

T.C
BEYKENT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK-BİLGİSAYAR ANABİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI

MANİFOLDLARIN HARMONİK DÖNÜŞÜMLERİ VE
GENELLEŞTİRİLMİŞ VARYASYON FORMÜLÜ
(Yüksek Lisans Tezi)

İsmail ALTUNAY

İSTANBUL, 20008

T.C
BEYKENT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK-BİLGİSAYAR ANABİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI

MANİFOLDLARIN HARMONİK DÖNÜŞÜMLERİ VE
GENELLEŞTİRİLMİŞ VARYASYON FORMÜLÜ
(Yüksek Lisans Tezi)

Hazırlayan:
İsmail ALTUNAY

Danışman:
Prof. Dr. Mehmet ERDOĞAN

İSTANBUL, 2008

TEŞEKKÜR

Almış olduğum derslerde bana her konuda yol gösteren ve yardımcı olan değerli hocalarım Prof. Dr. Mehmet ERDOĞAN, Prof. Dr. Mahir RESULOV, Yrd. Doç. Dr. Bahaddin SİNSOYSAL'a yürek dolusu teşekkürü bir borç bilirim. Tez çalışmam sürecinde bana yol gösteren, yapıcı öneri ve eleştirilerini benden esirgemeyen değerli hocam Prof. Dr. Mehmet ERDOĞAN'a en derin saygılarımı sunarım. Bu çalışmamı, her işe başlamamım biricik kaynağı ve destekçisi sevgili eşim Ayşe ALTUNAY'a adıyorum.

ÖZET

Bu tez çalışması 4 bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, klasik harmonik fonksiyonlar ve harmonik morfizmlere kadar ulaşan tarihçesi ile, Weierstrass gösterimi sayesinde harmonik fonksiyonlarla kompleks analitik fonksiyonların ilişkisi incelendi. Ayrıca, harmonik dönüşümlerin düzgün varyasyon fonksiyonlarının kritik noktalarının jeodezik eğrileri ve minimal yüzeyleri tanımladığı gösterilerek, diferensiyellenebilir manifold, tensör alanları, Riemann manifoldları ve Levi-civita koneksiyonu gibi temel kavramlar verildi.

İkinci bölümde, Riemann manifoldlarının harmonik dönüşümleri çalışıldı ve bu amaçla bir dönüşümün enerjisi, kotanjant uzay ve geri çekilmiş tanjant demetleri üstünde koneksiyonlar tanımlanarak Riemann manifoldların harmonik bir dönüşümünün düzgün varyasyonu incelendi.

Üçüncü bölümde, Riemann manifoldları arasında tanımlanan bir düzgün harmonik dönüşüm için genelleştirilmiş varyasyon formülü elde edildi.

Dördüncü ve son bölüm ise sonuçları ve bir değerlendirmeyi kapsamaktadır.

ABSTRACT

This study consists of four chapters.

In the first chapter, it is given an historical development of the classical harmonic functions up to harmonic morphisms and the relation between harmonic functions and complex analitical maps by the Weierstrass representation. Besides, it is shown that the critical points of a smooth variational functional of the harmonic maps may define geodesic curves or minimal surfaces and furthermore in this chapter, it is given some fundamental concepts such as differentiable manifold, tensor fields, Riemannian manifolds and the Levi-Civita connection.

In the second chapter, it is studied harmonic maps of the Riemannian manifolds and defined the energy of a map and connections on a cotangent space and push-backed tangent fiber and so it is investigated the smooth variations of a map between two Riemannian manifolds.

In the third chapter, we state and prove the general version of the first variational formula for a smooth map between two Riemannian manifolds.

Finally, the last chapter covers an evaluation of the thesis.

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR	i
ÖZET	ii
ABSTRACT	iii
1. GİRİŞ	
1.1 Harmonik fonksiyonlar ve tarihsel gelişimi	1
1.2 Öklid uzayında harmonik dönüşümler	2
1.3 Minimal yüzeyler ve harmonik dönüşümler	4
1.4 Diferansiyellenebilir manifoldlar	8
1.5 Tensör alanları	12
1.6 Riemann manifoldları	15
2. RIEMANN MANİFOLDLARININ HARMONİK DÖNÜŞÜMLERİ	
2.1 Bir dönüşümün enerjisi	19
2.2 TM^* ve $u^{-1}TN$ üstündeki koneksiyonlar	21
3. GENELLEŞTİRİLMİŞ VARYASYON FORMÜLÜ	28
4. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME	33
KAYNAKLAR	34
ÖZGEÇMİŞ	35

1. GİRİŞ

1.1 Harmonik fonksiyonlar ve tarihsel gelişimi

Bu kısımda, önce harmonik fonksiyon kavramını tanımlayacağız daha sonraki bölümlerde ise manifoldlar arasındaki harmonik dönüşümlerin ve manifoldlar arasındaki dönüşümlerin kümesi üstünde birinci varyasyonu tanımlayıp gerilme alanı ile ilişkilendireceğiz.

Harmonik morfizmlerin tarihçesi 1847 yıllarına Jacobi'nin üç boyutlu uzayda Laplace denkleminin çözümlerini aramasına kadar uzanır. Daha sonra 1965 yılında C. Contantinescu ve A.Cornea harmonik uzayların belirli koşulları gerçekleyen lokal kompakt Hausdorff uzaylar olduğunu ifade etmişlerdir. Örneğin $\mathbb{R}^n$, Laplace denkleminin çözümleri olan harmonik fonksiyonları kapsayan bir harmonik uzaydır. Genel olarak her Riemann manifoldu Laplace-Beltrami operatörünün sıfırları olarak harmonik fonksiyonlara sahip bir harmonik uzaydır. Genel olarak böyle bir operatör Δ^n de

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + cf = 0 \quad (1.1.1)$$

şeklinde bir eliptik denklem ile verilir. Burada a_{ij}, b_i ve c katsayılar olup denklem bir $U \subseteq \mathbb{R}^n$ bölgesinde Lipschitz koşullarını ve harmonik uzayın topolojik koşullarını sağlar.

Tanım 1.1.1 $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ bir $D \subseteq \mathbb{R}^2$ bölgesinde ikinci mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip bir fonksiyon olsun. $(x, y) \in D$ için

$$F_{xx}(x, y) + F_{yy}(x, y) = 0$$

koşulu sağlanıyor ise F ye D üstünde bir *harmonik fonksiyon* deriz.

Harmonik fonksiyonlara ısı dağılımı ve elektrostatik potansiyeller konusundaki uygulamalarda sık sık rastlanır.

Eğer $D \subseteq \mathbb{C}$ ise ve F , D bölgesinde tanımlı bir analitik kompleks değişkenli fonksiyon ise bu fonksiyonu reel ve imajiner kısımlarına

$$F(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

biçiminde parçalarsak, u ve v her mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip olur ve Cauchy-Riemann denklemleri ile $(x, y) \in D$ için

$$u_x(x, y) = v_y(x, y) \text{ ve } u_y(x, y) = -v_x(x, y)$$

yazabiliriz. Bu denklemlerin sırası ile x ve y e göre diferansiyellerini alırsak,

$$u_{xx}(x, y) = v_{yx}(x, y) \text{ ve } u_{yx}(x, y) = -v_{xx}(x, y)$$

ve

$$u_{xy}(x, y) = v_{yy}(x, y) \text{ ve } u_{yy}(x, y) = -v_{xy}(x, y)$$

yazabiliriz. Bunları çapraz biçimde taraf tarafa toplayarak

$$u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = v_{yx}(x, y) - v_{xy}(x, y) = v_{xy}(x, y) - v_{xy}(x, y) = 0$$

ve

$$v_{xx}(x, y) + v_{yy}(x, y) = -u_{yx}(x, y) + u_{xy}(x, y) = -u_{xy}(x, y) + u_{xy}(x, y) = 0$$

buluruz, böylece eğer F bir $z_0 = x_0 + iy_0$ noktasında analitik ise u ve v fonksiyonları (x_0, y_0) da her mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip olacaklarından aşağıdaki teoremi kanıtlamış oluruz.

Teorem 1.1.1 $F(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ fonksiyonu $(x, y) \in D$ için için analitik ise bu durumda u ve v fonksiyonları D de harmonik fonksiyonlardır.

Örnek 1.1.1

$f(z) = \frac{1}{z^2}$ fonksiyonu $\{z \in \mathbb{C} : z \neq 0\}$ kümesi üstünde analitiktir. O halde

$$\frac{1}{z^2} = \frac{1}{z^2} \frac{\bar{z}^2}{\bar{z}^2} = \frac{x^2 - y^2 - 2xyi}{(x^2 + y^2)^2}$$

yazabiliriz, böylece reel ve imajiner bileşenleri

$$u(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \text{ ve } v(x, y) = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

şeklinde fonksiyonlardır ve bunlar $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) \neq (0, 0)\}$ kümesi üzerinde harmonik fonksiyonlardır.

Tanım 1.1.2 u ve v fonksiyonları bir D bölgesinde harmonik fonksiyonlar ve Cauchy-Riemann denklemlerini sağlarlar ise bu fonksiyonlara birbirinin *harmonik eşleniği(konjugesi)* dir denir.

1.2 Öklid uzayında harmonik dönüşümler

m - boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{R}^m$ nin bir açık alt kümesi U ve $(x_1, x_2, \dots, x_m) \in U$ olsun. $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ veya $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ şeklinde reel veya kompleks değerli bir f fonksiyonu için *Laplace Denklemi*

$$Df \circ \bigcirc_{i=1}^m \frac{\mathbb{Q}^2 f}{\mathbb{Q} x^2} = 0 \quad (1.2.1)$$

şeklinde verilir. (1.2.1) denkleminin çözümlerine *Harmonik Fonksiyonlar* adı verilir. Bu fonksiyonlar matematikte önemli bir yere sahiptirler. Düzlemdeki bölgeler arasında verilen konformal dönüşümler Laplace denklemini korurlar. Bu gerçek iki boyutta Laplace denkleminin çözümlerini bulmak ve çalışmak için yaygın şekilde literatürde kullanılmıştır. İşte bu gerçek yüksek boyutlu reel uzaylarda veya daha genel uzaylarda hangi dönüşümler için geçerlidir sorusuna cevap aramak bu tez çalışmasının özünü oluşturacaktır.

Tanım. 1.2.1 M ve N Öklid uzaylarının iki açık alt kümesi olsun. Harmonik fonksiyonları harmonik fonksiyonlara geri çeken

$$f : M \rightarrow N$$

şeklinde bir dönüşüme bir *harmonik morfizm* adı verilir. Buna göre $V \rightarrow N$ bir açık alt küme ve $f^{-1}(V) \rightarrow \mathbb{R}^m$ olmak üzere $f : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ fonksiyonu V üstünde bir harmonik fonksiyon iken

$$f \circ f : f^{-1}(V) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

şeklindeki bileşke dönüşümü de $f^{-1}(V)$ üstünde bir harmonik fonksiyon ise o taktirde f dönüşümüne bir harmonik morfizm' dir diyeceğiz.

