T.C.
ERCİYES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BULANIK SAYI DİZİLERİNİN λ-İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI

Tezi Hazırlayan
Ayşe Gül ŞİMŞEK

Tezi Yöneten
Yrd. Doç. Dr. A. Nihal TUNCER

Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Temmuz 2008
KAYSERİ

Yrd. Doç. Dr. A. Nihal TUNCER danışmanlığında **Ayşe Gül ŞİMŞEK** tarafından hazırlanan **"Bulanık Sayı Dizilerinin λ –İstatistiksel Yakınsaklığı"** adlı bu çalışma, jürimiz tarafından Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Yüksek Lisans** tezi olarak kabul edilmiştir.

17.07.2008

JÜRİ:

Başkan : Prof. Dr. Hikmet ÖZARSLAN
Üye : Yrd. Doç. Dr. A. Nihal TUNCER
Üye : Yrd. Doç. Dr. Nural YÜKSEL

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulunun 22/07/2008 tarih ve 2008/21-12 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

22/07/2008

N. Ayyıldız
Prof. Dr. Nusret AYYILDIZ
Enstitü Müdürü

TEŞEKKÜR

Çalışmalarımın her safhasında değerli bilgileriyle beni yönlendiren ve maddi manevi her konuda desteğini esirgemeyen sayın hocam, tez danışmanım Yrd. Doç. Dr. A. Nihal TUNCER' e, yüksek lisans öğrenimim süresince maddi destek veren Türkiye Bilimsel Teknik ve Araştırma Kurumu' na, her zaman ilgi ve desteğini yanımda hissettiğim aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

BULANIK SAYI DİZİLERİNİN λ-İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI

Ayşe Gül ŞİMŞEK

Erciyes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü

Yüksek Lisans Tezi, Temmuz 2008

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. A. Nihal TUNCER

ÖZET

Bulanık sayıların sınırlı ve yakınsak dizileri ilk olarak Matloka (1986) tarafından tanımlandı. Daha sonra bulanık sayı dizileri için istatistiksel yakınsaklık, istatistiksel Cauchy dizisi Nuray-Savaş (1995) ve λ**-**istatistiksel yakınsak dizi kavramları Savaş (2000) tarafından tanımlandı. Aytar (2004, 2006) bulanık sayı dizileri için istatistiksel limit-yığılma noktaları, istatistiksel sınırlılık-monotonluk ve istatistiksel limit infimum-supremum kavramlarını vermiştir. Bu tezde bulanık sayıların λ**-**istatistiksel yakınsaklığı ve λ**-**istatistiksel limit-yığılma noktaları incelenmiştir. Klasik teoridekine benzer şekilde, aralarındaki ilişkiyi inceleyen teoremler ifade ve ispat edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Bulanık sayı, λ**-**istatistiksel yakınsaklık, λ**-**istatistiksel limit noktası.

λ - STATISTICAL CONVERGENCE OF SEQUENCES OF FUZZY NUMBERS

Ayşe Gül ŞİMŞEK

Erciyes University, Graduate School of Natural and Applied Sciences

M. Sc. Thesis, July 2008

Thesis Supervisor: Asist. Prof. A. Nihal TUNCER

ABSTRACT

Bounded and convergent sequences of fuzzy numbers have been introduced by Matloka,in 1986. Then, the concepts such as statistical convergence, statistical Cauchy sequence Nuray-Savas (1995) and λ-statistical convergent sequence of fuzzy numbers have been defined by Savas (2000). Aytar (2004, 2006) developed these definitions: statistical limit-cluster points, statistical boundedness and monotonousness and statistical limit inferior-superior. In this thesis, λ- statistical convergent and λ- statistical limit-cluster points of fuzzy numbers have been investigated. Like in the classical theory, the theorems examining their relationship have been stated and proved.

Key Words: Fuzzy numbers, λ-statistical convergence, λ-statistical limit point.

İÇİNDEKİLER

KISALTMALAR

IN	Doğal sayılar cümlesi
IR	Reel sayılar cümlesi
$\|K\|$	K cümlesinin eleman sayısı
δ	Yoğunluk fonksiyonu
δ_λ	λ-yoğunluk fonksiyonu
C	Yakınsak diziler uzayı
S	İstatistiksel yakınsak diziler uzayı
$L(IR)$	Bulanık sayılar cümlesi
L_X	X dizisinin limit noktalarının cümlesi
$st-\lim X$	X dizisinin istatistiksel limiti
$s\lambda-\lim X$	X dizisinin λ-istatistiksel limiti
Λ_X^λ	X dizisinin λ-istatistiksel limit noktalarının cümlesi
Γ_X^λ	X dizisinin λ-istatistiksel yığılma noktalarının cümlesi
$x=(x_k)$	Reel sayı dizileri
$X=(X_k)$	Bulanık sayı dizileri

1.BÖLÜM

GİRİŞ

İlk olarak 1951 yılında Steinhaus [1] tarafından, Polonya'da yapılan bir konferansta tanıtılan ve yine aynı yılda Fast [2] tarafından geliştirilen "İstatistiksel Yakınsaklık" kavramı, Toplanabilme Teorisi [3-5], Fourier Serileri [6], Fonksiyonel Analiz [6-8], Sayılar Teorisi [9] ve son zamanlarda ise, Ölçü Teorisi [10], Optimizasyon Teorisi [11,12] ve Fonksiyon Dizileri [13] gibi matematiğin temel alanlarıyla olan ilişkisi nedeniyle yaklaşık yarım asırdır bir çok matematikçinin ilgilendiği önemli bir konu haline gelmiştir. Özellikle 1993 yılında Fridy [14] tarafından "istatistiksel limit noktaları" kavramı verildikten sonra 1997 yılında Fridy ve Orhan [15] tarafından "istatistiksel limit supremum ve limit infimum" kavramları verilerek bir çeşit yeni bir analiz kavramı ortaya konulmuştur.

Bulanık sayıların sınırlı ve yakınsak dizileri ilk olarak Matloka [16] tarafından tanıtıldı. Nanda [17] bulanık sayı dizileri uzayının tam metrik uzay olduğunu ispatladı. Daha sonra Nuray ve Savaş [18] bulanık sayılar için istatistiksel yakınsaklık ve istatistiksel Cauchy dizilerini tanımladılar. Nuray [19], Savaş [20] ve Kwon [21,22] istatistiksel yakınsaklık teorisindeki bazı sonuçların bulanık sayılar için benzerlerini yaptılar. Aytar [23-25] bulanık sayı dizileri için istatistiksel limit noktaları, istatistiksel sınırlılık, istatistiksel monotonluk ve istatistiksel limit supremum, istatistiksel limit infimum kavramlarını tanımladı.

Bulanık sayı dizileri için λ-istatistiksel yakınsaklık ve kuvvetli λ-toplanabilme kavramları ise, Mursaleen [26] ve Savaş [27] tarafından tanımlandı.

Bu yüksek lisans tezinde, bulanık sayı dizileri için λ-istatistiksel limit, yığılma noktaları kavramları verilerek, bir dizinin λ-istatistiksel limit noktalarının cümlesi, λ-istatistiksel yığılma noktalarının cümlesi ve adi limit noktalarının cümlesi arasındaki ilişkiyi inceleyen teoremler ifade ve ispat edildi.

2. BÖLÜM

TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde, ilk olarak konumuzla ilgili olan bazı tanım, teorem ve notasyonları vererek işe başlayacağız.

2.1. İstatistiksel Yakınsaklık

IN doğal sayılar cümlesini göstermek üzere bir $K \subset IN$ alt cümlesi verilsin ve ayrıca $\{k \le n : k \in K\}$ cümlesi K ile, eleman sayısı da $|K|$ ile gösterilsin.

Tanım 2.1.1. Bir $K \subset IN$ alt cümlesi için

$$\lim_{n} \frac{1}{n} |K|$$

limiti mevcut ise, bu limit değerine *K* cümlesinin yoğunluğu (veya doğal yoğunluğu) denir ve $\delta(K)$ ile gösterilir [28].

Örnek 2. 1. 1. $K = \{1, 2, 3, ...\} = IN$ olsun. $\dfrac{|K|}{n}$ dizisi,

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \frac{4}{4}, \frac{5}{5}, ...$$

şeklinde ve

$$\delta(K)=\lim_{n\to\infty}\frac{|K|}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n}=1$$

dir.

