

**T.C.
ERCIYES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**VEKTÖR DEĞERLİ DİZİ UZAYLARINDA MATRİS
DÖNÜŞÜMLERİ VE DUALLERİ**

**Tezi Hazırlayan
Sertif KIRMIZITAŞ**

**Tezi Yöneten
Yrd.Doç.Dr. Abdulcabbar SÖNMEZ**

**Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi**

**Ağustos 2008
KAYSERİ**

Yrd. Doç. Dr. Abdalcabbar SÖNMEZ danışmanlığında **Sertif KIRMIZITAŞ** tarafından hazırlanan “**Vektör Değerli Dizi Uzaylarında Matris Dönüşümleri ve Dualleri**” adlı bu çalışma, jürimiz tarafından Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Yüksek Lisans** tezi olarak kabul edilmiştir.

13.08.2008

JÜRİ:

Başkan : Prof. Dr. Osman MUCUK



Üye : Yrd. Doç. Dr. Abdalcabbar SÖNMEZ




Üye : Yrd. Doç. Dr. H. Nedret ÖĞDÜK



ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulunun 15/08/2008 tarih ve 2008/24-26 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

15/08/2008



N. Ayyıldız
Prof. Dr. Nusret AYYILDEZ
Enstitü Müdürü

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalıőmamda, yakın ilgi ve yardımlarını hiç esirgemeyen değerli hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Abdulcabbar SÖNMEZ'e, bölümümdeki diğer hocalarıma ve manevi desteklerini her zaman yanımda hissettiğim aileme ve eőime sonsuz teőekkürlerimi sunarım.

VEKTÖR-DEĞERLİ DİZİ UZAYLARINDA MATRİS DÖNÜŞÜMLERİ VE DUALLERİ

Sertif KIRMIZITAŞ
Erciyes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü
Yüksek Lisans Tezi, Ağustos 2008
Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Abdulcabbar SÖNMEZ

ÖZET

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde bazı vektör-değerli dizi uzaylarında matris dönüşümleri ve duallerinin öneminden bahsedilmiştir.

İkinci bölümde; çalışma boyunca kullanılacak olan bazı temel tanımlar ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümün ilk kısmında Nakano vektör-değerli dizi uzayı olan $\ell(X, p)$ ve $F_r(X, p)$ den $E_r, \ell_\infty, \ell_{-\infty}(q), bs$ ve cs dizi uzaylarına olan matris karakterizasyonlarını vereceğiz. Burada $p = (p_k)$ ve $q = (q_k)$ pozitif reel sayıların sınırlı birer dizileri olmak üzere $\forall k \in \mathbb{N}$ için $p_k > 1$ ve $r \geq 0$ durumu incelenecektir.

Bu bölümün ikinci kısmında Nakano vektör-değerli dizi uzayı olan $\ell(X, p)$ den herhangi BK uzayına sonsuz matrislerin dönüşümleri için gerek ve yeter şartları vereceğiz. Bu sonucu kullanarak $\ell(X, p)$ den $\ell_\infty(Y), c_0(Y, q), c(Y), \ell_s(Y), E_r(Y)$ ve $F_r(Y)$ dizi uzaylarına olan matris karakterizasyonlarını elde edeceğiz. Burada $p = (p_k)$ ve $q = (q_k)$ pozitif sayıların sınırlı dizileri olmak üzere $\forall k \in \mathbb{N}$ için $p_k \leq 1$, $r \geq 0$ ve $s \geq 1$ durumu incelenecektir.

Dördüncü bölümde vektör-değerli bir dizi uzayının β duali tanımlanmış ve çalışılmıştır. Eğer X -değerli bir dizi uzayı olan E uzayı AK özelliğine sahip bir BK uzayı ise bu taktirde E nin dual uzayı ile β -dual uzayının izometrik olarak izomorfik olduğunu göstereceğiz. Aynı zamanda Maddox dizi uzayları olan $\ell(X, p), \ell_\infty(X, p), c_0(X, p)$ ve $c(X, p)$ uzaylarının β -duallerinin karakterizasyonlarını vereceğiz.

Anahtar Kelimeler: Matris dönüşümleri, vektör-değerli dizi uzayları, Maddox vektör değerli dizi uzayları

MATRIX TRANSFORMATIONS OF SOME VECTOR-VALUED SEQUENCE SPACES AND THEIR DUALS

Sertif KIRMIZITAŞ

Erciyes University, Graduate School of Natural and Applied Sciences

M.Sc. Thesis, August 2008

Thesis Supervisor: Assist. Prof. Dr. Abdulcabbar SÖNMEZ

ABSTRACT

This study consists of four chapters. In the first chapter the importance of matrix transformations of some vector-valued sequence spaces and their duals is mentioned.

In the second chapter, basic definitions and some basic theorems that will be used throughout the study are given.

In the first section of the third chapter we give the matrix characterizations from Nakano vector-valued sequence space $\ell(X, p)$ and $F_r(X, p)$ into the sequence spaces $E_r, \ell_\infty, \ell_{-\infty}(q), bs$ and cs , where $p = (p_k)$ and $q = (q_k)$ are bounded sequences of positive real numbers such that $p_k > 1$ for all $\forall k \in \mathbb{N}$ and $r \geq 0$.

In the second section of this chapter we give necessary and sufficient conditions for infinite matrices mappings from the Nakano vector-valued sequence space $\ell(X, p)$ into any BK -space, and by using this result, we obtain the matrix characterizations from $\ell(X, p)$ into the sequence spaces $\ell_\infty(Y), c_0(Y, q), c(Y), \ell_s(Y), E_r(Y)$ and $F_r(Y)$, where $p = (p_k)$ and $q = (q_k)$ are bounded sequences of positive real numbers such that $p_k \leq 1 \forall k \in \mathbb{N}$, $r \geq 0$ and $s \geq 1$.

In the fourth chapter the β -dual of a vector-valued sequence space is defined and studied. We show that if an X -valued sequence space E is a BK space having AK property, then the dual space of E and its β -dual are isometrically isomorphic. We also give characterizations of β -dual of vector-valued sequence space of Maddox $\ell(X, p), \ell_\infty(X, p), c_0(X, p)$ and $c(X, p)$.

Keywords: Matrix transformations, vector valued sequence spaces, Maddox vector-valued sequence spaces.

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY	i
TEŞEKKÜR	ii
ÖZET	iii
ABSTRACT	v
SİMGELER LİSTESİ	viii
1. BÖLÜM	
GİRİŞ	1
2. BÖLÜM	
TEMEL TAVRAMLAR	3
3. BÖLÜM	
VEKTÖR-DEĞERLİ DİZİ UZAYLARINDA MATRİS DÖNÜŞÜMLERİ.....	10
3.1. Nakano Vektör-Değerli Dizi Uzaylarında Matris Dönüşümleri.....	10
3.2. Bazı Vektör-Değerli Dizi Uzaylarında Matris Dönüşümleri.....	20
4. BÖLÜM	
MADDOX'UN VEKTÖR-DEĞERLİ DİZİ UZAYLARININ β -DUALI	27
KAYNAKLAR.....	45
ÖZGEÇMİŞ.....	47

SİMGELER LİSTESİ

- \mathbb{N} : Doğal sayılar cümlesi
- \mathbb{R} : Reel sayılar cümlesi
- \mathbb{C} : Kompleks sayılar cümlesi
- Sup : En küçük üst sınır
- $\|x\|$: x in normu
- $\|F\|$: Sınırlı lineer fonksiyonelin normu
- X' : X normlu uzayının dual uzayı
- $\|T\|$: Sınırlı lineer bir T operatörünün normu

1. BÖLÜM

GİRİŞ

Skaler değerli dizi uzayları ile ilgili çalışmalar 20. yy'ın başlarından beri bilinmektedir. Özellikle Maddox [1] tarafından incelenen dizi uzayları ilgi çekici ve bu sahadaki çalışmalar için adeta bir ilham kaynağı olmuştur. Daha sonra 1970'li yıllarda Maddox [1,2] ve Gupta [3] vektör değerli dizi uzayları üzerinde non-negatif reel değerli $A = (a_{n,k})$ matrisi yerine, sürekli lineer dönüşümlerin $A = (f_n^k)$ matrisini alarak matris dönüşümlerini incelediler. Das ve Chaudhury [4] X ve Y iki normlu lineer uzay olmak üzere X den Y nin içine olan $c_0(X) \rightarrow c_0(Y)$, $\ell_1(X) \rightarrow \ell_\infty(Y)$ ve $\ell_1(X) \rightarrow \ell_p(Y)$ sürekli lineer dönüşümlerin $A = (f_n^k)$ matrisi üzerindeki gerekli şartları verdiler.

C.X. Wu ve L. Liu [5] $c_0(X, p), \ell(X, p), \ell_\infty(X, p)$ gibi vektör değerli dizi uzaylarından $c_0(q), \ell_\infty(q)$, gibi skaler değerli dizi uzaylarına tanımlı matris dönüşümlerini verdi. Daha sonra Suthep Suantai [6] Nakano vektör değerli dizi uzayı olan $\ell(X, p)$ den $c_0(Y, q), c(Y)$ ve $\ell_\infty(Y)$ dizi uzaylarına tanımlı dönüşümlerin matris karakterizasyonunu verdi.

Bu çalışmanın amacı Suthep Suantai ve Winate Sanhan [6] tarafından incelenmiş olan

$$c_0(X, p), \ell(X, p), \ell_\infty(X, p), M_0(X, p), E_r(X, p), F_r(X, p) \text{ ve } \ell_\infty(X, p)$$

gibi X-değerli uzayları arasındaki matris dönüşümlerini incelemek ve bunlardan bir kısmının dualleri üzerinde çalışmaktır.

Burada özel olarak $X = K$ (X 'in skaler cismi) alırsak, $c_0(p), \ell(p), \ell_\infty(p), M_0(p)$ $E_r(p), F_r(p)$ ve $\ell_{-\infty}(p)$ gibi Maddox'un vektör değerli dizi uzaylarını ve diğer vektör değerli dizi uzaylarını elde ederiz.

Sonuç olarak bu çalışma bir derleme mahiyetinde olup detaylı araştırmanın ürünüdür.

2. BÖLÜM

TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, çalışmamızda kullanacağımız temel kavramlara yer vereceğiz.

Tanım 2.1. X boş olmayan bir küme, K de kompleks ya da reel sayıların bir cismi olsun. Bu takdirde $\forall x, y, z \in X$ ve $\forall \lambda, \mu \in K$ için

$$+ : X \times X \rightarrow X$$

$$\cdot : K \times X \rightarrow X$$

fonksiyonları

i) $x + y = y + x$

ii) $(x + y) + z = x + (y + z)$

iii) $x + \theta = x$ olacak şekilde bir tek $\theta \in X$ mevcut

iv) $x + (-x) = \theta$ olacak şekilde bir tek $(-x) \in X$ mevcut

v) $1x = x$

vi) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$

vii) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$

viii) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$

özelliklerini sağlıyorsa X kümesine K cismi üzerinde bir vektör uzayı veya bir lineer uzay denir [7].

Burada K ya da X vektör uzayının skaler cismi (veya katsayılar cismi) denir. Eğer $K = \mathbb{R}$ ise X reel vektör uzayı, $K = \mathbb{C}$ ise X 'e kompleks vektör uzayı denir.

Tanım 2.2. Y, X kümesinin boş olmayan bir alt kümesi olsun.

Eğer $\forall y_1, y_2 \in Y$ ve bütün α, β skalerleri için

$$\alpha y_1 + \beta y_2 \in Y$$

oluyorsa Y vektör uzayına, X vektör uzayının lineer alt uzayı denir [7].

Tanım 2.3. X, K cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. Eğer

$$q: X \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu $\forall x, y \in X$ ve $\forall \lambda \in K$ için

$$i) q(\lambda x) = |\lambda| q(x)$$

$$ii) q(x+y) \leq q(x) + q(y)$$

özelliklerini sağlıyorsa, q ye bir yarınorm, (X, q) uzayına da bir yarınormlu uzay denir.

Tanım 2.4. X, K cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. Eğer

$$g: X \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu $\forall x, y \in X$ ve $\forall \lambda \in K$ için

$$i) g(\theta) = 0$$

$$ii) g(-x) = g(x)$$

$$iii) g(x+y) \leq g(x) + g(y)$$

$$iv) \lambda \rightarrow \lambda_0 \text{ ve } g(x-x_0) \rightarrow 0 \text{ iken } g(\lambda x - \lambda_0 x) \rightarrow 0$$

şartlarını sağlıyorsa, g ye bir paranorm, (X, g) uzayına da bir paranormlu uzay denir.

Tanım 2.5. X kompleks veya reel vektör uzayı olsun. Bu takdirde $\forall x, y \in X$ ve $\forall \lambda \in \mathbb{C}$

$$\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R} \text{ fonksiyonu}$$

$$(N1) \quad \|x\| \geq 0$$

$$(N2) \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$(N3) \quad \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$$

$$(N4) \quad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad (\text{üçgen eşitsizliği})$$

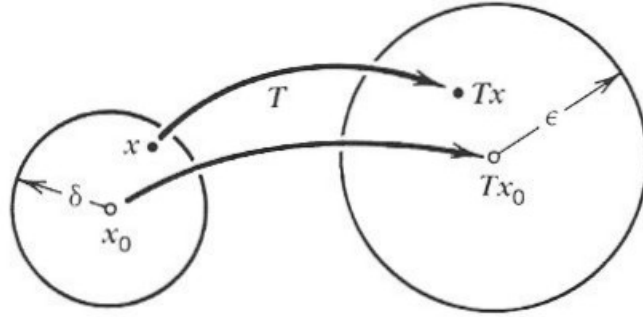
özelliklerini sağlıyorsa, $\|\cdot\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir norm ve $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine de bir normlu uzay denir [7].

Tanım 2.6. $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu lineer uzay olsun. Eğer X cümlesi $\|\cdot\|$ normuna göre tam ise $(X, \|\cdot\|)$ uzayına bir Banach uzayı denir [7].

