

**TRANSPORT DENKLEMİ İÇİN ÜÇ BOYUTLU
TERS PROBLEM**

Fatma ÇİÇEK UZUN

**Zonguldak Karaelmas Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalında
Yüksek Lisans Tezi
Olarak Hazırlanmıştır**

**ZONGULDAK
Ocak 2009**

KABUL:

Fatma ÇİÇEK UZUN tarafından hazırlanan "TRANSPORT DENKLEMİ İÇİN ÜÇ BOYUTLU TERS PROBLEM" başlıklı bu çalışma jürimiz tarafından değerlendirilerek, Zonguldak Karaelmas Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak oybirliğiyle kabul edilmiştir. 23/01/2009

Başkan: Prof. Dr. Arif AMİROV (ZKÜ)



Üye : Yrd. Doç. Dr. Halit TAŞKIN (ZKÜ)



Üye : Yrd. Doç. Dr. Sedat ÇEVİKEL (ZKÜ)



ONAY:

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım./....../2009



Prof. Dr. Kemal BÜYÜKGÜZEL

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

“Bu tezdeki tüm bilgilerin akademik kurallara ve etik ilkelere uygun olarak elde edildiğini ve sunulduğunu; ayrıca bu kuralların ve ilkelerin gerektirdiği şekilde, bu çalışmadan kaynaklanmayan bütün atıfları yaptığımı beyan ederim.”



Fatma ÇİÇEK UZUN

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

TRANSPORT DENKLEMİ İÇİN ÜÇ BOYUTLU TERS PROBLEM

Fatma ÇİÇEK UZUN

Zonguldak Karaelmas Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof.Dr. Arif AMİROV

Ocak 2009, 41 sayfa

Bu tez iki bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde gerekli temel tanım ve teoremler, Hadamard ve Tikhonov anlamında iyi ve kötü konulmuş problemler, integral geometri problemleri ve Radon problemi hakkında bilgi verilmiştir. İkinci bölümde ise Transport Denklemi için üç boyutlu ters problemin varlığı, tekliği ve kararlılığı incelenmiştir.

Anahtar Sözcükler: Ters Problem, İntegral Geometri Problemleri, Radon Problemi, Hadamard ve Tikhonov anlamında iyi ve kötü konulmuş problem.

Bilim Kodu: 403.06.00

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

THREE-DIMENSIONAL INVERSE PROBLEM FOR THE TRANSPORT EQUATION

Fatma ÇİÇEK UZUN

**Zonguldak Karaelmas University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics**

**Thesis Advisor: Prof. Arif AMİROV
January 2009, 41 pages**

This Thesis consists of two sections. In the first section, some essential definitions and theorems, information about a well posedness of a problem in Hadamard and Tikhonov sense, the problem of integral geometry and Radon problem are given. In the second section, existence, uniqueness and stability of solution of the three dimensional inverse problem for Transport equation are shown.

Key Words: Inverse Problem, The Problem of Integral Geometry, Radon Problem, Well-posed and ill-posed Hadamard and Tikhonov sense

Science Code: 403.06.00

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım esnasında bana değerli vaktini ayıran ve tüm çalışmalarımı titizlikle inceleyen sayın danışmanım Prof. Dr. Arif AMİROV' a(ZKÜ), hep yanımda olup beni destekleyen sevgili eşim Hakan UZUN' a, kızım Sena UZUN' a ve yardımlarını esirgemeyen Öğr. Gör. Fikret GÖLGELEYEN' e(ZKÜ) ve Arş. Gör. Zekeriya USTAOĞLU' na(ZKÜ) teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
KABUL.....	ii
ÖZET.....	iii
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR.....	vii
İÇİNDEKİLER.....	ix
 BÖLÜM 1 TEMEL TANIM VE TEOREMLER.....	1
1.1 HADAMARD ANLAMINDA İYİ VE KÖTÜ KONULMUŞ PROBLEMLER.....	4
1.2 TIKHONOV ANLAMINDA İYİ VE KÖTÜ KONULMUŞ PROBLEMLER.....	5
1.3 İNTEGRAL GEOMETRİ PROBLEMLERİ.....	11
1.4 RADON PROBLEMİ.....	11
 BÖLÜM 2 TRANSPORT DENKLEMİ İÇİN ÜÇ BOYUTLU TERS PROBLEM.....	13
 KAYNAKLAR.....	39
ÖZGEÇMİŞ.....	41

BÖLÜM 1

TEMEL TANIMLAR

Bu bölümde, problemin çözümünün incelenmesinde gerekli bazı tanım ve teoremler verilmiştir.

Tanım 1.1 (Metrik): Boş olmayan bir X kümesi ve bir $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \rightarrow d(x, y)$ dönüşümü verilsin. Eğer bu d dönüşümü $\forall x, y, z \in X$ için

$$(M1) \quad d(x, y) \geq 0$$

$$(M2) \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$(M3) \quad d(x, y) = d(y, x)$$

$$(M4) \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad (\text{Üçgen Eşitsizliği})$$

özelliklerini sağlıyorsa X üzerinde metrik adını alır, (X, d) ikilisine metrik uzay denir.

Tanım 1.2 (Norm): Bir X vektör uzayı üzerinde tanımlı olup, bir $x \in X$ noktasındaki değeri $\|x\|$ ile gösterilen, x ve y X 'de keyfî vektörler ve α bir skaler olmak üzere aşağıdaki özellikleri gerçekleyen reel-değerli bir fonksiyona norm denir:

$$(N1) \quad \|x\| \geq 0$$

$$(N2) \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$(N3) \quad \|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$$

$$(N4) \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad (\text{Üçgen Eşitsizliği})$$

X üzerindeki bir norm, X üzerinde $d(x, y) = \|x - y\|$ ($x, y \in X$) ile verilen bir d metriği tanımlar, bu metrik norm tarafından üretilen metrik olarak adlandırılır. Üzerinde bir norm

tanımlanmış bir X vektör uzayına bir normlu uzay adı verilir. Normlu uzaylar $(X, \|\cdot\|)$ ya da kısaca X ile gösterilir.

Tanım 1.3 (Cauchy Dizisi): (X, d) bir metrik uzay ve (x_n) X 'in içinde bir dizi olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $m, n > N(\varepsilon)$ olduğunda $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ olacak şekilde ε 'na bağlı bir $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ varsa (x_n) dizisine X içinde bir Cauchy dizisi denir.

Tanım 1.4 (Tam Uzay): Bir X metrik uzayında her Cauchy dizisi, X içinde bir limite yakınsıyorsa X 'e tam uzay denir.

Tanım 1.5 (Banach Uzayı): Normlu ve bu norma göre tam olan lineer vektör uzayına Banach uzayı denir.

Tanım 1.6 (İç Çarpım): X , bir K cismi üzerinde vektör uzayı olsun. $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow K$ 'ya bir dönüşüm olsun. X 'in her x ve y vektör çiftini $\langle x, y \rangle$ ile gösterilen ve aşağıdaki özellikleri gerçekleyen bir skalerle eşlemeye iç çarpım denir ve $\langle x, y \rangle \in K$ ya da x ile y nin iç çarpımı denir.

$$(I1) \quad \langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$$

$$(I2) \quad \langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$$

$$(I3) \quad \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$$

$$(I4) \quad \langle x, x \rangle \geq 0, \quad \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

X üzerinde tanımlanan bir iç çarpım, X üzerinde $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ ile verilen bir norm tanımlar.

Tanım 1.7 (Hilbert Uzayı): Üzerindeki iç çarpımla tanımlı metriğe göre tam olan bir iç çarpım uzayına Hilbert Uzayı denir.

Tanım 1.8 (Tam Sistem): $w = \{w_1, w_2, \dots, w_n, \dots\}$ H Hilbert uzayında verilmiş bir elemanlar kümesi olsun. $h \in H$ için $\langle h, w_i \rangle = 0, \quad i = 1, 2, \dots \Rightarrow h = 0$ oluyorsa w sistemine H Hilbert uzayında tam sistem denir.

Tanım 1.9 (Lineer Bağımsızlık): $e = \{e_1, e_2, \dots, e_n, \dots\}$ H Hilbert uzayında verilmiş bir elemanlar kümesi olsun. $\alpha_i \in R^1(C^1)$ olmak üzere

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n + \dots = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = \dots = 0$$

oluyorsa e sistemine H Hilbert uzayında lineer bağımsızdır denir.

Tanım 1.10 (Zayıf Yakınsaklık): Normlu bir X uzayında bir (x_n) dizisi verilmiş olsun. Eğer her $f \in X'$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x)$ olacak şekilde bir $x \in X$ varsa, (x_n) dizisi zayıf yakınsaktır denir ve $x_n \rightharpoonup x$ şeklinde yazılır. x elemanına (x_n) dizisinin zayıf limiti adı verilir ve (x_n) dizisi x 'e zayıf yakınsar denir.

Tanım 1.11 (Kuvvetli Yakınsaklık): Normlu bir X uzayında bir (x_n) dizisi verilmiş olsun. Eğer $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$ olacak şekilde bir $x \in X$ varsa (x_n) dizisi kuvvetli yakınsaktır (ya da norma göre yakınsaktır) denir. Bu durum $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ ve ya $x_n \xrightarrow{k} x$ ile gösterilir.

Tanım 1.12 (Noktasal Yakınsaklık): X boş olmayan bir fonksiyonlar kümesi ve $f_n : K \rightarrow R$, $n \in N$ şeklinde fonksiyonlar olsun. Eğer $\forall x \in K$ için $f_n(x) \rightarrow f(x)$ oluyorsa yani $\forall x \in K$ ve $\epsilon > 0$ için $\exists N = N(x, \epsilon)$ varsa ve $\forall n \geq N$ için $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ oluyorsa (f_n) fonksiyonlar dizisi f ye noktasal yakınsar denir.

Tanım 1.13 (Düzgün Yakınsaklık): $f_n : K \rightarrow R$, $\forall \epsilon > 0$ için $\exists N = N(\epsilon)$ varsa $\forall x \in K$ ve $\forall n \geq N$ için $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ oluyorsa (f_n) fonksiyonlar dizisi f 'ye düzgün yakınsar denir.

Tanım 1.14 (Kompakt Küme): X bir topolojik uzay olmak üzere, $M \subset X$ kümesinin keyfi elemanlar dizisinden X uzayında yakınsak bir alt dizi seçilebiliyor ise M kümesine X uzayında kompakt küme denir.

Tanım 1.15 (Süreklilik): $K \subset R$ ve $f : K \rightarrow R$ olmak üzere, her $\varepsilon > 0$ sayısı için, öyle bir $\delta > 0$ sayısı, $|x - x_0| < \delta$ olan her $x \in K$ için $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ olacak şekilde bulunabiliyorsa, f fonksiyonuna x_0 noktasında süreklidir denir

Tanım 1.16 (Düzgün Süreklilik): $K \subset R$ ve $f : K \rightarrow R$ olmak üzere, her $\varepsilon > 0$ sayısı için, öyle bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı, $|x - y| < \delta$ olan her $x, y \in K$ için $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ olacak şekilde bulunabiliyorsa, f fonksiyonuna K da düzgün süreklidir denir.

Tanım 1.17 (Direk Problem) Denklem, bölge ve koşullar verildiğinde denklemi ve koşulları sağlayan çözümü bulma problemine direk problem denir.

Tanım 1.18 (Ters Problem) Denklem, bölge, koşullar ve denklemin sağ tarafından en az birinin bulunması problemine ters problem denir.

1.1 HADAMARD ANLAMINDA İYİ VE KÖTÜ KONULMUŞ PROBLEMLER

U ve F metrik uzaylar, $A: U \rightarrow F$ operatör olmak üzere,

$$Au = f \tag{1.1}$$

denklemini ele alalım. (1.1) denkleminin,

1. Her $f \in F$ için U uzayında çözümü vardır,
2. Çözümü U uzayında tektir,
3. Koşulları F uzayında az değiştiğinde çözüm de U uzayında az değişir (stabilite koşulu),

koşullarını sağlayan çözümünün bulunması problemine (U, F) uzay çifti için Hadamard anlamında iyi konulmuş problem denir.