Örnek 2. 1. 2. $K=\{2,\ 4,\ 6,\ ...\}$ olsun. $\frac{|K|}{n}$ dizisi,

$$\frac{0}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{4},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{6},\ \frac{3}{7},\ ...$$

şeklinde ve

$$\delta(K)=\lim_{n\to\infty}\frac{|K|}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left[\left|\frac{n}{2}\right|\right]}{n}=\frac{1}{2}$$

dir.

Örnek 2. 1. 3. $K=\{1,\ 3,\ 5,\ ...\}$ olsun. $\frac{|K|}{n}$ dizisi,

$$\frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{5},\ \frac{3}{6},\ \frac{4}{7},\ \ldots$$

şeklinde ve

$$\delta(K)=\lim_{n\to\infty}\frac{|K|}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left[\left|\frac{n+1}{2}\right|\right]}{n}=\frac{1}{2}$$

dir.

Örnek 2. 1. 4. $K = \{1, 4, 9, ..., n^2, ...\}$ olsun. $\frac{|K|}{n}$ dizisi,

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{2}{5}, \frac{2}{6}, \frac{2}{7}, \frac{2}{8}, \frac{3}{9}, \ldots$$

şeklinde ve

$$\delta(K) = \lim_{n\to\infty} \frac{|K|}{n} \le \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n} = 0$$

dır.

İstatistiksel yakınsaklık tanımını vermeden önce adi yakınsak dizilerin tanımını hatırlayarak istatistiksel yakınsaklık fikrinin nereden kaynaklandığını görelim. Adi yakınsaklıkta, bir x reel sayı dizisi L ye yakınsak ise, L nin her bir ε komşuluğu dışında, dizinin ancak sonlu sayıda elemanı kalabilir. Şimdi bu kavramı biraz genelleştirmeye çalışacağız. Kabul edelim ki, L noktasının her bir ε komşuluğu dışında dizinin sonlu sayıda değil, sonsuz sayıda elemanı kalsın. Fakat böyle elemanların sayısı dizinin tüm elemanlarının sayısına göre çok azdır. Yani dizinin hemen hemen tüm elemanları L nin ε komşuluğu içerisindedir. Bu durumda x dizisinin L noktasına "hemen hemen" yakınsak olduğu söylenebilir. İstatistiksel yakınsaklık kavramı, bu fikri matematiksel olarak kesin ifade eden kavramlardan biridir. Burada L noktasının ε komşuluğu dışında kalan elemanlarının sayısının "az" olması böyle elemanların doğal yoğunluğunun sıfır olması ile ifade edilir. Şimdi iki dizinin "hemen hemen" eşit olmasını tanımlayıp istatistiksel yakınsaklık kavramını vereceğiz.

Tanım 2.1.2. $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ dizileri için $\delta(\ \{k \in IN : x_k \neq y_k\}\ ) = 0$ ise, x ve y dizileri hemen hemen her k için eşittir denir [5].

Tanım 2.1.3. $x = (x_k)$ reel ya da kompleks terimli bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\delta\left(\left\{k : \left|x_k - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right) = 0$$

yani

$$\lim_n \frac{1}{n}\left|\ \left\{k \leq n : \left|x_k - L\right| \geq \varepsilon\right\}\ \right| = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa, bu durumda x dizisi L sayısına istatistiksel yakınsaktır denir ve $x_k \to L(stat)$ veya $st - \lim_k x_k = L$ şeklinde gösterilir [1, 2].

İstatistiksel yakınsaklık tanımından da anlaşılacağı üzere, eğer x dizisi bir L sayısına istatistiksel yakınsak ise, bu durumda L sayısının herhangi bir $\varepsilon > 0$ komşuluğunda dizinin sonsuz çoklukta terimi bulunurken bu komşuluğun dışında da, indis cümlesinin yoğunluğu sıfır olmak koşuluyla, yine diziye ait sonsuz çoklukta terim bulunabilir. Bu durum, istatistiksel yakınsaklığın bilinen anlamdaki yakınsaklıktan daha genel olduğunu göstermektedir. Dolayısıyla yakınsak dizilerin uzayını C ile ve istatistiksel yakınsak diziler uzayını da S ile gösterecek olursak, bu durumda $C \subset S$ olduğu kolayca görülür. Üstelik aşağıdaki örnek, bu önermenin karşıtının her zaman doğru olamayacağını göstermektedir.

Örnek 2.1.5. $x = (x_k)$ dizisinin genel terimi

$$x_k = \begin{cases} k \ ; \ k = m^2 \ \ ise,\ m \in IN \\ \\ 0 \ ; \ k \neq m^2 \ \ ise \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. $\frac{1}{2}$ den küçük olacak şekilde herhangi bir $\varepsilon > 0$ için

$$K = \left\{k : \left|\ x_k - 0\ \right| \geq \varepsilon\right\} = \{1, 4, 9, 16, \ldots\}$$

alınır. Burada K cümlesinin yoğunluğu $\delta(K)=0$ dır. Dolayısıyla x dizisi $L=0$ a istatistiksel yakınsaktır, yani $st-\lim_{k} x_k = 0$ dır. Aynı zamanda bu dizinin ε komşuluğu dışında kalan elemanları sonsuz sayıda olduğundan yakınsak değildir. O halde istatistiksel yakınsak her dizinin yakınsak olamayacağı söylenebilir. Diğer taraftan yakınsak her dizinin istatistiksel yakınsak olduğu sonlu sayıda elemanı bulunan cümlenin doğal yoğunluğu sıfır olduğundan söylenebilir [5].

2.2. Aralık Sayıları

Bütün reel sayıların cümlesini IR ile gösterelim. Herhangi bir reel sayının a ve b gibi iki reel sayı arasında olduğu bilinir. Buna göre x reel sayısının $a \le x \le b$ veya $x \in [a,b]$ şeklinde $[a,b]$ kapalı sınırlı aralığına dahil olduğu kabul edilir. a ve b, aralığın sınırları veya bitim noktaları olarak adlandırılır. Bir A aralık sayısının alt sınırı $\underline{A}$, üst sınırı ise $\overline{A}$ şeklinde gösterilir. Bir aralık; kapalı, açık, alttan sınırsız (soldan), üstten sınırsız (sağdan) olabilir. IR reel sayılar cümlesi de bir aralıktır ve $(-\infty,\infty)$ şeklinde gösterilir.

A aralık sayısı, $a \le x \le b$ olacak şekildeki x reel sayılarının cümlesi olarak tanımlanır. Yani $a,b \in IR$ için $x \in [a,b]$ veya

$$A = \left[\, \underline{A}, \overline{A} \,\right] = \left\{ x : \underline{A} \le x \le \overline{A},\ x \in IR \right\}$$

dir.

Özel olarak $a=b$ alınırsa A aralık sayısı bir reel sayıya indirgenir ki, bu da $a=[a,a]$ gibi nokta aralık veya tek nokta cümlesi olarak adlandırılır. Böylece bir aralık sayısı bir reel sayının (tek nokta cümlesinin) genelleştirilmişidir denir.

Herhangi bir A aralık sayısı için, genişlik, büyüklük, yansıma ve tersi kavramları aşağıdaki şekilde tanımlanır.

Genişlik (Width)	:	$W(A) = W[\underline{A}, \overline{A}] = \overline{A} - \underline{A}$
Büyüklük (Magnitude)	:	$\lvert A \rvert = \lvert [\underline{A}, \overline{A}] \rvert = \max(\lvert \underline{A} \rvert, \lvert \overline{A} \rvert) = \begin{cases} \lvert \underline{A} \rvert, & \lvert \underline{A} \rvert \geq \lvert \overline{A} \rvert \\ \lvert \overline{A} \rvert, & \lvert \underline{A} \rvert \leq \lvert \overline{A} \rvert \end{cases}$
Yansıma (İmage)	:	$A^{-} = [\underline{A}, \overline{A}]^{-} = [-\overline{A}, -\underline{A}]$
Ters (İnverse)	:	$A^{-1} = [\underline{A}, \overline{A}]^{-1} = \left[\frac{1}{\overline{A}}, \frac{1}{\underline{A}}\right], \quad 0 \notin [\underline{A}, \overline{A}]$ ise

Örnek 2.2.1. $A = [3,7]$ aralık sayısı için

Genişlik : $W(A) = W([3,7]) = 7 - 3 = 4$

Büyüklük : $\lvert A \rvert = \lvert [3,7] \rvert = \max(\lvert 3 \rvert, \lvert 7 \rvert) = 7$

Yansıma : $A^{-} = [3, 7]^{-} = [-7, -3]$

Ters : $A^{-1} = [3,7]^{-1} = \left[\frac{1}{7}, \frac{1}{3}\right]$

şeklindedir.