Jacobi 1848 yılında yazdığı bir makalesinde aşağıdaki problemi incelemiştir:

“ $U \rightarrow \mathbb{R}^m$ açık alt kümesi üzerinde bir $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ düzgün dönüşüm ve $V \rightarrow \mathbb{R}^n$ için $f : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ şeklinde bir V açık alt kümesi üstünde verilen holomorfik bir fonksiyon olmak üzere, $f \circ f$ bileşke fonksiyonunun harmonik olması için f hangi koşulları gerçeklemelidir”

Herhangi bir harmonik fonksiyon lokal olarak bir holomorfik fonksiyonun reel kısmı olduğundan f nin Jacobi koşulunu gerçeklemesi için gerek ve yeter koşul f nin bir harmonik morfizm olması gerektiği açıktır. Böylece zincir kuralı ile

$$D(f \circ f) = \frac{df}{dz} Df + \frac{d^2 f}{dz^2} \bigcirc_{i=1}^m \frac{\mathbb{Q}^2 f}{\mathbb{Q} x_i^2} \quad (1.2.2)$$

elde ederiz. f herhangi bir noktada keyfi birinci ve ikinci türevlere sahip olduğundan düzgün f dönüşümünün bir harmonik morfizm olabilmesi için aşağıdaki iki koşulun sağlanması gerektiğini buluruz:

$$(i) Df = 0 \text{ ve } (ii) (gradf)^2 = \bigcirc_{i=1}^m \frac{\mathbb{Q}^2 f}{\mathbb{Q} x_i^2} = 0 \quad (1.2.3)$$

Tanım. 1.2.2 Yukarıdaki (1.2.2) ifadesindeki (ii) koşulunu gerçekleyen düzgün bir fonksiyona *horizontally (weakly) conformal* veya *yarı-konformal* bir dönüşüm adı verilir. Eğer $f = f_1 + if_2$ yazarsak (ii) koşulunun $gradf_1$ ve $gradf_2$ nin birbirine ortogonal ve aynı norma muhtemelen sıfır norma sahip olacakları anlamına geldiğini görürüz.

1.3. Minimal yüzeyler ve harmonik dönüşümler

Bu kısımda harmonik dönüşümlerin minimal yüzeylerle olan ilişkisini araştıracağız, bunun için bir dönüşümün enerjisi ve Weierstrass gösteriminden bahsedeceğiz, ayrıca $\mathbb{R}^3$ de bir parametrik yüzeyin ortalama eğriliği ile koordinat fonksiyonlarının Laplasyeni arasında bir bağıntı elde edeceğiz.

Tanım 1.3.1 $U \subseteq \mathbb{R}^2$ veya $U \subseteq \mathbb{R}$ açık ve bağlantılı bir alt küme olmak üzere C^2 -sınıfından

$$X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$$

şeklindeki bir dönüşüme $\mathbb{R}^3$ de bir *düzgün parametrik yüzey* adı verilir.

dX türev dönüşümünün birebir olması durumunda $X(U) \subseteq \mathbb{R}^3$ kümesi üstünde yüzeyin

$$N = \frac{X_u' \times X_v'}{|X_u' \times X_v'|} \quad (1.3.1)$$

şeklinde bir birim normal vektör alanı daima bulunabilir. Burada $(u, v) \in U$ olup u ve v , $\mathbb{R}^2$ nin koordinat fonksiyonları ve $X_u = \frac{\partial X}{\partial u}$, $X_v = \frac{\partial X}{\partial v}$ kısmi türevlerini göstermektedir. Diğer taraftan yüzeyin birinci ve ikinci esas formlarının katsayıları sırası ile

$$E = \langle X_u, X_u \rangle, F = \langle X_u, X_v \rangle, G = \langle X_v, X_v \rangle$$

ve

$$e = \langle X_{uu}, N \rangle, f = \langle X_{uv}, N \rangle, g = \langle X_{vv}, N \rangle$$

şeklinde verilir. Burada $X_{uu} = \frac{\partial^2 X}{\partial u^2}$, $X_{uv} = \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v}$, $X_{vu} = \frac{\partial^2 X}{\partial v \partial u}$, $X_{vv} = \frac{\partial^2 X}{\partial v^2}$ dir. Buna göre yüzeyin *ortalama eğriliği*

$$H = -\frac{1}{2} \text{iz}(dN) = \frac{1}{2} \frac{eG + gE - 2fF}{EG - F^2} \quad (1.3.2)$$

şeklinde verilir. Burada dN yüzeyin şekil operatörünü göstermektedir. N ise literatürde yüzeyin birim normal vektörlerini S^2 birim küresi üzerine resmeden *Gauss dönüşümü* olarak adlandırılabilir.

Tanım 1.3.2 (1.3.2) denklemi ile tanımladığımız ortalama eğrilik $H = 0$ koşulunu sağlıyor ise X yüzeyine bir *parametrik minimal yüzey* adı verilir.

Şimdi $V \subseteq U$ bir kompakt alt küme ve V nin kapanışı $\bar{V}$ olsun.

$$h: \bar{V} \otimes \square$$

fonksiyonu C^1 -sınıfından bir fonksiyon olmak üzere

$$X_t(u, v) = X(u, v) + th(u, v)N(u, v) \quad (1.3.3)$$

dönüşümüne X in h tarafından tanımlanan bir normal varyasyonu adını vereceğiz. Burada $(u, v) \in \bar{V}$ ve $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ dir. Şimdi (1.3.3) eşitliğini u ve v ye göre türetirsek,

$$\frac{\partial X_t}{\partial u} = X_u + thN_u + th_u N$$

ve

$$\frac{\partial X_t}{\partial v} = X_v + thN_v + th_v N$$

buluruz. Şimdi X_t nin birinci esas formunun katsayılarını E_t, F_t, G_t ile gösterirsek,

$$E_t = E + th(\dot{X}_u, N_u \tilde{n} + \dot{X}_u, N_u \tilde{n}) + t^2 h^2 \dot{X}_u, N_u \tilde{n} + t^2 h_u h_u$$

$$F_t = F + th(\dot{X}_u, N_v \tilde{n} + \dot{X}_v, N_u \tilde{n}) + t^2 h^2 \dot{X}_u, N_v \tilde{n} + t^2 h_u h_v$$

$$G_t = G + th(\dot{X}_v, N_v \tilde{n} + \dot{X}_v, N_v \tilde{n}) + t^2 h^2 \dot{X}_v, N_v \tilde{n} + t^2 h_v h_v$$

elde ederiz. Buradan (1.3.2) yi kullanarak

$$E_t G_t - F_t^2 = EG - F^2 - 2th(Eg - 2Ff + Ge) + R$$

$$= (EG - F^2)(1 - 4thH) + R$$

bulunur. Burada $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{R}{t} = 0$ olduğunu göz önüne alır ve ϵ 'ı yeteri kadar küçük seçersek

X_t nin bir düzgün parametrik yüzey tanımlayacağı açıktır. Üstelik $X_t(\bar{V})$ nin alanı $A(t)$

$$A(t) = \int_{\bar{V}} \sqrt{E_t F_t - F_t^2} du dv$$

$$= \int_{\bar{V}} \sqrt{1 - 4thH + \bar{R}} \sqrt{EG - F^2} du dv$$

şeklinde verilir, burada $\bar{R} = \frac{R}{EG - F^2}$ dir. Eğer ϵ yeteri kadar küçük ise $A(t)$ türevlenebilir bir fonksiyondur ve $t = 0$ daki türevi

$$A'(0) = - \oint_{\bar{V}} 2hH \sqrt{EG - F^2} dudv \quad (1.3.4)$$

şeklindedir. Böylece aşağıdaki teoremi kanıtlayabiliriz.

Teorem 1.3.1 $X:U \rightarrow \mathbb{R}^3$ düzgün parametrik bir yüzey ve U nun sınırlı bir alt kümesi $V \subset \bar{V} \subset U$ olsun. X in minimal olması için gerek ve yeter koşul $X(\bar{V})$ nin her bir normal varyasyonu ve U nun her sınırlı $V \subset \bar{V} \subset U$ alt kümesi için

$$A'(X_t(\bar{V}))|_{t=0} = 0$$

olmasıdır.

Kanıt. Eğer X minimal ise ortalama eğriliği $H \equiv 0$ olacağından (1.3.4) den $A'(X_t(\bar{V}))|_{t=0} = 0$ elde edilir. Tersine eğer $A'(X_t(\bar{V}))|_{t=0} = 0$ ise bazı $p \in V$ noktalarında $H(p) \neq 0$ olduğunu kabul edelim. $h:\bar{V} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunu $h(p) = H(p)$ şeklinde tanımlar ve p nin küçük bir komşuluğu dışında $h \equiv 0$ kabul edersek bu durumda seçtiğimiz bu h fonksiyonunun tanımlayacağı varyasyon için $A'(0) < 0$ buluruz ki bu bir çelişmedir. O halde $\bar{V}$ nin tamamında $h \equiv 0$ olmalıdır, dolayısıyla $H \equiv 0$ olacağından X minimaldir.

Şimdi $\mathbb{R}^3$ de C^2 -sınıfından bir düzgün yüzey göz önüne alalım. Eğer bu yüzey

$$E = G, F = 0$$

olacak şekilde bir koordinat sistemine sahip ise bu durumda yüzeyin *izotermal koordinatlar* ile parametrelendirildiğini söyleriz. Bu şekilde parametrelendirilmiş bir yüzeye de bir *izotermal yüzey* adını vereceğiz. Şimdi X in bir izotermal yüzey olduğunu kabul edelim. X in Laplasyeni ΔX ise ΔX in yüzeye normal olduğu aşağıdaki şekilde gösterebiliriz:

$$\begin{aligned} \langle \Delta X_u, \Delta X \rangle &= \langle \Delta X_u, X_{uu} + X_{vv} \rangle = \langle \Delta X_u, X_{uu} \rangle - \langle \Delta X_{vu}, X_v \rangle \\ &= \frac{1}{2} \frac{\mathcal{L}}{\mathcal{L}u} |X_u|^2 - \frac{1}{2} \frac{\mathcal{L}}{\mathcal{L}u} |X_v|^2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Benzer şekilde

$$\begin{aligned} \langle \Delta X_v, \Delta X \rangle &= \langle \Delta X_v, X_{uu} + X_{vv} \rangle = \langle \Delta X_v, X_{vv} \rangle - \langle \Delta X_{uv}, X_u \rangle \\ &= \frac{1}{2} \frac{\mathcal{L}}{\mathcal{L}v} |X_v|^2 - \frac{1}{2} \frac{\mathcal{L}}{\mathcal{L}v} |X_u|^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Böylece DX , hem X_u ve hem de X_v ye dik olacağından yüzeye dik olmak durumundadır. Üstelik yüzeyi izotermal parametrelendirdiğimizden $E = G, F = 0$ dır, bunları ortalama eğriliği veren (1.3.2) eşitliğinde yerine yazarsak

$$H = \frac{1}{2} \frac{eG + gE - 2fF}{EG - F^2} = \frac{1}{2} \frac{eE + gE}{E^2} = \frac{1}{2} \frac{E(e + g)}{E^2} = \frac{e + g}{2E}$$

elde ederiz. O halde

$$H = \frac{e + g}{2E} = \frac{\langle N, X_{uu} \rangle + \langle N, X_{vv} \rangle}{2E} = \frac{\langle N, X_{uu} + X_{vv} \rangle}{2E} = \frac{\langle N, DX \rangle}{2E}$$

buluruz. Bu sonuç Teorem 1.3.1 ile birlikte göz önüne alınırsa aşağıdaki sonuç teoremi ifade edebiliriz.

