pi}{\max\left(1,|1|\right)} = -2\pi \\
c_2 &= -\frac{2\pi}{\max\left(1,|2|\right)} = -\pi \\
c_{-2} &= -\frac{2\pi}{\max\left(1,|-2|\right)} = -\pi
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\gamma_m = \frac{1}{4}\left(-c_{m-1}+2c_m-c_{m+1}\right)$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\gamma_0 &= \frac{1}{4}\left(-c_{-1}+2c_0-c_1\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(-\left(-2\pi\right)+2\left(-2\pi\right)-\left(-2\pi\right)\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(2\pi-4\pi+2\pi\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

ve

$$
\begin{aligned}
\gamma_1 &= \frac{1}{4}\left(-c_0+2c_1-c_2\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(-\left(-2\pi\right)+2\left(-2\pi\right)-\left(-\pi\right)\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(2\pi-4\pi+\pi\right)=-\frac{\pi}{4}
\end{aligned}
$$

ve ayrıca

$$
\begin{aligned}
\gamma_{-1} &= \frac{1}{4}\left(-c_{-2}+2c_{-1}-c_0\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(-\left(-\pi\right)+2\left(-2\pi\right)-\left(-2\pi\right)\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(\pi-4\pi+2\pi\right)=-\frac{\pi}{4}
\end{aligned}
$$

bulunur. $|m|\geq 2$ için

$$
|m|\,|m+1|+|m|\,|m-1|=2m^2
$$

olduğundan

$$
\begin{aligned}
\gamma_m &= \frac{1}{4}\left(-c_{m-1}+2c_m-c_{m+1}\right)\\
&= \frac{1}{4}\left[-\left(-\frac{2\pi}{|m-1|}\right)+2\left(-\frac{2\pi}{|m|}\right)-\left(-\frac{2\pi}{|m+1|}\right)\right]\\
&= \frac{1}{4}\left[\frac{2\pi}{|m-1|}-\frac{4\pi}{|m|}+\frac{2\pi}{|m+1|}\right]\\
&= \frac{2\pi}{4}\left[\frac{|m|\,|m+1|-2\left(m^2-1\right)+|m|\,|m-1|}{|m|\left(m^2-1\right)}\right]=\frac{\pi}{|m|\left(m^2-1\right)}
\end{aligned}
$$

bulunur.

Önerme 2.0.10

$r=2a\sin\dfrac{t}{2}$

olmak üzere

$$
I=\int_0^{2\pi} r^2\ln r^2 e^{imt}dt=\begin{cases} 4\pi a^2(2\ln a+1) & , \quad m=0\\ -\pi a^2(4\ln a+3) & , \quad m=\pm 1\\ \dfrac{4\pi a^2}{|m|\left(m^2-1\right)} & , \quad \textit{aksi halde}\end{cases} \tag{2.8}
$$

dir (Kress 1989).

İspat.

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{2\pi} r^2 \ln r^2 e^{imt} dt \\
&= \int_0^{2\pi} 4a^2 \sin^2 \frac{t}{2} \ln\left(4a^2 \sin^2 \frac{t}{2}\right) e^{imt} dt \\
&= \int_0^{2\pi} 4a^2 \sin^2 \frac{t}{2} \ln\left(a^2 4\frac{e}{e} \sin^2 \frac{t}{2}\right) e^{imt} dt \\
&= \int_0^{2\pi} 4a^2 \sin^2 \frac{t}{2} \left[\ln(a^2 e) + \ln\left(\frac{4}{e} \sin^2 \frac{t}{2}\right)\right] e^{imt} dt \\
&= 4a^2 \ln(a^2 e) \int_0^{2\pi} \sin^2\left(\frac{t}{2}\right) e^{imt} dt + 4a^2 \int_0^{2\pi} \sin^2\left(\frac{t}{2}\right) \ln\left(\frac{4}{e}\sin^2\frac{t}{2}\right) e^{imt} dt \\
&= 4a^2 \left(\ln a^2 + \ln e\right) \int_0^{2\pi} \sin^2\left(\frac{t}{2}\right) e^{imt} dt + 4a^2 \int_0^{2\pi} \sin^2\left(\frac{t}{2}\right) \ln\left(\frac{4}{e}\sin^2\frac{t}{2}\right) e^{imt} dt \\
&= 4a^2 \left(2\ln a + 1\right) \int_0^{2\pi} \sin^2\left(\frac{t}{2}\right) e^{imt} dt + 4a^2 \int_0^{2\pi} \sin^2\left(\frac{t}{2}\right) \ln\left(\frac{4}{e}\sin^2\frac{t}{2}\right) e^{imt} dt
\end{aligned}$$

olur.

Şimdi istenilenleri (2.7) den elde edeceğiz. (2.5) denkleminden $m = 0$ için

$$\int_0^{2\pi} \sin^2\left(\frac{t}{2}\right) e^{imt} dt = \pi$$

olduğunu biliyoruz. (2.7) denkleminden de $\gamma_0 = 0$ olduğunu göstermiştik. Bütün ifadeleri yerlerine yazarsak $m = 0$ için

$$\begin{aligned}
I &= 4a^2 \left(2\ln a + 1\right) \int_0^{2\pi} \sin^2\left(\frac{t}{2}\right) e^{imt} dt + 4a^2 \int_0^{2\pi} \sin^2\left(\frac{t}{2}\right) \ln\left(\frac{4}{e}\sin^2\frac{t}{2}\right) e^{imt} dt \\
&= 4a^2 \left(2\ln a + 1\right) \pi + 4a^2.0 \\
&= 4a^2 \pi \left(2\ln a + 1\right)
\end{aligned}$$

bulunur. $m = \mp 1$ için $\gamma_{\mp 1} = -\dfrac{\pi}{4}$ ve

$$\int_0^{2\pi} \sin^2\left(\frac{t}{2}\right) e^{imt} dt = -\frac{\pi}{2}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
I &= 4a^2 \left(2\ln a + 1\right) \int_0^{2\pi} \sin^2\left(\frac{t}{2}\right) e^{imt} dt + 4a^2 \int_0^{2\pi} \sin^2\left(\frac{t}{2}\right) \ln\left(\frac{4}{e}\sin^2\frac{t}{2}\right) e^{imt} dt \\
&= 4a^2 \left(2\ln a + 1\right) \left(-\frac{\pi}{2}\right) + 4a^2 \left(-\frac{\pi}{4}\right) \\
&= -\pi a^2 \left(2\left(2\ln a + 1\right) + 1\right) = -\pi a^2 \left(4\ln a + 3\right)
\end{aligned}$$

bulunur. m nin diğer değerleri için (yani $|m| \geq 2$ için) $\gamma_m = \dfrac{\pi}{|m|(m^2-1)}$ ve

$$\int_0^{2\pi} \sin^2\left(\frac{t}{2}\right) e^{imt} dt = 0$$

olduğundan

$$\begin{aligned} I &= 4a^2(2\ln a + 1)\int_0^{2\pi} \sin^2\left(\frac{t}{2}\right) e^{imt} dt + 4a^2 \int_0^{2\pi} \sin^2\left(\frac{t}{2}\right) \ln\left(\frac{4}{e}\sin^2\frac{t}{2}\right) e^{imt} dt \\ &= 4a^2(2\ln a + 1).0 + 4a^2 \frac{\pi}{|m|(m^2-1)} \\ &= \frac{4a^2\pi}{|m|(m^2-1)} \end{aligned}$$

elde edilir.

Önerme 2.0.11 $0 \leq x \leq 1$ *için*

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi mx)}{m^2} = \pi^2(x^2 - x + \frac{1}{6})$$

dir. $x = 0$ *özel durumunda Euler formülü adı verilen*

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

eşitliği sağlanır.

İspat. $\alpha < a < b < \beta$ reel sayıları verilsin ve $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ sürekli türevlenebilir bir fonksiyon olsun. $m \in \mathbb{R}$ için

$$F(m) = \int_a^b f(x)\sin(mx)dx$$

olsun.

İlk olarak $\lim_{|m|\to\infty} F(m) = 0$ olduğunu ve yakınsaklığın $a, b \in [\alpha, \beta]$ içinde düzgün olduğunu göstereceğiz. $t \neq 0$ için kısmi integrasyonla

$$F(m) = -f(x)\frac{\cos(mx)}{m}\bigg|_a^b + \frac{1}{m}\int_a^b f'(x)\cos(mx)dx$$

elde edilir. f ve f', $[\alpha, \beta]$ üzerinde sürekli olduklarından her $x \in [\alpha, \beta]$ için $|f(x)| \leq M$ ve $|f'(x)| \leq M$ olacak biçimde bir $M > 0$ sabiti vardır. Buradan

$$|F(m)| \leq \frac{2M}{|m|} + \frac{M(b-a)}{|m|}$$

elde edilirki bu ilk olarak ispat edeceğimiz diye belirttiğimiz kısmı bize verir.

$x \in (0,1)$ olsun.

$$2\pi \int_{\frac{1}{2}}^{x} \cos(2\pi mx)dx = \frac{\sin(2\pi mx)}{m}$$

ve

$$\sum_{m=1}^{n} \cos(2\pi mx) = \frac{\sin((2n+2)\pi x)}{2\sin(\pi x)} - \frac{1}{2}$$

olduğundan

$$\sum_{m=1}^{n} \frac{\sin(2\pi mx)}{m} = 2\pi \int_{\frac{1}{2}}^{x} \frac{\sin((2n+1)\pi t)}{2\sin(\pi t)}dt - \pi \left(x - \frac{1}{2})\right)$$

elde edilir.

Üstteki eşitlikte sağ taraftaki ilk toplam $n \to \infty$ için sıfıra yakınsar. Buradan

$0 < x < 1$

için

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi mx)}{m} = \pi \left(\frac{1}{2} - x)\right)$$

bulunur ve bu seri her $\delta > 0$ için $[\delta, 1-\delta]$ aralığı üzerinde düzgün yakınsaktır. Şimdi Önerme nin ispatını tamamlayacağız.

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi mx)}{m^2}$$

olsun. Yukarıda türevlerin serisinin $\pi^2(2x-1)$ ye yakınsadığını ve bu yakınsaklığın yerel (lokal) olarak düzgün olduğunu gördük. Bu nedenle $0 < x < 1$ için

$f'(x) = \pi^2(2x-1)$

yani $f(x) = \pi^2(x^2 - x) + c$ bulunur. Geriye $c = \dfrac{\pi^2}{6}$ olduğunu göstermek kaldı. f yi tanımlayan seri $[0,1]$ üzerinde düzgün yakınsaktır ve her $m \in N$ için

$$\int_0^1 \cos(2\pi mx)dx = 0$$

olduğundan

$$0=\sum_{m=1}^{\infty}\int_0^1\frac{\cos(2\pi mx)}{m^2}dx=\int_0^1 f(x)dx=\frac{\pi^2}{3}-\frac{\pi^2}{2}-c=\frac{\pi^2}{6}-c$$

bulunurki buradan $c=\dfrac{\pi^2}{6}$ elde edilir.

Sonuç 2.0.12

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin^2\pi mx}{m^2}=\frac{\pi^2}{2}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2})$$

İspat. Önerme 2.0.11 den

$$\begin{aligned}\pi^2(x^2-x+\frac{1}{6}) &= \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos(2\pi mx)}{m^2}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(1-2\sin^2\pi mx)}{m^2}\\ &= \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}-2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin^2\pi mx}{m^2}\\ &= \frac{\pi^2}{6}-2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin^2\pi mx}{m^2}\end{aligned}$$

ve buradan

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin^2\pi mx}{m^2}=\frac{\pi^2}{2}(x-x^2)$$

bulunur. $x=\dfrac{1}{n}$ alınırsa

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin^2\pi mx}{m^2}=\frac{\pi^2}{2}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2})$$

elde edilir.

Önerme 2.0.13

$$\sum_{i=1}^{n}\cos\left(\frac{2m\pi}{n}(i-1)\right)t_k^{i-1}=\begin{cases}\dfrac{n}{2} & , \quad m\equiv k\,(\operatorname{mod} n)\ \textit{veya}\ m\equiv n-k\,(\operatorname{mod} n)\ \textit{ise}\\ 0 & , \quad \textit{diğer durumda}\end{cases} \tag{2.9}$$

İspat. Toplam

$$
\begin{aligned}
2\sum_{i=1}^{n}\cos\left(\frac{2m\pi}{n}(i-1)\right)t_k^{i-1} &= \sum_{i=1}^{n}\left(e^{\frac{2im\pi}{n}(i-1)}+e^{\frac{-2im\pi}{n}(i-1)}\right)e^{\frac{2ik\pi}{n}(i-1)}\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left\{e^{\frac{2i\pi}{n}(i-1)(m+k)}+e^{\frac{2i\pi}{n}(i-1)(k-m)}\right\}\\
&= \sum_{i=1}^{n}e^{\frac{2i\pi}{n}(i-1)(m+k)}+\sum_{i=1}^{n}e^{\frac{2i\pi}{n}(i-1)(k-m)}\\
&= \sum\nolimits_1+\sum\nolimits_2
\end{aligned}
$$

şeklinde yazılabilir.

Eğer $m \equiv n-k \pmod{n}$ ise bazı $x \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $m = nx+n-k$ olduğundan

$$
\begin{aligned}
\sum\nolimits_1 &= \sum_{i=1}^{n}e^{\frac{2i\pi}{n}(i-1)(m+k)}\\
&= \sum_{i=1}^{n}e^{\frac{2i\pi}{n}(i-1)(nx+n-k+k)}\\
&= \sum_{i=1}^{n}e^{\frac{2i\pi}{n}(i-1)n(x+1)}\\
&= \sum_{i=1}^{n}e^{2i\pi(i-1)(x+1)}\\
&= \sum_{i=1}^{n}1=n
\end{aligned}
$$

dir ve diğer durumda

$$
\sum\nolimits_1=\frac{1-e^{2\pi i(m+k)}}{1-e^{\frac{2i\pi}{n}(m+k)}}=0
$$

dır.

