

**ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**FUZZY TOPOLOJİK UZAYLARINDA HOMOTOPİ GRUPLARININ
KARAKTERİZASYONU**

Tolga TERZİOĞLU

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**ANKARA
2008**

Her hakkı saklıdır

TEZ ONAYI

Tolga TERZIOĞLU tarafından hazırlanan “**Fuzzy Topolojik Uzaylarında Homotopi Gruplarının Karakterizasyonu**” adlı tez çalışması 16/01/2008 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Sabahattin BALCI

Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü

Jüri Üyeleri :

Başkan : Prof. Dr. Sabahattin BALCI

Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü

Üye : Prof. Dr. Mustafa BAYRAKTAR

TOBB Ekonomi Ve Teknoloji Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü

Üye : Yrd. Doç. Dr. Erdal GÜNER

Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof.Dr.Ülkü MEHMETOĞLU

Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

FUZZY TOPOLOJİK UZAYLARINDA HOMOTOPİ GRUPLARININ KARAKTERİZASYONU

Tolga TERZİOĞLU

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Prof. Dr Sabahattin BALCI

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde temel kavramlar verilmiştir. Üçüncü bölümde fuzzy topolojik kavramlar üzerinde durulmuştur. Dördüncü bölümde fuzzy eğri ve fuzzy homotopi kavramı tarif edilerek bir fuzzy topolojik uzayın esas grubu oluşturulmuştur. Beşinci bölümde ise bir fuzzy topolojik uzayın esas grubu ile ilgili karakterizasyonlar verilmiştir.

2007, 53 sayfa

Anahtar Kelimeler : fuzzy cümle, fuzzy topolojik uzay, fuzzy irtibatlılık, fuzzy eğri, homotopi, fuzzy homotopi, homotopi grubu

ABSTRACT

Master Thesis

CHARACTERIZATION OF HOMOTOPY GROUPS ON FUZZY TOPOLOGICAL SPACES

Tolga TERZİOĞLU

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor : Prof. Dr Sabahattin BALCI

This thesis consist of five parts. The first part was reserved for the introduction. In the second part the basic definitions were given. In the third part, fuzzy topological concepts were studied. In the fourth part the fundamental group of a fuzzy topological space was formed by defining fuzzy path and fuzzy homotopy. Finally in the fifth part the characterizations about the fundamental group of a fuzzy topological space were given.

2007, 53 pages

Key Words : fuzzy set, fuzzy topological space, fuzzy connectivity, fuzzy path, homotopy, homotopy group

TEŞEKKÜR

Çalıőmalarımı yönlendiren, çalıőmalarım süresince yakın ilgi ve desteklerini gördüğüm danışman hocam sayın Prof. Dr Sabahattin BALCI'ya, araőtırmalarımın her aşamasında bilgi, öneri ve yardımlarını esirgemeyen sayın hocam Yrd. Doç. Dr Erdal GÜNER'e, çalıőmalarım süresince manevi desteğini eksik etmeyen sayın hocam Doç. Dr Ayhan ŐERBETÇİ'ye en derin duygularıyla teşekkür ederim.

Tolga TERZIOĞLU

Ankara, Ocak 2008

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
SİMGELER DİZİNİ.....	v
1.GİRİŞ.....	1
2.TEMEL KAVRAMLAR.....	3
2.1 Cebirsel Kavramlar.....	3
2.2 Topolojik Kavramlar.....	5
3. FUZZY TOPOLOJİK KAVRAMLAR.....	11
3.1 Fuzzy Cümle Kavramı.....	11
3.2 Fuzzy Topolojik Uzay.....	20
3.3 Fuzzy İrtibatlılık.....	24
4. FUZZY TOPOLOJİK UZAYDA FUZZY EĞRİLER VE ESAS GRUP.....	28
4.1 Fuzzy Eğri.....	28
4.2 Fuzzy Homotopi ve Esas Grup.....	30
5.KARAKTERİZASYONLAR.....	41
KAYNAKLAR.....	52
ÖZGEÇMİŞ.....	53

SİMGELER DİZİNİ

A	A fuzzy cümle
μ_A	A fuzzy cümlelerin üyelik fonksiyonu
A_0	A fuzzy cümlelerin desteği
a_λ	Fuzzy nokta
(X, T)	Fuzzy topolojik uzay
(A, T_A)	Fuzzy alt uzay
$\alpha(A)$	Fuzzy eğri
$\simeq_{rel.(0,1)}$	(0,1) e nazaran rölatif fuzzy homotopi
\simeq_{a_λ}	a_λ fuzzy noktasına göre fuzzy homotopi
$[\alpha(A)]$	$\alpha(A)$ fuzzy eğrinin homotopi sınıfı
$\Omega(X, a_\lambda)$	a_λ fuzzy noktasında tüm kapalı fuzzy eğrilerin cümlesi
$\Pi_1(X, a_\lambda)$	X fuzzy topolojik uzayının a_λ fuzzy noktasındaki esas grubu
(X, a_λ)	Fuzzy noktalı fuzzy topolojik uzay

1. GİRİŞ

Tarih boyunca önermelerin doğru ya da yanlış olduğunu ilk öne atan Perminedes' den sonra düşünürler bu kesinlik çizgisinin dışında da değerler olabileceğini söylemişlerdir. Bunlardan Heraclitus bir şey ya doğru ya da yanlış olacak diye bir kural olmadığını belirtmiştir. Plato ise doğru ya da yanlışın iç içe girebileceğini savunmuştur. Lukasiewicz, Aristo'nun ikili mantığına alternatif "olası" değerini getirmiş, doğru ile yanlış arasında sonsuz değerler alınabileceğini söylemiştir.

Zadeh (1965) tarafından bu sonsuz değerler $[0, 1]$ arasında tanımlanarak fuzzy mantığı oluşturulmuştur. Dilimize "bulanık" veya "belirtisiz" olarak çevrilen fuzzy kelimesi ilk olarak literatüre, fuzzy cümle kavramı ve cümleler teorisi üzerine bazı özellikler incelenerek kazandırılmıştır. Fuzzy mantığı geliştirilene kadar klasik cümle, verilmiş belli bir evrendeki nesnelere iki gruba ayıracak şekilde tanımlar. Eğer nesnelere eleman olarak kabul ediliyor ise cümleye ait, eleman olarak kabul edilmiyor ise cümleye ait değildir. Fuzzy cümle; her bir olası elemana onun fuzzy cümle içindeki üyelik derecesini gösteren bir değer verilerek tanımlanabilir. Böylece elemanlar, büyük veya küçük olması oranında fuzzy cümleye çok veya az ait olurlar. Bu üyelik dereceleri $[0, 1]$ aralığında bulunan reel sayı değerleri ile temsil edilir.

Bununla birlikte kesinlik kavramının yanı sıra birçok belirsizlik karakteristiği de sık sık kullanılır ve burada geçiş derece derecedir. Fuzzy cümle karmaşıklığı azaltmak için sınıfın elemanlarını eleman olmayanlardan ayıran kesinliği ortadan kaldırarak belirsizliği devreye sokar. Belirsizliği ifade etmek için " Ahmet yaşlıdır " örneği verilebilir. Bu örnek bize Ahmet' in yaşını tam olarak ifade etmiyor. Fakat " Ahmet 50-55 yaşlarındadır " dendiğinde ise bir hassaslık söz konusudur. Kesinsizlik ise olasılık kavramının bir getirisidir ve bu üç durum birlikte karşımıza çıkabilir. Olasılık ile fuzzy mantık arasındaki en önemli fark, fuzzy mantığın olayların oluşması olasılığından çok oluşma derecesiyle ilgilenen bir kavram olmasıdır. 1968 de Chang'ın fuzzy topolojik uzayı tanımlamasından sonra genel topolojideki kavramlar fuzzy topolojik uzaylara taşınmaya başlanmıştır.

Bu çalışmanın ikinci bölümünde bazı temel cebirsel ve topolojik kavramlar verilmiş, üçüncü bölümünde fuzzy cümle, fuzzy topolojik uzay tanımları verilerek genel fuzzy topolojik kavramlar açıklanmıştır. Dördüncü bölümde fuzzy eğri kavramı tanımı yapılarak, fuzzy homotop eğriler kavramı detaylarıyla incelenmiştir. Bu bölümün sonunda bir fuzzy topolojik uzayın bir fuzzy noktasındaki esas grubu oluşturulmuştur. Beşinci bölümde ise bir fuzzy topolojik uzayın esas grubu üzerine karakterizasyonlar verilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Cebirsel Kavramlar

Tanım 2.1.1 : Boş olmayan bir cümle ile, bu cümle üzerinde tanımlı bir veya daha fazla işlemin birlikte oluşturduğu sisteme bir **matematik sistem** denir.

G bir cümle ve $*$ bu cümle üzerinde tanımlı bir ikili işlem ise, bu matematik sistem $(G, *)$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.1.2 : $(G, *)$ bir matematik sistem olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa $(G, *)$ çiftine bir **grup** denir.

- 1) $\forall a, b \in G$ için $a * b \in G$, yani G $*$ işlemine göre kapalıdır.
- 2) $\forall a, b, c \in G$ için $(a * b) * c = a * (b * c)$, yani $*$ işlemi G üzerinde asosyatiftir.
- 3) $\forall a \in G$ için $a * e = e * a = a$ olacak şekilde bir $e \in G$ vardır. Bu durumda e ye $*$ işlemi ne göre özdeş (birim) eleman denir.
- 4) $\forall a \in G$ için $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ olacak şekilde bir $a^{-1} \in G$ vardır. Bu durumda a^{-1} elemanına a nın tersi (inversi) denir (Balcı 1978).

Teorem 2.1.1 : G bir grup olsun. Bu durumda,

- i) Özdeş eleman bir tektir.
- ii) $\forall a \in G$ için $a^{-1} \in G$ bir tektir.
- iii) $\forall a \in G$ için $(a^{-1})^{-1} = a$
- iv) $\forall a, b \in G$ için $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$

Tanım 2.1.3 : $(G, *)$ bir grup olmak üzere, G nin boş olmayan bir alt cümlesi $*$ işlemine göre bir grup oluşturuyorsa, bu alt cümleye G nin bir **alt grubu** denir.

Teorem 2.1.2 : G bir grup ve $H \subset G$, $H \neq \emptyset$ olsun. H nin bir alt grup olması için gerek ve yeter şart,

- i) Her $x, y \in H$ için $xy \in H$
- ii) $x \in H$ için $x^{-1} \in H$

olmasıdır.

Teorem 2.1.3 : G bir grup ve $H \subset G$, $H \neq \emptyset$ olsun. Bu durumda,

$$H, G \text{ nin bir alt grubudur} \Leftrightarrow \text{Her } x, y \in H \text{ için } xy^{-1} \in H$$

dır.

G bir grup ve H, G nin bir alt grubu olmak üzere, $x, y \in G$ herhangi elemanlar olsun. Bu durumda x in y ye eşdeğer olması (veya ' x in y ye kongrüan modül H ' olması),

$$x \sim y \Leftrightarrow xy^{-1} \in H$$

veya

$$x \equiv y \pmod{H} \Leftrightarrow xy^{-1} \in H$$

şeklinde ifade edilir. Bu bağıntı bir eşdeğerlik bağıntısıdır ve dolayısıyla G yi ayrık eşdeğerlik sınıflarına ayırır. Her bir sınıf Hx ile veya toplamsal notasyonda $H+x$ ile gösterilir. G deki her eleman bir ve bir tek sınıfa aittir.

$$x \in G \text{ için } [x] = Hx$$

sınıfı seçilen temsilci elemana bağlı değildir. Yani ,

$$y \in [x] \text{ ise } [x] = [y]$$

dir. Bütün Hx lerin cümlesine G nin **bölüm cümlesi** denir ve G/H şeklinde gösterilir.

$$[x], [y] \in G/H \text{ için } [x].[y] = [xy]$$

şeklinde tanımlanan $(.)$ işleminde birlikte G/H cümlesi bir grup oluşturur. Bu gruba G nin **bölüm grubu** denir.

Tanım 2.1.4 : G bir grup ve H, G nin bir alt grubu olsun. $\forall x \in G$ için

$$xH = Hx$$

ise, H ya G nin **normal alt grubu** denir.

Tanım 2.1.5 : (G, \bullet) ve $(H, *)$ iki grup olmak üzere $\Phi : G \rightarrow H$ bir tasvir olsun. Eğer

$\forall a, b \in G$ için $\Phi(a \bullet b) = \Phi(a) * \Phi(b)$ ise Φ ye bir **grup homomorfizmi** denir.

Eğer Φ homomorfizmi bire-bir ise **monomorfizm**, örten ise **epimorfizm**, bire-bir ve örten ise **izomorfizm** adını alır.

2.2 Topolojik Kavramlar

Tanım 2.2.1 : X boş olmayan bir cümle ve τ , X in herhangi alt cümlelerinden oluşan bir aile olsun. Eğer τ ailesi,

$$1) \emptyset, X \in \tau$$

$$2) \forall A_j \in \tau \text{ için } \bigcap_{j \in J} A_j \in \tau \text{ (} j \text{ sonlu indis cümlesi)}$$

$$3) \forall A_j \in \tau \text{ için } \bigcup_{j \in J} A_j \in \tau \text{ (} j \text{ sonlu veya sonsuz indis cümlesi)}$$

şartlarını sağlıyorsa τ ya X üzerinde bir **topoloji**, (X, τ) ikilisine veya kısaca X e bir **topolojik uzay** denir.

τ nun elemanlarına X topolojik uzayının **açık cümleleri** denir. Tümleyeni açık olan cümleye **kapalı cümle** denir (Balcı 1978).

Tanım 2.2.2 : (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun.

$$\tau_A = \{A \cap U : U \in \tau\}$$

şeklinde tanımlanan τ_A ailesi A üzerinde bir topoloji olup, τ_A ya A **üzerinde indirgenmiş topoloji** veya τ **dan indirgenen topoloji** denir. (A, τ_A) ikilisine de (X, τ) nun bir **alt uzayı** denir.

Tanım 2.2.3 : X bir topolojik uzay ve $x \in X$ olsun. x noktasını içeren X in her U açık cümlesine x noktasının bir **açık civarı** denir.

Tanım 2.2.4 : (X, τ) bir topolojik uzay ve $x \in X$ olsun. x noktasını içeren bir U açık cümlesini bir V cümlesi içeriyorsa, yani $x \in U \subset V$ olacak şekilde bir $U \in \tau$ varsa, V ye x noktasının bir **komşuluğu** denir.

Tanım 2.2.5 : X bir topolojik uzay olsun. Eğer X boş olmayan ayrık açık iki cümlelerin birleşimi olarak yazılamıyorsa, X topolojik uzayına **irtibatlıdır** denir.

Eğer X boş olmayan ayrık açık iki cümlelerin birleşimi olarak yazılabiliyorsa, X e **irtibatsızdır** denir.

Tanım 2.2.6 : X, Y iki topolojik uzay olmak üzere $x \in X, y \in Y$ herhangi noktalar ve $f : X \rightarrow Y$ bir tasvir olsun. Eğer $y = f(x)$ noktasının her bir $V(y)$ civarı için, $f(U) \subset V$ olacak şekilde x noktasının bir $U(x)$ civarı varsa, bu durumda f tasvirine **$x \in X$ noktasında süreklidir** denir. Eğer f, X in her bir noktasında sürekli ise f tasvirine **X de süreklidir** denir.

Teorem 2.2.1 : (X, T_1) ve (Y, T_2) iki topolojik uzay ve $f : (X, T_1) \rightarrow (Y, T_2)$ bir tasvir olsun. Bu durumda

f süreklidir yalnız ve yalnız $\forall V \in T_2$ için $f^{-1}(V) \in T_1$.

Ayrıca, f tasviri süreklidir yalnız ve yalnız Y de her kapalı cümlenin ters görüntüsü X de kapalıdır.

İspat :

$\Rightarrow \forall V \in T_2$ için $f^{-1}(V) \subset X$ olsun. $\forall x \in f^{-1}(V)$ için $f(x) \in V$ dir. V açık olduğundan içindeki her noktanın komşuluğudur. O halde $V, f(x)$ noktasının bir komşuluğudur. f sürekli olduğundan $f^{-1}(V), x$ noktasının bir komşuluğudur. O halde $f^{-1}(V)$ açıktır.