Tanım 2.7. (Süreklili dönüşüm) $X = (X, d)$ ve $Y = (Y, \tilde{d})$ iki metrik uzay olsun. Eğer

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ni d(x, x_0) < \delta \Rightarrow \tilde{d}(Tx, Tx_0) < \varepsilon$ ise T ye x_0 da süreklidir denir.

Eğer T X in her noktasında sürekli ise T dönüşümüne süreklidir denir [7].



Şekil 2.7.1. Sürekli dönüşüm

Tanım 2.8. X ve Y iki metrik uzay olsun. Eğer $T : X \rightarrow Y$ dönüşümü bire-bir (1-1) ve örten ise bu dönüşüme bijective denir. Bu taktirde bu dönüşümün ters dönüşümü vardır ve $T^{-1} : Y \rightarrow X$ ile gösterilir [7].

Tanım 2.9. $(X, \|\cdot\|)$ bir Banach uzayı olmak üzere $W(X)$ X teki bütün dizilerin uzayını gösterebilir ve E de X -değerli bir dizi uzayı olsun. Eğer $\forall k \in \mathbb{N}$ için $(x_k) \in E$ ve $(y_k) \in W(X)$ için $\|y_k\| \leq \|x_k\|$ olduğunda $(y_k) \in E$ oluyorsa X -değerli E dizi uzayına normal denir.

Örnek: $c_0(X, p)$ uzayı normaldir. Çünkü

$(x_k) \in c_0(X, p)$ ve $(y_k) \in W(X)$ olsun.

$$\|y_k\| \leq \|x_k\| \Rightarrow \|y_k\|^{p_k} \leq \|x_k\|^{p_k} \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty)$$

$$\Rightarrow \|y_k\|^{p_k} \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty)$$

$$\Rightarrow (y_k) \in c_0(X, p)$$

Fakat $c(X)$ normal değildir. Çünkü

$$(x_k) = \frac{6k+1}{3k-2} \text{ için } \lim(x_k) = \lim \frac{6k+1}{3k-2} = 2 \text{ ve}$$

$$\left|(-1)^k\right| < \left|\frac{6k+1}{3k-2}\right| \text{ iken } (-1)^k \text{ ıraksaktır. Yani } (-1)^k \notin c(X)$$

Tanım 2.10. (Sınırlı dizi) $p = (p_k)$ dizisi verilmiş olsun. Eğer $\forall k \in \mathbb{N}$ için $|p_k| \leq M$ olacak şekilde bir $M > 0$ varsa (p_k) dizisine sınırlıdır denir.

Tanım 2.11. Vektör uzaylarında, özellikle normlu uzaylardaki bir dönüşüme operator denir [7].

Tanım 2.12. Bir T operatörü aşağıdaki şartları sağlıyorsa buna bir lineer operatör denir.

(i) T operatörünün tanım kümesi olan $D(T)$ bir vektör uzayıdır ve görüntü kümesi olan $R(T)$ aynı cisim üzerinde bir vektör uzayıdır.

(ii) $\forall x, y \in D(T)$ ve α skalerleri için

$$(a) \quad T(x + y) = T_x + T_y$$

$$(b) \quad T(\alpha x) = \alpha T_x$$

Tanım 2.13. (Sınırlı lineer operator) X ve Y normlu iki uzay ve $D(T) \subset X$ olmak üzere

$$T : D(T) \rightarrow Y$$

bir lineer operator olsun. Eğer $\forall x \in D(T)$ için

$$\|T_x\| \leq c \|x\|$$

olacak şekilde bir $c > 0$ varsa T ye sınırlı lineer operator denir [7].

Burada soldaki norm Y üzerindeki norm, sağdaki norm ise X üzerindeki normdur.

Tanım 2.14. Değer cümlesi $= \mathbb{R}$ veya \mathbb{C} olan bir dönüşüme bir fonksiyonel denir [7].

Fonksiyonelleri f, g, h, \dots gibi küçük harflerle göstereceğiz.

Tanım 2.15. (Lineer Fonksiyonel) Tanım kümesi X vektör uzayının içinde $(D(f) \subset X)$ ve görüntü kümesi X in skaler cismi olan $K (R(f) \subset K)$ da olan lineer operatore lineer fonksiyonel denir. Bu yüzden bir lineer fonksiyonel

$$f : D(f) \rightarrow K$$

Şeklinindedir [7]. X reel ise $K = \mathbb{R}$ ve X kompleks ise $K = \mathbb{C}$

Tanım 2.16. (Sınırlı lineer fonksiyonel) f lineer bir fonksiyonel olmak üzere f e sınırlı lineer fonksiyonel denir öyle ki $\forall x \in D(f), \exists c \in \mathbb{R}$ için

$$|f(x)| \leq c \|x\|$$

Bu taktirde f in normu

$$\|f\| = \sup_{\substack{x \in D(f) \\ x \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|}$$

veya

$$\|f\| = \sup_{\substack{x \in D(f) \\ \|x\|=1}} |f(x)|$$

şeklinde tanımlanır. Buradan

$$|f(x)| \leq \|f\| \|x\|$$

olduğu açıktır.

Teorem 2.17. (süreklilik ve sınırlılık) Normlu bir uzayda f lineer fonksiyoneli süreklidir ancak ve ancak f sınırlıdır.

Tanım 2.18. $\emptyset \neq X$ herhangi bir küme olsun. X in açık alt kümelerinin bir τ sınıfı verilmiş olsun. Eğer

$$(T1) \quad X, \emptyset \in \tau$$

$$(T2) \quad U_1, U_2 \in \tau \text{ için } U_1 \cap U_2 \in \tau$$

$$(T3) \quad U_i \in \tau (i \in I) \text{ için } \bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$$

özelliklerini sağlıyorsa τ ya X üzerinde bir topoloji ve (X, τ) uzayına da topolojik uzay denir [7].

Tanım 2.19. $(X, \|\cdot\|)$ bir Banach uzayı olsun. $W(X)$, X teki bütün dizilerin uzayını ve $\phi(X)$ te X teki bütün sonlu dizilerin uzayını gösterebiliriz. X teki bir dizi uzayı $W(X)$ in bir lineer alt uzayıdır. E X -değerli bir dizi uzayı olsun. $x \in E$ ve $k \in \mathbb{N}$ için x in k . terimi için x_k yazacağız. Şimdi de $e^k(x)$, $e(x)$ ve E_μ dizilerini tanımlayalım:

$x \in X$ ve $k \in \mathbb{N}$ için $e^k(x)$ dizisi

$$e^k(x) = (0, 0, \dots, x, 0, 0, \dots)$$

şeklinde, yani, k . terimi x diğer terimleri sıfır olan bir dizi ve $e(x)$ dizisi de

$$e(x) = (x, x, x, \dots, x, \dots)$$

olmak üzere bütün terimleri x olan bir dizi olsun. Sabit bir skaler $\mu = \mu_k$ dizisi için E_μ dizisi şu şekilde tanımlanır:

$$E_\mu = \{x = (x_k) \in W(X) : (\mu_k x_k) \in E\}$$

Tanım 2.20. Kabul edelim ki X -değerli bir E dizi uzayı bazı lineer topoloji olan τ ile donatılsın. Bu takdirde her bir $k \in \mathbb{N}$ için $p_k(x) = x_k$ şeklinde tanımlanan ve k . koordinat dönüşümü olan

$$p_k : E \rightarrow X$$

dönüşümü E üzerinde sürekli ise E uzayına K -uzayı denir. Buna ilaveten (E, τ) bir Frechet (Banach) uzayı ise bu takdirde E uzayı $FK - (BK)$ uzayı olarak adlandırılır. Kabul edelim ki E uzayı $\phi(X)$ uzayını içersin.

Bu takdirde eğer her bir $x = (x_k) \in E$ ve $n \rightarrow \infty$ için

$$\sum_{k=1}^n e^k(x) \rightarrow x$$

oluyorsa E uzayına AK özelliğine sahiptir denilir. Eğer $\phi(X)$ E de yoğun ise E ye AD özelliğine sahiptir denilir.

Tanım 2.21. $B(X, Y) = \{T \mid T : X \xrightarrow[\text{lineer}]{\text{sınırlı}} Y\}$ olsun. Bu taktirde $T \in B(X, Y)$ için $B(X, Y)$ uzayının normu

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|T_x\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|T_x\| \text{ dır.}$$

Burada Y Banach uzayı ise $B(X, Y)$ bir Banach uzayıdır [7].

Tanım 2.22. (Dual Uzay X') X normlu bir uzay olsun. Bu takdirde X üzerindeki bütün sınırlı lineer fonksiyonların kümesi aşağıda tanımlanan normla birlikte bir normlu uzay belirtir. Buna X in dual uzayı denir ve X' ile gösterilir [7].

$$\|f\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} |f(x)|$$

X üzerindeki lineer fonksiyonların görüntü kümesi \mathbb{R} veya \mathbb{C} (X in skaler cisimi) olduğundan, \mathbb{R} veya \mathbb{C} de bilinen metriğe göre tam olduklarından X' bir $B(X, Y)$ dir. Yani $B(X, Y) = B(X, \mathbb{R}) = B(X, \mathbb{C}) = X'$ dir.

Teorem 2.23. (X bir Banach uzayı olsun veya olmasın) X normlu uzayının dual uzayı olan X' bir Banach uzayıdır [7].

Tanım 2.24. Banach-Steinhaus Teoremi: X bir Banach uzayı Y -de bir normlu uzay olmak üzere $T_n : X \rightarrow Y$ sınırlı lineer dönüşümlerin bir dizisi olsun. Yani $\forall x \in X$ için $\|T_n(x)\| \leq c_x$ bulunsun. Bu taktirde $(\|T_n\|)$ normlar dizisi sınırlıdır. Yani $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\|T_n\| \leq c$ olacak şekilde $c > 0$ vardır.

3. BÖLÜM

VEKTÖR-DEĞERLİ DİZİ UZAYLARINDA MATRİS DÖNÜŞÜMLERİ

3.1. Nakano Vektör – Değerli Dizi Uzayında Matris Dönüşümleri

Bu kısımda Nakano Vektör – Değerli dizi uzayı olan $\ell(X, p)$ ve $F_r(X, p)$ den E_r , ℓ_∞ , $\ell_\infty(q)$, bs , ve cs dizi uzaylarına olan matris karakterizasyonlarını vereceğiz. Burada $p = (p_k)$ ve $q = (q_k)$ pozitif reel sayıların sınırlı birer dizileri ve $\forall k \in \mathbb{N}$ için $p_k > 1$ ve $r \geq 0$ alınacaktır.

Tanım 3.1.1. $(X, \|\cdot\|)$ bir Banach uzayı, $r \geq 0$ ve $p = (p_k)$ pozitif reel sayıların bir dizisi olsun. $\forall k \in \mathbb{N}$ için X teki bir x_k elemanı için $x = (x_k)$ olarak yazacağız. X -değerli dizi uzayları olan

$c_0(X, p)$, $c(X, p)$, $\ell_\infty(X, p)$, $\ell(X, p)$, $E_r(X, p)$, $F_r(X, p)$ ve $\ell_\infty(X, p)$ aşağıdaki gibi tanımlanırlar:

$$c_0(X, p) = \left\{ x = (x_k) : \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k\|^{p_k} = 0 \right\}$$

$$c(X, p) = \left\{ x = (x_k) : \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - a\|^{p_k} = 0, \text{ bazı } a \in X \text{ için} \right\}$$

$$\ell_\infty(X, p) = \left\{ x = (x_k) : \sup_k \|x_k\|^{p_k} < \infty \right\}$$

$$\ell(X, p) = \left\{ x = (x_k) : \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^{p_k} < \infty \right\}$$

$$E_r(X, p) = \left\{ x = (x_k) : \sup_k \frac{\|x_k\|^{p_k}}{k^r} < \infty \right\}$$

$$F_r(X, p) = \left\{ x = (x_k) : \sum_{k=1}^{\infty} k^r \|x_k\|^{p_k} < \infty \right\}$$

$$\ell_{-\infty}(X, p) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{ x = (x_k) : \sup_k \|x_k\| n^{1/p_k} \right\}$$

K, X in skaler cisimi olmak üzere $X = K$ olduğunda yukardaki tanımlanan uzaylar sırasıyla $c_0(p), c(p), \ell_{\infty}(p), \ell(p), E_r(p), F_r(p)$ ve $\ell_{-\infty}(p)$ olarak yazılırlar.

$c_0(p), c(p)$ ve $\ell_{\infty}(p)$ uzayları Maddox'un dizi uzayları olarak bilinirler. Bu uzaylar ilk olarak Simons [12] ve Maddox [1,8] tarafından tanımlanıp üzerlerinde çalışmalar yapıldı. $\ell(p)$ uzayı ilk olarak Nakano [2] tarafından tanımlandı ve Nakano dizi uzayı olarak bilinir. $\ell(X, p)$ uzayı da Nakano vektör-değerli dizi uzayı olarak bilinir.

$\forall k \in \mathbb{N}$ için $p_k = 1$ olduğunda $E_r(p)$ ve $F_r(p)$ uzayları sırasıyla E_r ve F_r olarak yazılırlar. Bu iki uzay ilk olarak Cooke [10] tarafından tanımlandı. $\ell_{-\infty}(p)$ uzayı ilk olarak Grosse-Erdmann [10] tarafından tanımlandı.

Tanım 3.1.2. E bir dizi uzayı olmak üzere $\forall x = (x_k) \in E, \forall t_k \in \mathbb{N}$ ve $|t_k| = 1$ ile birlikte $t_k \in K$ için $(t_k x_k) \in E$ oluyorsa E ye normal denir. Ayrıca

$(E, \|\cdot\|)$ bir normlu dizi uzayı olsun. $\forall k \in \mathbb{N}$ ve $x = (x_k), y = (y_k) \in E$ için $\|x_k\| \leq \|y_k\|$ ile birlikte $\|x\| \leq \|y\|$ oluyorsa $(E, \|\cdot\|)$ dizi uzayına norm monoton denir.