Reel sayıların aralıkları üzerindeki "$\leq$" sıralama bağıntısı

“ $A \leq B \Leftrightarrow \underline{A} \leq \underline{B} \;\; ve \;\; \overline{A} \leq \overline{B}$ ”

şeklinde tanımlanmıştır.

2.2.1. Aritmetik İşlemler

$A = \left[\underline{A}, \overline{A}\right]$ ve $B = \left[\underline{B}, \overline{B}\right]$ aralıkları için $\underline{A} = \underline{B}$ ve $\overline{A} = \overline{B}$ yazılabiliyorsa A aralık sayısı B aralık sayısına eşit denir. $A = \left[\underline{A}, \overline{A}\right]$ ve $B = \left[\underline{B}, \overline{B}\right]$ aralık sayıları için aşağıdaki işlemler tanımlanabilir.

Toplama : $A + B = \left[\underline{A}, \overline{A}\right] + \left[\underline{B}, \overline{B}\right] = \left[\underline{A} + \underline{B}, \overline{A} + \overline{B}\right]$

Çıkarma : $A - B = \left[\underline{A}, \overline{A}\right] - \left[\underline{B}, \overline{B}\right] = \left[\underline{A} - \overline{B}, \overline{A} - \underline{B}\right]$

Çarpma : $A \cdot B = AB = \left[\underline{A}, \overline{A}\right] \cdot \left[\underline{B}, \overline{B}\right]$

$$= \left[\min\left(\underline{A} \cdot \underline{B},\ \overline{A} \cdot \overline{B},\ \underline{A} \cdot \overline{B},\ \overline{A} \cdot \underline{B}\right), \max\left(\underline{A} \cdot \underline{B}, \overline{A} \cdot \overline{B},\ \underline{A} \cdot \overline{B},\ \overline{A} \cdot \underline{B}\right)\right]$$

Bölme : $A : B = A / B = \dfrac{A}{B} = \left[\underline{A}, \overline{A}\right] : \left[\underline{B}, \overline{B}\right]$

$$= \left[\underline{A}, \overline{A}\right] \cdot \left[\frac{1}{\overline{B}}, \frac{1}{\underline{B}}\right], \qquad 0 \notin \left[\underline{B}, \overline{B}\right]$$

i) $A + A^{-} = \left[\underline{A}, \overline{A}\right] + \left[-\overline{A}, -\underline{A}\right] = \left[-\left(\overline{A} - \underline{A}\right), \overline{A} - \underline{A}\right] \neq 0$

fakat $0 \in A + A^{-}$ ve $A + A^{-}$ yeni aralığın uç noktaları 0 a göre simetriktir.

ii) $A \cdot A^{-1} = \left[\underline{A}, \overline{A}\right] \cdot \left[\dfrac{1}{\overline{A}}, \dfrac{1}{\underline{A}}\right] \neq 1$ fakat $1 \in A \cdot A^{-1}$ dir.

Eğer A, $A=[a,a]$ reel sayısına (tek nokta aralığına) indirgenirse, bu durumda yansıması ve tersi sırasıyla A^{-} ve A^{-1} olmak üzere

$$A^{-}=[-a,-a]=-A \qquad \text{ve} \qquad A^{-1}=\left[\frac{1}{a},\frac{1}{a}\right]=\frac{1}{A}$$

şeklindedir. (i) ve (ii) ifadeleri kullanılarak cebirdeki temel sonuçlar özel bir durum olarak elde edilir. $a+(-a)=0$ ve $a\cdot a^{-1}=1$ dir.

Nokta aralıkları $0=[0,0]$ ve $1=[1,1]$, sırasıyla aralıklar üzerindeki toplama ve çarpma işlemleri için etkisiz (birim) elemanlardır.

$$A=A+0=0+A$$

$$A=A\cdot 1=1\cdot A$$

$A=[a,a]$ tek nokta aralığı için dağılma özelliği sağlanır. Buna göre

$$A(B+C)=AB+AC$$

dir.

2.2.2. Aralıklar Arasındaki Uzaklık

$A=\left[\underline{A},\overline{A}\right]$ ve $B=\left[\underline{B},\overline{B}\right]$ aralık sayılarının aralarındaki uzaklık

$$d(A,B)=\max\left(\left|\underline{A}-\underline{B}\right|,\left|\overline{A}-\overline{B}\right|\right) \qquad (2.1)$$

şeklinde tanımlanır.

Eğer A ve B tek nokta aralıkları ise yani $A=[a,a]$, $B=[b,b]$ ise bu durumda, (2.1) ifadesi reel sayılar arasındaki uzaklığa indirgenir. Gerçekten,

$$d\left([a,a],[b,b] \right)=\max\left(|a-b|, |a-b| \right)=|a-b|$$

(2.1) den $d(A,B)=d(B,A)$,

$$\text{“ } d(A,B)=0 \quad \Leftrightarrow \quad A=B \text{ ”}$$

olduğu söylenebilir.

Örnek 2.2.2. $A=[3,6]$, $B=[5,7]$ aralık sayıları arasındaki uzaklık (2.1) e göre

$$d(A,B)=\max\left(|3-5|, |6-7| \right)=\max(2,1)=2$$

dir.

2.3. Bulanık Sayılar

İlk olarak bulanık sayı kavramını tanımlayacak daha sonra da bulanık sayılar için istatistiksel ve λ-istatistiksel yakınsaklık kavramlarını vereceğiz.

Tanım 2.3.1. Bulanık sayı $X : IR \to [0,1]$ şeklinde tanımlı ve aşağıdaki şartları sağlayan bir fonksiyondur;

i) X normaldir, yani $X(t_0)=1$ olacak şekilde $\exists t_0 \in IR$ vardır.

ii) X bulanık konveksdir, yani
$\forall t_1, t_2 \in IR$, $0 \le \lambda \le 1$ için $X(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) \ge \min\{X(t_1), X(t_2)\}$ dir.

iii) X üst yarı sürekli, yani $\forall t \in [0,1]$ için $\{x : X(x) < t\}$ cümlesi açık olmalı.

iv) $X^0 = \{t \in R : X(t) > 0\}$ cümlesi kompakt olmalı [29].

Bulanık sayıların cümlesi $L(IR)$ ile gösterilir.

Her reel sayı kendi karakteristik fonksiyonu ile gösterilebilir. Ayrıca bulanık sayı tanımından her karakteristik fonksiyonun bir bulanık sayı olduğu söylenebilir. Böylece reel sayılar cümlesi bulanık sayılar cümlesinin bir alt cümlesidir ve reel sayılar için gözlemlenen bütün özellikler bulanık sayılar için de geçerli olacaktır. Fakat bulanık sayılar cümlesi kısmi sıralı ve grup yapısı oluşturmayan bir cümle olduğundan reel sayılardaki tüm özellikler bulanık sayılara aktarılamaz.

Örnek 2.3.1: 3 reel sayısının karakteristik fonksiyonunun bir bulanık sayı olduğunu gösterelim.

$$A(x) = \begin{cases} 1, & x = 3 \quad ise \\ \\ 0, & x \neq 3 \quad ise \end{cases}$$

i) $A(x)$ fonksiyonu normaldir. Çünkü $A(x)$ fonksiyonunun tanımından $x = 3$ için $A(x) = 1$ dir.

ii) $A(x)$ fonksiyonu fuzzy konvekstir. Çünkü $\min\{A(x_1), A(x_2)\} = 0$ olup

$$A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) = 0 \quad \text{ya da} \quad A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) = 1$$

olacağından $\forall x_1, x_2 \in IR$ ve $0 \leq \lambda \leq 1$ için,

$$A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min\{A(x_1),\ A(x_2)\}$$

dir.

iii) $A(x)$ fonksiyonu üstten yarı süreklidir. Çünkü $\forall t \in [0,1]$ için $\{x : A(x) < t\}$ cümlesi

$(-\infty,3)\cup(3,\infty)$ açık aralıklarının birleşimine eşittir. Açık aralıkların birleşimi de açık olduğundan bu cümle açıktır.

iv) $A^0=\{x\in IR: A(x)>0\}$ kümesi kompakttır. Çünkü $A^0=3=[3,3]$ aralığı kapalı ve sınırlıdır.

