

**BAZI ÖZEL UZAYLAR VE OPERATÖRLER İÇİN DEĞİŞMEZ  
ALT UZAY PROBLEMİ**

**Erdal BAYRAM**

**DOKTORA TEZİ  
MATEMATİK**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**ŞUBAT 2009  
ANKARA**

Erdal Bayram tarafından hazırlanan Bazı Özel Uzaylar Ve Operatörler İçin Değişmez Alt Uzay Problemi adlı bu tezin Doktora tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Yrd. Doç. Dr. Cevriye TONYALI .....  
Tez Danışmanı, Matematik Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Matematik Anabilim Dalında Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Emin ÖZÇAĞ ( Başkan ) .....  
Matematik, Hacettepe Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. Cevriye TONYALI ( Danışman ) .....  
Matematik, Gazi Üniversitesi

Prof. Dr. Ziya ARGÜN .....  
Matematik, Gazi Üniversitesi

Prof. Dr. Bahri TURAN .....  
Matematik, Gazi Üniversitesi

Doç. Dr. Birol ALTIN .....  
Matematik, Gazi Üniversitesi

Tarih: ...../...../.....

Bu tez ile G.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Doktora derecesini onamıştır.

Prof. Dr. Nail ÜNSAL .....  
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

## **TEZ BİLDİRİMİ**

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yaptığımı bildiririm.

Erdal BAYRAM

**BAZI ÖZEL UZAYLAR VE OPERATÖRLER İÇİN DEĞİŞMEZ ALT  
UZAY PROBLEMİ  
(Doktora Tezi)**

**Erdal BAYRAM**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**Şubat 2009**

**ÖZET**

Bu tez çalışması iki ana amaca ulaşmıştır. Bunlardan biri, zayıf kompakt operatörlerin bir alt sınıfı olan L-zayıf kompakt ve M-zayıf kompakt operatörlerin kompaktlık özellikleri ile ilgili sonuçlar vermektir. Diğeri ise L-zayıf kompakt ve M-zayıf kompakt operatörlerinin özdeş olmayan kapalı değişmez alt uzaya sahip olduğu bazı durumları araştırmaktır. Ayrıca elde edilen bu sonuçlar yardımıyla bazı pozitif operatörlerin de özdeş olmayan kapalı değişmez alt uzaya sahip olduğu gösterilmiştir.

**Bilim Kodu : 403.03.01**  
**Anahtar Kelimeler : L-zayıf kompakt operatör, M-zayıf kompakt Operatör, değişmez alt uzay**  
**Sayfa Adedi : 57**  
**Tez Yöneticisi : Yrd.Doç.Dr.CevriyeTONYALI**

**INVARIANT SUBSPACE PROBLEM FOR SOME SPACES AND CLASSES  
OF OPERATORS**

**(Ph.D. Thesis)**

**Erdal BAYRAM**

**GAZI UNIVERSTY**

**INSTUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY**

**February 2009**

**ABSTRACT**

**This thesis has reached two main goals. The one of them is to give some results about the compactness property of L-weakly and M-weakly compact operators that are the subclasses of weak compact operators defined on Banach lattices. The other one is to investigate some circumstances that L-weakly compact and M-weakly compact operators having non-trivial closed invariant subspace. And finally, the obtained results have also helped us to show that some positive operators defined on Banach lattice have non-trivial closed invariant subspace.**

**Science Code : 403.03.01**  
**Key Words : L-weakly compact operator, M-weakly compact operator, invariant subspace.**  
**Page Number : 57**  
**Adviser : Asist. Prof. Dr. Cevriye TONYALI**

## TEŞEKKÜR

Çalıőmalarım süresince, bilgi ve deneyimlerinden yararlandığım, bana her konuda titizlikle, sabırla yardım eden ve yol gösteren danışmanım Yrd. Doç. Dr. Cevriye TONYALI 'ya, değerli bilgi ve tecrübeleriyle çalıőmalarımı yönlendiren, yardımcı olan Prof. Dr. Ziya Argün ve Prof. Dr. Bahri TURAN 'a çok teşekkür ederim. Ayrıca beni birçok zaman tavsiyeleri ile teşvik eden, cesaretlendiren, benden yardımlarını esirgemeyen öğretmen arkadaşlarıma teşekkür ederim. Ve tabi ki her anımda desteklerini, güvenlerini ve sevgilerini bana her zaman hissettirdikleri için aileme çok minnettarım.

## İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET .....	iv
ABSTRACT .....	v
TEŞEKKÜR .....	vi
İÇİNDEKİLER .....	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR .....	viii
1. GİRİŞ .....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR .....	3
2.1. Pozitif Operatörlerin Sıralı Yapısı .....	3
2.2. Banach Örgüleri .....	8
2.3. L-zayıf Kompakt ve M-zayıf Kompakt Operatörler .....	11
2.4. Yarı Kompakt ve Dunford-Pettis Operatörleri .....	19
2.5. Değişmez Alt Uzaylar .....	22
3. L-ZAYIF ve M-ZAYIF KOMPAKT OPERATÖRLERİNİN KOMPAKTLIK ÖZELLİKLERİ.....	26
4. L-ZAYIF ve M-ZAYIF KOMPAKT OPERATÖRLER İÇİN DEĞİŞMEZ ALT UZAY PROBLEMİ.....	40
5. SONUÇ ve ÖNERİLER.....	53
KAYNAKLAR .....	54
ÖZGEÇMİŞ .....	57

## SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

<b>Simgeler</b>	<b>Açıklamalar</b>
$x \vee y$	x ve y elemanlarının supremumu
$x \wedge y$	x ve y elemanlarının infimumu
$ x $	x elemanının modülü
$x^+$	x elemanının pozitif kısmı
$x^-$	x elemanının negatif kısmı
$x_\alpha \uparrow x$	Yukarı yönlendirilmiş ve supremumu x olan $x_\alpha$ ağı
$x_\alpha \downarrow x$	Aşağı yönlendirilmiş ve infimumu x olan $x_\alpha$ ağı
<b>sol A</b>	A kümesinin solid zarfı
$U_E$	E uzayının kapalı birim yuvarı
$\sigma(E, E')$	E uzayı üzerindeki zayıf topoloji
$x_\alpha \xrightarrow{w} x$	Zayıf topolojiye göre x elemanına yakınsayan $x_\alpha$ ağı
$E^+$	E uzayının pozitif kısmı
$E^\sim$	E uzayının sıra duali
$E_n^\sim$	E uzayının sıra sürekli duali
$E'$	E uzayının sürekli duali
$E^*$	E uzayının cebirsel duali
$\mathcal{L}(E, F)$	E uzayından F uzayına tanımlı doğrusal operatörler uzayı
$L(E, F)$	E uzayından F uzayına tanımlı sürekli operatörler uzayı
$\mathcal{L}_b(E, F)$	E uzayından F uzayına tanımlı sıra sınırlı operatörler uzayı
$\mathcal{L}_n(E, F)$	E uzayından F uzayına tanımlı sıra sürekli operatörler uzayı

**Simgeler**      **Açıklamalar**

$\mathcal{L}_r(\mathbf{E},\mathbf{F})$       E uzayından F uzayına tanımlı regüler operatörler uzayı

$\mathbf{E} \oplus \mathbf{F}$       E ve F Riesz uzaylarının direkt toplamı

**Kısaltmalar**      **Açıklamalar**

**AM-uzay**      Soyut maksimum normlu uzay

**AL-uzay**      Soyut Lebesgue uzay

## 1. GİRİŞ

Fonksiyonel analizde tam çözüme kavuşmayan ünlü problemlerden biri “ değişmez alt uzay problemidir ”. Değişmez Alt Uzay Problemi “Banach uzayı üzerinde tanımlı sınırlı operatör özdeş olmayan kapalı değişmez bir alt uzaya sahip midir? ” şeklinde ifade edilir. Şimdiye kadar operatörler veya Banach uzayları üzerine birtakım kısıtlayıcı şartlar getirilerek problemin bazı kısmi çözümleri yapılmıştır. Örneğin, bir özdeğere sahip olan operatörler ve ayrılabilir olmayan Banach uzayları üzerinde tanımlı tüm operatörler için kapalı değişmez alt uzayların her zaman bulunabileceği daha önceden bilinmektedir. Aronszajn, Smith ve Lomonosov sonsuz boyutlu gerçel veya kompleks Banach uzayları üzerinde tanımlı kompakt operatörlerin kapalı özdeş olmayan değişmez alt uzaya sahip olduklarını göstermiştir [Aronszajn, Smith 1954 ; Lomonosov, 1973]. Daha sonra ise V.I. Lomonosov bu sonucu kompakt operatörlerle değişmeli olan tüm operatörler için genişletmiştir [Lomonosov, 1973]. Bir Banach uzayı üzerinde tanımlanan tüm operatörlerin değişmez alt uzaya her zaman sahip olamayacağını önce P.Enflo, daha sonrada C.J. Read örneklerle göstermişlerdir [Enflo, 1987 ve Read, 1985].

Çalışmamızda ele aldığımız L-zayıf kompakt ve M-zayıf kompakt operatörler ilk defa P. Meyer-Nieberg tarafından tanımlanmış ve bazı özellikleri verilmiştir [Meyer, 1974]. Daha sonraları Dodds-Fremlin L-zayıf ve M-zayıf kompakt operatörlerin birbirleriyle çakıştığı veya kompakt operatörlerle çakıştığı durumları göstermiştir [Dodds, 1979]. A.W. Wickstead ve Z.L. Chen bu operatörlerin modüllerinin var olduğu durumları ve bu operatörler yardımıyla Shur özelliğine sahip Banach uzaylarının karakterizasyonu ile ilgili sonuçlar elde etmiştir [Chen, 1999].

Bu çalışmamızdaki hedefimiz zayıf kompakt operatörlerin bir alt sınıfı olan L-zayıf kompakt ve M-zayıf kompakt operatörlerin özdeş olmayan kapalı değişmez alt uzalara sahip olduğu durumları incelemektir.

İkinci bölüm Banach örgüleri, L-zayıf ve M-zayıf kompakt operatörler ve değişmez alt uzay problemi ile ilgili şimdiye kadar bilinen genel tanım ve önermelerden

oluşmaktadır.

Üçüncü bölümde, bir kompakt operatör ile değişmeli olan bütün operatörlerin özdeş olmayan kapalı değişmez bir alt uzaya sahip olduğu bilindiği için, L-zayıf ve M-zayıf kompakt operatörlerinin veya bileşkelerinin kompakt olabildiği durumlar ile ilgili sonuçlar verildi. Ayrıca bu sonuçlar yardımıyla dual uzayı sıra sürekli norma sahip bir Banach örgüsünden AL-uzayına tanımlı pozitif operatörlerin kompakt olduğu sonucu elde edilmiştir.

Dördüncü bölüm L-zayıf kompakt ve M-zayıf kompakt operatörler için özdeş olmayan kapalı değişmez bir alt uzayın bulunabileceği bazı durumlar ile ilgili sonuçları içerir. Ayrıca bazı koşullarda elde edilen ortak değişmez alt ideal yardımıyla L-zayıf kompakt ve M-zayıf kompakt operatörlerin üzerinde tanımlandığı Banach örgüsü üzerinde tanımlı regüler operatörlerin de özdeş olmayan kapalı değişmez alt ideallere sahip olduğu gösterildi.

Beşinci bölümde ise çalışmalarımızda elde edilen sonuçların bir özetine ve konu ile ilgili önerilere yer verilmiştir.

## 2. TEMEL KAVRAMLAR VE ÖNERMELER

Bu bölümde çalışma boyunca kullanılacak temel tanımlar ve bazı önermeler verilmiştir.

### 2.1. Pozitif Operatörlerin Sıralı Yapısı

#### 2.1. Tanım

$E$  gerçel vektör uzayı üzerinde “ $\leq$ ” bir sıralama bağıntısı olsun. Her  $x, y \in E$  olmak üzere,

- a) Her  $z \in E$  için  $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$
- b) Her  $0 \leq \alpha \in \mathbb{R}$  için  $x \leq y \Rightarrow \alpha x \leq \alpha y$

koşulları sağlanıyorsa,  $E$  uzayına *sıralı vektör uzayı* denir.

$E$  sıralı vektör uzayının  $x \geq 0$  özelliğini sağlayan  $x$  elemanına *pozitif* denir ve  $E^+$  nin tüm pozitif elemanlarının kümesi  $E^+$  ile gösterilir.

$X$  ve  $Y$  gerçel vektör uzayları olmak üzere  $T: X \rightarrow Y$  lineer dönüşümüne operatör denir.  $X$  uzayından  $Y$  uzayı içine tanımlı tüm operatörlerin kümesi  $\mathcal{L}(X, Y)$  ile gösterilir. Her  $x \in X^+$  için  $Tx \in Y^+$  sağlanıyorsa  $T: X \rightarrow Y$  operatörüne *pozitif operatör* denir ve  $Tx \geq 0$  (veya  $0 \leq T$ ) ile gösterilir.  $T: X \rightarrow Y$  operatörü pozitif ise,  $x \leq y$  olacak biçimdeki her  $x, y \in X$  için  $Tx \leq Ty$  sağlanır.

#### 2.2. Tanım

$E$  sıralı vektör uzayı olmak üzere her  $x, y \in E$  için  $x \vee y := \sup \{x, y\} \in E$  ve  $x \wedge y := \inf \{x, y\} \in E$  ise  $E$  uzayına *Riesz uzayı* denir.  $E$  Riesz uzayı ve  $G \subset E$  alt

vektör uzayı olmak üzere  $x, y \in G$  iken  $x \vee y \in G$  ise  $G$  'ye *Riesz alt uzayı* denir.

Riesz uzaylarının tipik örneği bir  $X$  kümesi üzerinde tanımlı gerçel değerli fonksiyonların oluşturduğu gerçel vektör uzayıdır. Bu uzayı  $E$  ile gösterirsek her bir  $f, g \in E$  ve  $x \in X$  için,

$$h(x) := \max \{f(x), g(x)\} \quad \text{ve} \quad t(x) := \min \{f(x), g(x)\}$$

şeklinde tanımlı fonksiyonlar  $f$  ve  $g$  elemanlarının sırasıyla supremumu ve infimumudur ve  $E$  uzayına aittirler. Buna göre  $E$  gerçel vektör uzayı noktasal sıralamaya göre bir Riesz uzayı olur ( $f \geq g \Leftrightarrow f(x) \geq g(x), \forall x \in X$ ).

### 2.1. Örnek

Aşağıdaki fonksiyon uzayları noktasal sıralamaya göre, yani “ $f \geq g \Leftrightarrow f(x) \geq g(x), \forall x \in X$ ”, birer Riesz uzaylarıdır.

- $\mathbb{R}^X$ ,  $X$  üzerindeki gerçel değerli fonksiyonların uzayı.
- $C(X)$ ,  $X$  topolojik uzayı üzerindeki gerçel değerli sürekli fonksiyonların uzayı.
- $C_b(X)$ ,  $X$  topolojik uzayı üzerindeki sınırlı gerçel değerli sürekli fonksiyonların uzayı.
- $L_p(\mu)$  ( $0 < p < \infty$ ),  $(X, \Sigma, \mu)$  ölçüm uzayı olmak üzere, gerçel değerli  $\mu$ -ölçülebilir ve  $\int_X |f|^p d\mu < \infty$  koşulunu sağlayan fonksiyonların uzayı.
- $L_\infty(\mu)$ ,  $(X, \Sigma, \mu)$  ölçüm uzayı olmak üzere, gerçel değerli  $\mu$ -ölçülebilir ve hemen hemen her yerde sınırlı fonksiyonların uzayı.

