

1.GİRİŞ

1.1.Konu ve Önemi

Kapalı yapılardan Elektromanyetik Dalga kırınım problemleri üzerine yapılan araştırmalar önem kazanmıştır. Tezin konusunu oluşturan eş eksenli olmayan disk sisteminin de dahil olduğu ilişkin problemlerin çözümünde modern kırınım teorisinin öngördüğü yöntemler iki ana gruba ayrılabilirler.

Moment yöntemi, sonlu farklar yöntemi gibi yöntemlerin dahil olduğu “direkt yöntemler” ilk grubu, integral dönüşümler ve değişkenlerine ayırıştırma yöntemlerine dayalı “sayısal-analitik yöntemler” ise ikinci grubu oluşturur.

Direkt yöntemler, probleme ilişkin yapılar karmaşıklaştıkça, çözüm sırasında altından kalkması güç sayısal kararsızlıklara neden olmaktadır. Bu durum, direkt yöntemler ile çözülemeyen ve ek olarak karmaşık analitik ve matematiksel çabalar gerektiren, düzlemsel veya dielektrik dairesel dalga klavuzlarındaki süreksizlik problemleri gibi, daha basit yapıdaki problemlerde de aynıdır [21].

İlk grubun, yani direkt yöntemlerin uygulandığı problemlerin çözümü sonucunda ulaşılan denklem sistemleri, birinci türden denklem sistemleridir. Sözkonusu sistemlerin ters almaya matrisin duyarlılığı* matrisin boyutu ile sınırlı kalmamaktadır. Bu durum ise sisteme ilişkin doğru çözümün, yuvarlama hatalarının etkisi ile tahrip olmasına neden olan bir etkidir.[22-23]. Dolayısıyla sayısal hesaplar oldukça büyük sistemler alındığında kararsızdırlar. Bu da yöntemin imkansızlıklarını ve kesinliğini güçlü biçimde sınırlar. Sayısal analitik yöntemler olarak adlandırılan ve tezde ele alınan yapıya uygulanması açıklanacak olan ikinci türden yöntemler, birinci grubun yukarıda belirtilen sakıncalarından bağımsızdır.

* Ters almaya matrisin duyarlılığı (condition number), matrisin ve tersinin normlarının çarpımı olarak tanımlanır.

Buradan itibaren “Analitik Regülerleştirme Yöntemleri” olarak anılacak bu yöntemler, sözkonusu kırımın problemini, matematiksel olarak esas sınır değer problemine denk düşen, ikinci türden fonksiyonel bir denkleme indirgemektedir. Bu yöntemin uygulandığı sistemin boyutu sonsuza gittiğinde sisteme ilişkin hal sayısının düzgün biçimde sınırlı kaldığı anlamına gelmektedir. Kesme yöntemi uygulanarak çözülecek sistemin bu özelliği, sadece sistemin boyutu sonsuz olduğundaki çözüme yakınsamayı değil, keyfi büyüklükte boyuta sahip lineer cebir sisteminin sayısal kararlılığında garantilemektedir.

Direkt yöntemlerle elde edilen sonuçlar genelde ilgili deney sonuçları ile sağlama yapılmasını gerektirir; ancak analitik regülerleştirme yöntemlerinin sonuçları, kullanılan sayısal işlemler aritmetik hata içermedikçe, ilgili deneyler için sağlama verisi oluşturarak, deneylerdeki hataların kaynağını belirlemeye yarar. Yöntemler arasındaki temel farklılıkta budur.

1.2 Tezin Amacı ve İçeriği

Eş eksenli olmayan iç içe iki farklı dielektrik diskten oluşan iki boyutlu sistemden saçılan skaler dalgalar Helmholtz dalga denklemini, sınır koşullarını ve Sommerfield radyasyon koşullarını sağlasın. Amaç yukarıdaki gibi bir geometriye sahip sisteme ilişkin birinci türden denklemlerin analitik regülerleştirme kullanılarak ikinci türden fonksiyonel bir denklem sistemine dönüştürülmesi, oluşan üç bölge için elektriksel alan ifadesinin bulunması ve son olarak uzak alan ifadelerinin çıkarılmasıdır.

1.2.1. Birinci Türden Bir Denklem Sistemine Ait Operatörün Regülerleştirilerek İkinci Türden Bir Denklem Elde Edilmesi İşleminin Tanımı

B, B_1, B_2 üç Hilbert uzayı ve A, L_0, R_0 (L_0^{-1}, R_0^{-1} mevcut ve sınırlı) bu uzaylar üzerinde şu ilişkilerle geçerli operatörler olsun.

$$A: B_1 \rightarrow B_2; L_0: B_2 \rightarrow B; R_0: B \rightarrow B_1;$$

Eğer H, B uzayında kompakt bir operatör ise; $L_0 A R_0 = I + H; (H: B \rightarrow B)$ yazılabiliyorsa, (L_0, R_0) çifti iki-yanlı regülerleştiriciler olarak tanımlanır.

$$Ax = b \quad (x \in B_1, b \in B_2)$$

Kırınım teorisinde analitik regülerleştirme yöntemi, kırınım sınır değer problemlerine ilişkin sınır değer problemini, problemin ilişkin fiziksel anlamını kesin olarak yansıtan iki yanlı regülerleştiricinin (L_0, R_0 çifti) analitik olarak yapılandırma tekniğidir.