O halde 3 reel sayısının karakteristik fonksiyonunun bir bulanık sayı olduğu görülür.

Bulanık sayılar üzerindeki $\overline{d}$ Hausdorff metriği de $\overline{d}: L(IR)\times L(IR)\to IR^+\cup\{0\}$ olmak üzere

$$\overline{d}(X,Y)=\sup_{\alpha\in[0,1]}\max\left\{\left|\underline{X}^{\alpha}-\underline{Y}^{\alpha}\right|,\left|\overline{X}^{\alpha}-\overline{Y}^{\alpha}\right|\right\}$$

şeklinde tanımlanır. $X^{\alpha}=\left[\underline{X}^{\alpha},\overline{X}^{\alpha}\right]$, X bulanık sayısının α kesmesidir. Burada $\overline{d}$, $L(IR)$ üzerinde bir metriktir. $\left(L(IR),\overline{d}\right)$ tam metrik uzaydır [30].

Bulanık sayılar için sıralama bağıntısı

$$\text{“ } X\le Y \Leftrightarrow \left(\ \forall\alpha\in[0,1] \text{ için } \overline{X^{\alpha}}\le\overline{Y^{\alpha}} \text{ ve } \underline{X^{\alpha}}\le\underline{Y^{\alpha}}\ \right)\text{ ”}$$

şeklinde tanımlanır. Bu “ $\le$ ” bağıntısı bir kısmi sıralama bağıntısıdır. Kesin küçüklük bağıntısı ise

$$\text{“ } X<Y \Leftrightarrow X\le Y,\ \exists\alpha\in[0,1] \text{ için } \overline{X^{\alpha}}<\overline{Y^{\alpha}} \text{ ve } \underline{X^{\alpha}}<\underline{Y^{\alpha}}$$

şeklindedir [31]. Eğer $X\le Y$ ve $Y\le X$ bağıntılarından her ikisi de sağlanmıyor ise, X ve Y bulanık sayıları karsılaştırılamaz denir ve $X \not\sim Y$ seklinde gösterilir.

Tanım 2.3.2. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left| \left\{ k \le n : \overline{d}\left(X_k, X_0\right) \ge \varepsilon \right\} \right| = 0$$

ise, bulanık sayılarının $X = \left(X_k\right)$ dizisi X_0 bulanık sayısına istatistiksel yakınsaktır denir ve $st - \lim X_k = X_0$ ile gösterilir [18].

Tanım 2.3.3. $\lambda = \left(\lambda_n\right)$ dizisi $\lambda_{n+1} \le \lambda_n + 1$, $\lambda_1 = 1$ olacak şekilde pozitif sayıların azalmayan bir dizisi ve $X = \left(X_k\right)$ dizisi de bulanık sayılarının bir dizisi olsun. $I_n = \left[n - \lambda_n + 1, n\right]$ olmak üzere eğer $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} \left| \left\{ k \in I_n : \overline{d}\left(X_k, X_0\right) \ge \varepsilon \right\} \right| = 0$$

ise, bulanık sayılarının $X = \left(X_k\right)$ dizisi X_0 bulanık sayısına λ-istatistiksel yakınsaktır denir ve $s_\lambda - \lim X_k = X_0$ ile gösterilir [32].

Özel olarak $\left(\lambda_n\right) = \left(n\right)$ alınırsa Tanım 2.3.2. elde edilir.

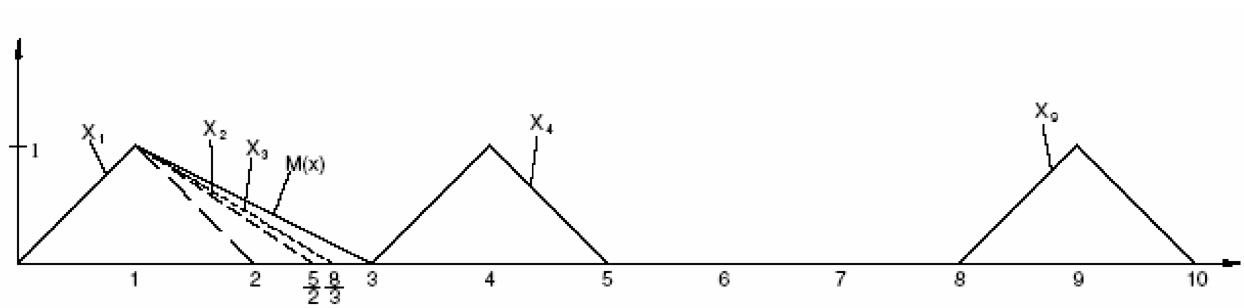
Örnek 2.3.2. $\forall x \in IR$ için $X = \left(X_k\right)$ bulanık sayı dizisini aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$X_k(x)=\begin{cases}\left.\begin{array}{lll}0 & , & x\in(-\infty,\ k-1)\cup(k+1,+\infty)\\ x-(k-1) & , & x\in[k-1,\ k]\\ -x+(k+1) & , & x\in(k,\ k+1]\end{array}\right\}, & k=n^2\\[2ex] \left.\begin{array}{lll}0 & , & x\in(-\infty,0)\cup\left(3-\dfrac{1}{k},\ +\infty\right)\\ x & , & x\in[0,1]\\ \dfrac{x-1}{\frac{1}{k}-2}+1 & , & x\in\left[1,\ 3-\dfrac{1}{k}\right]\end{array}\right\}, & k\neq n^2\end{cases}$$

$M(x)$ bulanık sayısı da,

$$M(x)=\begin{cases}0 & , \quad x\in(-\infty,0)\cup(3,+\infty)\\ x & , \quad x\in[0,1]\\ \dfrac{x-1}{-2}+1 & , \quad x\in[1,3]\end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $X=(X_k)$ dizisi ve $M(x)$ bulanık sayısının grafiği aşağıdaki gibi olur.



Şekil 2.1

Burada $\lambda_n = (1,\ 2,\ ...\ ) = (n)$ alınırsa $s_\lambda - \lim X_k = M$ olur. Aynı zamanda $st - \lim X_k = M$ dir.

Burada $\lambda_n = (1,\ 1,\ ...\ )$ alınırsa $s_\lambda - \lim X_k$ mevcut değildir. Bu dizinin ε komşuluğu dışında sonsuz terim kaldığından adi yakınsaklıktan söz edilemez.

$\lambda_n = (n)$ ise, $\lim_n \frac{1}{n} \left| \{ k \le n : \overline{d}(X_k, X_0) \ge \varepsilon \} \right|$ e bakalım. $\varepsilon = \frac{1}{10}$ alalım.

$$\lim_n \frac{1}{n} \left| \{ 1,2,3,4,\ ....\ ,10,16,25,\ ... \} \right| = \lim_n \frac{1}{n} \left| \{ 1,4,9,16,\ ... \} \right| + \lim_n \frac{1}{n} \left| \{ 2,3,5,6,7,8,10,\ ... \} \right|$$

$$= 0 + 0 = 0$$

elde ederiz. Veya

$$\left(\frac{|K|}{\lambda_n} \right) = \left(\frac{1}{1}, \frac{2}{2}, \ ...\ , \frac{10}{10}, \frac{10}{11}, \frac{10}{12}, \ ...\ , \frac{11}{16}, \ .... \right)$$

$\lambda_n = (n)$ alırsak, $\lim_n \frac{|K|}{n} \le \lim_n \frac{\sqrt{n} + k}{n} = 0$

$\lambda_n = (1,\ 1,\ ...\ )$ alırsak, $\lim_n |K| \le \lim_n \left(\sqrt{n} + k \right) = \infty$

dır.

3.BÖLÜM

λ-İSTATİSTİKSEL LİMİT VE YIĞILMA NOKTALARI

Bu bölümde, bulanık sayı dizileri için λ-seyrek (thin) alt dizi, λ-seyrek olmayan (nonthin) alt dizi, λ-istatistiksel limit noktası ve λ-istatistiksel yığılma noktası kavramlarından yararlanarak, bir dizinin λ-istatistiksel limit noktalarının cümlesi, λ-istatistiksel yığılma noktalarının cümlesi ve adi limit noktalarının cümlesi arasındaki ilişkiyi inceleyen teoremler ifade ve ispat edildi.