Bu koşullardan herhangi birinin sağlanmaması durumunda problem (U, F) uzay çifti için Hadamard anlamında kötü konulmuş problem olarak adlandırılır. Bir problem bir uzay çifti için kötü, başka bir uzay çifti için ise iyi konulmuş olabilir. (U_1, F_1) uzay çifti için iyi, başka bir (U_2, F_2) uzay çifti için kötü konulmuş probleme (U_2, F_2) uzay çifti için zayıf kötü konulmuş problem denir. Tüm uzay çiftlerinde kötü konulmuş probleme kuvvetli kötü konulmuş problem denir.

1.2 TIKHONOV ANLAMINDA İYİ VE KÖTÜ KONULMUŞ PROBLEMLER

$A : U \rightarrow F$ olmak üzere (1.1) denkleminin,

1. Çözümü var ve belirli bir $M \subset U$ kümesine aittir,
2. Çözümü M kümesinde tektir,
3. Koşullar F uzayında çözüm M kümesinin dışına çıkmayacak şekilde az değiştiğinde çözüm de M kümesinde az değişir,

koşullarını sağlayan çözümünün bulunması problemine (U, F) metrik uzay çifti için Tikhonov anlamında iyi konulmuş problem denir.

Buradaki M kümesine problemin doğruluk kümesi denir ve genellikle kompakt seçilir.

Tanım 1.19 (Legendre Polinomu)

Legendre polinomu,

$$P_n(x) = \frac{(2n-1)(2n-3) \dots 1}{n!} \left\{ x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4.(2n-1)(2n-3)} x^{n-4} - \dots \right\}$$

ile tanımlanır. Legendre polinomu aynı zamanda Rodrigues formülü

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$

ile de ifade edilebilir. (Yaşar 2005)

Sonuç 1.1 (Legendre Polinomlarının Ortogonalliği)

m. ve n. dereceden birinci çeşit Legendre polinomlarının ortogonalliği için temel sonuç olarak:

$$\int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x) dx = 0, m \neq n$$

verilir. (Yaşar 2005)

İspat:

$P_m(x), P_n(x)$ fonksiyonlarının

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0$$

Legendre diferensiyel denklemini sağlamaları nedeni ile

$$\begin{aligned}(1 - x^2)P_m'' - 2xP_m' + m(m + 1)P_m &= 0 \\ (1 - x^2)P_n'' - 2xP_n' + n(n + 1)P_n &= 0\end{aligned}$$

dır. Birinci denklemi P_n , ikinci denklemi P_m ile çarpıp, taraf tarafa çıkartılırsa,

$$(1 - x^2)[P_n P_m'' - P_m P_n''] - 2x[P_n P_m' - P_m P_n'] = [n(n + 1) - m(m + 1)]P_n P_m$$

bulunur. Bunu da

$$(1 - x^2) \frac{d}{dx} [P_n P_m' - P_m P_n'] - 2x[P_n P_m' - P_m P_n'] = [n(n + 1) - m(m + 1)]P_n P_m$$

veya

$$\frac{d}{dx} \{(1 - x^2)[P_n P_m' - P_m P_n']\} = [n(n + 1) - m(m + 1)]P_n P_m$$

yazılabilir. Bundan sonra integral alınırsa

$$[n(n+1) - m(m+1)] \int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = (1-x^2)[P_n P_m' - P_m' P_n] \Big|_{-1}^1 = 0$$

dır. Buradan $m \neq n$ nedeni ile

$$\int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = 0$$

bulunur.

Tanım 1.20 (Ortogonallik)

X bir iç çarpım uzayı olsun. $x, y \in X$ vektörleri için $\langle x, y \rangle = 0$ ise bu iki vektöre ortogonaldır denir.

Tanım 1.21 (Ortonormal Sistem)

X bir iç çarpım uzayı olsun. $\{e_1, e_2, \dots\} \subset X$ bir sistem olsun.

$$\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

ise bu sisteme ortonormal sistem denir.

Tanım 1.22 (Doğrusal Örtü)

$w_1, w_2, \dots$ bir sistem olmak üzere

$$\left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i w_i \right\}, \alpha_i \in \mathbb{R}$$

kümesine bu sistemin lineer örtüsü adı verilir.

Tanım 1.23 (Projektör)

E , X lineer uzayında bir operatör $E \in B(X)$ ve $E^2 = E$ ise bu operatöre projektör (izdüşüm) denir.

Tanım 1.24 (Ortoprojektör)

E , X lineer uzayında bir operatör, $E \in B(X)$, $E^2 = E$ ve $E^* = E$ ise bu operatöre ortoprojektör (dik izdüşüm) denir.

Tanım 1.25 (Kuadratik Form)

n -boyutlu V vektör uzayını ele alalım. B , V uzayının bir bazı ve $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ keyfi bir $v \in V$ vektörünün B bazına göre koordinatları olsun. V üzerinde

$$g(v) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} x_i x_j, \quad m_{ij} \in \mathbb{R}$$

şeklinde tanımlanan bir g fonksiyonu, V üzerinde bir kuadratik fonksiyon olarak adlandırılır ve aşağıdaki ifade

$$Q(X) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} x_i x_j$$

kuadratik form olarak adlandırılır. (Donald and Kenneth 1973)

Tanım 1.26 (Adjoint)

H ve K Hilbert uzayları olsun. T nin tanım cümlesi $D(T)$, H uzayında her yerde yoğun olsun. $\forall x \in D(T)$ için

$$(Tx, y) = (x, \eta), \eta = T^*y$$

olacak şekilde bir T bulunabilirse, bu y elemanlarının oluşturduğu kümede T^* tanımlanacak ve T^* operatörüne T operatörünün adjointi denir.

Tanım 1.27 (Self Adjoint)

H bir Hilbert uzayı ve $T: H \rightarrow H$ olsun. Eğer $T = T^*$ ise T operatörüne self-adjoint denir.

Tanım 1.28 ($L_2(Q)$ Uzayı)

Q üzerinde karesi integrallenebilen ölçülebilir kompleks değerli fonksiyonların kümesine $L_2(Q)$ uzayı denir. $L_2(Q)$ lineer uzayı,

$$\langle f_1, f_2 \rangle_{L_2(Q)} = \int_Q f_1(x) \overline{f_2(x)} dx$$

iç çarpımı ile tanımlanan bir Hilbert uzayıdır.

Tanım 1.29 ($H^k(Q)$ Uzayı)

$H^k(Q)$ uzayı,

$$\langle f, g \rangle_{H^k(Q)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_Q D^\alpha f \overline{D^\alpha g} dx$$

ile tanımlı bir Hilbert uzayıdır.

Tanım 1.30 ($H_k^0(Q)$ Uzayı)

$H_k^0(Q)$ uzayına ait bir $f(x)$ fonksiyonu, $H_k^0(Q')$ uzayına ait $Q' \setminus Q$ bölgesinde sıfıra eşittir.

Tanım 1.31 (Üst Limit-Alt Limit)

(S_n) bir reel terimli dizi ve C kümesi de (S_n) dizisinin alt dizilerinin limitlerinin kümesi olsun. C genişletilmiş reel sayılar kümesinin bir alt kümesidir. $\sup C$ ve $\inf C$ sayılarına, sırasıyla (S_n) dizisinin üst limiti ve alt limiti denir. Üst limit, $\limsup S_n$ veya $\overline{\lim} S_n$, alt limit $\liminf S_n$ veya $\underline{\lim} S_n$ ile gösterilir. (Balcı 1999)

Teorem 1.1: X , bir Hilbert uzayı olsun. $\{x_n\}$ dizisinin norm dizisi $\|x_n\|_X$ sınırlı olsun. Öyle bir $x_0 \in X$ vardır ki $x_n \rightharpoonup x_0$ dır.

Lemma 1.1: Bir Hilbert uzayında $x_n \rightharpoonup x_0$ olması için gerek ve yeter koşul uzaydaki her z için,

$$\langle x_n, z \rangle \rightarrow \langle x, z \rangle$$

olmasıdır.

İspat: Bir Hilbert uzayı üzerinde her sınırlı lineer f fonksiyoneli iç çarpım cinsinde ifade edilebilir. Yani z , f fonksiyoneline bağlı olmak üzere $\forall z \in H$ için $f(x) = \langle x, z \rangle$ f tarafından tek olarak belirlenmiş olup $\|z\| = \|f\|$ normuna sahiptir. Buna göre,

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) &= f(x) \\ \langle x_n, z \rangle &\rightarrow \langle x, z \rangle\end{aligned}$$

şeklinde ifade edilebilir.

Lemma 1.2: Hilbert uzayında $x_n \rightarrow x$ ise

$$\|x\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|$$

dir.

İspat: $x_n \rightarrow x$ ise $\forall z \in H$ için $\langle x_n, z \rangle \rightarrow \langle x, z \rangle$ dir. Keyfi bir $z \in H$ olduğundan z yerine $x \in H$ alınırsa,

$$\begin{aligned}\langle x_n, x \rangle &\rightarrow \langle x, x \rangle = \|x\|^2 \\ |\langle x_n, x \rangle| &= \|x_n\| \cdot \|x\|\end{aligned}$$

alt limitine geçerse,

$$\begin{aligned}\|x\|^2 &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| \cdot \|x\| \\ \|x\| &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|\end{aligned}$$

bulunur.

1.3 İNTEGRAL GEOMETRİ PROBLEMLERİ

Kabul edelim ki $\mathbb{R}^n$ üzerinde düzgün bir fonksiyon $V(x), x \in \mathbb{R}^n$ olsun. $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k), \lambda_i \in \mathbb{R}$ olmak üzere λ parametresine bağlı $\mathbb{R}^n$ deki manifoldların cümlesi $\{\mu(\lambda)\}$ manifoldu üzerinde integrallenebilir olduğunu yani

$$\int_{\mu(\lambda)} V(x) d\sigma_\lambda = f(\lambda), \lambda \in A \subset \mathbb{R}^k \quad (1.2)$$

olduğunu farz edelim. Burada $d\sigma_\lambda, \mu(\lambda)$ üzerinde verilmiş ölçü elemanıdır.

$\mu(\lambda)$ ve $f(\lambda)$ ya göre $V(x)$ in bulunması problemine lineer İntegral Geometri Problemi denir.

(1.2) denkleminde $\{\mu(\lambda)\}$ belli olmayabilir. $f(\lambda)$ ya göre $V(x)$ i ve $\{\mu(\lambda)\}$ nin bulma problemine lineer olmayan İntegral Geometri Problemi denir

1.4 RADON PROBLEMİ

$V(x)$ fonksiyonunun $\mathbb{R}^n$ de tüm $m < n$ boyutlu düzlemler üzerindeki integrallerinin verilmesi halinde bu integrallere göre $V(x)$ i bulma problemidir.

Radon bu problemi çözdü ve $V(x)$ in $f(\lambda)$ ile ilgili ifadelerini verdi. Bu ifade Radon dönüşümü olarak bilinir. Radon dönüşümü de Fourier dönüşümü gibi diferansiyel ve Pseudo-diferansiyel denklemlerle ilgili muhtelif problemlerin çözümünde kullanılır.

Radon probleminin, diferansiyel formlar ve tensör alanları için benzerleri Gelfand, Şapiro, Grayev v.b. tarafından incelenmiştir. Böyle problemler, 1960'lı yıllarda Lie grupları gösterimi teorisinde de göze çarpmaktadır.

1970'li yıllarda, $\{\mu(\lambda)\}$ cümlesinin daha karmaşık objelerden ibaret olması hallerinde lineer ve lineer olmayan integral geometri problemleri(IGP) incelenmeye başlanmıştır. Bu cins problemlere, diferansiyel geometri problemlerinin, kısmi türevli diferansiyel denklemlerle ilgili ters problemlerin, tomografinin, sismolojinin ve benzer başka problemlerin incelenmesinde rastlanır.

BÖLÜM 2

TRANSPORT DENKLEMİ İÇİN ÜÇ BOYUTLU TERS PROBLEM

Bu bölümde transport denklem için üç boyutlu ters problemin çözümünü araştıracağız.