Tanım 3.1.3. X', X in topolojik duali ve $f_k^n \in X'$ olmak üzere $A = (f_k^n)$ olsun. Ayrıca E X -değerli bir dizi uzayı, F de skaler-değerli bir dizi uzayı olsun. Eğer her bir $x = (x_k) \in E$ ve her bir $n \in \mathbb{N}$ için $A_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^n(x_k)$ yakınsaksa A ya E den F ye bir matris dönüşümü denir ve $A: E \rightarrow F$ olarak yazılır. Burada Ax dizisi $Ax = (A_n(x)) \in F$ dir.

İlk olarak $\forall k \in \mathbb{N}$ için $p_k > 1$ olmak üzere $\ell(X, p)$ den E_r dizi uzayına olan sonsuz bir matris dönüşümünün bir karakterizasyonunu vereceğiz. Bunun için aşağıdaki lemma ya ihtiyacımız vardır.

Lemma 3.1.4. Kabul edelim ki E normal ve norm monoton olan X -değerli bir BK -uzayı ve $A = (f_k^n)$ sonsuz bir matris olsun. Bu taktirde $\forall x = (x_k) \in E$ için

$$A : E \rightarrow E_r \Leftrightarrow \sup_n \sum_{k=1}^{\infty} |f_k^n(x_k)| / n^r < \infty \text{ olmasıdır.}$$

İspat: Yeter şartın doğru olduğunu kabul edelim. Yani

$\sup_n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|f_k^n(x_k)|}{n^r} < \infty$ olsun. Buradan her bir $x = (x_k) \in E$ için

$$\sup_n \frac{\left| \sum_{k=1}^{\infty} f_k^n(x_k) \right|}{n^r} \leq \sup_n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|f_k^n(x_k)|}{n^r} < \infty \text{ dur.}$$

Bundan dolayı $A : E \rightarrow E_r$ dir. Tersine olarak kabul edelim ki $A : E \rightarrow E_r$ olsun. E ve E_r uzayları birer BK -uzayı olduğundan Zeller teoreminden dolayı $A : E \rightarrow E_r$ dönüşümü sınırlıdır. Bundan dolayı

$$\sup_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ \|(x_k)\| \leq 1}} \frac{\left| \sum_{k=1}^{\infty} f_k^n(x_k) \right|}{n^r} \leq M \text{ olacak şekilde bir } M > 0 \text{ vardır.} \quad (3.1)$$

$x = (x_k) \in E$ olsun. Öyle ki $\|x\| = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ için $|t_k| = 1$ olacak şekilde bir skaler (t_k) dizisi seçebiliriz ve $f_k^n(t_k x_k) = |f_k^n(x_k)|$ olur. E normal ve norm monoton olduğundan $(t_k x_k) \in E$ elde ederiz. Böylece (3.1) den dolayı $\|(t_k x_k)\| \leq 1$ dir. Buradan

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|f_k^n(x_k)|}{n^r} = \frac{\left| \sum_{k=1}^{\infty} f_k^n(t_k x_k) \right|}{n^r} \leq M,$$

$$\text{bu da } \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|f_k^n(x_k)|}{n^r} \leq M \text{ demektir.} \quad (3.2)$$

(3.2) den dolayı her bir $x = (x_k) \in E$ için

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|f_k^n(x_k)|}{n^r} \leq M \|x\|$$

Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 3.1.5. $p = (p_k)$, $\forall k \in \mathbb{N}$ için $p_k > 1$ ve $\forall k \in \mathbb{N}$ için $\frac{1}{p_k} + \frac{1}{q_k} = 1$ ve $r \geq 0$ ile

birlikte pozitif reel sayıların sınırlı bir dizisi olsun. Sonsuz bir matris olan $A = (f_k^n)$ için,

$$A \in (\ell(X, p), E_r) \Leftrightarrow \sup_n \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k^n\|^{q_k} n^{-rq_k} m_0^{-q_k} < \infty \quad (3.3)$$

olacak şekilde bir $m_0 \in \mathbb{N}$ vardır.

İspat: $x = (x_k) \in \ell(X, p)$ olsun. (3.3) den dolayı $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k^n\|^{q_k} n^{-rq_k} m_0^{-q_k} < K, \quad (3.4)$$

olacak şekilde bir $m_0 \in \mathbb{N}$ ve $K > 1$ vardır.

$$a, b \geq 0 \text{ için biliyoruz ki } ab \leq a^{p_k} + b^{q_k} \quad (3.5)$$

(3.4) ve (3.5) den dolayı $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} n^{-r} \left| \sum_{k=1}^{\infty} f_k^n(x_k) \right| &= n^{-r} \left| \sum_{k=1}^{\infty} f_k^n(m_0^{-1} \cdot m_0 x_k) \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} (n^{-r} m_0^{-1} \|f_k^n\|) (\|m_0 x_k\|) \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} n^{-rq_k} m_0^{-q_k} \|f_k^n\|^{q_k} + m_0^{\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^{p_k} \\ &\leq K + m_0^{\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^{p_k}, \quad \text{burada } \alpha = \sup_k p_k \end{aligned}$$

bundan dolayı $\sup n^{-r} \left| \sum_{k=1}^{\infty} f_k^n(x_k) \right| < \infty$ bu ise $Ax \in E_r$ demektir.

Gereklilik için kabul edelim ki $A \in (\ell(X, p), E_r)$ olsun. $\forall k \in \mathbb{N}$ için $e^{(k)}(x) \in \ell(X, p)$

olduğundan $\forall x \in X$ için $\sup_n n^{-r} \left| f_k^n(x) \right| < \infty$ elde ederiz.

Düzgün sınırlılık prensibinden dolayı $\forall k \in \mathbb{N}$ için

$$\sup_n n^{-r} \|f_k^n\| \leq C_k \text{ olacak şekilde bir } C_k > 1 \text{ vardır.} \quad (3.6)$$

Kabul edelim ki (3.3) doğru olsun. O halde $\forall m \in \mathbb{N}$ için

$$\sup_n \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k^n\|^{q_k} n^{-rq_k} m^{-q_k} = \infty \quad (3.7)$$

ve $k, m \in \mathbb{N}$ için (3.6) dan dolayı

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} \|f_j^n\|^{q_j} n^{-rq_j} m^{-q_j} &= \sum_{j=1}^k \|f_j^n\|^{q_j} n^{-rq_j} m^{-q_j} + \sum_{j=k+1}^{\infty} \|f_j^n\|^{q_j} n^{-rq_j} m^{-q_j} \\ &\leq \sum_{j=1}^k C_j^{q_j} m^{-q_j} + \sum_{j=k+1}^{\infty} \|f_j^n\|^{q_j} n^{-rq_j} m^{-q_j} \end{aligned}$$

bu (3.7) ile birlikte $\forall k, m \in \mathbb{N}$ için aşağıdaki eşitliği verir;

$$\sup_n \sum_{j=k+1}^{\infty} \|f_j^n\|^{q_j} n^{-rq_j} m^{-q_j} = \infty, \quad (3.8)$$

(3.8) ten dolayı $O = k_0 < k_1 < k_2 < \dots$, $m_1 < m_2 < \dots$,

$m_i > 4^i$ ve pozitif reel sayıların bir (η_i) alt dizisini seçebiliriz öyle ki $\forall i \geq 1$

$$\sum_{k_{i-1} < j \leq k_i} \|f_j^{n_i}\|^{q_j} n_i^{-rq_j} m_i^{-q_j} > 2^i$$

$\forall i \in \mathbb{N}$ için $\|x_j\| = 1$ ile birlikte

$k_{i-1} < j \leq k_i$ için $x_j \in X$ seçebiliriz öyle ki

$$\sum_{k_{i-1} < j \leq k_i} |f_j^{n_i}(x_j)|^{q_j} n_i^{-rq_j} m_i^{-q_j} > 2^i$$

$\forall i \in \mathbb{N}$ için $F_i : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ olmak üzere

$$F_i(M) = \sum_{k_{i-1} < j \leq k_i} |f_j^{n_i}(x_j)|^{q_j} n_i^{-rq_j} M^{-q_j} \text{ şeklinde tanımlansın.}$$

Bu taktirde F_i sürekli ve artmayandır öyle ki

$M \rightarrow \infty$ iken $F(M) \rightarrow 0$ Bundan dolayı $M_i > 0$ vardır öyle ki $M_i > m_i$ ve

$$F(M_i) = \sum_{k_{i-1} < j < k_i} \left| f_j^{n_i}(x_j) \right|^{q_j} n_i^{-rq_j} M_i^{-q_j} = 2^i$$

$k_{i-1} < j < k_i$ için

$$y = (y_j), y_j = 4^{-i} M_i^{-(q_j-1)} n_i^{-rq_j/p_j} \left| f_j^{n_i}(x_j) \right|^{q_j-1} x_j \text{ olsun.}$$

Buradan y_j yerine yazılır ve $p_j \cdot$ kuvvet alınır

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|y_j\|^{p_j} = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k_{i-1} < j \leq k_i} 4^{-ip_j} M_i^{-p_j(q_j-1)} n_i^{-rq_j} \left| f_j^{n_i}(x_j) \right|^{p_j(q_j-1)}$$

$$\frac{1}{p_j} + \frac{1}{q_j} = 1 \Rightarrow -p_j(q_j-1) = -q_j \text{ ve } p_j(q_j-1) = q_j \text{ yerine yazılırsa}$$

$$\leq \sum_{i=1}^{\infty} 4^{-i} \sum_{k_{i-1} < j \leq k_i} M_i^{-q_j} n_i^{-rq_j} \left| f_j^{n_i}(x_j) \right|^{q_j}$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} 4^{-i} \cdot 2^i$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-2i} \cdot 2^i$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 1$$

Böylece $y = (y_j) \in \ell(X, p)$ bulunur.

$\ell(X, p)$ uzayı $\|(x_k)\| = \inf \left\{ \varepsilon > 0 : \sum_{k=1}^{\infty} \left\| \frac{x_k}{\varepsilon} \right\|^{p_k} \leq 1 \right\}$ ile tanımlanan Luxemburg normu

altında normal ve norm monoton olan bir BK uzayı olduğundan Lemma 3.1. den

$$\sup_n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|f_k^n(y_k)|}{n^r} < \infty \quad (3.9)$$

elde ederiz. Fakat

$$\sup_n \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|f_j^n(y_j)|}{n^r} \geq \sup_i \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|f_j^{n_i}(y_j)|}{n_i^r} \geq \sup_i \sum_{k_{i-1} < j \leq k_i} \frac{|f_j^{n_i}(y_i)|}{n_i^r}$$

$$\begin{aligned}
&= \sup_i \sum_{k_{i-1} < j < k_i} 4^{-i} M_i^{-(q_j-1)} n_i^{-r} (q_j / p_j + 1) \left| f_j^{n_i}(x_j) \right|^{q_j} \\
&\left(\frac{q_j}{p_j} + 1 = q_j \text{ olduğundan} \right) \\
&= \sup_i \sum_{k_{i-1} < j < k_i} 4^{-i} M_i^{-(q_j-1)} n_i^{-r q_j} \left| f_j^{n_i}(x_j) \right|^{q_j} \\
&= \sup_i \sum_{k_{i-1} < j < k_i} \left(\left| f_j^{n_i}(x_j) \right|^{q_j} n_i^{-r q_j} M_i^{-q_j} \right) 4^{-i} M_i \\
&\geq \sup_i 2^i = \infty, \quad \text{çünkü } M_i > 4^i
\end{aligned}$$

Bu ise (3.9) ile çelişir. Bu yüzden (3.3) sağlanmış oldu.

Teorem 3.1.6. $p = (p_k)$ pozitif reel sayıların sınırlı bir dizisi olsun öyle ki $\forall k \in \mathbb{N}$

$p_k > 1, \forall k \in \mathbb{N} \frac{1}{p_k} + \frac{1}{q_k} = 1, r \geq 0$ ve $s \geq 0$. Bu taktirde sonsuz bir $A = (f_k^n)$ matrisi

için,

$$A \in (F_r(X, p), E_s) \Leftrightarrow \sup_n \sum_{k=1}^{\infty} \left(k^{-r q_k / p_k} \|f_k^n\|^{q_k} n^{-s q_k} m_0^{-q_k} \right) < \infty$$

olacak şekilde bir $m_0 \in \mathbb{N}$ vardır.

İspat: $F_r(X, p) = \ell(X, p)_{(k^{r/p_k})}$ olduğundan

$$A \in (F_r(X, p), E_s) \Leftrightarrow (k^{-r/p_k} f_k^n)_{n,k} \in (\ell(X, p), E_s) \quad (3.10)$$

Teorem 3.1.5. den dolayı

$$(k^{-r/p_k} f_k^n)_{n,k} \in (\ell(X, p), E_s) \Leftrightarrow \sup_n \sum_{k=1}^{\infty} \left(k^{-r q_k / p_k} \|f_k^n\|^{q_k} n^{-s q_k} m_0^{-q_k} \right) < \infty$$

olacak şekilde bir $m_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Bu ise teoremin ispatlanması demektir.

$E_0 = \ell_\infty$ olduğundan aşağıdaki iki sonuç sırasıyla teorem 3.1.5 ve teorem 3.1.6 dan direk olarak elde edilirler.

Sonuç 3.1.7. $p = (p_k)$ pozitif reel sayıların sınırlı bir dizisi olsun öyle ki $\forall k \in \mathbb{N}$ için

$$p_k > 1 \text{ ve } \forall k \in \mathbb{N} \text{ için } \frac{1}{p_k} + \frac{1}{q_k} = 1 \text{ verilsin}$$

Bu taktirde sonsuz bir $A = (f_k^n)$ matrisi için

$$A \in (\ell(X, p), \ell_\infty) \Leftrightarrow \sup_n \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k^n\|^{q_k} m_0^{-q_k} < \infty$$

olacak şekilde bir $m_0 \in \mathbb{N}$ vardır.