Sonuç 1.3.1 $X : U \subset \mathbb{R}^3$ düzgün izotermal parametrik bir yüzey olsun. X in minimal olması için gerek ve yeter koşul X in harmonik olmasıdır.

Böylece minimal parametrik bir yüzey,

$$X : U \subset \mathbb{R}^3$$

şeklinde $E = G, F = 0$ ve $DX = 0$ koşullarını gerçekleyen bir izotermal yüzeydir.

Şimdi $U \subset \mathbb{C}$ nin basit bağlantılı olduğunu kabul edelim. Bu durumda $X = Re y$ olacak şekilde kompleks analitik(holomorfik) bir

$$y : U \subset \mathbb{C}^3, y(z_0) = (y_1(z_0), y_2(z_0), y_3(z_0))$$

dönüşümü tanımlayabiliriz ve bu dönüşümü kullanarak, X in izotermal oluşunu eşdeğer olarak

$$\frac{\Re \langle y_1, \frac{\partial}{\partial z} \rangle^2}{\Re \langle y_1, \frac{\partial}{\partial z} \rangle} + \frac{\Re \langle y_2, \frac{\partial}{\partial z} \rangle^2}{\Re \langle y_2, \frac{\partial}{\partial z} \rangle} + \frac{\Re \langle y_3, \frac{\partial}{\partial z} \rangle^2}{\Re \langle y_3, \frac{\partial}{\partial z} \rangle} = 0$$

biçiminde ifade edebiliriz. Bu bölümde son olarak Weierstrass gösteriminden bahsedeceğiz.

$U \subset \mathbb{C}$ basit bağlantılı bir açık alt küme olsun. $X : U \subset \mathbb{R}^3$ parametrik yüzeyi izotermal parametrelendirilmiş bir minimal yüzey olsun, yani

$$|X_u|^2 = |X_v|^2, \langle X_u, X_v \rangle = 0, DX = 0$$

koşulları gerçeklensin. O takdirde U üstünde tanımlanan ve özdeş olarak sıfırdan farklı meromorfik f ve g fonksiyonları, f ve fg^2 holomorfik ve " $z_0 \in U$ için

$$X(z) = X(z_0) + \operatorname{Re} \int_{z_0}^z f(w) \left((1 - g(w)^2), i(1 + g(w)^2), 2g(w) \right) dw$$

olacak şekilde vardır. Tersine yukarıdaki gibi tanımlanacak her meromorfik f ve g fonksiyon çifti bir minimal parametrik yüzeyi bu şekilde tanımlar.

1.4. Diferansiyellenebilir manifoldlar

Tanım 1.4.1. Bir M kümesi ve M nin alt kümelerinin bir Ω ailesi verilsin;

(i) $\emptyset$ ve M , Ω ya aittir,

(ii) Ω nın herhangi sayıdaki elemanının birleşimi Ω ya aittir,

(iii) Ω nın herhangi sonlu sayıdaki elemanının kesişimi Ω nın elemanıdır,

özellikleri sağlanırsa M bir topolojik uzay ve bu topolojik uzayı oluşturan Ω ailesinin elemanları da M nin açık kümeleri adını alır.

Tanım 1.4.2. M nin bir p noktasının bir komşuluğu, p noktasının ait olduğu bir açık kümeyi içeren bir $U(p)$ kümesidir.

Tanım 1.4.3. Bir M topolojik uzayı, $A, B \in \Omega$ ve $A \cap B = \emptyset$ olmak üzere, $M = A \cup B$ şeklinde ifade edilemiyorsa M ye bağlantılı uzay denir.

Tanım 1.4.4. Bağlantılı topolojik bir uzayın farklı iki noktasının ayırık komşulukları bulunabiliyor ise bu topolojik uzaya Hausdorff uzayı denir.

Tanım 1.4.5. n -boyutlu bir M^n Hausdorff uzayının her p noktasının herhangi bir U komşuluğu bir ψ eşyapı dönüşümü (homeomorphism) sayesinde $\mathbb{R}^n$ nin bir açık alt kümesine homeomorf yapılabiliyor ise M^n uzayına n -boyutlu bir topolojik manifold (çokkatlı) ve (U, ψ) ikilisine de M^n üzerinde bir yerel koordinat sistemi (veya yerel harita) denir. $\bigcup_{i \in I} U_i = M^n$ olacak şekildeki $(U_i, \psi_i)_{i \in I}$ ailesine de bir koordinat sistemi (veya atlas) adı verilir. Bir $p \in U_i$ noktası için $\psi_i(p) = (x_i^1(p), \dots, x_i^n(p)) \in \mathbb{R}^n$ olduğundan $x_i(p)$ sayılarına p noktasının koordinatları ve U_i kümesine de p noktasının bir koordinat komşuluğu adı verilir.

Tanım 1.4.6. $(U_i, \psi_i)_{i \in I}$ ve $(U_j, \psi_j)_{j \in I}$, $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ olacak şekilde, M^n topolojik manifoldunun iki koordinat sistemi olmak üzere, $\forall i, j$ için $\psi_j(U_i \cap U_j)$ kümesini $\psi_i(U_i \cap U_j)$ kümesi üzerine resmeden $\psi_i \circ \psi_j^{-1}$ dönüşümlerinin k . mertebeden sürekli türevleri mevcut ise o takdirde $(U_i, \psi_i)_{i \in I}$ koordinat sistemine M^n topolojik manifoldunun C^k -sınıfından diferansiyellenebilir bir koordinat sistemi adı verilir.

Tanım 1.4.7. Üzerinde C^k -sınıfından diferansiyellenebilir bir koordinat sistemi tanımlanabilen n -boyutlu bir M^n topolojik manifolduna C^k -sınıfından diferansiyellenebilir bir manifold veya kısaca C^k -manifold denir. Eğer her $k \in \mathbb{N}$ için M^n topolojik manifoldu bir C^k -manifold ise M^n ye C^∞ -sınıfından diferansiyellenebilir bir manifold veya kısaca C^∞ -manifold adı verilir. Ancak bu manifoldlar için bundan böyle sadece manifold sözcüğünü kullanacağız.

Tanım 1.4.8. M^n manifoldu üstünde C^k -sınıfından diferansiyellenebilir bir koordinat sistemi $(U_i, \psi_i)_{i \in I}$ olsun. U , M^n de bir açık küme ve f , U üzerinde tanımlı reel değerli sürekli bir fonksiyon olsun. $p \in U$ noktasının, bir $\alpha \in I$ indisi için $V \subset U_\alpha \cap U$ olacak şekilde yeterince küçük bir V komşuluğu bulunabilir. Eğer $\psi_i(V) \subset \mathbb{R}^n$ açık kümesi üzerinde tanımlı $f \circ \psi_i^{-1}$ fonksiyonu $\psi_i(p)$ nin bir komşuluğunda C^r -sınıfından ($r \leq k$) diferansiyellenebilir bir fonksiyon ise f fonksiyonuna $p \in U$ noktasında C^r -sınıfından diferansiyellenebilir denir. M^n , C^∞ -manifoldunun $p \in M^n$ noktasının bir komşuluğunda tanımlı reel değerli C^∞ -sınıfından tüm fonksiyonlarının kümesi $\mathfrak{S}(p)$ ve M^n manifoldunun tamamı üzerinde tanımlı reel değerli C^∞ -sınıfından tüm fonksiyonların kümesi de $\mathfrak{S}(M^n)$ ile gösterilir.

Tanım 1.4.9. $\alpha(t)$, $a \leq t \leq b$, M^n manifoldu üzerinde $\alpha(t_0) = p$ olacak şekilde bir eğri ve $f \in \mathfrak{S}(p)$ olsun.

$$X_p f = \left(df(\alpha(t)) / dt \right)_{t_0}$$

olacak şekilde, $X_p : \mathfrak{S}(p) \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümüne $\alpha(t)$ eğrisinin p noktasındaki bir tanjant vektörü denir . Tanjant vektörler aşağıdaki özellikleri sağlar:

$$\mathbf{a)} \quad X_p(\lambda f + \mu g) = \lambda X_p(f) + \mu X_p(g), \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}; f, g \in \mathfrak{S}(p)),$$

$$\mathbf{b)} \quad X_p(fg) = X_p(f)g(p) + X_p(g)f(p).$$

Bir $p \in M^n$ noktasındaki tüm tanjant vektörlerin kümesi,

$$(X_p + Y_p)(f) = X_p(f) + Y_p(f), \quad (\lambda X_p)(f) = \lambda X_p(f)$$

şeklinde tanımlı toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre $\mathbb{R}$ üzerinde bir vektör uzayı olup $p \in M^n$ noktasındaki tanjant uzay olarak adlandırılır ve $T_p(M^n)$ ile gösterilir. Şimdi $x^1, \dots, x^n$, p noktasının bir U koordinat komşuluğunda yerel koordinatlar olup $1 \leq i \leq n$ olmak üzere; $\forall i$ için $(\partial / \partial x^i)_p$, $\mathfrak{S}(p)$ den $\mathbb{R}$ içine bir dönüşümdür ve Tanım 2.1.9 daki koşulları sağlar. O halde $\alpha(t_0) = p$ koşulunu sağlayan herhangi bir $\alpha(t)$ eğrisi için $x^i = \alpha^i(t)$, $1 \leq i \leq n$ yazarsak her X_p tanjant vektörü için zincir kuralı yardımıyla

$$X_p(f) = \left(df(\alpha(t)) / dt \right)_{t_0} = \sum_i \left(\partial f / \partial x^i \right)_p \left(d\alpha^i(t) / dt \right)_{t_0}$$

yazılabilir. Böylece her tanjant vektör, $\left\{ (\partial / \partial x^i)_p \right\}_{1 \leq i \leq n}$ kümesindeki vektörlerin bir lineer birleşimi şeklinde yazılır. Buna göre $\left\{ (\partial / \partial x^i)_p \right\}_{1 \leq i \leq n}$ vektör kümesi lineer bağımsız olup

$$\left(\text{gerçekten, } \sum_i \xi^i (\partial / \partial x^i)_p = 0 \Rightarrow 0 = \sum_i \xi^i (\partial x^j / \partial x^i)_p = \xi^j \quad (1 \leq j \leq n) \right) \quad T_p(M^n) \quad \text{nin bir}$$

bazını teşkil eder. Böylece aşağıdaki teoremi ifade ederiz.

Teorem 1.4.1 n -boyutlu bir M^n manifoldunun bir p noktasındaki $T_p(M^n)$ tanjant uzayı da n -boyutludur.

