ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

# $P_L$ YÖNTEMİYLE MİLNE PROBLEMİ

Menend NAYMAN

FİZİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

ANKARA
2008

## TEZ ONAYI

Menend NAYMAN tarafından hazırlanan **“$P_L$ Yöntemiyle Milne Problemi”** adlı tez çalışması 18 / 02 / 2008 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fizik Mühendisliği Anabilim Dalı’nda **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

**Danışman** **:** Prof. Dr. Fatma ERDOĞAN
Ankara Üniversitesi Mühendislik Fakültesi
Fizik Mühendisliği Anabilim Dalı

**Başkan** **:** Prof. Dr. A. Ulvi YILMAZER
Ankara Üniversitesi Mühendislik Fakültesi
Fizik Mühendisliği Anabilim Dalı

**Üye** **:** Prof. Dr. Fatma ERDOĞAN
Ankara Üniversitesi Mühendislik Fakültesi
Fizik Mühendisliği Anabilim Dalı

**Üye** **:** Doç. Dr. Ayşe KAŞKAŞ
Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi
Fizik Anabilim Dalı

**Yukarıdaki sonucu onaylarım.**

**Prof. Dr. Ülkü MEHMETOĞLU**

**Enstitü Müdürü**

# ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

$P_L$ YÖNTEMİYLE MİLNE PROBLEMİ

Menend NAYMAN

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Fizik Mühendisliği Anabilim Dalı

Danışman : Prof. Dr. Fatma ERDOĞAN

Bugüne kadar lineer nötron transport denklemini çözmek için birçok analitik ve nümerik yöntem geliştirilmiştir. Bu transport denklem kritiklik, albedo, Milne gibi çeşitli fiziksel problemleri çözmek için farklı geometrilere uygulanmıştır. Bu çalışmada nümerik bir yöntem olan $P_L$ yöntemi anlatılmıştır. Açısal dağılım için nötron transport denkleminin çözümü $P_L$ yöntemiyle elde edilmiş ve yöntem, akının sıfır olduğu yeri bulan Milne problemine uygulanmıştır. Düzlem geometride $P_L$ yöntemi anlatılmıştır. Kaynaksız yarı uzay ortamında nötron dağılımını belirlemek için genişletilmiş anizotropik saçılma çekirdeği kullanılmıştır. Nötronlar $x = +\infty$'da bulunan kaynaktan yayılmaktadır. Yarı uzayın sol tarafı ise boşluktur. Ayrıca ileriye ve geriye doğru saçılmalar için akının sıfır olduğu yer olan $z_0$ değerleri bulunmuştur. Anizotropik saçılma için sonuçlar karşılaştırılmıştır.

**2008, 59 sayfa**

**Anahtar Kelimeler:** $P_L$ yöntemi, Milne problemi, nötron transport denklemi, anizotropik saçılma

## ABSTRACT

Master Thesis

THE MİLNE PROBLEM WİTH THE $P_L$ METHOD

Menend NAYMAN

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Physics Engineering

Supervisor: Prof. Dr. Fatma ERDOĞAN

Many analytical and numerical methods have been developed to solve linear neutron transport equation up to now. This transport equation is applied to the different geometries to solve various physical problems such as criticality, albedo, Milne. In this work, $P_L$ method, a numerical method, is explained. The solution of the neutron transport equation is obtained by $P_L$ method for angular distribution and the method is applied to Milne problem which finds the point that the flux is zero. The $P_L$ method in plane geometry is explained. Extremely anisotropic scattering kernel is used to determine the neutron distribution at source-free half space medium. The neutrons are diffusing from the source which is at infinity ( $x = +\infty$ ). The left side of the half space is vacuum. In addition, $z_0$ values, where the flux is zero, are obtained for backward and forward scatterings. The results are compared for anisotropic scattering.

**2008, 59 pages**

**Key Words:** $P_L$ method, Milne problem, neutron transport equation, anisotropic scattering

# TEŞEKKÜR

Çok değerli bilgileriyle bana büyük destek veren, çalışmamın her aşamasında eşsiz bilgi ve deneyimleriyle beni yönlendiren danışmanım Sayın Prof. Dr. Fatma ERDOĞAN'a (Ankara Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Fizik Mühendisliği A.D), çalışmam sırasında yardımlarını esirgemeyen Sayın Doç. Dr. Ayşe KAŞKAŞ'a (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Fizik A.D), Sayın Fiz. Yük. Müh. Yeşim AKGÜN'e (Türkiye Atom Enerjisi Kurumu), Sayın Yük. Fiz. Serdar Bulut'a (Türkiye Atom Enerjisi Kurumu), destekleri ve yardımlarından dolayı arkadaşlarım Sayın Araş. Gör. Aysuhan OZANSOY'a (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Fizik A.D), Sayın Fiz. Yük. Müh. Süreyya YILDIZ'a (İnönü Üniversitesi Öğretim Görevlisi), Sayın Fiz. Müh. Bilge Banu KÖK'e; ayrıca bana bilim sevgisini aşılayan, öğrenmenin verdiği hazzı duymayı öğreten, sonsuzluklar ötesinden bana hala güç veren babam İbrahim NAYMAN'a ve sonsuza kadar yanımda olmalarını umduğum annem Sevinç, ablam Çiğdem, abim Salih Cemal ve kardeşim Ayşe NAYMAN'a ve dayım Vahap DEMİRCİ'ye…
Sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Menend NAYMAN
Ankara, Şubat 2008

## İÇİNDEKİLER

# SİMGELER DİZİNİ

| | |
|---|---|
| $\vec{r}$ | Konum vektörü |
| $\vec{v}$ | Hız vektörü |
| $t$ | Zaman |
| $\psi(\vec{r},\vec{v},t)$ | Açısal nötron dağılım fonksiyonu |
| V | Hacim |
| S | Yüzey |
| $j(\vec{r},\vec{v},t)$ | Açısal akım yoğunluğu |
| $\vec{n}_0$ | Normal vektörü |
| $l\,(\vec{r},\vec{v})$ | Ortalama serbest yol |
| $\sigma$ | Makroskobik tesir kesiti |
| $\vec{\Omega}$ | Nötronun hızı doğrultusunda bir birim vektör |
| $s$ | Kaynak terimi |
| $\mu$ | Bir nötronun çarpışmadan sonra x-ekseni ile yaptığı açının kosinüsü |
| $f(\vec{\Omega}.\vec{\Omega}')$ | Saçılma fonksiyonu |
| c | İkincil nötron sayısı |
| $\psi\,(x,\mu)$ | Düzlem geometride nötron açısal dağılım fonksiyonu |
| $z_0$ | Ekstrapolasyon uzaklığı |
| $k$, $k'$ | İntegral sabitleri |
| A, B, C, D, E | İntegral sabitleri |

## ÇİZELGELER DİZİNİ

# 1. GİRİŞ

## 1.1 Nötron Transport Denklemi ve Çözüm Yöntemleri

Nötronların davranışını açıklayan lineer nötron transport denklemi, faz uzayında küçük bir hacim elemanı içindeki nötron sayısının değişimi göz önüne alınarak türetilir. Çarpışmalar sonucunda saçılma ve soğurulmaların olduğu ortamda, kaynak da olabilir. Nötronlar arasındaki çarpışmalar göz önüne alınmaz ve çekirdek durgun kabul edilir. Böylece nötronların ideal bir gaz gibi davrandığı düşünülebilir. Nötron için tek-parçacık dağılım fonksiyonu $\psi(\vec{r},\vec{v},t)$ ile tanımlanır. Burada $\vec{r}$ nötronun konumunu, $\vec{v}$ hızını, t ise zamanı göstermektedir. Bu durumda $\psi(\vec{r},\vec{v},t)d^3\vec{r}d^3\nu$, t zamanında, konumu $\vec{r}$ noktası civarında $d^3\vec{r}$ hacim elemanı içinde, hızı $\vec{v}$ civarında $d^3\nu$ hız uzayında olan nötronların beklenen sayısını verecektir. Nötronların hızı $\hat{\Omega}$ birim vektörü yönünde seçilir ve $\hat{\Omega} = \dfrac{\vec{v}}{v}$ ile verilir (Bell and Glasstone 1970).

$\vec{r}$ noktası civarında, küçük bir V hacminde bulunan S yüzeyi içinde, hızları $d^3\nu$ hız uzayında $\vec{v}$ civarında olan nötron sayısının dt zamanındaki dN değişimi (Bell and Glasstone 1970),

$$d\,N = d^3\nu\, dt \int_V \frac{\partial\, \psi(\vec{r},\vec{v},t)}{\partial\, t}\, d^3 r \tag{1.1.1}$$

ile verilir. V hacmi içindeki toplam nötron sayısının değişimi, yani denge denklemi bu hacimden çıkan ve hacim içine giren nötron sayısına eşittir.

dN= -(i.) dt zaman aralığında $\hat{n}_0$ birim vektörü yönünde S yüzeyinden çıkan nötron sayısı

-(ii.) dt zaman aralığında V hacminde çarpışma yapıp çıkan nötron sayısı

+(iii.) çarpışmalar sonucunda V hacminde dt zaman aralığında açığa çıkan ikincil nötron sayısı

+(iv.) dt zaman aralığında V hacminde üretilen nötron sayısı, (kaynaktan gelen nötron sayısı)

terimlerinden oluşur. Bu terimler analitik olarak aşağıdaki şekilde açıklanabilir.

$$(\mathrm{i}) = d^3 v\, dt \int_S \vec{j}(\vec{r},\vec{v},t).\hat{n}_0 dS \qquad (1.1.2)$$

$\vec{j}(\vec{r},\vec{v},t)$ açısal akım yoğunluğu, $\hat{n}_0$ ise dS yüzeyinin normal doğrultusudur. $\vec{j}(\vec{r},\vec{v},t) = \vec{v}\,\psi(\vec{r},\vec{v},t)$ ifadesi ise $\vec{v}$ hızına sahip (yani belli bir yönelime sahip) nötron sayısını verir. (i) ifadesi Gauss teoremi ile hacim integraline dönüştürülebilir.

$$(\mathrm{i}) = d^3 v\, d\,t \int_V \vec{\nabla}.\vec{j} d^3 r \qquad (1.1.3)$$

$$(\mathrm{ii}) = d^3\, v\, d\,t \int_V \frac{v\,\psi(\vec{r},\vec{v},t)}{l(\vec{r},\vec{v})}\, d^3 r \qquad (1.1.4)$$

Bu ifade ortalama serbest yolun, $l(\vec{r},\vec{v})$, tersi, $\sigma(\vec{r},\vec{v}) = \dfrac{1}{l(\vec{r},\vec{v})}$, makroskobik tesir kesitine eşittir. Tesir kesiti, nötronun çekirdekle çarpışma yapma (etkileşme) olasılığı olarak tanımlanır. Nötron-çekirdek çarpışmalarında değişik saçılma türleri ve soğurulma için tesir kesiti, inelastik saçılma, elastik saçılma, fisyon ve radiatif yakalama (capture) terimlerinden oluşan bir toplam şeklinde ifade edilebilir. $(\sigma_s + \sigma_a + \sigma_{in} + \sigma_f)$.

$\dfrac{v\,\psi(\vec{r},\vec{v},t)}{l(\vec{r},\vec{v})} d^3 r d^3 v$ ise, $\vec{r}$ konumunda, $\vec{v}$ hızında çarpışma yapan nötron sayısını verir.

$$(iii) = d^3 v\, dt \iint\limits_V v' \psi(\vec{r},\vec{v}',t)\, \sigma(\vec{v}' \to \vec{v},\vec{r})\, d^3v' d^3 r \tag{1.1.5}$$

Burada $v'\sigma(\vec{v}' \to \vec{v},\vec{r})\, \psi(\vec{r},\vec{v}',t)\, d^3v'd^3r\, d\,t\, d^3v$, $t'$ zamanında, $d^3\, v'$ hız uzayında, $v'$ hızına sahip nötronların, çarpışma sonunda t civarında dt zamanında, $d^3 r$ hacminde $\vec{r}$ konumunda, $d^3 v$ hız uzayında $\vec{v}$ hızında açığa çıkma olasılığıdır. Kaynak terimi ise

$$(iv) = d^3 v\, d\, t \int\limits_V s(\vec{r},\vec{v},t)\, d^3 r \tag{1.1.6}$$

şeklinde tanımlanır. Yukarıda elde edilen ifadeler denklem 1.1.1'e eşitlenirse, sadeleştirmeler sonucunda,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi(\vec{r},\vec{v},t)}{\partial t} &= -v.\vec{\nabla}\, \psi(\vec{r},\vec{v},t) - v\, \sigma(\vec{r},\vec{v})\, \psi(\vec{r},\vec{v},t) + s(\vec{r},\vec{v},t) + \\ &\int d^3v' \sigma(\vec{v}' \to \vec{v},\vec{r})\, v'\, \psi(\vec{r},\vec{v}',t)\end{aligned} \tag{1.1.7}$$

bulunur (Case and Zweifel 1967).

Bu denklem nötron transport denkleminin en genel şeklidir. Nötronların hızlarının çarpışmalar sonucu değişmediği varsayılarak, tek-hızlı nötron transport denklemi yazılabilir. Denklem 1.1.7'nin her iki tarafı tüm hızlar üzerinden integre edilirse,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi(\vec{r},\hat{\Omega},t)}{\partial t} &= -v\hat{\Omega}.\vec{\nabla}\psi(\vec{r},\hat{\Omega},t) - v\sigma(\vec{r},v)\, \psi(\vec{r},\hat{\Omega},t) + s(\vec{r},\hat{\Omega},t) + \\ &v\sigma(\vec{r},v)\, c(\vec{r},v) \int \psi(\vec{r},\hat{\Omega}',t)\, f(\hat{\Omega}'.\hat{\Omega},\vec{r})\, d\hat{\Omega}'\end{aligned} \tag{1.1.8}$$

bulunur. Bu denklem 1. Tip Nötron Transport Denklemidir ve İntegro-diferansiyel Boltzmann Denklemi veya Lineer Transport Denklemi olarak adlandırılır. Burada, s kaynak, c ise çarpışmalardan sonra açığa çıkan ikincil nötronların ortalama sayısıdır. $f$ saçılma fonksiyonudur ve $\hat{\Omega}'$ doğrultusunda gelen bir nötronun ortamda bulunan çekirdeklerden biri ile çarpıştıktan sonra $\hat{\Omega}$ doğrultusunda saçılma olasılığını verir (Case and Zweifel 1967).

Düzlem geometride, zamandan bağımsız nötron transport denklemi, tek-hızlı nötronlar için,

$$\mu \frac{\partial \psi(x,\mu)}{\partial x} + \psi(x,\mu) = c \int_{\hat{\Omega}'} f(\hat{\Omega}'.\hat{\Omega})\, \psi(x,\hat{\Omega}')\, d\hat{\Omega}' + s(x,\mu) \qquad (1.1.9)$$

şeklinde yazılır. Düzlem geometride $\mu$, nötronların çarpışma yaptıktan sonra x ekseni ile yaptığı açının kosinüsü olmak üzere, ( $\hat{\Omega}.\hat{x} = \cos\theta = \mu$ ), izotropik saçılma için saçılma fonksiyonu $f(\mu,\mu') = \dfrac{1}{4\pi}$ alınarak, zamandan bağımsız lineer transport denklemi,

$$\mu \frac{\partial \psi(x,\mu)}{\partial x} + \psi(x,\mu) = \frac{c}{2} \int_{-1}^{+1} \psi(x,\mu')\, d\mu' + s(x,\mu) \qquad (1.1.10)$$

şeklinde elde edilir (Case and Zweifel 1967).