Tanım 3.1.1. $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisi verilsin. Eğer

$$\lim_n \frac{1}{\lambda_n} \left| \{k(j) \in I_n : j \in IN\} \right| = 0$$

ise, $(X_{k(j)})$ alt dizisine λ-seyrek (thin) alt dizi , eğer

$$\limsup_n \frac{1}{\lambda_n} \left| \{k(j) \in I_n : j \in IN\} \right| > 0$$

ise , λ-seyrek olmayan (nonthin) alt dizi denir [32].

Kısalık için, $K = \{k(j) : j \in IN\}$ olmak üzere $(X_{k(j)})$ alt dizisi $(X)_K$ ile gösterilsin.

Tanım 3.1.2. $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisinin bir A bulanık sayısına klasik yakınsayan ve λ-seyrek olmayan bir alt dizisi varsa, A bulanık sayısına $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisinin

λ-istatistiksel limit noktası denir. X dizisinin λ-istatistiksel limit noktalarının cümlesi Λ_X^λ ile gösterilsin [32].

Tanım 3.1.3. $X=(X_k)$ bulanık sayı dizisi ve eğer $\forall\varepsilon>0$ için

$$\lim_n \frac{1}{\lambda_n}\left|\,\{k\in I_n : \overline{d}(X_k,B)<\varepsilon\}\,\right|\neq 0$$

veya

$$\limsup_n \frac{1}{\lambda_n}\left|\,\{k\in I_n : \overline{d}(X_k,B)<\varepsilon\}\,\right|>0$$

ise, B bulanık sayısına $X=(X_k)$ bulanık sayı dizisinin λ-istatistiksel yığılma noktası denir. X dizisinin λ-istatistiksel yığılma noktalarının cümlesi Γ_X^λ ile gösterilsin [32].

Teorem 3.1.1. Bir $X=(X_k)$ bulanık sayı dizisi için $\Lambda_X^\lambda\subseteq\Gamma_X^\lambda$ dır [32].

İspat : Kabul edelim ki $A\in\Lambda_X^\lambda$ olsun. Böylece X dizisinin A bulanık sayısına yakınsayan, λ-seyrek olmayan bir $(X_{k(j)})$ alt dizisi vardır. Yani

$$\lim_n \frac{1}{\lambda_n}\left|\,\{k(j)\in I_n : j\in IN\}\,\right|=d>0$$

dır. $\forall\varepsilon>0$ için

$$\{k\in I_n : \overline{d}(X_k,A)<\varepsilon\}\supseteq\{k(j)\in I_n : \overline{d}(X_{k(j)},A)<\varepsilon\}$$

olduğundan

$$\{k \in I_n : \overline{d}(X_k, A) < \varepsilon\} \supseteq \{k(j) \in I_n : j \in IN\} \setminus \{k(j) \in I_n : \overline{d}(X_{k(j)}, A) \geq \varepsilon\}$$

yazabiliriz. $(X_{k(j)})$ dizisi A bulanık sayısına klasik yakınsadığından $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\{k(j) \in I_n : \overline{d}(X_{k(j)}, A) \geq \varepsilon\}$$

cümlesi sonludur.Böylece

$$\lim_n \frac{1}{\lambda_n} | \ \{k \in I_n : \overline{d}(X_k, A) < \varepsilon\} \ |$$

$$\begin{aligned} &\geq \lim_n \frac{1}{\lambda_n} | \ \{k(j) \in I_n : j \in IN\} \ | - \lim_n \frac{1}{\lambda_n} | \ \{k(j) \in I_n : \overline{d}(X_{k(j)}, A) \geq \varepsilon\} \ | \\ &= \lim_n \frac{1}{\lambda_n} | \ \{k(j) \in I_n : j \in IN\} \ | \\ &= d > 0 \end{aligned}$$

dır. O halde

$$\lim_n \frac{1}{\lambda_n} | \ \{k \in I_n : \overline{d}(X_k, A) < \varepsilon\} \ | > 0$$

olur ki, bu da $A \in \Gamma_X^{\lambda}$ demektir.

Teorem 3.1.2. L_X bir $X = (X_k)$ dizisinin klasik limit noktalarının cümlesini göstermek üzere, $\Gamma_X^{\lambda} \subseteq L_X$ dir [32].

İspat : Kabul edelim ki $B \in \Gamma_X^{\lambda}$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\limsup_{n} \frac{1}{\lambda_n} \left| \left\{ k \in I_n : \overline{d}\left(X_k, B\right) < \varepsilon \right\} \right| > 0$$

dır. $\forall \varepsilon > 0$ için X in λ-seyrek olmayan $\left(X\right)_K$ alt dizisini $K = \left\{ k\left(j\right) \in I_n : \overline{d}\left(X_{k(j)}, B\right) < \varepsilon \right\}$ olacak şekilde tanımlayalım. Bu durumda $\limsup_{n} \frac{1}{\lambda_n} \left| \left\{K\right\} \right| > 0$ dır. Böylece K da sonsuz sayıda eleman bulunur ve $B \in L_X$ dir.

Teoremin tersi her zaman doğru değildir. Bunun için aşağıdaki örneği verelim.

Örnek 3.1.1. $\forall x \in IR$ için $X = \left(X_k\right)$ bulanık sayı dizisini aşağıdaki şekilde tanımlayalım.

$$X_k\left(x\right) = \begin{cases} M_1\left(x\right), & k = n^3, \quad n = 1, 2, 3, \dots \\ M_2\left(x\right), & d.d. \end{cases}$$

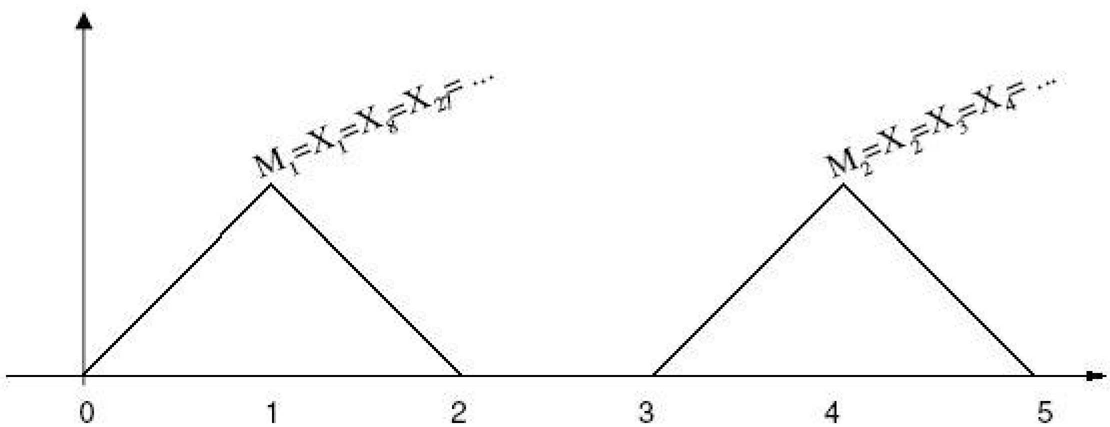
Burada

$$M_1\left(x\right) = \begin{cases} 0 & , \quad x \in \left(-\infty, 0\right) \cup \left(2, \infty\right) \\ x & , \quad x \in \left[0, 1\right] \\ -x + 2 & , \quad x \in \left(1, 2\right] \end{cases}$$

ve

$$M_2(x)=\begin{cases} 0 & , \quad x\in(-\infty,3)\cup(5,\infty) \\ x-3 & , \quad x\in[3,4] \\ -x+5 & , \quad x\in(4,5] \end{cases}$$

dır.



Şekil 3.1

Böylece $\forall\varepsilon>0$ için $L_X=\{M_1,M_2\}$ olur, fakat $\Gamma_X^\lambda=\{M_2\}$ dir. Dolayısıyla $L_X\not\subset\Gamma_X^\lambda$ dır.

Teorem 3.1.3. Bir $X=(X_k)$ bulanık sayı dizisi için $s_\lambda-\lim X_k=X_0$ ise $\Lambda_X^\lambda=\Gamma_X^\lambda=\{X_0\}$ dır [32].