$\mathbf{I}$. S^2 birim küre ve D de R^3 de tanımlı düzgün sınırlı bir bölge olsun.

$$\Omega = \{(x, v) : x \in D, v \in S^2\}$$

$$v = (\cos \varphi_1, \sin \varphi_1 \cos \varphi_2, \sin \varphi_1 \sin \varphi_2)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta_1} = \frac{\partial}{\partial \varphi_1}, \frac{\partial}{\partial \theta_2} = \frac{1}{\sin \varphi_1} \frac{\partial}{\partial \varphi_2}, \varphi_1 \in (0, \pi), \varphi_2 \in (0, 2\pi)$$

$$\Gamma = \partial D \times (0, \pi) \times (0, 2\pi), \varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$$

M ile aşağıdaki fonksiyonların lineer kombinasyonlarının kümesini işaret edeceğiz.

$$w(x)P_{n,m}(\cos \varphi_1) \sin m\varphi_2, w(x)P_{n,m}(\cos \varphi_1) \cos m\varphi_2 \quad n, m=0, 1, 2, \dots$$

$P_{n,0}(x) \equiv P_n(x), P_n(x)$ Legendre polinomlarıdır,

$$P_{n,m}(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x)$$

Ve $w(x)$, $C^3(D)$ ye ait keyfi reel değerli fonksiyondur. $\bar{H}_1(\Omega)$, M 'nin $\|u\|_1 = [(u, u)_1]^{1/2}$ normuna göre kapanışdır.

$$(u, z)_{\bar{1}} = \int_{\Omega} \left(uz + \sum_{i=1}^3 u_{x_i} z_{x_i} + \sum_{i=1}^2 u_{\theta_i} z_{\theta_i} \right) d\Omega$$

dx, D ‘nin hacim elemanı; dS² ise S² küresinin yüzey elemanıdır.

$\bar{H}_{1,2}(\Omega)$ Hilbert uzayıdır ve M kümesinin

$$(u, z)_{\bar{1},2} = (u, z)_{\bar{1}} + (u, z)_{\bar{1},2}$$

ve

$$(u, z)_{\bar{1},2} = \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 z_{x_i \theta_j} u_{x_i \theta_j} \right) d\Omega$$

olmak üzere

$$\|u\|_{\bar{1},2} = [(u, u)_{\bar{1},2}]^{1/2}$$

normuna göre kapanışlıdır.

$$\tilde{C}_0^2 = \{w(x) : w \in C^2(D), \partial D \text{ sınırında } w=0\}$$

$$M^0 = \{ \eta : \eta \in M \text{ ve } \Gamma \text{ yüzeyinde } \eta=0 \}$$

$$\bar{H}_1^0(\Omega), M^0 \text{ 'in } \|\cdot\|_{\bar{1},2} \text{ normuna göre kapanışlıdır.}$$

Burada,

$$v' = (-\sin \varphi_1, \cos \varphi_1 \cos \varphi_2, \cos \varphi_1 \sin \varphi_2),$$

$$v'' = (0, -\sin \varphi_2, \cos \varphi_2),$$

$$f = (f_1, f_2, f_3), \quad F_1 = f \cdot v', \quad F_2 = f \cdot v''.$$

dır.

Ω bölgesinde, aşağıdaki denklemi ele alalım.

$$L_1 u = v \cdot \nabla_x u + u_{\theta_1} F_1 + u_{\theta_2} F_2 = \lambda \quad (2.1)$$

burada $v \cdot \nabla_x u$, v ile $\nabla_x u$ vektörlerinin R^3 de iç çarpımıdır. Sağ taraftaki λ , Γ yüzeyinde sıfıra eşit olan her $\eta \in \overline{H}_{1,2}(\Omega)$ için

$$\int_{\Omega} \lambda \left[\frac{\partial}{\partial \theta_1} (\nabla_x \eta \cdot v') + (\nabla_x \eta \cdot v') \cot \varphi_1 + \frac{\partial}{\partial \theta_2} (\nabla_x \eta \cdot v'') \right] d\Omega = 0 \quad (2.2)$$

şartını sağlasın.

$$\begin{aligned} Au \equiv & \left(-\sin \varphi_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \cos \varphi_2 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \frac{\partial}{\partial \theta_2} (L_1 u) \\ & + \left(-\sin \varphi_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \frac{\partial}{\partial \theta_1} (L_1 u) \end{aligned}$$

$\Gamma''(A)$ aşağıdaki özelliklere sahip bir küme olsun.

$\forall u \in \Gamma''(A)$ için $u \in \overline{H}_1^0(\Omega)$ ve $y \in L_2(\Omega)$ olacak şekilde bir y fonksiyonu vardır öyle ki keyfi $\eta \in M^0$ için;

$$\langle L_1 u, \left[\frac{\partial}{\partial \theta_1} (\nabla_x \eta \cdot v') + (\nabla_x \eta \cdot v') \cot \varphi_1 + \frac{\partial}{\partial \theta_2} (\nabla_x \eta \cdot v'') \right] \rangle = \langle y, \eta \rangle$$

olur.

Kabul edelim ki $y = Au$. Bu kabul ,

$$\begin{aligned}
& L_1 u \frac{\partial}{\partial \theta_1} (\nabla_x \eta \cdot v') + L_1 u (\nabla_x \eta \cdot v') \cot \varphi_1 \\
&= \frac{1}{\sin \varphi_1} \left[L_1 u \frac{\partial}{\partial \varphi_1} (\nabla_x \eta \cdot v') \sin \varphi_1 + L_1 u (\nabla_x \eta \cdot v') \cos \varphi_1 \right] \\
&\equiv \frac{1}{\sin \varphi_1} \left\{ \frac{\partial}{\partial \varphi_1} [L_1 u (\nabla_x \eta \cdot v') \sin \varphi_1] \right\} - \frac{\partial}{\partial \varphi_1} (L_1 u) (\nabla_x \eta \cdot v').
\end{aligned}$$

Kabul edelim ki $\Gamma(A) \subset \Gamma''(A)$ öyle fonksiyonlar kümesidir ki $\forall u \in \Gamma(A)$ için öyle $\{u_k\} \subset C_{\pi 0}^3$ dizisi vardır öyle ki

1) $u_k \rightharpoonup u$, L_2 de zayıf yakınsak

2) $\langle Au_k, u_k \rangle \rightarrow \langle Au, u \rangle$, $k \rightarrow \infty$

$\Gamma'(A)$, $C_{\pi 0}^3$ 'ın $\|u\|_{\Gamma(A)} = \|u\| + \|Au\|$ normuna göre kapanışıdır.

$\bar{H}_1^0 \cap \Gamma'(A) \subset \Gamma(A) \subset \Gamma''(A)$ olduğu açıktır.

$\Gamma''(A) \cap \bar{H}_{1,2}^0(\Omega) \subset \Gamma(A) \subset L_2(\Omega)$ olduğunun ispatı gerekir.

Aşağıdaki sistemin $L_2(S^2)$ ' de ortogonal tam sistem olduğu bilinir, (Smirnov 1969),

$$\{P_n(\cos \varphi_1), P_{n,m}(\cos \varphi_1) \sin m\varphi_2, P_{n,m}(\cos \varphi_1) \cos m\varphi_2\}, \quad n=1,2,3,\dots \quad m=1,2,3,\dots$$

$\{w_1, w_2, \dots\} \subset \tilde{C}_0^2(D)$ olmak üzere $L_2(\Omega)$ 'da ortonormal bir sistem seçelim. Farz edelim ki $\{w_1, w_2, \dots\}$ sisteminin lineer örtüsü $\bar{H}_{1,2}^0(D)$ 'de her yerde yoğun olsun.

$P_N, L_2(\Omega)$ uzayından M_N üzerine ortogonal projektör olsun. Burada M_N

$$\begin{aligned}
& w_i P_n, w_i \cos m\varphi_2 P_{n,m}(\cos \varphi_1), w_i \sin m\varphi_2 P_{n,m}(\cos \varphi_1) \\
& i, n=1,2,3,\dots, N; \quad m=1,2,3,\dots, n
\end{aligned}$$

vektörler sisteminin lineer örtüsüdür.

Problem 2.1. F_1, F_2 fonksiyonları ve $u(x, v)$ nin Γ üzerindeki izi ($u|_{\Gamma} = u_0$) verilmiş olan 2.1 denklemini sağlayan Ω da tanımlı (u, λ) fonksiyon çiftini bulunuz.

Lemma 2.1. Kabul edelim ki $u(x, v)$, Ω da iki defa sürekli diferansiyellenebilsin. Buna göre aşağıdaki eşitlik doğrudur.

$$L_2 L_1 u = J(u) + \sum_{i=1}^5 d_i(u)$$

$J(u), L_1, L_2$ ve d_i aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$L_1 u = v \cdot \nabla_x u + u_{\theta_1} F_1 + u_{\theta_2} F_2 = \lambda$$

$$\frac{1}{2} L_2 \equiv (\nabla_x u \cdot v') \frac{\partial}{\partial \theta_1} + (\nabla_x u \cdot v'') \frac{\partial}{\partial \theta_2}$$

$$\begin{aligned} J(u) = & |\nabla_x u|^2 + (u_{x_1} \cos \varphi_1 + u_{x_2} \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + u_{x_3} \sin \varphi_1 \sin \varphi_2)^2 \\ & + u_{\varphi_1}^2 (f_{1x_1} \sin^2 \varphi_1 - f_{2x_1} \cos \varphi_1 \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \\ & - f_{3x_1} \cos \varphi_1 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \\ & - f_{1x_2} \cos \varphi_1 \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + f_{3x_2} \cos^2 \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_2 + f_{2x_2} \cos^2 \varphi_1 \cos^2 \varphi_2 \\ & - f_{1x_3} \cos \varphi_1 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + f_{2x_3} \cos^2 \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_2 + f_{3x_3} \cos^2 \varphi_1 \sin^2 \varphi_2) \\ & + u_{\theta_2}^2 (f_{2x_2} \sin^2 \varphi_2 - f_{3x_2} \sin \varphi_2 \cos \varphi_2 + f_{3x_3} \cos^2 \varphi_2 - f_{2x_3} \sin \varphi_2 \cos \varphi_2) \\ & + u_{x_1} u_{\varphi_1} (-2f_1 \sin 2\varphi_1 + 4f_2 \cos^2 \varphi_1 \cos \varphi_2 - f_2 \cos \varphi_2 + 4f_3 \cos^2 \varphi_1 \sin \varphi_2 \\ & - f_3 \sin \varphi_2) \\ & + u_{x_1} u_{\varphi_2} (-3f_2 \cot \varphi_1 \sin \varphi_2 + 3f_2 \cot \varphi_1 \cos \varphi_2) \\ & + u_{x_2} u_{\varphi_1} (2f_1 \cos 2\varphi_2 \cos \varphi_2 - f_1 \cos \varphi_2 \\ & + 2f_2 \sin 2\varphi_1 \cos^2 \varphi_2 + f_3 \sin 2\varphi_1 \cos 2\varphi_1) \\ & + u_{x_2} u_{\varphi_2} (f_3 \cos 2\varphi_2 + f_1 \cot \varphi_1 \sin \varphi_2 - 2f_2 \sin 2\varphi_2) \\ & + u_{x_3} u_{\varphi_1} (2f_1 \cos 2\varphi_1 \sin \varphi_2 \\ & - f_1 \sin \varphi_2 + f_2 \sin 2\varphi_1 \sin 2\varphi_2 + 2f_3 \sin 2\varphi_1 \sin^2 \varphi_2) \\ & + u_{x_3} u_{\varphi_2} (f_1 \cot \varphi_1 \cos \varphi_2 + f_2 \cos 2\varphi_2 + 2f_3 \sin 2\varphi_2) + u_{\varphi_1} u_{\varphi_2} (f_{2x_1} \sin \varphi_2 \\ & - f_{3x_1} \cos \varphi_2 + f_{1x_2} \sin \varphi_2 - f_{2x_2} \cot \varphi_1 \sin 2\varphi_2 \\ & + f_{3x_2} \cot \varphi_1 \cos 2\varphi_2 - f_{1x_3} \cos \varphi_2 + f_{2x_3} \cot \varphi_1 \cos 2\varphi_2 \\ & + f_{3x_3} \cot \varphi_1 \sin 2\varphi_2) \end{aligned}$$