$\Leftarrow \forall V \in T_2$ için $f^{-1}(V) \in T_1, x \in X$ herhangi bir nokta ve $N f(x)$ noktasının bir komşuluğu olsun. Bu durumda $f(x) \in V \subset N$ olacak şekilde $V \in T_2$ vardır. $f^{-1}(V)$ açık olduğundan $f^{-1}(V), x$ noktasının bir komşuluğudur. O halde $f(f^{-1}(V)) \subset V \subset N$ dir.

Böylece $x \in X$ herhangi bir nokta olduğundan f, X topolojik uzayında süreklidir.

Kapalı cümleler için ispat benzer biçimde yapılabilir.

Uyarı : Sürekli tasvirler, açıkları açıklara, kapalıları kapalılara dönüştürebilirler. Ancak sürekli tasvirlerin açıkların ters görüntülerini açıklara, kapalıların ters görüntülerini de kapalılara dönüştürme özelliği vardır.

Teorem 2.2.2 : $f : (X, T) \rightarrow (Y, \mathcal{U})$ ve $g : (Y, \mathcal{U}) \rightarrow (Z, \mathcal{V})$ sürekli tasvirler olsun. Bu durumda $g \circ f : (X, T) \rightarrow (Z, \mathcal{V})$ bileşke tasviri de süreklidir.

Tanım 2.2.7 : (X, T) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ ve $x \in X$ olsun. x noktasının her komşuluğunda A nın en az bir elemanı varsa, x noktasına A nın bir **değme noktası** denir. Yani,

$$x \in X, A \text{ nın bir değme noktasıdır} \Leftrightarrow x \text{ in her } N \text{ komşuluğu için } N \cap A \neq \emptyset .$$

Tanım 2.2.8 : (X, T) bir topolojik uzay, $A \subset X$ ve $x \in X$ olsun. x noktasının her komşuluğunda A nın x den farklı en az bir noktası varsa, x noktasına A nın bir **yığılma (limit) noktası** denir. A nın bütün yığılma noktalarının oluşturduğu cümleye A dan türetilen küme denir ve A' ile gösterilir. Böylece

$$x \in A' \text{ yalnız ve yalnız } x \text{ noktasının her } N \text{ komşuluğu için } (N \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset .$$

Tanım 2.2.9 : (X, T) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A cümlesine ait herhangi bir x noktası A nın yığılma noktası değilse; yani $x \in A$ ve $x \notin A'$ ise, x e A cümlesinin **ayrık (izole) noktası** denir.

Tanım 2.2.10 : (X, T) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A cümlesini kapsayan T topolojisine göre tüm kapalı cümlelerin arakesitine A cümlesinin **kapanışı** denir ve \bar{A} şeklinde gösterilir. $x \in \bar{A}$ noktasına A nın bir **kapanış noktası** denir. Ayrıca $\bar{A} = \{x \in X : x, A \text{ nın değme noktası}\}$ ve $\bar{A} = A \cup A'$ dir.

Teorem 2.2.3 : (X, T_1) ve (Y, T_2) topolojik uzaylar ve $f : X \rightarrow Y$ bir tasvir olsun. Bu durumda $\forall A \subset X$ için f, X topolojik uzayında süreklidir yalnız ve yalnız $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$.

Teorem 2.2.4 : X bir topolojik uzay olmak üzere $A, B \subset X$ iki kapalı alt cümle (veya iki açık alt cümle) ve $X = A \cup B$ olsun. Eğer $f : A \rightarrow Y$ ve $g : B \rightarrow Y$, $f|_{A \cap B} = g|_{A \cap B}$ olacak şekilde sürekli tasvirlerse, bu durumda $h|_A = f$, $h|_B = g$ şeklindeki $h : X \rightarrow Y$ tasviri süreklidir.

İspat :

A ve B cümlelerinin her ikisi de kapalı olsun. $\forall K \subset Y$ kapalı alt cümlesi için $h|_A = f$ ve $h|_B = g$ tasvirleri sürekli olduklarından teorem 2.2.1 den dolayı $f^{-1}(K) \subset A$ kapalı,

$g^{-1}(K) \subset B$ kapalıdır. $X = A \cup B$ olduğundan

$$h^{-1}(K) = f^{-1}(K) \cup g^{-1}(K)$$

dır. Kapalı cümlelerin sonlu birleşimleri kapalı olduğundan $h^{-1}(K)$ X de kapalıdır. O halde $\forall K \subset Y$ kapalı alt cümlesi için $h^{-1}(K)$, X de kapalı olduğundan h tasviri X de süreklidir.

A ve B nin her ikisinin açık olması halinde de ispat benzer şekilde yapılabilir.

Tanım 2.2.11 : (X, T) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A nın bütün açık alt cümlelerinin birleşimine A nın **içi** denir ve $\overset{\circ}{A}$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.12 : (X, T) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ ve $x \in A$ olsun. x noktasının en az bir N komşuluğunu A cümlesi kapsıyorsa, x noktasına A cümlesinin bir **iç noktası** denir. Dolayısıyla

$$x \in \overset{\circ}{A} \text{ yalnız ve yalnız } x \text{ in } \exists N \text{ komşuluğu var } \ni N \subset A$$

dır.

Tanım 2.2.13 : X, Y iki topolojik uzay ve $f : X \rightarrow Y$ sürekli bir tasvir olsun. Eğer f bire-bir, örten ve f^{-1} sürekli ise f ye bir **homeomorfizm** veya topolojik tasvir denir. Bir X topolojik uzayından bir Y topolojik uzayına bir homeomorfizm varsa, X ile Y **homeomorfiktirler** veya **topolojik olarak eşdeğerdirler** denir.

Ayrıca, topolojik uzaylarda homeomorfizm altında değişmeyen (korunan) özelliklere **topolojik özellik** veya **topolojik invaryant** denir.

Tanım 2.2.14 : X bir topolojik uzay, $I = [0,1]$ kapalı aralığı ve I daki topoloji reel sayıların rölatif topolojisi yani $x, y \in I$ için $d(x, y) = |x - y|$ metriği ile belirlenen topoloji olsun. Bu durumda, $\alpha : I \rightarrow X$ sürekli tasvirine X de bir **eğri** denir.

$\alpha(0)$ ve $\alpha(1)$ noktalarına sırasıyla eğrinin **başlangıç ve bitim noktası** denir. Başlangıç ve bitim noktası aynı olan eğriye **kapalı eğri** denir.

Eğer α sabit tasvir ise yani $\alpha(I)$ bir tek noktadan ibaret ise α eğrisine **sıfır eğri** denir.

Her $x \in I$ için $\alpha^{-1} = \alpha(1-x)$ şeklindeki $\alpha^{-1} : I \rightarrow X$ sürekli tasvirine **α eğrisinin tersi** denir.

Tanım 2.2.15 : X bir topolojik uzay olsun. Herhangi $x,y \in X$ noktaları için başlangıç noktası x , bitim noktası y olan X de bir α eğrisi varsa, bu durumda X e **eğrisel irtibatlı topolojik uzay** denir.

Tanım 2.2.16 : X, Y iki topolojik uzay ve $f, g : X \rightarrow Y$ sürekli iki tasvir olsun. Eğer,

$$\forall x \in X \text{ için } F(x,0) = f, F(x,1) = g$$

şartlarını sağlayan $\exists F : X \times J \rightarrow Y$ sürekli tasviri varsa **f tasviri g tasvirine homotoptur** denir ve $f \sim g$ şeklinde gösterilir. F tasvirine de bir **homotopi bağıntısı** denir.

Tanım 2.2.17 : X, Y iki topolojik uzay ve $X_0 \subset X$ herhangi bir alt cümle ve $f, g : X \rightarrow Y$ $\forall x_0 \in X_0$ için $f(x_0) = g(x_0)$ şartını sağlayan iki sürekli tasvir olsun. Eğer,

$$i) \forall x \in X \text{ için } F(x,0) = f, F(x,1) = g$$

$$ii) \forall x_0 \in X_0 \text{ için } F(x,t) = f(x_0) = g(x_0), \forall t \in J$$

şartlarını sağlayan $\exists F : X \times J \rightarrow Y$ sürekli tasviri varsa **f tasviri X_0 a göre g tasvirine homotoptur** denir ve $f \sim g \text{ rel. } X_0$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.2.18 : α ve β bir X topolojik uzayında iki eğri olsun. Eğer,

$$1) F(x,0) = \alpha(x), F(x,1) = \beta(x), \forall x \in I$$

$$2) F(0,t) = \alpha(0) = \beta(0), F(x,1) = \alpha(1) = \beta(1), \forall t \in J$$

olacak şekilde bir $F(x,t) : I \times J \rightarrow X$ sürekli tasviri varsa bu durumda **α, β ya $(0,1)$ e göre homotoptur** denir ve $\alpha \sim \beta \text{ rel. } (0,1)$ şeklinde gösterilir (Balcı 1978)

Tanım 2.2.19 : Topolojik uzaylarda homotopi altında değişmeyen (korunan) özelliklere **homotopik özellik** veya **homotopik invaryant** denir.

Tanım 2.2.20 : Nesne adı verilen elemanlardan oluşan bir sisteme **kategori** denir. Burada nesne; cümleler ve üzerlerinde tanımlı fonksiyonlardan oluşmaktadır. Daha açık bir ifadeyle kategori :

I) Bir nesne sınıfıdır.

II) $\forall X, Y$ sıralı nesne çifti için

$$\text{hom}(X, Y) = \{f \mid f : X \rightarrow Y\}$$

şeklinde bir fonksiyon cümlesi tanımlıdır. Burada her bir fonksiyona **morfizm** denir.

III) Morfizmler için aşağıdaki şekilde bir kompozisyon tanımlanmıştır.

$\forall X, Y, Z$ sıralı nesne üçlüsü için $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$, $gf : X \rightarrow Z$ olmak üzere,

a) $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$, $h : Z \rightarrow W$ için $h(gf) = (hg)f : X \rightarrow W$

b) Her bir Y nesnesi için $\exists 1_Y : Y \rightarrow Y$ morfizmi vardır $\ni f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$ olmak üzere

$1_Y f = f$, $g 1_Y = g$ dir.

1_Y morfizmine **özdeş morfizm** denir (Balcı 1978).

Tanım 2.2.21 : C ve D iki kategori olmak üzere, eğer C ye ait her bir X nesneye D de bir $F(X)$ nesne, $f : X \rightarrow Y$ morfizmine de D de bir $F(f) : F(X) \rightarrow F(Y)$ morfizmi karşılık geliyor ve

$$I) F(1_X) = 1_{F(X)} ,$$

$$II) F(gf) = F(g)F(f)$$

şartları sağlanıyorsa, $F : C \rightarrow D$ tasvirine **funktor** veya **kovaryant funktor** denir.

Görülmektedir ki kategoriler arasında geçiş sağlayan tasvirlerdir.

3.FUZZY TOPOLOJİK KAVRAMLAR

3.1 Fuzzy Cümle Kavramı

Tanım 3.1.1 : X boş olmayan bir cümle ve $I = [0,1]$ kapalı aralığı olmak üzere, X den I ya tanımlanan her bir fonksiyona X de bir **fuzzy cümle** denir. X de bir A fuzzy cümle μ_A üyelik fonksiyonuyla karakterize edilir. Yani,

$$\mu_A : X \rightarrow I \text{ olmak üzere } \forall x \in X \text{ için } \mu_A(x) \in I \text{ dir.}$$

Diğer bir ifadeyle X de bir A fuzzy cümle,

$$A = \left\{ (x_i, \mu_A(x_i)) : i \in I \text{ için } x_i \in X \right\}$$

şeklinde daha açık olarak ifade edilebilir.

Ayrıca, $\mu_X : X \rightarrow [0,1], \forall x \in X \text{ için } \mu_X(x) = 1$ fonksiyonu alınırsa

$$X = \{ (x_i, 1) : x_i \in X \}$$

şeklindeki fuzzy cümle tanımlanabilir.

Benzer olarak $\mu_\emptyset : X \rightarrow [0,1], \forall x \in X \text{ için } \mu_\emptyset(x) = 0$ fonksiyonu alınırsa

$$\emptyset = \{ (x_i, 0) : x_i \in X \}$$

şeklindeki fuzzy cümle tanımlanabilir.

Uyarı : x in A ya ait olma derecesi denen $\mu_A(x) \in I$ değerinin 1 e yaklaşması, x in A ya daha fazla ait olması anlamına gelmektedir. Yalnızca 0 ve 1 değerlerini alan fuzzy cümleye crisp cümle denir. Burada crisp cümle kavramı bildiğimiz klasik cümle kavramına denktir. (yani $\forall x \in X \text{ için, } x \in A \text{ ise } \mu_A(x) = 1, x \notin A \text{ ise } \mu_A(x) = 0$)

Tanım 3.1.2 : A, X de bir fuzzy cümle olsun. $\text{supp } A = A_0 = \left\{ x \in X : \mu_A(x) > 0 \right\}$ cümlesine A fuzzy cümlesinin **desteği** denir (Zadeh 1965).

Tanım 3.1.3 : $\forall x \in X \text{ için,}$

$$\mu_{a_\lambda}(x) = \begin{cases} \lambda, & x = a \\ 0, & x \neq a \end{cases}$$

üyelik fonksiyonuyla tanımlı a_λ fuzzy cümleye X de bir **fuzzy nokta** denir. Yani, desteği yalnızca bir değerden (yukarıda tanımlanan fuzzy cümle için $\text{supp } a_\lambda = a$) oluşan bir fuzzy cümleye bir fuzzy nokta denir (Zadeh 1965).

Tanım 3.1.4 : A ve B, X de fuzzy cümleler olsun. Bu durumda $\forall x \in X$ için,

$$A=B \Leftrightarrow \mu_A(x) = \mu_B(x)$$

$$A \subset B \Leftrightarrow \mu_A(x) \leq \mu_B(x)$$

$$A \cup B = C, \quad \mu_C(x) = \max \{ \mu_A(x), \mu_B(x) \}$$

$$A \cap B = D, \quad \mu_D(x) = \min \{ \mu_A(x), \mu_B(x) \}$$

Ayrıca, $A = \{A_j : j \in J\}$ fuzzy cümlelerin bir ailesi olmak üzere $\forall x \in X$ için,

$$C = \bigcup_{j \in J} A_j, \quad \mu_C(x) = \sup_{j \in J} \mu_{A_j}(x)$$

$$D = \bigcap_{j \in J} A_j, \quad \mu_D(x) = \inf_{j \in J} \mu_{A_j}(x)$$

$$E = A', \quad \mu_E(x) = 1 - \mu_A(x)$$

şeklinde tanımlıdır (Dubois 1980).