Benzer şekilde, eğer $m \equiv k \pmod{n}$ ise bazı $y \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $m = ny+k$ olduğundan

$$
\begin{aligned}
\sum\nolimits_2 &= \sum_{i=1}^{n}e^{\frac{2i\pi}{n}(i-1)(k-m)}\\
&= \sum_{i=1}^{n}e^{\frac{2i\pi}{n}(i-1)(k-ny-k)}\\
&= \sum_{i=1}^{n}e^{-i2\pi y(i-1)}\\
&= \sum_{i=1}^{n}1=n
\end{aligned}
$$

olur ve diğer durumda

$$\sum\nolimits_2 = \frac{1 - e^{2\pi i(k-m)}}{1 - e^{\frac{2i\pi}{n}(k-m)}} = 0$$

dır. Sonuç buradan elde edilir.

Önerme 2.0.14

$$\sum_{i=1}^{n} \sin\left(\frac{2m\pi}{n}(i-1)\right) t_k^{i-1} = \begin{cases} \dfrac{in}{2} & , \quad m \equiv k (\operatorname{mod} n) \\ -\dfrac{in}{2} & , \quad m \equiv n - k (\operatorname{mod} n) \\ 0 & , \quad \textit{aksi halde} \end{cases} \tag{2.10}$$

İspat. Toplam

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \sin\left(\frac{2m\pi}{n}(i-1)\right) t_k^{i-1} &= \frac{1}{2i} \sum_{i=1}^{n} \left(e^{\frac{2im\pi}{n}(i-1)} - e^{\frac{-2im\pi}{n}(i-1)}\right) e^{\frac{2ik\pi}{n}(i-1)} \\ &= \frac{1}{2i} \sum_{i=1}^{n} \left\{ e^{\frac{2i\pi}{n}(i-1)(m+k)} - e^{\frac{2i\pi}{n}(i-1)(k-m)} \right\} \\ &= \frac{1}{2i} \left\{ \sum_{i=1}^{n} e^{\frac{2i\pi}{n}(i-1)(m+k)} - \sum_{i=1}^{n} e^{\frac{2i\pi}{n}(i-1)(k-m)} \right\} \\ &= \frac{1}{2i} \left(\sum\nolimits_1 - \sum\nolimits_2\right) \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir.

Eğer $m \equiv n - k\,(\operatorname{mod} n)$ ve $x \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $m = nx + n - k$ olduğundan

$$\begin{aligned} \sum\nolimits_1 &= \sum_{i=1}^{n} e^{\frac{2i\pi}{n}(i-1)(m+k)} \\ &= \sum_{i=1}^{n} e^{\frac{2i\pi}{n}(i-1)(nx+n-k+k)} \\ &= \sum_{i=1}^{n} e^{\frac{2i\pi}{n}(i-1)n(x+1)} \\ &= \sum_{i=1}^{n} e^{2i\pi(i-1)(x+1)} \\ &= \sum_{i=1}^{n} 1 = n \end{aligned}$$

dir ve

$$\sum_{i=1}^{n} \sin\left(\frac{2m\pi}{n}(i-1)\right) t_k^{i-1} = \frac{\sum_1}{2i} = \frac{n}{2i} = -\frac{ni}{2}$$

diğer durumda

$$\sum\nolimits_1 = \frac{1-e^{2\pi i(m+k)}}{1-e^{\frac{2i\pi}{n}(m+k)}} = 0$$

dır.

Benzer şekilde, eğer $m \equiv k(\bmod n)$ ve $y \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $m = ny + k$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\sum\nolimits_2 &= \sum_{i=1}^{n} e^{\frac{2i\pi}{n}(i-1)(k-m)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} e^{\frac{2i\pi}{n}(i-1)(k-ny-k)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} e^{-i2\pi y(i-1)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} 1 = n
\end{aligned}$$

olur ve

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \sin\left(\frac{2m\pi}{n}(i-1)\right) t_k^{i-1} &= \frac{-\sum_2}{2i} \\
&= \frac{-n}{2i} \\
&= \frac{-ni}{2i^2} \\
&= \frac{-ni}{-2} \\
&= \frac{ni}{2}
\end{aligned}$$

diğer durumda

$$\sum\nolimits_2 = \frac{1-e^{2\pi i(k-m)}}{1-e^{\frac{2i\pi}{n}(k-m)}} = 0$$

dır.

Bölüm 3

Laplace ve Helmholtz Denklemlerinin Sınır İntegral Operatörleri Üzerine

3.1 Giriş

Birçok matematiksel fizik ve mühendislik sınır değer problemleri şimdi, ilgilenilen bölgenin sınırı üzerinde integral denklemleri şeklinde yaygın olarak yeniden formüle edilmektedir (Brebbia, Telles and Wrobel 1984, Chen and Zhou 1992, Amini, Harris and Wilton 1992, Martin and Rizzo 1989). Çok sayıda önemli sınır integral ope ratörüne ait niteleyici özelliği açık bir şekilde ortaya koymak suretiyle, pseudodiferensiyel operatörlerden olan birçok soyut kavramı mühendislik topluluğu için erişilebilir yapmayı umut ediyoruz.

İki boyutlu uzaydaki Γ kapalı düzgün eğrileri boyunca birçok sınır integral denklemi $\mathbf{p} \in \Gamma$ için,

$$\mathcal{A} : \mathcal{H}^{r}(\Gamma) \longrightarrow \mathcal{H}^{r-\alpha}(\Gamma)$$

bir α dereceli lineer kuvvetli eliptik pseudodiferensiyel operatör olmak üzere

$$\mathcal{A}\phi(p) = f(\mathbf{p})$$

şeklinde yazılabilir (Wendland 1990). Bunun anlamı $\mathcal{A}$ pseudodiferensiyel operatörünün m inci $\lambda_m(\mathcal{A})$ özdeğeri büyük m için $\mathcal{O}(m^{\alpha})$ şeklinde davranır. Pseudodiferensiyel kavramı, operatörlerin aynı cebiri içinde diferensiyel ve integral operatörlerin çalışılmasına izin verir.

Γ nın iç veya dış bölgesindeki Laplace denkleminin çözümleri ile bağlantılı olarak,

$$G(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = -\frac{1}{2\pi} \ln |\mathbf{p} - \mathbf{q}|$$

ifadesi Laplacian operatörün temel çözümü, $\sigma \in \mathcal{H}^r(\Gamma)$ bir sınır yoğunluk fonksiyonu ve $n_{\mathbf{q}}$, Γ ye $\mathbf{q}$ daki dış doğru normali göstermek üzere

$$(\mathcal{L}\sigma)(\mathbf{p}) = \int_\Gamma G(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \sigma(\mathbf{q}) \, d\Gamma_{\mathbf{q}} \tag{3.1}$$

ve

$$(\mathcal{M}\sigma)(\mathbf{p}) = \int_\Gamma \frac{\partial G}{\partial n_{\mathbf{q}}} (\mathbf{p}, \mathbf{q}) \sigma(\mathbf{q}) \, d\Gamma_{\mathbf{q}} \tag{3.2}$$

tek katlı ve çift katlı potansiyel operatörlerini elde ederiz. Burada ilgilenilen diğer operatörler $\mathcal{L}$ nin teğetsel türevi, bir Cauchy tekil operatörü ve $\mathcal{M}$ nin normal türevi, bir integro diferensiyeli ya da bir hipertekil operatördür.

Bu çalışmada sınır integral operatörlerin niteleyici özellikleri ve Laplace ve Helmholtz denklemlerinin çözümlerinden elde edilen farklılıkları üzerine çalışacağız. Γ nın bir çember olduğu durum için Laplace potansiyel operatörlerinin spektral özelliklerinin kısa ve birleşik çıkarımını sunacağız. Her bir durumda bunların derecelerini pseudodife rensiyel operatörler şeklinde açıkça belirteceğiz. Bir kompakt perturbasyon görüşü genellikle bu sonuçları, düzgün sınırlar üzerindeki operatörlerin niteleyici davranışları nın çalışmasında kullanmamıza olanak sağlar (Sloan 1992). Bu niteleyici sonuçların harmonik dalga hareketlerinden ortaya çıkan Helmholtz potansiyel operatörleri durumuna taşınması bu bölümde tartışılmıştır. Yine bu bölümde, bir çember üzerindeki parçalı sabit yaklaşımları göz önünde bulundurarak, Laplace durumu için bu operatörlerin ayrık formuna ait elemanlar için analitik ifadeler çıkarabildik ve işlem sırasında birçok yeni ve ilginç özdeşliklere ulaştık. Ayrıca, bu sınır elemanı matrislerinin özdeğerleri ve özvektörleri için yeni ve kesin ifadeler elde ederiz. Bu tür sonuçlar ilk tipteki ya da hipertekil denklemlerin çözümleri için sınır elemanı sistemlerinin ön şartları için kullanılabilir (Maines 1995).

Özetle, fikirleri yerleştirmek adına $\mathcal{K}$ sembolü

$$(\mathcal{K}\sigma)(\mathbf{p}) = \int_\Gamma K(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \sigma(\mathbf{q}) \, d\Gamma_{\mathbf{q}}, \qquad \mathbf{p} \in \Gamma$$

şeklinde tanımlanan genel bir sınır integral operatörünü ifade etsin.

$$d\Gamma_{\mathbf{q}} = \sqrt{\left(\frac{dz_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_2}{dt}\right)^2} dt = |z'(t)| \, dt$$

ve Jacobian $z' \neq 0$ olmak üzere ve

$$\mathbf{p} = (p_1, p_2)^T = (z_1(s), z_2(s))^T$$

ve

$$\mathbf{q} = (q_1, q_2) = (z_1(t), z_2(t))^T$$

olmak üzere Γ nın düzgün bir 2π periyodik parametreleştirilmesi

$$z : [0, 2\pi] \longrightarrow \Gamma$$

şeklinde verilsin. Bu parametreleştirmeden yararlanarak, $K_z(s,t)$ ve $\sigma_z(z(t))|z'(t)|$ belli tanımları ile

$$\begin{aligned} (\mathcal{K}\sigma)(\mathbf{p}) &= \int_0^{2\pi} K(\mathbf{z}(s), \mathbf{z}(t))\, \sigma(\mathbf{z}(t))\, |\mathbf{z}'(t)|\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} K_z(s,t)\, \sigma_z(t)\, dt, s \in [0, 2\pi] \end{aligned} \tag{3.3}$$

yazılabiliriz. Burada $\mathbf{z}$ alt simgesini herhangi bir karışıklık yaratmadığı durumlarda K_z çekirdeğinden ve σ_z yoğunluk fonksiyonundan kaldıracağız.

3.2 Bir Çember Üzerindeki Laplace İntegral Ope ratörleri

Buradaki önemli bir gözlem, Γ nın bir çember olması halinde, ortaya çıkan sonuç ope ratörlerinin döndürmeler altında değişmez $K(s-t)$ konvolüsyon tipindeki 2π periyodik çekirdeklere sahip olmasıdır. Sonuç olarak her $m \in \mathbb{Z}$ için

$$\mathcal{K}\nu_m = \lambda_m v_m$$

dir, burada

$$i = \sqrt{-1}$$

ve özfonksiyonlar

$$v_m(s) = e^{ims}$$

dir ve özdeğerler

$$\lambda_m = \int_0^{2\pi} e^{-imt} K(t)\, dt$$

ile verilir.

Dolayısıyla bu operatörlerin hareketleri için Fourier serisi gösterimlerini bu bölümde geliştirmekteyiz. Bunun için 2π periyodik v fonksiyonunu kendisinin

$$v(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \hat{v}(m)\, e^{imt} \tag{3.4}$$

kompleks Fourier serisine açalım, burada Fourier katsayıları

$$\hat{v}(m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} v(s) e^{-ims} ds$$

ile verilir.

$\mathcal{H}^r[0, 2\pi]$ Sobolev uzayını yani

$$\|v\|^2_{\mathcal{H}^r} = |\hat{v}(0)|^2 + \sum_{m \neq 0} |m|^{2r} |\hat{v}(m)|^2 \tag{3.5}$$

nin sonlu olduğu 2π periyodik v fonksiyonlarının tamamının oluşturduğu uzayı ele alalım (Kress 1989). $\mathcal{H}^0[0, 2\pi]$ Sobolev uzayı basit olarak $\mathcal{L}^2[0, 2\pi]$ dir.

$$r < 0$$

için, $\mathcal{H}^r$ içindeki fonksiyonlar, (3.4) denkleminin içinde verilen seri gösterimleri genel olarak klasik anlamda yakınsak olmadıkları için, dağılım fonksiyonları ya da genelleşti rilmiş fonksiyonlar olarak düşünülmelidir. Dağılımların Sobolev uzaylarına ilişkin örnekler ileride ki kısımlarda rastlayacağız.

3.2.1 Tek Katlı Potansiyel

Γ çemberinin parametreleştirilmesi

$$\mathbf{p} = (p_1, p_2) = (a\cos\theta_p, a\sin\theta_p)$$

olsun. O zaman

$$|z'(t)| = a$$

dir ve

$$\mathbf{q} = (q_1, q_2) = (a\cos\theta_q, a\sin\theta_q)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
r &= |\mathbf{p}-\mathbf{q}| = |(p_1,p_2)-(q_1,q_2)| = |(a\cos\theta_p, a\sin\theta_p)-(a\cos\theta_q, a\sin\theta_q)| \\
&= \sqrt{(a\cos\theta_p - a\cos\theta_q)^2 + (a\sin\theta_p - a\sin\theta_q)^2} \\
&= \sqrt{a^2\left(\cos^2\theta_p - 2\cos\theta_p\cos\theta_q + \cos^2\theta_q\right) + a^2\left(\sin^2\theta_p - 2\sin\theta_p\cos\theta_q + \sin^2\theta_q\right)} \\
&= \sqrt{a^2\left(\cos^2\theta_p + \sin^2\theta_p + \cos^2\theta_q + \sin^2\theta_q - 2\left(\cos\theta_p\cos\theta_q + \sin\theta_p\cos\theta_q\right)\right)} \\
&= \sqrt{a^2\left(1+1-2\left(\cos\left(\theta_p-\theta_q\right)\right)\right)} \\
&= \sqrt{a^2\left(2-2\left(\cos\left(\theta_p-\theta_q\right)\right)\right)} \\
&= \sqrt{2a^2\left(1-\left(1-2\sin^2\left(\frac{\theta_p-\theta_q}{2}\right)\right)\right)} \\
&= \sqrt{2a^2\left(1-1+2\sin^2\left(\frac{\theta_p-\theta_q}{2}\right)\right)} \\
&= \sqrt{4a^2\sin^2\left(\frac{\theta_p-\theta_q}{2}\right)} \\
&= 2a\left|\sin\left(\frac{\theta_p-\theta_q}{2}\right)\right|
\end{aligned}$$

dir.