1.2.2. Birinci ve İkinci Türden Denklemlerin Sayısal Kesme Yöntemi Bakımından Karşılaştırılması

Birinci ve ikinci türden denklemlerin sayısal kesme yöntemi bakımından karşılaştırılması.

Tablo 1.1. 1. ve 2. Türden Denklemlerin Sayısal Kesme Yöntemi Bakımından Karşılaştırılması

SORULAR (N: sistemin boyutu, v_N : hal sayısı)	Birinci Türden Sistemler $Ax = b$ (x : sistemin gerçek çözümü, x_N : N boyutlu sistemin çözümü, $\ C\ $: C'nin normu)	İkinci Türden Sistemler $(I + H)x = b$ (x : sistemin gerçek çözümü, x_N : N boyutlu sistemin çözümü, $\ C\ $: C'nin normu)
$\lim_{N \rightarrow \infty} x_N \rightarrow x?$	Genelde HAYIR (EVET varsayılarak 2. Soru sorulur)	EVET
$\lim_{N \rightarrow \infty} v_N \leq \text{sabit}$	$v_\infty = \ A\ \cdot \ A\ ^{-1}$ HAYIR	$v_\infty = \ (I + H)\ \cdot \ (I + H)\ ^{-1}$ EVET

1.2.3. Kullanılan Notasyon

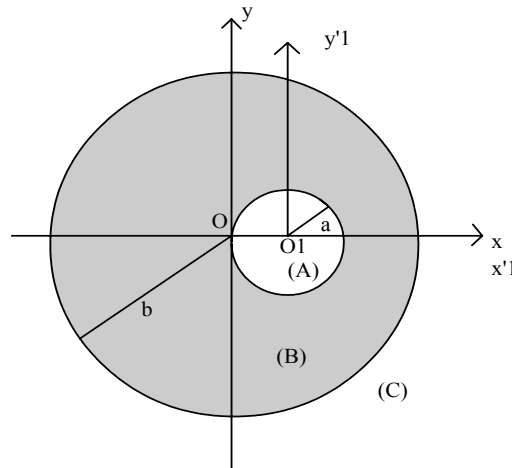
Bu tezde kullanılan notasyon, yaygın olarak kullanılan standart notasyon olduğundan ayrıca belirtilmesine gerek duyulmamaktadır. Bununla beraber yeni tanımlandığı düşünülen bir terim için gerekli açıklamalar kullanıldığı yerde yapılacaktır.

2. PROBLEMİN FORMÜLASYONU VE ALAN İFADELERİ

2.1. Geometrik Tanım

XOY en temel koordinat sistemi x, y ise bu koordinat sistemine ait koordinatlar, silindirik sistemde ise karşılıkları r, φ olsun. O noktası XOY koordinat sisteminin orijini aynı zamanda ise yarıçapı b olan diskin merkezi olsun.

O_1 noktası ise silindirik koordinat sisteminde (d, α) koordinatlarına sahip ve aynı zamanda yarıçapı a olan diskin orijini olsun. O_1 noktası aynı zamanda $X_1O_1Y_1$ koordinat sisteminin ve x_1, y_1 koordinatlarının orijini olsun. O_1X_1 doğrusu OO_1 üzerinde olsun; $\angle x'ox$ açısı α olarak isimlendirilir, O_1Y_1 ise $\angle y'oy = \alpha$ olacak şekilde seçilmiştir. Özetle $X_1O_1Y_1$; XOY koordinat sisteminin OO_1 kadar ötelenmiş ve α kadar döndürülmüş yeni bir versiyonudur. Tüm bu tanımlamalar ışığında sistem üç ayrı bölgeden oluşmaktadır (şekil 2.1);



Şekil 2.1 Kartezyen Sistemde Problemin Geometrik Gösterimi

A bölgesi: $\{p=(\tau_1, \varphi_1) : \tau_1 < a\}$

B bölgesi: $\{p=(\tau, \varphi) = (\tau_1, \varphi_1) : \tau_1 > a \wedge \tau < b\}$

C bölgesi: $\{p=(\tau, \varphi) : \tau > b\}$

p düzlemde (τ_1, φ_1) ve/veya (τ, φ) koordinatlarına sahip ve sırasıyla O_1 ve O merkezlidir.

A, B ve C bölgeleri ε_A, μ_A ve ε_B, μ_B ve ε_C, μ_C elektriksel parametrelerine sahip homojen ve isotropic malzemeden oluştuğu varsayılmaktadır.

2.2. Bölgelere İlişkin Elektriksel Alan Tanımlamaları

Boşluk için yazılan Maxwell eşitliğini;

$$\text{rot}E = i\omega H, \text{rot}H = -i\omega E \quad (2.1)$$

ele alırsak kolayca görüleceği gibi en bilinen durum için E_z elektromanyetik bileşenlerin üretici fonksiyonu olarak adlandırılabilir ve tüm elektromanyetik bileşenler E_z cinsinden ifade edilebilir [24]. Zamana bağımlılık ise seçilen $\exp(i\omega t)$ ifadesi ile gösterilecektir.

$$E_\rho = E_\varphi = H_z = 0 \quad (2.2)$$

$$H_\varphi = \frac{i}{\omega\mu} \frac{\partial E_z}{\partial \rho}; H_\rho = -\frac{i}{\omega\mu} \frac{1}{\tau} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} \quad (2.3)$$