Teorem 3.1.1 : A ve B, X de fuzzy cümleler olsun. Bu durumda

i) $A \subset B \Leftrightarrow B' \subset A'$

ii) $(A \cup B)' = A' \cap B'$

iii) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

iv) $(\bigcup_{j \in J} A_j)' = \bigcap_{j \in J} A_j'$

v) $(\bigcap_{j \in J} A_j)' = \bigcup_{j \in J} A_j'$

İspat :

i) $\forall x \in X$ için $\mu_{A'}(x) = 1 - \mu_A(x)$ ve $\mu_{B'}(x) = 1 - \mu_B(x)$ olduğundan,

$$\begin{aligned}
A \subset B &\Leftrightarrow \mu_A(x) \leq \mu_B(x) \\
&\Leftrightarrow 1 - \mu_B(x) \leq 1 - \mu_A(x) \\
&\Leftrightarrow \mu_{B'}(x) \leq \mu_{A'}(x) \\
&\Leftrightarrow B' \subset A'
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{ii) } \forall x \in X \text{ için } \mu_{(A \cup B)'}(x) &= 1 - \mu_{(A \cup B)}(x) \\
&= 1 - \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} \\
&= \min\{1 - \mu_A(x), 1 - \mu_B(x)\} \\
&= \min\{\mu_{A'}(x), \mu_{B'}(x)\} \\
&= \mu_{A' \cap B'}(x)
\end{aligned}$$

olduğundan, $(A \cup B)' = A' \cap B'$ dir.

$$\begin{aligned}
\text{iii) } \forall x \in X \text{ için } \mu_{(A \cap B)'}(x) &= 1 - \mu_{(A \cap B)}(x) \\
&= 1 - \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} \\
&= \max\{1 - \mu_A(x), 1 - \mu_B(x)\} \\
&= \max\{\mu_{A'}(x), \mu_{B'}(x)\} \\
&= \mu_{A' \cup B'}(x)
\end{aligned}$$

olduğundan, $(A \cap B)' = A' \cup B'$ dir.

$$\begin{aligned}
\text{iv) } \forall x \in X \text{ için } \mu_{\left(\bigcup_{j \in J} A_j\right)'}(x) &= 1 - \sup_{j \in J} \mu_{A_j}(x) \\
&= \inf\{1 - \mu_{A_j}(x)\} \\
&= \inf \mu_{A_j'}(x) = \mu_{\bigcap_{j \in J} A_j'}(x)
\end{aligned}$$

olduğundan, $\left(\bigcup_{j \in J} A_j\right)' = \bigcap_{j \in J} A_j'$ dir.

$$\begin{aligned}
\text{v) } \forall x \in X \text{ için } \mu_{\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right)'}(x) &= 1 - \inf_{j \in J} \mu_{A_j}(x) \\
&= \sup\{1 - \mu_{A_j}(x)\} \\
&= \sup \mu_{A_j'}(x) \\
&= \mu_{\bigcup_{j \in J} A_j'}(x)
\end{aligned}$$

olduğundan, $\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right)' = \bigcup_{j \in J} A_j'$ dir.

Teorem 3.1.2 : A, B ve C, X de fuzzy cümleler olsun. Bu durumda

- i) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- ii) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
- iii) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- iv) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

İspat :

$$\begin{aligned}
\text{i) } \forall x \in X \text{ için } A \cap (B \cap C) = M &\Leftrightarrow \mu_M(x) = \min\{\mu_A(x), \min\{\mu_B(x), \mu_C(x)\}\} \\
&= \min\{\mu_A(x), \mu_B(x), \mu_C(x)\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\forall x \in X \text{ için } (A \cap B) \cap C = K &\Leftrightarrow \mu_K(x) = \min\{\min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \mu_C(x)\} \\
&= \min\{\mu_A(x), \mu_B(x), \mu_C(x)\}
\end{aligned}$$

olduğundan, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ dir.

$$\begin{aligned}
\text{ii) } \forall x \in X \text{ için } A \cup (B \cup C) = M &\Leftrightarrow \mu_M(x) = \max\{\mu_A(x), \max\{\mu_B(x), \mu_C(x)\}\} \\
&= \max\{\mu_A(x), \mu_B(x), \mu_C(x)\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\forall x \in X \text{ için } (A \cup B) \cup C = K &\Leftrightarrow \mu_K(x) = \max\{\max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \mu_C(x)\} \\
&= \max\{\mu_A(x), \mu_B(x), \mu_C(x)\}
\end{aligned}$$

olduğundan, $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ dir.

iii) $\forall x \in X$ için $\mu_A(x) \leq \mu_B(x) \leq \mu_C(x)$ ise,

$$A \cap (B \cup C) = K \Leftrightarrow \mu_K(x) = \min\{\mu_A(x), \max\{\mu_B(x), \mu_C(x)\}\} = \mu_A(x)$$

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) = M \Leftrightarrow \mu_M(x) = \max\{\min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \min\{\mu_A(x), \mu_C(x)\}\} \\ = \mu_A(x)$$

Benzer şekilde $\forall x \in X$ için,

$$\mu_A(x) \leq \mu_C(x) \leq \mu_B(x) \text{ ise } \mu_K(x) = \mu_M(x) = \mu_A(x)$$

$$\mu_B(x) \leq \mu_A(x) \leq \mu_C(x) \text{ ise } \mu_K(x) = \mu_M(x) = \mu_A(x)$$

$$\mu_B(x) \leq \mu_C(x) \leq \mu_A(x) \text{ ise } \mu_K(x) = \mu_M(x) = \mu_C(x)$$

$$\mu_C(x) \leq \mu_A(x) \leq \mu_B(x) \text{ ise } \mu_K(x) = \mu_M(x) = \mu_A(x)$$

$$\mu_C(x) \leq \mu_B(x) \leq \mu_A(x) \text{ ise } \mu_K(x) = \mu_M(x) = \mu_B(x)$$

Dolayısıyla $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ dir.

iv) $\forall x \in X$ için $\mu_A(x) \leq \mu_B(x) \leq \mu_C(x)$ ise,

$$A \cup (B \cap C) = K \Leftrightarrow \mu_K(x) = \max\{\mu_A(x), \min\{\mu_B(x), \mu_C(x)\}\} = \mu_B(x)$$

$$(A \cup B) \cap (A \cup C) = M \Leftrightarrow \mu_M(x) = \min\{\max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \max\{\mu_A(x), \mu_C(x)\}\} \\ = \mu_B(x)$$

Benzer şekilde $\forall x \in X$ için,

$$\mu_A(x) \leq \mu_C(x) \leq \mu_B(x) \text{ ise } \mu_K(x) = \mu_M(x) = \mu_C(x)$$

$$\mu_B(x) \leq \mu_A(x) \leq \mu_C(x) \text{ ise } \mu_K(x) = \mu_M(x) = \mu_A(x)$$

$$\mu_B(x) \leq \mu_C(x) \leq \mu_A(x) \text{ ise } \mu_K(x) = \mu_M(x) = \mu_A(x)$$

$$\mu_C(x) \leq \mu_A(x) \leq \mu_B(x) \text{ ise } \mu_K(x) = \mu_M(x) = \mu_A(x)$$

$$\mu_C(x) \leq \mu_B(x) \leq \mu_A(x) \text{ ise } \mu_K(x) = \mu_M(x) = \mu_A(x)$$

Dolayısıyla $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ dir.

Tanım 3.1.5 : $f : X \rightarrow Y$ bir tasvir, B de μ_B üyelik fonksiyonu ile tanımlı Y de bir fuzzy cümle olsun. B nin ters görüntüsü $f^{-1}[B]$, $\forall x \in X$ için

$$\mu_{f^{-1}[B]}(x) = \mu_B(f(x))$$

üyelik fonksiyonuyla tanımlı X de bir fuzzy cümledir.

Diğer yandan A , μ_A üyelik fonksiyonu ile tanımlı X de bir fuzzy cümle olmak üzere A nın görüntüsü $f[A]$, $\forall y \in Y$ için,

$$\mu_{f[A]}(y) = \begin{cases} \sup_{z \in f^{-1}(y)} \mu_A(z) & , f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0 & , f^{-1}(y) = \emptyset \end{cases}$$

üyelik fonksiyonu ile tanımlı Y de bir fuzzy cümledir. Burada $f^{-1}(y) = \{x : f(x) = y\}$.

Teorem 3.1.3 : $f : X \rightarrow Y$ bir tasvir , $\{A_j : j \in J\}$ X de fuzzy cümlelerin bir ailesi ve $\{B_j : j \in J\}$ Y de fuzzy cümlelerin bir ailesi olsun. Bu durumda,

- 1) $f^{-1}\left[\bigcup_{j \in J} B_j\right] = \bigcup_{j \in J} f^{-1}[B_j]$
- 2) $f^{-1}\left[\bigcap_{j \in J} B_j\right] = \bigcap_{j \in J} f^{-1}[B_j]$
- 3) $f\left[\bigcup_{j \in J} A_j\right] = \bigcup_{j \in J} f[A_j]$
- 4) $f\left[\bigcap_{j \in J} A_j\right] \subset \bigcap_{j \in J} f[A_j]$

İspat :

- 1) $\forall x \in X$ için,

$$\mu_{f^{-1}\left[\bigcup_{j \in J} B_j\right]}(x) = \mu_{\bigcup_{j \in J} B_j}^{f(x)} = \sup \mu_{B_j}^{f(x)} = \sup \mu_{f^{-1}[B_j]}(x) = \mu_{\bigcup_{j \in J} f^{-1}[B_j]}(x)$$

olduğundan

$$f^{-1}\left[\bigcup_{j \in J} B_j\right] = \bigcup_{j \in J} f^{-1}[B_j]$$

dır.

2) $\forall x \in X$ için,

$$\mu_{f^{-1}\left[\bigcap_{j \in J} B_j\right]}(x) = \mu_{\bigcap_{j \in J} B_j}^{f(x)} = \inf \mu_{B_j}^{f(x)} = \inf \mu_{f^{-1}[B_j]}(x) = \mu_{\bigcap_{j \in J} f^{-1}[B_j]}(x)$$

olduğundan

$$f^{-1}\left[\bigcap_{j \in J} B_j\right] = \bigcap_{j \in J} f^{-1}[B_j]$$

dir.

3) $\forall y \in Y$ ve $f^{-1}[y] \neq \emptyset$ için,

$$\mu_{f\left[\bigcup_{j \in J} A_j\right]}(y) = \sup \mu_{\bigcup_{j \in J} A_j}(z) = \sup \sup \mu_{A_j}(z) = \sup \mu_{f[A_j]}(y) = \mu_{\bigcup_{j \in J} f[A_j]}(y)$$

olduğundan

$$f\left[\bigcup_{j \in J} A_j\right] = \bigcup_{j \in J} f[A_j]$$

dır.

$$4) \mu_{f\left[\bigcap_{j \in J} A_j\right]}(y) = \sup \mu_{\bigcap_{j \in J} A_j}(z) = \sup \inf \mu_{A_j}(z)$$

$$\leq \inf \sup \mu_{A_j}(z) = \inf \mu_{f[A_j]}(y) = \mu_{\bigcap_{j \in J} f[A_j]}(y)$$

olduğundan

$$f \left[\bigcap_{j \in J} A_j \right] \subset \bigcap_{j \in J} f \left[B_j \right]$$

dır.

Teorem 3.1.4 : A ve B sırasıyla X ve Y de birer fuzzy cümle olmak üzere, $f : X \rightarrow Y$ bir tasvir olsun. Bu durumda,

1) $f^{-1} [B'] = \{ f^{-1} [B] \}'$

2) $\{ f [A] \}' \subset f [A']$

3) B_1 ve B_2 , Y de fuzzy cümleler olmak üzere $B_1 \subset B_2 \Rightarrow f^{-1} [B_1] \subset f^{-1} [B_2]$

4) A_1 ve A_2 , X de fuzzy cümleler olmak üzere $A_1 \subset A_2 \Rightarrow f [A_1] \subset f [A_2]$

5) $f [f^{-1} [B]] \subset B$

6) $A \subset f [f^{-1} [A]]$

7) $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$ birer tasvir ve C, Z de bir fuzzy cümle olsun. Bu durumda $(g \circ f)^{-1} [C] = f^{-1} [g^{-1} [C]]$

dır.

İspat :

1) $\forall x \in X$ için,

$$\mu_{f^{-1}[B']} (x) = \mu_{B'} [f(x)] = 1 - \mu_B [f(x)] = 1 - \mu_{f^{-1}[B]} (x) = \mu_{\{ f^{-1}[B] \}' } (x)$$

dir.

2) $\forall y \in Y$ ve $f^{-1} [y] \neq \emptyset$ için,

$$\mu_{f[A]} (y) = \sup \{ \mu_{A'} (z) \} = \sup \{ 1 - \mu_A (z) \} = 1 - \inf \{ \mu_A (z) \}$$

ve

$$\mu_{\{ f[A] \}' } (y) = 1 - \mu_{f[A]} (y) = 1 - \sup \{ \mu_A (z) \}$$

böylece,

$$\mu_{\{f[A]\}}(y) \leq \mu_{f[A]}(y)$$

dir.

3) $\forall x \in X$ için,

$$\mu_{f^{-1}[B_1]}(x) = \mu_{B_1}[f(x)] \text{ ve } \mu_{f^{-1}[B_2]}(x) = \mu_{B_2}[f(x)]$$

$\forall x \in X$ için, $B_1 \subset B_2$ olduğundan

$$\mu_{f^{-1}[B_1]}(x) \leq \mu_{f^{-1}[B_2]}(x)$$

Dolayısıyla, $f^{-1}[B_1] \subset f^{-1}[B_2]$ dir.

$$4) \quad \mu_{f[A_1]}(y) = \sup\{\mu_{A_1}(z)\} \text{ ve } \mu_{f[A_2]}(y) = \sup\{\mu_{A_2}(z)\}$$

$\forall y \in Y$ için $A_1 \subset A_2$ olduğundan,

$$\mu_{f[A_1]}(y) \leq \mu_{f[A_2]}(y)$$

Dolayısıyla, $f[A_1] \subset f[A_2]$ dir.

5) $f^{-1}(y) \neq \emptyset$ için,

$$\mu_{f[f^{-1}[B]]}(y) = \sup\{\mu_{f^{-1}[B]}(z)\} = \sup\{\mu_B[f(z)]\} = \mu_B(y)$$

$f^{-1}(y) = \emptyset$ için

$$\mu_{f[f^{-1}[B]]}(y) = 0$$

dir.

Dolayısıyla, $\forall y \in Y$ için $\mu_{f[f^{-1}[B]]}(y) \leq \mu_B(y)$ dir.

6) $\forall x \in X$ için,

$$\mu_{f^{-1}[f[A]]}(x) = \mu_{f[A]}[f(x)] = \sup\{\mu_A(z)\} \geq \mu_A(x)$$

dir.

7) $\forall x \in X$ için,

$$\begin{aligned} \mu_{(\text{gof})^{-1}[C]}(x) &= \mu_C[\text{gof}(x)] = \mu_C[g[f(x)]] \\ &= \mu_{g^{-1}[C]}[f(x)] \\ &= \mu_{f^{-1}[g^{-1}[C]]}(x) \end{aligned}$$

Teorem 3.1.5 : $f: X \rightarrow Y$ ve $g: Y \rightarrow Z$ tasvirler ve A , X de bir fuzzy cümle olmak üzere, $(\text{gof})(A) = g(f(A))$ dir.

İspat :

$$g(f(A))(z) = \begin{cases} \sup\{\sup\{\mu_A(x) : x \in f^{-1}(y)\}\} & , \quad g^{-1}(z) \neq \emptyset \text{ ve } f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0 & , \quad g^{-1}(z) = \emptyset \text{ ve } f^{-1}(y) = \emptyset \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \sup\{\sup\{\mu_A(x) : x \in f^{-1}(g^{-1}(z))\}\} & , \quad (\text{gof})^{-1}(z) \neq \emptyset \\ 0 & , \quad (\text{gof})^{-1}(z) = \emptyset \end{cases}$$

$$= (\text{gof})(A)(z)$$

dir.

3.2 Fuzzy Topolojik Uzay

Tanım 3.2.1 : X deki fuzzy cümlelerin bir T ailesi,

- i) $\emptyset, X \in T$
- ii) $\forall A, B \in T$ için $A \cap B \in T$
- iii) $\forall A_j \in T$ için $\bigcup_{j \in J} A_j \in T$

şartlarını sağlıyorsa, T ye X üzerinde bir **fuzzy topoloji**, (X,T) ikilisine veya kısaca X e de bir **fuzzy topolojik uzay** denir (Chang 1968).

Ayrıca, T nin elemanlarına **açık fuzzy cümleler** veya **T-açık fuzzy cümleler** denir. Tümleyenini açık fuzzy cümle olan fuzzy cümleye, **kapalı fuzzy cümle** veya **T-kapalı fuzzy cümle** denir.

Tanım 3.2.2 : A, X de bir fuzzy cümle ve (X,T) bir fuzzy topolojik uzay olsun. X de açık fuzzy cümlelerin A ile arakesitlerinin oluşturduğu A nın fuzzy alt cümleler ailesi A üzerinde bir fuzzy topolojidir ve T_A ile gösterilir. T_A ya A üzerine **indirgenmiş fuzzy topoloji** veya **T den indirgenen (rölatif) fuzzy topoloji** denir. (A, T_A) ikilisine (X,T) nin bir **fuzzy alt uzayı** denir. Diğer bir ifadeyle,

$$\forall j \in J \text{ için } V_j \in T_A \text{ ise } V_j = U_j \cap A \ni U_j \in T$$

yazılabilir. Ayrıca $U_j \in T$ ve $U_j \cap A = V_j$ olmak üzere, $\mu_{V_j}(x) = \min\{\mu_{U_j}(x), \mu_A(x)\}$ dir.