Nötron transport denkleminin çözümü için çeşitli yöntemler kullanılır. Bu yöntemler;

**1-** Case Yöntemi ( Yarı Analitik)
**2-** $P_L$ Yöntemi ( Nümerik)
**3-** $F_N$ Yöntemi ( Nümerik)
**4-** Varyasyon ( Analitik)
**5-** $S_N$ Yöntemi ( Bilgisayar)

**6-** Fourier Transfer Yöntemi

**7-** Chadvic Yöntemi ( Bilgisayar)

## 1.2 Düzlem Geometride $\mathrm{P_L}$ Yöntemi

Düzlem geometride tek hızlı nötronlar için zamandan bağımsız transport denklemi; Kaynak varken;

$$\mu \frac{\partial \psi}{\partial z} + \psi(z,\mu) = c \int_{\hat{\Omega}'} \psi(z,\mu') f(\hat{\Omega}'.\hat{\Omega},\vec{r}) \mathrm{d}\hat{\Omega}' + q(z,\mu) \tag{1.2.1}$$

Kaynak yokken $[q(z,\ \mu) = 0]$;

$$\mu \frac{\partial \psi}{\partial z} + \psi(z,\mu) = c \int_{\hat{\Omega}'} \psi(z,\mu') f(\hat{\Omega}'.\hat{\Omega},\vec{r}) \mathrm{d}\hat{\Omega}' \tag{1.2.2}$$

şeklindedir. Kaynak yokken;

$$\mu \frac{\partial \psi}{\partial z} + \psi(z,\mu) = c \int_{0}^{2\pi} \int_{-1}^{+1} \psi(z,\mu') f(\hat{\Omega}'.\hat{\Omega}) \mathrm{d}\mu' \mathrm{d}\varphi \tag{1.2.3}$$

şeklinde yazılır ve burada $f(\hat{\Omega}'.\hat{\Omega})$ ;

$$f(\hat{\Omega}'.\hat{\Omega}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} f_l Y_{lm}^{*}(\hat{\Omega}') Y_{lm}(\hat{\Omega}) \tag{1.2.4}$$

şeklinde yazılır (Case and Zweifel 1967). $m=0$ alınırsa $\varphi$ bağımlılığı ortadan kalkar ve

$$Y_{l0}^{*} = Y_{l0} = \left( \frac{2l+1}{4\pi} \right)^{1/2} P_l(\mu) \tag{1.2.5}$$

olarak yazılır. $Y_{l0}^{*}$ ve $Y_{l0}$'ın değerleri denklem 1.2.4'de yerine yazılırsa;

$$f(\hat{\Omega}'.\hat{\Omega}) = \frac{1}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} f_l \ (2l+1) \ P_l(\mu') \ P_l(\mu) \tag{1.2.6}$$

elde edilir. Bulunan bu değer, denklem 1.2.3'de yerine yazılırsa;

$$\mu \frac{\partial\psi}{\partial z} + \psi(z,\mu) = \frac{c}{2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \ f_l \ P_l(\mu) \int_{-1}^{+1} \psi(z,\mu') P_l(\mu') \, d\mu' \tag{1.2.7}$$

şeklinde elde edilir. Burada;

$$\psi(z,\mu) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2m+1}{4\pi} \Phi_m(z) \ P_m(\mu) \tag{1.2.8}$$

olarak alınır. Bu denklemin her iki tarafı $P_l(\mu)$ ile çarpılıp (-1,+1) aralığında $d\hat{\Omega}'$ üzerinden integrali alındığında;

$$\int_{-1}^{+1} P_l(\mu) \, \psi(z,\mu) \, d\hat{\Omega}' = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2m+1}{4\pi} \Phi_m(z) \int_{-1}^{+1} P_l(\mu) \, P_m(\mu) \, d\mu \int_{0}^{2\pi} d\varphi' \tag{1.2.9}$$

olarak bulunur. Burada;

$$\int_{-1}^{+1} P_l(\mu) \, P_m(\mu) \, d\mu = \frac{2}{2l+1} \ \delta_{lm} \tag{1.2.10}$$

şeklinde verilir. Denklem 1.2.8 ve 1.2.10, denklem 1.2.7'de yerine yazılırsa;

$$\mu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2m+1}{4\pi} \frac{\mathrm{d}\Phi_m(z)}{\mathrm{dz}} P_m(\mu) + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2m+1}{4\pi} \Phi_m(z)\, P_m(\mu) =$$
$$\frac{c}{2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)\ f_l\ P_l(\mu) \int_{-1}^{+1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2m+1}{4\pi} \Phi_m(z) P_m(\mu') P_l(\mu') \mathrm{d}\mu' + \tag{1.2.11}$$
$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{2m+1}{4\pi} q_m(z) P_m(z)$$

elde edilir. Burada $q_m(z)$ ; kaynak terimidir. Rekürans bağıntısı;

$$\mu\, P_m(\mu) = \frac{1}{2m+1} \left[ (m+1)\ P_{m+1}(\mu) + m\ P_{m-1}(\mu) \right] \tag{1.2.12}$$

şeklindedir (Case and Zweifel 1967). Bu indirgeme bağıntısı denklem 1.2.11'de yerine yazılırsa;

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{4\pi} \frac{\mathrm{d}\Phi_m(z)}{\mathrm{dz}} \left[ (m+1)\ P_{m+1}(\mu) + m P_{m-1}(\mu) \right] +$$
$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{2m+1}{4\pi} \Phi_m(z) P_m(\mu) =$$
$$\frac{c}{2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)\ f_l\ P_l(\mu) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2m+1}{4\pi} \Phi_m(z) \int_{-1}^{+1} P_l(\mu')\, P_m(\mu')\, \mathrm{d}\mu' \tag{1.2.13}$$
$$+ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2m+1}{4\pi} q_m(z) P_m(z)$$

elde edilir. Bu denklemin her iki tarafı $P_k(\mu)$ ile çarpılıp (-1,+1) aralığında dμ üzerinden integral alındığında;

$$(k+1)\ \frac{\mathrm{d}\Phi_{k+1}(z)}{\mathrm{d}z}\ +\ k\frac{\mathrm{d}\Phi_{k-1}(z)}{\mathrm{d}z}\ +\ (1-cf_k)\ \Phi_k(z) = (2k+1)\ q_k \tag{1.2.14}$$

elde edilir (Case and Zweifel 1967).

## 2. $P_L$ YÖNTEMİNİN MİLNE PROBLEMİNE UYGULANMASI

Kaynaksız yarı uzay ortamında nötron dağılımını belirlemek için genişletilmiş anizotropik saçılma çekirdeği kullanılır. Nötronlar $x = +\infty$'da bulunan bir kaynaktan yayılmaktadır. Yarı uzayın sol tarafı ise boşluktur. $P_L$ yöntemi kullanılarak açısal dağılım için nötron transport denkleminin çözümü elde edilir. İlk olarak, anizotropik saçılma için yazılan kuvvet denklemleri izotropik saçılma için yazılan denklemlere dönüştürülür. Sonra, bu denklemlerden nötron transport denkleminin çözümünü elde edilir. $P_3$, $P_5$, $P_7$, $P_9$ yaklaşımları için elde edilen bu nümerik sonuçlar başlangıç çözümlerine ait yöntem kullanılarak önceden elde edilen yaklaşım değerleri ile uyum içerisindedir (Erdoğan and Tezcan 1995).

Nümerik yöntemlerden biri olan $P_L$ yöntemi küresel harmoniklerde bir genişleme ile nötronun sürekli değişen açısal bağımlılığını göstermektedir. Eğer değişimin açısal bağımlılığı uzay ve küresel geometrilerin olması durumundayken simetrik ise bu genişleme Legendre polinomlarının toplamı haline gelir. Bu genişleme lineer transport denkleminde yerine koyulduğunda, uygun sınır şartları ile birlikte çözülebilen denklem çiftinin sonsuz bir dizisini verir. Burada amaç genişletilmiş anizotropik saçılma çekirdeği için lineer transport denklemini çözmektir (Davison 1958). Genişletilmiş anizotropik saçılma çekirdeği için kuvvet denklemleri, bir izotropik saçılma çekirdeği için kuvvet denklemleri haline dönüştürülebilmeleri nedeniyle hesaplamalarda $P_L$ yönteminin seçimi uygun olarak görülür (İnönü 1973, İnönü 1976). Bu problem başlangıç çözümlerine ait yöntem kullanılarak önceden çözüldü ( Tezcan and Yıldız 1993a, Tezcan and Yıldız 1993b). Sayısal sonuçlar önceden elde edilen yaklaşım değerleri ile genel olarak uyum içerisindedir ( Tezcan 1977, Tezcan and Sever 1986).

Anizotropik durum için saçılma fonksiyonu;

$$f = \frac{a}{2} + b\,\delta(\mu' - \mu) + d\,\delta(\mu' + \mu) \tag{2.1}$$

şeklindedir ve Legendre polinomları bakımından açısal değişimin genişlemesi;

$$\psi(z,\mu)=\sum_{l=0}^{N}\frac{2l+1}{4\pi}\,\psi_l(z)\,P_l(\mu) \tag{2.2}$$

şeklindedir ( Siewert and Williams 1977) ve bu denklem bizi Bölüm 1.2'den görüldüğü üzere;

$$(k+1)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dz}}\Phi_{k+1}+k\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dz}}\Phi_{k-1}+(2k+1)\,(1-c'\,\delta_{k0})\,\Phi_k=0 \tag{2.3}$$

denklemine götürür (Tezcan and Yıldız 1993b). Burada;

$$c'=\frac{a\,c}{[1-c\,\,(b+d)]} \tag{2.4}$$

$$\Phi_k=[1-bc-(-1)^k cd]^{1/2}\,\psi_k \tag{2.5}$$

$$z=[(1-bc)^2-c^2d^2]^{1/2}x \tag{2.6}$$

ile verilir (Tezcan and Yıldız 1993a).

## 2.1 $P_3$-Yaklaşımı

$P_3$–yaklaşımında c=1 için, $\psi_1$ = -1 varsayılarak $\Phi_0$, $\Phi_1$, $\Phi_2$ ve $\Phi_3$'ün değerleri bulunur.

$c$ = 1 ve $a + b + c$ = 1 ise 2.4 numaralı denklemden $c'$ =1 olarak bulunur. O halde 2.3 numaralı denklem;

$$(k+1)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dz}}\Phi_{k+1}+k\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dz}}\Phi_{k-1}+(2k+1)\ (1-\delta_{k0})\ \Phi_k=0 \tag{2.1.1}$$

şeklini alır. $k$ = 0, 1, 2, 3 için denklem aşağıdaki gibi yazılır:

$k$ = 0 için
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dz}}\Phi_1 + (1-\delta_{00})\ \Phi_0 = 0 \tag{2.1.2}$$

$k$ = 1 için
$$2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dz}}\Phi_2 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dz}}\Phi_0 + 3\ (1-\delta_{10})\ \Phi_1 = 0 \tag{2.1.3}$$

$k$ =2 için
$$3\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dz}}\Phi_3 + 2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dz}}\Phi_1 + 5\ (1-\delta_{20})\ \Phi_2 = 0 \tag{2.1.4}$$

$k$ = 3 için
$$4\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dz}}\Phi_4 + 3\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dz}}\Phi_2 + 7\ (1-\delta_{30})\ \Phi_3 = 0 \tag{2.1.5}$$

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dz}}\Phi_4 = 0,\ \delta_{10},\ \delta_{20},\ \delta_{30} = 0$ ve $\delta_{00} = 1$ alınarak denklemler düzenlenirse;

$$\frac{\mathrm{d}\Phi_1}{\mathrm{dz}} = 0 \tag{2.1.6}$$

$$2\ \frac{\mathrm{d}\Phi_2}{\mathrm{dz}} + \frac{\mathrm{d}\Phi_0}{\mathrm{dz}} + 3\,\Phi_1 = 0 \tag{2.1.7}$$

$$3\ \frac{\mathrm{d}\Phi_3}{\mathrm{dz}} + 2\,\frac{\mathrm{d}\Phi_1}{\mathrm{dz}} + 5\,\Phi_2 = 0 \tag{2.1.8}$$

$$3\ \frac{\mathrm{d}\Phi_2}{\mathrm{dz}} + 7\,\Phi_3 = 0 \tag{2.1.9}$$

olur (Erdoğan and Tezcan 1995). $\psi_1 = -1$ kabul edildiğinden 2.5 numaralı denklem yardımıyla $\Phi_1$;

$$\Phi_1 = -(1-b+d)^{1/2} \qquad (2.1.10)$$

olarak elde edilir. 2.1.9 numaralı denklemin diferansiyeli alınıp $\frac{d\Phi_3}{dz}$ ifadesi yalnız bırakıldığında;

$$\frac{d\Phi_3}{dz} = -\frac{3}{7}\frac{d^2\Phi_2}{dz^2} \qquad (2.1.11)$$

elde edilir. Bulunan bu ifade 2.1.8 numaralı denklemde yerine yazılırsa;

$$\frac{d^2\Phi_2}{dz^2} - \frac{35}{9}\Phi_2 = 0 \qquad (2.1.12)$$

elde edilir. Bu denklem $\lambda^2 - \frac{35}{9} = 0$ şeklinde yazılırsa $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{35}{9}}$ elde edilir. Buradan $\lambda = \sqrt{\frac{35}{9}} = \alpha_1$ kök olarak alınır. Bu durumda $\Phi_2$;

$$\Phi_2 = k\, e^{-\alpha_1 z} \qquad (2.1.13)$$

şeklinde elde edilir. $\Phi_2$'nin diferansiyeli alınıp 2.1.7 numaralı denklemde yerine yazılırsa;

$$\frac{d\Phi_0}{dz} = 3\ (1-b+d)^{1/2} + 2\,\alpha_1\ k\ e^{-\alpha_1 z} \tag{2.1.14}$$

elde edilir. Bu denklem integre edildiğinde $\Phi_0$;

$$\Phi_0 = k' + 3\ (1-b+d)^{1/2}\ z - 2\,k\ e^{-\alpha_1 z} \tag{2.1.15}$$

şeklinde bulunur. 2.1.9 numaralı denklemden yararlanılarak $\Phi_3$ 'ün değeri;

$$\Phi_3 = \frac{3}{7}\,k\ \alpha_1\ e^{-\alpha_1 z} \tag{2.1.16}$$

olarak bulunur. Burada $\alpha_1 = \sqrt{\frac{35}{9}}$, $k$ ve $k'$ sabitler olmak üzere, 2.5 numaralı eşitlik kullanılarak $\psi_0, \psi_1, \psi_2$ ve $\psi_3$ 'ün değerleri;

$k$ = 0 için $$\psi_0 = \frac{k' + 3\,(1 - b + d)^{1/2} z - 2\,k\ e^{-\alpha_1 z}}{(1-b-d)^{1/2}} \tag{2.1.17}$$

$k$= 1 için $$\psi_1 = -1 \tag{2.1.18}$$

$k$= 2 için $$\psi_2 = \frac{k\ e^{-\alpha_1 z}}{(1-b-d)^{1/2}} \tag{2.1.19}$$

$k$= 3 için $$\psi_3 = \frac{3\,k\ \alpha_1\ e^{-\alpha_1 z}}{7\ (1-b+d)^{1/2}} \tag{2.1.20}$$

şeklinde elde edilir (Case and Zweifel 1967).