Tek katlı operatör

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}v)(\mathbf{p}) &\equiv (\mathcal{L}v)(\theta_p) \\
&= -\frac{a}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left\{2a\left|\sin\frac{\theta_p-\theta_q}{2}\right|\right\} v(\theta_q)\, d\theta_q \qquad (3.6)
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir.

$A \geq 0$ olmak üzere

$$\ln A = \frac{1}{2}\ln A^2$$

özelliğini kullanarak

$$\begin{aligned}
\ln\left\{2a\left|\sin\left(\frac{\theta_p-\theta_q}{2}\right)\right|\right\} &= \frac{1}{2}\ln\left\{\left(2a\sin\left(\frac{\theta_p-\theta_q}{2}\right)\right)^2\right\} \\
&= \frac{1}{2}\ln\left\{4a^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right\}
\end{aligned}$$

bulunur ve (3.4) denklemini (3.6) denkleminde yerine yazdığımızda

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}v)(t) &= \frac{-a}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{m\in\mathbb{Z}}\hat{v}(m)\,e^{imt}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\ln\left\{4a^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right\}e^{im\theta}d\theta \\ &= -\frac{a}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{m\in\mathbb{Z}}\hat{v}(m)\,e^{imt}\int_0^{2\pi}\ln\left\{4a^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right\}e^{im\theta}d\theta \qquad (3.7)\end{aligned}$$

eşitliğini elde ederiz.

Bu integraller

$$\begin{aligned}\phi_1(s) &= -\frac{1}{2}\ln\left\{4\sin^2\frac{s}{2}\right\} = -\frac{1}{2}\ln 2\left\{2\sin^2\frac{s}{2}\right\} \\ &= -\frac{1}{2}\ln 2\,(1-\cos s) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cos(ns) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}2\cos(ns) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}\left(\cos(ns)+i\sin(ns)+\cos(ns)-i\sin(ns)\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}\left(e^{ins}+e^{-ins}\right) \qquad (3.8)\end{aligned}$$

şeklindeki $\phi_1(s)\,(0 < s < 2\pi)$ çift 2π periyodik fonksiyonunun Fourier kosinüs seri açılımını kullanılarak hesaplanabilir (Gradshteyn and Ryzhik 1980).

Aslında

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\phi_1(\theta)\,e^{im\theta}d\theta &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_0^{2\pi}\left(e^{i(n+m)\theta}+e^{i(m-n)\theta}\right)d\theta \\ &= \frac{\pi}{|m|}, \qquad m\neq 0\end{aligned}$$

dadır. Yukarıda integral ve toplamın sırası değiştirilebilir çünkü integrasyonun etkisi paydaya ek bir n kuvveti getirir ve bu sayede asıl seriden daha hızlı yakınsayan bir seri elde edilmiş olur (Jeffreys H and Jeffreys B 1956).

(2.3) ve (3.7) denklemlerinden gerekli,

$$(\mathcal{L}v)(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{\sum_{m\neq 0}\frac{a\hat{v}(m)}{2|m|}e^{imt} - a\ln(a)\,\hat{v}(0)\right\} \qquad (3.9)$$

Fourier açılımını elde ederiz (Yan and Sloan 1988, Sloan 1992, Kress and Sloan 1993). (3.9) denkleminden aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 3.2.1 *$m = 0, 1, 2, \ldots$ için $e^{\pm imt}$ özfonksiyonlarına karşılık gelen $\mathcal{L}$ nin özde ğerleri*

$$\lambda_m(\mathcal{L}) = \begin{cases} -a \ln a & , \quad m = 0 \\ \dfrac{a}{2\,|m|} & , \quad m \neq 0 \end{cases} \tag{3.10}$$

ile verilir.

Tek katlı operatör $a = 1$ için tekildir. Bu durumda Γ nın sonlu-ötesi çapı 1 e eşit olur (Sloan 1992). $\lambda_m(\mathcal{L})$ özdeğerlerinin $\mathcal{O}(m^{-1})$ davranışı $\mathcal{L}$ nin esasen bir integral operatörü gibi davrandığını gösterir. Bu nedenle, $\forall r \in \mathbb{R}$ için $\mathcal{L} : \mathcal{H}^r(\Gamma) \longrightarrow \mathcal{H}^{r+1}(\Gamma)$ ifadesi $a = -1$ dereceli düzgün bir pseudodiferensiyel operatördür.

3.2.2 Çift Katlı Potansiyel

Çift katlı potansiyel

$$\frac{\partial G}{\partial n_{\mathbf{q}}} = \frac{\partial G}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial n_{\mathbf{q}}} \quad \text{ve} \quad \frac{\partial r}{\partial n_{\mathbf{q}}} = \boldsymbol{\nabla} r . n_q = -\frac{\mathbf{r}.n_{\mathbf{q}}}{r}$$

olmak üzere (3.2) denklemi ile tanımlanır.
Bir çember üzerinde, (3.2) denklemi

$$\begin{aligned} (\mathcal{M}v)(\theta_p) &= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{2\pi r}\right)\left(\frac{r}{2a}\right) av\,(\theta_q)\, d\theta_q \\ &= \int_0^{2\pi} -\frac{1}{4\pi} v\,(\theta_q)\, d\theta_q = -\frac{\hat{v}\,(0)}{2\sqrt{2\pi}} \end{aligned} \tag{3.11}$$

halini alır.
(3.11) denkleminden aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 3.2.2 *$m \in \mathbb{Z}$ için e^{imt} özfonksiyonlarına karşılık gelen $\mathcal{M}$ nin özdeğerler*

$$\lambda_m(\mathcal{M}) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2} & , \quad m = 0 \\ 0 & , \quad m \neq 0 \end{cases} \tag{3.12}$$

şeklindedir.

Sabit özfonksiyonuna karşılık gelen sıfırdan farklı $\mathcal{M}$ özdeğeri ile ilgili sonuç iyi bilinen Gauss integralidir ve

$$(\mathcal{M}1)\,(\theta_P) = -\,(1/2)\,, \quad \theta_P \in \Gamma$$

şeklinde yazılır. Bu sonuç tüm düzgün Γ lar için geçerlidir (Mikhlin 1970).

(3.11) ya da (3.12) denklemleri $\mathcal{M}$ nin sonsuz düzgün operatör olduğunu gösterir. Bir başka deyişle $\forall r \in \mathbb{R}$ için

$$\mathcal{M} : \mathcal{H}^r(\Gamma) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(\Gamma)$$

dır. En son verilen sonuç tüm kapalı $\mathcal{C}^\infty$ sınırları için geçerlidir (Chen 1992).

3.2.3 Hilbert Operatörü

Bir çember üzerinde tek katlı bir operatörün teğetsel türevi

$$(d/d\theta)(\mathcal{L}v)(\theta) = (a/2)(\mathcal{P}v)(\theta)$$

eşitliğini sağlar Burada $\mathcal{P}$ Hilbert operatörü

$$\begin{aligned}(\mathcal{P}v)(\theta) &= \frac{1}{2}\overline{\int}_{-\pi}^{\pi} v(\omega)\cot\frac{\omega-\theta}{2}d\omega \\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\theta-\epsilon} v(\omega)\cot\frac{\omega-\theta}{2}d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{\theta+\epsilon}^{\pi} v(\omega)\cot\frac{\omega-\theta}{2}d\omega\right\} \qquad (3.13)\end{aligned}$$

dir (Kress 1989, Mikhlin 1970). Yukarıda $\overline{\int}$ sembolü, tekil integralin Cauchy esas değeri manasında anlaşılmasını ifade eder.

(3.4) denkleminde yer alan v nin Fourier açılımını (3.13) denkleminde yerine yazarsak ve

$$\cot(t/2) = d/dt(\ln\sin^2(t/2))$$

olduğunu dikkate aldığımızda, (2.4) deklemini de kullanarak

$$\begin{aligned}(\mathcal{P}v)(\theta) &= \lim_{\epsilon\to 0}\Big(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\theta-\epsilon}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{m\in\mathbb{Z}}\hat{v}(m)\,e^{im\frac{\omega-\theta}{2}}\cot\frac{\omega-\theta}{2}d\omega \\ &\quad + \frac{1}{2\pi}\int_{\theta+\epsilon}^{\pi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{m\in\mathbb{Z}}\hat{v}(m)\,e^{im\frac{\omega-\theta}{2}}\cot\frac{\omega-\theta}{2}d\omega\Big) \\ &= -\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\sum_{m=-\infty}^{-1}\hat{v}(m)\,e^{im\theta} + \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\sum_{m=1}^{\infty}\hat{v}(m)\,e^{im\theta} \qquad (3.14)\end{aligned}$$

olduğunu gösterebiliriz.

(3.14) denklemi aslında, fonksiyonların dağılım anlamında görülmesiyle geçerli olan (3.9) denkleminin terim terim türevi alınarak elde edilir (Zemanian 1965).

Eğer $v(\theta)$ fonksiyonu çift bir fonksiyon ise; yani $m = 1, 2, \ldots$ için $\hat{v}(m) = \hat{v}(-m)$ ise o zaman $(\mathcal{P}v)(\theta)$ nın tek olduğu ve eğer $v(\theta)$ fonksiyonu tek bir fonksiyon ise $(\mathcal{P}v)(\theta)$

nın çift olduğunu göstereceğiz.

Teorem 3.2.3 *$v(\theta)$ çift ise $(\mathcal{P}v)(\theta)$ tek ve $v(\theta)$ tek ise $(\mathcal{P}v)(\theta)$ çifttir.*

İspat: İlk olarak $v(\theta)$ çift ise $\hat{v}(m)=\hat{v}(-m)$ dir. Buna göre

$$\begin{aligned}
(\mathcal{P}v)(-\theta) &= -\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\sum_{m=1}^{\infty}\hat{v}(-m)\,e^{i(-m)(-\theta)}+\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\sum_{m=-\infty}^{-1}\hat{v}(-m)\,e^{i(-m)(-\theta)} \\
&= -\left[\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\sum_{m=1}^{\infty}\hat{v}(m)\,e^{im\theta}-\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\sum_{m=-\infty}^{-1}\hat{v}(m)\,e^{im\theta}\right] \\
&= -\left[-\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\sum_{m=-\infty}^{-1}\hat{v}(m)\,e^{im\theta}+\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\sum_{m=1}^{\infty}\hat{v}(m)\,e^{im\theta}\right] \\
&= -(\mathcal{P}v)(\theta)
\end{aligned}$$

olduğundan $(\mathcal{P}v)(\theta)$ tektir.
Şimdi $v(\theta)$ tek ise $\hat{v}(-m)=-\hat{v}(m)$ dir. Buna göre

$$\begin{aligned}
(\mathcal{P}v)(-\theta) &= -\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\sum_{m=1}^{\infty}\hat{v}(-m)\,e^{i(-m)(-\theta)}+\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\sum_{m=-\infty}^{-1}\hat{v}(-m)\,e^{i(-m)(-\theta)} \\
&= \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\sum_{m=1}^{\infty}\hat{v}(m)\,e^{im\theta}-\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\sum_{m=-\infty}^{-1}\hat{v}(m)\,e^{im\theta} \\
&= -\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\sum_{m=-\infty}^{-1}\hat{v}(m)\,e^{im\theta}+\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\sum_{m=1}^{\infty}\hat{v}(m)\,e^{im\theta} \\
&= (\mathcal{P}v)(\theta)
\end{aligned}$$

olduğundan $(\mathcal{P}v)(\theta)$ çifttir.
(3.14) denkleminden aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 3.2.4 *$\mathcal{P}$ nin e^{imt} özfonksiyonlarına karşılık gelen özdeğerleri*

$$\lambda_m(\mathcal{P})=\begin{cases} -i & , \quad m<0 \\ 0 & , \quad m=0 \\ +i & , \quad m>0 \end{cases} \tag{3.15}$$

şeklindedir.

(3.15) denkleminden $\mathcal{P}:\mathcal{H}^r(\Gamma)\longrightarrow\mathcal{H}^r(\Gamma)$ derecesi $\alpha=0$ olan bir pseudodiferensiyel operatördür.