$$d_1(u) = \frac{\partial}{\partial x_1} [u_{x_2} u_{\varphi_1} \cos \varphi_2 + u_{x_3} u_{\varphi_1} \sin \varphi_2 - u_{x_2} u_{\varphi_2} \cot \varphi_1 \sin \varphi_2 + u_{x_3} u_{\varphi_2} \cot \varphi_1 \cos \varphi_2 \\ + u_{\theta_1}^2 (-f_1 \sin^2 \varphi_1 + f_2 \cos \varphi_1 \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + f_3 \cos \varphi_1 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) \\ + u_{\varphi_1} u_{\varphi_2} (f_3 \cos \varphi_2 - f_2 \sin \varphi_2)],$$

$$d_2(u) = \frac{\partial}{\partial x_2} \left[-u_{x_1} u_{\varphi_1} \cos \varphi_2 + u_{x_1} u_{\varphi_2} \frac{\cos \varphi_2}{\sin \varphi_1} \sin \varphi_2 + u_{x_3} u_{\varphi_2} \right. \\ + u_{\varphi_1}^2 (f_1 \cos \varphi_1 \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \\ - f_2 \cos^2 \varphi_2 \cos^2 \varphi_1 - f_3 \cos^2 \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_2) \\ + u_{\varphi_1} u_{\varphi_2} (f_2 \cot \varphi_1 \sin 2\varphi_2 - f_1 \sin \varphi_2 - f_3 \cot \varphi_1 \cos^2 \varphi_2 + f_3 \cot \varphi_1 \sin^2 \varphi_2) \\ \left. + u_{\theta_2}^2 (-f_2 \sin^2 \varphi_2 + f_3 \cos \varphi_2 \sin \varphi_2) \right],$$

$$d_3(u) = \frac{\partial}{\partial x_3} [-u_{x_1} u_{\varphi_1} \sin \varphi_2 - u_{x_1} u_{\theta_2} \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - u_{x_2} u_{\varphi_2} \\ + u_{\theta_1}^2 (-f_3 \cos^2 \varphi_1 \sin^2 \varphi_2 + f_1 \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 - f_2 \cos^2 \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_2) \\ + u_{\varphi_1} u_{\varphi_2} (f_1 \cos \varphi_2 + f_2 \cot \varphi_1 \sin^2 \varphi_2 - f_2 \cot \varphi_1 \cos^2 \varphi_2 \\ - 2f_3 \cot \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_2) + u_{\theta_2}^2 (f_2 \sin \varphi_2 \cos \varphi_2 - f_3 \cos^2 \varphi_2)],$$

$$d_4(u) = \frac{1}{\sin \varphi_1} \frac{\partial}{\partial \varphi_1} [-u_{x_1}^2 \cos \varphi_1 \sin^2 \varphi_1 + u_{x_1} u_{x_2} \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos 2\varphi_1 \\ + u_{x_1} u_{x_3} \sin \varphi_1 \cos 2\varphi_1 \sin \varphi_2 + u_{x_2}^2 \cos \varphi_1 \sin^2 \varphi_1 \cos^2 \varphi_2 \\ + u_{x_1} u_{x_3} \sin^2 \varphi_1 \cos \varphi_1 \sin 2\varphi_2 + u_{x_3}^2 \cos \varphi_1 \sin^2 \varphi_1 \sin^2 \varphi_2 \\ + u_{x_1} u_{\varphi_1} (2f_1 \sin^3 \varphi_1 - 2f_2 \cos \varphi_1 \sin^2 \varphi_1 \cos \varphi_2 - 2f_3 \sin^2 \varphi_1 \cos \varphi_1 \sin \varphi_2) \\ + u_{x_2} u_{\varphi_1} (-2f_1 \sin 2\varphi_1 \cos \varphi_2 \\ + 2f_2 \cos^2 \varphi_1 \cos^2 \varphi_2 + f_3 \cos^2 \varphi_1 \sin 2\varphi_2) \sin \varphi_1 \\ + u_{x_3} u_{\varphi_1} (-f_1 \sin 2\varphi_1 \sin \varphi_2 + f_2 \cos^2 \varphi_1 \sin 2\varphi_2 + 2f_3 \cos^2 \varphi_1 \sin^2 \varphi_2) \sin \varphi_1 \\ + u_{x_1} u_{\varphi_2} (f_2 \sin \varphi_2 - f_3 \cos \varphi_2) \sin \varphi_1 \\ + u_{x_2} u_{\varphi_2} (f_1 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 - f_2 \cos \varphi_1 \sin 2\varphi_2 + f_3 \cos \varphi_1 \cos 2\varphi_2) \\ + u_{x_3} u_{\varphi_2} (-f_1 \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + f_2 \cos \varphi_1 \cos 2\varphi_2 + f_3 \cos \varphi_1 \sin 2\varphi_2)],$$

$$\begin{aligned}
d_5(u) = \frac{\partial}{\partial \varphi_2} & \left[-u_{x_1} u_{x_2} \cot \varphi_1 \sin \varphi_2 - u_{x_2}^2 \sin \varphi_2 \cos \varphi_2 + u_{x_2} u_{x_3} \cos 2\varphi_2 \right. \\
& + u_{x_1} u_{x_3} \cot \varphi_1 \cos \varphi_2 + u_{x_3}^2 \sin \varphi_2 \cos \varphi_2 + u_{x_1} u_{\varphi_1} (f_2 \sin \varphi_2 - f_3 \cos \varphi_2) \\
& + u_{x_2} u_{\varphi_1} (f_1 \sin \varphi_2 - f_2 \cot \varphi_1 \sin 2\varphi_2 + f_3 \cot \varphi_1 \cos 2\varphi_2) \\
& + u_{x_3} u_{\varphi_1} (f_1 \cos \varphi_2 + f_2 \cot \varphi_1 \cos 2\varphi_2 - f_3 \cot \varphi_1 \sin 2\varphi_2) \\
& + 2u_{x_2} u_{\varphi_2} (f_2 \sin \varphi_2 - f_3 \cos \varphi_2) \frac{\sin \varphi_2}{\sin^2 \varphi_1} \\
& \left. + 2u_{x_3} u_{\varphi_2} (-f_2 \sin \varphi_2 + f_3 \cos \varphi_2) \frac{\cos \varphi_2}{\sin^2 \varphi_1} \right].
\end{aligned}$$

İspat: Lemma 2.1 i ispatlamak için $L_2 L_1 u$ açılımında ki her bir terimi dönüştüreceğiz , sonuçta açılım sadece $u_{x_i} u_{x_j}, u_{\theta_k} u_{\theta_r}, u_{x_i} u_{\theta_k}$ ve diverjans terimleri içerecek şekilde dönüştüreceğiz , burada $i, j = 1, 2, 3$ ve $k, r = 1, 2$ dır .

$$L_1 u = v \cdot \nabla_x u + u_{\theta_1} F_1 + u_{\theta_2} F_2$$

ve

$$\frac{1}{2} L_2 \equiv (\nabla_x u \cdot v') \frac{\partial}{\partial \theta_1} + (\nabla_x u \cdot v'') \frac{\partial}{\partial \theta_2}$$

tanımlarından $L_2 L_1 u$ ifadesini bulmak ve $u(x, \varphi)$ nin türevlerini içeren pozitif kuadratik form ve diverjans ifadeleri elde etmek için gerekli işlemleri yapalım.

$$\begin{aligned}
L_1 u = & u_{x_1} \cos \varphi_1 + u_{x_2} \cos \varphi_2 \sin \varphi_1 + u_{x_3} \sin \varphi_2 \sin \varphi_1 - u_{\theta_1} \sin \varphi_1 f_1 \\
& + u_{\theta_1} \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 f_2 + u_{\theta_1} \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 f_3 - u_{\theta_2} \sin \varphi_2 f_2 + u_{\theta_2} \cos \varphi_2 f_3
\end{aligned}$$

$$L_2 L_1 u \equiv 2(\nabla_x u \cdot v') \frac{\partial}{\partial \theta_1} (L_1 u) + 2(\nabla_x u \cdot v'') \frac{\partial}{\partial \theta_2} (L_1 u)$$

$$\begin{aligned}
& 2(\nabla_x u \cdot v'') \frac{\partial}{\partial \theta_2} (L_1 u) \\
&= 2 \left(u_{x_1 \theta_2} \cos \varphi_1 + u_{x_2 \theta_2} \cos \varphi_2 \sin \varphi_1 - u_{x_2} \sin \varphi_2 + u_{x_3 \theta_2} \sin \varphi_2 \sin \varphi_1 \right. \\
&\quad + u_{x_3} \cos \varphi_2 + u_{\theta_1 \theta_2} (-\sin \varphi_1 f_1 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 f_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 f_3) \\
&\quad + u_{\theta_1} \frac{1}{\sin \varphi_1} (-\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 f_2 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 f_3) \\
&\quad + u_{\theta_2 \theta_2} (-\sin \varphi_2 f_2 + \cos \varphi_2 f_3) \\
&\quad \left. + u_{\theta_2} \frac{1}{\sin \varphi_1} (-\cos \varphi_2 f_2 - \sin \varphi_2 f_3) \right) \cdot (-u_{x_2} \sin \varphi_2 + u_{x_3} \cos \varphi_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2(\nabla_x u \cdot v') \frac{\partial}{\partial \theta_1} (L_1 u) \\
&= 2 \left(u_{x_1 \theta_1} \cos \varphi_1 - u_{x_1} \sin \varphi_1 + u_{x_2 \theta_1} \cos \varphi_2 \sin \varphi_1 + u_{x_2} \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \right. \\
&\quad + u_{x_3 \theta_1} \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + u_{x_3} \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \\
&\quad + u_{\theta_1 \theta_1} (-\sin \varphi_1 f_1 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 f_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 f_3) \\
&\quad - u_{\theta_1} (\cos \varphi_1 f_1 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 f_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 f_3) \\
&\quad \left. + u_{\theta_2 \theta_1} (-\sin \varphi_2 f_2 + \cos \varphi_2 f_3) \right) \cdot (-u_{x_1} \sin \varphi_1 + u_{x_2} \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \\
&\quad + u_{x_3} \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)
\end{aligned}$$

$$2(\nabla_x u \cdot v'') \frac{\partial}{\partial \theta_2} (L_1 u) =$$

$$1) \quad -2u_{x_2} u_{x_1 \theta_2} \cos \varphi_1 \sin \varphi_2$$

$$2) \quad -2u_{x_2} u_{x_2 \theta_2} \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \sin \varphi_2$$

$$3) \quad 2u_{x_2}^2 \sin^2 \varphi_2$$

$$4) \quad -2u_{x_2} u_{x_3 \theta_2} \sin \varphi_1 \sin^2 \varphi_2$$

$$5) \quad -2u_{x_2} u_{x_3} \cos \varphi_2 \sin \varphi_2$$

$$6) -2u_{x_2}u_{\theta_1\theta_2} \sin \varphi_2 (-\sin \varphi_1 f_1 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 f_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 f_3)$$

$$7) -2u_{x_2}u_{\theta_1} \sin \varphi_2 \frac{1}{\sin \varphi_1} (-\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 f_2 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 f_3)$$

$$8) -2u_{x_2}u_{\theta_2\theta_2} \sin \varphi_2 (-\sin \varphi_2 f_2 + \cos \varphi_2 f_3)$$

$$9) -2u_{x_2}u_{\theta_2} \sin \varphi_2 \frac{1}{\sin \varphi_1} (-\cos \varphi_2 f_2 - \sin \varphi_2 f_3)$$

$$10) 2u_{x_3}u_{x_1\theta_2} \cos \varphi_1 \cos \varphi_2$$

$$11) 2u_{x_3}u_{x_2\theta_2} \sin \varphi_1 \cos^2 \varphi_2$$

$$12) -2u_{x_2}u_{x_3} \cos \varphi_2 \sin \varphi_2$$

$$13) 2u_{x_3}u_{x_3\theta_2} \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \sin \varphi_2$$