Aşağıdaki dizi uzayları ise “ $(x_n) \leq (y_n) \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}$  için  $x_n \leq y_n$ ” kon sıralamasına göre birer Riesz uzaylarıdır.

f)  $\ell_\infty(X)$ ,  $X$  kümesi üzerindeki tüm sınırlı dizilerin uzayı.

g)  $\ell_p$  ( $1 \leq p < \infty$ ),  $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$  şartını sağlayan gerçel dizilerin uzayı.

### 2.3. Tanım

$E$  bir Riesz uzayı olmak üzere, her  $x \in E$  için  $x^+ := x \vee 0$  elemanına  $x$ 'in *pozitif kısmı*,  $x^- := -x \vee 0$  elemanına  $x$ 'in *negatif kısmı* ve  $|x| := x \vee (-x)$  elemanına  $x$ 'in *modülü* denir.

### 2.1. Teorem

$E$  bir Riesz uzayı olmak üzere, her  $x, y \in E$  için aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

a)  $x = x^+ - x^-$

b)  $|x| = x^+ + x^-$

c)  $x^+ \wedge x^- = 0$

d)  $x = (x - y)^+ + x \wedge y$

[Aliprantis, 1985, Teorem 1.3].

### 2.4. Tanım

$E$  bir Riesz uzayı olmak üzere, her  $x, y \in E$  için  $|x| \wedge |y| = 0$  ise  $x$  ve  $y$  elemanları birbirine *diktir* denir ve  $x \perp y$  ile gösterilir.  $E$  uzayının bir alt kümesi  $A$  ise,  $A^d := \{x \in E : x \perp y, \forall y \in A\}$  kümesine  $A$ 'nın *dik tümleyeni* denir. Bu tanıma göre ikişerli olarak birbirine dik elemanlardan oluşan diziye *dik dizi* denir ( $n \neq m$  iken  $x_n \perp x_m$  ise  $(x_n) \subset E$  dik dizidir).

## 2.5. Tanım

E Riesz uzayında, I indeks kümesi için  $(x_\alpha)$  bir ağ olsun. Her  $\alpha, \beta \in I$  için  $x_\alpha \leq x_\beta$  ve  $x_\beta \leq x_\gamma$  koşullarını sağlayan bir  $\gamma \in I$  varsa  $(x_\alpha)$  ağı *yukarı yönlendirilmiştir* denir ve  $(x_\alpha) \uparrow$  şeklinde gösterilir.  $(x_\alpha) \uparrow$  ve  $\sup \{x_\alpha\} = x$  ise  $(x_\alpha) \uparrow x$  ile gösterilir. Benzer şekilde her  $\alpha, \beta \in I$  için  $x_\alpha \geq x_\beta$  ve  $x_\beta \geq x_\gamma$  koşullarını sağlayan bir  $\gamma \in I$  varsa  $(x_\alpha)$  ağı *aşağı yönlendirilmiştir* denir ve  $(x_\alpha) \downarrow$  şeklinde gösterilir.  $(x_\alpha) \downarrow$  ve  $\inf \{x_\alpha\} = x$  ise  $(x_\alpha) \downarrow x$  ile gösterilir.

## 2.6. Tanım

E bir Riesz uzayı ve boştan farklı bir alt kümesi A olsun.  $y \in A$  olmak üzere  $|x| \leq |y|$  iken  $x \in A$  oluyorsa A kümesine *katı (solid)* denir. A kümesini kapsayan en küçük katı kümeye A kümesinin *katı zarfı* denir. A kümesinin katı zarfı  $\text{sol}(A) = \{x \in E : \exists y \in A \text{ için } |x| \leq |y|\}$  olur.

## 2.7. Tanım

E Riesz uzayının katı alt vektör uzaylarına *ideal* adı verilir. E Riesz uzayının boştan farklı bir A alt kümesini kapsayan en küçük ideale A kümesinin *doğurduğu ideal* denir. A kümesinin doğurduğu ideal,

$$\left\{ y \in E : \exists \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}^+ \text{ ve } \exists x_1, x_2, \dots, x_n \in A \text{ için } |y| \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot |x_k| \right\}$$

olur. Bir  $x \in E$  elemanın ürettiği ideale *esas ideal* denir ve  $x \in E$  elemanın ürettiği esas ideal  $I_x = \{ y \in E : \exists \lambda \in \mathbb{R}^+, |y| \leq \lambda \cdot |x| \}$  olur.

## 2.8. Tanım

$E$  bir Riesz uzayı olmak üzere,  $x \leq y$  koşulunu sağlayan  $x, y \in E$  elemanları ile tanımlanan  $[x, y] := \{z \in E : x \leq z \leq y\}$  kümesine *sıralı aralık* denir.  $E$  uzayının bir  $A$  alt kümesi bir sıralı aralık tarafından kapsanıyorsa,  $A$  kümesine *sıra sınırlı küme* denir.

## 2.9. Tanım

$E$  Riesz uzayının her sıra sınırlı kümesinin  $E$  içinde bir supremumu ve infimumu varsa  $E$  uzayına *Dedekind tam uzay* denir. Benzer olarak, sıra sınırlı sayılabilir her kümenin  $E$  içinde bir supremumu ve infimumu varsa  $E$  uzayına  $\sigma$ -*Dedekind tam uzay* denir.

## 2.10. Tanım

$E$  ve  $F$  Riesz uzayları olmak üzere,  $T : E \rightarrow F$  operatörü  $E$  uzayının her sıra sınırlı kümesini  $F$  uzayının sıra sınırlı kümelerine resmediyorsa,  $T$  operatörüne *sıra sınırlı operatör* denir.  $E$  uzayından  $F$  uzayı içine tüm sıra sınırlı operatörlerin kümesi  $\mathcal{L}_b(E, F)$  ile gösterilir.

$T, S \in \mathcal{L}_b(E, F)$  için “ $T \leq S \Leftrightarrow S - T \geq 0$ ” sıralamasına göre  $\mathcal{L}_b(E, F)$  sıralı vektör uzayıdır. Fakat  $\mathcal{L}_b(E, F)$  her zaman Riesz uzayı olmak zorunda değildir. Eğer  $F$  Banach örgüsü Dedekind tam ise  $\mathcal{L}_b(E, F)$  Dedekind tam Riesz uzayıdır [Aliprantis, 1985, Teorem 1.13]. Ayrıca her pozitif operatör sıra sınırlı operatördür.

Eğer  $F = \mathbb{R}$  ise  $E$  Riesz uzayı üzerinde tanımlı gerçel değerli sıra sınırlı operatörlerin  $\mathcal{L}_b(E, \mathbb{R})$  uzayına  $E$  Riesz uzayının *sıra duali* denir ve  $E^\sim$  şeklinde gösterilir.  $E$  Riesz uzayının  $(x_\alpha) \downarrow 0$  olacak biçimdeki her  $(x_\alpha)$  ağı için,

$\inf \{ \|Tx_n\| \} = 0$  koşulunu sağlayan  $T \in \mathcal{L}_b(E, F)$  operatörüne sıra sürekli operatör denir.  $E$  uzayından  $F$  uzayı içine tüm sıra sınırlı operatörlerin kümesi  $\mathcal{L}_n(E, F)$  ile gösterilir. Eğer  $F = \mathbb{R}$  ise  $E$  üzerinde tanımlı gerçel değerli bütün sıra sürekli operatörlerin  $\mathcal{L}_n(E, F)$  uzayı  $E_n^\sim$  şeklinde gösterilir.

### 2.11. Tanım

$E$  ve  $F$  Riesz uzayları olsun.  $T \in \mathcal{L}(E, F)$  operatörü  $R, S: E \rightarrow F$  pozitif operatörler olmak üzere,  $T = R - S$  şeklinde yazılabiliyorsa,  $T$  operatörüne *regüler operatör* denir.  $E$  uzayından  $F$  uzayına tanımlı tüm regüler operatörler sınıfı  $\mathcal{L}_r(E, F)$  şeklinde gösterilir ve  $\mathcal{L}_r(E, F) \subseteq \mathcal{L}_b(E, F) \subseteq \mathcal{L}(E, F)$  kapsamaları sağlanır.

## 2.2. Banach Örgüleri

### 2.12. Tanım

$E$  Riesz uzayı olmak üzere,  $|x| \leq |y|$  olacak biçimdeki her  $x, y \in E$  için  $\|x\| \leq \|y\|$  sağlanıyorsa,  $E$  üzerinde tanımlanan  $\| \cdot \|$  normuna *örgü normu* denir.  $E$  üzerinde tanımlanan norm örgü normu ise  $(E, \| \cdot \|)$  uzayına *normlu Riesz uzayı* denir. Eğer,  $E$  normlu Riesz uzayı bu örgü normuna göre tam ise,  $E$  uzayına *Banach örgüsü* denir.

$E$  normlu Riesz uzayı üzerinde tanımlı gerçel değerli sürekli operatörlerin vektör uzayı  $E'$  ile gösterilir ve  $E', E^\sim$  içinde idealdir. Eğer,  $E$  bir Banach örgüsü ise  $E^\sim = E'$  sağlanır [Aliprantis, 1985, Sonuç 12.5].

### 2.13. Tanım

$E$  bir Banach örgüsü olmak üzere,  $x \wedge y = 0$  olacak biçimdeki her  $x, y \in E^+$  için  $\|x \vee y\| = \max \{\|x\|, \|y\|\}$  sağlanıyorsa,  $E$  üzerinde tanımlı norma  $M$ -norm;  $E$  uzayına da  $AM$ -uzay denir.

$E$  Banach örgüsü olmak üzere,  $x \wedge y = 0$  olacak biçimdeki her  $x, y \in E^+$  için  $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$  sağlanıyorsa,  $E$  üzerinde tanımlı norma  $L$ -norm;  $E$  uzayına da  $AL$ -uzay denir.

Örnek olarak,  $c_0, c$  ve  $\ell_\infty$  dizi uzayları  $AM$ -uzayları,  $\ell_1$  ve  $L_1[0,1]$  uzayları  $AL$ -uzaylarıdır.

### 2.2. Teorem

$E$  Banach örgüsünün  $AM$ -uzay ( $AL$ -uzay) olması için gerekli ve yeterli koşul  $E'$  dual uzayının  $AL$ -uzay ( $AM$ -uzay) olmasıdır [Aliprantis, 1985, Teorem 12.22].

### 2.14. Tanım

Bir Riesz uzayı üzerinde  $\|\cdot\|$  örgü normu tanımlansın.  $x_\alpha \downarrow 0$  olacak şekilde her  $\{x_\alpha\}$  ağı için  $\|x_\alpha\| \downarrow 0$  sağlanıyorsa,  $\|\cdot\|$  normuna *sıra sürekli norm* denir. Bu koşulu sağlayan normlu Riesz uzayına da sıra sürekli norma sahip normlu Riesz uzay denir.

Örnek olarak  $1 \leq p < \infty$  olmak üzere,  $L^p(\mu)$  fonksiyon uzayları sıra sürekli norma sahip Banach örgüleridir.  $C[0,1]$ ,  $L^\infty(\mu)$  ve  $\ell_\infty$  uzayları ise sıra sürekli norma sahip olmayan Banach örgüleridir.

### 2.3. Teorem

E bir Banach örgüsü olmak üzere, aşağıdaki önermeler denktir:

- E uzayı sıra sürekli norma sahiptir.
- $0 \leq x_n \leq x$  koşulunu sağlayan  $(x_n)$  monoton dizisi norm Cauchy dizisidir.
- E uzayı Dedekind tamdır ve  $x_n \downarrow 0$  koşulunu sağlayan her  $(x_n)$  dizisi için,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = 0$  sağlanır.
- Sıra sınırlı her dik dizi sifira norm yakınsaktır.
- E uzayı  $E''$  içinde bir idealdir.
- E uzayının her sıra aralığı zayıf kompakttır.

Ayrıca E sıra sürekli norma sahip Riesz uzayı ise, E uzayının norm tamlaması da sıra sürekli norma sahiptir [Aliprantis, 1985, Teorem 12.9, Teorem 12.10, Teorem 12.12].

### 2.15. Tanım

$(X, \tau)$  topolojik vektör uzayının bir alt kümesi A olsun. Sıfırın her bir V komşuluğu için,  $A \subseteq \Phi + V$  olacak biçimde  $\Phi \subseteq A$  sonlu alt kümesi bulunabiliyorsa, A kümesine  $\tau$ -total sınırlı küme denir.

### 2.4. Teorem

$(X, \tau)$  topolojik vektör uzayının bir alt kümesi A için, aşağıdakiler denktir.

- A,  $\tau$ -total sınırlı kümedir.
- Sıfırın her bir V komşuluğu için,  $A \subseteq \Phi + V$  olacak biçimde bir  $\Phi \subseteq X$  sonlu alt kümesi vardır.
- Sıfırın her bir V komşuluğu için,  $A \subseteq \Phi + V + V$  olacak biçimde bir  $\Phi \subseteq X$

sonlu alt kümesi vardır.

d) Sıfırın her bir  $V$  komşuluğu için,  $A \subseteq B + V$  olacak biçimde bir  $B \subseteq X$   $\tau$ -total sınırlı alt kümesi vardır [Aliprantis, 1985, Teorem 9.1].

### 2.16. Tanım

$X$  ve  $Y$  normlu vektör uzayları ve  $T: X \rightarrow Y$  bir operatör olsun. Eğer  $\overline{T(U_X)}$  kümesi norm kompakt küme ise,  $T$  operatörüne *kompakt operatör* denir. Veya denk olarak, her  $(x_n) \subset U_X$  dizisi için  $(Tx_n)$  dizisi  $Y$  içinde norm yakınsak bir alt diziye sahipse,  $T$  operatörüne kompakttır denir. Eğer  $Y$  bir Banach uzayı ise,  $T$  operatörünün kompakt olması için gerekli ve yeterli koşul  $T(U_X)$  kümesinin norm total sınırlı olmasıdır.

### 2.17. Tanım

$X$  ve  $Y$  Banach uzayları ve  $T: X \rightarrow Y$  bir operatör olsun. Eğer  $\overline{T(U_X)}$  kümesi zayıf kompakt küme ise,  $T$  operatörüne *zayıf kompakt operatör* denir. Diğer bir deyişle, her  $(x_n) \subset U_X$  dizisi için  $(Tx_n)$  dizisi  $Y$  içinde zayıf yakınsak bir alt diziye sahipse,  $T$  operatörüne zayıf kompakttır denir.

Her kompakt operatörün zayıf kompakt operatör olacağı açıktır ve her zayıf kompakt operatör süreklidir. Ayrıca, zayıf kompakt operatörlerin eşlek operatörleri de zayıf kompakttır. Benzer şekilde kompakt operatörlerin eşlek operatörleri de kompakttır [Aliprantis, 1985, Teorem 16.2].

### 2.3. L-zayıf kompakt ve M-zayıf kompakt operatörler

Bu kesimde zayıf kompakt operatörlerin bir alt sınıfı olan M-zayıf kompakt ve L-zayıf kompakt operatörlerin tanımları ve bazı özellikleri verilmiştir. M-zayıf

kompakt ve L-zayıf kompakt operatörler ilk defa P. Meyer-Nieberg tarafından tanımlanmıştır [Meyer, 1974].

## 2.18. Tanım

E bir Banach örgüsü olmak üzere;

$$E^a := \{x \in E : \text{Her } (x_n) \subseteq [0, |x|] \text{ monoton dizisi norm yakınsak} \}$$

şeklinde tanımlanan küme, E içinde sıra sürekli norma sahip kapalı maksimal idealdir [Meyer, 1991, Teorem 2.4.10].