Marshak sınır koşulları kullanılarak $k$ ve $k'$ sabitleri belirlenir (Case and Zweifel 1967).

$$\int_{\hat{\Omega}\,.\,\hat{n}>0} \psi(x_x,\ \mu)\,\mu^l\ \mathrm{d}\mu = 0,\quad l = 1, 3, ..., N \tag{2.1.21}$$

2.2 numaralı denklem $z = 0$ ve $N = 3$ için yazılıp düzenlendiğinde;

$$\psi(0,\mu) = \frac{1}{4\pi}[\,\psi_0(0)P_0(\mu) + 3\psi_1(0)P_1(\mu) + 5\,\psi_2(0)P_2(\mu) + 7\psi_3(0)P_3(\mu)] \tag{2.1.22}$$

elde edilir. Denklem 2.1.21 kullanılarak Marshak'ın 1. sınır koşulu uygulandığında;

$$\int_0^1 \mu\ \psi(0,\ \mu)\ \mathrm{d}\mu = 0 \tag{2.1.23}$$

yazılır. Denklem 2.1.22, denklem 2.1.23'de yerine yazıldığında;

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^1 \begin{bmatrix} \psi_0(0)\ \mu\ P_0(\mu) + 3\psi_1(0)\ \mu\ P_1(\mu) + \\ 5\,\psi_2(0)\ \mu\ P_2(\mu) + 7\psi_3(0)\ \mu\ P_3(\mu) \end{bmatrix} \mathrm{d}\mu = 0 \tag{2.1.24}$$

elde edilir. $\int_0^1 \mu\ P_0(\mu)\,\mathrm{d}\mu = \frac{1}{2}$, $\int_0^1 \mu\ P_1(\mu)\,\mathrm{d}\mu = \frac{1}{3}$, $\int_0^1 \mu\ P_2(\mu)\,\mathrm{d}\mu = \frac{1}{8}$, $\int_0^1 \mu\ P_3(\mu)\,\mathrm{d}\mu = 0$ eşitlikleri denklem 2.1.24'de yerine yazılıp integral alındığında;

$$\frac{1}{2}\psi_0(0)\ +\ \psi_1(0)\ +\ \frac{5}{8}\psi_2(0) = 0 \tag{2.1.25}$$

elde edilir. Denklem 2.1.17, 2.1.18 ve 2.1.19, denklem 2.1.25'de yerine yazıldığında;

$$\frac{1}{2}\ \frac{k^{'} - 2k}{(1-b-d)^{1/2}} \ - \ 1 \ + \ \frac{5k}{8\ (1-b-d)^{1/2}} = 0 \qquad (2.1.26)$$

eşitliği elde edilir. $q = \dfrac{n}{m}$, $(1-b-d)^{1/2} = n$ ve $(1-b+d)^{1/2} = m$ alınarak yukarıdaki eşitlik düzenlendiğinde (Erdoğan and Tezcan 1995);

$$k^{'} = \frac{3k}{4} + 2n \qquad (2.1.27)$$

eşitliği elde edilir. Denklem 2.1.21 kullanılarak Marshak'ın 2. sınır koşulu uygulandığında ise;

$$\int_0^1 \mu^3\ \psi(0,\ \mu)\ \mathrm{d}\mu = 0 \qquad (2.1.28)$$

şeklinde yazılır. Denklem 2.1.22 denklem 2.1.28'de yerine yazıldığında;

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^1 \begin{bmatrix} \psi_0(0)\ \mu^3\ P_0(\mu) + 3\psi_1(0)\ \mu^3\ P_1(\mu) + \\ 5\,\psi_2(0)\ \mu^3\ P_2(\mu) + 7\psi_3(0)\ \mu^3\ P_3(\mu) \end{bmatrix} \mathrm{d}\mu = 0 \qquad (2.1.29)$$

elde edilir. Denklem 2.1.29'da $\int_0^1 \mu^3\ P_0(\mu)\,\mathrm{d}\mu = \dfrac{1}{4}$, $\int_0^1 \mu^3\ P_1(\mu)\,\mathrm{d}\mu = \dfrac{1}{5}$, $\int_0^1 \mu^3\ P_2(\mu)\,\mathrm{d}\mu = \dfrac{1}{8}$, $\int_0^1 \mu^3\ P_3(\mu)\,\mathrm{d}\mu = \dfrac{2}{35}$ eşitliklerinden yararlanılarak integral alındığında;

$$\frac{1}{4}\ \psi_0(0)\ +\ \frac{3}{5}\ \psi_1(0)\ +\ \frac{5}{8}\ \psi_2(0)\ +\ \frac{14}{35}\ \psi_3(0) = 0 \tag{2.1.30}$$

elde edilir. Denklem 2.1.17, 2.1.18, 2.1.19 ve 2.1.20, denklem 2.1.30'da yerine yazıldığında;

$$\frac{1}{4}\ \frac{k^{'} - 2k}{(1-b-d)^{1/2}}\ -\ \frac{3}{5}\ +\ \frac{5k}{8\ (1-b-d)^{1/2}} + \frac{2}{5}\ \frac{3\ k\ \alpha_1}{7\ (1-b+d)^{1/2}} = 0 \tag{2.1.31}$$

şeklindeki eşitlik elde edilir. Gerekli kısaltmalar yapıldığında;

$$\frac{k^{'}}{4}\ -\ \frac{k}{2}\ +\ \frac{3\ n}{5}\ +\ \frac{5k}{8} + \frac{6}{35}\ k\ \alpha_1\ q = 0 \tag{2.1.32}$$

eşitliği elde edilir. 2.1.27 numaralı denklemde bulunan *k* değeri bu denklemde yerine yazıldığında;

$$k = \frac{(1-b-d)^{1/2}}{20} /(\frac{5}{32} + \frac{3\alpha_1 q}{35}) \tag{2.1.33}$$

elde edilir. Bulunan bu *k* değeri 2.1.27 numaralı bağıntıda yerine yazıldığında;

$$k^{'} = (1-b-d)^{1/2}\ [2 + \frac{3}{80} /(\frac{5}{32} + \frac{3\alpha_1 q}{35})] \tag{2.1.34}$$

şeklinde elde edilir. Bulunan *k ve* $k^{'}$ değerleri denklem 2.1.17-2.1.20'de yerleştirildiğinde, $P_3$-yaklaşımı içinde z'nin bir fonksiyonu olarak açısal yoğunluk elde edilir. Denklem 2.6, denklem 2.1.17'de yerine yazılarak $z_0$;

$$z_0 = \frac{\left[2 + \frac{3}{80} / (\frac{5}{32} + \frac{3\alpha_1 q}{35})\right] q}{3\ [(1-b)^2 - d^2]} \tag{2.1.35}$$

şeklinde elde edilir (Erdoğan and Tezcan 1995). Farklı saçılma türleri için $z_0$'ın değeri aşağıdaki gibi yazılır:

**(i) İzotropik saçılma**

$a = 1,\ b = d = 0$ olduğundan $q = 1$ elde edilir (Erdoğan and Tezcan 1995). Böylece $z_0$;

$$z_0 = \frac{\left[2 + \frac{3}{80} / (\frac{5}{32} + \frac{3\alpha_1}{35})\right]}{3} \tag{2.1.36}$$

olarak yazılır.

$P_3$-yaklaşımı için bulunan $z_0 = 0.670733$ şeklindedir.

**(ii) İleri doğru saçılma ile izotropik saçılma**

$a = 1 - \alpha,\ b = \alpha,\ d = 0$ olduğundan $q = 1$ elde edilir (Erdoğan and Tezcan 1995). Böylece $z_0$;

$$z_0 = \frac{\left[2 + \frac{3}{80} / (\frac{5}{32} + \frac{3\alpha_1}{35})\right]}{3(1-\alpha)} \tag{2.1.37}$$

şeklinde elde edilir.

$P_3$-yaklaşımı için $\alpha$'nın çeşitli değerlerinde Mathematica 5.0 programı ile hesaplanmış $z_0$ değerleri çizelge 2.1'de yer almaktadır.

Çizelge 2.1 $P_3$-yaklaşımında ileri doğru saçılma ile izotropik saçılma için bulunan $z_0$ değerleri

| $\alpha$ | $z_0$ |
|---|---|
| 0.2 | 0.838416 |
| 0.4 | 1.117888 |
| 0.6 | 1.676832 |
| 0.8 | 3.353663 |

**(iii) Geriye doğru saçılma ile izotropik saçılma**

$a = 1 - \alpha,\ \ b = 0,\ \ d = \alpha$ olduğundan $q = \left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^{1/2}$ elde edilir (Erdoğan and Tezcan 1995). Böylece $z_0$;

$$z_0 = \frac{\left[2 + \frac{3}{80}/(\frac{5}{32} + \frac{3\alpha_1 q}{35})\right] q}{3\ (1-\alpha^2)^{1/2}} \tag{2.1.38}$$

şeklinde yazılır.

$P_3$-yaklaşımı için $\alpha$'nın çeşitli değerlerinde Mathematica 5.0 programı ile hesaplanan $z_0$ değerleri çizelge 2.2'de yer almaktadır.

Çizelge 2.2 $P_3$-yaklaşımında geriye doğru saçılma ile izotropik saçılma için bulunan $z_0$ değerleri

| $\alpha$ | ***q*** | **$z_0$** |
|---|---|---|
| 0.2 | 0.816497 | 0.558621 |
| 0.4 | 0.654654 | 0.478574 |
| 0.6 | 0.5 | 0.418548 |
| 0.8 | 0.333333 | 0.371847 |

## 2.2 $P_5$-Yaklaşımı

$P_5$–yaklaşımında c=1 için, $\psi_1 = -1$ varsayılarak $\Phi_0$, $\Phi_1$, $\Phi_2$, $\Phi_3$, $\Phi_4$ ve $\Phi_5$ ’in değerleri bulunur. Denklem 2.3’den yararlanılarak *k* = 0, 1, 2, 3, 4, 5 için aşağıdaki denklemler yazılır.

*k*= 0 için
$$\frac{d}{dz}\Phi_1 + (1-\delta_{00})\,\Phi_0 = 0 \tag{2.2.1}$$

*k*= 1 için
$$2\frac{d}{dz}\Phi_2 + \frac{d}{dz}\Phi_0 + 3\,(1-\delta_{10})\,\Phi_1 = 0 \tag{2.2.2}$$

*k*= 2 için
$$3\frac{d}{dz}\Phi_3 + 2\frac{d}{dz}\Phi_1 + 5\,(1-\delta_{20})\,\Phi_2 = 0 \tag{2.2.3}$$

*k*= 3 için
$$4\frac{d}{dz}\Phi_4 + 3\frac{d}{dz}\Phi_2 + 7\,(1-\delta_{30})\,\Phi_3 = 0 \tag{2.2.4}$$

*k*= 4 için
$$5\frac{d}{dz}\Phi_5 + 4\frac{d}{dz}\Phi_3 + 9\,(1-\delta_{40})\,\Phi_4 = 0 \tag{2.2.5}$$

$k$= 5 için $$6\frac{d}{dz}\Phi_6 + 5\frac{d}{dz}\Phi_4 + 11\,(1-\delta_{50})\;\Phi_5 = 0 \qquad (2.2.6)$$

$\frac{d}{dz}\Phi_6 = 0$, $\delta_{10}$, $\delta_{20}$, $\delta_{30}$, $\delta_{40}$, $\delta_{50} = 0$ ve $\delta_{00} = 1$ alınarak denklemler düzenlenirse;

$$\frac{d\Phi_1}{dz} = 0 \qquad (2.2.7)$$

$$2\,\frac{d\Phi_2}{dz} + \frac{d\Phi_0}{dz} + 3\,\Phi_1 = 0 \qquad (2.2.8)$$

$$3\,\frac{d\Phi_3}{dz} + 2\,\frac{d\Phi_1}{dz} + 5\,\Phi_2 = 0 \qquad (2.2.9)$$

$$4\,\frac{d\Phi_4}{dz} + 3\,\frac{d\Phi_2}{dz} + 7\,\Phi_3 = 0 \qquad (2.2.10)$$

$$5\,\frac{d\Phi_5}{dz} + 4\,\frac{d\Phi_3}{dz} + 9\,\Phi_4 = 0 \qquad (2.2.11)$$

$$5\frac{d\Phi_4}{dz} + 11\,\Phi_5 = 0 \qquad (2.2.12)$$

olur. $\psi_1$ = -1 kabul edildiğinden 2.5 numaralı denklem yardımıyla $\Phi_1$;

$$\Phi_1 = -\,(1-b+d)^{1/2} \qquad (2.2.13)$$

olarak elde edilir.

$$\Phi_4 = Ae^{-\alpha_1 z} + Be^{-\alpha_2 z} \tag{2.2.14}$$

olarak alınıp denklem 2.2.12'de yerine yazıldığında;

$$\Phi_5 = \frac{5}{11} A\alpha_1 e^{-\alpha_1 z} + \frac{5}{11} B\alpha_2 e^{-\alpha_2 z} \tag{2.2.15}$$

şeklinde elde edilir. Denklem 2.2.11'de $\Phi_4$ ve $\Phi_5$ 'in değerleri yerine yazıldığında;

$$\Phi_3 = -\left[ \frac{9A\beta_1}{4\alpha_1} e^{-\alpha_1 z} + \frac{9B\beta_2}{4\alpha_2} e^{-\alpha_2 z} \right] \tag{2.2.16}$$

elde edilir. Burada;

$$\beta_1 = \left( \frac{25\alpha_1^2}{99} \right) - 1, \tag{2.2.17}$$

$$\beta_2 = \left( \frac{25\alpha_2^2}{99} \right) - 1 \tag{2.2.18}$$

şeklinde alınmıştır. Denklem 2.2.10'da $\Phi_3$ ve $\Phi_4$ 'ün değerleri yerine yazıldığında;

$$\Phi_2 = -\left[ A\left(\frac{4}{3} + \frac{21\beta_1}{4\alpha_1^2}\right)e^{-\alpha_1 z} + B\left(\frac{4}{3} + \frac{21\beta_2}{4\alpha_2^2}\right)e^{-\alpha_2 z} \right] \tag{2.2.19}$$

elde edilir. Denklem 2.2.9'da $\Phi_2$ ve $\Phi_3$ 'ün değerleri yerine yazıldığında;

$$\Phi_0 = A\left(\frac{8}{3} + \frac{21\,\beta_1}{2\,\alpha_1^2}\right) e^{-\alpha_1\, z} + B\left(\frac{8}{3} + \frac{21\,\beta_2}{2\,\alpha_2^2}\right) e^{-\alpha_2\, z} + 3mz + C \tag{2.2.20}$$

olarak bulunur. Denklem 2.5'in yardımıyla denklem 2.2.13, 2.2.14, 2.2.15, 2.2.16, 2.2.19 ve 2.2.20;

$$\psi_0(x) = \left[ 3mz + C + A\left(\frac{8}{3} + \frac{21\,\beta_1}{2\,\alpha_1^2}\right) e^{-\alpha_1\, z} + B\left(\frac{8}{3} + \frac{21\,\beta_2}{2\,\alpha_2^2}\right) e^{-\alpha_2\, z} \right] \Big/ n \tag{2.2.21}$$

$$\psi_1(x) = \text{-}1 \tag{2.2.22}$$

$$\psi_2(x) = -\left[ A\left(\frac{4}{3} + \frac{21\beta_1}{4\alpha_1^2}\right) e^{-\alpha_1\, z} + B\left(\frac{4}{3} + \frac{21\beta_2}{4\alpha_2^2}\right) e^{-\alpha_2\, z} \right] \Big/ n \tag{2.2.23}$$

$$\psi_3(x) = -\left[ \frac{9A\beta_1}{4\alpha_1} e^{-\alpha_1 z} + \frac{9B\beta_2}{4\alpha_2} e^{-\alpha_2 z} \right] \Big/ m \tag{2.2.24}$$

$$\psi_4(x) = \left[ Ae^{-\alpha_1 z} + Be^{-\alpha_2 z} \right] \Big/ n \tag{2.2.25}$$

$$\psi_5(x) = \left[ \frac{5}{11} A\alpha_1 e^{-\alpha_1 z} + \frac{5}{11} B\alpha_2 e^{-\alpha_2 z} \right] \Big/ m \tag{2.2.26}$$