$$14) 2u_{x_3}^2 \cos^2 \varphi_2$$

$$15) 2u_{x_3}u_{\theta_1\theta_2} \cos \varphi_2 (-\sin \varphi_1 f_1 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 f_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 f_3)$$

$$16) 2u_{x_3}u_{\theta_1} \cos \varphi_2 \frac{1}{\sin \varphi_1} (-\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 f_2 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 f_3)$$

$$17) 2u_{x_3}u_{\theta_2\theta_2} \cos \varphi_2 (-\sin \varphi_2 f_2 + \cos \varphi_2 f_3)$$

$$18) 2u_{x_3}u_{\theta_2} \cos \varphi_2 \frac{1}{\sin \varphi_1} (-\cos \varphi_2 f_2 - \sin \varphi_2 f_3)$$

$$2(\nabla_x u \cdot v') \frac{\partial}{\partial \theta_1} (L_1 u) =$$

$$19) -2u_{x_1}u_{x_1\theta_1} \sin \varphi_1 \cos \varphi_1$$

$$20) 2u_{x_1}^2 \sin^2 \varphi_1$$

$$21) -2u_{x_1}u_{x_2\theta_1}\sin^2\varphi_1\cos\varphi_2$$

$$22) -2u_{x_1}u_{x_2}\sin\varphi_1\cos\varphi_1\cos\varphi_2$$

$$23) -2u_{x_1}u_{x_3\theta_1}\sin^2\varphi_1\sin\varphi_2$$

$$24) -2u_{x_1}u_{x_3}\sin\varphi_1\cos\varphi_1\sin\varphi_2$$

$$25) -2u_{x_1}u_{\theta_1\theta_1}\sin\varphi_1(-\sin\varphi_1f_1+\cos\varphi_1\cos\varphi_2f_2+\cos\varphi_1\sin\varphi_2f_3)$$

$$26) 2u_{x_1}u_{\theta_1}\sin\varphi_1(\cos\varphi_1f_1+\sin\varphi_1\cos\varphi_2f_2+\sin\varphi_1\sin\varphi_2f_3)$$

$$27) -2u_{x_1}u_{\theta_2\theta_1}\sin\varphi_1(-\sin\varphi_2f_2+\cos\varphi_2f_3)$$

$$28) 2u_{x_2}u_{x_1\theta_1}\cos^2\varphi_1\cos\varphi_2$$

$$29) -2u_{x_1}u_{x_2}\sin\varphi_1\cos\varphi_1\cos\varphi_2$$

$$30) 2u_{x_2}u_{x_2\theta_1}\sin\varphi_1\cos\varphi_1\cos^2\varphi_2$$

$$31) 2u_{x_2}^2\cos^2\varphi_1\cos^2\varphi_2$$

$$32) 2u_{x_2}u_{x_3\theta_1}\sin\varphi_1\cos\varphi_1\sin\varphi_2\cos\varphi_2$$

$$33) 2u_{x_2}u_{x_3}\cos^2\varphi_1\sin\varphi_2\cos\varphi_2$$

$$34) 2u_{x_2}u_{\theta_1\theta_1}\cos\varphi_1\cos\varphi_2(-\sin\varphi_1f_1+\cos\varphi_1\cos\varphi_2f_2+\cos\varphi_1\sin\varphi_2f_3)$$

$$35) -2u_{x_2}u_{\theta_1}\cos\varphi_1\cos\varphi_2(\cos\varphi_1f_1+\sin\varphi_1\cos\varphi_2f_2+\sin\varphi_1\sin\varphi_2f_3)$$

$$36) 2u_{x_2}u_{\theta_2\theta_1}\cos\varphi_1\cos\varphi_2(-\sin\varphi_2f_2+\cos\varphi_2f_3)$$

$$37) 2u_{x_3}u_{x_1\theta_1} \cos^2 \varphi_1 \sin \varphi_2$$

$$38) -2u_{x_1}u_{x_3} \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 \sin \varphi_2$$

$$39) 2u_{x_3}u_{x_2\theta_1} \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_2$$

$$40) 2u_{x_2}u_{x_3} \cos^2 \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_2$$

$$41) 2u_{x_3}u_{x_3\theta_1} \cos \varphi_1 \sin \varphi_1 \sin^2 \varphi_2$$

$$42) 2u_{x_3}^2 \cos^2 \varphi_1 \sin^2 \varphi_2$$

$$43) 2u_{x_3}u_{\theta_1\theta_1} \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 (-\sin \varphi_1 f_1 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 f_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 f_3)$$

$$44) -2u_{x_3}u_{\theta_1} \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 (\cos \varphi_1 f_1 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 f_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 f_3)$$

$$45) 2u_{x_3}u_{\theta_2\theta_1} \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 (-\sin \varphi_2 f_2 + \cos \varphi_2 f_3)$$

Gerekli işlemler yapılarak yukarıdaki ifadelerin diverjans formları aşağıdaki biçimde elde edilmiştir.

$$1') -(u_{x_1}u_{x_2} \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)_{\theta_2} - (u_{x_2}u_{\theta_2} \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)_{x_1} + (u_{x_1}u_{\theta_2} \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)_{x_2} + u_{x_1}u_{x_2} \cot \varphi_1 \cos \varphi_2$$

$$2') -(u_{x_2}^2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_2)_{\theta_2} + u_{x_2}^2 \cos^2 \varphi_2 - u_{x_2}^2 \sin^2 \varphi_2$$

$$3') 2u_{x_2}^2 \sin^2 \varphi_2$$

$$4') -(u_{x_2}u_{x_3} \sin \varphi_1 \sin^2 \varphi_2)_{\theta_2} - (u_{x_2}u_{\theta_2} \sin \varphi_1 \sin^2 \varphi_2)_{x_3} + (u_{x_3}u_{\theta_2} \sin \varphi_1 \sin^2 \varphi_2)_{x_2} + u_{x_2}u_{x_3} 2 \sin \varphi_2 \cos \varphi_2$$

$$5') -2u_{x_2}u_{x_3} \sin \varphi_2 \cos \varphi_2$$

$$6') - \left(u_{x_2} u_{\theta_1} \sin \varphi_2 (-\sin \varphi_1 f_1 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 f_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 f_3) \right)_{\theta_2} - \\ \left(u_{x_2} u_{\theta_2} \sin \varphi_2 (-\sin \varphi_1 f_1 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 f_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 f_3) \right)_{\theta_1} + \\ \left(u_{\theta_1} u_{\theta_2} \sin \varphi_2 (-\sin \varphi_1 f_1 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 f_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 f_3) \right)_{x_2} + \\ u_{x_2} u_{\theta_1} \left[\frac{\cos \varphi_2}{\sin \varphi_1} (-\sin \varphi_1 f_1 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 f_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 f_3) + \right. \\ \left. \sin \varphi_2 \sin \varphi_1 - \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 f_2 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 f_3 + u_{x_2} u_{\theta_2} \sin \varphi_2 - \cos \varphi_1 f_1 - \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 f_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 f_3 - u_{\theta_1} u_{\theta_2} \sin \varphi_2 - \sin \varphi_1 f_1 x_2 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 f_2 x_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 f_3 x_2 \right]$$

$$7') -2u_{x_2}u_{\theta_1} \frac{\sin \varphi_2}{\sin \varphi_1} (-\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 f_2 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 f_3)$$

$$8') -2 \left(u_{x_2} u_{\theta_2} \sin \varphi_2 (-\sin \varphi_2 f_2 + \cos \varphi_2 f_3) \right)_{\theta_2} + \left(u_{\theta_2}^2 \sin \varphi_2 (-\sin \varphi_2 f_2 + \right. \\ \left. \cos \varphi_2 f_3 x_2 + 2u_{x_2} u_{\theta_2} \cos \varphi_2 \sin \varphi_1 - \sin \varphi_2 f_2 + \cos \varphi_2 f_3 + \sin \varphi_2 \sin \varphi_1 - \cos \varphi_2 f_2 + \right. \\ \left. \sin \varphi_2 f_3 - u_{\theta_2}^2 \sin \varphi_2 - \sin \varphi_2 f_2 x_2 + \cos \varphi_2 f_3 x_2 \right)$$

$$9') -2u_{x_2}u_{\theta_2} \frac{\sin \varphi_2}{\sin \varphi_1} (-\cos \varphi_2 f_2 + \sin \varphi_2 f_3)$$

$$10') (u_{x_3} u_{x_1} \cos \varphi_1 \cos \varphi_2)_{\theta_2} + (u_{x_3} u_{\theta_2} \cos \varphi_1 \cos \varphi_2)_{x_1} - (u_{x_1} u_{\theta_2} \cos \varphi_1 \cos \varphi_2)_{x_3} + \\ u_{x_3} u_{x_1} \cos \varphi_1 \sin \varphi_2$$

$$11') (u_{x_3} u_{x_2} \sin \varphi_1 \cos^2 \varphi_2)_{\theta_2} + (u_{x_3} u_{\theta_2} \sin \varphi_1 \cos^2 \varphi_2)_{x_2} - \\ (u_{x_2} u_{\theta_2} \sin \varphi_1 \cos^2 \varphi_2)_{x_3} + u_{x_3} u_{x_2} 2 \sin \varphi_2 \cos \varphi_2$$

$$12') -2u_{x_3}u_{x_2} \sin \varphi_2 \cos \varphi_2$$

$$13') (u_{x_3}^2 \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \sin \varphi_2)_{\theta_2} - u_{x_3}^2 \cos^2 \varphi_2 + u_{x_3}^2 \sin^2 \varphi_2$$

$$14') \ 2u_{x_3}^2 \cos^2 \varphi_2$$

$$15') \ [u_{x_3} u_{\theta_1} \cos \varphi_2 (-\sin \varphi_1 f_1 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 f_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 f_3)]_{\theta_2} + \\ [u_{x_3} u_{\theta_2} \cos \varphi_2 (-\sin \varphi_1 f_1 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 f_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 f_3)]_{\theta_1} - \\ [u_{\theta_1} u_{\theta_2} \cos \varphi_2 (-\sin \varphi_1 f_1 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 f_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 f_3)]_{x_3} - \\ u_{x_3} u_{\theta_1} \left[\frac{-\sin \varphi_2}{\sin \varphi_1} (-\sin \varphi_1 f_1 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 f_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 f_3) + \right. \\ \left. \cos \varphi_2 \sin \varphi_1 - \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 f_2 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 f_3 - u_{x_3} u_{\theta_2} \cos \varphi_2 - \cos \varphi_1 f_1 - \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 f_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 f_3 - u_{\theta_1} u_{\theta_2} \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 f_1 x_3 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 f_2 x_3 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 f_3 x_3 \right]$$

$$16') \ 2u_{x_3} u_{\theta_1} \frac{\cos \varphi_2}{\sin \varphi_1} (-\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 f_2 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 f_3)$$

$$17') \ 2[u_{x_3} u_{\theta_2} \cos \varphi_2 (-\sin \varphi_2 f_2 + \cos \varphi_2 f_3)]_{\theta_2} - [u_{\theta_2}^2 \cos \varphi_2 (-\sin \varphi_2 f_2 + \cos \varphi_2 f_3 x_3 - 2u_{x_3} u_{\theta_2} \cos \varphi_2 - \sin \varphi_2 \sin \varphi_1 - \sin \varphi_2 f_2 + \cos \varphi_2 f_3 + \cos \varphi_2 \sin \varphi_1 - \cos \varphi_2 f_2 - \sin \varphi_2 f_3 + u_{\theta_2}^2 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_2 f_2 x_3 + \cos \varphi_2 f_3 x_3)]_{\theta_1}$$

$$18') \ 2u_{x_3} u_{\theta_2} \frac{\cos \varphi_2}{\sin \varphi_1} (-\cos \varphi_2 f_2 - \sin \varphi_2 f_3)$$

$$19') \ -(u_{x_1}^2 \sin \varphi_1 \cos \varphi_1)_{\theta_1} + u_{x_1}^2 \cos^2 \varphi_1 - u_{x_1}^2 \sin^2 \varphi_1$$