Eğer E sıra sürekli norma sahip ise  $E^a = E$  sağlanır. Örneğin,  $(L_p[0,1])^a = L_p[0,1]$  ( $1 \leq p < \infty$ ). Sıra sürekli norma sahip olmayan uzaylarda ise,  $E^a \neq E$  olur. Örnek olarak,  $\mu$  ölçü uzayı bir atom içermiyorsa  $(L_\infty(\mu))^a = \{\theta\}$  veya  $(\ell_\infty)^a = c_0$  olur.

## 2.19. Tanım

E Banach örgüsünün boştan farklı bir alt kümesi A olsun. Her  $(x_n) \subset \text{sol } A$  dik dizisi için  $\lim \|x_n\| = 0$  sağlanıyorsa, A kümesine *L-zayıf kompakt küme* denir.

E Banach örgüsü olmak üzere,  $x \in E$  için  $\{x\}$  kümesinin L-zayıf kompakt olması için gerekli ve yeterli koşul  $x \in E^a$  olmasıdır. Dolayısıyla, E uzayının her L-zayıf kompakt kümesi  $E^a$  ideali tarafından kapsanır. Ayrıca,  $E^a$  idealinin her relatif kompakt alt kümesi L-zayıf kompakttır [Meyer, 1991, Sayfa 212].

## 2.1. Önerme

E Banach örgüsünün her L-zayıf kompakt kümesi relatif zayıf kompakttır [Meyer,

1991, Önerme 3.6.5].

Aşağıda verilen L-zayıf kompakt ve M-zayıf kompakt operatörler ilk defa P.Meyer-Nieberg tarafından tanımlanmıştır [Meyer, 1974].

## 2.20. Tanım

$E$  Banach örgüsü,  $X$  Banach uzayı ve  $T : E \rightarrow X$  bir sürekli operatör olsun. Her bir  $(x_n) \subset E$  norm sınırlı dik dizisi için,  $\lim \|Tx_n\| = 0$  koşulunu sağlayan  $T$  operatörüne *M-zayıf kompakt operatör* denir.

## 2.21. Tanım

$E$  Banach örgüsü,  $X$  Banach uzayı ve  $T : X \rightarrow E$  bir sürekli operatör olsun.  $T$  operatörü  $X$  uzayının norm sınırlı kümelerini  $E$  uzayının L-zayıf kompakt kümelerine resmediyorsa,  $T$  operatörüne *L-zayıf kompakt operatör* denir.

$E$  Banach örgüsü ve  $X$  Banach uzayı olmak üzere,  $E$  uzayından  $X$  uzayı içine tanımlanan bütün M-zayıf kompakt operatörlerin kümesi,  $L(E, X)$  uzayının kapalı alt vektör uzayıdır. Benzer şekilde  $X$  uzayından  $E$  uzayı içine tanımlanan bütün L-zayıf kompakt operatörlerin kümesi,  $L(X, E)$  uzayının kapalı alt vektör uzayıdır [Aliprantis, 1985, Teorem 18.14].

Aşağıdaki iki teoremde L-zayıf kompakt ve M-zayıf kompakt operatörlerin oldukça sık kullanılan özellikleri verilmiştir.

## 2.5. Teorem

$E$  Banach örgüsü,  $X$  Banach uzayı olsun.  $T : E \rightarrow X$  operatörü M-zayıf kompakt ise; her bir  $\varepsilon > 0$  sayısına karşılık, her  $x \in U_E$  için  $\|T(|x| - u)^+\| < \varepsilon$  olacak biçimde

en az bir  $u \in E^+$  vardır. Dolayısıyla,  $x = (x - y)^+ + x \wedge y$  eşitliği ile  $T(U_E) \subseteq T[-u, u] + \varepsilon U_X$  sağlanır [Aliprantis, 1985, Teorem 18.9 ve Teorem 18.10].

## 2.6. Teorem

$E$  Banach örgüsü,  $X$  Banach uzayı olsun.  $T : X \rightarrow E$  operatörü  $L$ -zayıf kompakt ise; her bir  $\varepsilon > 0$  sayısına karşılık, her  $x \in U_X$  için  $\| (|Tx| - u)^+ \| < \varepsilon$  olacak biçimde en az bir  $u \in E^+$  vardır. Dolayısıyla,  $x = (x - y)^+ + x \wedge y$  eşitliği ile  $T(U_X) \subseteq [-u, u] + \varepsilon U_E$  sağlanır [Aliprantis, 1985, Teorem 18.9 ve Teorem 18.10].

$E$  Banach örgüsü olmak üzere, bir  $T : E \rightarrow E$   $L$ -zayıf kompakt operatörü ile  $E$  uzayının kapalı birim yuvarı  $U_E$  arasında var olan, elde ettiğimiz kayda değer bir ilişkiyi aşağıda verelim.

## 2.7. Teorem

$E$  sıra sürekli norma sahip Banach örgüsü ve  $T : E \rightarrow E$  operatörü  $L$ -zayıf kompakt operatör olsun.  $U_E = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$  kapalı yuvarı için  $\overline{T(U_E)} \neq U_E$  sağlanır.

*Kanıt:*

Kabul edelim ki  $\overline{T(U_E)} = U_E$  olsun.  $E$  sıra sürekli norma sahip olduğundan  $E'_n = E_n \approx E'$  olur [Meyer, 1991, Teorem 2.4.2]. Her bir  $n \in \mathbb{N}$  için  $\|f_n\| = 1$  olacak biçimde  $(f_n) \subset E'_n = E'$  dik dizisi alalım. O halde  $\varepsilon_0 > 0$  reel sayısı için bir  $(x_n) \subset U_E^+$  dik dizisi vardır ve her  $n \in \mathbb{N}$  için  $f_n(x_n) \geq 1 - \varepsilon_0$  olur [Meyer, 1991 Alıştırma 2.3.1]. Diğer taraftan,  $\overline{T(U_E)} = U_E$  olduğundan  $\varepsilon_0 > 0$  ve her bir  $n \in \mathbb{N}$

için,  $\|x_n - T(z_n)\| < \varepsilon_0$  olacak biçimde en az bir  $z_n \in U_E^+$  elemanı bulunur. O halde her  $n \in \mathbb{N}$  için,

$$\begin{aligned} 1 - \varepsilon_0 &\leq f_n(x_n) = f_n(x_n - Tz_n + Tz_n) = f_n(x_n - Tz_n) + f_n(Tz_n) \\ &= f_n(x_n - Tz_n) + T'f_n(z_n) \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla,

$$1 - \varepsilon_0 \leq \|f_n\| \cdot \|x_n - Tz_n\| + \|T'f_n\| \cdot \|z_n\| \leq \varepsilon_0 + \|T'f_n\|$$

ise her  $n \in \mathbb{N}$  için,

$$1 - 2\varepsilon_0 \leq \|T'f_n\| \quad \dots\dots\dots(1)$$

olur. Diğer taraftan,  $T: E \rightarrow E$  operatörü L-zayıf kompakt olduğundan  $T': E' \rightarrow E'$  operatörü M-zayıf kompakttır. Dolayısıyla,  $(f_n) \subset U_E$  dik dizisi için  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T'f_n\| = 0$  olmalıdır. Bu ise (1) eşitsizliğine çelişkidir. O halde kabulümüz yanlış, yani  $\overline{T(U_E)} \neq U_E$  olmalıdır.

## 2.1. Sonuç

E sıra sürekli norma sahip Banach örgüsü ve  $T: E \rightarrow E$  operatörü L-zayıf kompakt operatör olsun. O halde, her  $x \in U_E$  için  $\|Tx - w\| \geq \varepsilon_0$  olacak biçimde en az bir  $\varepsilon_0 > 0$  ve en az bir  $w \in U_E$  elemanı vardır. Üstelik,  $\|T\| \leq 1$  ise her bir  $n \in \mathbb{N}$  ve her  $x \in U_E$  için  $\|T^n x - w\| \geq \varepsilon_0$  sağlanır.

*Kanıt:*

Hipotezler altında Teorem 2.7 gereği  $\overline{T(U_E)} \neq U_E$  olduğundan,  $\|Tx - w\| \geq \varepsilon_0$  olacak biçimde en az bir  $\varepsilon_0 > 0$  ve en az bir  $w \in U_E$  elemanı vardır. Ayrıca,  $T$  sınırlı operatörü için  $T(U_E) \subseteq \|T\|U_E$  sağlandığından  $\|T\| \leq 1$  ise her bir  $n \in \mathbb{N}$  için  $T^n(U_E) \subseteq U_E$  olur. O halde, her bir  $n \in \mathbb{N}$  ve her  $x \in U_E$  için  $\|T^n x - w\| \geq \varepsilon_0$  sağlanır.

## 2.2. Önerme

$E, F$  Banach örgüleri ve  $S, T : E \rightarrow F$  pozitif operatörleri için  $0 \leq S \leq T$  sağlansın. Eğer  $T$  operatörü  $M$ -zayıf kompakt ise  $S$  operatörü de  $M$ -zayıf kompakttır [Aliprantis, 1985, Örnek 11.2].

## 2.3. Önerme

$E, F$  Banach örgüleri ve  $S, T : E \rightarrow F$  pozitif operatörleri için  $0 \leq S \leq T$  sağlansın. Eğer  $T$  operatörü  $L$ -zayıf kompakt operatör ise  $S$  operatörü de  $L$ -zayıf kompakttır [Aliprantis, 1985, Örnek 11.2].

## 2.4. Önerme

$E$  Banach örgüsü,  $X$  Banach uzayı olsun. Eğer  $E$  uzayı sıra sürekli norma sahip ise, her  $T : X \rightarrow E$  kompakt operatörü  $L$ -zayıf kompakttır [Meyer, 1991, Sayfa 212].

## 2.8. Teorem

$L$ -zayıf kompakt ve  $M$ -zayıf kompakt operatörler zayıf kompakt operatörlerdir [Meyer, 1974].

Ancak her zayıf kompakt operatör L-zayıf kompakt veya M-zayıf kompakt operatör olmak zorunda değildir. Örnek olarak  $I: \ell_2 \rightarrow \ell_2$  özdeşlik operatörü zayıf kompakt olmasına karşın L-zayıf kompakt veya M-zayıf kompakt değildir. Tanım veya görüntü uzaylarının özelliklerine göre zayıf kompakt operatörler ile L-zayıf kompakt veya M-zayıf kompakt operatörlerin çakıştıkları durumlar vardır.

### 2.9. Teorem

$E$  bir AM-uzayı,  $X$  Banach uzayı ve  $T: E \rightarrow X$  bir sürekli operatör olsun.  $T$  operatörünün zayıf kompakt operatör olması için gerekli ve yeterli koşul M-zayıf kompakt olmasıdır [Aliprantis, 1985, Teorem 18.11].

### 2.10. Teorem

$E$  bir AL-uzayı,  $X$  Banach uzayı ve  $T: X \rightarrow E$  bir sürekli operatör olsun.  $T$  operatörünün zayıf kompakt operatör olması için gerekli ve yeterli koşul L-zayıf kompakt olmasıdır [Aliprantis, 1985, Teorem 18.11].

Aşağıdaki teorem L-zayıf kompakt ve M-zayıf kompakt operatörlerin eşlek operatörlerinin de birbirlerini verdiğini göstermektedir.

### 2.11. Teorem

$E$  bir Banach örgüsü ve  $X$  bir Banach uzayı olmak üzere aşağıdaki önermeler sağlanır.

- a)  $T: E \rightarrow X$  operatörünün M-zayıf kompakt olması için gerekli ve yeterli koşul  $T': X' \rightarrow E'$  operatörünün L-zayıf kompakt olmasıdır.
- b)  $T: X \rightarrow E$  operatörünün L-zayıf kompakt olması için gerekli ve yeterli koşul  $T': E' \rightarrow X'$  operatörünün M-zayıf kompakt olmasıdır [Meyer, 1991,

Önerme 3.6.11].

## 2.5. Önerme

$E$  Banach örgüsü üzerinde tanımlı regüler  $M$ -zayıf kompakt veya  $L$ -zayıf kompakt operatörler kümesi, regüler operatörler sınıfı içinde çift taraflı idealdir [Meyer, 1991, Önerme 3.6.16].

$L$ -zayıf kompakt operatörlerin  $M$ -zayıf kompakt veya  $M$ -zayıf kompakt operatörlerin  $L$ -zayıf kompakt olma zorunluluğu yoktur. Fakat  $F$  sıra sürekli norma sahip ise, her  $T : E \rightarrow F$  regüler  $M$ -zayıf kompakt operatör  $L$ -zayıf kompakt;  $E'$  sıra sürekli norma sahip ise, her  $T : E \rightarrow F$  regüler  $L$ -zayıf kompakt operatör  $M$ -zayıf kompakttır [Chen, 1999, Teorem 4.1 ve Teorem 4.2]. Ayrıca, Dodds-Fremlin tanımlandıkları uzayların özelliklerine göre  $L$ -zayıf kompakt operatörler ile  $M$ -zayıf kompakt operatörlerin çakışabildiklerini göstermiştir [Dodds, 1979].

## 2.12. Teorem

$E$  ve  $F$  Banach örgüleri olsun.  $E'$  dual uzayı ve  $F$  sıra sürekli norma sahip olmak üzere,  $T : E \rightarrow F$  sıra sınırlı operatörü için aşağıdaki önermeler denktir:

- $T$  operatörü  $L$ -zayıf kompakttır
- $T$  operatörü  $M$ -zayıf kompakttır
- $T'$  operatörü  $L$ -zayıf kompakttır
- $T'$  operatörü  $M$ -zayıf kompakttır
- $(x_n) \subset E^+$  ve  $(x'_n) \subset F'_+$  norm sınırlı dik dizileri için  $\lim x'_n(Tx_n) = 0$  [Dodds, 1979, Teorem 5.2].

Verilen bu sonuçta operatörlerin regüler olması gerekli bir şarttır. Yukarıdaki teorem regüler olmayan operatörler için sağlanmayabilir.

## 2.6. Önerme

$E$  bir Banach örgüsü olmak üzere,  $T : E \rightarrow E$  pozitif operatörü  $L$ -zayıf kompakt ve her bir  $x \in E^+$  için  $T[0,x]$  norm-total sınırlı olacak şekilde tanımlansın. Bu durumda  $0 \leq S \leq T$  koşulunu sağlayan her bir  $S : E \rightarrow E$  pozitif operatörü için aşağıdaki önermeler sağlanır:

- a) Her bir  $x \in E^+$  için  $S[0,x]$  norm-total sınırlıdır.
- b)  $S^2$  operatörü kompakttır [Aliprantis, 1985, Örnek 18.12].

## 2.7. Önerme

$E$  Banach örgüsü olmak üzere,  $T : E \rightarrow E$  pozitif operatörü  $M$ -zayıf kompakt ve her bir  $x \in E^+$  için  $T[0,x]$  norm-total sınırlı olacak şekilde tanımlansın. Bu durumda  $0 \leq S \leq T$  koşulunu sağlayan her bir  $S : E \rightarrow E$  pozitif operatörü için  $S^2$  kompakt bir operatör olur [Aliprantis, 1985, Örnek 18.13].

## 2.4. Yarı Kompakt ve Dunford-Pettis Operatörleri

Yarı kompakt operatörler ilk defa A.C. Zaanen tarafından tanımlanmıştır [Zaanen, 1983].

### 2.22. Tanım

$E$  Banach örgüsünün boştan farklı bir alt kümesi  $A$  olsun. Her bir  $\varepsilon > 0$  sayısına karşılık  $A \subseteq [-x, x] + \varepsilon U_E$  olacak şekilde bir  $x \in E^+$  elemanı varsa,  $A$  kümesine *yaklaşık sıra sınırlı küme* denir.