E_z aynı zamanda homojen (skaler) Helmholtz denkleminin çözümüdür.

$$(\Delta + k^2)E_z = 0 \quad (2.4)$$

$k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$ ise ε ve μ parametrelerine sahip Elektromanyetik dalganın dalga sayısı şeklinde ifade edilir. (2.4) denkleminde göre $E_z = E_z(\tau, \varphi)$ (2.5) deki gibi kolayca ifade edilebilir.

$$E_z(\tau, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{u_n J_n(k\tau) + v_n H_n^{(1)}(k\tau)\} e^{in\varphi} \quad (2.5)$$

burada u_n ve v_n katsayılar, $J_n(k\tau)$ ve $H_n^{(1)}(k\tau)$ ise sırasıyla Bessel ve Hankel fonksiyonlarını ifade etmektedir. Temel varsayımlarımıza göre gelen dalganın z bileşeni $\tau = 0$ noktasında sürekli olan ve (2.6) daki gibi ifade edilen bir haldedir.

$$E_z^{(i)}(\tau, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_n J_n(k_c \tau) e^{in\varphi} \quad (2.6)$$

(2.6) denkleminde bulunan λ_n bilinen bir katsayıdır. (2.6) ve (2.3) den yararlanılarak $H_\varphi^{(i)}$ bileşenide (2.7) denkleminde olduğu gibi ifade edilebilir.

$$H_\varphi^{(i)} = \frac{ik_c}{\omega\mu_c} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_n J_n'(k_c \tau) e^{in\varphi} \quad (2.7)$$

(2.7) denkleminde bulunan $J_n'(z)$, $J_n(z)$ ile ifade edilen Bessel fonksiyonunun argümanına göre türevidir. En genel halde A,B ve C bölgeleri için saçılan alan ifadesinin E_z bileşenleri;

$$E_z^{(A)}(p) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n J_n(k_A \tau_1) e^{in\varphi_1}, p = (\tau_1, \varphi_1), \tau_1 \leq a \quad (2.8)$$

$$E_z^{(C)}(p) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n H_n^{(1)}(k_C \tau) e^{in\varphi}, p = (\tau, \varphi), \tau \geq b \quad (2.9)$$

$$E_z^{(B)}(p) = E_z^{(B,A)}(p) + E_z^{(B,C)}(p), p = (\tau, \varphi) = (\tau_1, \varphi_1) \in B \quad (2.10)$$

$$E_z^{(B,A)}(p) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n H_n^{(1)}(k_B \tau_1) e^{in\varphi_1}, p = (\tau_1, \varphi_1) \in B \quad (2.11)$$

$$E_z^{(B,C)}(p) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n J_n(k_B \tau) e^{in\varphi}, p = (\tau, \varphi) \in B \quad (2.12)$$

Green teoremi ve Hankel fonksiyonları için Graf teoremi [3] kullanılarak kolayca gösterilebilir ki homojen Helmholtz denkleminin çözümleri (2.8) – (2.12) denklemleri ile ifade edilebilir. (2.8) – (2.12) denklemlerinde bulunan A_n, B_n, C_n ve D_n katsayıları kırınım probleminin çözülmesi için gerekli olan ve bulunması gerekli katsayılardır. Sınır koşullarının sağlanma durumları için dalga fonksiyonlarını (τ, φ) ve (τ_1, φ_1) koordinatlarına göre iki şekilde bulmak gereklidir.

2.3 Graf Teoremine Göre Saçılan Alan İfadeleri

B bölgesi için saçılan alan ifadesini (τ', φ') and (τ, φ) koordinatlarına sahip silindirik koordinat sistemi için yazılmalıdır. Denklem (2.10) – (2.12) ve Graf teoremi kullanılarak denklemler yeniden yazılır ise;

$$\begin{aligned} E_z^{(B,A)} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n H_n^{(1)}(k_B \tau_1) e^{in\varphi_1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \sum_{s=-\infty}^{\infty} e^{-i(s-n)\alpha} J_{s-n}(k_B \tau) e^{is\varphi} \\ &= \sum_{s=-\infty}^{\infty} e^{is\varphi} H_s^{(1)}(k_B \tau) \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{-i(s-n)\alpha} J_{s-n}(k_B d) = \\ &= \sum_{s=-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{-i(s-n)\alpha} J_{s-n}(k_B d) \right\} H_s^{(1)}(k_B \tau) e^{is\varphi} \end{aligned} \quad (2.13)$$

sonuç olarak (2.11) denklemini için;

$$E_z^{(B,A)}(p) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{-i(s-n)\alpha} J_{s-n}(k_B d) \right\} H_s^{(1)}(k_B \tau) e^{is\varphi} \quad (2.14)$$

elde edilebilir;

$$\begin{aligned} E_z^{(B,C)} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n J_n(k_B \tau) e^{in\varphi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n \sum_{s=-\infty}^{\infty} e^{i(n-s)\alpha} J_{n-s}(k_B d) J_s(k_B \tau_1) e^{is\varphi_1} \\ &= \sum_{s=-\infty}^{\infty} J_s(k_B \tau_1) e^{is\varphi_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n J_{n-s}(k_B d) e^{i(n-s)\alpha} = \\ &= \sum_{s=-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n e^{-i(n-s)\alpha} J_{n-s}(k_B d) \right\} J_s(k_B \tau_1) e^{is\varphi_1} \end{aligned} \quad (2.15)$$