Sonuç 3.1.8. $p = (p_k)$ pozitif reel sayıların sınırlı bir dizisi olsun öyle ki $\forall k \in \mathbb{N}$ için

$$p_k > 1 \text{ ve } \forall k \in \mathbb{N} \text{ için } \frac{1}{p_k} + \frac{1}{q_k} = 1.$$

Bu taktirde sonsuz bir $A = (f_k^n)$ matrisi için

$$A \in (F_r(X, p), \ell_\infty) \Leftrightarrow \sup_n \sum_{k=1}^{\infty} \left(k^{-rq_k/p_k} \|f_k^n\|^{q_k} m_0^{-q_k} \right) < \infty$$

olacak şekilde bir $m_0 \in \mathbb{N}$ olmasıdır.

Teorem 3.1.9. $\forall k \in \mathbb{N}$ için $p_k > 1$ ile birlikte $p = (p_k)$ ve $q = (q_k)$ pozitif reel

sayıların sınırlı bir dizisi olsun ve $\forall k \in \mathbb{N}$ için $\frac{1}{p_k} + \frac{1}{t_k} = 1$ olsun. Bu taktirde sonsuz bir

$A = (f_k^n)$ matrisi için

$$A \in (\ell(X, p), \ell_{-\infty}(q)) \Leftrightarrow \sup_{n,k} \sum_{k=1}^{\infty} r^{t_k/q_k} \|f_k^n\|^{t_k} m_r^{-t_k} < \infty$$

olacak şekilde $\forall r \in \mathbb{N}$ için bir $m_r \in \mathbb{N}$ olmasıdır.

İspat: $\ell_{-\infty}(q) = \bigcap_{r=1}^{\infty} \ell_{\infty}(r^{1/q_k})$ olduğundan $\forall r \in \mathbb{N}$ için

$$A \in (\ell(X, p), \ell_{-\infty}(q)) \Leftrightarrow A \in \ell(X, p), \ell_{\infty}(r^{1/q_k})$$

buradan $r \in \mathbb{N}$ için

$$A \in \left(\ell(X, p), \ell_{\infty(r^{1/q_k})} \right) \Leftrightarrow (r^{1/q_n} f_k^n)_{n,k} \in (\ell(X, p), \ell_{\infty})$$

Sonuç 3.1.7. den $r \in \mathbb{N}$ için $(r^{1/q_n} f_k^n)_{n,k} \in (\ell(X, p), \ell_{\infty}) \Leftrightarrow \sup_n \sum_{k=1}^{\infty} r^{t_k/q_n} \|f_k^n\|^{t_k} m_r^{-t_k} < \infty$

olacak şekilde bir $m_r \in \mathbb{N}$ vardır.

Bu da teoremi ispatlar.

Teorem 3.1.10. $\forall k \in \mathbb{N} \quad p_k > 1$ ve $\forall k \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{p_k} + \frac{1}{q_k} = 1$ ile birlikte $p = (p_k)$ ve

$q = (q_k)$ pozitif reel sayıların sınırlı birer dizisi olsun. Sonsuz bir $A = (f_k^n)$ matrisi için

$$A \in (F_r(X, p), \ell_{\infty}(q)) \Leftrightarrow \sup_n \sum_{k=1}^{\infty} i^{t_k/q_n} k^{-r t_k/p_k} \|f_k^n\|^{t_k} m_i^{-t_k} < \infty$$

olacak şekilde $\forall i \in \mathbb{N}$ için bir $m_i \in \mathbb{N}$ vardır.

İspat: $F_r(X, p) = \ell(X, p)_{(k^{r/p_k})}$ olduğundan

$$A \in (F_r(X, p) = \ell_{\infty}(q)) \Leftrightarrow (k^{-r/p_k} f_k^n)_{n,k} \in (\ell(X, p), \ell_{\infty}(q))$$

Teorem 3.1.9. dan dolayı $A \in (F_r(X, p), \ell_{\infty}(q)) \Leftrightarrow \sup_n \sum_{k=1}^{\infty} i^{t_k/q_n} k^{-r t_k/p_k} \|f_k^n\|^{t_k} m_i^{-t_k} < \infty$

olacak şekilde $\forall i \in \mathbb{N}$ için $m_i \in \mathbb{N}$ vardır.

Teorem 3.1.11. $\forall k \in \mathbb{N}$ için $p_k > 1$ ve $\frac{1}{p_k} + \frac{1}{q_k} = 1$ olacak şekilde pozitif reel sayıların

sınırlı bir $p = (p_k)$ dizisi olsun. Bu takdirde sonsuz bir $A = (f_k^n)$ matrisi için

$$A \in (\ell(X, p), bs) \Leftrightarrow \sup_n \sum_{k=1}^{\infty} \left\| \sum_{i=1}^n f_k^i \right\|^{q_k} m_0^{-q_k} < \infty$$

olacak şekilde bir $m_0 \in \mathbb{N}$ vardır.

İspat: Sonsuz bir $A = (f_k^n)$ matrisi için kolaylıkla gösterilebilir ki

$$A \in (\ell(X, p), bs) \Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^n f_k^i \right)_{n,k} \in (\ell(X, p), \ell_{\infty})$$

Sonuç 3.1.7 den $A \in (\ell(X, p), bs) \Leftrightarrow \sup_n \sum_{k=1}^{\infty} \left\| \sum_{i=1}^n f_k^i \right\|^{q_k} m_0^{-q_k} < \infty$

olacak şekilde bir $m_0 \in \mathbb{N}$ vardır.

Teorem 3.1.12. $\forall k \in \mathbb{N}$ için $p_k > 1$ ile birlikte $p = (p_k)$ pozitif reel sayıların sınırlı bir dizisi ve $\forall k \in \mathbb{N}$ için $\frac{1}{p_k} + \frac{1}{q_k} = 1$ olsun. Bu taktirde sonsuz bir $A = (f_k^n)$ matrisi için,

$$A \in (\ell(X, p), cs) \Leftrightarrow \begin{cases} 1) \sup_n \sum_{k=1}^{\infty} \left\| \sum_{i=1}^n f_k^i \right\|^{q_k} m_0^{-q_k} < \infty \text{ olacak şekilde bir } m_0 \in \mathbb{N} \text{ olması ve} \\ 2) \forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in X \text{ için } \sum_{n=1}^{\infty} f_k^n(x) \text{ yakınsaktır} \end{cases}$$

İspat: Kabul edelim ki $A = (f_k^n)$ sonsuz matrisi için $A \in (\ell(X, p), cs)$ olsun. Teorem 3.1.11'den dolayı bir $m_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Öyle ki

$$\sup_n \sum_{k=1}^{\infty} \left\| \sum_{i=1}^n f_k^i \right\|^{q_k} m_0^{-q_k} < \infty \text{ dur. Bu ise (1) in ispatını tamamlar. Diğer taraftan her}$$

bir $k \in \mathbb{N}$ ve $x \in X$ için $e^{(k)}(x) \in \ell(X, p)$ gerçeğini kullanırsak

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_k^n(x) \text{ in yakınsaklığını elde ederiz ki bu da (2) nin ispatını tamamlar.}$$

Tersine olarak (1) ve (2) nin sağlandığını kabul edelim. Teorem 3.1.11 den dolayı $A: \ell(X, p) \rightarrow bs$ olduğunu biliyoruz. $x = (x_k) \in \ell(X, p)$ olsun.

$\ell(X, p)$ AK özelliğine sahip olduğundan

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n e^{(k)}(x) \text{ dir. Zeller teoreminden dolayı}$$

$A: \ell(X, p) \rightarrow bs$ süreklidir. Buradan

$$Ax = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n Ae^{(k)}(x_k) \text{ olup}$$

(2) den $Ae^{(k)}(x_k) \in cs \quad \forall k \in \mathbb{N}$ için, cs, bs nın kapalı bir alt uzayı olduğundan $Ax \in cs$ olur,

Yani $A: \ell(X, p) \rightarrow cs$ tir.

3.2. Bazı Vektör Değerli Dizi Uzaylarında Matris Dönüşümleri

Bu kısımda Nakano vektör-değerli dizi uzayı $\ell(X, p)$ den herhangi BK uzayına sonsuz matrisler dönüşümü için gerek ve yeter şartlarını vereceğiz. Bu sonucu kullanarak $\ell(X, p)$ den $\ell_\infty(Y)$, $c_0(Y, q)$, $c(Y)$, $\ell_s(Y)$, $E_r(Y)$ ve $F_r(Y)$ dizi uzaylarına olan matris karakterizasyonlarını elde edeceğiz. Buradan $p = (p_k)$ ve $q = (q_k)$ pozitif sayıların sınırlı dizileridir öyle ki $\forall k \in \mathbb{N}$, $p_k \leq 1$ için $r \geq 0$ ve $s \geq 1$

Tanım 3.2.1. $(X, \|\cdot\|)$ bir Banach uzayı ve $p = (p_k)$ pozitif reel sayıların sınırlı bir dizisi olsun. $\forall k \in \mathbb{N}$ olmak üzere X teki x_k için $x = (x_k)$ yazacağız. X -değerli dizi uzayları olan $c_0(X, p)$, $c(X, p)$, $\ell_\infty(X, p)$, $\ell(X, p)$, $E_r(X, p)$ uzaylarını bu bölümün 1. kısmında tanımlamıştık. $\forall n, k \in \mathbb{N}$ için $T_k^n \in L(X, Y)$ olmak üzere $A = (T_k^n)$ olsun.

Farz edelim ki E X -değerli bir dizi uzayı ve F Y -değerli bir dizi uzayı olsun. Bu taktirde eğer $\forall x = (x_k) \in E$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $A_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k^n(x_k)$ yakınsaksa A E den F nin içine bir dönüşüm olarak adlandırılır ve $A: E \rightarrow F$ şeklinde yazılır: Ax dizisi $Ax = (A_n(x)) \in F$ dir.

Tanım 3.2.2. (E, F) E den F nin içine bütün sonsuz matris dönüşümlerinin kümesini gösterebilir. Eğer $u = (u_k)$ ve $v = (v_k)$ skaler diziler ise

$${}_u(E, F)_v = \left\{ A = (T_k^n) : (u_n v_k T_k^n)_{n,k} \in (E, F) \right\}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $u_k \neq 0$ ise $\forall k \in \mathbb{N}$ $u^{-1} = (1/u_k)$ olarak alacağız.

3. Bazı Yardımcı Sonuçlar

Bu kısımda problemlerimizi daha basit formlara indirgemek için kullanılabilecek bazı faydalı sonuçları vereceğiz.

Önerme 3.2.3. E ve E_n ($n \in \mathbb{N}$) X -değerli dizi uzayları olsun ve F ve F_n ($n \in \mathbb{N}$) Y -değerli dizi uzayları ve u ve v reel sayıların dizileri olsunlar $\forall k \in \mathbb{N}$ için $u_k \neq 0$, $v_k \neq 0$.

Böylelikle aşağıdakileri elde ederiz:

$$(i) \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n, F \right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (E_n, F);$$

$$(ii) \left(E, \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (E, F_n);$$

$$(iii) (E_u, F_v) = v(E, F)_{u^{-1}}$$

Önerme 3.2.4. $p = (p_k)$ pozitif reel sayıların sınırlı bir dizisi olsun ve $r \geq 0$ olmak üzere

$$(i) F_r(X, p) = \ell(X, p)_{(n^r)}$$

$$(ii) c_0(X, p) = \bigcap_{n=1}^{\infty} c_0(X)_{(n^{1/p_k})}$$

İspat:

(i) direkt olarak tanımdan elde edilir.

(ii) yi göstermek için kabul edelim ki $x \in c_0(X, p)$ olsun. Bu taktirde $k \rightarrow \infty$ için $\|x_k\|^{p_k} \rightarrow 0$ dir. $\forall k, n \in \mathbb{N}$ için $\delta_k = \|x_k\|^{p_k} n$ olsun. Buradan $k \rightarrow \infty$ için $\delta_k \rightarrow 0$ olur. $p \in \ell_{\infty}$ olduğundan $k \rightarrow \infty$ için $\|x_k\| n^{1/p_k} = \delta_k^{1/p_k} \rightarrow 0$ bulunur. Böylece $x \in c_0(X)_{(n^{1/p_k})}$ elde ederiz.

Tersine olarak farz edelim ki $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} c_0(X)_{(n^{1/p_k})}$ olsun. O halde $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k\| n^{1/p_k} = 0$ olur. Bu taktirde $n \in \mathbb{N}$ ve çok büyük k için $\|x_k\|^{p_k} \leq 1/n$ olur. Bu ise $x \in c_0(X, p)$ demektir.

Şimdi $\forall k \in \mathbb{N}$ ve $p_k \leq 1$ olmak üzere matris karakterizasyonlarının $\ell(X, p)$ den herhangi bir BK uzayı içine olan dönüşümü vererek konumuza başlayacağız.

Teorem 3.2.5. $p = (p_k)$ pozitif reel sayıların sınırlı bir dizisi olsun öyle ki $\forall k \in N$ için $p_k \leq 1$ ve E de bir BK uzayı olan Y -değerli dizi uzayı olsun.

Bu durumda sonsuz bir $A = (T_k^n)$ matrisi için

$$A \in (\ell(X, p), E) \text{ dir.} \Leftrightarrow \begin{cases} 1) \forall k \in \mathbb{N} \text{ ve } \forall x \in X \text{ için } (T_k^n(x))_{n=1}^{\infty} \in E \text{ ve} \\ 2) \exists m_0 \in \mathbb{N} \text{ vardır öyle ki } \sup_k \sup_{\|x\| \leq 1} \|A(m_0^{-1/p_k} e^k(x))\| \leq 1 \end{cases}$$

İspat: $A \in (\ell(X, p), E)$ olsun. $\forall x \in X$ ve $\forall k \in \mathbb{N}$ için $e^k(x) \in \ell(X, p)$ olduğundan $Ae^k(x) \in E$ olur. Böylece (1) elde edildi.

Şimdi de (2) şartının sağlandığını gösterelim.