şekline dönüşür (Erdoğan and Tezcan 1995). Denklem 2.1.21 kullanılarak Marshak'ın 1. sınır koşulu uygulandığında;

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^1 \begin{bmatrix} \psi_0(0)\,\mu\, P_0(\mu) + 3\psi_1(0)\,\mu\, P_1(\mu) + 5\,\psi_2(0)\,\mu\, P_2(\mu) + \\ 7\psi_3(0)\,\mu\, P_3(\mu) + 9\psi_4(0)\,\mu\, P_4(\mu) + 11\psi_5(0)\,\mu\, P_5(\mu) \end{bmatrix} d\mu = 0 \tag{2.2.27}$$

şeklinde bir denklem elde edilir. Bilinen değerler yerine yazılıp denklem 2.2.27 düzenlendiğinde;

$$\frac{1}{2}\left[\frac{C}{n}+\frac{A}{n}\left(\frac{8}{3}+\frac{21\beta_1}{2\alpha_1^2}\right)+\frac{B}{n}\left(\frac{8}{3}+\frac{21\beta_2}{2\alpha_2^2}\right)\right]-1-$$
$$\frac{1}{8}\left[\frac{5A}{n}\left(\frac{4}{3}+\frac{21\beta_1}{4\alpha_1^2}\right)+\frac{5B}{n}\left(\frac{4}{3}+\frac{21\beta_2}{4\alpha_2^2}\right)\right]-\frac{1}{48}\left[\frac{9A+9B}{n}\right]=0 \qquad (2.2.28)$$

elde edilir. Burada;

$$k_1=\frac{4}{3}+\frac{21\beta_1}{4\alpha_1^2}, \qquad (2.2.29)$$

$$k_2=\frac{4}{3}+\frac{21\beta_2}{4\alpha_2^2} \qquad (2.2.30)$$

olarak alınıp denklem 2.2.28 düzenlendiğinde;

$$\left(\frac{3k_1}{8}-\frac{9}{48}\right)A+\left(\frac{3k_2}{8}-\frac{9}{48}\right)B+\frac{C}{2}-n=0 \qquad (2.2.31)$$

şeklindeki denklem elde edilir (Erdoğan and Tezcan 1995). Bu denklem Marshak'ın 1. sınır koşulu uygulanarak elde edilen denklemdir.

Denklem 2.1.21 kullanılarak Marshak'ın 2. sınır koşulu uygulandığında;

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^1\left[\begin{array}{l}\psi_0(0)\,\mu^3\,P_0(\mu)+3\psi_1(0)\,\mu^3\,P_1(\mu)+5\,\psi_2(0)\,\mu^3\,P_2(\mu)+\\ 7\psi_3(0)\,\mu^3\,P_3(\mu)+9\psi_4(0)\,\mu^3\,P_4(\mu)+11\psi_5(0)\,\mu^3\,P_5(\mu)\end{array}\right]d\mu=0 \qquad (2.2.32)$$

elde edilir. Bilinen değerler yerine yazılıp denklem 2.2.32 düzenlendiğinde;

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4}\left[\frac{C}{n}+\frac{A}{n}\left(\frac{8}{3}+\frac{21\beta_1}{2\alpha_1^2}\right)+\frac{B}{n}\left(\frac{8}{3}+\frac{21\beta_2}{2\alpha_2^2}\right)\right]-\frac{3}{5}+\\&\frac{1}{8}\left[-\frac{5A}{n}\left(\frac{4}{3}+\frac{21\beta_1}{4\alpha_1^2}\right)-\frac{5B}{n}\left(\frac{4}{3}+\frac{21\beta_2}{4\alpha_2^2}\right)\right]-\\&\frac{2}{35}\left[\frac{63\beta_1 A}{4\alpha_1 m}+\frac{63\beta_2 B}{4\alpha_2 m}\right]+\frac{1}{64}\left[\frac{9A+9B}{n}\right]=0\end{aligned} \tag{2.2.33}$$

olarak elde edilir. İşlem en sade haline getirildiğinde;

$$\frac{C}{4}-\frac{3n}{5}+A\left(-\frac{k_1}{8}-\frac{9\beta_1 q}{10\alpha_1}+\frac{9}{64}\right)+B\left(-\frac{k_2}{8}-\frac{9\beta_2 q}{10\alpha_2}+\frac{9}{64}\right)=0 \tag{2.2.34}$$

denklemi elde edilir (Erdoğan and Tezcan 1995). Bu denklem Marshak'ın 2. sınır koşulu ile elde edilen denklemdir.

Denklem 2.1.21 kullanılarak Marshak'ın 3. sınır koşulu uygulandığında;

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^1\left[\begin{array}{l}\psi_0(0)\,\mu^5\,P_0(\mu)+3\psi_1(0)\,\mu^5\,P_1(\mu)+5\,\psi_2(0)\,\mu^5\,P_2(\mu)+\\ 7\psi_3(0)\,\mu^5\,P_3(\mu)+9\psi_4(0)\,\mu^5\,P_4(\mu)+11\psi_5(0)\,\mu^5\,P_5(\mu)\end{array}\right]d\mu=0 \tag{2.2.35}$$

şeklindeki denklem bulunur. Bilinen değerler yerine yazıldığında;

$$\begin{aligned}&\frac{1}{6}\left[\frac{C}{n}+\frac{2Ak_1}{n}+\frac{2Bk_2}{n}\right]-\frac{3}{7}-\frac{25}{48}\left[\frac{Ak_1+Bk_2}{m}\right]-\\&\left[\frac{\beta_1 A}{m\alpha_1}+\frac{\beta_2 B}{m\alpha_2}\right]+\frac{9}{32}\left[\frac{A+B}{n}\right]+\frac{40}{693}\left[\frac{\alpha_1 A+\alpha_2 B}{m}\right]=0\end{aligned} \tag{2.2.36}$$

denklemi elde edilir. Denklem düzenlendiğinde;

$$\frac{C}{6}-\frac{3n}{7}+A\left(-\frac{9k_1}{48}-\frac{\beta_1 q}{\alpha_1}+\frac{9}{32}+\frac{40\alpha_1 q}{693}\right)+B\left(-\frac{9k_2}{48}-\frac{\beta_2 q}{\alpha_2}+\frac{9}{32}+\frac{40\alpha_2 q}{693}\right)=0 \qquad (2.2.37)$$

elde edilir (Erdoğan and Tezcan 1995). Bu denklem Marshak'ın 3. sınır koşulu ile elde edilen denklemdir.

Denklem 2.2.9'da $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$ 'ün değerleri yerine yazılıp işlemler yapıldığında;

$$0,34090909\alpha_1^4 - 4,00909091\alpha_1^2 + 5,25 = 0 \qquad (2.2.38)$$

bağıntısı elde edilir. Burada $\alpha_1^2 = t$ alınıp denklem 2.2.38 Mathematica 5.0 programıyla çözüldüğünde $t_1 = 1,5011417$, $t_2 = 10,258858$ olarak elde edilir. Buradan $\alpha_1 = 1,225211$, $\alpha_2 = 3,202945$ değerleri bulunmuş olur. Denklem 2.2.21 kullanılarak $z_0$;

$$z_0 = \frac{C}{3\left[\left(1-b\right)^2 - d^2\right]^{1/2}} \qquad (2.2.39)$$

şeklinde elde edilir (Erdoğan and Tezcan 1995). Denklem 2.2.31, 2.2.34 ve 2.2.37'nin birlikte çözümü yapıldığında A, B ve C sabitlerinin değerleri farklı saçılma türleri için aşağıdaki gibi bulunur:

**(i) İzotropik saçılma**

$a = 1$, $b = d = 0$ olduğundan $q = 1$ elde edilir (Erdoğan and Tezcan 1995). A, B, C sabitlerinin değerleri Mathematica 5.0 programı kullanılarak çizelge 2.3'deki gibi bulunur.

Çizelge 2.3 $P_5$-yaklaşımında izotropik saçılma için bulunan A, B, C değerleri

| A | B | C |
|---|---|---|
| 0,04635493 | -0,06320580 | 2,12462167 |

Denklem 2.2.39 izotropik saçılma için yazıldığında $z_0$;

$$z_0 = \frac{C}{3} \tag{2.2.40}$$

olarak bulunur. $P_5$-yaklaşımı için bulunan $z_0 = 0{,}70820558$ şeklindedir.

**ii) İleri doğru saçılma ile izotropik saçılma**

$a = 1 - \alpha$, $b = \alpha$, $d = 0$ olduğundan $q = 1$ elde edilir (Erdoğan and Tezcan 1995). A, B, C sabitlerinin $\alpha$'nın çeşitli değerleri için Mathematica 5.0 programı kullanılarak hesaplanan değerleri çizelge 2.4'de verilmiştir.

Çizelge 2.4 $P_5$-yaklaşımında ileri doğru saçılma ile izotropik saçılma için bulunan A, B, C değerleri

| α | A | B | C |
|---|---|---|---|
| 0,2 | 0,04146111 | -0,05653299 | 1,90031497 |
| 0,4 | 0,03590638 | -0,04895900 | 1,64572104 |
| 0,6 | 0,02931743 | -0,03997486 | 1,34372561 |
| 0,8 | 0,02073056 | -0,02826649 | 0,95015749 |

Denklem 2.2.39 ileri doğru izotropik saçılma için yazıldığında $z_0$;

$$z_0 = \frac{C}{3(1-\alpha)} \tag{2.2.41}$$

şeklinde elde edilir. $P_5$-yaklaşımı için $\alpha$'nın çeşitli değerlerinde bulunan $z_0$ değerleri çizelge 2.5'de yer almaktadır:

Çizelge 2.5 $P_5$-yaklaşımında ileri doğru saçılma ile izotropik saçılma için bulunan $z_0$ değerleri

| $\alpha$ | $z_0$ |
|---|---|
| 0.2 | 0,79179791 |
| 0.4 | 0,91428947 |
| 0.6 | 1,11977134 |
| 0.8 | 1,58359581 |

**(iii) Geriye doğru saçılma ile izotropik saçılma**

$a = 1 - \alpha$, $b = 0$, $d = \alpha$ olduğundan $q = \left(\dfrac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^{1/2}$ elde edilir (Erdoğan and Tezcan 1995). $\alpha$'nın çeşitli değerleri için Mathematica 5.0 programı ile hesaplanan A, B, C sabitlerinin değerleri çizelge 2.6'da verilmiştir.

Çizelge 2.6 $P_5$-yaklaşımında geriye doğru saçılma ile izotropik saçılma için bulunan A, B, C değerleri

| $\alpha$ | A | B | C |
|---|---|---|---|
| 0,2 | 0,04536458 | -0,06241593 | 1.91150121 |
| 0,4 | 0,04283889 | -0,05952028 | 1.66572760 |
| 0,6 | 0,03827892 | -0,05380192 | 1,36980350 |
| 0,8 | 0,03012285 | -0,04301327 | 0.97780409 |

Denklem 2.2.39 geriye doğru izotropik saçılma için yazıldığında $z_0$;

$$z_0 = \frac{C}{3(1-\alpha^2)^{1/2}} \qquad (2.2.42)$$

olarak elde edilir. $P_5$-yaklaşımı için $\alpha$'nın çeşitli değerlerinde bulunan $z_0$ değerleri ise çizelge 2.7'de yer almaktadır.

Çizelge 2.7 $P_5$-yaklaşımında geriye doğru saçılma ile izotropik saçılma için bulunan $z_0$ değerleri

| $\alpha$ | $z_0$ |
|---|---|
| 0.2 | 0.65030592 |
| 0.4 | 0.60581927 |
| 0.6 | 0.57075146 |
| 0.8 | 0.54322449 |

## 2.3 $P_7$-Yaklaşımı

$P_7$–yaklaşımında c=1 için, $\psi_1 = -1$ varsayılarak $\Phi_0$, $\Phi_1$, $\Phi_2$, $\Phi_3$, $\Phi_4$, $\Phi_5$, $\Phi_6$ ve $\Phi_7$ 'nin değerleri bulunur. 2.3 numaralı denklemden yararlanılarak *k* = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 için aşağıdaki denklemler yazılır:

*k*= 0 için $$\frac{d}{dz}\Phi_1 + (1-\delta_{00})\,\Phi_0 = 0 \qquad (2.3.1)$$

*k*= 1 için $$2\frac{d}{dz}\Phi_2 + \frac{d}{dz}\Phi_0 + 3\,(1-\delta_{10})\,\Phi_1 = 0 \qquad (2.3.2)$$

*k*= 2 için $$3\frac{d}{dz}\Phi_3 + 2\frac{d}{dz}\Phi_1 + 5\,(1-\delta_{20})\,\Phi_2 = 0 \qquad (2.3.3)$$

$k$= 3 için $$4\frac{d}{dz}\Phi_4 + 3\frac{d}{dz}\Phi_2 + 7\,(1-\delta_{30})\;\Phi_3 = 0 \qquad (2.3.4)$$

$k$= 4 için $$5\frac{d}{dz}\Phi_5 + 4\frac{d}{dz}\Phi_3 + 9\,(1-\delta_{40})\;\Phi_4 = 0 \qquad (2.3.5)$$

$k$= 5 için $$6\frac{d}{dz}\Phi_6 + 5\frac{d}{dz}\Phi_4 + 11\,(1-\delta_{50})\;\Phi_5 = 0 \qquad (2.3.6)$$

$k$= 6 için $$7\frac{d}{dz}\Phi_7 + 6\frac{d}{dz}\Phi_5 + 13\,(1-\delta_{60})\;\Phi_6 = 0 \qquad (2.3.7)$$

$k$= 7 için $$8\frac{d}{dz}\Phi_8 + 7\frac{d}{dz}\Phi_6 + 15\,(1-\delta_{70})\;\Phi_7 = 0 \qquad (2.3.8)$$