aynı şekilde (2.12) denklemi için;

$$E_z^{(B,C)}(p) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n e^{-i(n-s)\alpha} J_{n-s}(k_B d) \right\} J_s(k_B \tau_1) e^{is\varphi_1} \quad (2.16)$$

elde edilebilir. (2.14) ve (2.16) denklemlerini sadeleştirmek amacıyla;

$$\beta_s = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n e^{i(n-s)\alpha} J_{n-s}(k_B d) \quad (2.17)$$

$$\gamma_s = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{-i(s-n)\alpha} J_{s-n}(k_B d) \quad (2.18)$$

ifadeleri tanımlanır. Bu ifadeler (2.14) ve (2.16) ifadelerinde kullanılırlar ise elektrik alan için;

$$E_z^{(B,A)}(\tau, \varphi) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \gamma_s H_s^{(1)}(k_B \tau) e^{is\varphi} \quad (2.19)$$

$$E_z^{(B,C)}(\tau_1, \varphi_1) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \beta_s J_s(k_B \tau_1) e^{is\varphi_1} \quad (2.20)$$

denklemleri, magnetik alan için ise;

$$H_\varphi^{(B,A)}(\tau, \varphi) = \frac{ik_B}{\omega\mu_B} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \gamma_s H_s^{(1)'}(k_B \tau) e^{is\varphi} \quad (2.21)$$

$$H_{\varphi_1}^{(B,C)}(\tau_1, \varphi_1) = \frac{ik_B}{\omega\mu_B} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \beta_s J_s'(k_B \tau_1) e^{is\varphi_1} \quad (2.22)$$

denklemleri elde edilir. (2.10) – (2.12) ve (2.19) – (2.22) denklemleri toplu halde ele alınırsa

$$E_z^{(B)}(p) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} B_s J_s(k_B \tau) e^{is\varphi} + \sum_{s=-\infty}^{\infty} \gamma_s H_s^{(1)}(k_B \tau) e^{is\varphi} \quad (2.23)$$

$$E_z^{(B)}(p) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \beta_s J_s(k_B \tau_1) e^{is\varphi_1} + \sum_{s=-\infty}^{\infty} C_s H_s^{(1)}(k_B \tau_1) e^{is\varphi_1} \quad (2.24)$$

ve

$$H_{\varphi}^{(B)}(\tau, \varphi) = \frac{ik_B}{\omega\mu_B} \sum_{s=-\infty}^{\infty} B_s J_s'(k_B \tau) e^{is\varphi} + \frac{ik_B}{\omega\mu_B} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \gamma_s H_s^{(1)'}(k_B \tau) e^{is\varphi} \quad (2.25)$$

$$H_{\varphi_1}^{(B)}(\tau_1, \varphi_1) = \frac{ik_B}{\omega\mu_B} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \beta_s J_s'(k_B \tau_1) e^{is\varphi_1} + \frac{ik_B}{\omega\mu_B} \sum_{s=-\infty}^{\infty} C_s H_s^{(1)'}(k_B \tau_1) e^{is\varphi_1} \quad (2.26)$$

denklemleri elde edilir. (2.23) ve (2.10) – (2.12) formülleri toplu halde ele alınırsa (2.23) denkleminin deneysel olarak kararsız olduğu görülmektedir. Denklem sistemi büyüdükçe bu kararsızlık gittikçe artmaktadır, bu yüzden çözüm esnasında bulunan A_n, B_n, C_n ve D_n katsayıları ile B bölgesinde bulunan elektrik ve/veya magnetik alan hesap edilmek istenirse (2.10) – (2.12) denklem sistemini veya (2.24) denkleminin kullanılması önerilmektedir. Bu nedenle bundan sonraki hesaplamalarda her ne kadar aynı olarak simgelenselerde (2.24) formülü tercih edilecektir.

A ve C bölgeleri için ise;

$$H_{\varphi_1}^{(A)}(\tau_1, \varphi_1) = \frac{ik_A}{\omega\mu_A} \sum_{s=-\infty}^{\infty} A_s J_s'(k_A \tau_1) e^{is\varphi_1} \quad (\tau_1, \varphi_1) \in A \quad (2.27)$$

$$H_{\varphi}^{(C)}(\tau, \varphi) = \frac{ik_C}{\omega\mu_C} \sum_{s=-\infty}^{\infty} D_s H_s^{(1)'}(k_C \tau) e^{is\varphi} \quad (\tau, \varphi) \in C \quad (2.28)$$

ifadeleri yazılabilir.