Zeller Teoreminden dolayı $A: \ell(X, p) \rightarrow E$ süreklidir. Yani

$$x = (x_k) \in \ell(X, p), \text{ için } \|x\| \leq \frac{1}{m_0} \Rightarrow \|Ax\| \leq 1 \text{ olacak şekilde bir } m_0 \in \mathbb{N} \text{ vardır.} \quad (3.10)$$

$\|x\| \leq 1$ ve $k \in \mathbb{N}$ ile birlikte $x \in X$ olsun. Öyleyse $m_0^{-1/p_k} e^k(x) \in \ell(X, p)$ ve $\|m_0^{-1/p_k} e^k(x)\| \leq 1/m_0$ elde ederiz. (3.10) dan dolayı $\|A(m_0^{-1/p_k} e^k(x))\| \leq 1$ elde ederiz ki bu da $\sup_k \sup_{\|x\| \leq 1} \|A(m_0^{-1/p_k} e^k(x))\| \leq 1$ olmasını gerektirir. Böylece (2) elde edilir.

Tersine olarak (1) ve (2) nin sağlandığını kabul edelim. (2) den dolayı, $\forall x \in X$ ve $\|x\| \leq 1$ ile birlikte

$$\begin{aligned} \sup_k \|A(m_0^{-1/p_k} e^k(x))\| &\leq 1 \text{ olacak şekilde bir } m_0 \in \mathbb{N} \text{ vardır.} \\ \Rightarrow \sup_k \|A(m_0^{-1/p_k} e^k(x))\| &\leq \|x\| \end{aligned} \quad (3.11)$$

$x = (x_k) \in \ell(X, p)$ olsun. $\forall k \in \mathbb{N}$ için (3.11) dan dolayı şunu elde ederiz.

$$\begin{aligned} \|Ae^k(x_k)\| &= \|A(m_0^{1/p_k} (m_0^{-1/p_k} e^k(x_k)))\| \\ &= m_0^{1/p_k} \|A(m_0^{-1/p_k} e^k(x_k))\| \\ &\leq m_0^{1/p_k} \|x_k\| \end{aligned} \quad (3.12)$$

$(m_0^{1/p_k}) \in \ell(X, p)$ olduğundan $(m_0^{1/p_k} x_k) \in c_0(X, p) \subseteq c_0(X)$ olur. Bundan dolayı $\forall k > k_0$ için

$$m_0^{1/p_k} \|x_k\| < 1 \text{ olacak şekilde bir } k_0 \in \mathbb{N} \text{ vardır.}$$

$\forall k \in \mathbb{N}$ için $0 < p_k \leq 1$ olduğundan

$$m_0^{1/p_k} \|x_k\| \leq \left(m_0^{1/p_k} \|x_k\|\right)^{p_k} = m_0 \|x_k\|^{p_k} \quad (3.13)$$

elde ederiz. $\forall k > k_0$ için (3.12) ve (3.13) den dolayı

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \|Ae^k(x_k)\| &\leq \sum_{k=1}^{\infty} m_0^{1/p_k} \|x_k\| \\ &= \sum_{k=1}^{k_0} m_0^{1/p_k} \|x_k\| + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} m_0^{1/p_k} \|x_k\| \\ &\leq \sum_{k=1}^{k_0} m_0^{1/p_k} \|x_k\| + m_0 \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \|x_k\|^{p_k} \\ &< \infty \end{aligned}$$

Bundan dolayı $\sum_{k=1}^{\infty} Ae^k(x_k)$ E de mutlak yakınsaktır.

E Banach uzayı olduğundan $\sum_{k=1}^{\infty} Ae^k(x_k)$ E de yakınsaktır. Şimdi $y = (y_k) \in E$

$\sum_{k=1}^{\infty} Ae^k(x_k)$ nın toplamı olsun. E bir K-uzayı olduğundan her bir $m \in \mathbb{N}$ için p_m süreklidir.

$$y_m = p_m(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n p_m(Ae^k(x_k)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n T_k^m(x_k).$$

Bu da Ax in mevcut ve $(Ax)_m = \sum_{k=1}^{\infty} T_k^m(x_k) = y_m$ olduğunu gerektirir. Bundan dolayı $Ax \in E$ dir. Bu da ispatı tamamlar.

$p_k = 1$ olduğundan $\forall k \in \mathbb{N}$ için aşağıdaki sonuçlar direk olarak teoremden elde edilir.

Teorem 3.2.6. E bir BK-uzayı olan Y -değerli bir dizi uzayı olsun ve $A = (T_k^n)$ sonsuz bir matris olsun. Buradan

$$A \in (\ell(X), E) \Leftrightarrow \begin{cases} 1) \forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in X \text{ için } (T_k^n(x))_{n=1}^{\infty} \in E \text{ ve} \\ 2) \sup_k \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ae^k(x)\| < \infty \end{cases}$$

Teorem 3.2.7. $p = (p_k)$ pozitif sayıların sınırlı bir dizisi olsun öyle ki $\forall k \in \mathbb{N}$ için $p_k \leq 1$ ve $A = (T_k^n)$ sonsuz bir matris olsun. Bu takdirde

$$A \in (\ell(X, p), \ell_\infty(Y)) \Leftrightarrow \begin{cases} 1) \forall k \in \mathbb{N} \text{ için } \sup_n \|T_k^n\| < \infty \text{ ve} \\ 2) \sup_{n,k} m_0^{-1/p_k} \|T_k^n\| \leq 1 \text{ olacak şekilde bir } m_0 \in \mathbb{N} \text{ mevcuttur} \end{cases}$$

İspat: Teorem 3.2.5. den dolayı bu teoremi ispatlamak için sadece (1) ve (2) şartlarının sırasıyla (1') ve (2') şartlarına denk olduğunu göstereceğiz.

$$\begin{cases} 1') \forall k \in \mathbb{N} \text{ ve } \forall x \in X \text{ için } Ae^k(x) \in \ell_\infty(Y) \text{ ve} \\ 2') \sup_k \sup_{\|x\| \leq 1} \|A(m_0^{-1/p_k} e^k(x))\| \leq 1 \text{ olacak şekilde bir } m_0 \in \mathbb{N} \text{ mevcuttur.} \end{cases}$$

(1) ve (1') şartları düzgün sınırlılık prensibinden dolayı denktir.

Eğer (2) sağlanırsa $k, n \in \mathbb{N}$ ve $x \in X$ için $\|x\| \leq 1$ ile birlikte şunu elde ederiz.

$$m_0^{-1/p_k} \|T_k^n x\| \leq m_0^{-1/p_k} \|T_k^n\| \|x\| \leq m_0^{-1/p_k} \|T_k^n\| \leq 1 \quad \text{ki bu da}$$

$$\sup_k \sup_{\|x\| \leq 1} \|A(m_0^{-1/p_k} e^k(x))\| = \sup_k \sup_{\|x\| \leq 1} \sup_n m_0^{-1/p_k} \|T_k^n x\| \leq 1 \text{ böylece (2') elde edilir.}$$

Şimdi de (2') nün sağlandığını farz edelim. Öyleyse $\forall k \in \mathbb{N}$ ve $\forall x \in X$ $\|x\| \leq 1$ ile birlikte

$$\sup_n m_0^{-1/p_k} \|T_k^n x\| = \|A(m_0^{-1/p_k} e^k(x))\| \leq 1 \tag{3.14}$$

olacak şekilde bir $m_0 \in \mathbb{N}$ mevcuttur.

(3.14) den her bir $n, k \in \mathbb{N}$, $m_0^{-1/p_k} \|T_k^n\| \leq 1$ böylece (2) elde edilir.

Teorem 3.2.7 de olduğu gibi aynı ispatı kullanırsak aşağıdaki teoremi elde ederiz:

Teorem 3.2.8. $p = (p_k)$ pozitif reel sayıların sınırlı bir dizisi olsun öyle ki $\forall k \in \mathbb{N}$ için $p_k \leq 1$ ve $A = (T_k^n)$ sonsuz bir matris olsun. O halde

$$A \in (\ell(X, p), c_0(Y)) \Leftrightarrow \begin{cases} 1) \forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in X \text{ için } T_k^n(x) \rightarrow 0 \text{ (} n \rightarrow \infty \text{) ve} \\ 2) \sup_{n,k} m_0^{-1/p_k} \|T_k^n\| \leq 1 \text{ olacak şekilde bir } m_0 \in \mathbb{N} \text{ vardır.} \end{cases}$$

Teorem 3.2.9. $p = (p_k)$ ve $q = (q_k)$ pozitif reel sayıların sınırlı dizileri olsun öyle ki $\forall k \in \mathbb{N}$ için $p_k \leq 1$ ve $A = (T_k^n)$ sonsuz bir matris olsun. Bu takdirde

$$A \in (\ell(X, p), c_0(Y, q)) \Leftrightarrow \begin{cases} 1) \forall k, m \in \mathbb{N} \text{ ve } \forall x \in X \text{ için } m^{-1/p_n} T_k^n(x) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty) \\ 2) \forall m \in \mathbb{N} \sup_{n,k} r_m^{-1/p_k} m^{1/p_n} \|T_k^n\| \leq 1 \text{ olacak şekilde bir } r_m \in \mathbb{N} \end{cases}$$

İspat: 3.2.3(ii) ve 3.2.4(ii) önermelerinden dolayı $\forall m \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$A \in (\ell(X, p), c_0(Y, q)) \Leftrightarrow A \in (\ell(X, p), c_0(Y)_{(m^{1/p_k})})$$

Önerme 3.2.3(iii) den dolayı $\forall m \in \mathbb{N}$ için

$$A \in (\ell(X, p), c_0(Y)_{(m^{1/p_k})}) \Leftrightarrow (m^{1/q_n} T_k^n)_{n,k} \in (\ell(X, p), c_0(Y))$$

Teorem 3.2.8. den dolayı

$$(m^{1/q_n} T_k^n)_{n,k} \in (\ell(X, p), c_0(Y)) \Leftrightarrow (1) \text{ ve } (2) \text{ sağlanırsa.}$$

Teorem 3.2.5. in uygulanmasıyla ve Teorem 3.2.7. deki ispatın aynısını kullanırsak aşağıdaki teoremi elde ederiz.

Teorem 3.2.10. $p = (p_k)$ pozitif reel sayıların sınırlı bir dizisi olsun öyle ki $\forall k \in \mathbb{N}$ için $p_k \leq 1$ ve $A = (T_k^n)$ sonsuz bir matris olsun. Bu takdirde

$$A \in (\ell(X, p), c(Y)) \Leftrightarrow \begin{cases} 1) \forall k \in \mathbb{N} \text{ ve } \forall x \in X \text{ için } \lim_{n \rightarrow \infty} T_k^n(x) \text{ mevcut ve} \\ 2) \sup_{n,k} m_0^{-1/p_k} \|T_k^n\| \leq 1 \text{ olacak şekilde bir } m_0 \in \mathbb{N} \text{ vardır.} \end{cases}$$

Teorem 3.2.5. in uygulanmasıyla aynı zamanda aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Teorem 3.2.11. $p = (p_k)$ pozitif reel sayıların sınırlı bir dizisi olsun öyle ki $\forall k \in \mathbb{N}$ için $p_k \leq 1$, $s \geq 1$ ve $A = (T_k^n)$ sonsuz bir matris olsun. O halde

$$A \in (\ell(X, p), \ell_s(Y)) \Leftrightarrow \begin{cases} 1) \forall k \in \mathbb{N} \text{ ve } \forall x \in X \text{ için } (T_k^n(x))_{n=1}^{\infty} \in \ell_s(Y) \text{ ve} \\ 2) \sup_k \sup_{\|x\| \leq 1} \sum_{n=1}^{\infty} m_0^{s/p_k} \|T_k^n(x)\|^s \leq 1 \text{ olacak şekilde bir } m_0 \in \mathbb{N} \text{ dir.} \end{cases}$$

$E_r(Y) = \ell_\infty(Y)_{(k^{-r})}$ olduğundan önerme 3.2.3(iii) ve teorem 3.2.7. den aşağıdaki teoremi elde ederiz.

Teorem 3.2.12. $p = (p_k)$ pozitif reel sayıların sınırlı bir dizisi olsun öyle ki $\forall k \in \mathbb{N}$ için $p_k \leq 1$, $r \geq 0$ ve $A = (T_k^n)$ sonsuz bir matris olsun. O halde

$$A \in (\ell(X, p), E_r(Y)) \Leftrightarrow \begin{cases} 1) \forall k \in \mathbb{N} \text{ ve } \forall x \in X \text{ için } \sup_n \|n^{-r} T_k^n\| < \infty \text{ ve} \\ 2) \sup_{n,k} m_0^{-1/p_k} n^{-r} \|T_k^n\| \leq 1 \text{ olacak şekilde bir } m_0 \in \mathbb{N} \text{ vardır.} \end{cases}$$

$F_r(Y) = \ell(Y)_{(k^r)}$ olduğundan 3.2.3(iii) önermesinin ve teorem 3.2.5. in uygulanmasıyla aşağıdaki teoremi elde ederiz.

Teorem 3.2.13. $p = p_k$ pozitif reel sayıların sınırlı bir dizisi olsun öyle ki $\forall k \in \mathbb{N}$ için $p_k \leq 1$, $r \geq 0$ ve $A = (T_k^n)$ sonsuz bir matris olsun. O halde

$$A \in (\ell(X, p), F_r(Y)) \Leftrightarrow \begin{cases} 1) \forall k \in \mathbb{N} \text{ ve } \forall x \in X \text{ için } (n^r T_k^n(x))_{n=1}^\infty \in \ell(Y) \text{ ve} \\ 2) \sup_k \sup_{\|x\| \leq 1} \sum_{n=1}^\infty m_0^{-1/p_k} n^r \|T_k^n x\| \leq 1 \text{ olacak şekilde bir } m_0 \in \mathbb{N} \text{ dir.} \end{cases}$$

4. BÖLÜM

MADDOX'UN VEKTÖR-DEĞERLİ DİZİ UZAYLARININ β -DUALİ

Bu bölümde vektör-değerli bir dizi uzayının β duali tanımlanmış ve çalışılmıştır. Eğer X -değerli bir dizi uzayı olan E uzayı AK özelliğine sahip bir BK uzayı ise bu taktirde E nin dual uzayı ile β -dual uzayının izometrik olarak izomorfik olduğunu göstereceğiz. Aynı zamanda Maddox dizi uzayları olan $\ell(X, p), \ell_\infty(X, p), c_0(X, p)$ ve $c(X, p)$ uzaylarının β -duallerinin karakterizasyonlarını vereceğiz. Önce bu bölümde geçen bazı tanımları ve teoremleri verelim. $X = (X, d)$ ve $\tilde{X} = (\tilde{X}, \bar{d})$ metrik uzaylar olsun. Bu taktirde:

Tanım 4.1. Bir $T : X \rightarrow \tilde{X}$ dönüşümü uzaklıkları korursa yani $\forall x, y \in X$ için

$$\bar{d}(Tx, Ty) = d(x, y)$$

ise T ye bir izometrik dönüşüm denir [7]. Burada $T(x)$ ve $T(y)$ sırasıyla x ve y nin görüntüleridir.