$\frac{d}{dz}\Phi_8 = 0$, $\delta_{10}$, $\delta_{20}$, $\delta_{30}$, $\delta_{40}$, $\delta_{50}$, $\delta_{60}$, $\delta_{70}$ $= 0$ ve $\delta_{00}$ $= 1$ alınarak denklemler düzenlendiğinde;

$$\frac{d\Phi_1}{dz} = 0 \qquad (2.3.9)$$

$$2\,\frac{d\Phi_2}{dz} + \frac{d\Phi_0}{dz} + 3\,\Phi_1 = 0 \qquad (2.3.10)$$

$$3\,\frac{d\Phi_3}{dz} + 2\,\frac{d\Phi_1}{dz} + 5\,\Phi_2 = 0 \qquad (2.3.11)$$

$$4\,\frac{d\Phi_4}{dz} + 3\,\frac{d\Phi_2}{dz} + 7\,\Phi_3 = 0 \qquad (2.3.12)$$

$$5\,\frac{d\Phi_5}{dz}+4\frac{d\Phi_3}{dz}+9\,\Phi_4=0 \tag{2.3.13}$$

$$6\,\frac{d\Phi_6}{dz}+5\frac{d\Phi_4}{dz}+11\,\Phi_5=0 \tag{2.3.14}$$

$$7\,\frac{d\Phi_7}{dz}+6\frac{d\Phi_5}{dz}+13\,\Phi_6=0 \tag{2.3.15}$$

$$7\frac{d\Phi_6}{dz}+15\,\Phi_7=0 \tag{2.3.16}$$

olur. $\psi_1$ = -1 kabul edildiğinden 2.5 numaralı denklem yardımıyla $\Phi_1$;

$$\Phi_1 \;=-\,(1-b+d)^{1/2} \tag{2.3.17}$$

olarak elde edilir.

$$\Phi_6 = Ae^{-\alpha_1 z}+Be^{-\alpha_2 z}+Ce^{-\alpha_3 z} \tag{2.3.18}$$

olarak alınıp denklem 2.3.16'da yerine yazıldığında;

$$\Phi_7=\frac{7}{15}\alpha_1 Ae^{-\alpha_1 z}+\frac{7}{15}\alpha_2 Be^{-\alpha_2 z}+\frac{7}{15}\alpha_3 Ce^{-\alpha_3 z} \tag{2.3.19}$$

şeklinde elde edilir. Denklem 2.3.15'de $\Phi_6$ ve $\Phi_7$'nin değerleri yerine yazıldığında;

$$\Phi_5 = k_1 Ae^{-\alpha_1 z}+k_2 Be^{-\alpha_2 z}+k_3 Ce^{-\alpha_3 z} \tag{2.3.20}$$

elde edilir (Erdoğan and Tezcan 1995). Burada;

$$k_1 = \frac{13}{6\alpha_1} - \frac{49\alpha_1}{90} \tag{2.3.21}$$

$$k_2 = \frac{13}{6\alpha_2} - \frac{49\alpha_2}{90} \tag{2.3.22}$$

$$k_3 = \frac{13}{6\alpha_3} - \frac{49\alpha_3}{90} \tag{2.3.23}$$

şeklinde alınmıştır (Erdoğan and Tezcan 1995). Denklem 2.3.14'de $\Phi_5$ ve $\Phi_6$'nın değerleri yerine yazıldığında;

$$\Phi_4 = l_1 A e^{-\alpha_1 z} + l_2 B e^{-\alpha_2 z} + l_3 C e^{-\alpha_3 z} \tag{2.3.24}$$

olarak bulunur. Burada;

$$l_1 = \frac{11 k_1}{5 \alpha_1} - \frac{6}{5} \tag{2.3.25}$$

$$l_2 = \frac{11 k_2}{5 \alpha_2} - \frac{6}{5} \tag{2.3.26}$$

$$l_3 = \frac{11 k_3}{5 \alpha_3} - \frac{6}{5} \tag{2.3.27}$$

olarak alınmıştır (Erdoğan and Tezcan 1995). Denklem 2.3.13'de $\Phi_4$ ve $\Phi_5$'in değerleri yerine yazıldığında;

$$\Phi_3 = s_1 \, A \, e^{-\alpha_1 z} + s_2 \, B \, e^{-\alpha_2 z} + s_3 \, C \, e^{-\alpha_3 z} \tag{2.3.28}$$

şeklinde elde edilir. Burada;

$$s_1 = \frac{9l_1}{4\alpha_1} - \frac{5k_1}{4} \tag{2.3.29}$$

$$s_2 = \frac{9l_2}{4\alpha_2} - \frac{5k_2}{4} \tag{2.3.30}$$

$$s_3 = \frac{9l_3}{4\alpha_3} - \frac{5k_3}{4} \tag{2.3.31}$$

olarak alınmıştır (Erdoğan and Tezcan 1995). Denklem 2.3.12'de $\Phi_3$ ve $\Phi_4$'ün değerleri yerine yazıldığında;

$$\Phi_2 = t_1 \, A \, e^{-\alpha_1 z} + t_2 \, B \, e^{-\alpha_2 z} + t_3 \, C \, e^{-\alpha_3 z} \tag{2.3.32}$$

olarak elde edilir. Burada;

$$t_1 = \frac{7s_1}{3\alpha_1} - \frac{4l_1}{3} \tag{2.3.33}$$

$$t_2 = \frac{7s_2}{3\alpha_2} - \frac{4l_2}{3} \tag{2.3.34}$$

$$t_3 = \frac{7s_3}{3\alpha_3} - \frac{4l_3}{3} \tag{2.3.35}$$

şeklinde alınmıştır (Erdoğan and Tezcan 1995). Denklem 2.3.10'da $\Phi_1$ ve $\Phi_2$'nin değerleri yerine yazıldığında;

$$\Phi_0 = -2\,t_1\,A\,e^{-\alpha_1 z} - 2\,t_2\,B\,e^{-\alpha_2 z} - 2\,t_3\,C\,e^{-\alpha_3 z} + 3\,m\,z + \mathrm{D} \tag{2.3.36}$$

olarak bulunur. Denklem 2.5'in yardımıyla denklem 2.3.17, 2.3.18, 2.3.19, 2.3.20, 2.3.24, 2.3.28, 2.3.32 ve 2.3.36;

$$\psi_0(x) = \left[3mz + \mathrm{D} - 2\,t_1\,Ae^{-\alpha_1 z} - 2\,t_2\,Be^{-\alpha_2 z} - 2\,t_3\,C\,e^{-\alpha_3 z}\right]\big/ n \tag{2.3.37}$$

$$\psi_1(x) = -1 \tag{2.3.38}$$

$$\psi_2(x) = \left[\,t_1\,Ae^{-\alpha_1 z} + t_2\,Be^{-\alpha_2 z} + t_3\,C\,e^{-\alpha_3 z}\right]\big/ n \tag{2.3.39}$$

$$\psi_3(x) = \left[\,s_1\,Ae^{-\alpha_1 z} + s_2\,Be^{-\alpha_2 z} + s_3\,C\,e^{-\alpha_3 z}\right]\big/ m \tag{2.3.40}$$

$$\psi_4(x) = \left[\,l_1\,Ae^{-\alpha_1 z} + l_2\,Be^{-\alpha_2 z} + l_3\,C\,e^{-\alpha_3 z}\right]\big/ n \tag{2.3.41}$$

$$\psi_5(x) = \left[\,k_1\,Ae^{-\alpha_1 z} + k_2\,Be^{-\alpha_2 z} + k_3\,C\,e^{-\alpha_3 z}\right]\big/ m \tag{2.3.42}$$

$$\psi_6(x) = \left[\,Ae^{-\alpha_1 z} + Be^{-\alpha_2 z} + C\,e^{-\alpha_3 z}\right]\big/ n \tag{2.3.43}$$

$$\psi_7(x) = 7\left[\,\alpha_1 Ae^{-\alpha_1 z} + \alpha_2 Be^{-\alpha_2 z} + \alpha_3 C\,e^{-\alpha_3 z}\right]\big/ 15m \tag{2.3.44}$$

şekline dönüşür (Erdoğan and Tezcan 1995). Denklem 2.1.21 kullanılarak Marshak'ın 1. sınır koşulu uygulandığında;

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^1 \begin{bmatrix} \psi_0(0)\ \mu\, P_0(\mu) + 3\psi_1(0)\ \mu\, P_1(\mu) + \\ 5\,\psi_2(0)\ \mu\, P_2(\mu) + 7\psi_3(0)\ \mu\, P_3(\mu) + \\ 9\psi_4(0)\ \mu\, P_4(\mu) + 11\psi_5(0)\ \mu\, P_5(\mu) + \\ 13\psi_6(0)\ \mu\, P_6(\mu) + 15\psi_7(0)\ \mu\, P_7(\mu) \end{bmatrix} \mathrm{d}\mu = 0 \qquad (2.3.45)$$

şeklinde bir denklem elde edilir. Bilinen değerler yerine yazılıp denklem 2.3.45 düzenlendiğinde;

$$\begin{aligned} &\frac{D}{2n}-\frac{t_1A}{n}-\frac{t_2B}{n}-\frac{t_3C}{n}-1+\frac{5t_1A}{8n}+\frac{5t_2B}{8n}+\frac{5t_3C}{8n}-\frac{9l_1A}{48n}-\frac{9l_2B}{48n}-\frac{9l_3C}{48n}+ \\ &\frac{13A}{128n}+\frac{13B}{128n}+\frac{13C}{128n}+\frac{27\alpha_1A}{8m}+\frac{27\alpha_2B}{8m}+\frac{27\alpha_3C}{8m}=0 \end{aligned} \qquad (2.3.46)$$

elde edilir. Denklem en sade haline getirildiğinde;

$$A\left(\frac{-3t_1}{8}-\frac{9l_1}{48}+\frac{13}{128}\right)+B\left(\frac{-3t_2}{8}-\frac{9l_2}{48}+\frac{13}{128}\right)+C\left(\frac{-3t_3}{8}-\frac{9l_3}{48}+\frac{13}{128}\right)+\frac{D}{2}-n=0 \qquad (2.3.47)$$

şeklindeki denklem elde edilir (Erdoğan and Tezcan 1995). Bu denklem Marshak'ın 1. sınır koşulu uygulanarak elde edilen denklemdir.

Denklem 2.1.21 kullanılarak Marshak'ın 2. sınır koşulu uygulandığında;

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^1 \begin{bmatrix} \psi_0(0)\ \mu^3\ P_0(\mu) + 3\psi_1(0)\ \mu^3\ P_1(\mu) + \\ 5\,\psi_2(0)\ \mu^3\ P_2(\mu) + 7\psi_3(0)\ \mu^3\ P_3(\mu) + \\ 9\psi_4(0)\ \mu^3\ P_4(\mu) + 11\psi_5(0)\ \mu^3\ P_5(\mu) + \\ 13\psi_6(0)\ \mu^3\ P_6(\mu) + 15\psi_7(0)\ \mu^3\ P_7(\mu) \end{bmatrix} \mathrm{d}\mu = 0 \qquad (2.3.48)$$

elde edilir. Bilinen değerler yerine yazılıp denklem düzenlendiğinde;

$$\begin{aligned} &\frac{D}{4n} - \frac{t_1 A}{2n} - \frac{t_2 B}{2n} - \frac{t_3 C}{2n} - \frac{3}{5} + \frac{5t_1 A}{8n} + \frac{5t_2 B}{8n} + \frac{5t_3 C}{8n} + \\ &\frac{14s_1 A}{35m} + \frac{14s_2 B}{35m} + \frac{14s_3 C}{35m} + \frac{9l_1 A}{64n} + \frac{9l_2 B}{64n} + \frac{9l_3 C}{64n} - \\ &\frac{13A}{640n} - \frac{13B}{640n} - \frac{13C}{640n} = 0 \end{aligned} \qquad (2.3.49)$$

olarak elde edilir. Denklem en sade haline getirildiğinde;

$$\begin{aligned} &A\left(\frac{t_1}{8} + \frac{14s_1 q}{35} + \frac{9l_1}{64} - \frac{13}{640}\right) + B\left(\frac{t_2}{8} + \frac{14s_2 q}{35} + \frac{9l_2}{64} - \frac{13}{640}\right) + \\ &C\left(\frac{t_3}{8} + \frac{14s_3 q}{35} + \frac{9l_3}{64} - \frac{13}{640}\right) + \frac{D}{4} - \frac{3n}{5} = 0 \end{aligned} \qquad (2.3.50)$$

şeklini alır (Erdoğan and Tezcan 1995). Bu denklem Marshak'ın 2. sınır koşulu uygulanarak elde edilen denklemdir.

Denklem 2.1.21 kullanılarak Marshak'ın 3. sınır koşulu uygulandığında;

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^1 \begin{bmatrix} \psi_0(0)\ \mu^5\ P_0(\mu) + 3\psi_1(0)\ \mu^5\ P_1(\mu) + 5\,\psi_2(0)\ \mu^5\ P_2(\mu) + \\ 7\psi_3(0)\ \mu^5\ P_3(\mu) + 9\psi_4(0)\ \mu^5\ P_4(\mu) + 11\psi_5(0)\ \mu^5\ P_5(\mu) + \\ 13\psi_6(0)\ \mu^5\ P_6(\mu) + 15\psi_7(0)\ \mu^5\ P_7(\mu) \end{bmatrix} \mathrm{d}\mu = 0 \qquad (2.3.51)$$

olarak elde edilir. Bilinen değerler yerine yazılıp denklem düzenlendiğinde;

$$
\begin{aligned}
&\frac{D}{6n}-\frac{t_1A}{3n}-\frac{t_2B}{3n}-\frac{t_3C}{3n}-\frac{3}{7}+\frac{25t_1A}{48n}+\frac{25t_2B}{48n}+\frac{25t_3C}{48n}+\frac{4s_1A}{9m}+\frac{4s_2B}{9m}+\frac{4s_3C}{9m}+\\
&\frac{9l_1A}{32n}+\frac{9l_2B}{32n}+\frac{9l_3C}{32n}+\frac{88k_1A}{693m}+\frac{88k_2B}{693m}+\frac{88k_3C}{693m}+\frac{13A}{384n}+\frac{13B}{384n}+\frac{13C}{384n}=0
\end{aligned}
\tag{2.3.52}
$$

şeklinde elde edilen denklem düzenlenip en sade haline getirildiğinde;

$$
\begin{aligned}
&A\left(\frac{3t_1}{16}+\frac{4s_1q}{9}+\frac{9l_1}{32}+\frac{88k_1q}{693}+\frac{13}{384}\right)+B\left(\frac{3t_2}{16}+\frac{4s_2q}{9}+\frac{9l_2}{32}+\frac{88k_2q}{693}+\frac{13}{384}\right)+\\
&C\left(\frac{3t_3}{16}+\frac{4s_3q}{9}+\frac{9l_3}{32}+\frac{88k_3q}{693}+\frac{13}{384}\right)+\frac{D}{6}-\frac{3n}{7}=0
\end{aligned}
\tag{2.3.53}
$$

şeklini alır (Erdoğan and Tezcan 1995). Bu denklem Marshak'ın 3. sınır koşulu uygulanarak elde edilen denklemdir.