Tanım 1.4.10. Her $p \in M^n$ noktasına bir $X_p \in T_p(M^n)$ karşılık getiren $X : p \rightarrow X_p$

dönüşümüne M^n üzerinde bir tanjant vektör alanı denir. M^n üzerinde tüm C^∞ -sınıfından tanjant vektör alanlarının kümesini $\mathcal{X}(M^n)$ ile göstereceğiz.

Tanım 1.4.11. $X, Y \in \mathcal{X}(M^n)$ için

$$[X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf)$$

şeklinde tanımlı $[X, Y] : \mathfrak{S}(M^n) \rightarrow \mathfrak{S}(M^n)$ dönüşümüne X, Y vektör alanlarının braketi adı verilir.

Teorem 1.4.2 X, Y ve Z, M^n üstünde diferansiyellenebilir vektör alanları, a, b reel sayılar ve f, g diferansiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere braket işlemi aşağıdaki özellikleri sağlar:

- a) $[X, Y] = -[Y, X]$ (antikomutatiflik),
- b) $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$ (lineerlik),
- c) $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ (Jacobi özdeşliği),
- d) $[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X$.

Tanım 1.4.12. $T_p(M^n)$ den $\square$ içine bütün lineer dönüşümlerin kümesi $T_p^*(M^n)$ şeklinde gösterilir ve $\omega, \nu \in T_p^*(M^n)$, $X \in T_p(M^n)$ ve $\lambda \in \square$ olmak üzere,

$$(\omega + \nu)(X) = \omega(X) + \nu(X), \quad (\lambda\omega)(X) = \lambda(\omega(X))$$

şeklinde tanımlı toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre $\square$ üzerinde lineer bir vektör uzayı teşkil eder. $p \in M^n$ noktasındaki tanjant uzaya eşlenik (dual) olan bu uzaya $p \in M^n$ noktasındaki kotanjant uzay, elemanlarına da kotanjant vektör (kovaryant vektör ya da 1-form) denir. Kotanjant vektörler aşağıdaki özelliği sağlar:

$$\omega_p(\lambda X + \mu Y) = \lambda\omega_p(X) + \mu\omega_p(Y), \quad (\lambda, \mu \in \square; X, Y \in T_p(M^n)).$$

1.5. Tensör alanları

Tanım 1.5.1. V , $\square$ üzerinde bir vektör uzayı olmak üzere $T : V^k \rightarrow \square$ fonksiyonu her i için $(1 \leq i \leq k)$,

$$T(v_1, \dots, v_i + v'_i, \dots, v_k) = T(v_1, \dots, v_i, \dots, v_k) + T(v_1, \dots, v'_i, \dots, v_k),$$

$$T(v_1, \dots, av_i, \dots, v_k) = aT(v_1, \dots, v_i, \dots, v_k)$$

koşullarını sağlıyor ise çok lineer olarak adlandırılır. Bir $T : V^k \rightarrow \square$ çok lineer fonksiyonuna V üstünde bir k -tensör denir ve $J^k(V)$ ile gösterilen bütün k -tensörlerin kümesi S , $T \in J^k(V)$ ve $a \in \square$ için

$$(S + T)(v_1, \dots, v_k) = S(v_1, \dots, v_k) + T(v_1, \dots, v_k),$$

$$(aS)(v_1, \dots, v_k) = a.S(v_1, \dots, v_k)$$

şeklinde tanımlı işlemlerle birlikte $\square$ üzerinde bir vektör uzayı olur.

Tanım 1.5.2. $S \in J^k(V)$ ve $T \in J^\ell(V)$ ise $S \otimes T \in J^{k+\ell}(V)$ tensör çarpımı

$$S \otimes T(v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_{k+\ell}) = S(v_1, \dots, v_k).T(v_{k+1}, \dots, v_{k+\ell})$$

şeklinde tanımlanır. S ve T çarpanlarının sırası önemli olup $\otimes$ tensör çarpımı işleminin aşağıdaki özellikleri vardır:

$$(S_1 + S_2) \otimes T = S_1 \otimes T + S_2 \otimes T,$$

$$S \otimes (T_1 + T_2) = S \otimes T_1 + S \otimes T_2,$$

$$(aS) \otimes T = S \otimes (aT) = a(S \otimes T),$$

$$(S \otimes T) \otimes U = S \otimes (T \otimes U).$$

$(S \otimes T) \otimes U$ ve $S \otimes (T \otimes U)$ nun ikisi de genellikle basit olması için $S \otimes T \otimes U$ şeklinde gösterilir ve daha yüksek mertebeden $T_1 \otimes \dots \otimes T_r$ çarpımları da benzer şekilde tanımlanır. Burada $J^1(V)$, V^* eşlenik uzayıdır.

Tanım 1.5.3. $\sum_{j=1}^n a_j x^j$ ifadesindeki gibi bir indis (bir kez üstte bir kez alta olmak üzere) iki kez tekrarlanırsa $\sum$ işaretini kaldırıp sadece $a_j x^j$ yazarak, indise alması mümkün bütün değerleri vermek suretiyle elde edilen, bütün terimlerin toplanması kabulüne Einstein toplam kuralı denir.

Tanım 1.5.4. E , n -boyutlu bir reel vektör uzayı ve E^* ise E nin eşlenik uzayı olmak üzere, $\underbrace{E \otimes \dots \otimes E}_r \otimes \underbrace{E^* \otimes \dots \otimes E^*}_s$ üzerindeki bir tensöre bir (r, s) -tensör veya r . mertebeden kontravaryant ve s . mertebeden kovaryant tensör denir.

Tanım 1.5.5. Diferansiyellenebilir bir M^n manifoldunun bir p noktasında s . mertebeden kovaryant bir tensör (kısacası bir $(0, s)$ -tensör)

$$D_p : \underbrace{T_p(M^n) \times \dots \times T_p(M^n)}_s \rightarrow \square$$

şeklinde tanımlanan çok lineer bir dönüşüm ve benzer şekilde 1. mertebeden kontravaryant ve s . mertebeden kovaryant bir tensör (kısacası bir $(1, s)$ -tensör) de

$$D_p : \underbrace{T_p(M^n) \times \dots \times T_p(M^n)}_s \rightarrow T_p(M^n)$$

şeklinde tanımlanan çok lineer bir dönüşümdür.

Diferansiyellenebilir bir M^n manifoldu için s . mertebeden kovaryant bir tensör alanı (kısacası bir $(0, s)$ -tensör alanı)

$$D: \underbrace{\mathcal{X}(M^n) \times \dots \times \mathcal{X}(M^n)}_s \rightarrow \mathfrak{S}(M^n)$$

şeklinde tanımlanan çok lineer bir dönüşüm ve benzer şekilde 1.mertebeden kontravaryant ve s .mertebeden kovaryant bir tensör alanı (kısacası bir $(1,s)$ -tensör alanı) da

$$D: \underbrace{\mathcal{X}(M^n) \times \dots \times \mathcal{X}(M^n)}_s \rightarrow \mathcal{X}(M^n)$$

şeklinde tanımlanan çok lineer bir dönüşümdür.

Tanım 1.5.6. $D: \mathcal{X}(M^n) \times \dots \times \mathcal{X}(M^n) \rightarrow \mathcal{X}(M^n)$ şeklinde tanımlanan $(1,s)$ -tensör alanından, her $i \in \{1, \dots, s\}$ ve X_j , $j \neq i$ vektör alanları için elde edilen $D(X_1, \dots, X_{i-1}, -, X_{i+1}, \dots, X_s)$ tensör alanı bir $(1,1)$ -tensör alanıdır ve C_i , i . büzülme göstermek üzere,

$$C_i D(X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_s) = \sum_{j=1}^n g(D(X_1, \dots, X_{i-1}, E_j, X_{i+1}, \dots, X_s), E_j)$$

şeklinde tanımlanan $C_i D$ tensör alanına D tensör alanından büzülme (contraction) ile elde edilen tensör alanı denir. Bu durumda $C_i D$, bir $(0, s-1)$ - tensör alanıdır.

Tanım 1.5.7. $\omega: \underbrace{\mathcal{X}(M^n) \times \dots \times \mathcal{X}(M^n)}_r \rightarrow \mathfrak{S}(M^n)$ şeklinde tanımlı ters-simetrik ve

$\mathfrak{S}(M^n)$ üzerinde r -lineer dönüşümüne bir r -form adı verilir. Böylece ω r -formu, $\wedge$

dış çarpım olmak üzere, $\omega = \frac{1}{r!} \sum_{i_1, \dots, i_r=1}^n \omega_{i_1 \dots i_r} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}$ şeklindedir ve eğer $\omega_{i_1 \dots i_r}$ bileşenleri

diferansiyellenebilir ise ω ya diferansiyellenebilir r -form adı verilir.

1.6. Riemann manifoldları

h, i, j, k, ℓ indisleri $1, 2, \dots, n$ dizisinde değerler alacak şekilde U, M^n de bir noktanın bir komşuluğunu ve x^h , U üstündeki yerel koordinatları göstermek üzere, $\{U, x^h\}$ koordinat komşulukları ile örtülen C^∞ sınıfından n -boyutlu bir M^n manifoldunu göz önüne alalım. Bundan böyle aksi söylenmedikçe yalnızca 1 den büyük boyutlu bağlantılı manifoldları göz önüne alacağız.

Tanım 1.6.1. M^n manifoldunu örten koordinat komşuluklarının herhangi bir sistemi verildiğinde bunlardan sonlu sayıda ve manifoldun tamamını örtecek şekilde koordinat komşulukları seçilebiliyor ise M^n manifolduna kompakt (tıkız) bir manifold denir.

Tanım 1.6.2. M^n manifoldunun tamamının koordinat komşuluklarının bir sistemiyle örtüldüğünü varsayalım. Eğer bu sistemin herhangi iki $\{U, x^h\}$ ve $\{U', x^{h'}\}$ koordinat komşuluklarının boştan farklı kesişimleri üstünde

$$x^{h'} = x^{h'}(x^1, \dots, x^n)$$

ile verilen koordinat dönüşümlerinin

$$|\partial x^{h'} / \partial x^h|$$

şeklindeki Jakobi determinantları daima pozitif ise M^n manifolduna yönlendirilebilir bir manifold denir.

Tanım 1.6.3. Bir M^n manifoldu üzerinde

a) $g(X, Y) = g(Y, X), \forall X, Y \in \mathcal{X}(M^n),$

b) $g(X, X) \geq 0, \forall X \in \mathcal{X}(M^n)$ ve $g(X, X) = 0 \Leftrightarrow X = 0$

koşullarını sağlayan $(0,2)$ tipinden g tensör alanına bir Riemann metriği adı verilir. Üzerinde bir g Riemann metriği tanımlı bir M^n manifolduna da bir Riemann manifoldu denir.

$\{U, x^h\}$ koordinat komşuluğu üstündeki $\partial_i = \partial/\partial x^i$ ile gösterilen baz vektörleri için M^n üstündeki X ve Y vektör alanlarının yerel bileşenleri, ∂_h yerel çatısına göre, sırasıyla X^h ve Y^h olmak üzere, bu vektör alanları

$$X = X^h \partial_h, Y = Y^h \partial_h$$

şeklinde yazılır. Buna göre, g metrik tensör alanının yerel bileşenleri

$$g_{ji} = g(\partial_j, \partial_i)$$

ler olmak üzere,

$$g(X, Y) = g(X^j \partial_j, Y^i \partial_i) = g_{ji} X^j Y^i$$

yazabiliriz.