3.2.4 Hipertekil Operatör

Çift katlı potansiyelin normal türevi olan $\mathcal{N}$ hipertekil operatörü

$$\begin{aligned}(\mathcal{N}v)(\mathbf{p}) &= \frac{\partial}{\partial n_{\mathbf{p}}}\int_{\Gamma}\frac{\partial G}{\partial n_{\mathbf{q}}}(\mathbf{p},\mathbf{q})\,v(\mathbf{q})\,d\Gamma_{\mathbf{q}} \\ &= \overline{\overline{\int}}_{\Gamma}\frac{\partial^2 G}{\partial n_{\mathbf{p}}\partial n_{\mathbf{q}}}(\mathbf{p},\mathbf{q})v(\mathbf{q})\,d\Gamma_{\mathbf{q}}\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\overline{\overline{\int}}$ sembolü, çekirdeğin şimdi $\mathcal{O}(r^{-2})$ formunda kuvvetli bir tekilliğe sahip olmasından dolayı, integralin Hadamard sonlu kısım anlamında anlaşılması gerektiğini belirtir. Daha kesin ifade etmek gerekirse, $B_{p,\epsilon}$, $\mathbf{p}$ civarında Γ üzerinde uzunluğu ϵ olan bir aralık olmak üzere

$$\overline{\overline{\int}}_{\Gamma}\frac{\partial^2 G}{\partial n_p\partial n_q}(\mathbf{p},\mathbf{q})v(\mathbf{q})\,d\Gamma_{\mathbf{q}} = \lim_{\epsilon\to 0}\left\{\int_{\Gamma - B_{p,\epsilon}}\frac{\partial^2 G}{\partial n_{\mathbf{p}}\partial n_{\mathbf{q}}}(\mathbf{p},\mathbf{q})v(\mathbf{q})d\Gamma_{\mathbf{q}} - \frac{v(\mathbf{p})}{\pi\epsilon}\right\} \tag{3.16}$$

dir. (3.13) ve (3.16) denklemlerinin, hesaplama için daha uygun olan $\epsilon \to 0$ limitini gerektirmeyen alternatif tanımları Amini and Maines (1996) da verilmiştir. Maue (1949) ve Mitzner (1966) $\mathcal{N}$ yi normal türevlerin yerine teğetsel türevleri içeren aşağıda belirtilen formda yeniden yazmışlardır (Burton and Miller 1971, Martin and Rizzo 1989).

$$(\mathcal{N}v)(\mathbf{p}) = -\frac{\partial}{\partial t_{\mathbf{p}}}\overline{\int}_{\Gamma}\frac{\partial G}{\partial t_{\mathbf{q}}}(\mathbf{p},\mathbf{q})v(\mathbf{q})d\Gamma_{\mathbf{q}}$$

öyleki bu ifade $\mathcal{N}$ nin bir Cauchy esas değer integralinin türevi olarak davrandığını gösterir.

Yarıçapı a olan bir çember durumunda, t teğetsel ve s yay uzunluğunu göstermek üzere

$$dt \equiv ds = a d\theta$$

dır. Böylece

$$(\mathcal{N}v)(\theta_p) = -\frac{1}{4\pi a}\frac{d}{d\theta_p}\overline{\int}_{0}^{2\pi}\cot\left(\frac{\theta_p - \theta_q}{2}\right)v(\theta_q)\,d\theta_q \tag{3.17}$$

elde edilir.

Yani, bir çember üzerinde, $\mathcal{N}$

$$(\mathcal{N}v)(\theta) = \frac{1}{2a}\frac{d}{d\theta}(\mathcal{P}v)(\theta) \tag{3.18}$$

ile verilen Hilbert operatörünün türevi gibi davranır.
(3.17) denklemindeki integral işareti altında türev alarak

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{N}v)\left(\theta_p\right) &= -\frac{1}{4\pi a}\frac{d}{d\theta_p}\overline{\int}_0^{2\pi}\cot\left(\frac{\theta_p-\theta_q}{2}\right)v\left(\theta_q\right)d\theta_q \\
&= -\frac{1}{4\pi a}\overline{\overline{\int}}_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{\sin^2\left(\dfrac{\theta_p-\theta_q}{2}\right)}v\left(\theta_q\right)d\theta_q \\
&= \frac{1}{8\pi a}\overline{\overline{\int}}_0^{2\pi}\csc^2\left(\frac{\theta_p-\theta_q}{2}\right)v\left(\theta_q\right)d\theta_q
\end{aligned}
\tag{3.19}
$$

operatörün hipertekil formunu elde ederiz. (3.14) denklemini (3.18) denklemi içinde kullanarak

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{N}v)(t) &= \frac{1}{2a}\frac{d}{dt}(\mathcal{P}v)(t) \\
&= \frac{1}{2a}\frac{d}{dt}\left[-\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\sum_{m=-\infty}^{-1}\hat{v}(m)e^{imt}+\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\sum_{m=1}^{\infty}\hat{v}(m)e^{imt}\right] \\
&= \frac{1}{2a}\left[-\frac{i}{\sqrt{2\pi}}im\sum_{m=-\infty}^{-1}\hat{v}(m)e^{imt}+\frac{i}{\sqrt{2\pi}}im\sum_{m=1}^{\infty}\hat{v}(m)e^{imt}\right] \\
&= = \frac{1}{2a}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}m\sum_{m=-\infty}^{-1}\hat{v}(m)e^{imt}-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}m\sum_{m=1}^{\infty}\hat{v}(m)e^{imt}\right] \\
&= \frac{1}{2a}\left[\frac{-1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{m\neq 0}|m|\,\hat{v}(m)e^{imt}\right] \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{m\neq 0}\frac{|m|}{2a}\hat{v}(m)e^{imt}
\end{aligned}
\tag{3.20}
$$

bulunur.
Daha önce olduğu gibi fonksiyonların dağılım anlamında görüldüğünde (3.14) deklemi nin terim terim türevinin alınması geçerli olacaktır (Zemanian 1965). (3.20) denkleminden aşağıdaki teoremi elde ederiz.

Teorem 3.2.5 *$\mathcal{N}$ nin $e^{\pm imt}$ özfonksiyonlarına karşılık gelen özdeğerleri*

$$
\lambda_m(\mathcal{N}) = \begin{cases} 0 & , \quad m=0 \\ -\dfrac{|m|}{2a} & , \quad m\neq 0 \end{cases}
\tag{3.21}
$$

şeklindedir.
(3.21) denklemi, $\mathcal{N}$ nin, $\forall r\in\mathbb{R}$ için $\mathcal{N}:\mathcal{H}^r(\Gamma)\longrightarrow\mathcal{H}^{r-1}(\Gamma)$ ifadesini gerçekleyen bir kez daha türev operatörü olduğunu ifade eder.

3.3 Çember Üzerindeki Helmholtz İntegral Operatörleri

Zamana bağlı harmonik dalga hareketini yöneten $(\boldsymbol{\nabla}^2 + k^2)\phi = 0$ Helmholtz denkleminin sınır integral çözümü, pratik açıdan çok fazla kullanışlıdır (Amini, Harris and Wilton 1992). Bu operatörün ana parçası Laplacian operatörüdür.

Hangi tek katlı, çift katlı ve hipertekil Helmholtz potansiyel operatörlerinin bunların Laplacian durumlarından elde edileceğini açık bir şekilde vereceğiz.

Helmholtz operatörü için genel çözüm

$r = |\mathbf{p} - \mathbf{q}|$

ve $k \in \mathbb{R}$ dalga sayısı olmak üzere

$$G_k(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \equiv G_k(r) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(kr) \tag{3.22}$$

ile verilir. $J_n$ve Y_n sırasıyla birinci ve ikinci çeşit Bessel fonksiyonları olmak üzere

$H_n^{(1)}(z) = J_n(z) + iY_n(z)$

ifadesi tamsayı dereceli Hankel fonksiyonunu gösterir. Hankel fonksiyonlarının aşağıda belirtilen özelliklerine ihtiyacımız olacak (Abramowitz and Stegun 1974).

$C = [(2/\pi)(\ln 2 - \gamma)] + i$

ve

$\gamma = 0.5772...$

Euler sabiti olmak üzere

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dz} H_0^{(1)}(z) & = & -H_1^{(1)}(z) \\ \dfrac{d}{dz} H_1^{(1)}(z) & = & H_0^{(1)}(z) - \dfrac{H_1^{(1)}(z)}{z} \\ iH_0^{(1)}(z) & = & -\dfrac{2}{\pi}\ln z + C + \dfrac{z^2}{4\pi}\ln z^2 + \mathcal{O}(z^2), \ z \to 0 \\ iH_1^{(1)}(z) & = & \dfrac{2}{\pi z} - \dfrac{z}{\pi}\ln z + \mathcal{O}(z), \ z \to 0 \end{cases} \tag{3.23}$$

dir.

3.3.1 Tek Katlı Helmholtz Potansiyeli

Tek katlı Helmholtz potansiyel

$$(\mathcal{L}_k\sigma)(\mathbf{p}) = \int_\Gamma G_k(\mathbf{p},\mathbf{q})\sigma(\mathbf{q})\,d\Gamma_{\mathbf{q}},\ p\in\Gamma$$

ile tanımlanır.

D sabiti yalnızca k ya bağlı olmak üzere (3.22) ve (3.23) denklemlerinden

$$G_k(r) = \frac{i}{4}H_0^{(1)}(kr) = -\frac{1}{2\pi}\ln r + D + \frac{k^2}{16\pi}r^2\ln r^2 + \mathcal{O}\left(r^2\right) \tag{3.24}$$

açılımını elde ederiz. (3.24) denkleminin sağ tarafındaki ilk terim, Laplace denklemi için Green fonksiyonudur. Sabit çekirdek fonksiyonu sonsuz düzgün operatör tanımlar ve biraz sonra $\mathcal{H}^s \longrightarrow \mathcal{H}^{s+3}$ ye $r^2\ \ln r^2$ çekirdekli bir $\mathcal{R}$ operatörü için

$$\lambda_m(\mathcal{R}) = \mathcal{O}\left(m^{-3}\right)$$

olduğunu göstereceğiz. (3.24) denkleminden $\mathcal{L}_k : \mathcal{H}^s \longrightarrow \mathcal{H}^{s+1}$ ve nitel olarak $\mathcal{L}_k$ nın davranışı $\mathcal{L}$ ninkine benzerdir.

Γ sınırı bir çember olduğu zaman Helmholtz potansiyel operatörleri özfonksiyonları olarak $m\in\mathbb{Z}$ için e^{imt} fonksiyonlarına da sahiptir. Bu durumda $\mathcal{L}_k$ nın özdeğerlerinin, J_m ve H_m, m derecesinden Bessel ve Hankel fonksiyonları olmak üzere,

$$\lambda_m(\mathcal{L}_k) = \{(i\pi/2)\,J_m(ka)\,H_m(ka)\}$$

şeklinde olduğunu açıkça bulabiliriz (Kress 1985). Amini (1993) daki sonuçlara uygun olarak J_m ve H_m nin uygun açılımları için

$$\lambda_m(\mathcal{L}_k) = \lambda_m(\mathcal{L}) + \mathcal{O}\left(k^2/m^3\right)$$

şeklinde olduğunu açık olarak gösterir.

3.3.2 Çift Katlı Helmholtz Potansiyeli

(3.2) denkleminde olduğu gibi Helmholtz çift katlı potansiyel operatörü

$$(M_k\sigma)(\mathbf{p}) = \int_\Gamma \frac{\partial G}{\partial n_{\mathbf{q}}}(\mathbf{p},\mathbf{q})\,\sigma(\mathbf{q})\,d\Gamma_{\mathbf{q}}\quad p\in\Gamma$$

şeklinde tanımlanır.

Bir çember üzerinde çekirdeği

$$\frac{\partial G_k}{\partial n_{\mathbf{q}}} = \frac{\partial r}{\partial n_{\mathbf{q}}}\frac{\partial G_k}{\partial r} = \left(\frac{r}{2a}\right)\left(-\frac{ik}{4}H_1^{(1)}(kr)\right) = -\frac{ikr}{8a}H_1^{(1)}(kr) \tag{3.25}$$

ile verilir.
Böylece, (3.23) denkleminden

$$\frac{\partial G_k}{\partial n_{\mathbf{q}}} = -\frac{1}{4\pi} + \frac{k^2}{16\pi}r^2\ln r^2 + \mathcal{O}\left(r^2\right) \tag{3.26}$$

elde ederiz. Burada sabit terim bir sonsuz düzgün operatör olan $\mathcal{M}$ operatörünün çekirdeği olarak belirlenir. Bu nedenle $\mathcal{M}_k$, $\mathcal{R}$ operatörü ile yönlendirilir. $\mathcal{R}$ nin dönüşüm özelliklerini ortaya koymak amacıyla önerme (2.0.10) de $r = 2a\sin\frac{t}{2}$ olmak üzere $I = \int_0^{2\pi} r^2 \ln r^2 e^{imt}dt$ ile verilen I integrallerine ihtiyacımız olacaktır.
(3.26) denklemi ve (2.8) denklemi birlikte, sabit k için

$$\lambda_m\left(\mathcal{M}_k\right) \simeq \frac{a^2k^2}{4}\frac{1}{|m|\left(m^2-1\right)} = \mathcal{O}\left(m^{-3}\right) \;\; m \to \pm\infty \tag{3.27}$$

olduğunu gösterir.
Bu durumda (3.27) denklemi, $\mathcal{R}$ ve dolayısıyla $\mathcal{M}_k$ bir çember üzerinde $\forall s \in \mathbb{R}$ için $\mathcal{H}^s \longrightarrow \mathcal{H}^{s+3}$ dönüşümü olduğunu gösterir. Burada, bir çember üzerinde $\mathcal{M}_k$ operatörünün, derecesi -1 olan genel bir düzgün sınır üzerinde olduğundan daha düzgün olduğunu ifade edelim. Kress (1985) ten $\mathcal{M}_k$ nın özdeğerleri

$$\lambda_m\left(\mathcal{M}_k\right) = -\left(1/2\right) + \left(i\pi/2\right)kJ_m'\left(ka\right)H_m\left(ka\right)$$

eşitliği ile verilir. Burada Amini (1993) deki J_m've H_m nin uygun asimptotik açılımları (3.27) denklemine benzer sonuçlar verir.