### 2.23. Tanım

$E$  Banach örgüsü,  $X$  Banach uzayı ve  $T : X \rightarrow E$  sürekli bir operatör olsun.  $T(U_X)$

kümesi  $E$  içinde yaklaşık sıra sınırlı bir küme ise,  $T$  operatörüne *yarı kompakt operatör* denir.

Aşağıdaki iki teorem kompakt, L-zayıf kompakt ve M-zayıf kompakt operatörler ile yarı kompakt operatörler arasındaki ilişkiyi gösterir.

### 2.13. Teorem

$E$  Banach örgüsü,  $X$  Banach uzayı olmak üzere,  $T : X \rightarrow E$  operatörü kompakt veya L-zayıf kompakt ise yarı kompakttır [Aliprantis, 1985, Teorem 18.19].

### 2.14. Teorem

$E, F$  Banach örgüleri ve  $T : E \rightarrow F$  pozitif operatör olsun.  $T$  operatörü M-zayıf kompakt ise yarı kompakttır [Aliprantis, 1985, Teorem 18.20].

Ancak bir yarı kompakt operatör zayıf kompakt, dolayısıyla M-zayıf kompakt veya L-zayıf kompakt operatör olmak zorunda değildir. Örneğin  $I : \ell_\infty \rightarrow \ell_\infty$  özdeşlik operatörü yarı kompakt olmasına rağmen zayıf kompakt operatör değildir. Tersine  $I : \ell_2 \rightarrow \ell_2$  özdeşlik operatörü zayıf kompakt operatör olmasına karşın, yarı kompakt operatör değildir. Fakat,  $E$  sıra sürekli norma sahip Banach örgüsü ise  $T : X \rightarrow E$  operatörünün yarı kompakt olması için gerekli ve yeterli koşul L-zayıf kompakt olmasıdır [Meyer, 1991, Teorem 3.6.2].

İlk olarak N. Dunford ve P. J. Pettis,  $L^1(\mu)$  uzayı üzerinde tanımlı bir zayıf kompakt operatörün, zayıf yakınsak dizileri norm yakınsak dizilere resmettiğini ispatlamıştır [Dunford, 1940]. A. Grothendieck ise Banach uzayları arasında tanımlı bu özelliği sağlayan operatörleri Dunford-Pettis operatörü olarak adlandırmıştır [Grothendieck, 1953].

### 2.24. Tanım

$X, Y$  Banach uzayları ve  $T : X \rightarrow Y$  bir operatör olsun. Eğer  $x_n \xrightarrow{\sigma(X, X')} 0$  olacak biçimdeki her  $(x_n) \subseteq X$  dizisi için  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T(x_n)\| = 0$  ise,  $T$  operatörüne *Dunford-Pettis operatörü* denir.

### 2.25. Tanım

Her bir  $Y$  Banach uzayı için, her  $T : X \rightarrow Y$  zayıf kompakt operatörü bir Dunford-Pettis operatörü ise  $X$  Banach uzayına *Dunford-Pettis özelliğini sağlıyor* denir.

Örnek olarak her AM-uzay ve AL-uzay Dunford-Pettis özelliği sağlar [Meyer, 1991, Önerme 3.7.9].

### 2.15. Teorem

$E$  ve  $F$  Banach örgüleri olmak üzere aşağıdaki önermelerden biri sağlanırsa, her  $T : E \rightarrow F$  yarı kompakt operatörü kompakttır.

- a)  $F$  sıra sürekli norma sahip diskret uzaydır.
- b)  $E'$  dual uzayı sıra sürekli norma sahip ve diskret,  $F$  uzayı sıra sürekli norma sahiptir.
- c)  $E, E', F$  uzayları sıra sürekli norma sahip ve  $E$  uzayı Dunford-Pettis özelliğine sahiptir [Aqzzouz, 2006, Teorem 2.6].

### 2.16. Teorem

$E$  ve  $F$  Banach örgüleri olmak üzere aşağıdaki önermeler birbirine denktir:

- a)  $0 \leq S \leq T$  koşulunu sağlayan  $S, T : E \rightarrow F$  pozitif operatörleri için  $T$  Dunford-Pettis operatörü ise  $S$  operatörü kompakttır.

- b) Aşağıdaki önermelerden biri sağlanır.
- i)  $E'$  dual uzayı diskret ve sıra sürekli norma sahiptir.
  - ii)  $E'$  dual uzayı ve  $F$  sıra sürekli norma sahiptir.
  - iii)  $F$  sonlu boyutludur [Aqzzouz, 2006, Teorem 2.12].

### 2.17. Teorem

$E$  bir Banach örgüsü olmak üzere, aşağıdaki önermeler birbirine denktir:

- a)  $E'$  dual uzayı sıra sürekli norma sahiptir.
- b)  $X$  Banach uzayı olmak üzere, her  $T: E \rightarrow X$  Dunford-Pettis operatörü  $M$ -zayıf kompaktır.
- c)  $X$  Banach uzayı olmak üzere, her  $T: E \rightarrow X$  kompakt operatör  $M$ -zayıf kompaktır.
- d)  $F$  bir  $AL$ -uzay olmak üzere, her  $T: E \rightarrow F$  pozitif operatör  $M$ -zayıf kompaktır [Sanchez, 1992, Teorem 3].

## 2.5. Değişmez Alt Uzay Problemi

### 2.26. Tanım

$X$  Banach uzayı ve  $T: E \rightarrow E$  bir operatör olsun.  $V \neq \{0\}$  ve  $V \neq X$  olmak üzere,  $T(V) \subseteq V$  koşullarını sağlayan  $V \subseteq X$  alt uzayına özdeş olmayan  $T$ -değişmez alt uzay denir.

Değişmez alt uzay problemi “Bir Banach uzayı üzerinde tanımlı sınırlı bir operatör özdeş olmayan kapalı değişmez alt uzaya sahip midir?” şeklinde ifade edilir.

Bir Banach uzayı üzerinde tanımlı her operatör için aşikar olan değişmez alt uzaylar bulunabilir. Örneğin,  $X$  Banach uzayı ve  $T: X \rightarrow X$  operatörü için,  $\mathcal{C}ekT = \{x \in X : T(x) = 0\}$  ve  $R(T) = \{T(x) : x \in X\}$  şeklinde tanımlı alt uzaylar  $T$

operatörü ve  $T$  ile değişmeli her operatör için değişmez alt uzaylardır. Benzer şekilde,  $T$  operatörü bir öz değere sahip ise bu öz değer ile üretilen bir boyutlu kapalı alt uzayda  $T$ -değişmez alt uzaydır.

### 2.27. Tanım

$X$  Banach uzayı üzerinde tanımlı özdeşlik operatörü  $I$  olmak üzere,  $T = \lambda I$  olacak biçimde bir  $\lambda \in \mathbb{R}$  varsa  $T$  operatörüne *skalar operatör* denir.

$T$  bir skalar operatör ise boyutu birden büyük  $X$  Banach uzayının sıfırdan farklı her bir elemanı tarafından üretilen alt uzay, özdeş olmayan kapalı  $T$ -değişmez alt uzaydır.

### 2.28. Tanım

$X$  bir Banach uzayı ve sıfırdan farklı bir elemanı  $x \in X$  olsun.  $V = \text{sp}\{x, Tx, T^2x, T^3x, \dots\}$  şeklinde tanımlı alt uzaya,  $x$  elemanının  $T$  altındaki *yörünge uzayı* denir.

Bu şekilde tanımlanan  $V$  yörünge uzayının  $T$ -değişmez alt uzay olduğu açıktır. Ayrıca  $T$  sürekli bir operatör olduğundan  $T(\overline{V}) \subseteq \overline{V}$  sağlanır ve  $X$  Banach uzayı ayrılabilir uzay değilse,  $\overline{V} \neq X$  olduğundan  $\overline{V}$  özdeş olmayan  $T$ -değişmez kapalı alt uzaydır. O halde, ayrılabilir olmayan bir Banach uzayı üzerinde tanımlı her sınırlı operatör özdeş olmayan kapalı değişmez alt uzaya sahiptir. Dolayısıyla, değişmez alt uzay problemini ayrılabilir uzaylar üzerinde tanımlı sınırlı, skalar olmayan operatörler için araştırmak yeterlidir.

Diğer taraftan, bir Banach örgüsü üzerinde tanımlı sınırlı operatör için değişmez alt idealde bulunabilir.  $E$  banach örgüsü ve  $T: E \rightarrow E$  pozitif operatör olsun.  $x \in E^+$

elemanı için  $u = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \|T\|^{-n} T^n x$  pozitif elemanını tanımlayalım.  $u$  ile üretilen sıra ideal  $I_u$  ise,  $y \in I_u$  için  $\exists \lambda \in \mathbb{R}$  vardır ve  $|y| \leq \lambda u$  sağlanır. Diğer taraftan,

$$|Ty| \leq T|y| \leq \lambda Tu = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \|T\|^{-n} T^{n+1} x = 2\lambda \|T\| \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-1} \|T\|^{-n-1} T^{n+1} x \leq 2\lambda \|T\| u$$

olduğundan  $I_u$  sıra ideali  $T$ -değişmez idealdir.

Değişmez alt uzayların varlığı ile ilgili olumlu sonuçlar bazı uzaylar veya operatör sınıfları için elde edilmiştir. Sonsuz boyutlu Hilbert uzayı üzerinde tanımlı her bir kompakt operatörün özdeş olmayan kapalı değişmez alt uzaya sahip olduğunu J. Von Neumann göstermiştir. Bu sonuç N. Aronszajn ve K. T. Smith tarafından aşağıdaki şekilde genelleştirilmiştir.

#### 2.18. Teorem

Bir Banach uzayı üzerinde tanımlı her kompakt operatör, özdeş olmayan kapalı değişmez alt uzaya sahiptir [Aronszajn, 1954].

Kompakt operatörler için verilen yukarıdaki sonucu, V.I. Lomonosov bir kompakt operatör ile değişmeli operatörler sınıfına genişletmiştir.

#### 2.19. Teorem

$E$  sonsuz boyutlu gerçel veya kompleks Banach uzayı ve  $T : E \rightarrow E$  sınırlı operatör olsun.  $T$  operatörü bir kompakt operatör ile değişmeli ise,  $T$  özdeş olmayan kapalı değişmez alt uzaya sahiptir [Lomonosov, 1973].

A.R. Bernstein ve A. Robinson ise kompakt operatörler sınıfından daha geniş olan polinomsal kompakt operatörler için özdeş olmayan kapalı değişmez alt uzayların

varlığını göstermiştir.

## 2.20. Teorem

$E$  sonsuz boyutlu real veya kompleks Banach uzayı ve  $T : E \rightarrow E$  sınırlı operatör olsun.  $p(T)$  kompakt operatör olacak biçimde bir  $p$  polinomu varsa  $T$  operatörü özdeş olmayan kapalı değişmez alt uzaya sahiptir [Bernstein, 1966].

### 3. L-ZAYIF ve M-ZAYIF KOMPAKT OPERATÖRLERİNİN KOMPAKTLIK ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde L-zayıf ve M-zayıf kompakt operatörlerin veya bu operatörlerin bileşkelerinin kompakt olabileceği bazı durumları vereceğiz. L-zayıf kompakt operatörler her zaman kompakt olmak zorunda değildir. E Banach örgüsü üzerinde tanımlı bir T operatörünün k defa kendi kendisiyle bileşkesi kısaca  $T^k$  ile gösterilecektir ( $k \geq 2, k \in \mathbb{N}$ ).

#### 3.1. Örnek

$\mu$  atomsuz ölçü olmak üzere, sonsuz boyutlu Banach örgüsü  $L^1(\mu)$  üzerinde tanımlı L-zayıf kompakt olan, fakat kompakt olmayan bir operatör vardır.  $0 < \mu(A_i) < \infty$  koşulunu sağlayan ikişerli birbirinden ayrık ölçülebilir  $A_1, A_2, \dots$  kümeleri bulunabilir.  $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$  olsun.  $L^1(\mu)$  sonsuz boyutlu ve Schur özelliğine sahip değildir. Dolayısıyla en az bir  $(f_n) \subset L^1(\mu)$  dizisi vardır ve  $f_n \xrightarrow{w} 0$ , fakat  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\| \neq 0$ .  $f \in L^1(\mu)$  ise,

$$\sum_{i=1}^n \left| \int_{A_i} f \, dt \right| \leq \sum_{i=1}^n \int_{A_i} |f| \, dt \leq \int_A |f| \, dt \leq \|f\| \quad \dots\dots\dots(*)$$

olur.

$$S: L^1(\mu) \rightarrow L^1(\mu)$$

$$f \rightarrow S(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_{A_n} f \, dt \right) \cdot f_n$$

şeklinde S operatörünü tanımlayalım.  $(f_n)$  dizisinin zayıf sınırlılığı, norm sınırlılığını gerektirir. O halde (\*) eşitsizliğinden dolayı S(f) serisi yakınsak, dolayısıyla S iyi tanımlıdır. Her  $n \in \mathbb{N}$  için  $g_n = \frac{1}{\mu(A_n)} \chi_{A_n} \in U_{L^1(\mu)}$  olur. O halde  $\forall n \in \mathbb{N}$  için  $Sg_n = f_n$  olduğundan  $(f_n) \subset S(U_{L^1(\mu)})$  olur.  $\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n f_n : \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| \leq 1 \right\}$  kümesinin relatif zayıf kompakt olduğunu biliyoruz [Abramovich, 1993, Sonuç10.16]. Ayrıca,

$$S(U_{L^1(\mu)}) \subset \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n f_n : \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| \leq 1 \right\}$$

olduğundan  $S(U_{L^1(\mu)})$  relatif zayıf kompakt, dolayısıyla S zayıf kompakt operatördür.  $L^1(\mu)$  AL-uzayı olmasından dolayı ise S operatörü L-zayıf kompakttır [Aliprantis, 1985, Teorem 18.11]. Kabul edelim ki S kompakt olsun. O halde her  $(h_n) \subset S(U_{L^1(\mu)})$  dizisinin norm yakınsak  $(h_{n_k})$  alt dizisi vardır.

$$h_{n_k} \xrightarrow{\|\cdot\|} h \Rightarrow h_{n_k} \xrightarrow{w} h \Rightarrow h=0. \dots\dots(*)$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\| \neq 0$  olduğundan, En az bir  $\varepsilon_0 > 0$  sayısına karşılık, her  $n \in \mathbb{N}$  için  $k_n > n$  vardır ve  $\|f_{k_n}\| \geq \varepsilon_0$ . O halde  $g_{k_n} \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$  olacak şekilde  $(g_{k_n}) \subset (f_{k_n})$  alt dizisi vardır. Bu ise (\*) durumuna çelişkidir. Böylece S kompakt operatör değildir.

Sıra sürekli norma sahip Banach örgüleri üzerinde tanımlı L-zayıf kompakt operatörlerin bileşkesinin kompaktlığı için şu sonucu verebiliriz.

### 3.1. Teorem

E Banach örgüsü ve  $T : E \rightarrow E$  pozitif L-zayıf kompakt operatör olsun. Eğer E sıra

sürekli norma sahipse  $T^2$  kompaktır.

*Kanıt:*

$T : E \rightarrow E$  pozitif L-zayıf kompakt operatör ise her bir  $n \in \mathbb{N}^+$  için en az bir  $0 < u_n \in E^+$  vardır ve her  $x \in U_E$  için  $\|(|Tx| - u_n)^+\| < n^{-1}$  sağlanır. Denk olarak  $|Tx| = |Tx| \wedge u_n + (|Tx| - u_n)^+$  eşitliği yardımıyla  $T(U_E^+) \subseteq [0, u_n] + n^{-1} \cdot U_E$  olur.