Tanım 3.2.3 : (X,T) bir fuzzy topolojik uzay olsun. A, X de bir fuzzy cümle ve a_λ , X de bir fuzzy nokta olmak üzere, $a_\lambda \in B \subset A$ olacak şekilde bir $B \in T$ açık fuzzy cümle varsa A ya **a_λ fuzzy noktanın fuzzy komşuluğu** denir (Ming 1980).

Uyarı : Bir (X,T) fuzzy topolojik uzayında A bir fuzzy cümle ve a_λ bir fuzzy nokta olmak üzere, bir fuzzy nokta aynı zamanda bir fuzzy cümle olduğundan, $\forall x = a \in X$ için

$$a_\lambda \in A \Leftrightarrow a_\lambda \subset A \Leftrightarrow \lambda \leq \mu_A(a) \text{ dır.}$$

Tanım 3.2.4 : A, bir (X,T) fuzzy topolojik uzayında bir fuzzy cümle olsun. Eğer A yı içeren bir açık fuzzy cümleyi bir U fuzzy cümle içeriyorsa, U ya **A fuzzy cümlelerin bir fuzzy komşuluğu** denir.

Tanım 3.2.5 : A, bir (X,T) fuzzy topolojik uzayında bir fuzzy cümle olsun. A fuzzy cümlesini kapsayan kapalı fuzzy cümlelerin arakesitine A nın **kapamışı** denir ve \bar{A} ile gösterilir. Yani,

$$\bar{A} = \bigwedge \{B : A \leq B \text{ ve } B' \in T\} = \inf \{B : A \leq B \text{ ve } B' \in T\}$$

Tanım 3.2.6 : A, bir (X, T) fuzzy topolojik uzayında bir fuzzy cümle olsun. A fuzzy cümlenin kapsadığı açık fuzzy cümlelerin birleşimi olan en geniş açık fuzzy cümleye A'nın **içi** denir ve \hat{A} ile gösterilir. Yani;

$$\hat{A} = \bigvee \{B : B \leq A \text{ ve } B \in T\} = \sup \{B : B \leq A \text{ ve } B \in T\}$$

dir (Yenipınar 2006).

Tanım 3.2.7 : (X, T_1) ve (Y, T_2) fuzzy topolojik uzaylar, $f : (X, T_1) \rightarrow (Y, T_2)$ bir tasvir olsun. Eğer, $\forall V \in T_2$ için $f^{-1}[V] \in T_1$ ise f **fuzzy süreklidir** denir.

Diğer yandan, $\forall U \in T_1$ için $f[U] \in T_2$ ise f ye **fuzzy açık tasvir** denir. Benzer olarak, X deki kapalı fuzzy cümleleri Y de kapalı fuzzy cümlelere dönüştüren tasvire **fuzzy kapalı tasvir** denir (Azad 1982).

Teorem 3.2.1 : (X, T_1) ve (Y, T_2) fuzzy topolojik uzaylar, $f : (X, T_1) \rightarrow (Y, T_2)$ bir tasvir olsun. Bu durumda,

f fuzzy süreklidir \Leftrightarrow Y de her kapalı fuzzy cümlenin ters görüntüsü de X de kapalı fuzzy cümledir.

İspat :

\Rightarrow $f : (X, T_1) \rightarrow (Y, T_2)$ tasviri fuzzy sürekli olsun. Kabul edelim ki B, Y de kapalı fuzzy cümledir. Bu durumda B' açık fuzzy cümle ve f fuzzy sürekli olduğundan $f^{-1}[B'] = \{f^{-1}[B]\}'$ X de açık fuzzy cümledir. Dolayısıyla $f^{-1}[B]$, X de kapalı fuzzy cümledir.

\Leftarrow Kabul edelim ki B, Y de kapalı fuzzy cümle iken $f^{-1}[B]$ X de kapalı fuzzy cümle olsun. Dolayısıyla B', Y de açık fuzzy cümle ve $f^{-1}[B'] = \{f^{-1}[B]\}'$ olduğundan $f^{-1}[B']$, X de açık fuzzy cümledir. Dolayısıyla tanım 3.2.7 den dolayı f fuzzy süreklidir.

Teorem 3.2.2 : $f : (X, T) \rightarrow (Y, \mathcal{U})$ ve $g : (Y, \mathcal{U}) \rightarrow (Z, \mathcal{V})$ birer fuzzy sürekli tasvir olsunlar. Bu durumda $\text{gof} : (X, T) \rightarrow (Z, \mathcal{V})$ bir fuzzy sürekli tasvirdir.

İspat :

$C \subset (Z, \mathcal{V})$ bir açık fuzzy cümle olsun.

$$(\text{gof})^{-1}[C] = f^{-1}[g^{-1}[C]]$$

olup, g fuzzy sürekli olduğundan , $g^{-1}[C] \subset \mathcal{U}$ açık fuzzy cümle ve f fuzzy sürekli olduğundan $f^{-1}[g^{-1}[C]] \subset T$ açık fuzzy cümledir. Dolayısıyla $\text{gof} : (X, T) \rightarrow (Z, \mathcal{V})$ fuzzy sürekli bir tasvirdir.

Teorem 3.2.3 : (X, T) ve (Y, \mathcal{U}) iki fuzzy topolojik uzay olsun. $A \cup B = X$ olmak üzere, (X, T) deki A ve B kapalı fuzzy cümleler yalnızca 0 ve 1 değerlerini alsın.

$f : (A, T_A) \rightarrow (Y, \mathcal{U})$ ve $g : (B, T_B) \rightarrow (Y, \mathcal{U})$ iki fuzzy sürekli tasvir olmak üzere

$f|_{A \cap B} = g|_{A \cap B}$ ise,

$$h(x) = \begin{cases} f(x) , & x \in A \\ g(x) , & x \in B \end{cases}$$

şeklinde tanımlı $h : (X, T) \rightarrow (Y, \mathcal{U})$ tasviri fuzzy süreklidir.

İspat :

A ve B fuzzy cümleler yalnızca 0 ve 1 değerlerini alan X de kapalı fuzzy cümleler olsun. Y deki her K kapalı fuzzy cümle için, f ve g tasvirleri fuzzy sürekli olduklarından teorem 3.2.1 den dolayı $f^{-1}(K)$ ve $g^{-1}(K)$ X de kapalı fuzzy cümlelerdir. $X = A \cup B$ olduğundan

$$h^{-1}(K) = f^{-1}(K) \cup g^{-1}(K)$$

dır. Kapalı fuzzy cümlelerin sonlu birleşimleri yine bir kapalı fuzzy cümle olduğundan, $h^{-1}(K)$ X de bir kapalı fuzzy cümledir. O halde Y deki her K kapalı fuzzy cümle için

$h^{-1}(K)$ X de kapalı fuzzy cümle olduğundan h tasviri fuzzy süreklidir.

Tanım 3.2.8 : Eğer bir $f : (X, T) \rightarrow (Y, \mathcal{U})$ tasviri bire-bir, örten, fuzzy sürekli ve f^{-1} de fuzzy sürekli ise f ye **fuzzy homeomorfizm** denir (Wong 1974).

3.3 Fuzzy İrtibatlılık

Tanım 3.3.1 : A ve B , (X, T) fuzzy topolojik uzayında iki fuzzy cümle olsun.

$A \subset K$, $B \subset L$ olmak üzere $K \cap B = \emptyset$, $L \cap A = \emptyset$ olacak şekilde K ve L kapalı fuzzy cümleler varsa, A ile B ye **Q-ayrılmış** fuzzy cümleler denir (Zheng 1984).

Tanım 3.3.2 : A ve B , (X, T) fuzzy topolojik uzayında iki fuzzy cümle olsun.

$A \subset K$, $B \subset L$ olmak üzere $K \cap B = \emptyset$, $L \cap A = \emptyset$ olacak şekilde K , $L \in T$ açık fuzzy cümleler varsa A ile B ye **ayrılmış** fuzzy cümleler denir (Zheng 1984).

Tanım 3.3.3 : D , (X, T) fuzzy topolojik uzayında bir fuzzy cümle olmak üzere,

$A \cup B = D$ olacak şekilde (D, T_{D_0}) fuzzy alt uzayında boş olmayan, ayrılmış A ve B fuzzy cümleler varsa D ye **Q-irtibatsız** fuzzy cümle denir.

Diğer yandan, Q -irtibatsız olmayan bir fuzzy cümleye **Q-irtibatlı** fuzzy cümle denir.

Tanım 3.3.4 : D , (X, T) fuzzy topolojik uzayında bir fuzzy cümle olmak üzere,

$A \cup B = D$ olacak şekilde (D, T_{D_0}) fuzzy alt uzayında boş olmayan Q -ayrılmış A ve B fuzzy cümleler varsa D ye **fuzzy irtibatsızdır** denir (Lowen 1976).

Diğer yandan, fuzzy irtibatsız olmayan bir fuzzy cümleye **fuzzy irtibatlıdır** denir.

Yukarıdaki tanımlardan hareketle aşağıdaki tanımları ifade edebiliriz.

Tanım 3.3.5 : A , (X, T) fuzzy topolojik uzayında bir fuzzy cümle olmak üzere,

$$A \cap B \neq \emptyset, A \cap C \neq \emptyset, A \subset B \cup C, A \cap B \cap C = \emptyset$$

olacak şekilde B, C kapalı (açık) fuzzy cümleler varsa A ya (X, T) de **fuzzy irtibatsızdır (Q-irtibatsızdır)** denir. Ayrıca **fuzzy irtibatsız (Q-irtibatsız)** olmayan bir fuzzy cümleye **fuzzy irtibatlıdır (Q-irtibatlıdır)** denir.

Tanım 3.3.6 : (X, τ) bir topolojik uzay olmak üzere,

$$T = \{A : A, X \text{ üzerinde bir fuzzy cümle ve } A_0 \in \tau \}$$

ailesi X üzerinde bir fuzzy topoloji olup, (X, T) ikilisine **(X, τ) topolojik uzayından elde edilen fuzzy topolojik uzay** denir (Zheng 1984).

Yani, bir topolojik uzaya bir fuzzy topolojik uzay karşılık getirilebilir.

Teorem 3.3.1 : (X, τ) bir topolojik uzay ve (X, T) bu topolojik uzaydan elde edilen fuzzy topolojik uzay olsun. $A, (X, T)$ de bir fuzzy cümle olmak üzere, $A, (X, T)$ da fuzzy irtibatlıdır $\Leftrightarrow A$ nın desteği olan A_0 cümlesi (X, τ) da irtibatlıdır

İspat :

\Rightarrow : $A, (X, T)$ da fuzzy irtibatlı olsun. Bu durumda,

$A \cap B \neq \emptyset$, $A \cap C \neq \emptyset$, $A \subset B \cup C$, $A \cap B \cap C \neq \emptyset$ olacak şekilde B, C kapalı fuzzy cümleler vardır. B ve C fuzzy cümleler (X, T) da fuzzy kapalı olduklarından B ve C fuzzy cümlelerin destekleri olan B_0, C_0 cümleleri τ da kapalıdır.

$$A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow \exists x' \in X \text{ için } \min\{\mu_A(x'), \mu_B(x')\} \neq 0 \Rightarrow \mu_A(x') \neq 0 \text{ ve } \mu_B(x') \neq 0$$

$$\Rightarrow x' \in A_0 \text{ ve } x' \in B_0 \Rightarrow x' \in A_0 \cap B_0 \Rightarrow A_0 \cap B_0 \neq \emptyset$$

Benzer şekilde $A \cap C \neq \emptyset$ ise $A_0 \cap C_0 \neq \emptyset$ olduğu gösterilebilir. Diğer yandan,

$$A \subset B \cup C \Rightarrow \forall x \in X \text{ için } \mu_A(x) \leq \max\{\mu_B(x), \mu_C(x)\} \text{ dir.}$$

$$\max\{\mu_B(x), \mu_C(x)\} = \mu_D(x) \text{ denirse } \forall x \in X \text{ için } \mu_A(x) \leq \mu_D(x)$$

$$\Rightarrow \forall x \in A_0 \text{ için } 0 < \mu_A(x) \leq \mu_D(x) \Rightarrow \forall x \in A_0 \text{ için } x \in D_0 = B_0 \cup C_0 \Rightarrow A_0 \subset B_0 \cup C_0$$

$$A \cap B \cap C \neq \emptyset \Rightarrow \exists x' \in X \text{ için } \min\{\mu_A(x'), \mu_B(x'), \mu_C(x')\} \neq 0$$

$$\Rightarrow x' \in A_0, x' \in B_0, x' \in C_0 \Rightarrow x' \in A_0 \cap B_0 \cap C_0 \Rightarrow A_0 \cap B_0 \cap C_0 \neq \emptyset$$

Dolayısıyla $A_0 \cap B_0 \neq \emptyset$, $A_0 \cap C_0 \neq \emptyset$, $A_0 \subset B_0 \cup C_0$ olacak şekilde $A_0 \cap B_0 \cap C_0 \neq \emptyset$ şartını sağlayan (X, τ) topolojik uzayında B_0, C_0 kapalı cümleleri vardır. O halde A_0 cümlesi (X, τ) da irtibatlıdır.

\Leftarrow : A nın desteği A_0 cümlesi (X, τ) da irtibatlı ise A nın (X, T) da fuzzy irtibatlı olduğu benzer şekilde gösterilebilir.

Teorem 3.3.2 : Bir topolojik uzaydan elde edilen fuzzy topolojik uzayda fuzzy irtibatlılık ve Q-irtibatlılık birbirine eşdeğerdir.

İspat :

Doğruluklarını daha önce gösterdiğimiz aşağıdaki ifadeleri göstermek ispat için yeterlidir.

(X, T) , (X, τ) topolojik uzayından elde edilen fuzzy topolojik uzay ve A , (X, T) da bir fuzzy cümle olsun. Bu durumda,

1) A , (X, T) da fuzzy irtibatlıdır $\Leftrightarrow A_0$, (X, τ) da irtibatlıdır.

2) A , (X, T) da Q-irtibatlıdır $\Leftrightarrow A_0$, (X, τ) da irtibatlıdır.

Dolayısıyla A , (X, T) da fuzzy irtibatlıdır $\Leftrightarrow A$, (X, T) da Q-irtibatlıdır

Uyarı : ε_1 ile $I = [0, 1]$ kapalı aralığı üzerindeki reel sayıların alışımlı alt uzay topolojisini (metrik ile oluşturulan topoloji) ve $(I, \tilde{\varepsilon}_1)$ ile de (I, ε_1) dan elde edilen fuzzy topolojik uzayı göstereceğiz.

Teorem 3.3.3 : A ve B , $(I, \tilde{\varepsilon}_1)$ fuzzy topolojik uzayında fuzzy irtibatlı fuzzy cümleler ve $A(0) > 0$, $A(1) = B(0) > 0$ ve $B(1) > 0$ olsun. Bu durumda, $C(0) > 0$ ve $C(1) > 0$ olmak üzere,

$$C(x) = \begin{cases} A(2x) & , \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ B(2x-1) & , \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

şeklindeki fuzzy cümle, $(I, \tilde{\varepsilon}_1)$ da fuzzy irtibatlıdır.

İspat

A ve B fuzzy cümleler Teorem 3.3.2 den dolayı Q-irtibatlıdır.

$A(0) > 0$, $A(1) > 0$ ve A , $(I, \tilde{\varepsilon}_1)$ da Q-irtibatlı olduğundan $\forall x \in I$ için $A(x) > 0$ dır. Benzer olarak $\forall x \in I$ için $B(x) > 0$ dır. Bu durumda $\forall x \in I$ için $C(x) > 0$ yani $C_0 = I$ dır. I , (I, ε_1) da irtibatlı olduğundan C fuzzy cümle, $(I, \tilde{\varepsilon}_1)$ da Q-irtibatlıdır. Teorem 3.3.2 den dolayı C fuzzy cümle, $(I, \tilde{\varepsilon}_1)$ da fuzzy irtibatlıdır.