3.3.3 Hipertekil Helmholtz Operatörü

$\mathcal{M}_k$ nın normal türevi $\mathcal{N}_k$ ile gösterilir ve

$$\left(\mathcal{N}_k\sigma\right)(\mathbf{p}) = \frac{\partial}{\partial n_{\mathbf{p}}}\int_\Gamma \frac{\partial G_k}{\partial n_{\mathbf{q}}}(\mathbf{p},\mathbf{q})\,\sigma(\mathbf{q})\,d\Gamma_{\mathbf{q}}, \quad \mathbf{p}\in\Gamma$$

dir.
Laplacian durumunda olduğu gibi, sonuç hipertekil integrali Hadamard sonlu parçası anlamında yorumlamak koşuluyla türevi integralin içine alabiliriz. Bu durumda

$$\frac{\partial^2 r}{\partial n_{\mathbf{p}}\partial n_{\mathbf{q}}} = -\frac{1}{r}\left(n_{\mathbf{p}}.n_{\mathbf{q}} + \frac{\partial r}{\partial n_{\mathbf{q}}}\frac{\partial r}{\partial n_{\mathbf{q}}}\right)$$

olmak üzere çekirdek

$$\frac{\partial^2 G_k}{\partial n_{\mathbf{p}} \partial n_{\mathbf{q}}} = \frac{\partial G_k}{\partial r} \frac{\partial^2 r}{\partial n_{\mathbf{p}} \partial n_{\mathbf{q}}} + \frac{\partial^2 G_k}{\partial r^2} \frac{\partial r}{\partial n_{\mathbf{p}}} \frac{\partial r}{\partial n_{\mathbf{q}}}$$

şeklinde yazılabilir.

Bir çember üzerinde bu ifade

$$\frac{\partial^2 r}{\partial n_{\mathbf{p}} \partial n_{\mathbf{q}}} = -\frac{1}{r} \left(1 - \frac{r^2}{4a^2}\right)$$

haline dönüşür ve (3.23) denklemini kullanarak

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 G_k}{\partial n_{\mathbf{p}} \partial n_{\mathbf{q}}} &= \frac{ik}{4r} H_1^{(1)}(kr) - \frac{ik^2 r^2}{16a^2} H_0^{(1)}(kr) \\ &= \frac{1}{2\pi r^2} - \frac{k^2}{4\pi} \ln r + \mathcal{O}(1), \ r \to 0 \end{aligned} \tag{3.28}$$

bulunur.

Böylece $\mathcal{N}_k$, $+1$ derecesinden $\mathcal{N}$ operatörü ((3.19) denklemi) ile domine edilir iken eşitliğin sağ tarafındaki ikinci terim -1 derecesinden tek katlı Laplace operatörüne karşılık gelir. Ayrıca bu durum uygulamada $\mathcal{N}_k \sigma$ yi, Burton (1973) da tavsiye edildiği üzere

$$(\mathcal{N}_k \sigma)(\mathbf{p}) = \left(\mathcal{N}_k - \mathcal{N} - \frac{k^2}{2}\mathcal{L}\right) \sigma(\mathbf{p}) + (\mathcal{N}\sigma)(\mathbf{p}) + \frac{k^2}{2} (\mathcal{L}\sigma)(\mathbf{p})$$

formunda hesaplamamız gerekmektedir.

$\mathcal{N}_k$ nın özdeğerleri Kress (1985) de

$$\lambda_m(\mathcal{N}_k) = (i\pi/2)(ka)^2 J_m'(ka) H_m'(ka)$$

olarak verilmektedir ve Amini (1993) deki J_m' ve H_m' nin uygun açılımları, bizim burada yaptığımız analizle uyum halinde olan sonuçları verir.

3.4 Ayrık (Discrete) Sınır İntegral Operatörleri

Sınır eleman yöntemlerinde $\mathcal{A}\phi = f$ operatör denklemi genellikle, ϕ nin, parçalı polinom yaklaşımına dayanan düzenleme yöntemlerini kullanarak, $A_n \phi_n = f_n$ şeklindeki denklemlerin tam lineer sistemini elde edecek şekilde farklılaştırılır. Genelde sınır eleman matrisinin elemanları, $\{\mathbf{p}_i\}$ düzenleme noktaları ve $\{v_j\}$ kompakt destekli taban polinom fonksiyonları olmak üzere

$$(A_n)_{i,j} = \int_{\Gamma} K(\mathbf{p}_i, \mathbf{q})\, v_j(\mathbf{q})\, d\Gamma_{\mathbf{q}}$$

denklemi ile verilir. Bu kısımda matrisin elemanlarını analitik olarak hesaplamak amacıyla sadece parçalı sabit taban fonksiyonlarını ele alacağız. Düzenleme noktaları olarak her bir elemanın orta noktaları alınacaktır.
Sonuçlar nitelik olarak Helmholtz operatörleri ile aynı olacağından, analizimizi Laplacian operatörleri ile sınırlı tutacağız. Sınırın özel geometrisi ve parçalı sabit yaklaşım uzayımızın doğasından, **L**, **M** ve **N** sınır eleman matrislerinin tümü simetriktir ve dolanır iken **P** yalnızca dolanır olduğuna dikkat ediniz. Bir Toeplitz matrisinin her bir köşegen üzerinde sabit girişlere sahip olmasıyla karakterize edildiğini hatırlayınız. Bir başka ifade ile bazı $\alpha_{-n+1}, \alpha_{-n+2}, \cdots, \alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1}$ skalerleri için $A_{i,j} = \alpha_{j-i}$ dir. Dolanır bir matris, satırların çevresine sarıldığı bir Toeplitz matrisidir. Başka bir deyişle, $\alpha_{-1} = \alpha_{n-1}, \alpha_{-2} = \alpha_{n-2}, \cdots \alpha_{-n+1} = \alpha_1$ olan bir Toeplitz matrisidir. Bu nedenle dolanır özellikteki bir matris sadece birinci satırı, $(A_{11}, A_{12}, \cdots, A_{1n})$, ile tamamen belirlenir.

3.4.1 Parçalı Sabit Taban Fonksiyonları

Çemberi n eşit parçaya bölelim ve parçalı sabit taban fonksiyonlarını $\theta_i = i\boldsymbol{\Delta}\theta$

$i = 1, \ldots, n$

ve

$\boldsymbol{\Delta}\theta = (2\pi/n)$

olmak üzere

$$v_i(s) = \begin{cases} 1 & , \quad s \in [\theta_{i-1}, \theta_i] \\ 0 & , \quad \text{diğer durumda} \end{cases}$$

ile tanımlayalım. Bu kısımda v_i ifadesini ayrık operatörlerin spektral analizine uygun olacak şekilde yazalım ve bazı yararlı özdeşlikler elde edelim.
v_i nin karmaşık Fourier katsayıları, $m \neq 0$ ve

$$\begin{aligned} q &= m\boldsymbol{\Delta}\theta \\ &= m(\theta_i - \theta_{i-1}) \\ &= m\theta_i - m\theta_{i-1} \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
\hat{v}_i(m) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\theta_{i-1}}^{\theta_i} e^{-ims}ds = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{i}{m}\left(e^{-im\theta_i}-e^{-im\theta_{i-1}}\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{i}{m}e^{-im\theta_i}\left(1-\frac{e^{-im\theta_{i-1}}}{e^{-im\theta_i}}\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{i}{m}e^{-im\theta_i}\left(1-e^{-im\theta_{i-1}-(-im\theta_i)}\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{i}{m}e^{-im\theta_i}\left(1-e^{-im\theta_{i-1}+im\theta_i}\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{i}{m}e^{-im\theta_i}\left(1-e^{i(m\theta_i-m\theta_{i-1})}\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{i}{m}e^{-im\theta_i}(1-e^{iq}) \qquad (3.29)
\end{aligned}$$

ile verilir ve $m=0$ için ve $\mathbf{\Delta}\theta = \dfrac{2\pi}{n}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\hat{v}_i(0) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\theta_{i-1}}^{\theta_i} e^{-i.0.s}ds = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\theta_{i-1}}^{\theta_i} ds\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\theta_i-\theta_{i-1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathbf{\Delta}\theta\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{2\pi}{n}\right) = \frac{2\pi\sqrt{2\pi}}{n2\pi}\\
&= \frac{\sqrt{2\pi}}{n}
\end{aligned}$$

dir.

$$\begin{aligned}
\left|e^{-im\theta_i}-e^{-im\theta_{i-1}}\right|^2 &= \left|\cos m\theta_i - i\sin m\theta_i - \cos m\theta_{i-1} + i\sin m\theta_{i-1}\right|^2\\
&= \left|\cos m\theta_i - \cos m\theta_{i-1} + i\left(\sin m\theta_{i-1} - \sin m\theta_i\right)\right|^2\\
&= \left(\sqrt{(\cos m\theta_i - \cos m\theta_{i-1})^2 + (\sin m\theta_{i-1} - \sin m\theta_i)^2}\right)^2\\
&= \cos^2 m\theta_i + \sin^2 m\theta_i + \cos^2 m\theta_{i-1} + \sin^2 m\theta_{i-1}\\
&\quad -2(\cos m\theta_i\cos m\theta_{i-1} + \sin m\theta_i \sin m\theta_{i-1})\\
&= 1+1-2\cos m\left(\theta_i-\theta_{i-1}\right)\\
&= 2\left(1-\cos m\left(\theta_i-\theta_{i-1}\right)\right)\\
&= 4\sin^2 m\left(\frac{\theta_i-\theta_{i-1}}{2}\right)\\
&= 4\sin^2 m\left(\frac{\frac{2\pi}{n}}{2}\right)\\
&= 4\sin^2\left(\frac{m\pi}{n}\right)
\end{aligned}$$

olduğundan (3.29) denkleminden

$$
\begin{aligned}
|\hat{v}_i(m)|^2 &= \left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right|^2 \left|\frac{i}{m}\right|^2 \left|e^{-im\theta_i} - e^{-im\theta_{i-1}}\right|^2 \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\sqrt{\frac{1}{m^2}}\right)^2 4\sin^2\left(\frac{m\pi}{n}\right) \\
&= \frac{2}{\pi}|m|^{-2}\sin^2\left(\frac{m\pi}{n}\right) \qquad (3.30)
\end{aligned}
$$

elde edilir ve (3.5) denklemini kullanarak

$$
\begin{aligned}
\|v_i\|^2_{\mathcal{H}^r} &= \left|\frac{\sqrt{2\pi}}{n}\right|^2 + \sum_{m\neq 0}|m|^{2r}\frac{2}{\pi}|m|^{-2}\sin^2\left(\frac{m\pi}{n}\right) \\
&= \frac{2\pi}{n^2} + \sum_{m=-\infty}^{1}|m|^{2r}\frac{2}{\pi}|m|^{-2}\sin^2\left(\frac{m\pi}{n}\right) + \sum_{m=1}^{\infty}|m|^{2r}\frac{2}{\pi}|m|^{-2}\sin^2\left(\frac{m\pi}{n}\right) \\
&= \frac{2\pi}{n^2} + \sum_{m=1}^{\infty}m^{2r}\frac{2}{\pi}m^{-2}\sin^2\left(\frac{m\pi}{n}\right) + \sum_{m=1}^{\infty}m^{2r}\frac{2}{\pi}m^{-2}\sin^2\left(\frac{m\pi}{n}\right) \\
&= \frac{2\pi}{n^2} + 2\sum_{m=1}^{\infty}m^{2r}\frac{2}{\pi}m^{-2}\sin^2\left(\frac{m\pi}{n}\right) \\
&= \frac{2\pi}{n^2} + \frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}m^{-2(-r+1)}\sin^2\left(\frac{m\pi}{n}\right) \\
&= \frac{2\pi}{n^2} + \frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^{2(1-r)}}\sin^2\left(\frac{m\pi}{n}\right) \qquad (3.31)
\end{aligned}
$$

buluruz.

$$
\left|\frac{1}{m^{2(1-r)}}\sin^2\left(\frac{m\pi}{n}\right)\right| = \left|\frac{1}{m^{2(1-r)}}\right|\left|\sin^2\left(\frac{m\pi}{n}\right)\right| \leq \left|\frac{1}{m^{2(1-r)}}\right|
$$

olduğundan ve $\sum_{m=1}^{\infty} m^{-2(1-r)}$ serisi $r < 1/2$ için sonlu olduğundan (yakınsaklık için) karşılaştırma testinden dolayı $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^{2(1-r)}}\sin^2\left(\frac{m\pi}{n}\right)$ seriside $r < 1/2$ ise sonludur. Başka bir deyişle her $r < 1/2$ için $v_i \in \mathcal{H}^r$ dir.

Şimdi (3.31) denkleminde $r = \dfrac{1}{2}$ yazarak $v_i \notin \mathcal{H}^{(1/2)}$ olduğunu yani serinin ıraksadığını göstereceğiz. (3.31) denkleminde $r = \dfrac{1}{2}$ yazılırsa

$$
\begin{aligned}
\|v_i\|^2_{\mathcal{H}^r} &= \frac{2\pi}{n^2} + \frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^{2(1-\frac{1}{2})}}\sin^2\left(\frac{m\pi}{n}\right) \\
&= \frac{2\pi}{n^2} + \frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\sin^2\left(\frac{m\pi}{n}\right)
\end{aligned}
$$

olur ve

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\sin^2\left(\frac{m\pi}{n}\right)$$

ifadesinde yarım açı kullanarak

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\sin^2\left(\frac{m\pi}{n}\right) &= \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\left(\frac{1-\cos\left(\frac{2m\pi}{n}\right)}{2}\right)\\
&= \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos\left(\frac{2m\pi}{n}\right)\right)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}-\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\cos\left(\frac{2m\pi}{n}\right) \qquad (3.32)
\end{aligned}$$

elde edilir. (3.32) denkleminin sağ tarafındaki ilk toplam sınırsız harmonik seridir ve ϕ_1 (3.8) denklemi içinde olduğu gibi tanımlanmak üzere, ikinci toplam $\phi_1\left(2\pi/n\right)$ ifadesine yakınsar. Bu $v_i \notin \mathcal{H}^{(1/2)}$ olduğunu gösterir.

$r = 0$ için (3.31) denklemi

$$\|v_i\|_{\mathcal{H}^0}^2 = \frac{2\pi}{n^2}+\frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}\sin^2\left(\frac{m\pi}{n}\right) \qquad (3.33)$$

şekline dönüşür.