$$20') \ 2u_{x_1}^2 \sin^2 \varphi_1$$

$$21') \ -(u_{x_1} u_{x_2} \sin^2 \varphi_1 \cos \varphi_2)_{\theta_1} - (u_{x_1} u_{\theta_1} \sin^2 \varphi_1 \cos \varphi_2)_{x_2} + \\ (u_{x_2} u_{\theta_1} \sin^2 \varphi_1 \cos \varphi_2)_{x_1} + u_{x_1} u_{x_2} 2 \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2$$

$$22') \ -2u_{x_1} u_{x_2} \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2$$

$$23') - (u_{x_1} u_{x_3} \sin^2 \varphi_1 \sin \varphi_2)_{\theta_1} - (u_{x_1} u_{\theta_1} \sin^2 \varphi_1 \sin \varphi_2)_{x_3} + \\ (u_{x_3} u_{\theta_1} \sin^2 \varphi_1 \sin \varphi_2)_{x_1} + u_{x_1} u_{x_3} 2 \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 \sin \varphi_2$$

$$24') - 2u_{x_1} u_{x_3} \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 \sin \varphi_2$$

$$25') - 2 \left(u_{x_1} u_{\theta_1} \sin \varphi_1 (-\sin \varphi_1 f_1 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 f_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 f_3) \right)_{\theta_1} + \\ \left(u_{\theta_1}^2 \sin \varphi_1 (-\sin \varphi_1 f_1 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 f_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 f_3) \right)_{x_1} + \\ 2u_{x_1} u_{\theta_1} \cos \varphi_1 (-\sin \varphi_1 f_1 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 f_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 f_3) + \\ 2u_{x_1} u_{\theta_1} \sin \varphi_1 (-\cos \varphi_1 f_1 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 f_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 f_3) - \\ u_{\theta_1}^2 \sin \varphi_1 (-\sin \varphi_1 f_{1x_1} + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 f_{2x_1} + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 f_{3x_1})$$

$$26') 2u_{x_1} u_{\theta_1} \sin \varphi_1 (\cos \varphi_1 f_1 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 f_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 f_3)$$

$$27') - \left(u_{x_1} u_{\theta_2} \sin \varphi_1 (-\sin \varphi_2 f_2 + \cos \varphi_2 f_3) \right)_{\theta_1} - \left(u_{x_1} u_{\theta_1} \sin \varphi_1 (-\sin \varphi_2 f_2 + \right. \\ \left. \cos \varphi_2 f_3 \right)_{\theta_2} + u_{\theta_1} u_{\theta_2} \sin \varphi_1 (-\sin \varphi_2 f_2 + \cos \varphi_2 f_3)_{x_1} + u_{x_1} u_{\theta_2} \cos \varphi_1 (-\sin \varphi_2 f_2 + \cos \\ \varphi_2 f_3)_{x_1} + u_{x_1} u_{\theta_1} (-\cos \varphi_2 f_2 + \sin \varphi_2 f_3)_{x_1} - u_{\theta_1} u_{\theta_2} \sin \varphi_1 (-\sin \varphi_2 f_2 + \cos \varphi_2 f_3)_{x_1}$$

$$28') (u_{x_2} u_{x_1} \cos^2 \varphi_1 \cos \varphi_2)_{\theta_1} + (u_{x_2} u_{\theta_1} \cos^2 \varphi_1 \cos \varphi_2)_{x_1} - \\ (u_{x_1} u_{\theta_1} \cos^2 \varphi_1 \cos \varphi_2)_{x_2} + u_{x_2} u_{x_1} 2 \cos \varphi_1 \sin \varphi_1 \cos \varphi_2$$

$$29') - 2u_{x_1} u_{x_2} \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2$$

$$30') (u_{x_2}^2 \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 \cos^2 \varphi_2)_{\theta_1} - u_{x_2}^2 \cos^2 \varphi_1 \cos^2 \varphi_2 + u_{x_2}^2 \sin^2 \varphi_1 \cos^2 \varphi_2$$

$$31') 2u_{x_2}^2 \cos^2 \varphi_1 \cos^2 \varphi_2$$

$$32') \left(u_{x_2} u_{x_3} \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_2 \right)_{\theta_1} + \left(u_{x_2} u_{\theta_1} \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_2 \right)_{x_3} - \\ \left(u_{x_3} u_{\theta_1} \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_2 \right)_{x_2} - u_{x_2} u_{x_3} \cos^2 \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_2 + \\ u_{x_2} u_{x_3} \sin^2 \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_2$$

$$33') 2u_{x_2} u_{x_3} \cos^2 \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_2$$

$$34') 2 \left[u_{x_2} u_{\theta_1} \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 (-\sin \varphi_1 f_1 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 f_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 f_3) \right]_{\theta_1} - \\ \left[u_{\theta_1}^2 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 (-\sin \varphi_1 f_1 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 f_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 f_3) \right]_{x_2} + \\ 2u_{x_2} u_{\theta_1} \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 (-\sin \varphi_1 f_1 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 f_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 f_3) - \\ 2u_{x_2} u_{\theta_1} \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 (-\cos \varphi_1 f_1 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 f_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 f_3) + \\ u_{\theta_1}^2 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 (-\sin \varphi_1 f_{1x_2} + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 f_{2x_2} + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 f_{3x_2})$$

$$35') -2u_{x_2} u_{\theta_1} \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 (\cos \varphi_1 f_1 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 f_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 f_3)$$

$$36') \left[u_{x_2} u_{\theta_2} \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 (-\sin \varphi_2 f_2 + \cos \varphi_2 f_3) \right]_{\theta_1} + \\ \left[u_{x_2} u_{\theta_1} \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 (-\sin \varphi_2 f_2 + \cos \varphi_2 f_3) \right]_{\theta_2} - \\ \left[u_{\theta_1} u_{\theta_2} \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 (-\sin \varphi_2 f_2 + \cos \varphi_2 f_3) \right]_{x_2} - \\ u_{x_2} u_{\theta_2} \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 (-\sin \varphi_2 f_2 + \cos \varphi_2 f_3) + \\ u_{x_2} u_{\theta_1} \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \frac{1}{\sin \varphi_1} (-\sin \varphi_2 f_2 + \cos \varphi_2 f_3) - \\ u_{x_2} u_{\theta_1} \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \frac{1}{\sin \varphi_1} (-\cos \varphi_2 f_2 + \sin \varphi_2 f_3) - \\ u_{\theta_1} u_{\theta_2} \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 (-\sin \varphi_2 f_{2x_2} + \cos \varphi_2 f_{3x_2})$$

$$37') \left(u_{x_3} u_{x_1} \cos^2 \varphi_1 \sin \varphi_2 \right)_{\theta_1} + \left(u_{x_3} u_{\theta_1} \cos^2 \varphi_1 \sin \varphi_2 \right)_{x_1} - \\ \left(u_{x_1} u_{\theta_1} \cos^2 \varphi_1 \sin \varphi_2 \right)_{x_3} + u_{x_3} u_{x_1} 2 \cos \varphi_1 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2$$

$$38') 2u_{x_1} u_{x_3} \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 \sin \varphi_2$$

$$39') (u_{x_3} u_{x_2} \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_2)_{\theta_1} + (u_{x_3} u_{\theta_1} \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_2)_{x_2} - \\ (u_{x_2} u_{\theta_1} \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_2)_{x_3} - u_{x_3} u_{x_2} \cos^2 \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_2 + \\ u_{x_3} u_{x_2} \sin^2 \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_2$$

$$40') 2u_{x_2} u_{x_3} \cos^2 \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_2$$

$$41') (u_{x_3}^2 \cos \varphi_1 \sin \varphi_1 \sin^2 \varphi_2)_{\theta_1} - u_{x_3}^2 \cos^2 \varphi_1 \sin^2 \varphi_2 + u_{x_3}^2 \sin^2 \varphi_1 \sin^2 \varphi_2$$

$$42') 2u_{x_3}^2 \cos^2 \varphi_1 \sin^2 \varphi_2$$

$$43') 2[u_{x_3} u_{\theta_1} \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 (-\sin \varphi_1 f_1 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 f_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 f_3)]_{\theta_1} - \\ [u_{\theta_1}^2 \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 (-\sin \varphi_1 f_1 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 f_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 f_3)]_{x_3} + \\ 2u_{x_3} u_{\theta_1} \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 (-\sin \varphi_1 f_1 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 f_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 f_3) - \\ 2u_{x_3} u_{\theta_1} \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 (-\cos \varphi_1 f_1 - \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 f_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 f_3) + \\ u_{\theta_1}^2 \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 (-\sin \varphi_1 f_{1x_3} + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 f_{2x_3} + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 f_{3x_3})$$

$$44') -2u_{x_3} u_{\theta_1} \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 (\cos \varphi_1 f_1 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 f_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 f_3)$$

$$45') [u_{x_3} u_{\theta_2} \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 (-\sin \varphi_2 f_2 + \cos \varphi_2 f_3)]_{\theta_1} + \\ [u_{x_3} u_{\theta_1} \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 (-\sin \varphi_2 f_2 + \cos \varphi_2 f_3)]_{\theta_2} - \\ [u_{\theta_1} u_{\theta_2} \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 (-\sin \varphi_2 f_2 + \cos \varphi_2 f_3)]_{x_3} + \\ u_{x_3} u_{\theta_2} \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 (-\sin \varphi_2 f_2 + \cos \varphi_2 f_3) - u_{x_3} u_{\theta_1} \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 (-\sin \varphi_2 f_2 + \\ \cos \varphi_2 f_3) - u_{x_3} u_{\theta_1} \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 (-\cos \varphi_2 f_2 + \sin \varphi_2 f_3) + u_{\theta_1} u_{\theta_2} \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 (-\sin \varphi_2 \\ f_{2x_3} + \cos \varphi_2 f_{3x_3})$$

bulunur. Sonuçta,

$$L_2 L_1 u = J(u) + \sum_{i=1}^5 d_i(u)$$

elde edilir.

Kabul edelim ki $f = (f_1, f_2, f_3)$ fonksiyonu aşağıdaki şartı sağlasın.

$$\sum_{i,j=1}^3 f_{ix_j} \xi^i \xi^j \geq \alpha |\xi|^2, \quad (2.3)$$

Herhangi bir $\xi \in \mathbb{R}^3$, kâfi derecede büyük değerler alan α , sadece $f, f_{\theta_i} (i = 1, 2)$, $|f_{ix_j} + f_{jx_i}| (i \neq j, i, j = 1, 2, 3)$ ve $d = |f_{2x_2} - f_{3x_3}|$ değerlerine bağlıdır. Üstelik aşağıdaki eşitsizliğin sağlandığını düşünürüz:

$$J(u) \geq \alpha_1 (|\nabla_x u| + |\nabla_\theta u|), \quad \alpha_1 > 0 \quad (2.4)$$

Açıktır ki böyle fonksiyonlar vardır. Gerçekten $J(u)$ ifadesinin açılımındaki $u_{\theta_1}^2$ nin katsayısının α sayısından büyük olduğunu ispatlamak kolaydır. Bu sonuca varmak için (2.3) eşitsizliğinde aşağıdaki kabullerin göz önünde bulundurulması yeterlidir:

$$\xi_1 = -\sin \varphi_1, \xi_2 = \cos \varphi_1 \cos \varphi_2, \xi_3 = \cos \varphi_1 \sin \varphi_2.$$

$J(u)$ ifadesinin açılımındaki $u_{\theta_2}^2$ nin katsayısının α sayısından büyük olduğu da benzer şekilde ispatlanabilir. Bu durumda aşağıdaki kabullerin göz önünde bulundurulması yeterlidir:

$$\xi_1 = 0, \xi_2 = -\sin \varphi_2, \xi_3 = \cos \varphi_2.$$

Eğer $f, f_{\theta_i} (i = 1, 2), d$ ve $|f_{ix_j} + f_{jx_i}| (i \neq j, i, j = 1, 2, 3), \alpha$ ile karşılaştırıldığında kâfi derecede küçük ise (2.4) bulunur.

Problem 2.2 f ve $\bar{F}$ bilinen fonksiyonlar, (2.5) denkleminin çözümünün izi Γ da sıfır ve λ , (2.2) şartlarını sağlıyor ise

$$L_1 u = \lambda + \bar{F} \quad (2.5)$$

denklemini sağlayan Ω da tanımlı bir (u, λ) fonksiyon çiftini bulunuz.