$y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \cdot \|u_n\|} u_n \in E^+$  elemanını tanımlayalım.  $y$  ile üretilen esas ideal,

$$I_y = \{z \in E : \exists \lambda \in \mathbb{R}^+ - \{0\} \ni |z| \leq \lambda y\}$$

olur. Her bir  $z \in I_y$  için  $\|z\|_{\infty} = \inf \{\lambda > 0 : |z| \leq \lambda y\}$  şeklinde tanımlı  $\|\cdot\|_{\infty} : I_y \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu bir norm fonksiyonudur. Bu norm ile  $(I_y, \|\cdot\|_{\infty})$  bir AM-uzay olur ve  $(I_y, \|\cdot\|_{\infty})$  uzayının kapalı birim yuvarı ise  $[-y, y]$  aralığıdır [Aliprantis, 1985, Teorem 12.20].

$T : E \rightarrow E$  pozitif L-zayıf kompakt operatörünün  $(I_y, \|\cdot\|_{\infty})$  uzayına kısıtlaması olan  $T|_{I_y} : I_y \rightarrow E$  operatörü de pozitif L-zayıf kompakt operatördür. Diğer taraftan  $I_y$  bir AM-uzay olduğundan Dunford-Pettis özelliğini sağlar ve  $T|_{I_y} : I_y \rightarrow E$  aynı zamanda bir Dunford-Pettis operatörü olur [Aliprantis, 1985, Teorem 19.4 ve Teorem 19.6].  $I_y'$  bir AL-uzaydır ve sıra sürekli norma sahiptir. O halde hipotezden  $E$  sıra sürekli norma sahip olduğundan  $T|_{I_y} : I_y \rightarrow E$  operatörü kompaktır [Aqzzouz, 2006b, Teorem 2.12].

$y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \|u_n\|} u_n$  ise her bir  $n \in \mathbb{N}^+$  için  $0 < 2^{-n} \|u_n\|^{-1} u_n \leq y$  olur. Dolayısıyla  $\alpha_n = 2^n \|u_n\|$  ise, her bir  $n \in \mathbb{N}^+$  için  $u_n \leq \alpha_n y$  olur. Bundan dolayı,

$$\begin{aligned} T(U_E^+) &\subseteq [0, u_n] + n^{-1} U_E \\ T^2(U_E^+) &\subseteq T[0, u_n] + n^{-1} T(U_E) \\ T^2(U_E^+) &\subseteq \alpha_n T[0, y] + n^{-1} \|T\| U_E \\ T^2(U_E^+) &\subseteq \alpha_n T|_{I_y} [0, y] + n^{-1} \|T\| U_E \end{aligned}$$

bulunur.  $T|_{I_y}$  kompakt operatör olduğundan  $T|_{I_y} [0, y] \subset E$  norm total sınırlı kümedir. O halde  $\{n^{-1} \|T\| U_E\}$  sıfırın komşuluklar tabanı olduğundan  $T^2(U_E^+)$  norm total sınırlıdır [Aliprantis, 1985, Teorem 9.1 ve Teorem 9.2].  $E$  bir Banach uzayı olduğundan  $T^2$  operatörü kompakttır.

$E$  ve  $F$  Banach örgüleri olsun. Eğer  $F$  diskret ve sıra sürekli norma sahip ise her bir  $T : E \rightarrow F$  pozitif yarı kompakt operatörün kompakt olduğu bilinmektedir [Aqzzouz, 2006a, Teorem 2.6]. Yarı kompakt operatörlerin bir alt kümesi olan pozitif  $M$ -zayıf kompakt operatörler için aşağıdaki sonucu verebiliriz.

### 3.2. Teorem

$E$  ve  $F$  Banach örgüleri ve  $T : E \rightarrow F$  pozitif  $M$ -zayıf kompakt operatör olsun. Eğer  $F$  sıra sürekli norma sahip ise  $T$  operatörü kompakttır.

*Kanıt:*

$T : E \rightarrow F$  pozitif  $M$ -zayıf kompakt operatör ise, her bir  $n \in \mathbb{N}^+$  için en az bir

$0 < u_n \in E^+$  vardır ve her  $x \in U_E$  için  $\|T(|x| - u_n)^+\| < n^{-1}$  sağlanır. Denk olarak  $|x| = |x| \wedge u_n + (|x| - u_n)^+$  eşitliği yardımıyla  $T(U_E^+) \subseteq T[0, u_n] + n^{-1}U_F$  olur [Aliprantis, 1985, Teorem 18.10].

Teorem 3.1 'in ispatında gösterildiği üzere  $y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \|u_n\|} u_n \in E^+$  elemanı ile tanımlanan  $(I_y, \|\cdot\|_{\infty})$  bir AM-uzay olur.  $T: E \rightarrow F$  pozitif M-zayıf kompakt operatörünün  $(I_y, \|\cdot\|_{\infty})$  uzayına kısıtlaması olan  $T|_{I_y}: I_y \rightarrow F$  operatörü de pozitif M-zayıf kompakt operatör, dolayısıyla zayıf kompakt operatördür.  $I_y$  bir AM-uzay olduğundan Dunford-Pettis özelliğini sağlar [Aliprantis, 1985, Teorem 19.4 ve Teorem 19.6]. O halde,  $T|_{I_y}: I_y \rightarrow F$  operatörü aynı zamanda bir Dunford-Pettis operatörüdür. Diğer taraftan,  $I_y'$  bir AL-uzay olacağından sıra sürekli norma sahiptir. Hipotezden  $F$  Banach örgüsü de sıra sürekli norma sahip olduğundan  $T|_{I_y}: I_y \rightarrow F$  operatörü kompakttır [Aqzzouz, 2006b, Teorem 2.12].

$y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \|u_n\|} u_n$  ise her bir  $n \in \mathbb{N}^+$  için  $2^{-n} \|u_n\|^{-1} u_n \leq y$  olur. Dolayısıyla  $\alpha_n = 2^n \|u_n\|$  ise her bir  $n \in \mathbb{N}^+$  için  $u_n \leq \alpha_n y$  çıkar.

$$\begin{aligned} T(U_E^+) \subseteq T[0, u_n] + n^{-1}U_F &\Rightarrow T(U_E^+) \subseteq \alpha_n T[0, y] + n^{-1}U_F \\ &\Rightarrow T(U_E^+) \subseteq \alpha_n T|_{I_y}[0, y] + n^{-1}U_F \end{aligned}$$

bulunur.  $T|_{I_y}$  kompakt operatör olduğundan  $T|_{I_y}[0, y] \subset F$  norm total sınırlı kümedir. O halde  $\{n^{-1}U_F\}$   $F$  uzayında sıfırın komşuluklar tabanı olduğundan

$T(U_E^+)$  norm total sınırlıdır [Aliprantis, 1985, Teorem 9.1 ve Teorem 9.2].  $E$  bir Banach uzayı olduğundan  $T$  operatörü kompaktır.

$E$  bir Banach örgüsü ve  $T: E \rightarrow E$  sınırlı operatör olsun. Eğer  $p(T): E \rightarrow E$  operatörü kompakt operatör olacak şekilde bir  $p$  polinomu varsa  $T$  operatörüne *polinomsal kompakt operatör* denir. O halde L-zayıf ve M-zayıf kompakt operatörlerin polinomsal kompaktlığı hakkında aşağıdaki sonucu verelim.

### 3.1. Sonuç:

$E$  veya  $E'$  sıra sürekli norma sahip ise  $T: E \rightarrow E$  L-zayıf kompakt ( M-zayıf kompakt ) operatörü polinomsal kompaktır.

Bu teoremler yardımıyla dual ilişkileri de aşağıdaki şekilde verilebilir.

### 3.2. Sonuç

$E, F$  Banach örgüleri ve  $T: E \rightarrow F$  pozitif L-zayıf kompakt operatör olsun. Eğer  $E'$  dual uzayı sıra sürekli norma sahip ise  $T$  operatörü kompaktır.

*Kanıt:*

$T: E \rightarrow F$  operatörü L-zayıf kompakt ise  $T': F' \rightarrow E'$  eşlek operatörü M-zayıf kompaktır. Hipotezden  $E'$  sıra sürekli norma sahip ise Teorem 3.2 gereği  $T'$  kompaktır. Dolayısıyla  $T$  operatörü kompaktır [Aliprantis, 1985, Teorem 16.2].

### 3.3. Sonuç

$E$  Banach örgüsü ve  $T: E \rightarrow E$  pozitif M-zayıf kompakt operatör olsun. Eğer  $E'$  dual uzayı sıra sürekli norma sahip ise  $T^2$  operatörü kompaktır.

*Kanıt:*

$T: E \rightarrow E$  operatörü M-zayıf kompakt ise  $T': E' \rightarrow E'$  eşlek operatörü L-zayıf kompakttır. Hipotezden  $E'$  sıra sürekli norma sahip ise Teorem 3.1 gereği  $(T')^2$  kompakttır. Dolayısıyla  $T^2$  operatörü kompakttır [Aliprantis, 1985, Teorem 16.2].

Fakat Sonuç 3.3 'nin tersi her zaman doğru değildir. Yani her  $T: E \rightarrow E$  pozitif M zayıf kompakt operatör için  $T^2$  kompakt ise  $E'$  sıra sürekli norma sahip olmayabilir. Örneğin  $\ell_1$  uzayı üzerinde tanımlı her  $T: \ell_1 \rightarrow \ell_1$  pozitif M-zayıf kompakt operatör için  $T^2: \ell_1 \rightarrow \ell_1$  kompakttır [Chen, 1999, Sonuç 2.7]. Fakat  $\ell_1' = \ell_\infty$  sıra sürekli norma sahip değildir.

### 3.4. Sonuç

$E$  ve  $F$  Banach örgüleri olsun.  $E'$  dual uzayı sıra sürekli norma sahip ve  $F$  bir AL-uzay ise  $E$  uzayından  $F$  içine tanımlı her pozitif operatör kompakttır.

*Kanıt:*

$E'$  sıra sürekli norma sahip Banach örgüsü ve  $F$  bir AL-uzay ise her pozitif operatör M-zayıf kompakttır [Sanchez, 1992, Teorem 3]. Ayrıca  $F$  AL-uzay olmasından dolayı sıra sürekli norma sahiptir. O halde Teorem 3.2 gereği  $E$  uzayından  $F$  içine tanımlı her pozitif operatör kompakttır.

$E$  Banach örgüsü olsun. Eğer  $0 < x \in E$  ile üretilen sıra ideal ve alt uzay birbirine eşit ise  $0 < x \in E$  elemanına *diskret eleman* denir.  $E$  Banach örgüsü birbirine dik diskret elemanlardan oluşan bir sıra bazına sahip ise  $E$  'ye *diskret uzay* adı verilir.  $c, c_0$  ve  $1 \leq p \leq \infty$  için  $\ell_p$  dizi uzayları diskret uzaylara örnektir.  $1 \leq p \leq \infty$  için  $L_p$  fonksiyon uzayları ise diskret değildir.

$E$  Banach örgüsü ve  $0 < y \in E$  ile üretilen esas ideal  $I_y$  olsun. Teorem 3.1 ve Teorem 3.2 'nin ispatında olduğu gibi  $\|\cdot\|_\infty$  normu ile  $(I_y, \|\cdot\|_\infty)$  bir AM-uzay olur.

### 3.1. Önerme

$E$  bir Banach örgüsü ve  $T : E \rightarrow E$  bir M-zayıf kompakt operatör olsun.  $0 < y \in E$  ile üretilen esas ideal  $I_y$  'nin norm duali  $(I_y)'$  diskret ise  $T|_{I_y} : (I_y, \|\cdot\|_\infty) \rightarrow E$  operatörü kompakttır.

*Kanıt:*

Kabul edelim ki  $(I_y)'$  diskret olsun.  $T$  operatörünün  $I_y$  uzayına kısıtlaması olan  $T|_{I_y} : (I_y, \|\cdot\|_\infty) \rightarrow E$  operatörü de M-zayıf kompakttır. Dolayısıyla eşlek operatör

$(T|_{I_y})' : E' \rightarrow (I_y, \|\cdot\|_\infty)'$  L-zayıf kompakttır. Böylece  $W = \text{sol} \left[ (T|_{I_y})' (U_{E'}) \right]$  kümesi

bir L-zayıf kompakt küme olur. O halde  $W$  kümesinin her bir dik dizisi sıfıra  $\|\cdot\|_\infty'$  -yakınsak ve  $(I_y)'$  bir diskret uzay olduğundan  $W$ ,  $(I_y, \|\cdot\|_\infty)'$  uzayının relatif kompakt bir alt kümesidir [Aliprantis, 1978, Teorem 21.15]. Buradan

$\overline{\left[ (T|_{I_y})' (U_{E'}) \right]} \subset \overline{W}$  ise  $(T|_{I_y})'$  eşlek operatörünün kompakt olduğunu görürüz.

Dolayısıyla  $T|_{I_y} : (I_y, \|\cdot\|_\infty) \rightarrow E$  operatörü kompakttır [Aliprantis, 1985, Teorem 16.2].

Bu önerme yardımıyla aşağıdaki iki teoremi verebiliriz.

### 3.3. Teorem

$E$  Banach örgüsü ve  $T : E \rightarrow E$  pozitif  $M$ -zayıf kompakt operatör olsun. Eğer her bir  $x \in E$ ,  $x > 0$  için,  $x$  ile üretilen idealin duali  $I_x'$  diskret ise  $T$  kompakttır.

*Kanıt:*

$T : E \rightarrow E$  pozitif  $M$ -zayıf kompakt operatör ise her bir  $n \in \mathbb{N}^+$  için en az bir  $u_n \in E^+$  vardır ve her  $x \in U_E$  için  $\|T(|x| - u_n)^+\| < n^{-1}$  sağlanır. Denk olarak  $|x| = |x| \wedge u_n + (|x| - u_n)^+$  eşitliği yardımıyla  $T(U_E^+) \subseteq T[0, u_n] + n^{-1}U_E$  olur.

Teorem 3.1 'in ispatında gösterildiği üzere  $y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \|u_n\|} u_n \in E^+$  elemanı ile tanımlanan  $(I_y, \|\cdot\|_{\infty})$  bir AM-uzay olur.  $T : E \rightarrow E$  pozitif  $M$ -zayıf kompakt operatörünün  $I_y$  'ye kısıtlaması olan  $T|_{I_y} : I_y \rightarrow E$  operatörü de pozitif  $M$ -zayıf kompakt operatördür.  $I_y'$  diskret uzay olduğundan Önerme 3.1 gereği  $T|_{I_y} : I_y \rightarrow E$  kompakt operatördür.  $y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \|u_n\|} u_n$  ise her bir  $n \in \mathbb{N}^+$  için  $2^{-n} \|u_n\|^{-1} u_n \leq y$  olur. Dolayısıyla  $\alpha_n = 2^n \|u_n\|$  ise her bir  $n \in \mathbb{N}^+$  için  $u_n \leq \alpha_n y$  çıkar.

$$T(U_E^+) \subseteq T[0, u_n] + n^{-1}U_E \subseteq \alpha_n T[0, y] + n^{-1}U_E$$

olur. Dolayısıyla,

$$T(U_E^+) \subseteq \alpha_n T[0, y] + n^{-1}U_E = \alpha_n T|_{I_y}[0, y] + n^{-1}U_E$$

elde edilir.  $T|_{I_y}$  kompakt operatör olduğundan  $T|_{I_y} [0, y] \subset E$  norm total sınırlı kümedir. O halde  $\{n^{-1}U_E\}$  sıfırın komşuluklar tabanı olduğundan  $T(U_E^+)$  norm total sınırlıdır [Aliprantis, 1985, Teorem 9.1 ve Teorem 9.2]. Dolayısıyla  $E$  Banach uzayı olduğundan  $T$  kompakt operatördür.