İspat : Öncelikle $\Lambda_X^\lambda=\{X_0\}$ olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $\forall\varepsilon>0$ için $\overline{d}(X_0,Y_0)>2\varepsilon$ olacak şekilde $\Lambda_X^\lambda=\{X_0,Y_0\}$ olsun. Bu durumda $X=(X_k)$ dizisinin sırasıyla X_0 ve Y_0 a yakınsayan $\left(X_{k(j)}\right)$ ve $\left(X_{l(i)}\right)$ λ-seyrek olmayan alt dizileri vardır. $\left(X_{l(i)}\right)$, Y_0 a klasik yakınsadığından $\forall\varepsilon>0$ için $\left\{l(i)\in IN:\overline{d}\left(X_{l(i)},Y_0\right)\geq\varepsilon\right\}$ sonlu bir cümledir.

$$\{l(i)\in I_n : i\in IN\}=\{l(i)\in I_n : \bar{d}(X_{l(i)},Y_0)<\varepsilon\} \cup \{l(i)\in I_n : \bar{d}(X_{l(i)},Y_0)\geq\varepsilon\}$$

yazılabilir. Bu da

$$\limsup_n \frac{1}{\lambda_n}\left|\ \{l(i)\in I_n : i\in IN\}\ \right| = \limsup_n \frac{1}{\lambda_n}\left|\ \{l(i)\in I_n : \bar{d}(X_{l(i)},Y_0)<\varepsilon\}\ \right|$$

$$+\limsup_n \frac{1}{\lambda_n}\left|\ \{l(i)\in I_n : \bar{d}(X_{l(i)},Y_0)\geq\varepsilon\}\ \right|$$

demektir. Böylece

$$\limsup_n \frac{1}{\lambda_n}\left|\ \{l(i)\in I_n : \bar{d}(X_{l(i)},Y_0)<\varepsilon\}\ \right| > 0 \tag{3.1}$$

ve $s_\lambda - \lim X_k = X_0$ olduğundan $\forall\varepsilon>0$ için

$$\lim_n \frac{1}{\lambda_n}\left|\ \{k\in I_n : \bar{d}(X_k,X_0)\geq\varepsilon\}\ \right| = 0 \tag{3.2}$$

dir. Buradan

$$\limsup_n \frac{1}{\lambda_n}\left|\ \{k\in I_n : \bar{d}(X_k,X_0)<\varepsilon\}\ \right| > 0$$

yazabiliriz. Her $0<2\varepsilon<\bar{d}(X_0,Y_0)$ için

$$\{l(i)\in I_n : \bar{d}(X_{l(i)},Y_0)<\varepsilon\} \cap \{k\in I_n : \bar{d}(X_k,X_0)<\varepsilon\}=\phi$$

dur. Böylece

$$\{l(i)\in I_n : \overline{d}(X_{l(i)},Y_0)<\varepsilon\}\subseteq\{k\in I_n : \overline{d}(X_k,X_0)\geq\varepsilon\}$$

yazılabilir. Bu ise,

$$\limsup_n \frac{1}{\lambda_n}\left|\ \{l(i)\in I_n : \overline{d}(X_{l(i)},Y_0)<\varepsilon\}\ \right| \leq \limsup_n \frac{1}{\lambda_n}\left|\ \{k\in I_n : \overline{d}(X_k,X_0)\geq\varepsilon\}\ \right|$$

demektir ki, bu (3.1) ile çelişir. Yani $\Lambda_X^{\lambda}=\{X_0\}$ dır.

Şimdi bazı $\varepsilon>0$ lar için $\overline{d}(X_0,Z_0)>2\varepsilon$ olacak şekilde $\Gamma_X^{\lambda}=\{X_0,Z_0\}$ olduğunu kabul edelim. Böylece,

$$\limsup_n \frac{1}{\lambda_n}\left|\ \{k\in I_n : \overline{d}(X_k,Z_0)<\varepsilon\}\ \right|>0 \tag{3.3}$$

yazılabilir. Yani her $0<2\varepsilon<\overline{d}(X_0,Z_0)$ için

$$\{k\in I_n : \overline{d}(X_k,X_0)<\varepsilon\}\cap\{k\in I_n : \overline{d}(X_k,Z_0)<\varepsilon\}=\phi$$

olduğundan

$$\{k\in I_n : \overline{d}(X_k,X_0)\geq\varepsilon\}\supseteq\{k\in I_n : \overline{d}(X_k,Z_0)<\varepsilon\}$$

ve

$$\limsup_{n} \frac{1}{\lambda_n} \left| \left\{ k \in I_n : \overline{d}\left(X_k, X_0\right) \geq \varepsilon \right\} \right| \geq \limsup_{n} \frac{1}{\lambda_n} \left| \left\{ k \in I_n : \overline{d}\left(X_k, Z_0\right) < \varepsilon \right\} \right| \quad (3.4)$$

buluruz. Böylece (3.3) ifadesinden (3.4) ün sağ yanı sıfırdan büyüktür ve (3.2) den (3.4) ün sol yanı sıfıra eşittir. Bu ise çelişkidir. Dolayısıyla $\Gamma_X^{\lambda} = \left\{X_0\right\}$ dır.

Teorem 3.1.4. $X = \left(X_k\right)$ ve $Y = \left(Y_k\right)$ bulanık sayı dizileri olsun. λ- hemen hemen her k için $X_k = Y_k$ ise, $\Lambda_X^{\lambda} = \Lambda_Y^{\lambda}$ ve $\Gamma_X^{\lambda} = \Gamma_Y^{\lambda}$ dir [32].

İspat : Öncelikle $\Lambda_X^{\lambda} = \Lambda_Y^{\lambda}$ olduğunu gösterelim. $\lim_{n} \frac{1}{\lambda_n} \left| \left\{ k \in I_n : X_k = Y_k \right\} \right| = 0$ ve $A \in \Lambda_X^{\lambda}$ olsun. Bu taktirde $A \in \Lambda_Y^{\lambda}$ olduğunu gösterelim. $A \in \Lambda_X^{\lambda}$ olduğundan Λ_X^{λ} nın tanımından $\exists K \subseteq IN \ni \delta_{\lambda}\left(K\right) \neq 0$ ve $\left(X\right)_K$, A ya yakınsaktır. Ayrıca

$$\lim_{n} \frac{1}{\lambda_n} \left| \left\{ k \in I_n : k \in K \;\; ve \;\; X_k \neq Y_k \right\} \right| = 0$$

dır. Gerçekten de

$$\left\{ k \in I_n : k \in K \;\; ve \;\; X_k \neq Y_k \right\} = \left\{ k \in I_n : k \in K \right\} \cap \left\{ k \in I_n : X_k \neq Y_k \right\}$$

$$= K \cap \left\{ k \in I_n : X_k \neq Y_k \right\} \subset \left\{ k \in I_n : X_k \neq Y_k \right\}$$

yazılabilir. Üstelik

$$\lim_{n} \frac{1}{\lambda_n} \left| \left\{ k \in I_n : k \in K \;\; ve \;\; X_k \neq Y_k \right\} \right| = 0$$

olması

$$\lim_n \frac{1}{\lambda_n} \left| \, \{k \in I_n : k \in K \ \ ve \ \ X_k = Y_k\} \, \right| \neq 0$$

olmasıdır.

$$K^{'} = K \setminus \{k \in I_n : k \in K \ ve \ X_k \neq Y_k\} \subset K$$

olduğundan $\delta_\lambda(K^{'}) \neq 0$ olacak şekilde $\exists K^{'} \subset K$ mevcuttur. Böylece $(X)_{K^{'}}$, A ya yakınsaktır diyebiliriz. $(X)_{K^{'}} = (Y)_{K^{'}}$ olduğundan $A \in \Lambda_Y^\lambda$ elde edilir ki, bu da $\Lambda_X^\lambda \subset \Lambda_Y^\lambda$ demektir.

Benzer şekilde $\Lambda_Y^\lambda \subset \Lambda_X^\lambda$ olduğunu gösterebiliriz.

O halde $\Lambda_X^\lambda = \Lambda_Y^\lambda$ dır.