Denklem 2.1.21 kullanılarak Marshak'ın 4. sınır koşulu uygulandığında;

$$
\frac{1}{4\pi}\int_0^1\begin{bmatrix}\psi_0(0)\,\mu^7\,P_0(\mu)+3\psi_1(0)\,\mu^7\,P_1(\mu)+5\,\psi_2(0)\,\mu^7\,P_2(\mu)+\\ 7\psi_3(0)\,\mu^7\,P_3(\mu)+9\psi_4(0)\,\mu^7\,P_4(\mu)+11\psi_5(0)\,\mu^7\,P_5(\mu)+\\ 13\psi_6(0)\,\mu^7\,P_6(\mu)+15\psi_7(0)\,\mu^7\,P_7(\mu)\end{bmatrix}d\mu=0 \tag{2.3.54}
$$

şeklinde elde edilir. Bilinen değerler yerine yazıldığında;

$$
\begin{aligned}
&\frac{D}{8n}-\frac{t_1A}{4n}-\frac{t_2B}{4n}-\frac{t_3C}{4n}-\frac{1}{3}+\frac{7t_1A}{16n}+\frac{7t_2B}{16n}+\frac{7t_3C}{16n}+\frac{14s_1A}{33m}+\frac{14s_2B}{33m}+\frac{14s_3C}{33m}+\\
&\frac{21l_1A}{64n}+\frac{21l_2B}{64n}+\frac{21l_3C}{64n}+\frac{88k_1A}{429m}+\frac{88k_2B}{429m}+\frac{88k_3C}{429m}+\frac{13A}{128n}+\frac{13B}{128n}+\frac{13C}{128n}+\\
&\frac{112\alpha_1}{6435m}+\frac{112\alpha_2}{6435m}+\frac{112\alpha_3}{6435m}=0
\end{aligned}
\tag{2.3.55}
$$

şeklindeki denklem elde edilir ve denklem düzenlenip en sade haline getirildiğinde;

$$A\left(\frac{3t_1}{16}+\frac{14s_1q}{33}+\frac{21l_1}{64}+\frac{88k_1q}{429}+\frac{13}{128}+\frac{112\alpha_1q}{6435}\right)+$$
$$B\left(\frac{3t_2}{16}+\frac{14s_2q}{33}+\frac{21l_2}{64}+\frac{88k_2q}{429}+\frac{13}{128}+\frac{112\alpha_2q}{6435}\right)+ \qquad (2.3.56)$$
$$C\left(\frac{3t_3}{16}+\frac{14s_3q}{33}+\frac{21l_3}{64}+\frac{88k_3q}{429}+\frac{13}{128}+\frac{112\alpha_3q}{6435}\right)+\frac{D}{8}-\frac{n}{3}=0$$

şeklini alır (Erdoğan and Tezcan 1995). Bu denklem Marshak'ın 4. sınır koşulu uygulanarak elde edilen denklemdir.

Denklem 2.3.11'de $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$ 'ün değerleri yerine yazılıp işlemler yapıldığında;

$$-0,4083\ \alpha_1^6+9,646997\ \alpha_1^4-31,69833\ \alpha_1^2+25,025=0 \qquad (2.3.57)$$

bağıntısı elde edilir. Burada $\alpha_1^2=t$ alınıp denklem 2.3.57, Mathematica 5.0 programıyla çözüldüğünde; $t_1 = 1,21702$, $t_2 = 2,5337$, $t_3 = 19,8765$ elde edilir. Buradan; $\alpha_1 = 1,103185$, $\alpha_2 = 1,591779$, $\alpha_3 = 4,458086$ değerleri bulunmuş olur.

Denklem 2.3.37 kullanılarak $z_0$;

$$z_0=\frac{D}{3\left[(1-b)^2-d^2\right]^{1/2}m} \qquad (2.3.58)$$

olarak elde edilir (Erdoğan and Tezcan 1995). Denklem 2.3.47, 2.3.50, 2.3.53 ve 2.3.56'nın birlikte çözümü yapıldığında A, B, C ve D sabitlerinin değerleri farklı saçılma türleri için aşağıdaki gibi bulunur:

**(i) İzotropik saçılma**

$a = 1, \quad b = d = 0$ olduğundan $q = 1$ elde edilir (Erdoğan and Tezcan 1995). Mathematica 5.0 programı ile hesaplanan A, B, C, D sabitlerinin değerleri çizelge 2.8 ile verilmektedir.

Çizelge 2.8 $P_7$-yaklaşımında izotropik saçılma için bulunan A, B, C, D değerleri

| **A** | **B** | **C** | **D** |
|---|---|---|---|
| 0.01512250 | -0.04305028 | 0.03167998 | 2.12758931 |

Denklem 2.3.58 izotropik saçılma için yazıldığında $z_0$;

$$z_0 = \frac{D}{3} \tag{2.3.59}$$

olarak bulunur. $P_7$-yaklaşımı için bulunan $z_0 =$ 0.70919644 şeklindedir.

**ii) İleri doğru saçılma ile izotropik saçılma**

$a = 1 - \alpha, \quad b = \alpha, \quad d = 0$ olduğundan $q = 1$ elde edilir (Erdoğan and Tezcan 1995). A, B, C, D sabitlerinin $\alpha$'nın çeşitli değerleri için Mathematica 5.0 programı kullanılarak hesaplanan değerleri çizelge 2.9'da verilmiştir.

Çizelge 2.9 $P_7$-yaklaşımında ileri doğru saçılma ile izotropik saçılma için bulunan A, B, C, D değerleri

| $\alpha$ | **A** | **B** | **C** | **D** |
|---|---|---|---|---|
| 0,2 | 0.01352598 | -0.03850534 | 0.02833543 | 1.90297373 |
| 0,4 | 0.01171384 | -0.03334660 | 0.02453921 | 1.64802359 |
| 0,6 | 0.00956431 | -0.02722738 | 0.02003618 | 1.34560563 |
| 0,8 | 0.00676299 | -0.01925267 | 0.01416772 | 0.95148687 |

Denklem 2.3.58 ileri doğru izotropik saçılma için yazıldığında $z_0$;

$$z_0 = \frac{D}{3(1-\alpha)^{3/2}} \tag{2.3.60}$$

şeklinde elde edilir. $P_7$-yaklaşımı için $\alpha$'nın çeşitli değerlerinde bulunan $z_0$ değerleri çizelge 2.10'da yer almaktadır.

Çizelge 2.10 $P_7$-yaklaşımında ileri doğru saçılma ile izotropik saçılma için bulunan $z_0$ değerleri

| $\alpha$ | **$z_0$** |
|---|---|
| 0,2 | 0.88649555 |
| 0,4 | 1.18199406 |
| 0,6 | 1.77299109 |
| 0,8 | 3.54598219 |

**(iii) Geriye doğru saçılma ile izotropik saçılma**

$a = 1 - \alpha$, $b = 0$, $d = \alpha$ olduğundan $q = \left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^{1/2}$ elde edilir (Erdoğan and Tezcan 1995). $\alpha$'nın çeşitli değerleri için Mathematica 5.0 programı ile hesaplanan A, B, C, D sabitlerinin değerleri çizelge 2.11'de verilmiştir.

Çizelge 2.11 $P_7$-yaklaşımında geriye doğru saçılma ile izotropik saçılma için bulunan A, B, C, D değerleri

| $\alpha$ | **A** | **B** | **C** | **D** |
|---|---|---|---|---|
| 0,2 | 0.01487238 | -0.04212004 | 0.03125070 | 1.91419430 |
| 0,4 | 0.01412001 | -0.03976485 | 0.02976814 | 1.66805106 |
| 0,6 | 0.01269788 | -0.03552201 | 0.02687535 | 1.37164974 |
| 0,8 | 0.01008115 | -0.02794326 | 0.02145303 | 0.97901120 |

Denklem 2.3.58 geriye doğru izotropik saçılma için yazıldığında $z_0$;

$$z_0 = \frac{D}{3(1-\alpha^2)^{1/2}(1+\alpha)^{1/2}} \tag{2.3.61}$$

elde edilir. $P_7$-yaklaşımı için $\alpha$'nın çeşitli değerlerinde bulunan $z_0$ değerleri ise çizelge 2.12'de yer almaktadır.

Çizelge 2.12 $P_7$-yaklaşımında geriye doğru saçılma ile izotropik saçılma için bulunan $z_0$ değerleri

| $\alpha$ | $z_0$ |
|---|---|
| 0,2 | 0.59448174 |
| 0,4 | 0.51272492 |
| 0,6 | 0.45182681 |
| 0,8 | 0.40539548 |

**2.4 $P_9$-Yaklaşımı**

$P_9$–yaklaşımında c=1 için, $\psi_1 = -1$ varsayılarak $\Phi_0$, $\Phi_1$, $\Phi_2$, $\Phi_3$, $\Phi_4$, $\Phi_5$, $\Phi_6$, $\Phi_7$, $\Phi_8$ ve $\Phi_9$'un değerleri bulunur. 2.3 numaralı denklemden yararlanılarak $k$ = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 için aşağıdaki denklemler yazılır:

$k$= 0 için $$\frac{d}{dz}\Phi_1 + (1-\delta_{00})\,\Phi_0 = 0 \tag{2.4.1}$$

$k$= 1 için $$2\frac{d}{dz}\Phi_2 + \frac{d}{dz}\Phi_0 + 3\,(1-\delta_{10})\,\Phi_1 = 0 \tag{2.4.2}$$

$k$= 2 için $$3\frac{d}{dz}\Phi_3 + 2\frac{d}{dz}\Phi_1 + 5\,(1-\delta_{20})\,\Phi_2 = 0 \tag{2.4.3}$$

$k$= 3 için $$4\frac{d}{dz}\Phi_4 + 3\frac{d}{dz}\Phi_2 + 7\,(1-\delta_{30})\;\Phi_3 = 0 \qquad (2.4.4)$$

$k$= 4 için $$5\frac{d}{dz}\Phi_5 + 4\frac{d}{dz}\Phi_3 + 9\,(1-\delta_{40})\;\Phi_4 = 0 \qquad (2.4.5)$$

$k$= 5 için $$6\frac{d}{dz}\Phi_6 + 5\frac{d}{dz}\Phi_4 + 11\,(1-\delta_{50})\;\Phi_5 = 0 \qquad (2.4.6)$$

$k$= 6 için $$7\frac{d}{dz}\Phi_7 + 6\frac{d}{dz}\Phi_5 + 13\,(1-\delta_{60})\;\Phi_6 = 0 \qquad (2.4.7)$$

$k$= 7 için $$8\frac{d}{dz}\Phi_8 + 7\frac{d}{dz}\Phi_6 + 15\,(1-\delta_{70})\;\Phi_7 = 0 \qquad (2.4.8)$$

$k$= 8 için $$9\frac{d}{dz}\Phi_9 + 8\frac{d}{dz}\Phi_7 + 17\,(1-\delta_{80})\;\Phi_8 = 0 \qquad (2.4.9)$$

$k$= 9 için $$10\frac{d}{dz}\Phi_{10} + 9\frac{d}{dz}\Phi_8 + 19\,(1-\delta_{90})\;\Phi_9 = 0 \qquad (2.4.10)$$

$\frac{d}{dz}\Phi_{10} = 0$, $\delta_{10}$, $\delta_{20}$, $\delta_{30}$, $\delta_{40}$, $\delta_{50}$, $\delta_{60}$, $\delta_{70}$, $\delta_{80}$, $\delta_{90} = 0$ ve $\delta_{00} = 1$ alınarak denklemler düzenlendiğinde;

$$\frac{d\Phi_1}{dz} = 0 \qquad (2.4.11)$$

$$2\,\frac{d\Phi_2}{dz} + \frac{d\Phi_0}{dz} + 3\,\Phi_1 = 0 \qquad (2.4.12)$$

$$3\frac{d\Phi_3}{dz}+2\frac{d\Phi_1}{dz}+5\,\Phi_2=0 \tag{2.4.13}$$

$$4\frac{d\Phi_4}{dz}+3\frac{d\Phi_2}{dz}+7\,\Phi_3=0 \tag{2.4.14}$$

$$5\frac{d\Phi_5}{dz}+4\frac{d\Phi_3}{dz}+9\,\Phi_4=0 \tag{2.4.15}$$

$$6\frac{d\Phi_6}{dz}+5\frac{d\Phi_4}{dz}+11\,\Phi_5=0 \tag{2.4.16}$$

$$7\frac{d\Phi_7}{dz}+6\frac{d\Phi_5}{dz}+13\,\Phi_6=0 \tag{2.4.17}$$

$$8\frac{d\Phi_8}{dz}+7\frac{d\Phi_6}{dz}+15\,\Phi_7=0 \tag{2.4.18}$$

$$9\frac{d\Phi_9}{dz}+8\frac{d\Phi_7}{dz}+17\,\Phi_8=0 \tag{2.4.19}$$

$$9\frac{d\Phi_8}{dz}+19\,\Phi_9=0 \tag{2.4.20}$$

olur. $\psi_1$ = -1 kabul edildiğinden 2.5 numaralı denklem yardımıyla $\Phi_1$;

$$\Phi_1=-(1-b+d)^{1/2} \tag{2.4.21}$$

olarak elde edilir.

$$\Phi_8 = Ae^{-\alpha_1 z} + Be^{-\alpha_2 z} + Ce^{-\alpha_3 z} + De^{-\alpha_4 z} \tag{2.4.22}$$

olarak alınıp denklem 2.4.20'de yerine yazıldığında;

$$\Phi_9 = \frac{9}{19}\alpha_1\, A\, e^{-\alpha_1 z} + \frac{9}{19}\alpha_2\, B\, e^{-\alpha_2 z} + \frac{9}{19}\alpha_3\, C\, e^{-\alpha_3 z} + \frac{9}{19}\alpha_4\, D\, e^{-\alpha_4 z} \tag{2.4.23}$$

şeklindeki denklem elde edilir. Denklem 2.4.19'da $\Phi_8$ ve $\Phi_9$'un değerleri yerine yazıldığında;

$$\Phi_7 = k_1\, A\, e^{-\alpha_1 z} + k_2\, B\, e^{-\alpha_2 z} + k_3\, C\, e^{-\alpha_3 z} + k_4\, D\, e^{-\alpha_4 z} \tag{2.4.24}$$

olarak elde edilir (Erdoğan and Tezcan 1995). Burada;

$$k_1 = \frac{17}{8\alpha_1} - \frac{81\alpha_1}{152} \tag{2.4.25}$$

$$k_2 = \frac{17}{8\alpha_2} - \frac{81\alpha_2}{152} \tag{2.4.26}$$

$$k_3 = \frac{17}{8\alpha_3} - \frac{81\alpha_3}{152} \tag{2.4.27}$$

$$k_4 = \frac{17}{8\alpha_4} - \frac{81\alpha_4}{152} \tag{2.4.28}$$

şeklinde alınmıştır. Denklem 2.4.18'de $\Phi_7$ ve $\Phi_8$'in değerleri yerine yazıldığında;

$$\Phi_6 = l_1\, A\, e^{-\alpha_1 z} + l_2\, B\, e^{-\alpha_2 z} + l_3\, C\, e^{-\alpha_3 z} + l_4\, D\, e^{-\alpha_4 z} \tag{2.4.29}$$

bulunur (Erdoğan and Tezcan 1995). Burada;

$$l_1 = \frac{15k_1}{7\alpha_1} - \frac{8}{7} \tag{2.4.30}$$

$$l_2 = \frac{15k_2}{7\alpha_2} - \frac{8}{7} \tag{2.4.31}$$

$$l_3 = \frac{15k_3}{7\alpha_3} - \frac{8}{7} \tag{2.4.32}$$

$$l_4 = \frac{15k_4}{7\alpha_4} - \frac{8}{7} \tag{2.4.33}$$

olarak alınmıştır. Denklem 2.4.17'de $\Phi_6$ ve $\Phi_7$'nin değerleri yerine yazıldığında;

$$\Phi_5 = s_1\, A\, e^{-\alpha_1 z} + s_2\, B\, e^{-\alpha_2 z} + s_3\, C\, e^{-\alpha_3 z} + s_4\, D\, e^{-\alpha_4 z} \tag{2.4.34}$$