Ancak $\mathcal{L}^2 = \mathcal{H}^0$ uzayı üzerindeki normların standart tanımından

$$\|v_i\|_{\mathcal{L}^2}^2 = \int_{\theta_{i-1}}^{\theta_i} |v_i|^2\, d\theta = \theta_i - \theta_{i-1} = \boldsymbol{\Delta}\theta = \frac{2\pi}{n}$$

olduğunu görürüz. Bu sonucu (3.33) denkleminin içinde kullanarak

$$\frac{2\pi}{n} = \frac{2\pi}{n^2}+\frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}\sin^2\left(\frac{m\pi}{n}\right)$$

ve buradan daha sonraki bölümlerde ihtiyaç duyulacak olan

$$S := \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}\sin^2\left(\frac{m\pi}{n}\right) = \frac{\pi^2}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right) \qquad (3.34)$$

serisinin değerini buluruz. (3.34) eşitliğinin bir başka ispatı Sonuç (2.0.12) verilmiştir.

Şimdi bu çalışmadaki analizimize uygun olacak şekilde v_i nin Fourier serisini hesapla yalım:

$$\begin{aligned}
\left(e^{im(s-\theta_i)} - e^{-im(s-\theta_i)}\right) &= \cos m(s-\theta_i) + i\sin m(s-\theta_i) \\
&\quad -(\cos m(s-\theta_i) - i\sin m(s-\theta_i)) \\
&= \cos m(s-\theta_i) + i\sin m(s-\theta_i) \\
&\quad -\cos m(s-\theta_i) + i\sin m(s-\theta_i) \\
&= 2i\sin m(s-\theta_i)
\end{aligned}$$

ve benzer şekilde

$$\left(e^{im(s-\theta_i+\boldsymbol{\Delta}\theta)} - e^{-im(s-\theta_i+\boldsymbol{\Delta}\theta)}\right) = 2i\sin m(s-\theta_i+\boldsymbol{\Delta}\theta)$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
v_i(s) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \hat{v}_i(m)\, e^{ims} \\
&= \frac{1}{n} + \frac{i}{2\pi} \sum_{m\neq 0} \frac{1}{m} \left(e^{-im\theta_i} - e^{-im\theta_{i-1}}\right) e^{ims} \\
&= \frac{1}{n} + \frac{i}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left[\left(e^{im(s-\theta_i)} - e^{-im(s-\theta_i)}\right) - \left(e^{im(s-\theta_i+\boldsymbol{\Delta}\theta)} - e^{-im(s-\theta_i+\boldsymbol{\Delta}\theta)}\right)\right] \\
&= \frac{1}{n} + \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left[\sin m\,(s-\theta_i+\boldsymbol{\Delta}\theta) - \sin m\,(s-\theta_i)\right] \qquad (3.35)
\end{aligned}$$

bulunur. Açıkça $s_{1/2} = (1/2)(\theta_i + \theta_{i-1}) = (\pi/n)(2i-1)$ civarında v_i bir çift fonksiyondur, böylece $s = s_{1/2} + \theta$ alınırsa $\boldsymbol{\Delta}\theta = \theta_i - \theta_{i-1} = \dfrac{2\pi}{n}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
& \sin m\left(s_{1/2} + \theta - \theta_i + \boldsymbol{\Delta}\theta\right) - \sin m\left(s_{1/2} + \theta - \theta_i\right) \\
= \;& \sin m\left(\frac{\theta_i}{2} + \frac{\theta_{i-1}}{2} + \theta - \theta_i + \theta_i - \theta_{i-1}\right) - \sin m\left(\frac{\theta_i}{2} + \frac{\theta_{i-1}}{2} + \theta - \theta_i\right) \\
= \;& \sin m\left(\frac{\theta_i}{2} - \frac{\theta_{i-1}}{2} + \theta\right) - \sin m\left(\frac{\theta_{i-1}}{2} - \frac{\theta_i}{2} + \theta\right) \\
= \;& \sin m\left(\frac{1}{2}(\theta_i - \theta_{i-1}) + \theta\right) - \sin m\left(-\frac{1}{2}(\theta_i - \theta_{i-1}) + \theta\right) \\
= \;& \sin m\left(\frac{1}{2}\frac{2\pi}{n} + \theta\right) - \sin m\left(-\frac{1}{2}\frac{2\pi}{n} + \theta\right) \\
= \;& \sin m\left(\frac{\pi}{n} + \theta\right) - \sin m\left(\theta - \frac{\pi}{n}\right) \\
= \;& 2\sin m\left(\frac{\frac{\pi}{n} + \theta - \left(\theta - \frac{\pi}{n}\right)}{2}\right) \cos m\left(\frac{\frac{\pi}{n} + \theta + \left(\theta - \frac{\pi}{n}\right)}{2}\right) \\
= \;& 2\sin\left(\frac{m\pi}{n}\right)\cos(m\theta)
\end{aligned}$$

olduğundan

$$
\begin{aligned}
v_i\left(s_{1/2}+\theta\right) &= \frac{1}{n}+\frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\left[\sin m\left(s_{1/2}+\theta-\theta_i+\boldsymbol{\Delta}\theta\right)-\sin m\left(s_{1/2}+\theta-\theta_i\right)\right] \\
&= \frac{1}{n}+\frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\sin\left(\frac{m\pi}{n}\right)\cos\left(m\theta\right) \qquad (3.36)
\end{aligned}
$$

bulunur.

3.4.2 Ayrık Tek ve Çift Katlı Operatörler

$\mathcal{L}$ tek katlı operatörünü ayrıklaştıran, $\mathbf{L}$ sınır eleman matrisinin elemanlarını bulmak için düzenleme noktalarındaki $\left(\mathcal{L}v_i\right)(s)$ ifadelerine ihtiyaç duyarız. (3.9) denkleminden

$$
\hat{w}_i\left(0\right)=-a\ln a\hat{v}_i\left(0\right)\ \text{ ve } \hat{w}_i\left(m\right)=\frac{a\hat{v}_i\left(m\right)}{2\left|m\right|}\quad m\neq 0 \qquad (3.37)
$$

olmak üzere

$$
\left(\mathcal{L}v_i\right)(s)\equiv w_i\left(s\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{m\in\mathbb{Z}}\hat{w}_i\left(m\right)e^{ims} \qquad (3.38)
$$

elde ederiz.

Dolayısıyla şimdi (3.5) ve (3.30) denklemlerinden

$$
\begin{aligned}
\left\|w_i\right\|^2_{\mathcal{H}^r} &= \left|\hat{w}_i\left(0\right)\right|^2+\sum_{m\neq 0}\left|m\right|^{2r}\left|\hat{w}_i\left(m\right)\right|^2 \\
&= \frac{2\pi}{n^2}\left(a\ln a\right)^2+\frac{a^2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^{2(2-r)}}\sin^2\left(\frac{m\pi}{n}\right)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Burada seri $4-2r>1$ ise $r<3/2$ için yakınsaktır ve $\mathcal{L}:\mathcal{H}^r\longrightarrow\mathcal{H}^{r+1}$ sonucu ile tutarlıdır. Özellikle $r=1$ için, (3.34) denklemi kullanılarak

$$
\begin{aligned}
\left\|w_i\right\|^2_{\mathcal{H}^1} &= \frac{2\pi}{n^2}\left(a\ln a\right)^2+\frac{a^2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}\sin^2\left(\frac{m\pi}{n}\right) \\
&= \frac{2\pi}{n^2}a^2\left(\ln a\right)^2+\frac{a^2}{\pi}\frac{\pi^2}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right) \\
&= \frac{2\pi}{n^2}a^2\left(\ln a\right)^2+\frac{a^2\pi}{2n}-\frac{a^2\pi}{2n^2} \\
&= \frac{4\pi a^2\left(\ln a\right)^2+a^2\pi n-a^2\pi}{2n^2} \\
&= \frac{a^2\pi}{2n^2}\left\{4\left(\ln a\right)^2+n-1\right\} \qquad (3.39)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Şimdi $(\mathcal{L}v_i)(s)$ yi bu kısımdaki özdeğer hesaplamalarına uygun olacak şekilde yazalım. (3.29), (3.38) ve (3.37) denklemlerini kullanarak ve birtakım basit işlemler ile

$$\begin{aligned}
\left[e^{-im\theta_i} - e^{-im\theta_{i-1}}\right] e^{ims} &= \left[\left(e^{im(s-\theta_i)} - e^{im(s-\theta_{i-1})}\right) - \left(e^{-im(s-\theta_i)} - e^{-im(s-\theta_{i-1})}\right)\right] \\
&= [(\cos m\,(s-\theta_i) + i\sin m\,(s-\theta_i) \\
&\quad - \cos m\,(s-\theta_{i-1}) - i\sin m\,(s-\theta_{i-1})) \\
&\quad -(\cos m\,(s-\theta_i) - i\sin m\,(s-\theta_i) \\
&\quad - (\cos m\,(s-\theta_{i-1}) - i\sin m\,(s-\theta_{i-1})))] \\
&= [\cos m\,(s-\theta_i) + i\sin m\,(s-\theta_i) - \cos m\,(s-\theta_{i-1}) \\
&\quad -i\sin m\,(s-\theta_{i-1}) - \cos m\,(s-\theta_i) + i\sin m\,(s-\theta_i) \\
&\quad + \cos m\,(s-\theta_{i-1}) - i\sin m\,(s-\theta_{i-1})] \\
&= [2i\sin m\,(s-\theta_i) - 2i\sin m(s-\theta_{i-1})] \\
&= 2i[2\sin m(\frac{s-\theta_i-s+\theta_{i-1}}{2})\cos m(\frac{s-\theta_i+s-\theta_{i-1}}{2})] \\
&= -4i\left[\sin m\left(\frac{\theta_i-\theta_{i-1}}{2}\right)\cos m\left(\frac{\theta_i+\theta_{i-1}}{2}-s\right)\right] \\
&= -4i\left[\sin\frac{m\pi}{n}\cos m\left(\frac{\pi}{n}(2i-1)-s\right)\right]
\end{aligned}$$

ve böylece

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}v_i)(s) &= -\frac{a\ln a}{n} + \frac{ai}{4\pi}\sum_{m\neq 0}\frac{1}{|m|}\frac{1}{m}\left[e^{-im\theta_i} - e^{-im\theta_{i-1}}\right]e^{ims} \\
&= -\frac{a\ln a}{n} + \frac{ai}{4\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}[\left(e^{im(s-\theta_i)} - e^{im(s-\theta_{i-1})}\right) \\
&\quad - \left(e^{-im(s-\theta_i)} - e^{-im(s-\theta_{i-1})}\right)] \\
&= -\frac{a\ln a}{n} + \frac{a}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}\sin\left(\frac{m\pi}{n}\right)\cos m\left(\frac{\pi}{n}(2i-1)-s\right)
\end{aligned}$$

denklemini elde ederiz.

$(\mathcal{L}v_i)(s)$, $s = s_{1/2}$ de bir maksimuma sahiptir ve değeri

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}v_i)\left(s_{1/2}\right) &= -\frac{a\ln a}{n} + \frac{a}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}\sin\left(\frac{m\pi}{n}\right)\cos m\left(\frac{\pi}{n}(2i-1) - s_{1/2}\right) \\
&= -\frac{a\ln a}{n} + \frac{a}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}\sin\left(\frac{m\pi}{n}\right)\cos m\left(\frac{\pi}{n}(2i-1) - \frac{\pi}{n}(2i-1)\right) \\
&= -\frac{a\ln a}{n} + \frac{a}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}\sin\left(\frac{m\pi}{n}\right) \qquad (3.40)
\end{aligned}$$

dir ve $s=\theta_{i-1}$ ve $s=\theta_i$ noktalarında süreklidir ve

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}v_i)(\theta_i) &= -\frac{a\ln a}{n}+\frac{a}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}\sin\left(\frac{m\pi}{n}\right)\cos m\left(\frac{\pi}{n}(2i-1)-\theta_i\right)\\
&= -\frac{a\ln a}{n}+\frac{a}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}\sin\left(\frac{m\pi}{n}\right)\cos m\left(\frac{1}{2}(\theta_i+\theta_{i-1})-\theta_i\right)\\
&= -\frac{a\ln a}{n}+\frac{a}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}\sin\left(\frac{m\pi}{n}\right)\cos m\left(\frac{\theta_i-\theta_{i-1}}{2}\right)\\
&= -\frac{a\ln a}{n}+\frac{a}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}\sin\left(\frac{m\pi}{n}\right)\cos m\left(\frac{\frac{2\pi}{n}}{2}\right)\\
&= -\frac{a\ln a}{n}+\frac{a}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}\sin\left(\frac{m\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{m\pi}{n}\right)\\
&= -\frac{a\ln a}{n}+\frac{a}{2\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}\sin\left(\frac{2m\pi}{n}\right)
\end{aligned}$$

dir.

L çembersel matrisi, $s=(\pi/n)$ birinci düzenleme noktası için $(\mathcal{L}v_i)(s)$ ye karşılık gelen matrisin, birinci satırı ile tamamen tanımlanır. Bu nedenle

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}v_i)\left(\frac{\pi}{n}\right) &= -\frac{a\ln a}{n}+\frac{a}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}\sin\left(\frac{m\pi}{n}\right)\cos m\left(\frac{\pi}{n}(2i-1)-\frac{\pi}{n}\right)\\
&= -\frac{a\ln a}{n}+\frac{a}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}\sin\left(\frac{m\pi}{n}\right)\cos m\frac{\pi}{n}(2i-1-1)\\
&= -\frac{a\ln a}{n}+\frac{a}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}\sin\left(\frac{m\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{2m\pi}{n}(i-1)\right) \qquad (3.41)
\end{aligned}$$

dir.