II. Şimdi (2.1) probleminin çözümünün tekliğini görelim.

Teorem 2.1. $f(x, v) = (f_1, f_2, f_3) \in C^2(\Omega)$ olsun ve kabul edelim ki (2.3) ve (2.4) eşitsizliklerini sağlayan bir α sayısı seçilmiştir. O zaman 2.1 probleminin en çok bir u çözümü vardır öyle ki $u \in \Gamma(A)$ ve $\lambda \in L_2(\Omega)$ sağlanır.

İspat: $u \in \Gamma(A)$ ve $\lambda \in L_2(\Omega)$ olmak üzere problem 2.1 in türdeş versiyonunun çözümünü (u, λ) olarak kabul edelim. (2.1) ve (2.2) ifadelerinden $Au = 0$ elde edilir. Bundan dolayı $\{u_k\} \subset M^0$ dizisi vardır öyle ki $k \rightarrow \infty$ iken

$$\begin{aligned} 1. & u_k \rightharpoonup u, L_2 \text{ de zayıf yakınsak} \\ 2. & \langle Au_k, u_k \rangle \rightarrow 0 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Aşağıdaki eşitlik doğrudur.

$$-2\langle Au_k, u_k \rangle = \int_{\Omega} J(u_k) d\Omega \tag{2.7}$$

Gerçekten,

$$\begin{aligned} -2Au_k u_k &\equiv -2 \left[\left(-\sin \varphi_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \cos \varphi_2 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \frac{\partial}{\partial \theta_2} (L_1 u_k) \right. \\ &\quad \left. + \left(-\sin \varphi_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \frac{\partial}{\partial \theta_1} (L_1 u_k) \right] u_k \\ -2Au_k u_k &\equiv 2 \left[\sin \varphi_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial}{\partial \theta_2} (L_1 u_k) \right) u_k \right] - 2 \left[\cos \varphi_2 \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial}{\partial \theta_2} (L_1 u_k) \right) u_k \right] \\ &\quad + 2 \left[\sin \varphi_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial}{\partial \theta_1} (L_1 u_k) \right) u_k \right] - 2 \left[\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial}{\partial \theta_1} (L_1 u_k) \right) u_k \right] \\ &\quad - 2 \left[\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial}{\partial \theta_1} (L_1 u_k) \right) u_k \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-2Au_k u_k &\equiv 2 \left[u_k \frac{\partial}{\partial \theta_2} (L_1 u_k) \sin \varphi_2 \right]_{x_2} - 2 \frac{\partial}{\partial x_2} u_k \frac{\partial}{\partial \theta_2} (L_1 u_k) \sin \varphi_2 \\
&\quad - 2 \left[u_k \frac{\partial}{\partial \theta_2} (L_1 u_k) \cos \varphi_2 \right]_{x_3} + 2 \frac{\partial}{\partial x_3} u_k \frac{\partial}{\partial \theta_2} (L_1 u_k) \cos \varphi_2 \\
&\quad + 2 \left[u_k \frac{\partial}{\partial \theta_1} (L_1 u_k) \sin \varphi_1 \right]_{x_1} - 2 \frac{\partial}{\partial x_1} u_k \frac{\partial}{\partial \theta_1} (L_1 u_k) \sin \varphi_1 \\
&\quad - 2 \left[u_k \frac{\partial}{\partial \theta_1} (L_1 u_k) \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \right]_{x_2} + 2 \frac{\partial}{\partial x_2} u_k \frac{\partial}{\partial \theta_1} (L_1 u_k) \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \\
&\quad - 2 \left[u_k \frac{\partial}{\partial \theta_1} (L_1 u_k) \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \right]_{x_3} + 2 \frac{\partial}{\partial x_3} u_k \frac{\partial}{\partial \theta_1} (L_1 u_k) \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \\
-2Au_k u_k &\equiv 2 \left[u_k \frac{\partial}{\partial \theta_2} (L_1 u_k) \sin \varphi_2 \right]_{x_2} - 2 \left[u_k \frac{\partial}{\partial \theta_2} (L_1 u_k) \cos \varphi_2 \right]_{x_3} \\
&\quad + 2 \left[u_k \frac{\partial}{\partial \theta_1} (L_1 u_k) \sin \varphi_1 \right]_{x_1} - 2 \left[u_k \frac{\partial}{\partial \theta_1} (L_1 u_k) \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \right]_{x_2} \\
&\quad - 2 \left[u_k \frac{\partial}{\partial \theta_1} (L_1 u_k) \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \right]_{x_3} + 2 \frac{\partial}{\partial \theta_2} (L_1 u_k) (\nabla_x u_k \cdot v'') \\
&\quad + 2 \frac{\partial}{\partial \theta_1} (L_1 u_k) (\nabla_x u_k \cdot v') \tag{2.8}
\end{aligned}$$

Sonrasında, $u_k \in M^0$ olmak üzere Lemma 2.1 den yararlanarak Ω üzerinde (2.8) eşitliğinin integralini alarak aşağıdaki eşitliği elde ederiz.

$$-2\langle Au_k, u_k \rangle = \int_{\Omega} \left[J(u_k) + \sum_{i=1}^5 d_i(u_k) \right] d\Omega = \int_{\Omega} J(u_k) d\Omega$$

u_k, φ_2 ye göre 2π periyotludur ve Γ da $u_k = 0$ dır ve (u_k ifadesinin φ_2 ye göre türevlerini içeren bazı terimleri hariç) $\frac{\partial}{\partial \theta_1}$ içeren tüm terimlerde $\sin \varphi_1$ çarpanının varlığı yüzünden Ω üzerinde integral alındığında $\sum_{i=1}^5 d_i(u_k)$ diverjans terimleri yok olur. u_k ifadesinin φ_2 ye özel olarak bağlı olmasından dolayı bu terimler $\sin \varphi_1$ çarpanını içerirler ($u_k(x, \cos \varphi_1, \sin \varphi_1 \cos \varphi_2, \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)$).

D tanım kümesi sınırlı, $u_k \in M^0$ ve (2.4) den aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz.

$$\|u_k\|^2 \leq C \int_{\Omega} J(u_k) d\Omega$$

$C > 0$ ve C , k ya bağılı değildir.

Sonrasında (2.6) ve (2.7) den aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz.

$$\|u\|^2 \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k\|^2 \leq C \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} J(u_k) d\Omega = -C \lim_{k \rightarrow \infty} \langle Au_k, u_k \rangle = 0$$

Buradan $u=0$ olduğu açıktır ve (2.1) eşitliğinden $\lambda = 0$ dir. Böylece teorem 2.1 ispatlandı.

III. Problem 2.2 için varlık teoreminin ispatına geçelim.

Teorem 2.2 Teorem 2.1 in hipotezleriyle, $\bar{F} \in \bar{H}_{1,2}(\Omega)$ olsun. Problem 2.2 nin bir (u, λ) çözümü vardır öyle ki $u \in \Gamma(A), \lambda \in L_2(\Omega)$ dir. Dahası

$$\|u\|_{\bar{H}_1(\Omega)} + \|\lambda\| \leq C \|\bar{F}\|_{\bar{H}_1(\Omega)}$$

$C > 0$ ve C , f ve D bölgesine bağlıdır.

İspat: $\mathcal{F} = v' \cdot \nabla_x \bar{F}_{\theta_1} + v'' \cdot \nabla_x \bar{F}_{\theta_2}$

Şartı ile birlikte aşağıdaki yardımcı problemi ele alalım.

$$\begin{aligned} Au &\equiv \left(-\sin \varphi_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \cos \varphi_2 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \frac{\partial}{\partial \theta_2} (L_1 u) \\ &\quad + \left(-\sin \varphi_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \frac{\partial}{\partial \theta_1} (L_1 u) \\ &= \mathcal{F} \end{aligned} \tag{2.9}$$

$$u|_{\Gamma} = 0, \Gamma = \partial D \times (0, 2\pi) \times (0, \pi) \tag{2.10}$$

2.2 problemi, (2.9)-(2.10) problemine dönüşür.

(2.9)-(2.10) probleminin yaklaşık çözümünü aşağıdaki formda arayacağız.

$$u_N = \sum_{i,n}^N \left\{ a_{0,i}^{(n)} P_n(\cos \varphi_1) + \sum_{m=1}^n \left[a_{m,i}^{(n)} \cos m\varphi_2 + b_{m,i}^{(n)} \sin m\varphi_2 \right] P_{n,m}(\cos \varphi_1) \right\} w_i.$$

Bilinmeyen sabitler $a_{0,i}^{(n)}, a_{m,i}^{(n)}, b_{m,i}^{(n)}$ aşağıdaki bağıntılardan bulunur.

$$\langle Au_N - \mathcal{F}, w_i P_n(\cos \varphi_1) \rangle = 0 \quad (2.11)$$

$$\langle Au_N - \mathcal{F}, w_i P_{n,m}(\cos \varphi_1) \cos m\varphi_2 \rangle = 0 \quad (2.12)$$

$$\langle Au_N - \mathcal{F}, w_i P_{n,m}(\cos \varphi_1) \sin m\varphi_2 \rangle = 0 \quad (2.13)$$

burada $n, i=1, 2, \dots, N$; $m=1, 2, \dots, n$

(2.11)-(2.13) sistemindeki bağıntıların toplam sayısının, $a_{0,i}^{(n)}, a_{m,i}^{(n)}, b_{m,i}^{(n)}$ bilinmeyen sabitlerinin sayısına eşit olduğu kolaylıkla görülür, şöyle ki bu sayı aşağıdaki bağıntıyla bulunabilir.

$$l(N) = N^2 + \sum_{n=1}^N n(n+1)$$

Teorem 2.2 nin kabulleri altında (2.11)-(2.13) lineer cebirsel denklemler sisteminin $\forall \mathcal{F} \in L_2(\Omega)$ olmak üzere bir tek $u_N = (a_{0,i}^{(n)}, a_{m,i}^{(n)}, b_{m,i}^{(n)})$ $n, i=1, 2, \dots, N$; $m=1, 2, \dots, n$ çözümünün olduğunu ispatlayalım.

Bunun için (2.11)-(2.13) sisteminin homojen halini düşünelim ($\mathcal{F} = 0$). (2.11) da ki (i,n) denklemini $-2a_{0,i}^{(n)}$ ile , (2.12) da ki (i,n,m) denklemini $-2a_{m,i}^{(n)}$ ile , (2.13) da ki (i,n,m) denklemini $-2b_{m,i}^{(n)}$ ile çarpalım. Sonra (i,n) ye göre 1 den N ye kadar ve m değişkenine göre 1 den n ye kadar toplamını alalım. O zaman

$$-2\langle Au_N, u_N \rangle = 0$$

elde ederiz.

Böylece (2.7) eşitliğinden

$$\int_{\Omega} J(u_N) d\Omega = 0 \quad (2.14)$$

Teorem 2.2 nin kabullerine göre

$$J(u_N) \geq \alpha_1 (|\nabla_x u_N|^2 + |\nabla_\theta u_N|^2)$$

Bundan dolayı (2.14) ve Γ da $u_N = 0$ olduğundan Ω da $u_N = 0$ dır.

$$\{w_i P_n, w_i \cos m\varphi_2 P_{n,m}(\cos \varphi_1), w_i \sin m\varphi_2 P_{n,m}(\cos \varphi_1)\} (i, n = 1, 2, 3, \dots; m = 1, 2, 3, \dots, n)$$

sistemi lineer bağımsızdır, bundan dolayı $a_{0,i}^{(n)} = a_{m,i}^{(n)} = b_{m,i}^{(n)} = 0$ dır
($i, n = 1, 2, 3, \dots, N; m = 1, 2, 3, \dots, n$).

Böylece (2.11)-(2.13) lineer cebirsel denklemler sisteminin homojen versiyonunun sadece sıfır çözümü vardır ve bundan dolayı (2.11)-(2.13) orijinal homojen olmayan sistem $\forall \mathcal{F} \in L_2(\Omega)$ için bir tek u_N çözümüne sahiptir.