Tanım 1.6.4. g , M^n üstünde bir metrik tensör olmak üzere; bir X vektörünün uzunluğu

$$\|X\| = \sqrt{g(X, X)}$$

şeklinde ve aynı noktada tanımlı sıfırdan farklı iki X ve Y vektörü arasındaki θ açısı da

$$\cos \theta = \frac{g(X, Y)}{\|X\| \|Y\|}$$

şeklinde tanımlanır. $g(X, X)$ karesel formu pozitif tanımlı olduğundan, g nin g_{ji} yerel bileşenleriyle oluşturulan

$$g = |g_{ji}|$$

determinantı daima pozitifdir ve $\delta_j^i = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$ Kronecker sembolünü göstermek üzere,

$$g_{ji} g^{ih} = \delta_j^h$$

olacak şekilde metrik tensörün ters (invers) bileşenleri olan g^{ih} lar bulunabilir. g^{ih} lar, g metrik tensörünün kontravaryant bileşenleri ve g_{ji} ler de kovaryant bileşenleri olarak adlandırılır. Bir tensörün bileşenlerinin indislerini indirmek veya kaldırmak (transvecting) için g_{ji} kovaryant bileşenleri ve g^{ih} kontravaryant bileşenleri kullanılır, örneğin;

$$T_{jih} = T_{ji}^t g_{th} \text{ ve } T_{ji}^h = T_{jit} g^{th}.$$

$\|T\|^2 = T_{jih} T^{jih}$ olmak üzere $\|T\|$, T tensörünün normu olarak adlandırılır.

Tanım 1.6.5. $f, g \in \mathfrak{S}(M^n)$ ve $X, Y \in \mathcal{X}(M^n)$ olmak üzere,

a) $\nabla_{fX+gY} = f\nabla_X + g\nabla_Y,$

b) $\nabla_X(fY) = (Xf)Y + f\nabla_X Y,$

koşullarını sağlayan

$$\begin{aligned} \nabla : \mathcal{X}(M^n) \times \mathcal{X}(M^n) &\rightarrow \mathcal{X}(M^n) \\ (X, Y) &\mapsto \nabla_X Y \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı lineer bir dönüşüme M^n manifoldu üzerinde bir afin koneksiyon ve ∇_X operatörüne de X vektör alanına göre kovaryant türev operatörü denir. Genel olarak bir D $(0, s)$ -tensör alanı (sırasıyla $(1, s)$ -tensör alanı) nın $\nabla_X D$ kovaryant türevi,

$$(\nabla_X D)(X_1, \dots, X_s) = \nabla_X (D(X_1, \dots, X_s)) - \sum_{i=1}^s D(X_1, \dots, X_{i-1}, \nabla_X X_i, X_{i+1}, \dots, X_s)$$

şeklinde tanımlanır. O takdirde $\nabla_X D$ bir $(0, s)$ -tensör alanı (sırasıyla $(1, s)$ -tensör alanı) dır ve ∇D ,

$$(\nabla D)(X, X_1, \dots, X_s) = (\nabla_X D)(X_1, \dots, X_s)$$

şeklinde tanımlanan bir $(0, s+1)$ -tensör alanı (sırasıyla bir $(1, s+1)$ -tensör alanı) dır.

Tanım 1.6.6. Bir afin koneksiyona sahip M^n manifoldu üzerinde $X, Y \in \mathcal{X}(M^n)$ olmak üzere,

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

şeklinde tanımlı $(1, 2)$ -tipinden T tensör alanına burulma tensör alanı denir.

Teorem 1.6.1 Bir M^n manifoldu üzerinde

a) $T(X, Y) = 0$

b) $\nabla_x g = 0$

koşullarını sağlayan bir ve ancak bir afin koneksiyon vardır ve bu koneksiyona Riemann koneksiyonu adı verilir. Bu tez çalışmasında bir ∇ koneksiyonu bir Riemann koneksiyonu şeklinde alınmıştır.

2. RIEMANN MANİFOLDLARIN HARMONİK DÖNÜŞÜMLERİ

2.1. Bir dönüşümün enerjisi

(M, g) ve (N, h) sırası ile m ve n boyutlu, bağlantılı, kompakt, yönlendirilebilir ve sınırlı olmayan iki Riemann manifoldu olsun.

$$u : M \rightarrow N$$

bir düzgün dönüşüm olmak üzere u nun diferansiyeli du dönüşümü $x \in M$ noktasında

$$du(x) = du_x : T_x M \rightarrow T_{u(x)} N$$

şeklinde tanımlı lineer bir dönüşümdür. O halde $du_x, \text{Hom}(T_x M, T_{u(x)} N)$ uzayına aittir.

$$\text{Hom}(T_x M, T_{u(x)} N) \cong T_x^* M \otimes T_{u(x)} N$$

şeklinde bir lineer izomorfizm vardır. Böylece,

$$du : M \rightarrow T_x^* M \otimes T_{u(x)} N$$

şeklinde bir dönüşümdür, burada $u^* T_{u(x)} N$, $x \in M$ deki lifi (fiber'ı) $T_{u(x)} N$ olan ve M üzerine geri-çekilmiş olan vektör demetidir. Bu durumda $T_x^* M \otimes T_{u(x)} N$, M üzerinde $x \in M$ noktasındaki lifi $T_x^* M \otimes T_{u(x)} N$ olan bir vektör demetidir. O halde $du, T_x^* M \otimes T_{u(x)} N$ in bir kesiti (section) dir. Şimdi, $T_x^* M \otimes T_{u(x)} N$ nin bir bazı

$$\{(dx^i)_x \otimes (dy^a)_{u(x)} : 1 \leq i \leq m, 1 \leq a \leq n\} \quad (2.1.1)$$

olsun. Buna göre

$$du_x = \sum_{i=1}^m \sum_{a=1}^n \frac{\partial u}{\partial x^i}(x) (dx^i)_x \otimes (dy^a)_{u(x)} \quad (2.1.2)$$

şeklinde yazabiliriz. Şimdi de $T_x^* M \otimes T_{u(x)} N$ üstündeki iç çarpımı $\langle \cdot, \cdot \rangle$ $T_x^* M$ ve $A, B \in T_{u(x)} N$ olmak üzere

$$\langle (dx^i)_x \otimes (dy^a)_{u(x)}, (dx^j)_x \otimes (dy^b)_{u(x)} \rangle_x = g^{ij}(x) h_{ab}(u(x))$$

veya eşdeğer olarak

$$\langle w \otimes A, q \otimes B \rangle = \langle w, q \rangle_g \langle A, B \rangle_h \quad (2.1.3)$$

biçiminde tanımlayalım. Böylece,

$$|du_x|^2 = \hat{a} du_x, du_x \tilde{n}_x = g^{ij}(x) h_{ab}(u(x)) \frac{\mathbb{Q} u^a}{\mathbb{Q} x^i}(x) \frac{\mathbb{Q} u^b}{\mathbb{Q} x^j}(x)$$

şeklinde ifade edebiliriz. Buna göre $T_x^* M \tilde{\Delta} T_{u(x)} N$ üstündeki metrikten $TM^* \tilde{\Delta} u^{-1} TN$ lifinin metriğini, $x \hat{\in} M$ ve $T, S \hat{\in} G(TM^* \tilde{\Delta} u^{-1} TN)$ olmak üzere

$$\hat{a} T, S \tilde{n}(x) = \hat{a} T(x), S(x) \tilde{n}_x$$

şeklinde tanımlayabileceğimizden

$$|du|^2 = g^{ij} h_{ab} \frac{\mathbb{Q} u^a}{\mathbb{Q} x^i} \frac{\mathbb{Q} u^b}{\mathbb{Q} x^j}$$

biçiminde tanımlarız.

Tanım 2.1.1 M ve N Riemann manifoldları ve M kompakt ve yönlendirilmiş olsun.

$$u : M \rightarrow N$$

dönüşümü için

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_M |du|^2 dm_g \quad (2.1.4)$$

şeklinde verilen fonksiyonele *enerji fonksiyoneli* adı verilir. Burada dm_g , M üstündeki hacim formu ve $|du|^2 = \hat{a} du, du \tilde{n}$ dır. N üstündeki h metriğini $\square^n$ üstündeki metrikten $h = \iota^*(g_0)$ şeklinde elde edebiliriz. Burada, $\iota : N \rightarrow \square^n$ ve $g_0, \square^n$ üstündeki metriktir. Buna göre $u(x) = \iota \circ u(x) = (u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)) \hat{\in} \square^n$ olduğundan $\frac{1}{2} |du|^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n |du_i|^2$ şeklinde olur ve $u_i \hat{\in} C^\infty(M)$ olduğundan du_i ler M üstündeki 1-formlardır. M kompakt ve u düzgün olduğundan bu $E(u)$ fonksiyoneli sonludur, aksi durumda yani genel olarak sonlu değildir.

Tanım 2.1.2 u nun bir varyasyonu u_t olmak üzere eğer

$$\left. \frac{d}{dt} E(u_t) \right|_{t=0} = 0$$

ise u ya enerji fonksiyonelinin bir *kritik noktası* adı verilir.

2.2. TM^* ve $u^{-1}TN$ üstündeki koneksiyonlar

TM^* üstündeki koneksiyonu $\tilde{N}^*$ ile gösterirsek bu koneksiyonu

$$\tilde{N}_X^* w(Y) = X(w(Y)) - w(\tilde{N}_X Y), \quad (2.2.1)$$

burada $X, Y \in TM$ ve $w \in TM^*$ ve $\tilde{N}, M$ üstündeki koneksiyondur.

M de $\tilde{N}$ nın koneksiyon katsayıları $\tilde{N}_{x^i} x^j = \sum_{k=1}^m G_{ij}^k x^k$ lar olmak üzere

$$\tilde{N}_{x^i}^* dx^k = - \sum_{j=1}^m G_{ij}^k dx^j, 1 \leq i, k \leq m \quad (2.2.2)$$

buluruz.

Şimdi de $u^{-1}TN$ üstündeki koneksiyonu $\tilde{N}$ ile gösterelim.

$(y^1, y^2, \dots, y^n) \in N$ lokal koordinatlara göre $((\mathbb{Q}/\mathbb{Q}y^g) \circ u)(x) = (\mathbb{Q}/\mathbb{Q}y^g)_{u(x)}$ ve $T_x^* M \xrightarrow{\tilde{A}} T_{u(x)} N$ lifinin bir bazı

$$\{((\mathbb{Q}/\mathbb{Q}y^1) \circ u)(x), \dots, ((\mathbb{Q}/\mathbb{Q}y^n) \circ u)(x)\}$$

olmak üzere $\tilde{N}$ koneksiyonunu

$$(\tilde{N}_{\mathbb{Q}/\mathbb{Q}x^i} (\mathbb{Q}/\mathbb{Q}y^a) \circ u)(x) = \tilde{N}_{du_x((\mathbb{Q}/\mathbb{Q}x^i)_x)}^N \mathbb{Q}/\mathbb{Q}y^g, 1 \leq i \leq m, 1 \leq g \leq n$$

şeklinde tanımlarız.