Uyarı : $X \neq \emptyset$ bir cümle ve A , X de bir fuzzy cümle olsun. Bu durumda herhangi bir $x \in X$ noktasının A fuzzy cümle altındaki görüntüsünü $A(x) = \mu_{A(x)}$ şeklinde göstereceğiz.

4. FUZZY TOPOLOJİK UZAYDA FUZZY EĞRİLER VE ESAS GRUP

4.1 Fuzzy Eğri

Tanım 4.1.1 : (X, T) bir fuzzy topolojik uzay olsun. Eğer,

$\alpha : (I, \tilde{\mathcal{E}}_1) \rightarrow (X, T)$ fuzzy sürekli ve $A(0) > 0$, $A(1) > 0$ şartlarını sağlayan A fuzzy cümlesi $(I, \tilde{\mathcal{E}}_1)$ da fuzzy irtibatlı ise, $\alpha(A)$ fuzzy cümlesine (X, T) da bir **fuzzy eğri** denir.

$(\alpha(0))_{A(0)} = \alpha(0_{A(0)})$ ve $(\alpha(1))_{A(1)} = \alpha(1_{A(1)})$ noktalarına da sırasıyla $\alpha(A)$ **fuzzy eğrinin başlangıç ve bitim noktaları** denir.

$\alpha^{-1} : (I, \tilde{\mathcal{E}}_1) \rightarrow (X, T)$ olmak üzere, $\alpha^{-1}(x_{A(x)}) = \alpha^{-1}((1-x)_{A(1-x)})$ şeklinde tanımlı olup, $\alpha^{-1}(A)$ fuzzy cümlesine, $\alpha(A)$ **fuzzy eğrisinin tersi** denir.

Eğer α fuzzy sürekli tasviri sabit bir tasvir ise, $\alpha(A)$ ya (X, T) da bir **fuzzy sıfır eğri** denir (Zheng 1984).

Ayrıca, bir fuzzy topolojik uzaydaki bir fuzzy eğri, bu uzayda fuzzy irtibatlı bir fuzzy cümledir.

Tanım 4.1.2 : $\alpha(A)$ ve $\beta(B)$ bir (X, T) fuzzy topolojik uzayında fuzzy eğriler ve $\alpha(1_{A(1)}) = \beta(0_{B(0)})$ olsun. Bu durumda,

$$\gamma(C) = (\alpha(A)\beta(B))_{(x_{C(x)})} = \begin{cases} \alpha((2x)_{A(2x)}) & , \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \beta((2x-1)_{B(2x-1)}) & , \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlı $\gamma : (I, \tilde{\mathcal{E}}_1) \rightarrow (X, T)$ tasviri teorem 3.2.3 den dolayı fuzzy sürekli dir. $\gamma(C)$ (X, T) da bir fuzzy eğridir. $\gamma(C)$ fuzzy eğriye $\alpha(A)$ ve $\beta(B)$ **fuzzy eğrilerin çarpımı** denir ve $\gamma(C) = \alpha(A)\beta(B)$ şeklinde gösterilir (Klir 1988).

Teorem 3.2.3 den dolayı aşağıdaki sonucu elde ederiz.

(X, T) bir fuzzy topolojik uzay olsun. I_1 ve I_2 (I, \mathcal{E}_I) da, $I_1 \cup I_2 = I$ olacak şekilde kapalı cümleler olsun.

$f : (I_1, \tilde{\mathcal{E}}_1) \rightarrow (X, T)$ ve $g : (I_2, \tilde{\mathcal{E}}_2) \rightarrow (X, T)$ fuzzy sürekli tasvirler olmak üzere, eğer

$f|_{I_1 \cap I_2} = g|_{I_1 \cap I_2}$ ise bu durumda

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & , x \in I_1 \\ g(x) & , x \in I_2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlı $h : (I, \tilde{\mathcal{E}}_I) \rightarrow (X, T)$ fuzzy sürekli bir tasvirdir.

Teorem 4.1.1 : $a_\lambda, b_\mu, c_\delta, (X, T)$ fuzzy topolojik uzayında fuzzy noktalar olsun.

(X, T) da başlangıç noktası a_λ , bitim noktası b_μ olan bir fuzzy eğri ile başlangıç noktası b_μ , bitim noktası c_δ olan bir fuzzy eğri varsa bu durumda, (X, T) da başlangıç noktası a_λ , bitim noktası c_δ olan bir fuzzy eğri vardır.

İspat :

$\alpha(A)$ ve $\beta(B)$, (X, T) fuzzy topolojik uzayında,

$$\alpha(0_{A(0)}) = a_\lambda, \alpha(1_{A(1)}) = b_\mu$$

ve

$$\beta(0_{B(0)}) = b_\mu, \beta(1_{B(1)}) = c_\delta$$

özelliklerini sağlayan fuzzy eğriler olsun. Teorem 3.2.3 den dolayı,

$$\gamma(x) = \begin{cases} \alpha(2x_{A(2x)}) & , 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2x-1_{B(2x-1)}) & , \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlı $\gamma : (I, \tilde{\mathcal{E}}_I) \rightarrow (X, T)$ bir fuzzy sürekli tasvirdir. Teorem 3.3.3 den

$$C(x) = \begin{cases} A(2x) & , \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ B(2x-1) & , \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlı C fuzzy cümle, $(I, \tilde{\epsilon}_1)$ da fuzzy irtibatlıdır ve $C(0) > 0$, $C(1) > 0$ dır. Böylece $\gamma(C)$, (X, T) da başlangıç noktası a_λ , bitim noktası c_δ olan bir fuzzy eğridir

Tanım 4.1.3 : D, bir (X, T) fuzzy topolojik uzayında bir fuzzy cümle olsun. Eğer, herhangi $a_\lambda, b_\mu \in D$ fuzzy noktaları için D de başlangıç noktası a_λ , bitim noktası b_μ olan bir fuzzy eğri varsa, yani;

$\alpha : (I, \tilde{\epsilon}_1) \rightarrow (X, T)$ bir fuzzy sürekli tasvir ve $E(0) > 0$, $E(1) > 0$, $\alpha(E) \subset D$ olmak üzere $\alpha(0_{E(0)}) = a_\lambda$, $\alpha(1_{E(1)}) = b_\mu$ olacak şekilde $(I, \tilde{\epsilon}_1)$ da fuzzy irtibatlı bir E fuzzy cümle varsa D ye (X, T) da **fuzzy eğrisel irtibatlıdır** denir.

Ayrıca, bir fuzzy topolojik uzaydaki bir fuzzy eğrisel irtibatlı fuzzy cümle bu uzayda fuzzy irtibatlıdır.

4.2 Fuzzy Homotopi ve Esas Grup

Tanım 4.2.1 : (X, T) , (Y, \mathcal{U}) iki fuzzy topolojik uzay olmak üzere,

$f, g : (X, T) \rightarrow (Y, \mathcal{U})$ iki fuzzy sürekli tasvir olsun. Eğer $\forall x \in X$ için

$$F(x, 0) = f \text{ ve } F(x, 1) = g$$

olacak şekilde bir $F(x, t) = F : (X, T) \times (J, \tilde{\epsilon}_J) \rightarrow (Y, \mathcal{U})$ fuzzy sürekli tasviri varsa,

f tasviri g tasvirine **fuzzy homotoptur** denir ve $f \simeq g$ şeklinde gösterilir. F tasvirine de **fuzzy homotopi** denir (Güner and Balcı 2006).

Uyarı : Yukarıdaki tanımda x in (X, T) da bir fuzzy nokta olduğu unutulmamalıdır.

Bazı durumlarda daha özel tipte fuzzy homotopiler alınmaktadır. Bu tip fuzzy homotopilerde fuzzy topolojik uzayların bazı fuzzy alt cümleleri sabit kalmaktadır.

Aşağıdaki ifadede bir fuzzy topolojik uzaydaki fuzzy sürekli tasvirlerin bir cümleye göre fuzzy homotopisi tanımlanmıştır.

Tanım 4.2.2 : $(X, \mathcal{T}), (Y, \mathcal{U})$ iki fuzzy topolojik uzay, $X_0 \subset X$ bir alt cümle ve

$f, g : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{U}) \forall x \in X_0$ için $f(x) = g(x)$ şartını sağlayan iki fuzzy sürekli tasvir olsun. Eğer,

I) $\forall x \in X$ için $F(x, 0) = f$ ve $F(x, 1) = g$

II) $\forall x \in X_0$ için $F(x, t) = f(x) = g(x)$

şartlarını sağlayan bir $F : (X, \mathcal{T}) \times (J, \tilde{\mathcal{E}}_J) \rightarrow (Y, \mathcal{U})$ fuzzy sürekli tasviri varsa, **f tasviri**

X_0 a göre g tasvirine fuzzy homotoptur denir ve $f \simeq g \text{ rel. } X_0$ şeklinde gösterilir.

Tanım 4.2.3 : $\alpha(A)$ ve $\beta(B)$ bir (X, \mathcal{T}) fuzzy topolojik uzayında fuzzy eğriler olsun.

1) $F(x, 0) = \alpha(x_{A(x)})$, $F(x, 1) = \beta(x_{B(x)})$, $\forall x \in I$

2) $F(0, t) = \alpha(0_{A(0)}) = \beta(0_{B(0)})$, $F(1, t) = \alpha(1_{A(1)}) = \beta(1_{B(1)})$, $\forall t \in J$

olacak şekilde bir $F = F(x, t) : (I, \tilde{\mathcal{E}}_I) \times (J, \tilde{\mathcal{E}}_J) \rightarrow (X, \mathcal{T})$ fuzzy sürekli tasviri varsa, bu durumda $\alpha(A)$, $\beta(B)$ fuzzy eğrisine $(0, 1)$ e, yani 0 ve 1 noktalarına göre **fuzzy homotoptur** denir ve $\alpha(A) \simeq \beta(B) \text{ rel. } (0, 1)$ şeklinde gösterilir (Güner and Balcı 2006).

Uyarı : Bundan sonra $\alpha(A) \simeq \beta(B) \text{ rel. } (0, 1)$ ifadesini $\alpha(A) \simeq \beta(B)$ şeklinde göstereceğiz.

Teorem 4.2.1 : $\alpha(A)$, $\beta(B)$, $\gamma(C)$ ve $\delta(D)$, bir (X, \mathcal{T}) fuzzy topolojik uzayında fuzzy eğriler olmak üzere, $\alpha(A)\beta(B)$ tanımlı ve $\alpha(A) \simeq \gamma(C)$, $\beta(B) \simeq \delta(D)$ olsun. Bu durumda, $\gamma(C)\delta(D)$ tanımlıdır ve $\alpha(A)\beta(B) \simeq \gamma(C)\delta(D)$ dir.

İspat :

$\alpha(A)\beta(B)$ tanımlı olduğundan, $\alpha(1_{A(1)}) = \beta(0_{B(0)})$ dir.

$\alpha(A) \simeq \gamma(C) \Rightarrow \alpha(0_{A(0)}) = \gamma(0_{C(0)})$ ve $\alpha(1_{A(1)}) = \gamma(1_{C(1)})$

$$\beta(B) \simeq \delta(D) \Rightarrow \beta(0_{B(0)}) = \delta(0_{D(0)}) \text{ ve } \beta(1_{B(1)}) = \delta(1_{D(1)})$$

dir. Bu durumda,

$\alpha(1_{A(1)}) = \beta(0_{B(0)})$ olduğundan $\gamma(1_{C(1)}) = \delta(0_{D(0)})$ dir ve dolayısıyla $\gamma(C)\delta(D)$ tanımlıdır. Ayrıca,

$\alpha(A) \simeq \gamma(C) \Rightarrow \exists F : (I, \tilde{\epsilon}_I) \times (J, \tilde{\epsilon}_J) \rightarrow (X, T) \ni F$ fuzzy sürekli ve $\forall x \in I, \forall t \in J$ için,

$$F(x,0) = \alpha(x_{A(x)}), F(x,1) = \gamma(x_{C(x)})$$

ve

$$F(0,t) = \alpha(0_{A(0)}) = \gamma(0_{C(0)}), F(1,t) = \alpha(1_{A(1)}) = \gamma(1_{C(1)}).$$

$\beta(B) \simeq \delta(D) \Rightarrow \exists G : (I, \tilde{\epsilon}_I) \times (J, \tilde{\epsilon}_J) \rightarrow (X, T) \ni G$ fuzzy sürekli ve $\forall x \in I, \forall t \in J$ için

$$G(x,0) = \beta(x_{B(x)}), G(x,1) = \delta(x_{D(x)})$$

ve

$$G(0,t) = \beta(0_{B(0)}) = \delta(0_{D(0)}), G(1,t) = \beta(1_{B(1)}) = \delta(1_{D(1)})$$

Bu durumda,

$$H(x,t) = \begin{cases} F(2x,t) & , \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ G(2x-1,t) & , \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

olacak şekilde $H : (I, \tilde{\epsilon}_I) \times (J, \tilde{\epsilon}_J) \rightarrow (X, T)$ tasviri teorem 3.2.3 den dolayı fuzzy sürekli dir. Ayrıca,

$$H(x,0) = \begin{cases} F(2x,0) & , \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ G(2x-1,0) & , \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases} = \begin{cases} \alpha((2x)_{A(2x)}) & , \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \beta((2x-1)_{B(2x-1)}) & , \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$= (\alpha(A)\beta(B))(x_{E(x)})$$

ve

$$H(x,1) = \begin{cases} F(2x,1) & , \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ G(2x-1,1) & , \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases} = \begin{cases} \gamma((2x)_{C(2x)}) & , \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \delta((2x-1)_{D(2x-1)}) & , \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$= (\gamma(C)\delta(D))(x_{G(x)})$$

dir. Diğer taraftan,

$$H(0,t) = F(0,t) = \alpha(0_{A(0)}) = \gamma(0_{C(0)}) = (\alpha(A)\beta(B))(0_{E(0)}) = (\gamma(C)\delta(D))(0_{G(0)})$$

ve

$$H(1,t) = G(1,t) = \beta(1_{B(1)}) = \delta(1_{D(1)}) = (\alpha(A)\beta(B))(1_{E(1)}) = (\gamma(C)\delta(D))(1_{G(1)})$$

olduğundan

$$\alpha(A)\beta(B) \simeq \gamma(C)\delta(D) \text{ dir.}$$

Teorem 4.2.2 : $\alpha(A)$, $\beta(B)$ ve $\gamma(C)$, bir (X,T) fuzzy topolojik uzayında fuzzy eğriler olmak üzere $\alpha(A)\beta(B)$ ve $\beta(B)\gamma(C)$ tanımlı olsun. Bu durumda, $(\alpha(A)\beta(B))\gamma(C) \simeq \alpha(A)(\beta(B)\gamma(C))$ dir.

İspat :

$$F(x,t) = \begin{cases} \alpha \left(\begin{array}{c} \left[\frac{4x}{1+t} \right] \\ A \left[\frac{4x}{1+t} \right] \end{array} \right) & , \quad 0 \leq x \leq \frac{1+t}{4} \\ \beta(4x-1-t)_{B(4x-1-t)} & , \quad \frac{1+t}{4} \leq x \leq \frac{2+t}{4} \\ \gamma \left(\begin{array}{c} \left[1 - \frac{4-4x}{2-t} \right] \\ C \left[1 - \frac{4-4x}{2-t} \right] \end{array} \right) & , \quad \frac{2+t}{4} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $F : (I, \tilde{\mathcal{E}}_I) \times (J, \tilde{\mathcal{E}}_J) \rightarrow (X, T)$ tasviri teorem 3.2.3 den dolayı fuzzy süreklidir. Ayrıca,

$$F(x,0) = \begin{cases} \alpha((4x)_{A(4x)}) & , & 0 \leq x \leq \frac{1}{4} \\ \beta((4x-1)_{B(4x-1)}) & , & \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \gamma((2x-1)_{C(2x-1)}) & , & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases} = ((\alpha(A)\beta(B))\gamma(C))(x_{S(x)})$$

$$F(x,1) = \begin{cases} \alpha((2x)_{A(2x)}) & , & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \beta((4x-2)_{B(4x-2)}) & , & \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{4} \\ \gamma((4x-3)_{C(4x-3)}) & , & \frac{3}{4} \leq x \leq 1 \end{cases} = \alpha(A)(\beta(B)\gamma(C))(x_{T(x)})$$

dir. Diğer yandan

$$F(0,t) = \alpha(0_{A(0)}) = ((\alpha(A)\beta(B))\gamma(C))(0_{S(0)}) = (\alpha(A)(\beta(B)\gamma(C)))(0_{T(0)})$$

ve

$$F(1,t) = \gamma(1_{C(1)}) = ((\alpha(A)\beta(B))\gamma(C))(1_{S(1)}) = (\alpha(A)(\beta(B)\gamma(C)))(1_{T(1)})$$

olduğundan

$$(\alpha(A)\beta(B))\gamma(C) \simeq \alpha(A)(\beta(B)\gamma(C)) \text{ dir..}$$

dir.