Tanım 4.2. Eğer X ten \tilde{X} ya bir bijective (bire-bir, örten) bir izometry varsa X uzayı \tilde{X} uzayı ile izometriktir denir ve bu durumda X ve \tilde{X} uzayları izometrik uzaylar olarak adlandırılırlar [7].

Tanım 4.3. X ve \tilde{X} vektör uzayları aynı cisim üzerinde olmak üzere

$$T : X \rightarrow \tilde{X}$$

olan T izomorfizmi vektör uzayının iki cebirsel işlemini koruyan bijective (bire-bir ve örten) bir dönüşümdür. Yani $\forall x, y \in X$ ve α skalerleri için

$$i) T(x+y) = T(x) + T(y)$$

$$ii) T(\alpha x) = \alpha T(x) \quad [7].$$

Bu taktirde \widetilde{X} ile X izometriktir denir ve X ve \widetilde{X} uzayları izomorfik vektör uzayları olarak adlandırılırlar.

Tanım 4.4. Normlu uzaylar için izomorfizmler normları koruyan vektör uzay izomorfizmleridir.

$$T : X \rightarrow \widetilde{X}$$

dönüşümü normu korur. Yani

$$\forall x \in X \text{ için } \|Tx\| = \|x\|$$

dir.

Böylece T izometriktir. Bu durumda X ile \widetilde{X} izometriktir denir ve X ile \widetilde{X} uzayları izomorfik normlu uzaylar olarak adlandırılırlar.

Tanım 4.5. $(X, \|\cdot\|)$ bir Banach uzayı ve $p = (p_k)$ pozitif reel sayıların sınırlı bir dizisi olsun \mathbb{N} doğal sayılar kümesi olmak üzere $\forall k \in \mathbb{N}$ için $(x_k) \in X$ için $x = (x_k)$ yazacağız. Burada kullanacağımız Maddox'un X -değerli dizi uzayları olan $c_0(X, p)$, $c(X, p)$, $\ell_\infty(X, p)$, $\ell(X, p)$ uzaylarını (Tanım 3.1.1) kısmında tanımlamıştık.

K X in skaler cismi olmak üzere $X = K$ olduğunda yukarıda tanımlanan uzaylar sırasıyla

$c_0(p), c(p), \ell_\infty(p)$ ve $\ell(p)$ olarak yazılırlar. Bu uzaylar Simons ve Maddox tarafından tanımlanıp üzerlerinde çalışıldı. $\ell(p)$ uzayı ilk olarak Nakano tarafından tanımlandı ve Nakano dizi uzayı olarakta bilinir. Grosse-Erdmann $c_0(p), c(p), \ell(p)$ ve $\ell_\infty(p)$ uzaylarının yapılarını inceledi ve Maddax'un skaler-değerli dizi uzaylarının β duallerinin karakterizasyonlarını verdi. Wu ve Bu vektör-değerli dizi uzayı olan $\ell_p[X]$ in Köthe dualinin karakterizasyonlarını verdiler. Burada $\ell_p[X], 1 < p < \infty$ olmak üzere şu şekilde tanımlanır:

$$\ell_p[X] = \left\{ x = (x_k) : \sum_{k=1}^{\infty} |f(x_k)|^p < \infty \text{ her bir } f \in X' \right\}$$

Tanım 4.6. X -değerli bir E uzayı için, E nin dual çifti olan (X, X') üne göre Köthe duali şu şekilde tanımlanır:

$$E^\alpha = E^x \Big|_{(X, X')} = \left\{ (f_k) \subset X' : \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x_k)| < \infty, \forall x = (x_k) \in E \right\}$$

ve aynı zamanda E nin α duali olarak da adlandırılır.

E nin β duali şu şekilde tanımlanır:

$$E^\beta = \left\{ (f_k) \subset X' : \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_k) \text{ yakınsaktır } \forall (x_k) \in E \right\}.$$

Tanımlara bakacak olursak E^α mutlak yakınsak, E^β ise yakınsaktır. Biliyoruz ki mutlak yakınsak her seri yakınsak olduğundan

$$E^\alpha \subseteq E^\beta$$

Tamlık için Maddox'un vektör-değerli dizi uzaylarının β duali olarak düşünülecek olan bazı dizi uzaylarının tanımını verelim.

Tanım 4.7.

$$M_0(X, p) = \left\{ x = (x_k) : \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| M^{-1/p_k} < \infty \text{ bazı } M \in \mathbb{N} \right\};$$

$$M_\infty(X, p) = \left\{ x = (x_k) : \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| n^{1/p_k} < \infty \forall n \in \mathbb{N} \right\};$$

$$\ell_0(X, p) = \left\{ x = (x_k) : \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^{p_k} M^{-p_k} < \infty \text{ bazı } M \in \mathbb{N}, p_k > 1 \forall k \in \mathbb{N}; \right.$$

$$\left. cs[X'] = \left\{ (f_k) \subset X' : \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \text{ yakınsar } \forall x \in X \right\}.$$

K , X in skaler cismi olmak üzere $X = K$ olduğunda ilk iki uzay sırasıyla $M_0(p)$ ve $M_\infty(p)$ olarak yazılırlar. Bu iki uzay ilk olarak Grosse-Erdman tarafından tanımlandı.

Şimdi vektör-değerli dizi uzaylarının β -duallerinin genel özelliklerini verelim.

Önerme 4.8. X bir Banach uzayı ve E , E_1 ve E_2 X -değerli dizi uzayları olsun. Bu taktirde;

$$i) E^\alpha \subseteq E^\beta$$

$$ii) E_1 \subseteq E_2 \text{ ise } E_2^\beta \subseteq E_1^\beta$$

$$iii) E = E_1 + E_2 \text{ ise } E^\beta = E_1^\beta \cap E_2^\beta$$

$$iv) \text{Eğer } E \text{ normal ise } E^\alpha = E^\beta$$

$$\text{İspat: } i) E^\alpha = \left\{ (f_k) \in X' : \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x_k)| < \infty \quad \forall x = (x_k) \in E \right\}$$

$$E^\beta = \left\{ (f_k) \in X' : \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_k) \text{ yakınsaktır } \quad \forall x = (x_k) \in E \right\}$$

tanımlarından görüleceği gibi E^α mutlak yakınsak ve E^β yakınsaktır. Mutlak yakınsak olan her seri yakınsak olduğundan $E^\alpha \subseteq E^\beta$ dir.

ii) $(x_k) \in E_1$ olsun. $E_1 \subseteq E_2$ olduğundan $(x_k) \in E_2$ dir.

$(f_k) \in E_2^\beta$ olsun. Bu taktirde $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_k)$ yakınsar. $(x_k) \in E_1$ olduğundan

$(f_k) \in E_1^\beta$ dir. Yani $E_1 \subseteq E_2$ ise $E_2^\beta \subseteq E_1^\beta$

iii) $E = E_1 + E_2$ olsun. İlk olarak $E^\beta \subseteq E_1^\beta \cap E_2^\beta$ olduğunu gösterelim.

$z = (z_k) \in E = E_1 + E_2$ olduğundan $(z_k) = (x_k + y_k)$ öyle ki $(x_k) \in E_1$ ve $(y_k) \in E_2$ dir.

$$(f_k) \in E^\beta \text{ olsun. Bu taktirde } E^\beta = \left\{ (f_k) \in X' : \sum_{k=1}^{\infty} f_k(z_k) \text{ yakınsar } \quad \forall (z_k) \in E \right\}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z_k) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_k + y_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_k) + \sum_{k=1}^{\infty} f_k(y_k) < \infty$$

ise $E^\beta \subseteq E_1^\beta \cap E_2^\beta$

Tersine olarak $(x_k) \in E_1$ ve $(y_k) \in E_2$ olsun. Bu taktirde $z = (z_k) = (x_k + y_k) \in E$ dir.

$$E_1^\beta = \left\{ (f_k) \in X' : \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_k) \text{ yakınsar } \forall (x_k) \in E_1 \right\}$$

$$E_2^\beta = \left\{ (f_k) \in X' : \sum_{k=1}^{\infty} f_k(y_k) \text{ yakınsar } \forall (y_k) \in E_2 \right\}$$

$E = E_1 + E_2$ olduğundan $z = (z_k) = (x_k + y_k) \in E$ dir.

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_k + y_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_k) + \sum_{k=1}^{\infty} f_k(y_k)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_k + y_k) \text{ yakınsar } \forall z = (z_k) \in E \Rightarrow (f_k) \in E^\beta$$

o halde $E_1^\beta \cap E_2^\beta \subset E^\beta$ dir. Bu da ispatı tamamlar.

iv) (i) den $E^\alpha \subseteq E^\beta$ olduğunu biliyoruz. O halde $E^\beta \subseteq E^\alpha$ olduğunu göstermek yeterlidir.

$(f_k) \in E^\beta$ ve $x = (x_k) \in E$ olsun. O halde $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_k)$ yakınsar.

$|t_k| = 1$ olmak üzere sabit bir (t_k) dizisi seçelim.

$f_k(t_k x_k) = |t_k| |f_k(x_k)| = |f_k(x_k)|$ E normal olduğundan $(t_k x_k) \in E$ dir. Bu ise

$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(t_k x_k) = \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x_k)|$ nin yakınsak olması demektir. O halde $(f_k) \in E^\alpha$ dir. Bu ise

$E^\beta \subseteq E^\alpha$ dir.

Tanım 4.9. Eğer E bir BK-uzayı ise E^β üzerindeki bir normu şu formülle tanımlarız:

$$\|(f_k)\|_{E^\beta} = \sup_{\|(x_k)\| \leq 1} \left| \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_k) \right|$$

Burada $\|\cdot\|_{E^\beta}$ nin E^β üzerinde bir norm olduğunu göstermek son derece kolaydır.

İleride bir dizi uzayının β duali ile onun sürekli duali arasındaki ilişkiyi vereceğiz. Bundan dolayı aşağıdaki Lemma'ya ihtiyacımız vardır.

Lemma 4.10. $E, \phi(X)$ i içeren bir FK -uzayı olan X -değerli bir dizi uzayı olsun. Bu taktirde her bir $k \in \mathbb{N}$ için $T_k : X \rightarrow E$ olan ve $T_k x = e^k(x)$ şeklinde tanımlanan dönüşüm süreklidir.

İspat: $V = \{e^k(x) : x \in X\}$ olsun. “ X normlu uzayının her sonlu boyutlu alt uzayı X -de kapalıdır” teoreminden dolayı V E nin kapalı bir alt uzayıdır. E bir FK -uzayı olduğundan E nin kapalı alt uzayı olan V de bir FK -uzayıdır. E bir K -uzayı olduğundan, koordinat dönüşümü olan $p_k : V \rightarrow X$ sürekli ve bijektiftir. (1-1 ve örten)

Açık dönüşüm teoreminden dolayı p_k açıktır. Bu da $p_k^{-1} : V \rightarrow X$ nin sürekli olmasını gerektirir. $T_k = p_k^{-1}$ olduğundan buradan T_k nin sürekli olduğunu elde ederiz.

Teorem 4.11. Eğer E uzayı AK özelliğine sahip bir BK -uzayı ise E^β ve E' izometrik olarak izomorfturlar.

İspat: İlk olarak $x = (x_k) \in E$ ve $f \in E'$ için

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f(e^k(x_k)) \text{ olduğunu gösterelim} \quad (4.1)$$

$x = (x_k) \in E$ ve $f \in E'$ olsun. E AK özelliğine sahip olduğundan

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n e^k(x_k)$$

f nin sürekliliğinden dolayı her iki tarafın f ini alırsak

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(e^k(x_k)) = \sum_{k=1}^{\infty} f(e^k(x_k))$$

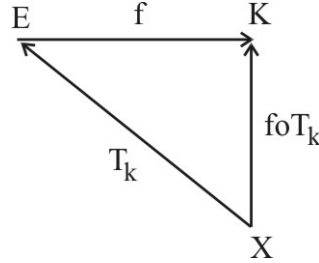
Böylece (4.1) elde edildi.

Her bir $k \in \mathbb{N}$ için $T_k : X \rightarrow E$ olan dönüşüm Lemma 4.10 daki gibi tanımlansın. Yani

$$T_k x = e^k(x)$$

E bir BK -uzayı olduğundan Lemma 4.10 dan dolayı T_k süreklidir.

Bundan dolayı $\forall k \in \mathbb{N}$ için $f \circ T_k \in X'$



Şekil 4.1. Dönüşümün bileşkesi

$$(4.1) \text{ den dolayı } \forall x = (x_k) \in E \text{ için } f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (f \circ T_k)(x_k) \quad (4.2)$$

(4.2) den dolayı $\forall f \in E'$ için $(f \circ T_k)_{k=1}^{\infty} \in E^{\beta}$ dir.