Böylece ,

$$(\tilde{N}_{\mathbb{Q}/\mathbb{Q}x^i} (\mathbb{Q}/\mathbb{Q}y^a) \circ u)(x) = \sum_{b=1}^n \sum_{a=1}^m \frac{\mathbb{Q}u^a}{\mathbb{Q}x^i}(x) \tilde{G}_{ag}^b(u(x)) \frac{\partial}{\partial y^b} ((\mathbb{Q}/\mathbb{Q}y^b) \circ u)(x)$$

olduğu kolayca görülür. Burada $\tilde{G}_{ag}^b$ lar (y^g) koordinatlarına göre $\tilde{N}^N$ nin koneksiyon katsayılarını gösterecektir. Buna göre $\tilde{N}$ koneksiyonunun katsayıları

$$\sum_{a=1}^m \frac{\mathbb{Q}u^a}{\mathbb{Q}x^i}(x) \tilde{G}_{ag}^b(u) : 1 \leq i \leq m, 1 \leq b, g \leq n \quad (2.2.3)$$

şeklinde bulunur.

Artık $TM^* \tilde{\Delta} u^{-1}TN$ üstündeki koneksiyonu tanımlamamız mümkündür. Bu koneksiyonu $\tilde{N}$ ile gösterelim. $TM^* \tilde{\Delta} u^{-1}TN$ çarpım demetinde yer alacak bir kesit(section), $w \hat{\in} G(TM^*)$ ile $W \hat{\in} G(u^{-1}TN)$ tensörlerinin bir çarpımı şeklindedir. O halde,

$$\tilde{N}(w \tilde{\Delta} W) = (\tilde{N}^* w) \tilde{\Delta} W + w \tilde{\Delta} (\tilde{N} W) \quad (2.2.4)$$

yazabiliriz. Böylece,

$$\tilde{N} : G(TM^* \tilde{\Delta} u^{-1}TN) \otimes G(TM^* \tilde{\Delta} TM^* \tilde{\Delta} u^{-1}TN)$$

olduğu görülür.

Şimdi bu koneksiyonların tanımlandığı metrikleri biraz açıklığa kavuşturalım.

Bunun için M nin kotanjant demeti T^*M üzerindeki metrik g^* olsun. Bu metriği $1, m \hat{\in} T_x^*M$ elemanlarını bunların T_xM deki ters görüntüleri ile eşleştiren

$$\begin{aligned} T_xM &\otimes T_x^*M \\ Z &\otimes g_x(Z, \cdot) \end{aligned}$$

şeklindeki izomorfizma sayesinde elde ederiz. Buna göre $X, Y \hat{\in} T_xM$ için

$$1 = g_x(X, \cdot), s = g_x(Y, \cdot)$$

ise, bu durumda

$$g_x^*(1, s) = g_x(X, Y)$$

dir. Böylece, $TM^* \tilde{\Delta} u^{-1}TN$ tensör çarpımı üzerindeki metrik $\acute{a}, \tilde{n}$ ise bu metriği

$1, s \hat{\in} C^\infty(T^*M)$ ve $V, W \hat{\in} C^\infty(u^{-1}(TN))$ için

$$\acute{a} \tilde{\Delta} V, s \tilde{\Delta} W \tilde{n}(x) = g^*(1, s) h_{u(x)}(V, W)$$

şeklinde tanımlayabiliriz.

Diğer taraftan u nun diferansiyeli du , $TM^* \tilde{\Delta} u^{-1}TN$ nin bir kesiti olduğundan tanımdan

$$\begin{aligned} \acute{a} du, du \tilde{n}(x) &= \sum_i h_{u(x)}(du_x(e_i), du_x(e_i)) \\ &= iz_g^*(h(x)) \end{aligned}$$

buluruz. Burada (e_i) , T_xM nin ortonormal bir bazıdır.

T^*M nin M nin $\tilde{N}^M$ koneksiyonuna dual olan $\tilde{N}^*$ koneksiyonunu daha önceki gibi

$$(\tilde{N}_x^* s)(Y) = X(s(Y)) - s(\tilde{N}_x^M Y)$$

olarak tanımlayabiliriz. Burada, $X, Y \in C^\infty(TM)$ ve $s \in C^\infty(T^*M)$ dir. O halde $\tilde{N}^*$ koneksiyonu basitçe, M üstündeki 1-formların bildiğimiz kovaryant türevidir. Buna göre daha önceki gibi $C^\infty(T^*M \times u^{-1}(TN))$ üstündeki koneksiyonu daha açık şekilde aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz.

Tanım 2.2.1 $u: M \rightarrow N$ dönüşümü verilsin. $C^\infty(T^*M \times u^{-1}(TN))$ üstündeki $\tilde{N}$ koneksiyonu $X \in C^\infty(TM)$, $1 \in C^\infty(T^*M)$ ve $V \in C^\infty(u^{-1}(TN))$ olmak üzere

$$\tilde{N}_x(1 \otimes V) = (\tilde{N}_x^* 1) \otimes V + 1 \otimes (\tilde{N}_x^u V)$$

şeklinde tanımlı bir koneksiyondur.

Tanım 2.2.2 $u: M \rightarrow N$ dönüşümü verilsin. u nun ikinci esas formu du nun $\tilde{N}du$ şeklindeki kovaryant türevidir. Yani,

$$\tilde{N}du: C^\infty(TM) \times C^\infty(TM) \rightarrow C^\infty(u^{-1}(TN))$$

şeklinde verilir. İkinci esas formun simetrik ve $M \times N$ şeklindeki düzgün fonksiyonların halkası üzerinde bilineer olduğu açıktır.

Buna tanıma göre $X, Y \in C^\infty(TM)$ olmak üzere

$$\tilde{N}du(X, Y) = (\tilde{N}_x du)(Y) = \tilde{N}_x^u du(Y) - du(\tilde{N}_x^M Y)$$

yazabiliriz.

Tanım 2.2.3 $u: M \rightarrow N$ dönüşümü verilsin. u nun ikinci esas formunun izine u nun gerilme alanı adı verilir, yani

$$t(u) = \text{iz}(\tilde{N}du)$$

şeklindedir.

Tanım 2.2.4 M ve N Riemann manifoldları olmak üzere $u: M \rightarrow N$ dönüşümü verilsin. Eğer her yerde gerilme alanı sıfır, yani

$$t(u) = 0$$

ise $u: M \rightarrow N$ dönüşümüne *harmonik* tir diyeceğiz.

Şimdi M , N ve P Riemann manifoldları olsun. Bu manifoldlar arasında

$$u: M \rightarrow N \text{ ve } v: N \rightarrow P$$

dönüşümleri tanımlansın, zincir kuralı ile aşağıdaki teoremi kolayca kanıtlayabiliriz.

Teorem 2.2.1 u ve v dönüşümleri yukarıdaki gibi verilsin. Bu durumda

$$\tilde{N}d(v \circ u) = dv(\tilde{N}du) + \tilde{N}dv(du, du)$$

ve

$$t(v \circ u) = dv(t(u)) + iz(\tilde{N}dv(du, du))$$

ifadeleri yazılabilir.

Bir $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu ve M nin TM tanjant demetinin bir (e_i) bazı için

$$\begin{aligned} t(f) &= iz(\tilde{N}df) \\ &= \mathring{a}_i \tilde{N}df(e_i, e_i) \\ &= \mathring{a}_i (\tilde{N}_{e_i}^f df(e_i) - df(\tilde{N}_{e_i}^M(e_i))) \\ &= \mathring{a}_i (e_i(e_i(f)) - \tilde{N}_{e_i}^M e_i(f)) \\ &= \mathring{a}_i g(\tilde{N}_{e_i}^M gradf, e_i) \\ &= div(gradf) \\ &= D^M \end{aligned}$$

yazabiliriz. Böylece fonksiyonlar için gerilme alanı $t = D^M$ şeklinde olmaktadır.

O halde $x \in M$ ve $y = u(x)$ olmak üzere $y \in N$ noktası civarında M ve N nin lokal koordinatları sırası ile (x^k) ve (y^k) olsun. $u : M \rightarrow N$ dönüşümü için kolayca

$$\begin{aligned} t(u)^a &= \mathring{a}_{i,j} g^{ij} (\tilde{N}du)_{ij}^a \\ &= \mathring{a}_{i,j} g^{ij} \frac{\mathbb{Q}^2 u^a}{\mathbb{Q} x^i \mathbb{Q} x^j} - \mathring{a}_{i,j,k} g^{ij} G_{ij}^k \frac{\mathbb{Q} u^a}{\mathbb{Q} x^k} + \mathring{a}_{i,j,b,g} g^{ij} \bar{G}_{bg}^a \frac{\mathbb{Q} u^b \mathbb{Q} u^g}{\mathbb{Q} x^i \mathbb{Q} x^j} \\ &= D^M(u^a) + \mathring{a}_{i,j,b,g} g^{ij} \bar{G}_{bg}^a \frac{\mathbb{Q} u^b \mathbb{Q} u^g}{\mathbb{Q} x^i \mathbb{Q} x^j} \end{aligned}$$

olduğu görülür. Burada $\bar{G}$, N üstündeki Christoffel sembolünü göstermektedir ve bu ifade $a = 1, 2, \dots, n$ için geçerlidir. Böylece eğer $N = \mathbb{R}^n$ ise u nun harmonik olması için bileşenleri harmonik fonksiyonlar olmalı ve

$$t(u) = (D^M(u^1), D^M(u^2), \dots, D^M(u^n))$$

biçiminde ifade edilebilmelidir. Bu durumda eğer $I \hat{=} \square$ bir açık aralık ve M bir Riemann manifoldu olmak üzere

$$c: I \otimes M$$

eğrisi M de bir düzgün eğri ve M nin lokal koordinatları (x^k) olsun. Böylece $t(u)$ nun yukarıda elde ettiğimiz ifadesinden

$$t(c)^k = \frac{d^2 c^k}{dt^2} + \mathring{a}_{i,j} \tilde{G}_{ij}^k \frac{dc^i}{dt} \frac{dc^j}{dt}$$

buluruz. Burada $\tilde{G}$, M üstündeki Christoffel sembollerini göstermektedir.

Sonuç olarak, c nin harmonik olması için gerek ve yeter koşulun onun bir jeodezik eğri olması gerektiğini elde ederiz. O halde bir manifold üstünde bulunan jeodezik eğriler aynı zamanda bir harmonik dönüşüm tanımlamaktadır.

Teorem 2.2.2 $u: M \otimes N$ dönüşümü ve $X, Y \hat{=} C^{\infty}(TM)$ verilsin. N üstündeki $\tilde{N}^N$ koneksiyonunu u ile geri çekelim ve bu geri çekilmiş koneksiyonu $\tilde{N}^u$ ile gösterelim. Bu durumda

$$\tilde{N}_X^u du(Y) - \tilde{N}_Y^u du(X) - du([X, Y]) = 0$$

olduğunu görürüz.