3. SINIR KOŞULU İFADELERİ

Öncelikli olarak A bölgeleri için sınır koşullarını ele alacağız ($\tau_1 = a$)

$$E_z^{(A)}(a-0, \varphi_1) = E_z^{(B)}(a+0, \varphi_1); \varphi \in [0, 2\pi] \quad (3.1)$$

$$H_{\varphi_1}^{(A)}(a-0, \varphi_1) = H_{\varphi_1}^{(B)}(a+0, \varphi_1); \varphi \in [0, 2\pi] \quad (3.2)$$

(2.8) ve (2.23) denklemleri (3.1) denkleminin sağ ve sol yanlı olarak uygulanırsa (3.3) deki gibi bir sonuç verecektir.

$$\sum_{s=-\infty}^{\infty} A_s J_s(k_A a) e^{is\varphi_1} = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \beta_s J_s(k_B a) e^{is\varphi_1} + \sum_{s=-\infty}^{\infty} C_s H_s^{(1)}(k_B a) e^{is\varphi_1}; \varphi_1 \in [0, 2\pi] \quad (3.3)$$

(3.3) deki ifade en sade hali ile;

$$A_s J_s(k_A a) = C_s H_s^{(1)}(k_B a) + \beta_s J_s(k_B a); s = 0, \pm 1, \pm 2... \quad (3.4)$$

elde edilebilir. Aynı şekilde (2.28) ve (2.26) denklemleri (3.2) denkleminin sağ ve sol yanlı olarak uygulanırsa (3.5) deki gibi bir sonuç verecektir.

$$\begin{aligned} \frac{ik_A}{\omega\mu_A} \sum_{s=-\infty}^{\infty} A_s J_s'(k_A a) e^{is\varphi_1} &= \frac{ik_B}{\omega\mu_B} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \beta_s J_s'(k_B a) e^{is\varphi_1} \\ &+ \frac{ik_B}{\omega\mu_B} \sum_{s=-\infty}^{\infty} C_s H_s^{(1)'}(k_B a) e^{is\varphi_1}; \varphi_1 \in [0, 2\pi] \end{aligned} \quad (3.5)$$

(3.5) deki ifade en sade hali ile;

$$A_s \frac{k_A}{\mu_A} J_s'(k_A a) = \frac{k_B}{\mu_B} \beta_s J_s'(k_B a) + \frac{k_B}{\mu_B} C_s H_s^{(1)'}(k_B a); s = 0, \pm 1, \pm 2.. \quad (3.6)$$

İkinci olarak B bölgeleri için sınır koşullarını ele alalım ($\tau = b$)

$$E_z^{(B)}(b-0, \varphi) = E_z^{(i)}(b+0, \varphi) + E_z^{(i)}(b, \varphi); \varphi \in [0, 2\pi] \quad (3.7)$$

$$H_z^{(B)}(b-0, \varphi) = H_z^{(C)}(b+0, \varphi) + H_z^{(i)}(b, \varphi); \varphi \in [0, 2\pi] \quad (3.8)$$

(2.23), (2.9) ve (2.6) denklemleri (3.7) de sağ ve sol yanlı olarak uygulanırsa (3.9) daki gibi bir sonuç verecektir.

$$\begin{aligned} \sum_{s=-\infty}^{\infty} B_s J_s(k_B b) e^{is\varphi} + \sum_{s=-\infty}^{\infty} \gamma_s H_s^{(1)}(k_B b) e^{is\varphi} &= \\ \sum_{s=-\infty}^{\infty} D_s H_s^{(1)}(k_C b) e^{is\varphi} + \sum_{s=-\infty}^{\infty} \lambda_s J_s(k_C b) e^{is\varphi}; \varphi \in [0, 2\pi] \end{aligned} \quad (3.9)$$

(3.9) daki denklem en sade hali ile;

$$B_s J_s(k_B b) + \gamma_s H_s^{(1)}(k_B b) = D_s H_s^{(1)}(k_C b) + \lambda_s J_s(k_C b); s = 0, \pm 1, \pm 2.. \quad (3.10)$$

elde edilebilir. Aynı şekilde (2.25) , (2.7) ve (2.27) denklemleri (3.8) de sağ ve sol yanlı olarak uygulanırsa (3.11) deki gibi bir sonuç verecektir.

$$\frac{ik_B}{\omega\mu_B} \sum_{s=-\infty}^{\infty} [B_s J_s'(k_B b) + \gamma_s H_s^{(1)'}(k_B b)] e^{is\varphi} = \frac{ik_C}{\omega\mu_C} \sum_{s=-\infty}^{\infty} [D_s H_s^{(1)'}(k_C b) + \lambda_s J_s'(k_C b)] e^{is\varphi} ; \varphi \in [0, 2\pi] \quad (3.11)$$

(3.11) deki denklem en sade hali ile;

$$\frac{k_B}{\mu_B} [B_s J_s'(k_B b) + \gamma_s H_s^{(1)'}(k_B b)] = \frac{k_C}{\mu_C} [D_s H_s^{(1)'}(k_C b) + \lambda_s J_s'(k_C b)] \quad (3.12)$$

; $s = 0, \pm 1, \pm 2..$

şeklinde elde edilebilir.

4. KIRINIM PROBLEMİ İÇİN CEBİRSEL DENKLEM SİSTEMİ

4.1. Cebirsel Denklem Sisteminin Bulunması

(3.4), (3.6), (3.10) ve (3.12) denklemleri toplu halde şu şekildedir;

$$A_s J_s(k_A a) = C_s H_s^{(1)}(k_B a) + \beta_s J_s(k_B a) ; s = 0, \pm 1, \pm 2.. \quad (4.1)$$

$$A_s \frac{k_A}{\mu_A} J_s'(k_A a) = \frac{k_B}{\mu_B} J_s'(k_B a) + \frac{k_B}{\mu_B} C_s H_s^{(1)'}(k_B a) ; s = 0, \pm 1, \pm 2.. \quad (4.2)$$