Teorem 4.2.3 : (X, T) fuzzy topolojik uzayında $\alpha(A)$ bir fuzzy eğri, $\beta(B)$ fuzzy sıfır eğri ve $(\alpha(A)\beta(B))$ tanımlı olsun. Bu durumda $\alpha(A)\beta(B) \simeq \alpha(A)$ dir.

Benzer şekilde $\gamma(C)$, (X, T) da fuzzy sıfır eğri ve $\gamma(C)\alpha(A)$ tanımlı olsun. Bu durumda $\gamma(C)\alpha(A) \simeq \alpha(A)$ dir.

İspat :

$\alpha(A)\beta(B)$ tanımlı ve $\beta(B)$ fuzzy sıfır eğri olduğundan, $\forall x \in I$ için $\alpha(1_{A(1)}) = \beta(x_{B(x)})$ dir.

Bu durumda,

$$F(x,t) = \begin{cases} \alpha \left(\left(\frac{2x}{1+t} \right)_{A \left(\frac{2x}{1+t} \right)} \right) & , \quad 0 \leq x \leq \frac{1+t}{2} \\ \alpha(1_{A(1)}) = \beta(x_{B(x)}) & , \quad \frac{1+t}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlı olan $F : (I, \tilde{\mathcal{E}}_I) \times (J, \tilde{\mathcal{E}}_J) \rightarrow (X, T)$ tasviri Teorem 3.2.3 den dolayı fuzzy süreklidir. Ayrıca,

$$F(x,0) = \begin{cases} \alpha((2x)_{A(2x)}) & , \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \alpha((1)_{A(1)}) = \beta(x_{B(x)}) & , \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases} = (\alpha(A)\beta(B))(x_{E(x)})$$

$$F(x,1) = \begin{cases} \alpha((x)_{A(x)}) & , \quad 0 \leq x \leq 1 \\ \alpha((1)_{A(1)}) & , \quad x = 1 \end{cases} = \alpha(x_{A(x)})$$

dir. Diğer yandan $F(0,t) = \alpha((0)_{A(0)})$, $F(1,t) = \alpha((1)_{A(1)})$ olduğundan, $\alpha(A)\beta(B) \simeq \alpha(A)$.

Benzer şekilde $\gamma(C)\alpha(A) \simeq \alpha(A)$ olduğu gösterilebilir.

Teorem 4.2.4 : $\alpha(A)$, (X, T) fuzzy topolojik uzayında bir fuzzy eğri olsun.

$\alpha^{-1}(A)$, $\alpha(A)$ fuzzy eğrinin tersi olmak üzere, $\alpha(A)\alpha^{-1}(A)$ ve $\alpha^{-1}(A)\alpha(A)$, fuzzy sıfır eğriye fuzzy homotoptur.

İspat :

$$F(x,t) = \begin{cases} \alpha((2x(1-t))_{A(2x(1-t))}) & , \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \alpha((2(1-x)(1-t))_{A(2(1-x)(1-t))}) & , \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlı $F : (I, \bar{\epsilon}_I) \times (J, \bar{\epsilon}_J) \rightarrow (X, T)$ tasviri Teorem 3.2.3 den dolayı fuzzy süreklidir. Ayrıca,

$$F(x,0) = \begin{cases} \alpha((2x)_{A(2x)}) & , \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \alpha((2-2x)_{A(2-2x)}) & , \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases} = (\alpha(A)\alpha^{-1}(A))(x_{E(x)})$$

$$F(x,1) = \begin{cases} \alpha((0)_{A(0)}) & , \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \alpha((0)_{A(0)}) & , \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases} = \alpha((0)_{A(0)})$$

dir. Diğer yandan

$F(0,t) = \alpha((0)_{A(0)})$ ve $F(1,t) = \alpha((0)_{A(0)})$ olduğundan $\alpha(A)\alpha^{-1}(A)$, $\forall x \in I$ için

$\beta(x_{B(x)}) = \alpha((0)_{A(0)})$ olan fuzzy sıfır eğriye fuzzy homotoptur.

Benzer şekilde $\alpha^{-1}(A)\alpha(A)$ nin $\forall x \in I$ için $\beta(x_{B(x)}) = \alpha((1)_{A(1)})$ olan fuzzy sıfır eğriye fuzzy homotop olduğu gösterilebilir.

Tanım 4.2.4 : Başlangıç ve bitim noktası aynı olan bir fuzzy eğriye **kapalı fuzzy eğri** denir. Bir a_λ fuzzy noktasında başlayan ve biten kapalı fuzzy eğrilere kısaca, a_λ **fuzzy noktasında fuzzy eğriler** denir. Bir (X, T) fuzzy topolojik uzayının bir a_λ fuzzy noktasındaki fuzzy kapalı eğrilerin cümlesi $\Omega(X, a_\lambda)$ ile gösterilir. a_λ fuzzy noktasına bu fuzzy eğriler için **taban nokta** denir.

Tanım 4.2.5 : (X, T) bir fuzzy topolojik uzay ve $\alpha(A), \beta(B) \in \Omega(X, a_\lambda)$ olsun.

$$1) F(x,0) = \alpha(x_{A(x)}), \quad F(x,1) = \beta(x_{B(x)}), \quad \forall x \in I$$

$$2) F(0,t) = \alpha(0_{A(0)}) = \beta(0_{B(0)}) = a_\lambda, \quad F(1,t) = \alpha(1_{A(1)}) = \beta(1_{B(1)}) = a_\lambda, \quad \forall t \in J$$

olacak şekilde bir $F : (I, \tilde{\mathcal{E}}_I) \times (J, \tilde{\mathcal{E}}_J) \rightarrow (X, T)$ fuzzy sürekli tasviri varsa, bu durumda $\alpha(A)$ ve $\beta(B)$ fuzzy eğrilerine a_λ **fuzzy noktasına göre fuzzy homotopular** denir ve $\alpha(A) \simeq_{a_\lambda} \beta(B)$ şeklinde gösterilir.

Uyarı : \simeq_{a_λ} bağıntısı, $\simeq_{rel.(0,1)}$ fuzzy homotopi bağıntısının özel bir hali olduğu için, daha önce verilen fuzzy homotopi teoremleri \simeq_{a_λ} bağıntısı için de geçerlidir. Bu teoremleri bir fuzzy topolojik uzayın esas grubunu oluştururken kullanacağız. Kısalık bakımından da \simeq_{a_λ} yerine \simeq gösterimini tercih edeceğiz.

Teorem 4.2.5 : \simeq bağıntısı $\Omega(X, a_\lambda)$ cümlesi üzerinde bir denklik (eşdeğerlik) bağıntısıdır.

İspat :

i) Yansıma :

$\alpha(A) \in \Omega(X, a_\lambda)$ ve $F : (I, \tilde{\mathcal{E}}_I) \times (J, \tilde{\mathcal{E}}_J) \rightarrow (X, T)$ tasviri $F(x,t) = \alpha((x)_{A(x)})$ şeklinde tanımlı olsun. Bu durumda F fuzzy sürekli olup,

$$F(x,0) = \alpha((x)_{A(x)}), \quad F(x,1) = \alpha((x)_{A(x)}), \quad \forall x \in I$$

$$F(0,t) = \alpha(0_{A(0)}), \quad F(1,t) = \alpha(1_{A(1)}), \quad \forall t \in J$$

şartları sağlanır. Dolayısıyla $\alpha(A) \simeq \alpha(A)$.

ii) Simetri :

$\alpha(A), \beta(B) \in \Omega(X, a_\lambda)$ ve $\alpha(A) \simeq \beta(B)$ olsun.

$\alpha(A) \simeq \beta(B) \Rightarrow \exists F : (I, \tilde{\mathcal{E}}_I) \times (J, \tilde{\mathcal{E}}_J) \rightarrow (X, T)$ fuzzy sürekli tasviri vardır ve

$$F(x,0) = \alpha((x)_{A(x)}), \quad F(x,1) = \beta((x)_{B(x)}), \quad \forall x \in I$$

$$F(0,t) = \alpha(0_{A(0)}) = \beta(0_{B(0)}) = a_\lambda, \quad F(1,t) = \alpha(1_{A(1)}) = \beta(1_{B(1)}) = a_\lambda, \quad \forall t \in J.$$

Şimdi $G : (I, \tilde{\epsilon}_I) \times (J, \tilde{\epsilon}_J) \rightarrow (X, T)$ tasviri $G(x,t) = F(x,1-t)$ şeklinde tanımlı olsun. Bu durumda G fuzzy sürekli olup,

$$G(x,0) = F(x,1) = \beta((x)_{B(x)}), \quad G(x,1) = F(x,0) = \alpha((x)_{A(x)}), \quad \forall x \in I$$

$$G(0,t) = \alpha(0_{A(0)}) = \beta(0_{B(0)}) = a_\lambda, \quad G(1,t) = \alpha(1_{A(1)}) = \beta(1_{B(1)}) = a_\lambda, \quad \forall t \in J.$$

şartları sağlanır. Dolayısıyla $\beta(B) \simeq \alpha(A)$.

iii) Geçişme :

$\alpha(A), \beta(B), \gamma(C) \in \Omega(X, a_\lambda)$ ve $\alpha(A) \simeq \beta(B), \beta(B) \simeq \gamma(C)$ olsun.

$\alpha(A) \simeq \beta(B) \Rightarrow \exists F : (I, \tilde{\epsilon}_I) \times (J, \tilde{\epsilon}_J) \rightarrow (X, T)$ fuzzy sürekli tasviri vardır ve

$$F(x,0) = \alpha((x)_{A(x)}), \quad F(x,1) = \beta((x)_{B(x)}), \quad \forall x \in I$$

$$F(0,t) = \alpha(0_{A(0)}) = \beta(0_{B(0)}) = a_\lambda, \quad F(1,t) = \alpha(1_{A(1)}) = \beta(1_{B(1)}) = a_\lambda, \quad \forall t \in J.$$

$\beta(B) \simeq \gamma(C) \Rightarrow \exists G : (I, \tilde{\epsilon}_I) \times (J, \tilde{\epsilon}_J) \rightarrow (X, T)$ fuzzy sürekli tasviri vardır ve

$$G(x,0) = \beta((x)_{B(x)}), \quad G(x,1) = \gamma((x)_{C(x)}), \quad \forall x \in I$$

$$G(0,t) = \beta(0_{B(0)}) = \gamma(0_{C(0)}) = a_\lambda, \quad G(1,t) = \beta(1_{B(1)}) = \gamma(1_{C(1)}) = a_\lambda, \quad \forall t \in J.$$

Şimdi, $H : (I, \tilde{\epsilon}_I) \times (J, \tilde{\epsilon}_J) \rightarrow (X, T)$ tasviri,

$$H(x,t) = \begin{cases} F(x,2t) & , \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G(x,2t-1) & , \quad \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlı olsun. Teorem 3.2.3 gereğince H tasviri fuzzy sürekli dir. Ayrıca,

$$H(x,0) = F(x,0) = \alpha((x)_{A(x)}), \quad H(x,1) = G(x,1) = \gamma((x)_{C(x)}), \quad \forall x \in I$$

$$H(0,t) = \alpha(0_{A(0)}) = \gamma(0_{C(0)}), \quad H(1,t) = \alpha(1_{A(1)}) = \gamma(1_{C(1)}), \quad \forall t \in J$$

Dolayısıyla $\alpha(A) \simeq \gamma(C)$.

Esas Grubun Oluşturulması :

\simeq fuzzy homotopi bağıntısı $\Omega(X, a_\lambda)$ cümlesi üzerinde bir denklik bağıntısı olduğundan bu bağıntı $\Omega(X, a_\lambda)$ cümlesini ayrık denklik (eşdeğerlik) sınıflarına ayırır.

$\alpha(A) \in \Omega(X, a_\lambda)$ için $\alpha(A)$ 'nin denklik sınıfını $[\alpha(A)]$ ile gösterelim. Burada $[\alpha(A)]$, $\alpha(A)$ ya fuzzy homotop olan $\Omega(X, a_\lambda)$ cümlesindeki tüm fuzzy eğrilerin oluşturduğu fuzzy homotopi sınıfıdır.

$\Omega(X, a_\lambda)$ cümlesindeki fuzzy eğriler için tüm fuzzy eğrilerin denklik sınıflarının (fuzzy homotopi sınıflarının) cümlesini de $\Pi_1(X, a_\lambda)$ ile gösterelim. Ayrıca,

$$\forall [\alpha(A)], [\beta(B)] \in \Pi_1(X, a_\lambda) \text{ için, } [\alpha(A)].[\beta(B)] = [\alpha(A)\beta(B)]$$

olacak şekilde bir çarpım tanımlayalım. Burada,

$$(\alpha(A)\beta(B))_{(x_{E(x)})} = \begin{cases} \alpha((2x)_{A(2x)}) & , \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \beta((2x-1)_{B(2x-1)}) & , \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlıdır. Bu çarpım Teorem 4.2.1 gereğince sınıfların temsilcisine bağlı değildir. Gerçekten Teorem 4.2.1 den dolayı

$$\alpha(A) \simeq \gamma(C) \text{ ve } \beta(B) \simeq \delta(D) \text{ ise } \alpha(A)\beta(B) \simeq \gamma(C)\delta(D) \text{ olduğundan,}$$

$[\gamma(C)][\delta(D)] = [\gamma(C)\delta(D)] = [\alpha(A)\beta(B)]$. Dolayısıyla $[\alpha(A)].[\beta(B)]$ çarpımı $[\alpha(A)]$ ve $[\beta(B)]$ tarafından bir tek olarak tanımlandığından çarpım anlamlıdır.

Yukarıda tanımlanan çarpım işlemiyle birlikte $\Pi_1(X, a_\lambda)$ cümlesi bir grup yapısı oluşturur. Daha önce verilen teoremler yardımıyla aşağıdaki grup aksiyomlarının sağlandığı görülebilir.

1) Kapalılık :

$$\forall [\alpha(A)], [\beta(B)] \in \Pi_1(X, a_\lambda) \text{ için } [\alpha(A)].[\beta(B)] = [\alpha(A)\beta(B)] \in \Pi_1(X, a_\lambda) .$$

2) Asosyatiflik :

$$\text{Teorem 4.2.2 den dolayı } (\alpha(A)\beta(B))\gamma(C) \simeq \alpha(A)(\beta(B)\gamma(C)) \text{ olduğundan,}$$

$$[(\alpha(A)\beta(B))\gamma(C)] = [\alpha(A)(\beta(B)\gamma(C))]$$

$$\Rightarrow ([(\alpha(A)\beta(B))] [\gamma(C)]) = [\alpha(A)] ([(\beta(B)\gamma(C))])$$

$$\Rightarrow ([\alpha(A)].[\beta(B)]) [\gamma(C)] = [\alpha(A)] ([\beta(B)][\gamma(C)])$$

3) Özdeş Eleman :

$\Omega(X, a_\lambda)$ cümlesindeki fuzzy sıfır eğrilerin fuzzy homotopi sınıfını $[1(E)]$ ile gösterirsek, Teorem 4.2.3 den dolayı $\alpha(A)1(E) \simeq \alpha(A)$ ve benzer olarak

$1(E)\alpha(A) \simeq \alpha(A)$ olduğundan

$\forall [\alpha(A)] \in \Pi_1(X, a_\lambda)$ için $[\alpha(A)][1(E)] = [\alpha(A)]$ ve $[1(E)][\alpha(A)] = [\alpha(A)]$.