Bu bölümde son olarak, (3.11) denkleminden

$$(Mv_i)(s)=-\frac{1}{2n} \qquad (3.42)$$

eşitliğinin elde edileceğini belirtelim. Bu sonuç ayrıca, n tane elemanın arasını $-(1/2)$ ye bölerek Gauss integralinden de elde edilebilirdi. Bu durumda, çift katlı potansiyel operatörünün ayrıklaştırılışı olan **M** sınır eleman matrisi, tüm elemanları $-(1/2n)$ ye eşit rankı 1 olan bir matristir.

3.4.3 Ayrık Hilbert Operatörü

(3.14) ve (3.29) denklemlerini kullanarak, $\hat{p}_i(0) = 0$ ve $m \neq 0$ için

$$\hat{p}_i(m) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{|m|}(e^{-im\theta_i} - e^{-im\theta_{i-1}})$$

olmak üzere

$$(\mathcal{P}v_i)(s) = p_i(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{m\in\mathbb{Z}}\hat{p}_i(m)\, e^{ims}$$

elde edilir. (3.30) denklemi,

$$|\hat{p}_i(m)|^2 = |\hat{v}_i(m)|^2$$

olur. Böylece, $r < 1/2$ için sonlu olan

$$\|p_i\|^2_{\mathcal{H}^r} = \frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^{2(1-r)}}\sin^2\left(\frac{m\pi}{n}\right)$$

$\mathcal{P} : \mathcal{H}^r \longrightarrow \mathcal{H}^r$ ile uyumludur. Özellikle $r = 0$ için (3.34) denklemi kullanılarak

$$\begin{aligned}
\|p_i\|^2_{\mathcal{L}^2} &= \frac{4}{\pi}S = \frac{4}{\pi}\frac{\pi^2}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right) \\
&= 2\pi\left(\frac{n-1}{n^2}\right) \\
&= \frac{2\pi}{n^2}(n-1)
\end{aligned}$$

eşitliğini elde ederiz. Ayrıca,

$$\begin{aligned}
(\mathcal{P}v_i)(s) &= -\frac{1}{2\pi}\{\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}[e^{-im\theta_i} - e^{-im\theta_{i-1}}]e^{ims} - \sum_{m=-\infty}^{-1}\frac{1}{m}\left[e^{-im\theta_i} - e^{-im\theta_{i-1}}\right]e^{ims}\} \\
&= -\frac{1}{2\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\left\{\left(e^{+im(s-\theta_i)} + e^{-im(s-\theta_i)}\right) - \left(e^{im(s-\theta_i+\boldsymbol{\Delta}\theta)} + e^{-im(s-\theta_i+\boldsymbol{\Delta}\theta)}\right)\right\} \\
&= -\frac{1}{2\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\{(\cos m(s-\theta_i) + i\sin m(s-\theta_i) \\
&\quad + \cos m(s-\theta_i) - i\sin m(s-\theta_i)) \\
&\quad -(\cos m(s-\theta_i+\boldsymbol{\Delta}\theta) + i\sin m\,(s-\theta_i+\boldsymbol{\Delta}\theta) \\
&\quad + \cos m(s-\theta_i+\boldsymbol{\Delta}\theta) - i\sin m\,(s-\theta_i+\boldsymbol{\Delta}\theta))\} \\
&= -\frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\{\cos m\,(s-\theta_i) - \cos m\,(s-\theta_i+\boldsymbol{\Delta}\theta)\} \qquad (3.43)
\end{aligned}$$

yazabiliriz.

(3.43) denklemi

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{P}v_i)(s) &= -\frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\left\{-2\sin m\left(\frac{s-\theta_i+s-\theta_{i-1}}{2}\right)\sin m\left(\frac{s-\theta_i-s+\theta_{i-1}}{2}\right)\right\}\\
&= -\frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\left\{-2\sin m\left(\frac{2s-(\theta_i+\theta_{i-1})}{2}\right)\sin m\left(-\left(\frac{\theta_i-\theta_{i-1}}{2}\right)\right)\right\}\\
&= -\frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\left\{2\sin m\left(\frac{2s-\frac{2\pi}{n}(2i-1)}{2}\right)\sin m\left(\frac{\frac{2\pi}{n}}{2}\right)\right\}\\
&= -\frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\left\{\sin m\left(s-\frac{\pi}{n}(2i-1)\right)\sin m\left(\frac{\pi}{n}\right)\right\}\\
&= -\frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\left\{\sin m\left(-\left(\frac{\pi}{n}(2i-1)-s\right)\right)\sin\left(\frac{m\pi}{n}\right)\right\}\\
&= \frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\sin\left(\frac{m\pi}{n}\right)\sin m\left(\frac{\pi}{n}(2i-1)-s\right) \qquad (3.44)
\end{aligned}
$$

şeklinde de yazılabilir. Aynı zamanda

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{P}v_i)(s) &= \frac{1}{2\pi}\overline{\int}_{\theta_{i-1}}^{\theta_i}\cot\left(\frac{q-s}{2}\right)dq\\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\frac{1}{2}}\ln\left|\sin\left(\frac{q-s}{2}\right)\right|\Bigg|_{\theta_{i-1}}^{\theta_i}\\
&= \frac{1}{\pi}\left\{\ln\left|\sin\left(\frac{\theta_i-s}{2}\right)\right|-\ln\left|\sin\left(\frac{\theta_{i-1}-s}{2}\right)\right|\right\}\\
&= \frac{1}{\pi}\ln\left|\frac{\sin\left(\frac{\theta_i-s}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta_{i-1}-s}{2}\right)}\right| = \frac{1}{\pi}\ln\left|\frac{\sin\left(\frac{s-\theta_i}{2}\right)}{\sin\left(\frac{s-\theta_{i-1}}{2}\right)}\right| \qquad (3.45)
\end{aligned}
$$

olduğundan, bu ifade (3.44) denklemindeki toplamın değerini bulmamızı sağlar. Özel olarak, ilk düzenleme noktası $s=\dfrac{\pi}{n}$ için (3.43)-(3.45) denklemleri

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{P}v_i)(s)\left(\frac{\pi}{n}\right) &= -\frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\left\{\cos\frac{m\pi}{n}(2i-1)-\cos\frac{m\pi}{n}(2i-3)\right\}\\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\sin\left(\frac{m\pi}{n}\right)\sin\frac{2m\pi}{n}(i-1) \qquad (3.46)\\
&= \frac{1}{\pi}\ln\left|\frac{\sin\frac{\pi}{2n}(2i-1)}{\sin\frac{\pi}{2n}(2i-3)}\right|
\end{aligned}
$$

şeklini alır.

3.4.4 Ayrık Hipertekil Operatör

$$(\mathcal{N} v_i)(s) = z_i(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \hat{z}_i(m)\, e^{ims}$$

alınırsa, (3.20) denkleminden

$$\hat{z}_i(m) = \begin{cases} 0 & , \quad m = 0 \\ -\dfrac{|m|}{2a}\hat{v}_i(m) & , \quad \text{diğer durumda} \end{cases}$$

elde edilir.

(3.30) denklemi kullanıldığında

$$\begin{aligned} |\hat{z}_i(m)|^2 &= \frac{2}{\pi}\left|m^{-2}\right| \frac{|m^2|}{4a^2} \sin^2\left(\frac{m\pi}{n}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi a^2} \sin^2\left(\frac{m\pi}{n}\right) \end{aligned}$$

ve buradan $r < -(1/2)$ için yakınsak ve $\mathcal{N} : \mathcal{H}^r \longrightarrow \mathcal{H}^{r-1}$ ile uyumlu olan

$$\|z_i\|^2_{\mathcal{H}^r} = \frac{1}{\pi a^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{-2r}} \sin^2\left(\frac{m\pi}{n}\right)$$

elde edilir.

İlginçtir ki Dirac delta fonksiyonu, $r < -(1/2)$ olmak üzere bir 2π periyodik dağılım olarak $\mathcal{H}^r[0, 2\pi]$ Sobolev uzayına aittir. Eğer $0 \leq s \leq 2\pi$ için $\delta_i(s) = \delta(s - \theta_i)$ ise

$$\hat{\delta}_i(m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \delta(s - \theta_i)\, e^{-imt} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-im\theta_i}$$

dir ve (3.5) denklemini kullanarak ve

$$\begin{aligned} \left|e^{-im\theta_i}\right|^2 &= |\cos(m\theta_i) - i\sin(m\theta_i)|^2 \\ &= \left(\sqrt{\cos^2(m\theta_i) + \sin^2(m\theta_i)}\right)^2 \\ &= \left(\sqrt{1}\right)^2 = 1 \end{aligned}$$

eşitliğinden faydalanarak $r < -(1/2)$ için yakınsak olan

$$\|\delta_i\|^2_{\mathcal{H}^r} = \frac{1}{2\pi}\left(1 + \sum_{m\neq 0} |m|^{2r} \left|e^{-im\theta_i}\right|^2\right) = \frac{1}{2\pi}\left(1 + \sum_{m\neq 0} |m|^{2r}\right)$$

elde edilir. v_i lerin θ_{i-1} ve θ_i de süreksiz olması ve $\mathcal{N}$ nin türev yapısından dolayı, $\mathcal{N} v_i$ lerin Dirac delta fonksiyonelleri gibi aynı Sobolev uzayında yer almaları süpriz değildir.

(3.19) denkleminden ve sonlu kısım hesabından sonra, hipertekil operatörün değerini

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{N}v_i)(s) &= \frac{1}{8\pi a}\,\overline{\overline{\int}}_{\theta_{i-1}}^{\theta_i} \csc^2\left(\frac{q-s}{2}\right) dq \\
&= \frac{1}{8\pi a}\frac{1}{\frac{1}{2}}\left\{-\cot\left(\frac{q-s}{2}\right)\Bigg|_{\theta_{i-1}}^{\theta_i}\right\} \\
&= \frac{1}{4\pi a}\left\{-\cot\left(\frac{\theta_i-s}{2}\right)-\left(-\cot\left(\frac{\theta_{i-1}-s}{2}\right)\right)\right\} \\
&= \frac{1}{4\pi a}\left\{\cot\left(\frac{\theta_{i-1}-s}{2}\right)-\cot\left(\frac{\theta_i-s}{2}\right)\right\} \qquad (3.47)
\end{aligned}
$$

şeklinde buluruz. Bu denklem iyi tanımlıdır ve θ_{i-1} ve θ_i noktaları dışında düzgündür. Ancak, $\mathcal{N}v_i$ nin Fourier serisi açılımı (temsili), alışılmış $\mathcal{L}^2$ anlamında yakınsamaz. Aslında, (3.18), (3.43)-(3.45) denklemlerinden

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{N}v_i)(s) &= \frac{1}{2a}\frac{d}{ds}(\mathcal{P}v_i)(s), \quad 0<s<2\pi,\ s\neq\theta_{i-1},\theta_i \\
&= \frac{1}{2a\pi}\mathbf{FP}\sum_{m=1}^{\infty}\{\sin m(s-\theta_i)-\sin m(s-\theta_i+\boldsymbol{\Delta}\theta)\} \qquad (3.48)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{N}v_i)(s) &= -\frac{1}{a\pi}\mathbf{FP}\sum_{m=1}^{\infty}\sin\left(\frac{m\pi}{n}\right)\cos m\left(\frac{\pi}{n}(2i-1)-s\right) \\
&= \frac{1}{4\pi a}\left\{\cot\left(\frac{\theta_{i-1}-s}{2}\right)-\cot\left(\frac{\theta_{i-1}-s}{2}\right)\right\} \qquad (3.49)
\end{aligned}
$$

elde ederiz. Burada **FP** ifadesi, serinin genelleştirilmiş bir fonksiyonu ifade ettiğini ve alışılmış anlamda yakınsayamayabileceğini ayrıca bu ıraksak serinin sonlu bir parçası olarak (3.47) denklemindeki değeri alabileceğimizi hatırlatmak üzere kullanılmıştır.

$s=\pi/n$ ilk düzenleme noktası için, (3.48) ve (3.47) denklemleri

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{N}v_i)\left(\frac{\pi}{n}\right) &= \frac{1}{2a\pi}\mathbf{FP}\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\sin\frac{m\pi}{n}(2i-3)-\sin\frac{m\pi}{n}(2i-1)\right\} \qquad (3.50) \\
&= \frac{1}{4\pi a}\left\{\cot\frac{\pi}{2n}(2i-3)-\cot\frac{\pi}{2n}(2i-1)\right\}
\end{aligned}
$$

halini alır.

(3.50) denklemini, matris özdeğeri hesabımıza uygun olacak şekilde yazmak için aşağıda belirtilen önermeye ihtiyaç duyarız.

Önerme 3.4.1 *$\ell, n \in \mathbb{N}$ ile $\ell \notin n\mathbb{Z}$ için*

$$\sum_{m=1}^{n} \sin\left(\frac{\ell m\pi}{n}\right) = \begin{cases} 0, & \ell \text{ çift ise} \\ \cot\left(\dfrac{\ell\pi}{2n}\right), & \ell \text{ tek ise} \end{cases}$$

İspat. İstenen toplamın $\sum_{m=1}^{n} e^{i(\ell m\pi/n)} = \cos\left(\frac{\ell m\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\ell m\pi}{n}\right)$ geometrik toplamının sanal kısmı olduğundan ispat kolayca elde edilir.