Kanıt. $X = \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Q}x^i}, Y = \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Q}x^j}$ seçelim ve N üstünde $u(x)$ in bir komşuluğu üstünde (y^a) lokal koordinatları kullanalım. O halde,

$$\begin{aligned} \tilde{N}_{\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Q}x^j}}^u du(\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Q}x^j}) - \tilde{N}_{\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Q}x^i}}^u du(\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Q}x^i}) &= \mathring{a}_a \tilde{N}_{\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Q}x^j}}^u \frac{\mathbb{Q}u^a}{\mathbb{Q}x^j} \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Q}y^a} - \mathring{a}_a \tilde{N}_{\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Q}x^i}}^u \frac{\mathbb{Q}u^a}{\mathbb{Q}x^i} \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Q}y^a} \\ &= \mathring{a}_a \frac{\mathring{e} \mathbb{Q}^2 u^a}{\mathbb{Q}x^i \mathbb{Q}x^j} - \frac{\mathbb{Q}^2 u^a}{\mathbb{Q}x^j \mathbb{Q}x^i} \frac{\ddot{\mathbb{Q}}}{\mathbb{Q}y^a} + \mathring{a}_a \frac{\mathring{e} \mathbb{Q} u^a}{\mathbb{Q}x^j} \tilde{N}_{\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Q}x^j}}^u \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Q}y^a} - \frac{\mathbb{Q} u^a}{\mathbb{Q}x^i} \tilde{N}_{\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Q}x^j}}^u \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Q}y^a} \frac{\ddot{\mathbb{Q}}}{\mathbb{Q}} \end{aligned}$$

yazabiliriz. Yukarıdaki ifadenin sağ tarafındaki ilk terim ikinci türevlerin simetrik oluşundan sıfırdır, ikinci terim ise

$$\tilde{N}_X^u u^*(Y)(x) = u^*(\tilde{N}_{du_x(X)}^N Y)(x)$$

olduğunu kullanırsak,

$$\begin{aligned}
\mathring{a}_a \frac{\mathbb{Q} u^a}{\mathbb{Q} x^j} \tilde{N}^u_{\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Q} x^j}} \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Q} y^a} &= \mathring{a}_{a,b} \frac{\mathbb{Q} u^a}{\mathbb{Q} x^j} \frac{\mathbb{Q} u^b}{\mathbb{Q} x^i} \tilde{N}^N_{\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Q} y^b}} \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Q} y^a} \\
&= \mathring{a}_{a,b} \frac{\mathbb{Q} u^a}{\mathbb{Q} x^j} \frac{\mathbb{Q} u^b}{\mathbb{Q} x^i} \tilde{N}^N_{\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Q} y^a}} \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Q} y^b} \\
&= \mathring{a}_b \frac{\mathbb{Q} u^b}{\mathbb{Q} x^i} \tilde{N}^u_{\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Q} x^j}} \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Q} y^b}
\end{aligned}$$

elde edilebileceğinden sıfır olarak bulunur. Böylece Teorem 1.6.1 den ispat tamamlanmış olur.

Şimdi enerji fonksiyoneli kullanarak aşağıdaki teoremi ispatlayalım.

Teorem 2.2.3 M ve N kompakt Riemann manifoldları ve M yönlendirilmiş olsun. O halde düzgün $u : M \rightarrow N$ dönüşümünün harmonik olması için gerek ve yeter koşul u nun enerji fonksiyonelinin bir kritik noktası olmasıdır.

Kanıt. u nun bir düzgün varyasyonu u_t olsun.

$$u_t(x) = U(t, x) : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M \rightarrow N$$

gösterimini tanımlayalım. TM tanjant demetinin ortonormal bir bazı $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ olmak üzere $(-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ çarpım manifoldunun $(0, e_i)$ şeklindeki elemanını yine e_i ile gösterelim.

Teorem 2.2.1 den

$$\tilde{N}^u_{\mathbb{Q}/\mathbb{Q}t} du(e_i) = \tilde{N}^u_{e_i} du(\mathbb{Q}/\mathbb{Q}t)$$

yazabiliriz. Şimdi $|t| < \epsilon$ olmak üzere bir $X_t \in C^\infty(TM)$ vektör alanını bir $Y \in C^\infty(TM)$ için

$$g(X_t, Y) = h(du(\mathbb{Q}/\mathbb{Q}t), du(Y))$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \mathring{a}_i h(du(e_i), du(e_i)) &= \mathring{a}_i h(\tilde{N}^u_{\mathbb{Q}/\mathbb{Q}t} du(e_i), du(e_i)) \\
&= \mathring{a}_i h(\tilde{N}^u_{e_i} du(\mathbb{Q}/\mathbb{Q}t), du(e_i)) \\
&= \mathring{a}_i (e_i(g(X_t, e_i)) - h(du(\mathbb{Q}/\mathbb{Q}t), du(\tilde{N}^M_{e_i} e_i))) - \mathring{a}_i h(du(\mathbb{Q}/\mathbb{Q}t), \tilde{N} du(e_i, e_i)) \\
&= \text{div}(X_t) - h(du(\mathbb{Q}/\mathbb{Q}t), \mathring{a}_i du(e_i, e_i))
\end{aligned}$$

elde ederiz. Burada $\tilde{N}$, $TM^* \tilde{A} u^{-1}TN$ üstündeki koneksiyonu göstermektedir. Yukarıdaki son ifadenin ilk terimi Stokes teoremi nedeniyle sıfırdır, o halde geriye kalan kısım istenen

$$\left. \frac{d}{dt} E(u_t) \right|_{t=0} = - \int_M h \left(\frac{\partial u_t}{\partial t} \right) \bigg|_{t=0}, \int_M \langle u, \frac{\partial}{\partial t} \rangle dm_g$$

ifadesidir ki bu ifade u nun herhangi bir düzgün varyasyonu u_t için geçerli olduğundan teoremi kanıtlamış oluruz.

3. GENELLEŞTİRİLMİŞ VARYASYON FORMÜLÜ

Bu bölümde klasik olarak E^3 deki eğriler için bilinen birinci varyasyon formülünün bir Riemann manifoldu üstündeki eğrilere genelleştirilmesini göz önüne alarak birinci varyasyon formülünü iki Riemann manifoldu arasındaki uygun dönüşümlere genişletmek istiyoruz.

Bunun için M ve N Riemann manifoldlarının C^∞ -sınıfından $u: M \rightarrow N$ dönüşümünü göz önüne alalım ve $I = (-\epsilon, \epsilon)$ aralığı olsun.

Tanım 3.1 $u \in C^\infty(M, N)$ olsun. $x \in M$ için

$$F(x, 0) = u(x)$$

şeklinde verilen bir $F \in C^\infty(M \times I, N)$ dönüşümüne u nun bir *düzgün varyasyonu* adı verilir.

Eğrilerde olduğu gibi $x \in M$ ve $s \in I$ için

$$u_s(x) = F(x, s)$$

gösterimini kullanalım. Böylece $u_s \in C^\infty(M, N)$ ve $u_0 = u$ olmak üzere $\{u_s\}_{s \in I}$ şeklinde dönüşümlerin bir ailesi mevcuttur. Şimdi $x \in M$ noktasını sabit turalım ve $s \in I$ olmak üzere

$$u_x(s) = F(x, s)$$

olsun. Böylece u_x, N üstünde $s = 0$ için $u(x)$ den geçen

$$u_x: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow N$$

şeklinde C^∞ -sınıfından bir eğri tanımlayacaktır. Şimdi u dönüşümü için varyasyonel bir vektör alanını tanımlayalım. Bunun için aşağıdaki tanımlamaları yapalım. $s = 0$ da $u(x)$ eğrilerinin tanjant vektörlerinin kümesini göz önüne alarak

$$V(s) = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} u_x(s) = \frac{d}{ds} (u_x(0)) = \frac{d}{ds} (F(x, 0))$$

tanımlayalım. Diğer taraftan,

$$V(x) = \frac{d}{dt} (F(x, 0)) \in T_{u(x)} N$$

vektörü $x \in M$ noktasında u dönüşümü boyunca N de bulunan ve $G(u^{-1}TN)$ ye ait olan bir vektör alanıdır. O halde,

$$T_{(x,s)}(M \times I) = T_x M \oplus T_s I$$

Olduğunu kullanarak aşağıdaki tanımı yapabiliriz.

Tanım 3.2 u boyunca bir vektör alanı V olsun.

$$V(x) = dF_{(x,0)} \left(\frac{d}{ds} \right)_{s=0} \Big|_{\frac{d}{ds}} \Big|_{s=0}, (x,0) \in M \times I$$

şeklinde verilirse V vektör alanına F sayesinde tanımlanmış bir *varyasyonal vektör alanı* adı verilir. Böylece V u boyunca bir varyasyonal vektör alanı ise $V \in G(u^{-1}TN)$ olacağı açıktır. O zaman yeteri kadar küçük bir ϵ için u nun düzgün bir varyasyonu

$$F(x,s) = \exp_{u(x)}(sV(x)), (x,s) \in M \times I$$

şeklinde verilir ve bu durumda

$$V(x) = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} u_x(s), x \in M$$

olacağı açıktır. Şimdi daha sonra kullanacağımız aşağıdaki yardımcı teoremi verelim.

Teorem 3.1 $u \in C^\infty(M, N)$ olsun. O takdirde, $u^{-1}TN$ üstündeki koneksiyon $\tilde{N}$ olmak üzere

$$\tilde{N}_X du(Y) - \tilde{N}_Y du(X) = du([X, Y]), X, Y \in G(TM)$$

dir.

Bu teoremi ispatlamadan önce (2.2.1) ve (2.2.4) ifadelerinden $u \in C^\infty(M, N)$ dönüşümü için, $\tilde{N}, \tilde{N}^*, \tilde{N}$ koneksiyonları sırasıyla $G(TM), G(TM^*)$ ve $G(u^{-1}TN)$ üstündeki koneksiyonlar olsun. $X, Y \in G(TM)$ olmak üzere

$$\tilde{N} du(X, Y) = \tilde{N}_X du(Y) - du(\tilde{N}_X Y) \quad (3.1)$$

olduğunu gösterelim:

$du \in G(TM^* \rightarrow u^{-1}TN)$ olduğundan bir $w \in G(TM^*)$ vektör alanı ve bir $V \in G(u^{-1}TN)$ vektör alanı için bu eşitliği göstermemiz yeterlidir. $\tilde{N}$ ve $\tilde{N}^*$ in (2.2.1) ve (2.2.4) deki tanımlarını kullanarak

$$\begin{aligned} \tilde{N}(w \wedge V)(X, Y) &= (\tilde{N}_X(w \wedge V))(Y) \\ &= (\tilde{N}_X^* w \wedge V + w \wedge \tilde{N}_X V)(Y) \\ &= (Xw(Y) - w(\tilde{N}_X Y)) \wedge V + w(Y) \wedge \tilde{N}_X V \\ &= (Xw(Y)) \wedge V - (w(\tilde{N}_X Y)) \wedge V + w(Y) \wedge \tilde{N}_X V \end{aligned}$$

elde ederiz. Şimdi,

$$(w(\tilde{N}_X Y)) \ddot{A} V = (w \ddot{A} V)(\tilde{N}_X Y)$$

ve $Xw(Y), w(Y) \hat{I} C^\infty(M, \square)$ olduğundan

$$Xw(Y) \ddot{A} V = Xw(Y)V, w(Y) \ddot{A} \tilde{N}_X V = w(Y)\tilde{N}_X V$$

yazabiliriz. Böylece çarpım kuralından

$$Xw(Y) \ddot{A} V + w(Y) \ddot{A} \tilde{N}_X V = \tilde{N}_X w(Y)V = \tilde{N}_X w(Y) \ddot{A} V \quad (3.2)$$

olduğundan istenen gösterilmiş olur.