Dolayısıyla $[1(E)]$ özdeş elemandır.

4) Ters eleman :

$\alpha^{-1}(A)$, $\alpha(A)$ fuzzy eğrinin tersi olmak üzere teorem 4.2.4 den dolayı $\alpha(A)\alpha^{-1}(A) \simeq 1(E)$

ve $\alpha^{-1}(A)\alpha(A) \simeq 1(E)$ olduğundan,

$\forall [\alpha(A)] \in \Pi_1(X, a_\lambda)$ için $[\alpha(A)][\alpha^{-1}(A)] = [\alpha(A)\alpha^{-1}(A)] = [1(E)]$ ve

$[\alpha^{-1}(A)][\alpha(A)] = [\alpha^{-1}(A)\alpha(A)] = [1(E)]$, yani her bir fuzzy homotopi sınıfı bir ters elemana sahiptir.

Sonuç olarak yukarıda tanımlanan çarpım işlemiyle birlikte $\Pi_1(X, a_\lambda)$ bir gruptur. Bu gruba tanım olarak (X, T) **fuzzy topolojik uzayının** a_λ **fuzzy noktasındaki esas grubu** denir

5. KARAKTERİZASYONLAR

Bu bölümde bir topolojik uzayın bir noktasındaki esas grubu için geçerli olan teoremleri bir fuzzy topolojik uzayın bir fuzzy noktasındaki esas grubu için uyarlayıp bazı karakterizasyonlar vereceğiz.

Teorem 5.1 : X fuzzy eğrisel irtibatlı bir fuzzy topolojik uzay ve a_λ, b_δ X de herhangi iki fuzzy nokta olsun. Bu durumda $\Pi_1(X, a_\lambda) \cong \Pi_1(X, b_\delta)$.

İspat :

$\alpha(A)$, X de bir a_λ fuzzy noktasında bir fuzzy eğri olsun. X fuzzy eğrisel irtibatlı olduğundan, X de başlangıç noktası a_λ , bitim noktası b_δ olan bir $\gamma(C)$ fuzzy eğri vardır. Bu durumda $\gamma^{-1}(C)$, $\gamma(C)$ fuzzy eğrinin tersi olmak üzere

$$\beta(B) = (\gamma^{-1}(C)\alpha(A))\gamma(C)$$

şeklinde tanımlanan $\beta(B)$, b_δ fuzzy noktasında bir fuzzy eğridir.

O halde $\alpha_1(E)$, $\alpha_2(F)$ a_λ da iki fuzzy eğri olmak üzere,

$$\beta_1(G) = (\gamma^{-1}(C)\alpha_1(E))\gamma(C) \text{ ve } \beta_2(H) = (\gamma^{-1}(C)\alpha_2(F))\gamma(C)$$

diyelim. Teorem 4.2.1 ve Teorem 4.2.2 den

$$\alpha_1(E) \simeq \alpha_2(F) \Rightarrow \gamma^{-1}(C)\alpha_1(E) \simeq \gamma^{-1}(C)\alpha_2(F)$$

$$\Rightarrow (\gamma^{-1}(C)\alpha_1(E))\gamma(C) \simeq (\gamma^{-1}(C)\alpha_2(F))\gamma(C)$$

$$\Rightarrow \beta_1(G) \simeq \beta_2(H) .$$

Benzer olarak $\beta(B)$, b_δ fuzzy noktasında bir fuzzy eğri olsun. Bu durumda

$$\alpha(A) = (\gamma(C)\beta(B))\gamma^{-1}(C)$$

şeklinde tanımlanan $\alpha(A)$, a_λ fuzzy noktasında bir fuzzy eğridir.

Şimdi de $\beta_1(G)$ ve $\beta_2(H)$ b_δ da iki fuzzy eğri olmak üzere,

$$\alpha_1(E) = (\gamma(C)\beta_1(G))\gamma^{-1}(C) \text{ ve } \alpha_2(F) = (\gamma(C)\beta_2(H))\gamma^{-1}(C)$$

diyelim.

$$\beta_1(G) \simeq \beta_2(H) \Rightarrow \gamma(C)\beta_1(G) \simeq \gamma(C)\beta_2(H)$$

$$\Rightarrow (\gamma(C)\beta_1(G))\gamma^{-1}(C) \simeq (\gamma(C)\beta_2(H))\gamma^{-1}(C)$$

$$\Rightarrow \alpha_1(E) \simeq \alpha_2(F)$$

dir.

Sonuç olarak $\Pi_1(X, a_\lambda)$ nın her bir $[\alpha(A)]$ fuzzy homotopi sınıfı, $\Pi_1(X, b_\delta)$ da bir tek olarak bir $[\beta(B)]$ fuzzy homotopi sınıfını belirtir ve benzer olarak $\Pi_1(X, b_\delta)$ da her bir $[\beta(B)]$ fuzzy homotopi sınıfı, $\Pi_1(X, a_\lambda)$ da bir tek olarak bir $[\alpha(A)]$ fuzzy homotopi sınıfını belirtir. O halde

$$\Phi([\alpha(A)]) = [\beta(B)] = [(\gamma^{-1}(C)\alpha(A))\gamma(C)]$$

şeklinde tanımlanan $\Phi: \Pi_1(X, a_\lambda) \rightarrow \Pi_1(X, b_\delta)$ tasviri birebir ve örtendir. Ayrıca,

$$\begin{aligned} \Phi([\alpha_1(E)]) \Phi([\alpha_2(F)]) &= [\beta_1(G)] [\beta_2(H)] \\ &= [\beta_1(G)\beta_2(H)] \\ &= [(\gamma^{-1}(C)\alpha_1(E))\gamma(C)(\gamma^{-1}(C)\alpha_2(F))\gamma(C)] \\ &= [(\gamma^{-1}(C)(\alpha_1(E)\alpha_2(F)))\gamma(C)] \\ &= \Phi([\alpha_1(E)\alpha_2(F)]) \end{aligned}$$

olduğundan Φ bir homomorfizmdir. Sonuç olarak,

$$\Pi_1(X, a_\lambda) \cong \Pi_1(X, b_\delta)$$

dir.

O halde, fuzzy eğrisel irtibatlı bir fuzzy topolojik uzayın herhangi iki fuzzy noktasındaki esas gruplar birbirine izomorftur. Dolayısıyla fuzzy eğrisel irtibatlı topolojik uzaylar için esas grup taban noktasına bağlı değildir.

Teorem 5.2 : $(X, T), (Y, U)$ iki fuzzy topolojik uzay olmak üzere, $a_\lambda (X, T)$ da bir fuzzy nokta ve $f: (X, T) \rightarrow (Y, U)$ bir fuzzy sürekli tasvir olsun. Bu durumda

$$f^*: \Pi_1(X, a_\lambda) \rightarrow \Pi_1(Y, f(a_\lambda)) = (f(a))_\lambda = b_\lambda$$

homomorfizmi vardır.

İspat :

$\alpha(A), \beta(B)$ X de a_λ fuzzy noktasında fuzzy eğriler olsun. $\gamma, \delta : (I, \tilde{\mathcal{E}}_I) \rightarrow (Y, \mathcal{U})$ fuzzy sürekli tasvirler olmak üzere,

$$\gamma(x_{C(x)}) = f(\alpha(x_{A(x)})) \text{ ve } \delta(x_{D(x)}) = f(\beta(x_{B(x)}))$$

şeklinde tanımlı olsun. Bu durumda $\gamma(C)$ ve $\delta(D)$, Y de

$$f(a_\lambda) = (f(a))_\lambda = b_\lambda$$

fuzzy noktasında kapalı fuzzy eğrilerdir.

Eğer $\alpha(A) \underset{a_\lambda}{\simeq} \beta(B) \Rightarrow F(x,0) = \alpha(x_{A(x)}), F(x,1) = \beta(x_{B(x)}), \forall x \in I$ ve

$$F(0,t) = \alpha(0_{A(0)}) = \beta(0_{B(0)}) = a_\lambda, F(1,t) = \alpha(1_{A(1)}) = \beta(1_{B(1)}) = a_\lambda, \forall t \in J$$

olacak şekilde $F(x,t) : (I, \tilde{\mathcal{E}}_I) \times (J, \tilde{\mathcal{E}}_J) \rightarrow (X, T)$ fuzzy sürekli tasviridir.

Şimdi, $G(x,t) : (I, \tilde{\mathcal{E}}_I) \times (J, \tilde{\mathcal{E}}_J) \rightarrow (Y, \mathcal{U})$ tasvirini

$$G(x,t) = f(F(x,t))$$

şeklinde tanımlayalım. Teorem 3.2.2 den dolayı G fuzzy sürekli bir tasvir ve ayrıca $\forall x \in I$ ve $\forall t \in J$ için

$$G(x,0) = f(F(x,0)) = f(\alpha(x_{A(x)})) = \gamma(x_{C(x)}), G(x,1) = f(F(x,1)) = f(\beta(x_{B(x)})) = \delta(x_{D(x)}) \text{ ve}$$

$$G(0,t) = f(F(0,t)) = f(\alpha(0_{A(0)})) = \gamma(0_{C(0)}) = \delta(0_{D(0)}) = f(a_\lambda) = (f(a))_\lambda = b_\lambda$$

$$G(1,t) = f(F(1,t)) = f(\alpha(1_{A(1)})) = \gamma(1_{C(1)}) = \delta(1_{D(1)}) = f(a_\lambda) = (f(a))_\lambda = b_\lambda \text{ olup}$$

$\gamma(C) \underset{b_\lambda}{\simeq} \delta(D)$ dir.

Sonuç olarak $f^* : \Pi_1(X, a_\lambda) \rightarrow \Pi_1(Y, f(a_\lambda) = (f(a))_\lambda = b_\lambda)$ tasviri

$$f^*([\alpha(A)]) = ([f(\alpha(A))])$$

şeklinde tanımlanırsa f^* , X de a_λ fuzzy noktasındaki fuzzy eğrilerin fuzzy homotopi sınıflarını, Y de $f(a_\lambda) = f(a)_\lambda = b_\lambda$ fuzzy noktasındaki fuzzy eğrilerin homotopi sınıflarına tasvir eder ve $[\alpha(A)]$ bir tek olarak $f^*([\alpha(A)])$ yı belirtir. Dolayısıyla f^* tasviri $\Pi_1(X, a_\lambda)$ nın her bir elemanına $\Pi_1(Y, f(a_\lambda) = (f(a))_\lambda = b_\lambda)$ nın bir tek elemanını karşılık getirir. Sonuç olarak f^* iyi tanımlıdır.

Şimdi f^* tasvirinin bir homomorfizm olduğunu gösterelim.

$$\rho(x_{G(x)}) = (\alpha(A)\beta(B))(x_{E(x)}) = \begin{cases} \alpha((2x)_{A(2x)}) & , \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \beta((2x-1)_{B(2x-1)}) & , \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlı olsun. Bu durumda, $f(\alpha(A)\beta(B))$ ve $f(\alpha(A))f(\beta(B))$

$$f(\rho(x_{G(x)})) = \sigma(x_{H(x)}) = \begin{cases} f(\alpha(2x)_{A(2x)}) & , \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ f(\beta((2x-1)_{B(2x-1)})) & , \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlıdır. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} f^*([\alpha(A)])f^*([\beta(B)]) &= [f(\alpha(A))][f(\beta(B))] \\ &= [f(\alpha(A))f(\beta(B))] \\ &= [f(\alpha(A)\beta(B))] \\ &= f^*([\alpha(A)\beta(B)]) \text{ dir.} \end{aligned}$$

O halde $f^* : \Pi_1(X, a_\lambda) \rightarrow \Pi_1(Y, f(a_\lambda)) = (f(a))_\lambda = b_\lambda$ tasviri bir homomorfizmdir.

Tanım 5.1 : X bir fuzzy topolojik uzay ve a_λ , X de bir fuzzy nokta olsun. (X, a_λ) çiftine **fuzzy noktalı fuzzy topolojik uzay** denir.

Gösterdik ki her (X, a_λ) noktalı fuzzy topolojik uzayına esas grup adı verilen ve $\Pi_1(X, a_\lambda)$ ile gösterilen bir grup karşılık gelir. Diğer yandan

$$f(a_\lambda) = (f(a))_\lambda = b_\lambda$$

olacak şekilde $f : (X, a_\lambda) \rightarrow (Y, b_\lambda)$ bir morfizm ise teorem 5.2 den dolayı $\Pi_1(X, a_\lambda)$ esas grubundan $\Pi_1(Y, b_\lambda)$ esas grubuna, f tarafından oluşturulan bir f^* homomorfizmi vardır. Bu homomorfizmi $f^* = \Pi_1(f)$ şeklinde tanımlarsak, Π_1 tasviri noktalı fuzzy

topolojik uzaylar ve fuzzy sürekli tasvirler kategorisinden gruplar ve homomorfizmler kategorisine bir funktordur. Gerçekten,

I) $f = 1_X \Rightarrow \Pi_1(1_X) = 1^*_X : \Pi_1(X, a_\lambda) \rightarrow \Pi_1(X, a_\lambda) \ni \forall [\alpha(A)] \in \Pi_1(X, a_\lambda)$ için

$$1^*_X([\alpha(A)]) = [1_X(\alpha(A))] = [\alpha(A)] \text{ yani } \Pi_1(1_X) = 1^*_X = 1_{\Pi_1(X, a_\lambda)}.$$

Burada, $1_{\Pi_1(X, a_\lambda)} : \Pi_1(X, a_\lambda) \rightarrow \Pi_1(X, a_\lambda)$ özdeş morfizmdir.

II) $f : (X, a_\lambda) \rightarrow (Y, b_\lambda), g : (Y, b_\lambda) \rightarrow (Z, c_\lambda)$

$$f(a_\lambda) = (f(a))_\lambda = b_\lambda,$$

$$g(b_\lambda) = (g(b))_\lambda = c_\lambda$$

olacak şekilde iki morfizm ise $gf : (X, a_\lambda) \rightarrow (Z, c_\lambda)$ olmak üzere,

$\Pi_1(f) : \Pi_1(X, a_\lambda) \rightarrow \Pi_1(Y, b_\lambda), \quad \Pi_1(g) : \Pi_1(Y, b_\lambda) \rightarrow \Pi_1(Z, c_\lambda)$ ve

$\Pi_1(gf) : \Pi_1(X, a_\lambda) \rightarrow \Pi_1(Z, c_\lambda)$ dir.

Bu durumda $\forall [\alpha(A)] \in \Pi_1(X, a_\lambda)$ için $(gf)(\alpha(A))$ ve $g(f(\alpha(A)))$ c_λ da kapalı fuzzy eğrilerdir ve

$$(gf)(\alpha(A)) \simeq g(f(\alpha(A))).$$

Diğer taraftan,

$$\begin{aligned} (\Pi_1(gf))([\alpha(A)]) &= [(gf)(\alpha(A))] \\ &= [g(f(\alpha(A)))] \\ &= (\Pi_1(g))([\alpha(A)]) \\ &= (\Pi_1(g))(\Pi_1(f)([\alpha(A)])) \\ &= (\Pi_1(g)\Pi_1(f))([\alpha(A)]) \end{aligned}$$

dir. O halde

$$\Pi_1(gf) = \Pi_1(g)\Pi_1(f)$$

dir.

Dolayısıyla Π_1 bir funktordur. Π_1 e **esas grup fonktoru** denir.

Böylece aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 5.3 : Noktalı fuzzy topolojik uzaylar ve fuzzy sürekli tasvirler kategorisinden gruplar ve homomorfizmler kategorisine, bir fonktor vardır.

Teorem 5.4 : $(X, a_\lambda), (Y, b_\lambda), (Z, c_\lambda)$ noktalı fuzzy topolojik uzaylar ve

$f : (X, a_\lambda) \rightarrow (Y, b_\lambda), g : (Y, b_\lambda) \rightarrow (Z, c_\lambda)$ fuzzy sürekli tasvirler olsun. Bu durumda $(gf)^* = g^*f^*$ dır.