Şimdi (2.11)-(2.13) sisteminin çözümünden sonra $a_{0,i}^{(n)}, a_{m,i}^{(n)}, b_{m,i}^{(n)}$ sabitleriyle belirlediğimiz u_N yi (2.9) denkleminin sağ tarafındaki $\mathcal{F}$ nin terimleriyle değerlendirelim. Bu sonuç için (2.11) de ki (i,n) denklemini $-2a_{0,i}^{(n)}$ ile , (2.12) de ki (i,n,m) denklemini $-2a_{m,i}^{(n)}$ ile , (2.13) de ki (i,n,m) denklemini $-2b_{m,i}^{(n)}$ ile çarpalım. Sonra (i,n) ye göre 1 den N ye kadar ve m değişkenine göre 1 den n ye kadar topladığımızda aşağıdaki eşitliği elde ederiz.

$$-2\langle Au_N, u_N \rangle = -2\langle F, u_N \rangle \quad (2.15)$$

Dikkatle bakıldığında $u_N/\Gamma = 0$ olduğundan elde edilen eşitliğin (2.15) sağ tarafından aşağıdaki sonucu hesap edebiliriz.

$$-2 \int_{\Omega} \mathcal{F} u_N d\Omega \leq \beta \int_{\Omega} |\nabla_x \bar{F}| d\Omega + \beta^{-1} \int_{\Omega} |\nabla_{\theta} u_N|^2 d\Omega,$$

$$\beta^{-1} < \infty \text{ ve } \mathcal{F} = v' \cdot \nabla_x \bar{F}_{\theta_1} + v'' \cdot \nabla_x \bar{F}_{\theta_2}.$$

$$\begin{aligned} -2\langle \mathcal{F}, u_N \rangle &= -2 \int_{\Omega} \mathcal{F} \cdot u_N d\Omega \leq \left| -2 \int_{\Omega} \mathcal{F} u_N d\Omega \right| = \left| -2 \int_{\Omega} (v' \cdot \nabla_x \bar{F}_{\theta_1} + v'' \cdot \nabla_x \bar{F}_{\theta_2}) u_N d\Omega \right| \\ &= \left| -2 \int_{\Omega} (v' \cdot (\bar{F}_{\theta_1 x_1}, \bar{F}_{\theta_1 x_2}, \bar{F}_{\theta_1 x_3}) + v'' \cdot (\bar{F}_{\theta_2 x_1}, \bar{F}_{\theta_2 x_2}, \bar{F}_{\theta_2 x_3})) u_N d\Omega \right| \\ &= \left| -2 \int_{\Omega} (v' \cdot \frac{\partial}{\partial \theta_1} \nabla_x \bar{F} + v'' \cdot \frac{\partial}{\partial \theta_2} \nabla_x \bar{F}) u_N d\Omega \right| \\ &= \left| -2 \int_{\Omega} v \nabla_x \bar{F} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta_1} u_N d\Omega + \int_{\Omega} v \nabla_x \bar{F} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta_2} u_N d\Omega \right| \\ &\leq \frac{\delta}{2} \int_{\Omega} |\nabla_x \bar{F}|^2 d\Omega + \frac{2}{\delta} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial}{\partial \theta_1} u_N \right|^2 d\Omega + \frac{\delta}{2} \int_{\Omega} |\nabla_x \bar{F}|^2 d\Omega + \frac{2}{\delta} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial}{\partial \theta_2} u_N \right|^2 d\Omega \\ &\leq \beta \int_{\Omega} |\nabla_x \bar{F}|^2 d\Omega + \beta^{-1} \int_{\Omega} |\nabla_{\theta} u_N|^2 d\Omega \\ \Rightarrow \quad &-2 \int_{\Omega} \mathcal{F} \cdot u_N d\Omega \leq \beta \int_{\Omega} |\nabla_x \bar{F}|^2 d\Omega + \beta^{-1} \int_{\Omega} |\nabla_{\theta} u_N|^2 d\Omega \end{aligned}$$

Daha önce gösterildiği gibi (2.15) ün sol tarafı

$$\int_{\Omega} J(u_k) d\Omega$$

ya eşittir. Bundan dolayı (2.15) den

$$\int_{\Omega} (|\nabla_x u_N|^2 + |\nabla_{\theta} u_N|^2) d\Omega \leq \int_{\Omega} J(u_N) d\Omega \leq \beta \int_{\Omega} |\nabla_x \bar{F}|^2 d\Omega + \beta^{-1} \int_{\Omega} |\nabla_{\theta} u_N|^2 d\Omega$$

$\int_{\Omega} J(u_N) d\Omega$ ifadesinin açılımına bakılırsa oradan açıkça görülür ki

$$\int_{\Omega} (|\nabla_x u_N|^2 + |\nabla_{\theta} u_N|^2) d\Omega \leq \int_{\Omega} J(u_N) d\Omega$$

Ω sınırlı ve $u_N/\Gamma = 0$ olduğundan aşağıdaki eşitsizlik bulunur.

$$\|u_N\|_{\bar{H}_1^0(\Omega)} \leq C \|\nabla_x \bar{F}\|$$

C sabiti N sayısına bağlı değildir.

Son eşitsizliği kullanarak bir $\{u_N\}$ dizisinin varlığından bahsedebiliriz öyle ki $N \rightarrow \infty$

$$u_{Nx_i} \rightharpoonup u_{x_i}$$

$$u_{N\theta_j} \rightharpoonup u_{\theta_j}$$

i=1,2,3 ; j=1,2

$L_2(\Omega)$ uzayında zayıf yakınsak ve $u \in \bar{H}_1^0(\Omega)$, $\{u_N\} \subset \bar{H}_1^0(\Omega)$ dizisinin zayıf limitidir.

Buradan

$$\|u\|_{\bar{H}_1^0(\Omega)} \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \|u_N\|_{\bar{H}_1^0(\Omega)} \leq C \|\nabla_x \bar{F}\| \leq C \|\bar{F}\|_{\bar{H}_1(\Omega)}$$

$$(\|\bar{F}\|_{\bar{H}_1(\Omega)} = \|\bar{F}\|_{L_2(\Omega)} + \|\nabla_x \bar{F}\|_{L_2(\Omega)} \Rightarrow \|\nabla_x \bar{F}\|_{L_2(\Omega)} \leq \|\bar{F}\|_{\bar{H}_1(\Omega)})$$

(2.11)-(2.13) denklemlerinde, yakınsak diferansiyel operatörleri fonksiyonlara dönüştürelim.

$$P_{n,m}(\cos \varphi_1) \cos m\varphi_2, P_{n,m}(\cos \varphi_1) \sin m\varphi_2, P_n(\cos \varphi_1)$$

$u_N/\Gamma = 0$ ve $d\Omega = d \sin \varphi_1 dD d\varphi_1 d\varphi_2$ olduğundan $N \geq \bar{n} \geq \bar{m}$ için

$$\langle L_1 u_N - \bar{F}, \left[\frac{\partial}{\partial \theta_1} (\nabla_x r_{\bar{n},\bar{m}}^{(l)} \cdot v') + \frac{\partial}{\partial \theta_2} (\nabla_x r_{\bar{n},\bar{m}}^{(l)} \cdot v'') + (\nabla_x r_{\bar{n},\bar{m}}^{(l)} \cdot v') \cot \varphi_1 \right] \rangle = 0 \quad (2.16)$$

$$l = 1, 2 \quad ; \quad r_{\bar{n},\bar{m}}^{(1)} = P_{\bar{n},\bar{m}}(\cos \varphi_1) \sin \bar{m}\varphi_2, \\ r_{\bar{n},\bar{m}}^{(2)} = P_{\bar{n},\bar{m}}(\cos \varphi_1) \cos \bar{m}\varphi_2, \quad \bar{m} = 0, 1, \dots, \bar{n}, \quad P_{\bar{n},0} = P_{\bar{n}}$$

(2.11)-(2.13) ifadelerinden,

$$\begin{aligned} \langle A u_N - F, r_{\bar{n},\bar{m}}^{(l)} \rangle &= 0 \\ \langle L_2 L_1 u_N - L_2 \bar{F}, r_{\bar{n},\bar{m}}^{(l)} \rangle &= 0 \\ \langle L_2 (L_1 u_N - \bar{F}), r_{\bar{n},\bar{m}}^{(l)} \rangle &= 0 \\ \langle L_1 u_N - \bar{F}, L_2^* (r_{\bar{n},\bar{m}}^{(l)}) \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (2.16)$$

elde edilir.

u_N dizisi ve onun x_i ve θ_j ($i = 1, 2, 3; j = 1, 2$) göre birinci dereceden türevleri $N \rightarrow \infty$, $L_2(\Omega)$ uzayında zayıf yakınsaktır. (2.16) eşitliğinde limite geçebiliriz.

Çünkü $r_{\bar{n},\bar{m}}^{(l)}$ fonksiyonlarının kümesinin lineer gereni $\bar{H}_{1,2}^0(\Omega)$ uzayında her yerde yoğundur.

(2.16) eşitliğinde $N \rightarrow \infty$ için limite geçerse $\forall \eta \in \bar{H}_{1,2}^0(\Omega)$ için aşağıdaki eşitliği elde ederiz.

$$\langle L_1 u - \bar{F}, \left[\frac{\partial}{\partial \theta_1} (\nabla_x \eta \cdot v') + \frac{\partial}{\partial \theta_2} (\nabla_x \eta \cdot v'') + (\nabla_x \eta \cdot v') \cot \varphi_1 \right] \rangle = 0$$

Teoremin ispatını bitirmek için $N \rightarrow \infty$ iken

$$\langle Au_N, u_N \rangle \rightarrow \langle Au, u \rangle$$

olduğunu göstermeliyiz.

$$P_N Au_N = P_N \mathcal{F}$$

$N \rightarrow \infty$, $P_N \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$, $L_2(\Omega)$ de kuvvetli yakınsak

$\Rightarrow P_N Au_N \rightarrow \mathcal{F} = Au$ kuvvetli yakınsak

$$\langle P_N Au_N, u_N \rangle \rightarrow \langle Au, u \rangle, N \rightarrow \infty$$

$u_N \rightharpoonup u$, zayıf yakınsak olduğundan $P_N Au_N \rightarrow Au$ kuvvetli yakınsaktır. u_N, M_N üzerinde ve P_N ortonormal projektör olduğundan $P_N u_N = u_N$ eşitliği elde edilir.

$$\langle Au_N, u_N \rangle = \langle Au_N, P_N u_N \rangle = \langle P_N Au_N, u_N \rangle \rightarrow \langle Au, u \rangle$$

KAYNAKLAR

Amirov AKh (2001) *Integral Geometry and Inverse Problems for Kinetic Equations*, VSP, Utrecht, 201p

Balcı M (1999) *Analiz* , Balcı Yayınları, Ankara.

Donald LB and Kenneth LC (1973) *Lineer Algebra with Differential Equations*, New York, 514-515.

Dunford N and Schwartz JT (1988) *Lineer Operators Part 1: General Theory*, John Wiley and Sons, New York.

Kolmogorov AN and Fomin SV (1970) *Introductory Real Analysis*, Prentice-Hall International Inc. London.

Kreyszig E (1978) *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley and Sons Inc. , London.

Mikhailov VP (1978) *Partial Differential Equations*, Mir Publisher, Moscow, 396p.

Smirnov VI (1969) *A Course in Higher Matematics*, Nauka, Moscow

Yaşar İB (2005) *Uygulamalı Matematik*, Siyasal Kitabevi, Ankara, 289s.

ÖZGEÇMİŞ

Fatma ÇİÇEK UZUN, 1980’de Muş’ta doğdu. İlk ve ortaöğrenimini Bursa’da tamamladıktan sonra 1997 yılında başladığı Gazi Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği bölümünden 2001 yılında mezun oldu. 2002 yılında Bursa’da MEB’e bağlı bir okulda öğretmenlik görevine başladı. Şu anda MEB’e bağlı Zonguldak Atatürk Anadolu Lisesinde Matematik öğretmeni olarak görev yapmaktadır.

ADRES BİLGİLERİ

Adres :Meşrutiyet mah. Cengiz Topel cad.
44/4
Merkez-ZONGULDAK

Tel : (372)2536136

E-posta : fcicekuzun@hotmail.com