$$B_s J_s(k_B b) + \gamma_s H_s^{(1)}(k_B b) = D_s H_s^{(1)}(k_C b) + \lambda_s J_s(k_C b) ; s = 0, \pm 1, \pm 2.. \quad (4.3)$$

$$\frac{k_B}{\mu_B} [B_s J_s'(k_B b) + \gamma_s H_s^{(1)'}(k_B b)] = \frac{k_C}{\mu_C} [D_s H_s^{(1)'}(k_C b) + \lambda_s J_s'(k_C b)] ; \quad (4.4)$$

$$s = 0, \pm 1, \pm 2..$$

(2.17) ve (2.18) denklemlerine göre (4.5) ve (4.6) aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\beta_s = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n e^{i(n-s)\alpha} J_{n-s}(k_B d) \quad (4.5)$$

$$\gamma_s = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{-i(s-n)\alpha} J_{s-n}(k_B d) \quad (4.6)$$

(4.5) ve (4.6) denklemleri (4.1) – (4.4) denklemlerine uygulanırsa A_s, B_s, C_s ve D_s gibi bilinmeyenlere sahip sonlu bir cebirsel denklem sistemi elde edilir. Elde edilen cebirsel denklem sistemi ise cebirsel yöntemler sayesinde kolayca çözülebilir. Öncelikli olarak elde edilen son denklem sisteminde A_s ve D_s katsayıları sadeleştirilerek denklem sistemi iki kat küçültülebilir. Bu amaçla (4.1) ve (4.2) denklemleri sırasıyla $\frac{k_A}{\mu_A} J_s'(k_A a)$ ve $J_s(k_A a)$ ifadeleri ile çarpılıp birbirlerinden çıkarılır ise (4.7) ifadesi elde edilir.

$$0 = \frac{k_A}{\mu_A} J_s'(k_A a) [C_s H_s^{(1)}(k_B a) + \beta_s J_s(k_B a)] - \quad (4.7)$$

$$J_s(k_A a) \left[\frac{k_B}{\mu_B} \beta_s J_s'(k_B a) + \frac{k_B}{\mu_B} C_s H_s^{(1)'}(k_B a) \right]$$

yeniden düzenlenirse;

$$\begin{aligned}
CS \left\{ \frac{k_A}{\mu_A} J_s'(k_A a) H_s^{(1)}(k_B a) - \frac{k_B}{\mu_B} J_s(k_A a) H_s^{(1)'}(k_B a) \right\} + \\
\beta_s \left\{ \frac{k_A}{\mu_A} J_s'(k_A a) J_s(k_B a) - \frac{k_B}{\mu_B} J_s(k_A a) J_s'(k_B a) \right\} = 0 ; s = 0, \pm 1, \pm 2..
\end{aligned} \quad (4.8)$$

elde edilir. Benzer olarak (4.3) ve (4.4) sırasıyla $\frac{k_C}{\mu_C} H_s^{(1)'}(k_C b)$ ve $H_s^{(1)}(k_C b)$ ifadesi ile çarpılıp birbirlerinden çıkarılır ise (4.9) ifadesi elde edilir.

$$\begin{aligned}
\frac{k_C}{\mu_C} H_s^{(1)'}(k_C b) [B_s J_s(k_B b) + \gamma_s H_s^{(1)}(k_B b)] - \\
H_s^{(1)}(k_C b) \frac{k_B}{\mu_B} [B_s J_s'(k_B b) + \gamma_s H_s^{(1)'}(k_B b)] = \\
\frac{k_C}{\mu_C} H_s^{(1)}(k_C b) \lambda_s J_s(k_C b) - H_s^{(1)}(k_C b) \frac{k_C}{\mu_C} \lambda_s J_s'(k_C b)
\end{aligned} \quad (4.9)$$

yeniden düzenlenirse;

$$\begin{aligned}
BS \left\{ \frac{k_C}{\mu_C} H_s^{(1)'}(k_C b) J_s(k_B b) - \frac{k_B}{\mu_B} H_s^{(1)}(k_C b) J_s'(k_B b) \right\} + \\
\gamma_s \left\{ \frac{k_C}{\mu_C} H_s^{(1)'}(k_C b) H_s^{(1)}(k_B b) - \frac{k_B}{\mu_B} H_s^{(1)}(k_C b) H_s^{(1)'}(k_B b) \right\} = \\
\frac{k_C}{\mu_C} \frac{2i}{\pi k_C b} \lambda_s ; s = 0, \pm 1, \pm 2..
\end{aligned} \quad (4.10)$$

elde edilebilir. Bu aşamadan sonra 4 bilinmeyenli 4 adet denklem yerine 2 bilinmeyenli 2 adet denklem çözülerek bilinmeyen A_s, B_s, C_s ve D_s katsayılarından B_s ve C_s kolayca bulunabilir. Bu işlemin yapılabilmesi için bir dizi tanımlama ve sadeleştirme işlemine başvurulabilir;

$$P_s \stackrel{def}{=} \frac{k_A}{\mu_A} J_s'(k_A a) H_s^{(1)}(k_B a) - \frac{k_B}{\mu_B} J_s(k_A a) H_s^{(1)'}(k_B a) \quad (4.11)$$

$$Q_s \stackrel{def}{=} \frac{k_A}{\mu_A} J_s'(k_A a) J_s(k_B a) - \frac{k_B}{\mu_B} J_s(k_A a) J_s'(k_B a) \quad (4.12)$$

$$R_s \stackrel{def}{=} \frac{k_C}{\mu_C} H_s^{(1)'}(k_C b) J_s(k_B b) - \frac{k_B}{\mu_B} H_s^{(1)}(k_C b) J_s'(k_B b) \quad (4.13)$$

$$T_s \stackrel{def}{=} \frac{k_C}{\mu_C} H_s^{(1)'}(k_C b) H_s^{(1)}(k_B b) - \frac{k_B}{\mu_B} H_s^{(1)}(k_C b) H_s^{(1)'}(k_B b) \quad (4.14)$$