şeklinde bir denklem elde edilir (Erdoğan and Tezcan 1995). Burada;

$$s_1 = \frac{13l_1}{6\alpha_1} - \frac{7k_1}{6} \tag{2.4.35}$$

$$s_2 = \frac{13l_2}{6\alpha_2} - \frac{7k_2}{6} \tag{2.4.36}$$

$$s_3 = \frac{13 l_3}{6\alpha_3} - \frac{7k_3}{6} \tag{2.4.37}$$

$$s_4 = \frac{13 l_4}{6\alpha_4} - \frac{7k_4}{6} \tag{2.4.38}$$

şeklinde alınmıştır. Denklem 2.4.16'da $\Phi_5$ ve $\Phi_6$ 'nın değerleri yerine yazıldığında;

$$\Phi_4 = t_1\, A\, e^{-\alpha_1 z} + t_2\, B\, e^{-\alpha_2 z} + t_3\, C\, e^{-\alpha_3 z} + t_4\, D\, e^{-\alpha_4 z} \tag{2.4.39}$$

olarak bulunur (Erdoğan and Tezcan 1995). Burada;

$$t_1 = \frac{11 s_1}{5\alpha_1} - \frac{6 l_1}{5} \tag{2.4.40}$$

$$t_2 = \frac{11 s_2}{5\alpha_2} - \frac{6 l_2}{5} \tag{2.4.41}$$

$$t_3 = \frac{11 s_3}{5\alpha_3} - \frac{6 l_3}{5} \tag{2.4.42}$$

$$t_4 = \frac{11 s_4}{5\alpha_4} - \frac{6 l_4}{5} \tag{2.4.43}$$

olarak alınmıştır. Denklem 2.4.15'de $\Phi_4$ ve $\Phi_5$ 'in değerleri yerine yazıldığında;

$$\Phi_3 = p_1\, A\, e^{-\alpha_1 z} + p_2\, B\, e^{-\alpha_2 z} + p_3\, C\, e^{-\alpha_3 z} + p_4\, D\, e^{-\alpha_4 z} \tag{2.4.44}$$

şeklindeki denklem elde edilir (Erdoğan and Tezcan 1995). Burada;

$$p_1 = \frac{9t_1}{4\alpha_1} - \frac{5s_1}{4} \tag{2.4.45}$$

$$p_2 = \frac{9t_2}{4\alpha_2} - \frac{5s_2}{4} \tag{2.4.46}$$

$$p_3 = \frac{9t_3}{4\alpha_3} - \frac{5s_3}{4} \tag{2.4.47}$$

$$p_4 = \frac{9t_4}{4\alpha_4} - \frac{5s_4}{4} \tag{2.4.48}$$

şeklinde alınmıştır. Denklem 2.4.14'de $\Phi_3$ ve $\Phi_4$'ün değerleri yerine yazıldığında;

$$\Phi_2 = r_1 A e^{-\alpha_1 z} + r_2 B e^{-\alpha_2 z} + r_3 C e^{-\alpha_3 z} + r_4 D e^{-\alpha_4 z} \tag{2.4.49}$$

olarak bulunur (Erdoğan and Tezcan 1995). Burada;

$$r_1 = \frac{7p_1}{3\alpha_1} - \frac{4t_1}{3} \tag{2.4.50}$$

$$r_2 = \frac{7p_2}{3\alpha_2} - \frac{4t_2}{3} \tag{2.4.51}$$

$$r_3 = \frac{7p_3}{3\alpha_3} - \frac{4t_3}{3} \tag{2.4.52}$$

$$r_4 = \frac{7p_4}{3\alpha_4} - \frac{4t_4}{3} \tag{2.4.53}$$

şeklinde alınmıştır. Denklem 2.4.12'de $\Phi_1$ ve $\Phi_2$'nin değerleri yerine yazıldığında;

$$\Phi_0 = 3z - 2\, r_1\, A\, e^{-\alpha_1 z} - 2\, r_2\, B\, e^{-\alpha_2 z} - 2\, r_3\, C\, e^{-\alpha_3 z} - 2\, r_4\, D\, e^{-\alpha_4 z} + E \tag{2.4.54}$$

olarak bulunur (Erdoğan and Tezcan 1995). Denklem 2.5'in yardımıyla denklem 2.4.21, 2.4.22, 2.4.23, 2.4.24, 2.4.29, 2.4.34, 2.4.39, 2.4.44, 2.4.49 ve 2.4.54;

$$\psi_0(x) = \left[3z + E - 2\, r_1\, A\, e^{-\alpha_1 z} - 2\, r_2\, B\, e^{-\alpha_2 z} - 2\, r_3\, C\, e^{-\alpha_3 z} - 2\, r_4\, D\, e^{-\alpha_4 z}\right] \Big/ n \tag{2.4.55}$$

$$\psi_1(x) = -1 \tag{2.4.56}$$

$$\psi_2(x) = \left[\, r_1\, A\, e^{-\alpha_1 z} + r_2\, B\, e^{-\alpha_2 z} + r_3\, C\, e^{-\alpha_3 z} + r_4\, D\, e^{-\alpha_4 z}\right] \Big/ n \tag{2.4.57}$$

$$\psi_3(x) = \left[\, p_1\, A\, e^{-\alpha_1 z} + p_2\, B\, e^{-\alpha_2 z} + p_3\, C\, e^{-\alpha_3 z} + p_4\, D\, e^{-\alpha_4 z}\right] \Big/ m \tag{2.4.58}$$

$$\psi_4(x) = \left[\, t_1\, A\, e^{-\alpha_1 z} + t_2\, B\, e^{-\alpha_2 z} + t_3\, C\, e^{-\alpha_3 z} + t_4\, D\, e^{-\alpha_4 z}\right] \Big/ n \tag{2.4.59}$$

$$\psi_5(x) = \left[\, s_1\, A\, e^{-\alpha_1 z} + s_2\, B\, e^{-\alpha_2 z} + s_3\, C\, e^{-\alpha_3 z} + s_4\, D\, e^{-\alpha_4 z}\right] \Big/ m \tag{2.4.60}$$

$$\psi_6(x) = \left[\, l_1\, A\, e^{-\alpha_1 z} + l_2\, B\, e^{-\alpha_2 z} + l_3\, C\, e^{-\alpha_3 z} + l_4\, D\, e^{-\alpha_4 z}\right] \Big/ n \tag{2.4.61}$$

$$\psi_7(x)=\left[\ k_1\ A\ e^{-\alpha_1 z}\ +\ k_2\ B\ e^{-\alpha_2 z}+\ k_3\ C\ e^{-\alpha_3 z}\ +\ k_4\ D\ e^{-\alpha_4 z}\right]\Big/ m \qquad (2.4.62)$$

$$\psi_8(x)=\left[\ A\ e^{-\alpha_1\ z}\ +\ B\ e^{-\alpha_2\ z}\ +\ C\ e^{-\alpha_3\ z}+\ D\ e^{-\alpha_4\ z}\right]\Big/ n \qquad (2.4.63)$$

$$\psi_9(x)=\left[\ 9\ \alpha_1\ A\ e^{-\alpha_1\ z}\ +\ 9\ \alpha_2\ B\ e^{-\alpha_2\ z}\ +\ 9\ \alpha_3\ C\ e^{-\alpha_3\ z}+\ 9\ \alpha_4\ D\ e^{-\alpha_4\ z}\right]\Big/ 19m$$

(2.4.64)

şekline dönüşür (Erdoğan and Tezcan 1995). Denklem 2.1.21 kullanılarak Marshak'ın 1. sınır koşulu uygulandığında;

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^1\begin{bmatrix}\psi_0(0)\ \mu\ P_0(\mu)+3\psi_1(0)\ \mu\ P_1(\mu)+\\ 5\ \psi_2(0)\ \mu\ P_2(\mu)+7\psi_3(0)\ \mu\ P_3(\mu)+\\ 9\psi_4(0)\ \mu\ P_4(\mu)+11\psi_5(0)\ \mu\ P_5(\mu)+\\ 13\psi_6(0)\ \mu\ P_6(\mu)+15\psi_7(0)\ \mu\ P_7(\mu)+\\ 17\psi_8(0)\ \mu\ P_8(\mu)+19\psi_9(0)\ \mu\ P_9(\mu)\end{bmatrix}d\mu=0 \qquad (2.4.65)$$

şeklindeki denklem elde edilir. Bilinen değerler yerine yazılıp denklem düzenlendiğinde;

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left[\frac{E-2r_1A-2r_2B-2r_3C-2r_4D}{n}\right]-1+\frac{5}{8}\left[\frac{r_1A+r_2B+r_3C+r_4D}{n}\right]-\\ &\frac{9}{48}\left[\frac{t_1A+t_2B+t_3C+t_4D}{n}\right]+\frac{13}{128}\left[\frac{l_1A+l_2B+l_3C+l_4D}{n}\right]-\\ &\frac{17}{256}\left[\frac{A+B+C+D}{n}\right]=0\end{aligned} \qquad (2.4.66)$$

şeklindeki denklem elde edilir ve denklem en sade haline getirildiğinde;

$$\sum_{i=1}^{4}\left[\left(-\frac{3}{8}\right)r_i-\left(\frac{9}{48}\right)t_i+\left(\frac{13}{128}\right)l_i-\frac{17}{256}\right]A_i+\frac{E}{2}-n=0 \tag{2.4.67}$$

şeklini alır (Erdoğan and Tezcan 1995). Bu denklem Marshak'ın 1. sınır koşulu uygulanarak elde edilen denklemdir.

Denklem 2.1.21 kullanılarak Marshak'ın 2. sınır koşulu uygulandığında;

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^1\begin{bmatrix}\psi_0(0)\ \mu^3\ P_0(\mu)+3\psi_1(0)\ \mu^3\ P_1(\mu)+\\ 5\,\psi_2(0)\ \mu^3\ P_2(\mu)+7\psi_3(0)\ \mu^3\ P_3(\mu)+\\ 9\psi_4(0)\ \mu^3\ P_4(\mu)+11\psi_5(0)\ \mu^3\ P_5(\mu)+\\ 13\psi_6(0)\ \mu^3\ P_6(\mu)+15\psi_7(0)\ \mu^3\ P_7(\mu)+\\ 17\psi_8(0)\ \mu^3\ P_8(\mu)+19\psi_9(0)\ \mu^3\ P_9(\mu)\end{bmatrix}d\mu=0 \tag{2.4.68}$$

elde edilir. Bilinen değerler yerine yazılıp denklem düzenlendiğinde;

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4}\left[\frac{E-2r_1A-2r_2B-2r_3C-2r_4D}{n}\right]-\frac{3}{5}+\frac{5}{8}\left[\frac{r_1A+r_2B+r_3C+r_4D}{n}\right]+\\ &\frac{14}{35}\left[\frac{p_1A+p_2B+p_3C+p_4D}{m}\right]+\frac{9}{64}\left[\frac{t_1A+t_2B+t_3C+t_4D}{n}\right]-\\ &\frac{13}{640}\left[\frac{l_1A+l_2B+l_3C+l_4D}{n}\right]+\frac{17}{2560}\left[\frac{A+B+C+D}{n}\right]=0\end{aligned} \tag{2.4.69}$$

olarak bulunur. Denklem en sade haline getirildiğinde;

$$\sum_{i=1}^{4}\left[\left(\frac{1}{8}\right)r_i+\left(\frac{14q}{35}\right)p_i+\left(\frac{9}{64}\right)t_i-\left(\frac{13}{640}\right)l_i+\left(\frac{17}{2560}\right)\right]A_i+\frac{E}{4}-\frac{3n}{5}=0 \tag{2.4.70}$$

denklem 2.4.70 elde edilir (Erdoğan and Tezcan 1995). Bu denklem Marshak'ın 2. sınır koşulu uygulanarak elde edilen denklemdir.

Denklem 2.1.21 kullanılarak Marshak'ın 3. sınır koşulu uygulandığında;

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^1 \begin{bmatrix} \psi_0(0)\ \mu^5\ P_0(\mu) + 3\psi_1(0)\ \mu^5\ P_1(\mu) + \\ 5\,\psi_2(0)\ \mu^5\ P_2(\mu) + 7\psi_3(0)\ \mu^5\ P_3(\mu) + \\ 9\psi_4(0)\ \mu^5\ P_4(\mu) + 11\psi_5(0)\ \mu^5\ P_5(\mu) + \\ 13\psi_6(0)\ \mu^5\ P_6(\mu) + 15\psi_7(0)\ \mu^5\ P_7(\mu) + \\ 17\psi_8(0)\ \mu^5\ P_8(\mu) + 19\psi_9(0)\ \mu^5\ P_9(\mu) \end{bmatrix} d\mu = 0 \tag{2.4.71}$$

olarak yazılır. Bilinen değerler yerine yazılıp denklem düzenlendiğinde;

$$\begin{aligned} &\frac{1}{6}\left[\frac{E-2r_1A-2r_2B-2r_3C-2r_4D}{n}\right]-\frac{3}{7}+\frac{5}{48}\left[\frac{r_1A+r_2B+r_3C+r_4D}{n}\right]+ \\ &\frac{28}{63}\left[\frac{p_1A+p_2B+p_3C+p_4D}{m}\right]+\frac{9}{32}\left[\frac{t_1A+t_2B+t_3C+t_4D}{n}\right]+ \\ &\frac{88}{693}\left[\frac{s_1A+s_2B+s_3C+s_4D}{m}\right]+\frac{13}{384}\left[\frac{l_1A+l_2B+l_3C+l_4D}{n}\right]- \\ &\frac{17}{5376}\left[\frac{A+B+C+D}{n}\right]=0 \end{aligned} \tag{2.4.72}$$

şeklindeki denklem elde edilir. Denklem düzenlenip en sade haline getirildiğinde;

$$\sum_{i=1}^{4}\left[\left(\frac{3}{16}\right)r_i+\left(\frac{28q}{63}\right)p_i+\left(\frac{9}{32}\right)t_i+\left(\frac{88q}{693}\right)s_i+\left(\frac{13}{384}\right)l_i-\frac{17}{5376}\right]A_i+\frac{E}{6}-\frac{3n}{7}=0 \tag{2.4.73}$$

elde edilir (Erdoğan and Tezcan 1995). Bu denklem Marshak'ın 3. sınır koşulu uygulanarak elde edilen denklemdir.