### 3.4. Teorem

$E$  Banach örgüsü ve  $T: E \rightarrow E$  pozitif L-zayıf kompakt operatör olsun. Eğer her bir  $x \in E$ ,  $x > 0$  için,  $x$  ile üretilen idealin duali  $I_x'$  diskret uzay ise  $T^2$  kompakttır.

*Kanıt:*

$T: E \rightarrow E$  pozitif L-zayıf kompakt operatör ise her bir  $n \in \mathbb{N}^+$  için en az bir  $0 < u_n \in E^+$  vardır ve her  $x \in U_E$  için  $\|(|Tx| - u_n)^+\| < n^{-1}$  sağlanır. Denk olarak  $|Tx| = |Tx| \wedge u_n + (|Tx| - u_n)^+$  eşitliği yardımıyla

$$T(U_E^+) \subseteq [0, u_n] + n^{-1}U_E \quad \dots\dots(*)$$

olur.

Teorem 3.1 'in ispatında gösterildiği üzere  $y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \|u_n\|} u_n \in E^+$  elemanı ile tanımlanan  $(I_y, \|\cdot\|_{\infty})$  bir AM-uzay olur.  $T: E \rightarrow E$  pozitif L-zayıf kompakt operatörünün  $I_y$  uzayına kısıtlaması  $T|_{I_y}: I_y \rightarrow E$  pozitif L-zayıf kompakt operatördür. Her bir L-zayıf kompakt operatör zayıf kompakt ve  $I_y$  bir AM-uzay olduğundan  $T|_{I_y}: I_y \rightarrow E$  operatörü aynı zamanda bir M-zayıf kompakt operatördür

[Aliprantis, 1985, Teorem 18.11]. O halde Önerme 3.1 gereği  $T|_{I_y} : I_y \rightarrow E$  kompakt operatördür. Bir önceki teoremden olduğu gibi  $\alpha_n = 2^n \|u_n\|$  ise her bir  $n \in \mathbb{N}^+$  için  $u_n \leq \alpha_n y$  sağlanır. O halde (\*) yardımıyla

$$T^2(U_E^+) \subseteq T[0, u_n] + n^{-1} \|T\| U_E \subseteq \alpha_n T[0, y] + n^{-1} \|T\| U_E$$

dolayısıyla,

$$T^2(U_E^+) \subseteq \alpha_n T[0, y] + n^{-1} \|T\| U_E = \alpha_n T|_{I_y}[0, y] + n^{-1} \|T\| U_E$$

bulunur.  $T|_{I_y}$  kompakt operatör olduğundan  $T|_{I_y}[0, y] \subset E$  norm total sınırlı kümedir. O halde  $\{n^{-1} \|T\| U_E\}$  ailesi sıfırın bir komşuluklar tabanı olduğundan  $T^2(U_E^+)$  norm total sınırlıdır [Aliprantis, 1985, Teorem 9.1 ve Teorem 9.2].  $E$  Banach uzayı olduğundan da  $T^2$  kompakt operatördür.

### 3.1. Tanım

$E$  bir Banach örgüsü,  $X$  bir Banach uzayı ve  $T : E \rightarrow X$  bir operatör olsun. Her bir  $x \in E^+$  için  $T[-x, x]$  relatif kompakt bir küme ise  $T$  operatörüne *AM-kompakt operatör* denir.

### 3.2. Tanım

$X, Y$  Banach uzayları ve  $T : E \rightarrow X$  bir operatör olsun. Her bir  $(x_n) \subset X$ ,  $x_n \xrightarrow{\sigma(X, X)} 0$  için  $\|Tx_n\| \rightarrow 0$  ise  $T$  operatörüne *Dunford-Pettis operatörü* denir.

Bir  $E$  Banach örgüsü ve  $S, T : E \rightarrow E$  pozitif operatörleri için  $0 \leq S \leq T$  sağlansın. Eğer  $T$  operatörü AM-kompakt ve L-zayıf kompakt ( veya M-zayıf kompakt ) ise  $S^2$  operatörünün kompakt olduğu bilinmektedir [Aliprantis, 1985, Örnek 18.12]. Eğer  $E$  sıra sürekli norma sahip Banach örgüleri üzerinde tanımlanan  $T : E \rightarrow E$  bir Dunford-Pettis operatörü ise AM-kompakt olacaktır [Meyer, 1991, Önerme 3.7.11]. Fakat  $E$  sıra sürekli değilse bu gerektirme her zaman doğru değildir. Örneğin,  $J_{\infty, p} : L^\infty(0,1) \rightarrow L^p(0,1)$ , ( $1 \leq p < \infty$ ) doğal gömme operatörü bir Dunford-Pettis operatörü olmasına karşın, AM-kompakt operatör değildir. Şimdi bir Dunford-Pettis operatörü ile sınırlandırılmış pozitif L-zayıf kompakt veya M-zayıf kompakt operatörler için aşağıdaki teoremleri verelim.

### 3.5. Teorem

$E$  bir Banach örgüsü ve  $T : E \rightarrow E$  bir pozitif M-zayıf kompakt operatör olsun. Eğer  $0 \leq T \leq S$  olacak biçimde bir  $S : E \rightarrow E$  Dunford-Pettis operatörü varsa  $T^3$  operatörü kompakttır.

*Kanıt:*

$S : E \rightarrow E$  bir Dunford-Pettis operatörü ve  $0 \leq T \leq S$  sağlandığından  $T^2 : E \rightarrow E$  operatörü de bir Dunford-Pettis operatörü olacaktır [Kalton 1985; Aliprantis, 1985, Sonuç 19.15].  $T$  operatörü M-zayıf kompakt ise zayıf kompakttır. Ayrıca, her sıra sınırlı aralık bir norm sınırlı küme olduğundan, her bir  $x \in E^+$  için  $T[0, x]$  relatif zayıf kompakttır. Yani  $T$  operatörü sıra zayıf kompakttır. Diğer taraftan  $T^2$  Dunford-Pettis operatörü relatif zayıf kompakt kümeleri norm total sınırlı kümelere dönüştürdüğünden  $T^2(T[0, x]) = T^3[0, x]$  norm total sınırlı bir küme olur [Aliprantis, 1985, Teorem 19.3]. Yani  $T^3$  operatörü AM-kompakttır. Ayrıca  $T$  operatörü M-zayıf kompakt olduğundan  $T^3$  operatörü de M-zayıf kompakttır. Dolayısıyla  $T^3$  hem AM-kompakt hem de M-zayıf kompakt olduğundan kompakt bir operatördür [Meyer, 1991, Önerme 3.7.4].

### 3.6. Teorem

$E$  Banach örgüsü ve  $T : E \rightarrow E$  pozitif  $L$ -zayıf kompakt operatör olsun. Eğer  $0 \leq T \leq S$  olacak biçimde bir  $S : E \rightarrow E$  Dunford-Pettis operatörü varsa  $T^4$  kompakttır.

*Kanıt:*

$S : E \rightarrow E$  bir Dunford-Pettis operatörü ve  $0 \leq T \leq S$  sağlandığından  $T^2 : E \rightarrow E$  operatörü de bir Dunford-Pettis operatörüdür [Kalton, 1985; Aliprantis, 1985, Sonuç 19.15].  $T$  operatörü  $L$ -zayıf kompakt olduğundan zayıf kompakttır, dolayısıyla sıra zayıf kompakttır. Yani her bir  $x \in E^+$  için  $T[0, x]$  relatif zayıf kompakttır.  $T^2$  Dunford-Pettis operatörü relatif zayıf kompakt kümeleri norm total sınırlı kümelere dönüştürdüğünden  $T^2(T[0, x]) = T^3[0, x]$  norm total sınırlı bir küme olur [Aliprantis, 1985, Teorem 19.3].  $T$  operatörü  $L$ -zayıf kompakt olduğundan her bir  $\varepsilon > 0$  için en az bir  $0 < x_\varepsilon \in E^+$  vardır ve  $T(U_E^+) \subseteq [0, x_\varepsilon] + \varepsilon U_E$  sağlanır. O halde,

$$T^4(U_E^+) = T^3(T(U_E^+)) \subseteq T^3[0, x_\varepsilon] + \varepsilon \|T\|^3 U_E$$

olur.  $\{\varepsilon \|T\|^3 U_E\}$  sıfırın bir komşuluklar tabanı olduğundan  $T^4(U_E^+)$  norm total sınırlıdır. Yani  $T^4$  operatörü kompakttır.

### 3.7. Teorem

$E$  ve  $F$  Banach örgüleri olsun.  $E$  uzayından  $F$  içine tanımlı her pozitif Dunford-Pettis operatörü  $L$ -zayıf kompakt ise aşağıdakilerden biri sağlanır.

- $E'$  dual uzayı sıra sürekli norma sahip diskret uzaydır.
- $E'$  ve  $F$  sıra sürekli norma sahiptir.

c)  $F$  sonlu boyutludur.

*Kanıt:*

$S, T : E \rightarrow F$  sınırlı operatörler için  $0 \leq S \leq T$  sağlansın ve  $T$  operatörü bir Dunford-Pettis operatörü olsun. O halde hipotezden  $T$  operatörü aynı zamanda  $L$ -zayıf kompakttır. Her  $L$ -zayıf kompakt operatör yarı kompakt olduğundan,  $E'$  sıra sürekli norma sahiptir [Aqzzouz, 2008, Sonuç 2.4]. O halde  $S$  operatörü de  $L$ -zayıf kompakttır ve  $E'$  sıra sürekli norma sahip olduğundan, Sonuç 3.2 gereği  $S$  operatörü kompakttır. O halde koşullardan biri sağlanır [Aqzzouz, 2006b, Teorem 2.12].

#### 4. L-ZAYIF ve M-ZAYIF KOMPAKT OPERATÖRLER İÇİN DEĞİŞMEZ ALT UZAY PROBLEMİ

Bilindiği üzere gerçel veya kompleks Banach uzayları üzerinde tanımlı bir kompakt operatör ile değişmeli her sınırlı operatör özdeş olmayan kapalı değişmez alt uzaya sahiptir [Aronszajn, Smith 1954 ; Lomonosov, 1973 ; Abramovich, 2002, Teorem 10.15]. Bu bölümde L-zayıf kompakt ve M-zayıf kompakt operatörlerin üzerinde tanımlandıkları Banach örgülerine göre, özdeş olmayan kapalı değişmez alt uzaylara sahip olduğu bazı durumları vereceğiz.

##### 4.1. Teorem

$E$  Banach örgüsü ve  $T : E \rightarrow E$  pozitif L-zayıf kompakt operatör olsun. Eğer  $E$  veya  $E'$  dual uzayı sıra sürekli norma sahipse  $T$  operatörü ile değişmeli her sınırlı operatör özdeş olmayan kapalı değişmez bir alt uzaya sahiptir.

*Kanıt:*

$S : E \rightarrow E$  sınırlı operatörü için  $ST = TS$  eşitliği sağlansın.  $E$  sıra sürekli norma sahip ise  $T^2$  operatörü Teorem 3.1 gereği kompakttır. Diğer taraftan  $ST^2 = T^2S$  sağlandığından  $S$  operatörü özdeş olmayan kapalı değişmez alt uzaya sahiptir [Aronszajn, Smith 1954 ; Lomonosov, 1973 ; Abramovich, 2002, Teorem 10.15]. Eğer  $E'$  sıra sürekli norma sahipse, Sonuç 3.2 gereği  $T$  operatörü kompakttır. Dolayısıyla  $S$  operatörü özdeş olmayan kapalı değişmez alt uzaya sahiptir [Aronszajn, Smith 1954 ; Lomonosov, 1973 ; Abramovich, 2002, Teorem 10.15].

##### 4.2. Teorem

$E$  Banach örgüsü ve  $T : E \rightarrow E$  pozitif M-zayıf kompakt operatör olsun. Eğer  $E$  veya  $E'$  sıra sürekli norma sahipse  $T$  operatörü ile değişmeli her sınırlı operatör özdeş olmayan kapalı değişmez bir alt uzaya sahiptir.

*Kanıt:*

$S: E \rightarrow E$  sınırlı operatörü için  $ST = TS$  eşitliği sağlansın.  $E'$  sıra sürekli norma sahip ise  $T^2$  operatörü Sonuç 3.3 gereği kompakttır. Diğer taraftan  $ST^2 = T^2S$  sağlandığından  $S$  operatörü özdeş olmayan kapalı değişmez alt uzaya sahiptir [Aronszajn, Smith 1954 ; Lomonosov, 1973 ; Abramovich, 2002, Teorem 10.15]. Eğer  $E$  sıra sürekli norma sahipse Teorem 3.2 gereği  $T$  operatörü kompakttır ve özdeş olmayan kapalı değişmez alt uzaya sahiptir [Aronszajn, Smith 1954 ; Lomonosov, 1973 ; Abramovich, 2002, Teorem 10.15].

#### 4.3. Teorem

$E$  sıra sürekli norma sahip olmayan Banach örgüsü ve  $T: E \rightarrow E$  skalar olmayan  $L$ -zayıf kompakt operatör olsun.  $T$  operatörü özdeş olmayan kapalı değişmez alt ideale sahiptir.

*Kanıt:*

$E$  Banach örgüsü sıra sürekli norma sahip olmasın. Dolayısıyla  $E^a := \{x \in E : (x_n) \subseteq [0, |x|], (x_n) \text{ monoton dizisi norm yakınsak} \}$  şeklinde tanımlı kapalı ideal için  $E^a \neq E$  olur.  $x \in E^a$  olsun.  $\|x\| \leq 1$  kabul edebiliriz.  $T$  operatörü  $L$ -zayıf kompakt ve  $E^a$ ,  $L$ -zayıf kompakt kümeleri içerdiğinden  $T(U_E) \subset E^a$  olur. O halde  $T(x) \in E^a$ , dolayısıyla  $T(E^a) \subseteq E^a$  olur. Yani  $E^a$ ,  $T$ -değişmezdir.

İddia ediyoruz ki  $E^a \neq \{\theta\}$ . Eğer  $E^a = \{\theta\}$  ise  $T(U_E) \subseteq E^a = \{\theta\}$ , dolayısıyla her  $x \in E$  için  $T(x) = \theta$  olacağından  $T = 0$  olur. Bu ise  $T$  operatörünün skalar olmamasına çelişkidir. O halde  $E^a$  özdeş olmayan kapalı  $T$ -değişmez idealdir.

#### 4.1. Tanım

$E$  Banach örgüsü ve  $T : E \rightarrow E$  sınırlı operatör olsun . Eğer  $p(T) : E \rightarrow E$   $L$ -zayıf kompakt operatör olacak şekilde bir  $p$  polinomu varsa  $T$  operatörüne *polinomsal  $L$ -zayıf kompakt operatör* denir.

Her bir  $L$ -zayıf kompakt operatörün polinomsal  $L$ -zayıf kompakt olduğu açıktır. Ancak tersi her zaman doğru değildir.

#### 4.1. Örnek

$$T : L^1[0,1] \rightarrow L^1[0,1] \quad , \quad Tf(x) := \begin{cases} 0 & \text{if } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ f\left(x - \frac{1}{2}\right) & \text{if } \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan operatör zayıf kompakt değildir. Dolayısıyla  $L$ -zayıf kompakt değildir. Fakat  $T^2 = 0$  sağlanır. Yani  $T$  polinomsal  $L$ -zayıf kompakttır.