Şimdi de $\forall f \in E'$ için $\varphi: E' \rightarrow E^{\beta}$ dönüşümü şu şekilde tanımlayalım:

$$\varphi(f) = (f \circ T_k)_{k=1}^{\infty}$$

burada φ lineerdir. Gerçekten;

$$\text{i) } \varphi((\alpha f) \circ T_k)_{k=1}^{\infty} = (\alpha f) \varphi(T_k(x)) = \alpha (f \circ T_k)_{k=1}^{\infty} = \alpha \varphi(f)$$

$$\text{ii) } \varphi(f + g) = ((f + g) \circ T_k) = (f + g)(T_k x)$$

$$= f(T_k) + g(T_k)$$

$$= (f \circ T_k) + (g \circ T_k)$$

$$= (f \circ T_k)_{k=1}^{\infty} + (g \circ T_k)_{k=1}^{\infty}$$

$$= \varphi(f) + \varphi(g)$$

Şimdi de φ nin örten olduğunu gösterelim. $(f_k) \in E^{\beta}$ olsun. K, X in skaler cismi olmak üzere $\forall x = (x_k) \in E$ için

$$f : E \rightarrow K \text{ olan dönüşümü } f(x) = \sum_{k=f}^{\infty} f_k(x_k) \quad (4.3)$$

şeklinde tanımlayalım.

$\forall k \in \mathbb{N}$ için p_k E üzerindeki k . koordinat dönüşümü olsun. Bu takdirde:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (f_k \circ p_k)(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (f \circ p_k)(x)$$

f_k ve p_k sürekli ve lineer olduklarından $f \circ p_k$ da sürekli ve lineerdir. Buradan Banach-Steinhaus teoreminden dolayı $f \in E'$ ve (4.3) den $\forall k \in \mathbb{N}$ ve $\forall z \in X$ için

$$(f \circ T_k)(z) = f(T_k(z)) = f(e^{(k)}(z)) = f_k(z) \text{ olduğundan}$$

$f \circ T_k = f_k$ dır. Buradan $\varphi(f) = (f_k)$ elde ederiz ki bu da φ nin örten olması demektir.

Son olarak φ nin lineer izometri olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} f \in E' \text{ için } \|f\| &= \sup_{\|x_k\| \leq 1} |f((x_k))| \\ &= \sup_{\|x_k\| \leq 1} \left| \sum_{k=1}^{\infty} f(e^{(k)}(x_k)) \right| \quad (4.1) \text{ den} \\ &= \sup_{\|x_k\| \leq 1} \left| \sum_{k=1}^{\infty} (f \circ T_k)(x_k) \right| \\ &= \left\| (f \circ T_k)_{k=1}^{\infty} \right\|_{E^\beta} \\ &= \left\| \varphi(f) \right\|_{E^\beta} \end{aligned}$$

Bundan dolayı φ bir izometridir. O halde $\varphi: E' \rightarrow E^\beta$ ya olan φ dönüşümü E' den E^β ya izometrik olarak izomorfizmdir. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 4.12. $\forall k \in \mathbb{N}$ ve $p_k > 1$ olmak üzere $p = (p_k)$ pozitif reel sayıların bir dizisi,

$\forall k \in \mathbb{N}$ için $\frac{1}{p_k} + \frac{1}{q_k} = 1$ olacak şekilde $q = (q_k)$ pozitif reel sayıların bir dizisi olsun.

Bu takdirde;

$\ell(X, p)^\beta = \ell_0(X', q)$ dür.

İspat: Kabul edelim ki $(f_k) \in \ell_0(X', q)$ olsun. Bu taktirde bazı $M \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|^{q_k} M^{-q_k} < \infty$$

Buradan her bir $x = (x_k) \in \ell(X, p)$ için

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x_k)| &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\| \cdot \|x_k\| \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\| M^{-1/p_k} M^{1/p_k} \|x_k\| && (M^{-1/p_k} M^{1/p_k} = 1) \text{ olduğundan} \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|^{q_k} M^{-q_k/p_k} + M \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^{p_k} \right) (ab \leq a^p + b^q) \text{ olduğundan} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|^{q_k} M^{-(q_k-1)} M + \sum_{k=1}^{\infty} M \|x_k\|^{p_k} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|^{q_k} M^{-q_k} M + M \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^{p_k} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|^{q_k} M^{-q_k} + M \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^{p_k} < \infty \\ &\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x_k)| \text{ yakınsaktır} \end{aligned}$$

O halde $(f_k) \in \ell_0(X', q)$ için $f_k \in \ell(X, p)^\alpha \subset \ell(X, p)^\beta$ olduğundan $f_k \in \ell(X, p)^\beta$ dir.

Buradan $\ell_0(X', q) \subseteq \ell(X, p)^\beta$ bulunur.

Şimdi de $\ell(X, p)^\beta \subseteq \ell_0(X', q)$ olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $(f_k) \in \ell(X, p)^\beta$

olsun. Bu taktirde $\forall x = (x_k) \in \ell(X, p)$ için $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_k)$ yakınsaktır. Her bir

$x = (x_k) \in \ell(X, p)$ için $|t_k| = 1$ olacak şekilde bir (t_k) skaler dizisi seçelim. Şu halde

$\forall k \in \mathbb{N}$ için $f_k(t_k x_k) = |f_k(x_k)|$ olur. $(t_k x_k) \in \ell(X, p)$ olduğundan, kabulümüzden dolayı $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(t_k x_k)$ yakınsaktır. $f_k(t_k x_k) = |f_k(x_k)|$ olduğundan $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x_k)|$ yakınsaktır.

Yani $\forall x \in \ell(X, p)$ için

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x_k)| < \infty.$$

$(f_k) \in \ell_0(X', q)$ olduğunu göstermek istiyoruz. Yani bazı $M \in \mathbb{N}$ için

$\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|^{q_k} M^{-q_k} < \infty$ olduğunu göstermeliyiz. Kabul edelim ki bu doğru olmasın. Yani

$\forall m \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|^{q_k} m^{-q_k} = \infty \text{ olsun.} \quad (4.3)$$

(4.3) den dolayı $\forall k \in \mathbb{N}$ ve $\forall m \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{i>k} \|f_i\|^{q_i} m^{-q_i} = \infty \quad (4.4)$$

(4.3) den dolayı $m_1 = 1$ olsun. O halde bir $k_1 \in \mathbb{N}$ vardır. Öyle ki

$$\sum_{k \leq k_1} \|f_k\|^{q_k} m_1^{-q_k} > 1$$

(4.18) den dolayı $m_2 > 2^2$ ile birlikte $m_2 > m_1$ ve $k_2 > k_1$ seçebiliriz. Öyle ki

$$\sum_{k_1 < k \leq k_2} \|f_k\|^{q_k} m_2^{-q_k} > 1$$

Bu şekilde devam edersek pozitif tamsayıların (k_i) ve (m_i) dizilerini

$1 = k_0 < k_1 < k_2 < \dots$ ve $m_1 < m_2 < \dots$ ile birlikte seçebiliriz. Öyle ki $m_i > 2^2$ ve

$$\sum_{k_{i-1} < k \leq k_i} \|f_k\|^{q_k} m_i^{-q_k} > 1$$

$\forall i \in \mathbb{N}$ ve $\forall k \in \mathbb{N}$ için, $k_{i-1} < k \leq k_i$ ve $\|x_k\| = 1$ olacak şekilde X te bir x_k seçelim öyle ki $\forall i \in \mathbb{N}$ için $\|f_k\| \leq |f_k(x_k)| \cdot \|x_k\| = |f_k(x_k)|$ olduğundan;

$$\sum_{k_{i-1} < k \leq k_i} |f_k(x_k)|^{q_k} m_i^{-q_k} > 1$$

$a_i = \sum_{k_{i-1} < k \leq k_i} |f_k(x_k)|^{q_k} m_i^{-q_k}$ olsun. $y = (y_k)$ olmak üzere $k_{i-1} < k \leq k_i$ ile birlikte $\forall k \in \mathbb{N}$

için

$$y_k = a_i^{-1} m_i^{-q_k} |f_k(x_k)|^{q_k-1} x_k \text{ olsun}$$

$\frac{1}{p_k} + \frac{1}{q_k} = 1$ olmak üzere $p_k q_k = p_k + q_k$ olduğunu göz önüne alırsak $\forall i \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} \sum_{k_{i-1} < k \leq k_i} \|y_k\|^{p_k} &= \sum_{k_{i-1} < k \leq k_i} \left\| a_i^{-1} m_i^{-q_k} |f_k(x_k)|^{q_k-1} x_k \right\|^{p_k} \\ &= \sum_{k_{i-1} < k \leq k_i} a_i^{-p_k} m_i^{-p_k q_k} |f_k(x_k)|^{p_k(q_k-1)} \|x_k\|^{p_k}, \quad (\|x_k\| = 1) \text{ olduğundan} \\ &= \sum_{k_{i-1} < k \leq k_i} a_i^{-p_k} m_i^{-p_k} m_i^{-q_k} |f_k(x_k)|^{q_k} \quad (a_i^{-p_k} m_i^{-p_k} < a_i^{-1} m_i^{-1}) \text{ olduğundan} \\ &\leq a_i^{-1} m_i^{-1} \sum_{k_{i-1} < k \leq k_i} m_i^{-q_k} |f_k(x_k)|^{q_k} \tag{4.23} \\ &\leq a_i^{-1} m_i^{-1} a_i \\ &= m_i^{-1} \\ &< \frac{1}{2^i} \end{aligned}$$

$$\text{böylece } \sum_{k=1}^{\infty} \|(y_k)\|^{p_k} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \infty$$

elde ederiz. Bundan dolayı $y = (y_k) \in \ell(X, p)$ olur.

$\forall i \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}
\sum_{k_{i-1} < k \leq k_i} |f_k(y_k)| &= \sum_{k_{i-1} < k \leq k_i} \left| f_k \left(a_i^{-1} m_i^{-q_k} |f_k(x_k)|^{q_k-1} x_k \right) \right| \\
&= \sum_{k_{i-1} < k \leq k_i} a_i^{-1} m_i^{-q_k} |f_k(x_k)|^{q_k-1} |f_k(x_k)| \\
&= \sum_{k_{i-1} < k \leq k_i} a_i^{-1} m_i^{-q_k} |f_k(x_k)|^{q_k} \\
&= a_i^{-1} \sum_{k_{i-1} < k \leq k_i} m_i^{-q_k} |f_k(x_k)|^{q_k} \\
&= a_i^{-1} a_i \\
&= 1
\end{aligned}$$

Böylece $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(y_k)| = \infty$ bu da (4.3) ile çelişir. Bundan dolayı $(f_k) \in \ell_0(X', q)$ olur. Bu da ispatı tamamlar.

Aşağıdaki teorem; $\forall k \in \mathbb{N}$ için $p_k \leq 1$ olduğunda $\ell(X, p)$ nin β dualinin bir karakterizasyonunu verir. Bunu ispatlamak için aşağıdaki lemmaya ihtiyacımız vardır.

Lemma 4.13. $p = (p_k)$ pozitif reel sayıların sınırlı bir dizisi olsun. O halde

$$\ell_{\infty}(X, p) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \ell_{\infty}(X)_{(n^{-1/p_k})}$$

İspat: $x \in \ell_{\infty}(X, p)$ olsun. O halde $\forall k \in \mathbb{N}$ için $\|x_k\|^{p_k} \leq n$ ile birlikte bazı $n \in \mathbb{N}$ ler vardır.

Bundan dolayı $\forall k \in \mathbb{N}$ için $\|x_k\| n^{-1/p_k} \leq 1$. Buradan $x \in \ell_{\infty}(X)_{(n^{-1/p_k})}$ dir.

Diğer taraftan, eğer $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \ell_{\infty}(X)_{(n^{-1/p_k})}$ ise bazı $n \in \mathbb{N}$ ve $M > 1$ olmak üzere n ve M ler vardır öyle ki her bir $k \in \mathbb{N}$ için $\|x_k\| n^{-1/p_k} \leq M$. Buradan her iki tarafın p_k . kuvveti alınırsa $\|x_k\|^{p_k} n^{-1} \leq M^{p_k}$ elde edilir. Şimdi de her iki tarafı $n \in \mathbb{N}$ ile çarparsak

$\|x_k\|^{p_k} \leq nM^{p_k}$ elde edilir. Burada $\alpha = \sup_k p_k$ olmak üzere $\forall k \in \mathbb{N}$ için $\|x_k\|^{p_k} \leq nM^\alpha$

bu ise $x \in \ell_\infty(X, p)$ demektir.

Teorem 4.14. $\forall k \in \mathbb{N}$ için $p_k \leq 1$ ile birlikte $p = (p_k)$ pozitif reel sayıların sınırlı bir dizisi olsun. Bu taktirde $\ell(X, p)^\beta = \ell_\infty(X', p)$ dir.

İspat: Kabul edelim ki $(f_k) \in \ell(X, p)^\beta$ olsun. Bu taktirde $\forall x = (x_k) \in \ell(X, p)$ için

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_k) \text{ yakınsaktır.}$$

Şimdi de $\forall x = (x_k) \in \ell(X, p)$ için $|t_k| = 1$ olmak üzere skaler bir (t_k) dizisi seçelim.

Öyle ki $\forall k \in \mathbb{N}$ için $f_k(t_k x_k) = |t_k| |f_k(x_k)| = |f_k(x_k)|$ olur.

$(t_k x_k) \in \ell(X, p)$ olduğundan, kabulümüzden dolayı

$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(t_k x_k)$ yakınsaktır. $f_k(t_k x_k) = |f_k(x_k)|$ olduğundan $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x_k)|$ yakınsaktır. Yani

$$\forall x \in \ell(X, p) \text{ için } \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x_k)| < \infty \quad (4.5)$$

Şimdi de kabul edelim ki $(f_k) \notin \ell_\infty(X', p)$ olsun. Lemma 4.13 ten dolayı

$\sup_k \|f_k\| m^{-1/p_k} = \infty$. $\forall i, m \in \mathbb{N}$ için $m_1 < m_2 < \dots$ ve $k_1 < k_2 < \dots$ ile birlikte pozitif

tamsayıların (m_i) ve (k_i) dizilerini seçelim. Öyle ki $m_i > 2^i$ ve $\|f_{k_i}\| m_i^{-1/p_{k_i}} > 1$. Aynı

zamanda $\|x_{k_i}\| = 1$ olacak şekilde $x_{k_i} \in X$ seçelim öyle ki

$$\|f_{k_i}(x_{k_i})\| m_i^{-1/p_{k_i}} > 1 \quad (4.6)$$

Kabul edelim ki $y = (y_k)$ olmak üzere bazı i ler için eğer $k = k_i$ olduğunda

$y_k = m_i^{-1/p_{k_i}} x_{k_i}$ ve diğer durumlarda $y_k = 0$ olsun.