(4.11) – (4.14) ifadeleri (4.8) ve (4.10) eşitliğinde bulunan ifadelerin kolayca anlaşılabilmesi ve regülarizasyon esnasında kolaylık sağlaması açısından

tanımlanmış değerlerdir. Sistemin $s \rightarrow \infty$ şekli ve küçük parametreler için asimtotik davranış gösterdiği bulunmuştur. Tezin devamında bu davranış incelenmeyecek ancak sonuç bölümünde sayısal örneklerle karşılaştırma yapılacaktır. (4.11) – (4.14) denklemleri, (4.8) ve (4.10) ifadeleri toplu halde yazılır ise temel cebirsel denklem sisteminin en basit hali elde edilmiş olur.

$$C_s P_s + Q_s \beta_s = 0 \quad (4.15)$$

$$T_s \gamma_s + B_s R_s = \frac{2i}{\mu_c \pi_b} \lambda_s \quad (4.16)$$

Çıkarılan asimtotik davranışlar kullanılarak bulunan (4.15) ve (4.16) cebirsel denklem sisteminin birinci tipte olduğu kolayca görülebilir.

$$\frac{T_s}{R_s} = \frac{s!(s-1)! \left(\frac{k_B b}{2}\right)^{-s} \left(\frac{k_C b}{2}\right)^{-s}}{\frac{i}{\pi b} \left(\frac{k_B b}{k_C b}\right)^s \left[\frac{1}{\mu_C} + \frac{1}{\mu_B}\right]} \left[1 + O(s^{-1})\right] = \quad (4.17)$$

$$- \frac{i}{\pi} \frac{\mu_C \mu_B}{\mu_C + \mu_B} s!(s-1)! \left(\frac{k_B b}{2}\right)^{-2s} \left[1 + O(s^{-1})\right]$$

$$\frac{P_s}{Q_s} = \frac{- \frac{i}{\pi a} \left(\frac{k_A a}{k_B a}\right)^s \left[\frac{1}{\mu_A} + \frac{1}{\mu_B}\right]}{\frac{1}{s!(s-1)!} \left(\frac{k_B a}{2}\right)^s \left(\frac{k_A a}{2}\right)^s \frac{1}{a} \left[\frac{1}{\mu_A} - \frac{1}{\mu_B}\right]} \left[1 + O(s^{-1})\right] = \quad (4.18)$$

$$- \frac{i}{\pi} \frac{\mu_B + \mu_A}{\mu_B - \mu_A} s!(s-1)! \left(\frac{k_B a}{2}\right)^{-2s} \left[1 + O(s^{-1})\right]$$

matris elemanlarının hızla büyümesi nedeni ile ise (4.15) ve (4.16) denklemleri P_s ve R_s değerlerine bölünerek çözülemez.

4.2. Cebirsel Denklem Sisteminin Regülerleştirilmesi

Denklem sisteminin düşük hata ile değişen boyutlarda daha doğru sonuçlar vermesi için giriş bölümünde de belirtildiği gibi regülerleştiriciler yardımı ile sistem ikinci tipten bir denkleme dönüştürülmelidir. Bu amaçla en iyi seçim olarak gösterilen $\rho_n^3(z)$ değeri en sağlıklı sonucu verir.

$$t_n(z) = \begin{cases} 1, & \text{if } 1 > |H_n^{(1)}(z)| \\ H_n^{(1)}(z), & 1 \leq |H_n^{(1)}(z)| \end{cases} \quad (4.19)$$

$$\rho_n^3(z) = -\frac{i}{\pi} \begin{cases} \frac{1}{z^{1/2} t_n(z)}, & |n| < |z| \\ \frac{1}{|n|^{1/2} t_n(z)}, & |n| \geq |z| \end{cases} \quad (4.20)$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu noktadan sonra $\rho_n^3(z)$ ifadesi $R_n^{\sim}(z)$ olarak ifade edilecektir. $R_n^{\sim}(z)$ fonksiyonuna ait bazı özellikler ise şu şekildedir;

$$\begin{cases} R_n^{\sim}(z) = \Lambda \frac{n^{1/2}}{n!} \left(\frac{z}{2}\right)^n [1 + O(n^{-1})], & n \rightarrow \infty \\ R_{-n}(z) = R_n^{\sim}(z) \end{cases} \quad (4.21)$$

(4.21) ifadesinde kullanılan Λ sabit değer olup hesaplanabilen bir değerdir. Bulunması gerekli olan A_s, B_s, C_s ve D_s katsayıları için;

$$d_n = D_n R_n^{-1}(k_C b) \quad (4.22)$$

$$a_n = A_n R_n^{\sim}(k_A a) \quad (4.23)$$

$$b_n = B_n R_n^{\sim}(k_B b) \quad (4.24)$$

$$c_n = C_n R_n^{-1}(k_B a) \quad (4.25)$$

ifadeleri yazılabilir. Bu ifadeler

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |d_n|^2 < \infty ; \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 < \infty \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} |b_n|^2 < \infty ; \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 < \infty \end{aligned} \quad (4.26)$$