Şimdi de ispatımızın ikinci kısmına bakalım. Yani $\Gamma_X^\lambda = \Gamma_Y^\lambda$ olduğunu gösterelim. $B \in \Gamma_X^\lambda$ olsun. Bu taktirde $B \in \Gamma_Y^\lambda$ olduğunu göstermeliyiz.

$$\lim_n \frac{1}{\lambda_n} \left| \, \{k \in I_n : X_k \neq Y_k\} \, \right| = 0$$

ve

$$K = \{k \in I_n : X_k = Y_k\}$$

olsun. Tanımdan

$$\lim_n \frac{1}{\lambda_n} \left| \, \{k \in I_n : \overline{d}(X_k, B) < \varepsilon\} \, \right| \neq 0$$

olduğunu biliyoruz.

$$\lim_{n}\frac{1}{\lambda_n}\left|\ \{k\in I_n : X_k \neq Y_k\}\ \right| = 0$$

olduğundan $\delta_\lambda(K) = 1 \neq 0$ yazabiliriz.

$$\lim_{n}\frac{1}{\lambda_n}\left|\ \{k\in I_n : k\in K,\ \overline{d}(Y_k, B) < \varepsilon\}\ \right| \neq 0$$

ise,

$$\lim_{n}\frac{1}{\lambda_n}\left|\ \{k\in I_n : \overline{d}(Y_k, B) < \varepsilon\}\ \right| \neq 0$$

dır. Çünkü

$$\lim_{n}\frac{1}{\lambda_n}\left|\ \{k\in I_n : k\in K,\ \overline{d}(Y_k, B) < \varepsilon\}\ \right| < \lim_{n}\frac{1}{\lambda_n}\left|\ \{k\in I_n : \overline{d}(Y_k, B) < \varepsilon\}\ \right| \neq 0$$

olduğunu biliyoruz. Bu ise $B \in \Gamma_Y^\lambda$ demektir. O halde $\Gamma_X^\lambda \subset \Gamma_Y^\lambda$ dır.

Benzer şekilde $\Gamma_Y^\lambda \subset \Gamma_X^\lambda$ olduğu gösterilebilir.

Sonuç olarak $\Gamma_X^\lambda = \Gamma_Y^\lambda$ dır.

Teorem 3.1.5. (Sıkıştırma Teoremi) $\exists K \subseteq IN \ni \delta_\lambda(K) = 1$ olsun. Her $k \in K$ için $X_k \leq Y_k \leq Z_k$ ve $s_\lambda - \lim X_k = s_\lambda - \lim Z_k = M$ ise bu taktirde $s_\lambda - \lim Y_k = M$ dir [32].

İspat :. Kabul edelim ki $A = \{k \in I_n : \overline{d}(X_k, M) \geq \varepsilon\}$ ve $B = \{k \in I_n : \overline{d}(Z_k, M) \geq \varepsilon\}$ olsun.

$\forall \varepsilon > 0$ için

$$\{k \in I_n : \overline{d}(Y_k, M) \geq \varepsilon\} \subseteq A \cup B \cup K^c \tag{3.5}$$

olduğunu gösterelim.

Kabul edelim ki $k_0 \in \{k \in I_n : \overline{d}(Y_k, M) \geq \varepsilon\}$ keyfi bir sayı olsun. Bu durumda $k_0 \in K$ veya $k_0 \in K^c$ dir.

Eğer $k_0 \in K^c$ ise (3.5) sağlanır.

$k_0 \in K$ ise bu durumda $X_{k_0} \leq Y_{k_0} \leq Z_{k_0}$ dır.

$$\overline{d}(Y_{k_0}, M) = \sup_{\alpha \in [0,1]} \max\left\{ \left| \underline{Y_{k_0}}^{\alpha} - \underline{M}^{\alpha} \right|, \left| \overline{Y_{k_0}}^{\alpha} - \overline{M}^{\alpha} \right| \right\} \geq \varepsilon$$

olduğundan supremum tanımını kullanarak ve her $\delta \in (0, \varepsilon)$ için $\exists \alpha_0 \in [0,1] \ni$

$$\max\left\{ \left| \underline{Y_{k_0}}^{\alpha_0} - \underline{M}^{\alpha_0} \right|, \left| \overline{Y_{k_0}}^{\alpha_0} - \overline{M}^{\alpha_0} \right| \right\} \geq \varepsilon - \delta$$

yazabiliriz. Bunun anlamı ise

$$\left| \underline{Y_{k_0}}^{\alpha_0} - \underline{M}^{\alpha_0} \right| \geq \varepsilon - \delta \tag{3.6}$$

veya

$$\left| \overline{Y_{k_0}}^{\alpha_0} - \overline{M}^{\alpha_0} \right| \geq \varepsilon - \delta \tag{3.7}$$

olmasıdır. Genellemeyi bozmadan (3.6) nın doğru olduğunu kabul edelim. Y_{k_0} ve M nin karşılaştırabilir olup olmamasına bağlı olarak aşağıdaki durumlar söz konusu olabilir,

i) $\underline{Y_{k_0}}^{\alpha_0} < \underline{M}^{\alpha_0}$ ve "$\overline{Y_{k_0}}^{\alpha_0} < \overline{M}^{\alpha_0}$ veya $\overline{Y_{k_0}}^{\alpha_0} > \overline{M}^{\alpha_0}$"

ii) $\underline{Y_{k_0}}^{\alpha_0} > \underline{M}^{\alpha_0}$ ve "$\overline{Y_{k_0}}^{\alpha_0} < \overline{M}^{\alpha_0}$ veya $\overline{Y_{k_o}}^{\alpha_0} > \overline{M}^{\alpha_0}$"

i) için : $\underline{Y_{k_0}}^{\alpha_0} \geq \underline{X_{k_0}}^{\alpha_0}$ eşitsizliğinden ve (3.6) dan keyfi δ için $\left|\underline{X_{k_0}}^{\alpha_0} - \underline{M}^{\alpha_0}\right| \geq \varepsilon - \delta$ olduğundan, $\overline{d}\left(X_{k_0}, M\right) \geq \varepsilon$ elde edilir. Yani $k_0 \in A$ dır. Böylece (3.5) sağlanır.

ii) için : Benzer düşünce ile $k_0 \in A$ olduğu söylenebilir. Bu da (3.5) in ispatını tamamlar.

$$\delta_\lambda(A) = \delta_\lambda(B) = \delta_\lambda\left(K^c\right) = 0$$

olduğunu ve (3.5) i beraberce düşünürsek

$$\limsup_n \frac{1}{\lambda_n} \left| \left\{k \in I_n : \overline{d}\left(Y_k, M\right) \geq \varepsilon\right\} \right| = \delta_\lambda\left(A \cup B \cup K^c\right) = 0$$

yazabiliriz. Böylece $Y = \left(Y_k\right)$ dizisi M bulanık sayısına λ-istatistiksel yakınsaktır denir.

Teorem 3.1.6. $\exists K \subseteq IN \ni \delta_\lambda(K) = 1$ olsun. Her $k \in K$ için $X_k \leq Y_k$ olsun. Eğer $s_\lambda - \lim X_k = M_1$ ve $s_\lambda - \lim Y_k = M_2$ mevcut ise, $M_1 \leq M_2$ dir [32].

İspat : Öncelikle teoremin kabulleri altında M_1 ve M_2 nin karşılaştırılabilir olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $s_\lambda - \lim X_k = M_1$ ve $s_\lambda - \lim Y_k = M_2$ olsun. Bu taktirde

$$K_1 = \{k \in I_n : \overline{d}(X_k, M_1) \geq \varepsilon\} \text{ ve } K_2 = \{k \in I_n : \overline{d}(Y_k, M_2) \geq \varepsilon\}$$

olmak üzere $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\left.\begin{array}{l} \delta_\lambda(K_1) = \delta_\lambda(K_2) = 0 \\ \\ \delta_\lambda(K_1^c) = \delta_\lambda(K_2^c) = 1 \end{array}\right\} \tag{3.8}$$

dir.
Diğer taraftan

$$\begin{aligned} \delta_\lambda(K_1 \cup K_2) &= \delta_\lambda(K_1) + \delta_\lambda(K_2) \\ &= 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

olduğundan $\delta_\lambda(K_1^c \cap K_2^c) = 1$ i elde ederiz.

Kabul edelim ki M_1 ve M_2 karşılaştırılamaz olsun. Böylece,

i) $\underline{M}_1^{\alpha_0} < \underline{M}_2^{\alpha_0}$ ve $\overline{M_1^{\alpha_0}} > \overline{M_2^{\alpha_0}}$ veya

ii) $\underline{M}_1^{\alpha_0} > \underline{M}_2^{\alpha_0}$ ve $\overline{M_1^{\alpha_0}} < \overline{M_2^{\alpha_0}}$

olacak şekilde $\alpha_0 \in [0,1]$ vardır.

Sadece (i) için ispat yapacağız. (ii) için de benzer şekilde ispat yapılabilir. Kabul edelim ki (i) sağlansın. $\varepsilon_1 = \underline{M}_2^{\alpha_0} - \underline{M}_1^{\alpha_0}$, $\varepsilon_2 = \overline{M_1^{\alpha_0}} - \overline{M_2^{\alpha_0}}$ ve $\overline{\varepsilon} = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ şeklinde tanımlayalım. $\bar{\varepsilon} > 0$ olduğu açıktır. $\forall \varepsilon \in \left(0, \frac{\bar{\varepsilon}}{2}\right)$ için (3.8) sağlanır.