Bu taktirde $\sum_{k=1}^{\infty} \|y_k\|^{p_k} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{m_i} < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 1$ olduğundan $(y_k) \in \ell(X, p)$ olur ve

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(y_k)| &= \sum_{i=1}^{\infty} |f_{k_i}(m_i^{-1/p_{k_i}} x_{k_i})| \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} m_i^{-1/p_{k_i}} |f_{k_i}(x_{k_i})| \\
&= \infty \quad (4.6) \text{ dan dolayı}
\end{aligned}$$

Ve bu da (4.5) ile çelişir. O halde $(f_k) \in \ell_{\infty}(X', p)$ dir. Tersine, kabul edelim ki $(f_k) \in \ell_{\infty}(X', p)$ olsun.

Lemma 4.13 den dolayı $\sup_k \|f_k\| M^{-1/p_k} < \infty$ olacak şekilde bir $M \in \mathbb{N}$ vardır. Bundan dolayı $\forall k \in \mathbb{N}$ için

$$\|f_k\| \leq KM^{1/p_k} \quad (4.7)$$

olacak şekilde bir $K > 0$ vardır.

Kabul edelim ki $x = (x_k) \in \ell(X, p)$ olsun. Bu taktirde $\forall k \geq k_0$ için

$$M^{1/p_k} \|x_k\| \leq 1$$

olacak şekilde bir $k_0 \in \mathbb{N}$ vardır.

$\forall k \in \mathbb{N}$ için $p_k \leq 1$ den dolayı $\forall k \geq k_0$ için

$$M^{1/p_k} \|x_k\| \leq (M^{1/p_k} \|x_k\|)^{p_k} = M \|x_k\|^{p_k} \quad (4.8)$$

Şu halde

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x_k)| &\leq \sum_{k=1}^{k_0} \|f_k\| \|x_k\| + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \|f_k\| \|x_k\| \\
&\leq \sum_{k=1}^{k_0} \|f_k\| \|x_k\| + K \sum_{k=k_0+1}^{\infty} M^{1/p_k} \|x_k\| \quad (4.7) \text{ den}
\end{aligned}$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\| \|x_k\| + KM \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \|x_k\|^{p_k} \quad (4.8) \text{ den}$$

$< \infty$

Bu da $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_k)$ nın yakınsak olması demektir. O halde $(f_k) \in \ell(X, p)^\beta$.

Teorem 4.15. $p = (p_k)$ pozitif reel sayıların sınırlı bir dizisi olsun. Bu taktirde $\ell_\infty(X, p)^\beta = M_\infty(X', p)$.

İspat: $(f_k) \in M_\infty(X', p)$ olsun. O halde $\forall m \in \mathbb{N}$ için $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\| m^{1/p_k} < \infty$

$\forall x = (x_k) \in \ell_\infty(X, p)$ ve $\forall k \in \mathbb{N}$ için $\|x_k\| \leq m_0^{1/p_k}$ olacak şekilde bir $m_0 \in \mathbb{N}$ vardır.

Bundan dolayı $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x_k)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\| \|x_k\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\| m_0^{1/p_k} < \infty$, bu da $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_k)$ nın yakınsaması demektir. Bundan dolayı $(f_k) \in \ell_\infty(X, p)^\beta$ olur.

Tersine, kabul edelim ki $(f_k) \in \ell_\infty(X, p)^\beta$ olsun. O halde $\forall x = (x_k) \in \ell_\infty(X, p)$ için

$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_k)$ yakınsaktır. Şimdi burada $\forall x = (x_k) \in \ell_\infty(X, p)$ için $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x_k)|$ nın yakınsaklığını gösterelim. Bunun için $\forall x = (x_k) \in \ell_\infty(X, p)$ için $|t_k| = 1$ olacak şekilde skaler bir (t_k) dizisi seçelim. Öyle ki $f_k(t_k x_k) = |f_k(x_k)| \quad \forall k \in \mathbb{N}$ için $(t_k x_k) \in \ell_\infty(X, p)$

olduğundan kabulümüzden dolayı $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(t_k x_k)$ yakınsaktır. Bu da

$$\forall x \in \ell_\infty(X, p) \quad \text{için} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x_k)| < \infty \quad (4.9)$$

olması demektir.

Eğer $(f_k) \notin M_\infty(X', p)$ ise, bu taktirde bazı $M \in \mathbb{N}$ için $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\| M^{1/p_k} = \infty$. Burada

$0 = k_0 < k_1 < k_2 < \dots$ olacak şekilde pozitif tamsayıların bir (k_i) dizisini seçebiliriz. Öyle ki $\forall i \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{k_{i-1} < k \leq k_i} \|f_k\| M^{1/p_k} > i$$

ve $\forall i \in \mathbb{N}$ için $\|x_k\| = 1$ olacak şekilde $(x_k) \in X$ seçebiliriz öyle ki

$$\sum_{k_{i-1} < k \leq k_i} |f_k(x_k)| M^{1/p_k} > i$$

$y = (y_k)$ olmak üzere $y_k = M^{1/p_k} x_k$ olsun. Açıktır ki $y \in \ell_\infty(X, p)$ dir.

$$\forall i \in \mathbb{N} \text{ için } \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(y_k)| \geq \sum_{k_{i-1} < k \leq k_i} |f_k(x_k)| M^{1/p_k} > i$$

Bundan dolayı $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(y_k)| = \infty$. Bu da (4.9) ile çelişir.

Bu yüzden $(f_k) \in M_\infty(X', p)$ dir. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 4.16. $p = (p_k)$ pozitif reel sayıların sınırlı bir dizisi olsun. Bu taktirde $c_0(X, p)^\beta = M_0(X', p)$ dir.

İspat: Kabul edelim ki $(f_k) \in M_0(X', p)$ olsun. Buradan bazı $M \in \mathbb{N}$ için

$\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\| M^{-1/p_k} < \infty$. Diğer taraftan $x = (x_k) \in c_0(X, p)$ olsun. Böylece $\forall k \geq K_0$ için

$\|x_k\|^{p_k} < 1/M$ olacak şekilde pozitif bir $K_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Buradan $\forall k \geq K_0$ için

$\|x_k\| < M^{-1/p_k}$ elde ederiz.

Böylece

$$\sum_{k=K_0}^{\infty} |f_k(x_k)| \leq \sum_{k=K_0}^{\infty} \|f_k\| \|x_k\| \leq \sum_{k=K_0}^{\infty} \|f_k\| M^{-1/p_k} < \infty$$

elde ederiz ki bu ise $\sum_{k=K_0}^{\infty} |f_k(x_k)|$ nın yakınsak olması demektir.

Mutlak yakınsak her seri yakınsak olduğundan $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_k)$ yakınsaktır. Bu yüzden

$(f_k) \in c_0(X, p)^\beta$ olur. Diğer taraftan, kabul edelim ki $(f_k) \in c_0(X, p)^\beta$ olsun. Bu

taktirde $\forall x = (x_k) \in c_0(X, p)$ için $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_k)$ yakınsaktır. $\forall x = (x_k) \in c_0(X, p)$ için

$|t_k|=1$ olacak şekilde bir (t_k) skaler dizisini seçelim. Öyle ki $\forall k \in \mathbb{N}$ için $f_k(t_k x_k) = |f_k(x_k)|$ olur. $(t_k x_k) \in c_0(X, p)$ olduğundan kabulümüzden dolayı $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(t_k x_k)$ nin yakınsak olduğunu elde ederiz. $f_k(t_k x_k) = |f_k(x_k)|$ olduğundan $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(t_k x_k) = \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x_k)|$ olur ki buradan $\forall x \in c_0(X, p)$ için $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x_k)|$ nin da yakınsak olduğunu elde ederiz.

Şimdi de kabul edelim ki $(f_k) \notin M_0(X', p)$ olsun. (4.10)

Bu taktirde $\forall m \in \mathbb{N}$ için $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\| m^{-1/p_k} = \infty$

$m_1, k_1 \in \mathbb{N}$ seçelim. Öyle ki

$$\sum_{k \leq k_1} \|f_k\| m_1^{-1/p_k} > 1$$

ve $m_2 > m_1$ ve $k_2 > k_1$ seçelim. Öyle ki

$$\sum_{k_1 < k \leq k_2} \|f_k\| m_2^{-1/p_k} > 2$$

Bu şekilde devam edilirse $i \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$m_1 < m_2 < \dots$, ve $0 = k_1 < k_2 < \dots$ olacak şekilde m_i ve k_i leri seçebiliriz. Öyle ki

$$\sum_{k_{i-1} < k \leq k_i} \|f_k\| m_i^{-1/p_k} > i$$

$\forall k$ için $k_{i-1} < k \leq k_i$ ve $\|x_k\| = 1$ olacak şekilde $(x_k) \in X$ seçelim. Öyle ki $\forall i \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{k_{i-1} < k \leq k_i} |f_k(x_k)| m_i^{-1/p_k} > i$$

Şimdi de $k_{i-1} < k < k_i$ için

$y = (y_k)$ için $y_k = m_i^{-1/p_k} x_k$ olsun. O halde $y \in c_0(X, p)$ dir. Böylece $\forall i \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(y_k)| \geq \sum_{k_{i-1} < k \leq k_i} |f_k(x_k)| m_i^{-1/p_k} > i$$

bulunur. Bu ise $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(y_k)| = \infty$ olması demektir. Bu da (4.9) ile çelişir. Bu yüzden $(f_k) \in M_0(X', p)$ dir. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 4.17. $p = (p_k)$ pozitif reel sayıların sınırlı bir dizisi olsun. Bu takdirde

$$c(X, p)^\beta = M_0(X', p) \cap cs[X'] \text{ d\u00fcr.}$$

İspat: $E = \{e(x) : x \in X\}$ olmak \u00fczere $c(X, p) = c_0(X, p) + E$ oldu\u011fundan ve aynı zamanda $E = E_1 + E_2$ ise $E^\beta = E_1^\beta \cap E_2^\beta$ y1 ve $c_0(X, p)^\beta = M_0(X', p)$ teoremini kullanırsak

$$\begin{aligned} c(X, p)^\beta &= c_0(X, p)^\beta \cap E^\beta \\ &= M_0(X', p) \cap E^\beta \end{aligned}$$

Tanımdan

$$E^\beta = \left\{ (f_k) \subset X' : \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \text{ yakınsaktır } \forall x \in X \right\} = cs[X']$$

oldu\u011fundan $c(X, p)^\beta = M_0(X', p) \cap cs[X']$ elde ederiz. Bu da teoremi ispatlar.

KAYNAKLAR

1. Maddox, I. J., Paranormed sequence spaces generated by infinite matrices. Proc. Cambridge Philos. Soc. 64, 335-340, 1968.
2. Nakano, H., Modulared sequence spaces, Proc. Japan Acad. 27, 508-512, 1951.
3. Gupta M., Kamathan P.K., Patterson J., Duals of generalized sequence spaces, J. Math Anal. Appl. 82, 152-168, 1981.
4. Das, N.R., Chaudhury, A., calc. 84(1), 47-54, 1992.
5. Wu, C. X., Liu, L., Matrix transformations on some vector-valued sequence spaces, Southeast Assian Bull. Math. 17, 83-96, 1993.
6. Suantai, S., Sanhan, W., On β -dual of vector-valued sequence space of Maddox, IJMMS. 30 (7), 383-392, 2002.
7. Erwin, Kreyszig, Introductory functional analysis with applications. Bibliography: P. 1. Functional analysis. I. Title QA 320. K74, 515.7, 77-2560.
8. Maddox, I. J., Spaces of strongly summable sequences, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) 18, 345-355, 1967.
9. Grosse Erdmann, K.G., The structure of the sequence of Maddox, Canad. J. Math. 44, 298-307, 1992.
10. Grosse Erdmann, K.G., Matrix transformations between the sequence spaces of Maddox, J. Math. Anal. Appl. 180, 223-228, 1993.
11. Cooke, R. G., Infinite Matrices and Sequence Spaces, Macmillan, London, 1950.
12. Simons S., The sequence spaces I (pv) and m (pv). Proc. London Math. Soc. (3) 15, 422-436, 1965.
13. Suantai, S., Sudsukh, C., Matrix transformations of Nakano vector-valued sequence space, Kyungpook Math. J. 40, 93-97, 2000.
14. Suantai, S., Matrix transformations between some vector-valued sequence spaces SEA Bull. Math., 24, 297-303, 2000.

15. Suantai, S., Matrix transformations of some vector-valued sequence spaces, *Indian J. Pure appl. Math.*, 34 (5), 677-691, 2003.
16. Suantai, S., On matrix transformations concerning the Nakano vector-valued sequence spaces, *IJMMS.*, 26: 11, 671-678, 2001.
17. Suantai, S., On matrix transformations related to Nakano vector-valued sequence spaces, *Bull. Calcutta Math. Soc.* 91, 221-226, 1999.

ÖZGEÇMİŞ

Sertif KIRMIZITAŞ, 1973 yılında Kayseri’de doğdu. İlk ve orta öğrenimini Kayseri’de tamamladı. 1996 yılında Orta Doğu Teknik Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği Bölümü’nden mezun oldu. 2001 yılında Erciyes Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü’nde yüksek lisans öğrenimine başladı. Halen Kayseri’nin Talas İlçesi’nde Y. Mimar Selçuk Karakimseli İlköğretim Okulu’nda öğretmen olarak görev yapmaktadır.

Adres: Köşk mah. Köşk cd. Kılıç Sk. Çağrı Sitesi No: 6/14 KAYSERİ

e-posta: sertif@hotmail.com