Denklem 2.1.21 kullanılarak Marshak'ın 4. sınır koşulu uygulandığında;

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^1 \begin{bmatrix} \psi_0(0)\ \mu^7\ P_0(\mu)+3\psi_1(0)\ \mu^7\ P_1(\mu)+ \\ 5\,\psi_2(0)\ \mu^7\ P_2(\mu)+7\psi_3(0)\ \mu^7\ P_3(\mu)+ \\ 9\psi_4(0)\ \mu^7\ P_4(\mu)+11\psi_5(0)\ \mu^7\ P_5(\mu)+ \\ 13\psi_6(0)\ \mu^7\ P_6(\mu)+15\psi_7(0)\ \mu^7\ P_7(\mu)+ \\ 17\psi_8(0)\ \mu^7\ P_8(\mu)+19\psi_9(0)\ \mu^7\ P_9(\mu) \end{bmatrix} d\mu = 0 \qquad (2.4.74)$$

şeklinde yazılır. Bilinen değerler yerine yazılıp denklem düzenlendiğinde;

$$\begin{aligned} &\frac{1}{8}\left[\frac{E-2r_1A-2r_2B-2r_3C-2r_4D}{n}\right]-\frac{1}{3}+\frac{7}{16}\left[\frac{r_1A+r_2B+r_3C+r_4D}{n}\right]+ \\ &\frac{14}{33}\left[\frac{p_1A+p_2B+p_3C+p_4D}{m}\right]+\frac{63}{192}\left[\frac{t_1A+t_2B+t_3C+t_4D}{n}\right]+ \\ &\frac{88}{429}\left[\frac{s_1A+s_2B+s_3C+s_4D}{m}\right]+\frac{13}{128}\left[\frac{l_1A+l_2B+l_3C+l_4D}{n}\right]+ \\ &\frac{16}{429}\left[\frac{k_1A+k_2B+k_3C+k_4D}{m}\right]+\frac{17}{2048}\left[\frac{A+B+C+D}{n}\right]=0 \end{aligned} \qquad (2.4.75)$$

elde edilir. Denklem düzenlenip en sade haline getirildiğinde;

$$\sum_{i=1}^{4}\left[\left(\frac{3}{16}\right)r_i+\left(\frac{14q}{33}\right)p_i+\left(\frac{63}{192}\right)t_i+\left(\frac{88q}{429}\right)s_i+\left(\frac{13}{128}\right)l_i+\left(\frac{16q}{429}\right)k_i+\left(\frac{17}{2048}\right)\right]A_i+\frac{E}{8}-\frac{n}{3}=0$$

(2.4.76)

elde edilir (Erdoğan and Tezcan 1995). Bu denklem Marshak'ın 4. sınır koşulu uygulanarak elde edilen denklemdir.

Denklem 2.1.21 kullanılarak Marshak'ın 5. sınır koşulu uygulandığında;

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^1 \begin{bmatrix} \psi_0(0)\ \mu^9\ P_0(\mu)+3\psi_1(0)\ \mu^9\ P_1(\mu)+ \\ 5\,\psi_2(0)\ \mu^9\ P_2(\mu)+7\psi_3(0)\ \mu^9\ P_3(\mu)+ \\ 9\psi_4(0)\ \mu^9\ P_4(\mu)+11\psi_5(0)\ \mu^9\ P_5(\mu)+ \\ 13\psi_6(0)\ \mu^9\ P_6(\mu)+15\psi_7(0)\ \mu^9\ P_7(\mu)+ \\ 17\psi_8(0)\ \mu^9\ P_8(\mu)+19\psi_9(0)\ \mu^9\ P_9(\mu) \end{bmatrix} d\mu = 0 \tag{2.4.77}$$

olarak yazılır. Bilinen değerler yerine yazılıp işlem düzenlendiğinde;

$$\begin{aligned} &\frac{1}{10}\left[\frac{E-2r_1A-2r_2B-2r_3C-2r_4D}{n}\right]+\frac{15}{40}\left[\frac{r_1A+r_2B+r_3C+r_4D}{n}\right]+ \\ &\frac{56}{143}\left[\frac{p_1A+p_2B+p_3C+p_4D}{m}\right]+\frac{27}{80}\left[\frac{t_1A+t_2B+t_3C+t_4D}{n}\right]-\frac{3}{11}+ \\ &\frac{176}{715}\left[\frac{s_1A+s_2B+s_3C+s_4D}{m}\right]+\frac{35}{256}\left[\frac{l_1A+l_2B+l_3C+l_4D}{n}\right]+ \\ &\frac{960}{12155}\left[\frac{k_1A+k_2B+k_3C+k_4D}{m}\right]+\frac{17}{512}\left[\frac{A+B+C+D}{n}\right]+ \\ &\frac{1152}{230945}\left[\frac{\alpha_1A+\alpha_2B+\alpha_3C+\alpha_4D}{m}\right]=0 \end{aligned} \tag{2.4.78}$$

şeklindeki denklem elde edilir. Denklem düzenlenip en sade haline getirildiğinde;

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{4}\left[\left(\frac{7}{40}\right)r_i+\left(\frac{56q}{143}\right)p_i+\left(\frac{27}{80}\right)t_i+\left(\frac{176q}{715}\right)s_i+\left(\frac{35}{256}\right)l_i+\left(\frac{960q}{12155}\right)k_i+\left(\frac{17}{512}\right)+\left(\frac{1152q}{230945}\right)\alpha_i\right]A_i+ \\ &\frac{E}{10}-\frac{3n}{11}=0 \end{aligned} \tag{2.4.79}$$

elde edilir (Erdoğan and Tezcan 1995). Bu denklem Marshak'ın 5. sınır koşulu uygulanarak elde edilen denklemdir. Burada $A_1 = A$, $A_2 = B$, $A_3 = C$, $A_4 = D$ olarak alınmıştır.

Denklem 2.4.13'de $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$ 'ün değerleri yerine yazılıp işlemler yapıldığında;

$$0,4662829\alpha_1^8 - 18,4125940\alpha_1^6 + 109,1651786\alpha_1^4 - 201,5171052\alpha_1^2 + 113,953125 = 0 \tag{2.4.80}$$

bağıntısı elde edilir. Burada $\alpha_1^2 = t$ alınıp denklem 2.4.80, Mathematica 5.0 programı yardımıyla çözüldüğünde; $t_1 = 1,1223837$, $t_2 = 1,6843210$, $t_3 = 3,9494809$, $t_4 = 32,7318467$ elde edilir. Buradan; $\alpha_1 = 1,059429$, $\alpha_2 = 1,297810$, $\alpha_3 = 1,987332$, $\alpha_4 = 5,721180$ olarak bulunur. Denklem 2.4.55 kullanılarak $z_0$ değeri;

$$z_0 = \frac{E}{3m\left[(1-b)^2 - d^2\right]^{1/2}} \tag{2.4.81}$$

olarak elde edilir. Denklem 2.4.67, 2.4.70, 2.4.73, 2.4.76 ve 2.4.79'un birlikte çözümü yapıldığında A, B, C, D ve E sabitlerinin değerleri farklı saçılma türleri için aşağıdaki gibi bulunur:

**(i) İzotropik saçılma**

$a = 1$, $b = d = 0$ olduğundan $q = 1$ elde edilir (Erdoğan and Tezcan 1995). A, B, C, D, E sabitlerinin Mathematica 5.0 programı ile hesaplanan değerleri çizelge 2.13'de verilmiştir.

Çizelge 2.13 $P_9$-yaklaşımında izotropik saçılma için bulunan A, B, C, D, E değerleri

| A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|
| 0.00704581 | -0.02004653 | 0.03318939 | -0.01770689 | 2.12888550 |

Denklem 2.4.81 izotropik saçılma için yazıldığında $z_0$;

$$z_0 = \frac{E}{3} \tag{2.4.82}$$

olarak bulunur. $P_9$-yaklaşımı için bulunan $z_0 =$ 0.70962850 şeklindedir.

**ii) İleri doğru saçılma ile izotropik saçılma**

$a = 1 - \alpha$, $b = \alpha$, $d = 0$ olduğundan $q = 1$ elde edilir (Erdoğan and Tezcan 1995). A, B, C, D, E sabitlerinin $\alpha$'nın çeşitli değerleri için Mathematica 5.0 programı kullanılarak hesaplanan değerleri çizelge 2.14'de verilmiştir.

Çizelge 2.14 $P_9$-yaklaşımında ileri doğru saçılma ile izotropik saçılma için bulunan A, B, C, D, E değerleri

| $\alpha$ | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| 0,2 | 0.00630196 | -0.01793016 | 0.02968549 | -0.01583752 | 1.90413307 |
| 0,4 | 0.00545766 | -0.01552797 | 0.02570839 | -0.01371570 | 1.64902762 |
| 0,6 | 0.00445616 | -0.01267854 | 0.02099081 | -0.01119882 | 1.34642541 |
| 0,8 | 0.00315098 | -0.00896507 | 0.01484275 | -0.00791876 | 0.95206654 |

Denklem 2.4.81 ileri doğru izotropik saçılma için yazıldığında $z_0$;

$$z_0 = \frac{E}{3(1-\alpha)^{3/2}} \tag{2.4.83}$$

elde edilir. $P_9$-yaklaşımı için $\alpha$'nın çeşitli değerlerinde bulunan $z_0$ değerleri çizelge 2.15'de yer almaktadır.

Çizelge 2.15 $P_9$-yaklaşımında ileri doğru saçılma ile izotropik saçılma için bulunan $z_0$ değerleri

| $\alpha$ | $z_0$ |
|---|---|
| 0,2 | 0.88703562 |
| 0,4 | 1.18271416 |
| 0,6 | 1.77407125 |
| 0,8 | 3.54814249 |

**(iii) Geriye doğru saçılma ile izotropik saçılma**

$a = 1 - \alpha$, $b = 0$, $d = \alpha$ olduğundan $q = \left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^{1/2}$ elde edilir (Erdoğan and Tezcan 1995). $\alpha$'nın çeşitli değerleri için Mathematica 5.0 programı ile hesaplanan A, B, C, D, E sabitlerinin değerleri çizelge 2.16'da yer almaktadır.

Çizelge 2.16 $P_9$-yaklaşımında geriye doğru saçılma ile izotropik saçılma için bulunan A, B, C, D, E değerleri

| $\alpha$ | **A** | **B** | **C** | **D** | **E** |
|---|---|---|---|---|---|
| 0,2 | 0.00694879 | -0.01958771 | 0.03261467 | -0.01737057 | 1.91533256 |
| 0,4 | 0.00661701 | -0.01846695 | 0.03093921 | -0.01644621 | 1.66899045 |
| 0,6 | 0.00597102 | -0.01647086 | 0.02779690 | -0.01474049 | 1.37234372 |
| 0,8 | 0.00476200 | -0.01293101 | 0.02204084 | -0.01164815 | 0.97939682 |

Denklem 2.4.81 geriye doğru izotropik saçılma için yazıldığında $z_0$;

$$z_0 = \frac{E}{3(1-\alpha^2)^{1/2}(1+\alpha)^{1/2}} \tag{2.4.84}$$

olarak elde edilir. $P_9$-yaklaşımı için $\alpha$'nın çeşitli değerlerinde bulunan $z_0$ değerleri ise çizelge 2.17'de yer almaktadır.

Çizelge 2.17 $P_9$-yaklaşımında geriye doğru saçılma ile izotropik saçılma için bulunan $z_0$ değerleri

| $\alpha$ | $z_0$ |
|---|---|
| 0,2 | 0.59483525 |
| 0,4 | 0.51301367 |
| 0,6 | 0.45205540 |
| 0,8 | 0.40555516 |

Çizelge 2.18 İzotropik, ileriye doğru izotropik ve geriye doğru izotropik saçılmalar için bulunan $z_0$ değerleri

| | İzotropik saçılma için $z_0$ değerleri | İleriye doğru izotropik saçılma için $z_0$ değerleri | | | | Geriye doğru izotropik saçılma için $z_0$ değerleri | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $\alpha$ =0.2 | $\alpha$ =0.4 | $\alpha$ =0.6 | $\alpha$ =0.8 | $\alpha$ =0.2 | $\alpha$ =0.4 | $\alpha$ =0.6 | $\alpha$ =0.8 |
| $P_3$ | 0.67073268 | 0.83841585 | 1.11788780 | 1.67683169 | 3.35366339 | 0.55862080 | 0.47857357 | 0.41854765 | 0.37184671 |
| $P_5$ | 0,70820558 | 0,79179791 | 0,91428947 | 1,11977134 | 1,58359581 | 0.65030592 | 0.60581927 | 0.57075146 | 0.54322449 |
| $P_7$ | 0.70919644 | 0.88649555 | 1.18199406 | 1.77299109 | 3.54598219 | 0.59448174 | 0.51272492 | 0.45182681 | 0.40539548 |
| $P_9$ | 0.70962850 | 0.88703562 | 1.18271416 | 1.77407125 | 3.54814249 | 0.59483525 | 0.51301367 | 0.45205540 | 0.40555516 |

## 3. TARTIŞMA VE SONUÇ

Nötron transport denklemini çözmek için geliştirilmiş birçok yöntem vardır. Bu çalışmada, nötron transport denklemini çözmek için kullanılan ve nümerik bir yöntem olan $P_L$ Yöntemi incelenmiştir. Açısal dağılım için nötron transport denkleminin çözümü $P_L$ Yöntemiyle bulunmuştur. Bu yöntem akının sıfır olduğu yeri bulan Milne problemine uygulanmıştır. Kaynaksız yarı uzay ortamında nötron dağılımını belirlemek için genişletilmiş anizotropik saçılma çekirdeği kullanılmıştır. Bu çalışmada $P_3$, $P_5$, $P_7$ ve $P_9$ yaklaşımları ileri ve geri izotropik ve anizotropik saçılmalar için ayrı ayrı incelenmiştir. Bu incelemeler Mathematica 5.0 programıyla tamamlanmıştır. Bulunan $z_0$ değerleri beklentilerimize uygun elde edilmiştir. Denklem (2.1.35), (2.2.39), (2.3.58), (2.4.81)'den yararlanılarak extrapolasyon uzaklığı olan $z_0$'ın ileriye ve geriye doğru saçılmalar için sayısal değerleri hesaplanmıştır. $\alpha$'nın değeri arttıkça ileriye doğru saçılma durumunda $z_0$'ın değerinin arttığı, geriye doğru saçılma durumunda ise $z_0$'ın değerinin azaldığı görülmüştür. Ayrıca referans olarak verilen (Tezcan *et al.* 1999)'da, farklı c değerleri için bulunan $z_0$ değerleriyle, c=1 için bulduğumuz $z_0$ değerlerlerinin uyum içinde olduğu görüldü. Bu çalışma $P_L$ yöntemini kullanacak olan araştırmacılara iyi bir kaynak olacaktır.

**KAYNAKLAR**

Case K.M. and Zweifel P.F. 1967. Linear Transport Theory. Addison-Wesley Publishing Company. United States of America.

Bell G.I. and Glasstone S. 1970. Nuclear Reactor Theory. Van Nostrand Reinhold Company. United States of America.

Erdoğan F. and Tezcan C. 1995. The Milne Problem For Extremely Anisotropic Scattering With The $P_L$ Method. Vol.53, No.6, pp. 681-686

Benoist K. and Kavenoky A. 1968. A New Method of Approximation of The Boltzmann Equation. Nuclear Science and Engineering. 32, 225-232.

Davison B. 1958. Neutron Transport Theory, OUP. London.

İnönü E. 1973. Transp. Theory Statist. Phys. 3, 107.

İnönü E. 1976. Phys. Fluids 19, 1332.

Tezcan C. and Yıldız C. 1993. JQSRT 49, 411-416.

Tezcan C. and Yıldız C. 1993. II Nuova Cimento 106(8).

Tezcan C. 1977. Transp. Theory Statist. Phys. 6, 91.

Tezcan C. and Sever R.1986. Ann. Nucl. Energy 13, 223

Sıevert C.E. and Wıllıams M. M. R. 1977. J. Phys. D: Apply. Phys. 10, 2031.

Tezcan C., Kaşkaş A. and Güleçyüz M.Ç. 1999. The Singular Eigenfunction Method: The Milne Problem For Isotropic and extremely anisotropic scattering. J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer. 62 (1999) 49-57.

# ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Menend NAYMAN
Doğum Yeri : Ankara
Doğum Tarihi : 04 / 04 / 1981
Medeni Hali : Bekar
Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Fatih Sultan Mehmet Lisesi (1995-1998)

Lisans : Ankara Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Fizik Mühendisliği Bölümü (Eylül 2000- Şubat 2005)

Yüksek Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fizik Mühendisliği Anabilim Dalı (Eylül 2005- Şubat 2008)