Şimdi, Önerme 3.4.1 de $r = 1$ veya 3 olmak üzere $\ell = 2i - r$ yazılırsa (3.50) denkleminden

$$\begin{aligned} (\mathcal{N}v_i)\left(\frac{\pi}{n}\right) &= \frac{1}{4\pi a}\sum_{m=1}^{n}\left\{\sin\frac{m\pi}{n}(2i-3) - \sin\frac{m\pi}{n}(2i-1)\right\} \\ &= \frac{1}{4\pi a}\sum_{m=1}^{n}\left\{2\sin\frac{m\pi}{n}\left(\frac{2i-3-2i+1}{2}\right)\cos\frac{m\pi}{n}\left(\frac{2i-3+2i-1}{2}\right)\right\} \\ &= \frac{1}{4\pi a}\sum_{m=1}^{n}\left\{2\sin\left(\frac{-m\pi}{n}\right)\cos\frac{2m\pi}{n}(i-1)\right\} \\ &= \frac{-2}{4\pi a}\sum_{m=1}^{n}\left\{\sin\left(\frac{m\pi}{n}\right)\cos\frac{2m\pi}{n}(i-1)\right\} \\ &= -\frac{1}{2\pi a}\sum_{m=1}^{n}\sin\left(\frac{m\pi}{n}\right)\cos\frac{2m\pi}{n}(i-1) \end{aligned} \tag{3.51}$$

elde edilir.

3.5 Ayrık Operatörlerin Özdeğerleri

Son olarak, bu kısımda ayrık operatörlerin özdeğerlerini ve özvektörlerini elde edeceğiz. Bir $\mathbf{A}$ dolanır matrisinin $\lambda_k(A)$ özdeğerleri matrisin ilk satırı olan $\mathbf{v}$ nin iç çarpımı ile verilir ve $k = 0, 1, \ldots, n-1$ için $t_k = e^{2ik\pi/n}$ (birimin n inci kökünden biri) olmak üzere $\mathbf{w}_k = \begin{pmatrix} 1 & t_k & t_k^2 & \cdots & t_k^{n-1} \end{pmatrix}^T$ özvektörlerine sahiptir (Davis 1977).

3.5.1 M Matrisinin Özdeğerleri

$\mathcal{M}$ operatörünün ayrık karşı parçası olan $n \times n$ tipindeki $\mathbf{M}$ matrisi, yukarıdaki işlemin kullanımına yönelik basit bir örnek sunar. (3.42) denkleminden, $\mathbf{M}$ nin ilk satırı

$$\mathbf{v} = -\frac{1}{2n}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}^T \in \mathbb{R}^n$$

dir.

$k = 0$ olduğunda yani $t_0 = 1$ ve $\mathbf{w}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}^T$ iken,

$$\lambda_0 (M) = \mathbf{v}.\mathbf{w}_0 = -\frac{1}{2}$$

bulunur. $k \neq 0$ iken, $t_k^n = 1$ olduğundan,

$$\begin{aligned} \lambda_k (M) &= \mathbf{v}.\mathbf{w}_k = -\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n} t_k^{i-1} \\ &= -\frac{1}{2n} \left(\frac{1 - t_k^n}{1 - t_k} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

dır.

Bu nedenle bir ranklı $\mathbf{M}$ matrisinin sıfır olmayan özdeğeri yalnızca $-(1/2)$ dir. (3.12) denkleminden bu durumun $\mathcal{M}$ sürekli operatörü ile tam bir uyum halinde olduğu görülür.

3.5.2 L Matrisinin Özdeğerleri

(3.41) denklemi $\mathbf{L}$ matrisinin ilk satırının elemanlarını verir. $\mathbf{w}_k$ özvektörleri ile skaler çarpımı alınırsa

$$\lambda_k (L) = \sum_{i=1}^{n} \left\{ -\frac{a \ln a}{n} + \frac{a}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \sin \left(\frac{m\pi}{n} \right) \times \cos \left(\frac{2m\pi}{n} (i-1) \right) \right\} .t_k^{i-1}$$

şeklindeki özdeğerleri elde edilir.

Eğer $t_0 = 1$ olmak üzere $k = 0$ ise, açıkça

$$\lambda_0 (L) = \sum (\mathcal{L} v_i) (\pi/n)$$

sabit özfonksiyon üzerinde $\mathcal{L}$ nin hareketine karşılık gelen matrisin satırının toplamıdır. Dolayısıyla (3.10) denkleminden $\lambda_0 (L) = -a \ln a$ ifadesi elde edilir ve bu ifadenin sürekli $\mathcal{L}$ operatörünün özdeğeri ile aynı olduğunu görürüz. Eğer $a = 1$ ise, matrisin, $\mathcal{L}$ tek katlı operatör olarak, tekil olduğu görülür.

$k = 1, \ldots, n-1$ için, $\sum_{i=1}^{n} t_k^{i-1} = 0$ olduğundan,

$$\begin{aligned} \lambda_k (L) &= \frac{a}{\pi} \sum_{i=1}^{n} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \sin \left(\frac{m\pi}{n} \right) \cos \frac{2m\pi}{n} (i-1) \, t_k^{i-1} \\ &= \frac{a}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{m^2} \sin \left(\frac{m\pi}{n} \right) \sum_{i=1}^{n} \cos \left(\frac{2m\pi}{n} (i-1) \right) t_k^{i-1} \right\} \end{aligned}$$

olur.

Bu ifadeyi sadeleştirmek için Önerme 2.0.13 de verilen teknik önermeye ihtiyaç duyarız. O halde Önerme 2.0.13 den

$$\begin{aligned}
\lambda_k(L) &= \frac{a}{\pi}(\frac{n}{2})\sum_{r=0}^{\infty}\{\frac{1}{(k+rn)^2}\sin(\frac{(k+rn)\pi}{n})+\frac{1}{(n-k+rn)^2}\sin(\frac{(n-k+rn)\pi}{n})\} \\
&= \frac{an}{2\pi}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\{\frac{1}{(k+rn)^2}+\frac{1}{(n-k+rn)^2}\} \qquad (3.52)
\end{aligned}$$

elde edilir. $1 \leq k \ll n$ olmak üzere ilk özdeğerler $n \to \infty$ için

$$\lambda_k(L) \approx \frac{an}{2\pi}\frac{k\pi}{n}\left\{\frac{1}{k^2}+\mathcal{O}\left(n^{-2}\right)\right\} \to \frac{a}{2k}$$

şeklinde davrandığını görürüz. Bu ise düşük dereceli özdeğerlerinin, n^{-2} dereceden hata ile operatör özdeğerlerine yakınsadığını gösterir. (büyüklük bakımından) için maksimum özdeğeri $k = 0$ ya da 1 için ortaya çıkar. Ayrıca, $k = 1, \ldots, k_{\max}$ için $\lambda_k L = \lambda_{n-k}(L)$ olduğundan (burada eğer n çift ise $k_{\max} = (n/2) - 1$ ve eğer n tek ise $k_{\max} = (n-1)/2$ dir) $\lambda_0(L)$ ve n çift ise $\lambda_{n/2}(L)$ basit özdeğerleri dışındaki özdeğerleri çiftler halinde ortaya çıkar.

3.5.3 P Matrisinin Özdeğerleri

(3.45) denkleminden de görülebileceği gibi **P** matrisi dolanırdır ancak simetrik değildir. **L** ve **M** nin özdeğerlerinin hesaplanmasına benzer şekilde

$$\lambda_k(P) = \frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\sin\left(\frac{m\pi}{n}\right)\sum_{i=1}^{n}\sin\left(\frac{2m\pi}{n}(i-1)\right)t_k^{i-1}$$

elde ederiz. Bu ifadeyi basitleştirmek için önerme 2.0.14 deki (2.10) eşitliğine ihtiyaç duyarız. Bu kullanıldığında

$$\lambda_k(P) = \frac{ni}{\pi}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\left\{\frac{1}{(k+rn)}-\frac{1}{(n-k+rn)}\right\} \qquad (3.53)$$

bulunur.

$1 \leq k \ll n$ için, $\sin\left[(n-k)/(n\pi)\right] = \sin\left(k\pi/n\right)$ eşitliği kullanılarak, **P** nin ilk baştaki özdeğerlerinin

$$\lambda_k(P) \approx \frac{ni}{\pi}\frac{k\pi}{n}\left(\frac{1}{k}\right) = i$$

şeklinde hareket ederken sonraki özdeğerlerinin

$$\lambda_{n-k}(P) \approx \frac{ni}{\pi}\frac{k\pi}{n}\left(-\frac{1}{k}\right) = -i$$

şeklinde hareket ettiklerini buluruz. Bu sonuçlar (3.15) denklemi ile verilen sürekli operatörün özdeğerleri ile uyumludur.

3.5.4 N Matrisinin Özdeğerleri

(3.51) ve (2.9) denklemlerini kullanarak **N** matrisinin özdeğerlerini

$$\begin{aligned}
\lambda_k(N) &= -\frac{1}{2\pi a}\sum_{m=1}^{n}\sin\left(\frac{m\pi}{n}\right)\sum_{i=1}^{n}\cos\left(\frac{2m\pi}{n}(i-1)\right)t_k^{i-1} \\
&= -\frac{1}{2\pi a}\left(\frac{n}{2}\right)\left\{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)+\sin\left(\frac{(n-k)\pi}{n}\right)\right\} \\
&= -\frac{1}{2\pi a}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)
\end{aligned}$$

buluruz.
Özel olarak $\lambda_0(N) = 0$ dır, yani **N** matrisi tüm a lar için tekildir. Bu ise $\mathcal{N}$ sürekli operatörünün sabit özfonksiyonlu sıfır özdeğerine karşılık gelir. Bir kez daha **L** matrisi için olduğu gibi özdeğerleri çiftler halinde ortaya çıkar.
k nın küçük değerleri için

$$\lambda_k(N) \approx -\frac{n}{2\pi a}\left(\frac{k\pi}{n}\right) \to -\frac{k}{2a},\ n\to\infty$$

(3.21) denkleminde verildiği gibi bunlara karşılık gelen $\lambda_k(N)$ özdeğerlerine yakınsar. n çift ve $k = n/2$ ise

$$\lambda_{\max}(N) = -\frac{n}{2\pi a}$$

bir en büyük özdeğerini (büyüklük bakımından) elde ederiz.

KAYNAKLAR

Abramowitz M and Stegun I (1974) *Handbook of Mathematical Functions*. New York: Dover.

Amini S (1993) Boundary Integral Solution of The Exterior Helmholtz Problem. *Comput Mech*, 13: 2-11.

Amini S, Harris PJ and Wilton DT (1992) *Coupled Boundary and Finite Element Methods for the Solution of the Dynamic Fluid-Structure Interaction Problem*. Berlin: Springer.

Amini S and Maines ND (1996) Regularisation of Strongly Singular Integrals in Boundary Integral Equations. *Comm Numer Meth Engng*, 12: 787-793.

Brebbia CA, Telles JCF and Wrobel LC (1984) *Boundary Element Techniques-Theory and Applications in Engineering*. Berlin: Springer.

Burton AJ (1973) *The Solution of Helmholtz' Equation in Exterior Domains Using Integral Equation*. Tech. Report NAC 30, National Physical Laboratory, Teddington, Middlesex.

Burton AJ and Miller GF (1971) The Application of Integral Methods for the Numerical Solution of Boundary Value Problems. *Proc R Soc London*, A232: 201-210.

Chen G and Zhou J (1992) *Boundary Element Methods*. London: Academic Press.

Davis PJ (1977) *Circulant Matrices*. New York: WiIey.

Gradshteyn IS and Ryzhik IM (1980) *Table of Integrals, Series and Products*. New York, London: Academic Press.

Jeffreys HS and Jeffreys BS (1956) *Methods of Mathematical Physics*, 3rd ed. Cambridge: Cambridge University Press.

Kress R (1985) Minimizing Thecondition Number of Integral Operators in Acoustic and Electromagnetic Scattering. *Q J Mech. Appl. Math*, 38: 323-341.

Kress R (1989) *Linear Integral Equations, Applied Mathematical Sciences*. New York: Springer.

Kress R and Sloan IH (1993) On The Numerical Solution of A Logarithmic Integral Equation of The First Kind for The Helmholtz Equation. *Numer Math*, 66: 199-214.

Maines ND (1995) Preconditioned Iterative Methods for The Boundary Element Solution of A Hypersingular Integral Eqution, Ph.D. thesis, University of Salford, Department of Mathematics and Computer Science, UK.

Martin PA and Rizzo FJ (1989) On boundary integral equations for crack problems. *Mathematical and Physical Sciences*, Volume 421, Issue 1861:341-355.

Maue AW (1949) Zur Formulierung Eines Allgemeinen Beugungsproblems Durch Eine Integralgleichung. *Z Phys*, 126: 601-618.

Mikhlin SG (1970) *Mathematical Physics An Advanced Course*. Amsterdam: North-Holland.

Mitzner KM (1966) Acoustic Scattering From An Interface Between Media of Greatly Different Desity. *J Maths Phys*, 7: 2053-2060.

Sloan IH (1992) Error Analysis of Boundary Integral Equations, *Acta Numerica*. Cambridge: Cambridge University Press, 287-339.

Soykan Y (2008) *Fonksiyonel Analiz*, Nobel Yayın Dağıtım.

Wendland WL (1990) Boundary Element Methods for Elliptic Problems. *Mathematical Theory of Finite and Boundary Element Methods*, ed. Albert H. Schatz et all, Basel: Birkhauser, 219-76.

Yan Y and Sloan IH (1988) On Integral Equations Of The First Kind with Logarithmic Kernel. *J Integral Equations Appl*, 1: 1-31.

Zemanian AH (1965) *Distribution Theory and Transform Analysis-An Introduction to Generalised Functions with Applications*. New York: Dover.

ÖZGEÇMİŞ

Seda ZİLAN 1978'te Zonguldak'ta doğdu; ilk, ortaokul ve liseyi Zonguldak'ta tamamladı; 1997 yılında Gazi Üniversitesi Matematik Öğretmenliği Bölümüne girdi; 2002 yılında mezun olduktan sonra yine aynı yıl Zonguldak ili Fener Lisesine matematik öğretmeni olarak atandı ve halen orada görev yapmaktadır. 2005 yılında girdiği ZKÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans programını sürdürmektedir.

ADRES BİLGİLERİ

Adres : Terakki mah.
Cumhuriyet cad. no:27
ZONGULDAK

Tel : (372) 2511665
E-posta: sedazilan@hotmail.com

Seda ZİLAN