Teorem 3.1 in Kanıtı: Teorem 3.1 den $\tilde{N}_X du(Y)$ ve $\tilde{N}_Y du(X)$ nin karşılıklarını bulup birbirinden çıkarırsak

$$\tilde{N}_X du(Y) - \tilde{N}_Y du(X) = \tilde{N} du(X, Y) + du(\tilde{N}_X Y) - \tilde{N} du(Y, X) - du(\tilde{N}_Y X)$$

yazarız. Diğer taraftan $\tilde{N}$ bir Levi-Civita(Riemann) koneksiyonu olduğundan burulmasızdır dolayısıyla

$$T(X, Y) = \tilde{N}_X Y - \tilde{N}_Y X - [X, Y] = 0$$

dır. O halde $\tilde{N}_X Y - \tilde{N}_Y X = [X, Y]$

dir. Üstelik, $\tilde{N} du$ simetrik, du lineer ve $\tilde{N}$ burulmasız olduğundan

$$\tilde{N}_X du(Y) - \tilde{N}_Y du(X) = du(\tilde{N}_X Y) - du(\tilde{N}_Y X) = du(\tilde{N}_X Y - \tilde{N}_Y X) = du([X, Y])$$

elde ederiz.

Şimdi birinci varyasyon formülünü genel şeklini ifade ve ispat edebiliriz.

Teorem 3.2 C^∞ -sınıfından $u: M \rightarrow N$ dönüşümünün düzgün bir varyasyonu $F = \{u_s\}_{s \in I}$ olsun. O durumda u nun bir varyasyonal vektör alanı $V = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} u_s$, u nun gerilme alanı $t(u)$ ve $u^* TN$ geri çekilmiş vektör demeti içindeki doğal fiber (lif) metriği $\tilde{a}$ olmak üzere

$$\frac{d}{ds} E(u_s) \Big|_{s=0} = - \int_M \tilde{a} V, t(u) \tilde{d}m_g \quad (3.3)$$

dir.

Kanıt.

$(TM' \setminus I)^* \tilde{A} u^{-1} TN$ üstündeki Riemann koneksiyonunu $\tilde{N}$ ile ve bu koneksiyonun tanımladığı fiber metriğinin de $\tilde{a}, \tilde{n}$ şeklinde gösterirsek o zaman

$$\left. \frac{d}{ds} E(u_s) \right|_{s=0} = \left. \frac{d}{ds} \frac{1}{2} \tilde{O}_M \left| du_s \right|^2 dm_g \right|_{s=0} = \left. \frac{d}{ds} \frac{1}{2} \tilde{O}_M \tilde{a} du_s, du_s \tilde{n} dm_g \right|_{s=0}$$

yazabiliriz. Metriğin simetrik ve $\tilde{N}$ ile bağdaşabilir olması yani $\tilde{N} \tilde{a}, \tilde{n} = 0$ olması nedeni ile

$$\left. \frac{d}{ds} \tilde{O}_M \tilde{a} du_s, du_s \tilde{n} dm_g \right|_{s=0} = \left. \tilde{O}_M \tilde{a} \tilde{N} \frac{d}{ds} du_s, du_s \tilde{n} dm_g \right|_{s=0} \quad (3.4)$$

elde ederiz. Şimdi $X \in G(TM)$ olsun. Buradan (3.1) i kullanarak

$$\tilde{N} \frac{d}{ds} du_s(X) = \tilde{N} \frac{d}{ds} du_s(X) - du_s(\tilde{N} \frac{d}{ds} X)$$

yazarız. Diğer taraftan $du_s = dF$ ve $\tilde{N} \frac{d}{ds} X = 0$ olduğu kolayca görülebilir. Böylece

Teorem 3.1 den

$$\tilde{N} \frac{d}{ds} dF(X) = \tilde{N}_X(dF(\frac{d}{ds})) + dF[\frac{d}{ds}, X]$$

elde ederiz. Ayrıca,

$$[\frac{d}{ds}, \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Q}x^i}] = [(0, \frac{d}{ds}), (\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Q}x^i}, 0)] = 0$$

olduğu dikkate alınırsa

$$\tilde{N} \frac{d}{ds} du_s(Y) = \tilde{N}_X(dF(\frac{d}{ds})) = \tilde{N}_X(\frac{dF}{ds})$$

ifadesine ulaşırız. Bu ifadeyi (3.4) de yerine yazarsak

$$\left. \frac{d}{ds} E(u_s) \right|_{s=0} = \left. \tilde{O}_M \tilde{a} \tilde{N} \frac{\mathbb{Q}F}{\mathbb{Q}s}, du_s \tilde{n} dm_g \right|_{s=0} = \left. \tilde{O}_M \tilde{a} \tilde{N} V, du_s \tilde{n} dm_g \right|_{s=0}$$

buluruz. Burada,

$$V(x) = \left. \frac{\mathbb{Q}F}{\mathbb{Q}s} \right|_{s=0} \text{ ve } du_s|_{s=0} = du$$

olduğunu kullandık. Kanıtı tamamlamak için geriye

$$\int_M \langle \tilde{\nabla} V, du \rangle dm_g = - \int_M \langle \tilde{\nabla} V, t(u) \rangle dm_g$$

olduğunu göstermek kalır. Bunun kanıtı [,] da bulunabilir.

Bu teoremi kullanarak aşağıdaki sonucu ifade edebiliriz.

Sonuç 3.1 M ve N Riemann manifoldlarının C^∞ -sınıfından $u: M \rightarrow N$ dönüşümü verilsin. u nun gerilme alanı $t(u)$ olsun. $u: M \rightarrow N$ dönüşümünün harmonik olması için gerek ve yeter koşul u nun $t(u) = 0$ şeklinde verilen Euler-Lagrange denklemini sağlamasıdır.

Kanıt. Eğer $t(u) = 0$ denklemi sağlanırsa bu durumda (3.3) eşitliğinin sağ tarafı sıfır olur. Bu nedenle

$$\left. \frac{d}{ds} E(u_s) \right|_{s=0} = 0$$

olacağından u harmoniktir. Tersine eğer u , E nin bir kritik noktası ise bu durumda

$$\int_M \langle \tilde{\nabla} V, t(u) \rangle dm_g = 0 \quad (3.5)$$

buluruz. Burada, u nun F ile verilen bir varyasyonal vektör alanı $V = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} u_s$ dir. Bu u nun bütün varyasyonal vektör alanları için geçerli ve $u^{-1}TN$ nin bütün vektör alanları u nun varyasyonal vektör alanları olacağından yukarıdaki (3.5) eşitliği $\forall V \in u^{-1}TN$ için sağlanır. Böylece sonuç kanıtlanmış olur.

4. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME

Harmonik morfizmlerin tarihçesi 1847 yıllarına Jacobi'nin üç boyutlu uzayda Laplace denkleminin çözümlerini aramasına kadar uzanır. Daha sonra 1965 yılında C. Contantinescu ve A.Cornea harmonik uzayların belirli koşulları gerçekleyen lokal kompakt Hausdorff uzaylar olduğunu ifade etmişlerdir. Örneğin $\mathbb{R}^n$, Laplace denkleminin çözümleri olan harmonik fonksiyonları kapsayan bir harmonik uzaydır. Genel olarak her Riemann manifoldu Laplace-Beltrami operatörünün sıfırları olarak harmonik fonksiyonlara sahip bir harmonik uzaydır. Böyle bir operatör Δ^n de

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + cf = 0 \quad (1.1.1)$$

şeklinde bir eliptik denklem ile verilir. Burada a_{ij}, b_i ve c katsayılar olup denklem bir $U \subseteq \mathbb{R}^n$ bölgesinde Lipschitz koşullarını ve harmonik uzayın topolojik koşullarını sağlar.

Klasik harmonik fonksiyonlar harmonik morfizmlere kadar ulaşan genişlemesi ile günümüze kadar yoğun ilgi alanlarından birini oluşturmuştur. Weierstrass gösterimi sayesinde harmonik fonksiyonlarla kompleks analitik fonksiyonları ilişkilendirip kompleks analizin araçlarından kolaylıkla faydalanarak teoriyi geliştirmemiz mümkündür. Ayrıca, harmonik dönüşümlerin düzgün varyasyon fonksiyonlarının kritik noktalarının jeodezik eğriler ve minimal yüzeyleri tanımladığı bilinmektedir, o nedenle Riemann manifoldların harmonik dönüşümlerini çalışmak için bir dönüşümün enerjisi ve gerilmesi, kotanjant uzay ve geri çekilmiş tanjant demetleri üstünde koneksiyonlar tanımlayarak Riemann manifoldların harmonik bir dönüşümünün düzgün varyasyonu inceleyebiliriz.

Biz bu tez çalışmasında, Riemann manifoldları arasında tanımlanan bir düzgün harmonik dönüşüm için genelleştirilmiş varyasyon formülünü nasıl elde edebileceğimizi gösteriyoruz.

KAYNAKLAR

- [1] M. Do Carmo, Riemannian Geometry, Birkhauser, Boston, 1992.
- [2] M. Do Carmo, Differential Geometry of Curves nad Surfaces, Prentice- Hall Inc., Englewood, New Jersey, 1976.
- [3] M. Czubak, Introduction to harmonic maps, University of Texas, USA, 2003
- [4] S. Montaldo & J.C. Wood, Harmonic Morphisms and the Jacobi Operator, arXiv:math.DG/9910180 v1, 1 Nov 1999.
- [5] H. Urakawa, Calculus of Variations and Harmonic Maps, American Mathematical Society 1990.
- [6] J.C.Wood, The Geometry of Harmonic Maps and Morphisms, Fourth International on Differential Geometry and its Applications, Braşov, Romania, 1999.

ÖZGEÇMİŞ

17-01-1972 Tarihi İstanbul ili Üsküdar ilçesi doğumluyum. Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Fizik Öğretmenliği bölümünü bitirdim. Milli Eğitim Bakanlığı'na bağlı olarak 13 yıldır fizik öğretmeni olarak çalışmaktayım. Mezun olduktan sonra matematik alanına ilgimden dolayı matematiksel fiziğe karşı ilgi duymaktayım. Bu yüzden uygulanmalı matematikte yüksek lisans çalışması yapmak istedim.

Özel ilgi alanlarım dalgalar, çekirdek fiziği, diferansiyel denklemlerdir. Çekirdek fiziği üzerine birkaç çalışmam bulunmaktadır.