Aşağıda verilen teoremin ispatı, Abramovich, Aliprantis, 2002, Sonuç 10.17 ispatına benzer biçimde yapılmıştır.

#### 4.4. Teorem

$E$  sıra sürekli norma sahip olmayan Banach örgüsü olsun. Eğer  $T : E \rightarrow E$  sınırlı operatörü polinomsal  $L$ -zayıf kompakt operatör ise,  $T$  özdeş olmayan kapalı değişmez alt uzaya sahiptir.

*Kanıt:*

Eğer  $T : E \rightarrow E$  polinomsal  $L$ -zayıf kompakt operatör ise  $1 \leq i \leq n$ ,  $a_i \in \mathbb{R}$  ve  $a_n \neq 0$

olmak üzere en az bir  $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$  polinomu vardır ve  $p(T): E \rightarrow E$  operatörü L-zayıf kompakttır. Diğer taraftan  $T: E \rightarrow E$  sınırlı operatör olacağından her bir  $k \in \mathbb{N}$  için  $p(T)T^k = T^k p(T)$  operatörü de L-zayıf kompakttır ve  $T^k p(T)(E^a) \subseteq E^a$  sağlanır.

Eğer  $p(T) = \theta$  ise  $a_0I + a_1T + \dots + a_nT^n = \theta$  olacağından  $1 \leq i \leq n$ ,  $b_i = \frac{-a_i}{a_n}$  olmak üzere  $T^n = b_0I + b_1T + \dots + b_{n-1}T^{n-1}$  olur.  $x \in E$  ve  $x \neq \theta$  olsun. Bu durumda,  $V = \text{sp}\{x, Tx, \dots, T^{n-1}x\}$  alt uzayı için  $V \neq \{\theta\}$ ,  $V \neq E$  ve  $T(V) \subseteq V$  özellikleri sağlanır.

Kabul edelim ki  $p(T)|_{E^a} \neq \theta$  olsun. O halde en az bir  $x_0 \in E^a$  için  $p(T)(x_0) \neq \theta$  olur. Yani her bir  $k \in \mathbb{N}$  için  $T^k p(T)(x_0) \in E^a$ . ....(1)

$$V = \text{Sp}\{p(T)(x_0), Tp(T)(x_0), T^2p(T)(x_0), \dots, T^k p(T)(x_0), \dots\}$$

kümesi için (1) gereği  $\bar{V} \subseteq E^a$  sağlanır. E sıra sürekli norma sahip olmadığından  $E^a \neq E$ , dolayısıyla  $\bar{V} \neq E$ . Aynı zamanda  $\bar{V} \neq \{\theta\}$  ve  $T(\bar{V}) \subseteq \bar{V}$  sağlanır.

O halde sıra sürekli norma sahip olmayan Banach örgüsü üzerinde tanımlı her polinomsal L-zayıf kompakt operatör özdeş olmayan kapalı değişmez alt uzaya sahiptir. Sıra sürekli norma sahip olmayan Banach örgüleri üzerinde tanımlı L-zayıf kompakt operatörlerin ortak bir değişmez ideale sahip olmalarından dolayı, sıra sürekli norma sahip olmayan Banach örgüleri üzerinde tanımlı regüler operatörler için aşağıdaki teoremi verebiliriz.

#### 4.5. Teorem

$E$  sıra sürekli norma sahip olmayan bir Banach örgüsü,  $E^a \neq \{0\}$  ve  $T: E \rightarrow E$  skalar olmayan bir regüler operatör olsun. Eğer en az bir  $n \in \mathbb{N}^+$  için  $T^n: E \rightarrow E$  operatörü L-zayıf kompakt ve en az bir  $x_0 \in E^a$ ,  $x_0 > 0$  için  $T^n x_0 \neq 0$  ise  $E$  üzerinde tanımlı her regüler operatör özdeş olmayan kapalı değişmez alt ideale sahiptir.

*Kanıt:*

En az bir  $n \in \mathbb{N}^+$  için  $T^n: E \rightarrow E$  L-zayıf kompakt operatör ve  $S: E \rightarrow E$  regüler operatör olsun. L-zayıf kompakt operatörler  $L^1(E)$  içinde çift taraflı idealdir [Meyer, 1991, Önerme 3.6.16]. O halde her bir  $m \in \mathbb{N}^+$  için  $S^m T^n: E \rightarrow E$  operatörü L-zayıf kompakt operatördür. Diğer taraftan  $E^a$  kapalı ideali her L-zayıf kompakt operatör için değişmez kalacağından en az bir  $x_0 \in E^a$ ,  $x_0 > 0$  ve her bir  $m \in \mathbb{N}^+$  için  $S^m T^n(x_0) \in E^a$  olur. O halde  $\{T^n x_0, S T^n x_0, S^2 T^n x_0, \dots, S^n T^n x_0, \dots\}$  kümesi ile üretilen kapalı ideal  $W$  ise  $S(W) \subseteq W$  sağlanır. Her bir  $m \in \mathbb{N}^+$  için  $S^m T^n(x_0) \in E^a$  olduğundan  $W \subseteq E^a$  'dır ve  $E$  sıra sürekli norma sahip değil ise  $E^a \neq E$  olacağından  $W \neq E$  çıkar. Diğer taraftan  $T^n x_0 \in W$  ise  $W \neq \{\theta\}$  olur. Yani  $W$  özdeş olmayan kapalı S-değişmez alt idealdir.

O halde Teorem 4.5 yardımıyla bir Banach örgüsü üzerinde tanımlı her regüler operatörün özdeş olmayan kapalı değişmez alt ideale sahip olduğu bir örneği aşağıdaki şekilde verelim.

#### 4.2. Örnek

$c(L^2[0,1])$  uzayı sıra sürekli norma sahip değildir [Abramovich, 1992]. Ancak  $c_0(L^2[0,1])$  uzayı sıra sürekli norma sahip olduğundan,

$$\{c_0(L^2[0,1])\}^a = c_0(L^2[0,1]) \subset c(L^2[0,1])$$

sağlanır. Dolayısıyla  $\{c(L^2[0,1])\}^a \neq \{\theta\}$  olur. Diğer taraftan  $E = c(L^2[0,1])$  Banach örgüsü üzerinde  $S: L^2[0,1] \rightarrow c(L^2[0,1])$  L-zayıf kompakt operatör tanımlanabilir [Chen, 1999, Teorem 2.2]. Ayrıca,

$$\Pi: c(L^2[0,1]) \rightarrow L^2[0,1], \quad \Pi((f_n)_{n=1}^{\infty}) = f_1$$

şeklinde tanımlı operatör sınırlı olduğundan,  $T = S \circ \Pi$  operatörü L-zayıf kompakttır [Meyer, 1991, Önerme 3.6.16]. O halde  $c(L^2[0,1])$  üzerinde tanımlı her bir regüler operatör özdeş olmayan kapalı bir alt ideale sahiptir.

#### 4.2. Tanım

E bir Banach örgüsü ve  $A \subseteq E'$  için

$${}^\circ A = \{x \in E : \forall x' \in A \text{ için } |x'(x)| \leq 1\}$$

şeklinde tanımlı konveks, dengeli ve  $\sigma(E, E')$ -kapalı olan E'nin alt kümesine A kümesinin *ön poları* adı verilir. Eğer  $A \subseteq E'$  bir alt ideal ise ön polar da idealdir ve

$${}^\circ A = \{x \in E : \forall x' \in A \text{ için } x'(x) = 0\}$$

olur.

#### 4.6. Teorem

E Banach örgüsü olmak üzere, E' dual uzayı sıra sürekli norma sahip değil ve

$T : E \rightarrow E$  skalar olmayan pozitif M-zayıf kompakt operatör olsun. Eğer,

$$(E')^a = \{ f \in E : \forall (f_n) \subset [0, |f|] \text{ monoton dizisi norm yakınsak} \}$$

norm kapalı ideali için  ${}^\circ(E')^a = \{ x \in E : \forall f \in (E')^a \text{ için } f(x) = 0 \} \neq \{0\}$  ise  $E$  üzerinde tanımlı her  $S : E \rightarrow E$  birebir pozitif operatör özdeş olmayan kapalı değişmez ideale sahiptir.

*Kanıt:*

$E'$  sıra sürekli norma sahip değilse  $(E')^a \neq E$  olur.  $(E')^a$  tüm L-zayıf kompakt kümeleri kapsadığından  $T'(U_{E'}) \subseteq (E')^a$  olur. Dolayısıyla  $T'(E') \subseteq (E')^a$  olur.  $(E')^a$  ideal olduğundan da

$${}^\circ(E')^a = \{ x \in E : \forall f \in (E')^a \text{ için } f(x) = 0 \}$$

kümesi  $E$  içinde bir idealdir [Aliprantis, 1985, Teorem 11.13].

$x \in {}^\circ(E')^a$  olsun. Her bir  $0 \leq f \in U_{E'}$  için  $T'f \in (E')^a$  sağlandığından  $f(Tx) = T'f(x) = 0$  olur. Yani her  $x \in {}^\circ(E')^a$  için  $Tx = 0$  olur. O halde  ${}^\circ(E')^a$ ,  $T$  operatörü için değişmez idealdir.

Eğer  ${}^\circ(E')^a = E$  ise  $(E')^a \subseteq ({}^\circ(E')^a)^\circ = E^\circ = \{0\}$  kapsamından  $(E')^a = \{0\}$  olur. Fakat  $T'(U_{E'}) \subseteq (E')^a$  olduğundan  $T' = 0$ , dolayısıyla  $T = 0$  olur. O halde  $(E')^a \neq E'$ . Hipotezimiz gereği  ${}^\circ(E')^a \neq \{0\}$  olduğundan  ${}^\circ(E')^a$  ideali özdeş

olmayan kapalı T-değişmezdir. Aslında  ${}^\circ(E')^a$ , E üzerinde tanımlı her M-zayıf kompakt operatör için ortak değişmez ideal olur.

Hipotezimiz gereği ez az bir  $x_0 \in (E')^a$ ,  $x_0 \neq 0$  elemanı vardır.  $S: E \rightarrow E$  birebir operatör olduğundan her bir  $k \in \mathbb{N}$  için  $S^k x_0 \neq 0$  olur.  $W, \{x_0, Sx_0, S^2x_0, \dots\}$  kümesi ile üretilen ideal ise  $\overline{W}$  'de idealdir ve S-değişmezdir. Yani  $S(\overline{W}) \subseteq \overline{W}$  olur. Diğer taraftan her bir  $k \in \mathbb{N}$  için  $TS^k: E \rightarrow E$  operatörü M-zayıf kompakttır [Meyer, 1991, Önerme 3.6.16]. O halde her bir  $k \in \mathbb{N}$  için  $TS^k x_0 = 0$  olur.  $T' \neq 0$  ise en az bir  $f \in (E')^+$  vardır ve  $T'f \neq 0$  'dır. Her bir  $k \in \mathbb{N}$  için  $T'f(S^k x_0) = f(TS^k x_0) = f(0) = 0$  ise  $T'f$  pozitif doğrusal fonksiyoneli  $\overline{W}$  üzerinde sıfırdır. Yani  $\overline{W} \neq E$  olur. Dolayısıyla  $\overline{W}$  özdeş olmayan kapalı S-değişmez idealdir.

#### 4.1. Sonuç

E Banach örgüsü olmak üzere,  $E'$  sıra sürekli norma sahip değil ve  $T: E \rightarrow E$  skalar olmayan pozitif M-zayıf kompakt operatör olsun.  $(E')^a \subseteq E_n^\sim$  ve  $(E')^a$ ,  $E_n^\sim$  içinde sıra yoğun değilse E üzerinde tanımlı her pozitif operatör özdeş olmayan kapalı değişmez ideale sahiptir.

*Kanıt:*

$(E')^a \subseteq E_n^\sim$  ve  $(E')^a$  sıra yoğun ideal değilse  ${}^\circ(E')^a \neq \{0\}$  olur [Zaanen, 1983, Sonuç 105.12]. O halde Teorem 4.5 'in hipotezleri sağlanır.

#### 4.2. Sonuç

E sıra sürekli norma sahip Banach örgüsü,  $E'$  sıra sürekli norma sahip değil ve

$T : E \rightarrow E$  skalar olmayan pozitif M-zayıf kompakt operatör olsun. Eğer  $(E')^a$ ,  $E'$  içinde sıra yoğun ideal değilse  $E$  üzerinde tanımlı her sınırlı operatör özdeş olmayan kapalı değişmez alt ideale sahiptir.

*Kanıt:*

$E$  sıra sürekli norma sahip ise  $E' = E_n^\sim$  olur. Yani Sonuç 4.1 'in hipotezleri sağlanır.

Örnek olarak  $E = L_1[0,1] \oplus c_0$  Banach örgüsü sıra sürekli norma sahiptir. Diğer taraftan  $E' = L_\infty[0,1] \oplus \ell_1$  ve  $(E')^a = \ell_1$  olur.  $(E')^a$ ,  $E'$  içinde sıra yoğun değildir [Wnuk, W., 1984]. Yukarıdaki teorem ve sonuçlar Read operatörü için bir çelişki yaratmaz. Çünkü  $(\ell_1')^a = c_0$  ideali  $(\ell_1') = \ell_\infty$  içinde sıra yoğundur [Zaanen, 1983, Sayfa 433].

#### 4.7. Teorem

$E$  Banach örgüsü ve  $T : E \rightarrow E$  skalar olmayan, regüler M-zayıf kompakt operatör olsun.  $\mu$  atomsuz ölçü olmak üzere  $L_1(\mu)$  uzayına örgü izomorfik olacak şekilde  $E'$  nin kapalı bir alt örgüsü bulunabiliyorsa her  $S : E \rightarrow E$  sınırlı regüler operatör özdeş olmayan kapalı değişmez alt uzaya sahiptir.

*Kanıt:*

Kabul edelim ki  $\mu$  atomsuz ölçü olmak üzere  $W \cong L^1(\mu)$  olacak şekilde  $W \subset E$  kapalı alt örgüsü bulunsun.  $T : E \rightarrow E$  pozitif M-zayıf kompakt operatör ise  $W$  alt uzayına kısıtlanmış  $T|_W : W \cong L_1(\mu) \rightarrow E$  operatörü de M-zayıf kompakttır.

$(W')^a \cong (L_\infty(\mu))^a$  tüm L-zayıf kompakt kümeleri kapsadığından

$$T|_{W'}' (U_{E'}) \subseteq (W')^a = (L^\infty(\mu))^a = \{\theta\}$$

olur [Zaanen, 1983, Sayfa 318]. O halde  $T|_{W'}' = \theta$ , dolayısıyla  $T$  operatörü  $W$  üzerinde 0 operatörü olur. Yani  $T(W) \subseteq W'$  'dir.

$S: E \rightarrow E$  sınırlı regüler operatör olsun. Her bir  $k=1,2,\dots$  için  $TS^k: E \rightarrow E$  operatörü de  $M$ -zayıf kompakt operatördür [Meyer, 1991, Önerme 3.6.16]. Dolayısıyla benzer işlemlerle her bir  $x \in W$  için  $TS^k(x) = 0$  olduğu görülür.  $T' \neq 0$  ise en az bir  $f \in E'_+$ ,  $f \neq 0$  elemanı için  $T'f \neq 0$  olur.  $x_0 \in W$ ,  $x_0 \neq 0$  elemanı için  $T'f(S^k x_0) = f(TS^k x_0) = f(0) = 0$  olur. O halde  $\{x_0, Sx_0, S^2x_0, \dots\}$  kümesi ile üretilen alt ideal  $V$  ise  $S(\bar{V}) \subseteq \bar{V}$  sağlanır. Ayrıca her  $y \in \bar{V}$  için  $T'f(y) = 0$  olur. Yani  $\bar{V} \neq E'$  'dir. Diğer taraftan  $x_0 \in W$ ,  $x_0 \neq 0$  ise  $\bar{V} \neq \{0\}$  'dir. Dolayısıyla  $\bar{V}$  özdeş olmayan kapalı  $S$ -değişmez alt idealdir.