İspat :

a_λ, X de bir fuzzy nokta ve $\alpha(A), a_\lambda$ fuzzy noktasında bir fuzzy eğri olsun. Bu durumda $(gf)(\alpha(A)), g(f(\alpha(A)))$ tasvirleri Z de c_λ fuzzy noktasında kapalı fuzzy eğriler olup, $(gf)(\alpha(A)) \simeq g(f(\alpha(A)))$ dur.

Gerçekten, $F : I \times J \rightarrow Z$ tasviri

$$F(x,t) = \begin{cases} (gf)(\alpha(x_{A(x)})), & 0 \leq x \leq 1-t \\ g(f(\alpha(x_{A(x)}))) & , \quad 1-t \leq x \leq 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanırsa, Teorem 3.2.3 den dolayı F fuzzy sürekli olup,

$$(gf)(\alpha(A)) \simeq g(f(\alpha(A)))$$

olduğu kolaylıkla görülebilir. Diğer taraftan,

$$[(gf)(\alpha(A))] = [g(f(\alpha(A)))]$$

$$\Rightarrow (gf)^*([\alpha(A)])$$

$$= g^*([f(\alpha(A))])$$

$$= g^*(f^*([\alpha(A)]))$$

$$= (g^*f^*)([\alpha(A)])$$

dır. Dolayısıyla $(gf)^* = g^*f^*$ dır.

Teorem 5.5 : $(X, a_\lambda), (Y, b_\lambda)$ noktalı fuzzy topolojik uzaylar ve $f : (X, a_\lambda) \rightarrow (Y, b_\lambda),$

$g : (X, a_\lambda) \rightarrow (Y, b_\lambda)$ fuzzy sürekli tasvirler olmak üzere $f \simeq g$ ise bu durumda f ve g

tasvirlerinin oluşturdukları $f^* : (X, a_\lambda) \rightarrow (Y, b_\lambda), g^* : (X, a_\lambda) \rightarrow (Y, b_\lambda)$

homomorfizmleri eşittir.

İspat :

a_λ , X de bir fuzzy nokta ve $\alpha(A)$, a_λ fuzzy noktasında bir fuzzy eğri olsun. Bu durumda $f(\alpha(A))$ ve $g(\alpha(A))$,

$$f(a_\lambda) = (f(a))_\lambda = b_\lambda$$

fuzzy noktasında kapalı fuzzy eğrilerdir ve $f \simeq g$ ise $f(\alpha(A)) \simeq g(\alpha(A))$.

Gerçekten;

$f \simeq g \Rightarrow F : X \times J \rightarrow Y$ fuzzy sürekli tasviri var $\ni X$ deki her x_δ fuzzy nokta için

$$F(x_\delta, 0) = f, F(x_\delta, 1) = g \text{ ve } \forall t \in J \text{ için}$$

$$F(a_\lambda, t) = f(a_\lambda) = g(a_\lambda) = b_\lambda$$

$G : I \times J \rightarrow Y$ tasvirini

$$G(x, t) = F(\alpha(x_{A(x)}), t)$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda teorem 3.2.2 den G fuzzy sürekli olup, $\forall x \in I$ için

$$G(x, 0) = F(\alpha(x_{A(x)}), 0) = f(\alpha(A)),$$

$$G(x, 1) = F(\alpha(x_{A(x)}), 1) = g(\alpha(A)) \text{ ve}$$

$\forall t \in J$ için $G(0, t) = F(\alpha(0_{A(0)}), t) = F(a_\lambda, t) = b_\lambda = f(\alpha(0_{A(0)})) = f(a_\lambda) = g(a_\lambda) = g(\alpha(0_{A(0)}))$

$G(1, t) = F(\alpha(1_{A(1)}), t) = F(a_\lambda, t) = b_\lambda = f(\alpha(1_{A(1)})) = f(a_\lambda) = g(a_\lambda) = g(\alpha(1_{A(1)}))$.

O halde $f(\alpha(A)) \simeq g(\alpha(A))$ dur.

Sonuç olarak,

$$[f(\alpha(A))] = [g(\alpha(A))] \Rightarrow f^*([\alpha(A)]) = g^*([\alpha(A)]) \Rightarrow f^* = g^* \text{ dir.}$$

Tanım 5.2 : $(X, T), (Y, \mathcal{U})$ iki fuzzy topolojik uzay ve $f : X \rightarrow Y$ fuzzy sürekli bir tasvir olsun. Eğer,

$$I) f f' \simeq 1_Y$$

$$II) f' f \simeq 1_X$$

şartlarını sağlayan bir $f' : Y \rightarrow X$ fuzzy sürekli tasviri varsa, (X, T) ve (Y, \mathcal{U}) fuzzy topolojik uzayları **fuzzy homotopik eşdeğerdirler** veya **aynı fuzzy homotopi**

tipindedir denir ve $X \simeq Y$ şeklinde gösterilir. f tasvirine de **fuzzy homotopi eşdeğerlilik** denir (Güner and Balcı 2007).

Teorem 5.6 : X ve Y fuzzy topolojik uzaylar olmak üzere, $f : X \rightarrow Y$ ve $g : Y \rightarrow X$ fuzzy sürekli tasvirler olsun. Eğer

$$I) a_\lambda, X \text{ de bir fuzzy nokta olmak üzere } f(a_\lambda) = b_\lambda \Rightarrow g(b_\lambda) = a_\lambda$$

$$II) gf \simeq 1_X \text{ rel. } a_\lambda$$

$$III) fg \simeq 1_Y \text{ rel. } b_\lambda$$

şartları sağlanıyorsa, bu durumda $\Pi_1(X, a_\lambda) \cong \Pi_1(Y, b_\lambda)$.

İspat :

Teorem 5.2 den dolayı, $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow X$ ve $gf : X \rightarrow X$, $fg : Y \rightarrow Y$ fuzzy sürekli tasvirleri sırasıyla, $f^* : \Pi_1(X, a_\lambda) \rightarrow \Pi_1(Y, b_\lambda)$, $g^* : \Pi_1(Y, b_\lambda) \rightarrow \Pi_1(X, a_\lambda)$ ve

$(gf)^* : \Pi_1(X, a_\lambda) \rightarrow \Pi_1(X, a_\lambda)$, $(fg)^* : \Pi_1(Y, b_\lambda) \rightarrow \Pi_1(Y, b_\lambda)$ homomorfizmlerini

oluştururlar ve teorem 5.4 den dolayı $(gf)^* = g^*f^*$ ve $(fg)^* = f^*g^*$ dir.

Ayrıca $(gf)^* = 1_{\Pi_1(X, a_\lambda)}$ ve $(fg)^* = 1_{\Pi_1(Y, b_\lambda)}$ dir. Gerçekten;

a_λ , X de bir fuzzy nokta olmak üzere, $\alpha(A)$ a_λ fuzzy noktasında bir fuzzy eğri olsun.

Bu durumda $(gf)(\alpha(A))$ da a_λ da bir fuzzy eğridir ve $(gf)(\alpha(A)) \simeq \alpha(A)$. Çünkü;

$gf \simeq 1_X \text{ rel. } a_\lambda \Rightarrow \exists G : X \times J \rightarrow Y$ fuzzy sürekli tasviri vardır $\exists X$ deki her x_δ fuzzy

nokta için $G(x_\delta, 0) = gf$ ve $G(x_\delta, 1) = 1_X$ ve $\forall t \in J$ için $G(a_\lambda, t) = a_\lambda$ olduğundan

$(gf)(a_\lambda) = 1_X(a_\lambda)$ dir.

$$F : I \times J \rightarrow X \text{ tasvirini } F(x, t) = \begin{cases} G(\alpha(x_{A(x)}), t), & 0 \leq x \leq 1-t \\ \alpha(x_{A(x)}) & , \quad 1-t \leq x \leq 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda F fuzzy süreklidir ve

$$F(x,0) = (gf)(\alpha(x_{A(x)})) , F(x,1) = \alpha(x_{A(x)}), \forall x \in I,$$

$$F(0,t) = G(\alpha(0_{A(0)}), t) = G(a_\lambda, t) = a_\lambda = (gf)(\alpha(0_{A(0)})) = (\alpha(0_{A(0)})) \text{ ve}$$

$$F(1,t) = G(\alpha(1_{A(1)}), t) = G(a_\lambda, t) = a_\lambda = (gf)(\alpha(1_{A(1)})) = (\alpha(1_{A(1)})) \forall t \in J \text{ olduğundan}$$

$(gf)(\alpha(A)) \simeq \alpha(A)$. Dolayısıyla $\forall [\alpha(A)] \in \Pi_1(X, a_\lambda)$ için

$$(gf)^*([\alpha(A)]) = [(gf)(\alpha(A))] = [\alpha(A)] \text{ dir ve sonuç olarak } (gf)^* = 1_{\Pi(X, a_\lambda)}.$$

Benzer şekilde $(fg)^* = 1_{\Pi(Y, b_\lambda)}$ olduğu gösterilebilir.

Şimdi f^* tasvirinin bir izomorfizm olduğunu gösterelim.

I) (Bire-birlik) :

$[\alpha(A)], [\beta(B)] \in \Pi_1(X, a_\lambda)$ ve $f(a_\lambda) = b_\lambda$ olmak üzere,

$$f^*([\alpha(A)]) = f^*([\beta(B)]) \Rightarrow [f(\alpha(A))] = [f(\beta(B))]$$

$$\Rightarrow f(\alpha(A)) \simeq f(\beta(B))$$

$$\Rightarrow gf(\alpha(A)) \simeq gf(\beta(B))$$

$$\Rightarrow \alpha(A) \simeq \beta(B)$$

$$\Rightarrow [\alpha(A)] = [\beta(B)]$$

olduğundan f^* bire-birdir.

II) (Örtenlik) :

$[\beta(B)] \in \Pi_1(Y, b_\lambda)$ herhangi bir fuzzy homotopi sınıfı olsun. Bu durumda $\beta(B)$, b_λ fuzzy noktasında bir fuzzy eğridir. Ayrıca $g(b_\lambda) = a_\lambda$ olduğundan $g(\beta(B))$ X deki a_λ fuzzy noktasında bir fuzzy eğridir. Dolayısıyla $\alpha(A) = g(\beta(B))$ alınırsa,

$$(fg)^* = 1_{\Pi(Y, b_\lambda)} \Rightarrow f^*([\alpha(A)]) = [f(\alpha(A))]$$

$$= [f(g(\beta(B)))]$$

$$= [(fg)(\beta(B))]$$

$$= (fg)^*([\beta(B)])$$

$$= [\beta(B)]$$

olduğundan f^* tasviri örtendir.

Ayrıca, Teorem 5.2 den f^* bir homomorfimdir.

Dolayısıyla f^* tasviri bir izomorfizmdir. Benzer şekilde g^* tasvirinde bir izomorfizm olduğu gösterilebilir. Sonuç olarak $\Pi_1(X, a_\lambda)$ esas grubundan $\Pi_1(Y, b_\lambda)$ esas grubuna bir izomorfizm vardır.

O halde $\Pi_1(X, a_\lambda) \cong \Pi_1(Y, b_\lambda)$.

Teorem 5.7 : X, Y fuzzy topolojik uzayları fuzzy homeomorf ve Y deki b_λ fuzzy nokta X deki a_λ fuzzy noktanın bu homeomorfizm altındaki görüntüsü ise, bu durumda $\Pi_1(X, a_\lambda) \cong \Pi_1(Y, b_\lambda)$.

İspat :

Teorem 5.6 da $f : X \rightarrow Y$ homeomorfizm ve $g = f^{-1}$ alınırsa $\Pi_1(X, a_\lambda) \cong \Pi_1(Y, b_\lambda)$ elde edilir.

Teorem 5.8 : $(X, a_\lambda), (Y, b_\lambda)$, noktalı fuzzy topolojik uzayları aynı fuzzy homotopi tipinden ise bu durumda $\Pi_1(X, a_\lambda) \cong \Pi_1(Y, b_\lambda)$.

İspat :

$(X, a_\lambda), (Y, b_\lambda)$, noktalı fuzzy topolojik uzayları aynı fuzzy homotopi tipinden olduğundan, $f : (X, a_\lambda) \rightarrow (Y, b_\lambda), g : (Y, b_\lambda) \rightarrow (X, a_\lambda)$ fuzzy sürekli tasvirleri vardır ve $f(a_\lambda) = b_\lambda, g(b_\lambda) = a_\lambda$ olmak üzere $gf \simeq 1_X, fg \simeq 1_Y$.

Diğer taraftan teorem 5.4 ve teorem 5.6 dan dolayı $(gf)^* = g^*f^* = 1^*_X = 1_{\Pi_1(X, a_\lambda)}$ ve $(fg)^* = f^*g^* = 1^*_Y = 1_{\Pi_1(Y, b_\lambda)}$.

Daha önce gösterdiğimiz gibi bu ifadeler kullanılarak f^* ve g^* tasvirlerinin birer izomorfizm olduğu gösterilebilir. O halde $\Pi_1(X, a_\lambda) \cong \Pi_1(Y, b_\lambda)$.

Sonuç: Fuzzy eğrisel irtibatlı bir fuzzy topolojik uzayın esas grubu fuzzy homotopik invarianttır.(fuzzy homotopi altında değişmeyen, korunan bir özelliktir.)

Dikkat edilmelidir ki, bir fuzzy topolojik invaryant aynı zamanda bir fuzzy homotopik invaryanttır fakat bir fuzzy homotopik invaryant her zaman bir fuzzy topolojik invaryant olmayabilir. Bir başka dikkat edilecek husus da bir fuzzy topolojik uzayın bir fuzzy noktasındaki esas grubunun bir tek elemandan oluştuğu durumlardır. Bu durumda uç noktaları aynı olan herhangi iki fuzzy eğri birbirine fuzzy homotoptur. Böyle bir fuzzy topolojik uzaya basit irtibatlı denir.

KAYNAKLAR

- Balcı, S. 1978. Homotopi ve bir uzayın esas grubu, Yüksek Lisans Tezi, Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, 1-50.
- Foster, D. H. 1979. Fuzzy topological groups, J. Math. Anal. Appl., 67, 549-564.
- Chang, C. L. 1968. Fuzzy topological space, J. Math. Anal. Appl., 24, 182-190.
- Ferraro, M. and Foster, D.H. 1987. Differentiation of fuzzy continuous mappings on fuzzy topological vector spaces, J. Math. Anal. Appl., 121, 589-601
- Zadeh, L. A. 1965. Fuzzy sets, information and control, 8, 338-353.
- Zheng, C.Y. 1984. Fuzzy path and fuzzy connectedness, Fuzzy sets and Systems, 14, 273-280.
- Wong, C.K. 1974. Fuzzy topology, Product and quotient theorems, J.Math. Anal. Appl., 45, 512-521.
- Lowen, R. 1976. Fuzzy topological spaces and fuzzy compactness, J. Math. Anal. Appl., 56, 621-633
- Klir, J. G, and Folger, T. A. 1988. Fuzzy Sets, And Information, New Jersey.
- Dubois, D. and Prade, H. 1980. Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications, Academic Press, New York.
- Ming, P. P. and Ming, L. Y. 1980. Fuzzy Topology I- Neighborhood Structure of A Fuzzy Point and Moore- Smith Convergence, J. Math. Anal. Appl., 76, 571-599
- Azad, K. K. 1982. On Fuzzy Semi Continuity, Fuzzy Almost Continuity and Fuzzy Weakly Continuity, J. Math. Anal. Appl., 82, 14-32.
- Yenipinar, A. 2006. Fuzzy topolojik uzaylar ve fuzzy metrik uzaylar, Yüksek Lisans Tezi, Sütçü İmam Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, 10-50
- Güner, E. and Balcı, S. 2006. Some results on the fuzzy sheaf of the fundamental groups over fuzzy topological spaces, Fac. Sci. Univ. Ankara. Ser. A1, Vol.55 (No.1), 47-55.
- Güner, E. and Balcı, S. 2007. On the fuzzy sheaf of the fundamental groups, Taiwanese Journal of Mathematics, Vol 11, No.4, pp. 1057-1062.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Tolga TERZİOĞLU

Doğum Yeri : Zonguldak

Doğum Tarihi : 18/03/1981

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim durumu

Lise : Zonguldak Atatürk Anadolu Lisesi (1996-1999)

Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü (2000-2004)

Yüksek Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı (Eylül 2005-Ocak 2008)