Böylece, $\varepsilon > 0$ ve $\forall k \in K_1^c \cap K_2^c$ için $\underline{X_k^{\alpha_0}} < \underline{Y_k^{\alpha_0}}$ ve $\overline{X_k^{\alpha_0}} > \overline{Y_k^{\alpha_0}}$ dır.

$$\delta_\lambda\left(K_1^c \cap K_2^c\right) = 1$$

eşitliğinden

$$\lim_n \frac{1}{\lambda_n} \left| \left\{ k \in I_n : X_k \text{ ve } Y_k \text{ karşılaştırılamaz} \right\} \right| = 1$$

elde ederiz. Bu ise

$$\lim_n \frac{1}{\lambda_n} \left| \left\{ k \in I_n : X_k \leq Y_k \right\} \right| = 1$$

kabulü ile çelişir. O halde M_1 ve M_2 karşılaştırılabilirdir.

$M_1 \leq M_2$ olduğunu göstermek istiyoruz. Kabul edelim ki $M_1 > M_2$ olsun. Bu durumda $\forall \varepsilon > 0$ olmak üzere $0 < 2\varepsilon < \bar{d}(M_1, M_2)$ için

$$\left\{k \in I_n : \bar{d}\left(X_k, M_1\right) \geq \varepsilon\right\} \supseteq \left\{k \in I_n : \bar{d}\left(Y_k, M_2\right) < \varepsilon\right\}$$

ve

$$K \cap \left\{k \in I_n : \bar{d}\left(X_k, M_1\right) \geq \varepsilon\right\} \supseteq K \cap \left\{k \in I_n : \bar{d}\left(Y_k, M_2\right) < \varepsilon\right\}$$

yazılabilir. Her iki tarafın λ-yoğunluğunu alırsak,

$$\delta_\lambda\left(\left\{ K \cap \left\{ k \in I_n : \overline{d}\left(X_k, M_1\right) \geq \varepsilon \right\} \right\} \right) \geq \delta_\lambda\left(\left\{ K \cap \left\{ k \in I_n : \overline{d}\left(Y_k, M_2\right) < \varepsilon \right\} \right\} \right) \tag{3.9}$$

elde ederiz. Diğer taraftan

$$\lim_n \frac{1}{\lambda_n} \left| \left\{ k \in I_n : \overline{d}\left(Y_k, M_2\right) < \varepsilon \right\} \right| = 1$$

ve

$$\delta_\lambda(K) = 1$$

olduğundan (3.9) un sağ tarafı 1 e eşittir ve böylece sol tarafı da 1 e eşit olur ki, bu da

$$\lim_n \frac{1}{\lambda_n} \left| \left\{ k \in I_n : \overline{d}\left(X_k, M_1\right) \geq \varepsilon \right\} \right| = 1$$

demektir. Bu ise çelişkidir. O halde $M_1 \leq M_2$ dir.

KAYNAKLAR

1. Steinhaus, H., Sur la convercenge ordinarie et la convergence asymptotique, Colloq. Math., 2, 73-74, 1951.
2. Fast, H., Sur la convergence statistique, Colloq. Math., 2, 241-244, 1951.
3. Schoenberg, I., J., The integrability of certain functions and related summability Methods, Amer. Math. Montly, 66, 361-375, 1959.
4. Salat, T., On statistically convergent sequences of real numbers, Math. Slovaca, 30, 139-150, 1980.
5. Fridy, J.A., On statistical convergence, Analysis 5, 301-313, 1985.
6. Connor, J.S., The statistical and strong P-Cesaro convergence of sequences, Analysis, 8, 47-63, 1988.
7. Connor, J.S., On strong matrix summability with respect to a modulus and Statistical convergence. Canad. Math. Bull., 32, 194-198, 1989.
8. Kline, J.L., Statistical Convergence and Densities Gnerated by Sequences of Measures, Ph.D. Thesis, Ohio University, USA, 1995.
9. Erdös, P., Tenebaum, G., Sur les densities de certaines suites d'entries, Proc. London Math. Soc., 50, 417-438, 1989.
10. Miller, H.I., Orhan, C., On almost convergent and statistically convergent subsequences, Acta Math. Hungary, 93 (1-2), 135-151, 2001.
11. Mamedov, M.A., Pehlivan, S., Statistical convergence of optimal pahts., Math. Jap., 52 (1), 51-55, 2000.
12. Pehlivan, S., Mamedov, M.A., Statistical cluster point and turnpike, Optimization, 48, 93-106, 2000.
13. Duman, O., Orhan, C., λ-statistically convergent function sequences, Czech. Math. J., 54 (2), 413-422, 2004.
14. Fridy, J.A., Statistical limit points, Proc. Amer. Math. Soc., 4, 1187-1192, 1993.
15. Fridy, J.A., Orhan, C., Statistical limit superior and limit inferior, Proc. Amer. Math. Soc., 125, 3625-3631, 1997.
16. Matloka, M., Sequences of fuzzy numbers, Busefal, 28, 28-37, 1986.
17. Nanda, S., On sequence of fuzzy numbers, Fuzzy Sets and Systems, 33, 123-126, 1989.

18. Nuray, F., Savaş, E., Statistical convergence of fuzzy numbers, Math. Slovaca, 45 (3), 269-273, 1995.
19. Nuray, F., Lacunary statistical convergence of fuzzy numbers, Fuzzy Sets and Systems, 99 (3), 353-355, 1998.
20. Savas, E., On statistically convergent sequences of fuzzy numbers, Inf. Sci., 137, 277-282, 2001.
21. Kwon, J.S., On statistical and p -cesaro convergence of fuzzy numbers, Korean J.C.A.M., 9 (3), 95-203, 2000.
22. Kwon, J.S., Shim, H.T., Remark on lacunary statistical convergence of fuzzy numbers, Fuzzy Sets and Systems, 123, 85-88, 2001.
23. Aytar, S., Statistical limit points of sequences of fuzzy numbers, Inf. Sci., 165, 129-138, 2004.
24. Aytar, S., Pehlivan, S., Statistically monotonic and statistically bounded sequences of fuzzy numbers, Inf. Sci., 176, 734-744, 2006.
25. Aytar, S., Mamedov, M.A., Pehlivan, S., Statistical limit inferior and limit superior for sequences of fuzzy numbers, Fuzzy Sets and Systems, 157, 976-985, 2006.
26. Mursaleen, M., λ-Statistical Convergence, Math. Slovaca, 50 (1), 111-115, 2000.
27. Savas, E., On strongly λ-summable sequences of fuzzy numbers, Inf. Sci. 125, 181-186, 2000.
28. Niven, I., Zuckerman, H., S., An Introduction to the Theory of Numbers, fourth edition, Wiley, New York, 1980.
29. Chang, S.S.L., Zadeh, L.A., On fuzzy mapping and control, IEEE Trans. Systems Man Cybernet, 2, 30-34, 1972.
30. Puri, M.L., Ralescu, D.A., Differentials of fuzzy functions, J. Math. Anal. Appl., 91, 552-558, 1983.
31. Diamond, P., Kloeden, P., Metric Spaces of Fuzzy Sets, Theory and Applications, Word Scientific, Singapore, 1994.
32. A. Nihal Tuncer , F. Berna Benli λ-Statistical limit points of the sequences of fuzzy numbers, Information Sciences 177 (2007) 3297–3304.

ÖZGEÇMİŞ

Ayşe Gül ŞİMŞEK, 1985 yılında Adana'da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Adana'nın Kozan ilçesinde tamamladı. Erciyes Üniversitesi Yozgat Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nden 2006 yılında bölüm ve fakülte birincisi olarak mezun oldu. 11.09.2007 tarihinde Bozok Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Anabilim Dalı'nda Araştırma Görevlisi olarak göreve başladı. Eylül 2006 tarihinde Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı' nda Yüksek Lisans programına kabul edildi. Halen Bozok Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde Araştırma Görevlisi olarak çalışmaktadır.

İletisim Bilgileri:

Tufanpaşa Mah. Mezarlık Cad.,
Aşiyan Sokak No:9
Kozan/ADANA
Ev tlf.: (322) 515 25 31
e-posta: ayshegulsimsek@bozok.edu.tr