4.7. Teorem 'de ki hipotezlere sahip olan Banach örgülerine örnek olarak diskret olmayan AL-uzaylarını verebiliriz.

4.8. Teorem

$E$  Banach örgüsü ve  $T: E \rightarrow E$  pozitif, skalar olmayan, birebir,  $L$ -zayıf kompakt operatör olsun.  $\mu$  atomsuz ölçü olmak üzere  $L_1(\mu)$  uzayına örgü izomorfik olacak şekilde  $E'$  dual uzayının kapalı bir alt örgüsü bulunabiliyorsa her  $S: E \rightarrow E$  pozitif birebir operatör özdeş olmayan kapalı değişmez alt ideale sahiptir.

*Kanıt:*

Kabul edelim ki  $\mu$  atomsuz ölçüsü için  $W' \cong L^1(\mu)$  olacak şekilde  $W' \subset E'$  kapalı

alt örgüsü bulunsun.  $T : E \rightarrow E$  operatörü L-zayıf kompakt ise  $T' : E' \rightarrow E'$  operatörü M-zayıf kompakttır ve  $W'$  alt uzayına kısıtlanmış  $T'|_{W'} : W' \cong L_1(\mu) \rightarrow E'$  operatörü de M-zayıf kompakttır.  $\left((W')'\right)^a \cong (L_\infty(\mu))^a$  tüm L-zayıf kompakt kümeleri kapsadığından ve  $(T'|_W)'$  L-zayıf kompakt olduğundan

$$(T'|_W)'(U_{E''}) \subseteq \left((W')'\right)^a = (L_\infty(\mu))^a = \{\theta\}$$

olur. O halde  $(T'|_W)' = \theta$ , dolayısıyla  $T'$  operatörü  $W'$  üzerinde 0 operatörü olur.

$f_0 \in (W')^+, f_0 \neq 0$  ise en az bir  $x_0 \in E^+, x_0 \neq 0$  için  $f_0(x_0) \neq 0$  'dır.  $T$  ve  $S$  operatörleri birebir olduğundan her bir  $k \in \mathbb{N}$  için  $S^k T x_0 \neq 0$  olur.  $V$  ile  $\{T x_0, S T x_0, S^2 T x_0, \dots\}$  kümesi ile üretilen ideali tanımlayalım. Diğer taraftan her bir  $k \in \mathbb{N}$  için  $S^k T : E \rightarrow E$  operatörü L-zayıf kompakttır [Meyer, 1991, Önerme 3.6.16]. O halde benzer işlemlerle  $f_0 \in (W')^+, f_0 \neq 0$  her bir  $k \in \mathbb{N}$  için  $S^k T(f_0) = 0$  olur. Dolayısıyla  $\langle S^k T x_0, f_0 \rangle = \langle x_0, T'(S')^k f_0 \rangle = \langle x_0, 0 \rangle = 0$  olur. Yani her  $y \in \bar{V}$  için  $f_0(y) = 0$  olacağından  $\bar{V} \neq E$  sağlanır. Dolayısıyla  $V$  özdeş olmayan kapalı S-değişmez idealdir.

### 4.3. Örnek

$E = \ell_\infty / c_0$  bölüm uzayı  $\sigma$ -sıra sürekli norma sahiptir. Diğer taraftan Banach uzayı olarak  $\ell_1 \subset E$  olmasına rağmen,  $\beta\mathbb{N}$  Stone-Cech kompaktlaştırması olmak üzere  $E$  uzayı  $C(\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N})$  Banach örgüsüne sıra izometrik olduğundan,  $\ell_1$  uzayına örgü izomorf bir alt uzay içermez [Wojtowicz, 2001]. Dolayısıyla  $E', c_0$  'a örgü izomorf

hiçbir alt uzay içermez [Meyer, 1991, Teorem 2.4.14]. Banach uzayı olarak  $\ell_1 \subset E$  olmasından  $E'$  Radon-Nikodym özelliğine sahip değildir [Diestel, 1977]. Dolayısıyla  $L_1[0,1]$  uzayına örgü izomorfik olacak şekilde  $E'$  dual uzayının kapalı bir alt örgüsü vardır.

#### 4.9. Teorem

$E$  bir Banach örgüsü ve  $T: E \rightarrow E$  pozitif  $M$ -zayıf kompakt operatör olsun. Eğer  $0 \leq T \leq S$  olacak biçimde bir  $S: E \rightarrow E$  Dunford-Pettis operatörü varsa  $T$  operatörü ile değişmeli her sınırlı operatör özdeş olmayan kapalı değişmez alt uzaya sahiptir.

*Kanıt:*

$R: E \rightarrow E$  sınırlı operatörü  $RT = TR$  koşulunu sağlasın.  $S: E \rightarrow E$  bir Dunford-Pettis operatörü ve  $0 \leq T \leq S$  ise Teorem 3.5 gereği  $T^3$  kompakttır. Diğer taraftan  $RT^3 = T^3R$  sağlandığından  $R$  operatörü özdeş olmayan kapalı değişmez alt uzaya sahiptir [Aronszajn, Smith 1954; Lomonosov, 1973; Abramovich, 2002, Teorem 10.15]. Genel olarak her bir  $n \in \mathbb{N}^+$  için  $T^n: E \rightarrow E$  operatörleri ortak, özdeş olmayan kapalı değişmez alt uzaya sahiptir.

#### 4.10. Teorem

$E$  Banach örgüsü ve  $T: E \rightarrow E$  pozitif  $L$ -zayıf kompakt operatör olsun. Eğer  $0 \leq T \leq S$  olacak biçimde bir  $S: E \rightarrow E$  Dunford-Pettis operatörü varsa  $T$  operatörü ile değişmeli her sınırlı operatör özdeş olmayan kapalı değişmez alt uzaya sahiptir.

*Kanıt:*

$R: E \rightarrow E$  sınırlı operatörü  $RT = TR$  koşulunu sağlasın.  $S: E \rightarrow E$  bir Dunford-Pettis operatörü ve  $0 \leq T \leq S$  ise Teorem 3.6 gereği  $T^4$  kompakttır. Diğer taraftan

$RT^4 = T^4R$  sağlandığından  $R$  operatörü özdeş olmayan kapalı değişmez alt uzaya sahiptir [Aronszajn, Smith 1954; Lomonosov, 1973; Abramovich, 2002, Teorem 10.15]. Genel olarak her bir  $n \in \mathbb{N}^+$  için  $T^n : E \rightarrow E$  operatörleri ortak, özdeş olmayan kapalı değişmez alt uzaya sahiptir.

## 5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, L-zayıf kompakt ve M-zayıf kompakt operatörlerin bazı durumlarda özdeş olmayan kapalı değişmez alt uzaya sahip olduğu gösterilmiştir. İlk önce bu operatör sınıflarının kompakt olduğu durumlar göz önüne alınmıştır. AM-uzay veya AL-uzaylar arasında tanımlı L-zayıf ve M-zayıf kompakt operatörlerin kompaktlığı bilinmektedir [Chen, 1999]. Ayrıca L-zayıf ve M-zayıf kompakt operatörler yarı kompakt operatörlerin bir alt sınıfıdır ve yarı kompakt operatörlerin kompakt olduğu bazı durumlar da bilinmektedir [Aqzzouz, 2006a]. Bilinen durumlardan farklı olarak verdiğimiz sonuçlarda, L-zayıf veya M-zayıf kompakt operatörlerin kompakt olması için üzerinde tanımlandığı Banach örgülerinin veya onların dual uzaylarının sıra sürekli norma sahip olmasının yeterli olduğu gösterilmiştir. Ayrıca, bu sonuçlar yardımıyla dual uzayı sıra sürekli norma sahip Banach örgüsünden bir AL-uzayına tanımlı tüm pozitif operatörlerin kompakt olduğu sonucuna varılmıştır. Böylece kendisi veya dual uzayı sıra sürekli norma sahip bir Banach uzayı üzerinde tanımlı M-zayıf kompakt veya L-zayıf kompakt operatörlerinin özdeş olmayan kapalı değişmez alt uzaya sahip olduğu gözlenmiştir. Diğer taraftan, sıra sürekli norma sahip olmayan Banach örgüleri üzerinde tanımlı L-zayıf kompakt operatörler özdeş olmayan kapalı değişmez alt ideale sahiptir ve bunun sonucu olarak, sıra sürekli norma sahip olmayan Banach örgüsü üzerinde skalar olmayan bir L-zayıf kompakt operatör tanımlı ise bu Banach örgüsü üzerinde tanımlı her regüler operatör de özdeş olmayan kapalı değişmez alt ideale sahiptir. Bunun yanında, dual uzayı sıra sürekli norma sahip olmayan Banach örgüleri üzerinde tanımlı M-zayıf kompakt operatörlerin bazı koşullar altında özdeş olmayan kapalı değişmez alt ideale sahip olduğu görüldü. Bu koşullar dışında M-zayıf kompakt operatörlerin özdeş olmayan kapalı değişmez alt ideale sahip olup olmadığı henüz açık problem olarak durmaktadır.

## KAYNAKLAR

1. Abramovich, Y.A., Aliprantis, C.D., An Invitation to Operator Theory, *American Mathematical Society Graduate Studies in Mathematics*, Volume 50, (2002).
2. Abramovich, Y.A., Aliprantis, C.D., Problems in Operator Theory, Graduate Texts in Math, Vol.51, *American Math. Soc.*, Providence,R.I., (2002).
3. Abramovich, Y.A., Aliprantis, C.D., Burkinshaw O., Invariant subspaces of operators on  $\ell_p$ -spaces, *J. Funct. Anal.*, 115(2): 418–424, (1993).
4. Abramovich, Y.A., Aliprantis, C.D., Burkinshaw O., Invariant subspace theorems for positive operators, *J. Funct. Anal.*, 124(1): 95–111, (1994).
5. Abramovich, Y.A.; Aliprantis, C.D., Burkinshaw, O., The invariant subspace problem: some recent advances, *Rend. Ins. Mat. Univ. Trieste*, 29: 3-79, (1998).
6. Abramovich, Y.A., Aliprantis, C.D., Burkinshaw O., The invariant subspace problem: Some recent advances, *Rend. Inst. Mat. Univ. Trieste*, XXIX Supplemento, 3–79, (1998).
7. Abramovich, Y.A., Wickstead, A.W., A compact regular operator without modulus, *Proc. Amer.Math. Soc.*, 116 (3): 721-726, (1992).
8. Aliprantis, C.D.; Burkinshaw, O., Locally Solid Riesz Spaces, *Academic Pres*, New-York-London, (1978).
9. Aliprantis, C.D., Burkinshaw, O., Positive Operators, *Academic press*, London, (1985).
10. Aqzzouz, B., Nouira, R.; Zraoula, L., Compactness of positive semi-compact operators on Banach lattices, *Rendiconti Del Circolo Matematico De Palermo*, Serie II, 305-313, (2006a).
11. Aqzzouz, B., Nouira, R.; Zraoula, L., About positive Duford-Pettis operators on Banach lattices, *Journal Of Math. Analysis And Appl.*, 324: 49-59, (2006b).
12. Aqzzouz, B., Nouira, R.; Zraoula, L., Compactness properties of operators dominated by AM-compact operators, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 135: 1151-1157, (2007).
13. Aqzzouz, B., Nouira, R.; Zraoula, L., Semi-Compactness of positive Dunford-Pettis operators on Banach lattices, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 136: 1997-2006, (2008).

14. Aronszajn, N., Smith, K.T., Invariant subspaces of completely continuous operators, *Ann. Of Math.*, 60: 345-350, (1954).
15. Bernstein, A.R., Robinson, A., Solution of an invariant subspace problem of K.T. Smith and P.R. Halmos, *Pacific J. Math.*, 16: 421-431, (1966).
16. Chen, Z.L., Wickstead, A.W., L-weakly and M-weakly compact operators, *Indag. Math.*, 10: 321-336, (1999).
17. Chen, Z.L., Wickstead, A.W., Vector lattices of weakly compact operators on Banach lattices, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 352(1): 397-412, (1999).
18. Diestel, J.J., Uhl, Jr., Vector Measures, *American Math. Soc.*, 15, (1977).
19. Dodds, P.G., o-weakly compact mappings of Riesz spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 214: 389-402, (1975).
20. Dodds, P.G., Fremlin, D.H., Compact operators in Banach lattices, *Israel Journal of Mathematics*, 34(4): 287-320, (1979).
21. Dunford, N.; Pettis, P.J., Linear operations on summable functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 47: 323-392, (1940).
22. Enflo, P., On the invariant subspace problem for Banach spaces, *Acta Math.*, 158: 213-313, (1987).
23. Grothendieck, A., Sur les applications lineaires faiblement compactes d'espaces du type C(K), *Canad. J. Math.*, 5:129-173, MR 15, 438, (1953).
24. Lindenstrauss, J., Tzaferi, L., Classical Banach Spaces II ( Function Spaces ), *Springer-Verlag*, Berlin and New York, (1979).
25. Lomonosov, V.I., Invariant subspaces of the family of operators that commute with a completely continuous operator, *Funktsional. Anal. i Prilozhen*, 7(3): 55-56, (1973).
26. Meyer, P., Nieberg, Über klassen schwach kompakter operatoren in Banachverbänden, *Math. Z.*, 138: 145-159, (1974)
27. Meyer, P., Nieberg, , Banach Lattices, *Springer-Verlag*, Heidelberg, (1991).
28. Radjavi, H.; Rosenthal, P., Invariant Subspaces, 2<sup>nd</sup> Edition, *Dover, Mineola*, New York, (2003).
29. Read, C.J., A solution to the invariant subspace problem on the space  $\ell_1$ , *Bull. London Math. Soc.*, 17: 305-317, (1985).

30. Sanchez, J.A., The positive Shur property in Banach lattices, *Extracta Math.*, 7(2-3): 161-163, (1992).
31. Schaefer, H.H., Banach Lattices and Positive Operators, *Springer-Verlag*, Berlin, New York, (1974).
32. Wnuk, W., On the order-topological properties of the quotient space  $L/L_A$ , *Studia Math.*, 79: 139-149, (1984).
33. Wnuk, W., A Characterization of discrete Banach lattices with order continuous norms, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 104: 197-200, (1988).
34. Wojtowicz, M., The lattice copies of  $\ell_1$  in Banach lattice, *Comment. Math. Univ. Carolinae*, 42(4): 649-653, (2001).
35. Zaanen, A.C., Riesz Spaces II, *North-Holland Publ. Comp.*, Amsterdam, (1983).

## ÖZGEÇMİŞ

### Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : BAYRAM, Erdal  
Uyruğu : T.C.  
Doğum tarihi ve yeri : 22.05.1975 Ankara  
Medeni hali : Bekar  
Telefon : 0 (312) 2502575  
e-mail : [bayramer@gmail.com](mailto:bayramer@gmail.com)

### Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Yüksek lisans	Gazi Üniversitesi /Matematik Bölümü	2002
Lisans	Erciyes Üniversitesi/Yozgat Fen Ed. Fak. Matematik Bölümü	1999
Lise	Ankara Yapı Meslek Lisesi	1992

### İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2000-2009	Milli Eğitim Bakanlığı	Öğretmen

### Yabancı Dil

İngilizce