şeklinde oldukları için l_2 uzayına dahil elemanlar olduğu görülebilir. Bu aşamadan sonra (4.15) ve (4.16) denklemleri ile belirttiğimiz birinci dereceden denklem sistemine Regülerleştiricileri uygulayarak ikinci dereceden bir denklem sistemi bulmaya çalışacağız (4.15) ifadesi (4.22) – (4.25) ifadeleri kullanılarak yeniden yazılır ise (4.27) ve (4.28) denklemleri elde edilir.

$$c_s \tilde{R}_s(k_B a) P_s + Q_s \beta_s = 0 \quad (4.27)$$

$$\beta_s = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n R_n^{-1}(k_B b) e^{i(n-s)\alpha} J^{n-s}(k_B d) \quad (4.28)$$

(4.11), (4.12) ve (4.21) denklemleri beraberce ele alınır ise (4.29) ve (4.30) ifadeleri elde edilir.

$$\tilde{R}_s(k_B a)P_s = -\frac{i}{\pi a} \frac{\mu_A + \mu_B}{\mu_A \mu_B} \tilde{R}_s(k_A a)[1 + O(s^{-1})] \quad (4.29)$$

$$Q_s = \frac{1}{a} \frac{\mu_B - \mu_A}{\mu_A \mu_B} \frac{1}{\Lambda^2} \tilde{R}_s(k_B a) \tilde{R}_s(k_A a)[1 + O(s^{-1})] \quad (4.30)$$

görüldüğü gibi (4.28) ve (4.29) da sağ yanda bulunan $\tilde{R}_s(k_A a)$ ifadesi $s \rightarrow \infty$ durumu için hızla sıfır değerine yakınsar bu yüzden (4.27) denkleminde bu değeri çıkarırsak ifadeyi stabil hale getirmiş oluruz. Bu amaçla (4.27) denkleminin her yanını (4.31) ifadesi ile çarparsak a ve $\frac{1}{a}$ olan boyut faktörleride ortadan kalkmış olur. Nihayi olarak (4.32) ve (4.33) tanımlamaları (4.27) de kullanılmak üzere yapılmış olur.

$$\frac{1}{-\frac{i}{\pi a} \frac{\mu_A + \mu_B}{\mu_A \mu_B} \tilde{R}_s(k_A a)} = i\pi a \frac{\mu_A \mu_B}{\mu_A + \mu_B} \tilde{R}_s^{-1}(k_A a) \quad (4.31)$$

$$\tilde{P}_s \stackrel{def}{=} i\pi a \frac{\mu_A \mu_B}{\mu_A + \mu_B} \tilde{R}_s^{-1}(k_A a) \tilde{R}_s(k_B a) P_s \quad (4.32)$$

$$\tilde{Q}_s \stackrel{def}{=} i\pi a \frac{\mu_A \mu_B}{\mu_A + \mu_B} \tilde{R}_s^{-1}(k_A a) \tilde{R}_s^{-1}(k_B a) Q_s \quad (4.33)$$

(4.32), (4.33) ve (4.28) denklemleri kullanılarak (4.27) denklemi (4.34) deki gibi yeniden yazılabilir.

$$c_s \tilde{P}_s + \tilde{Q}_s \tilde{R}_s(k_B a) \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \tilde{R}_n^{-1}(k_B b) e^{in(n-s)\alpha} J^{n-s}(k_B d) = 0 \quad (4.34)$$

(4.16) ifadesi (4.22) – (4.25) kullanılarak yeniden yazılır ise (4.35) ve (4.36) denklemleri elde edilir.

$$T_s \gamma_s + b_s \tilde{R}_s^{-1}(k_B b) R_s = \frac{2s}{\mu_c \pi b} \lambda_s \quad (4.35)$$

$$T_s \gamma_s + b_s \tilde{R}_s^{-1}(k_B b) R_s = \frac{2s}{\mu_c \pi b} \lambda_s \quad (4.36)$$

Yine aynı şekilde (4.13), (4.14) ve (4.21) ifadeleri beraberce ele alınırsa (4.37) ve (4.38) ifadeleri elde edilir.

$$\tilde{R}_s^{-1}(k_B b) R_s = \frac{i}{\pi b} \frac{\mu_B + \mu_C}{\mu_B \mu_C} \tilde{R}_s^{-1}(k_C b)[1 + O(s^{-1})] \quad (4.37)$$

$$T_s = \frac{1}{\pi^2 b} \frac{\mu_B - \mu_C}{\mu_B \mu_C} \frac{1}{\Lambda^2} \tilde{R}_s^{-1}(k_B b) \tilde{R}_s^{-1}(k_C b)[1 + O(s^{-1})] \quad (4.38)$$

görüldüğü gibi (4.37) ve (4.38) da sağ yanda bulunan $\tilde{R}_s^{-1}(k_c b)$ ifadesi $s \rightarrow \infty$ durumu için hızla sonsuza ıraksar bu yüzden (4.35) denkleminde bu değeri çıkarırsak ifadeyi stabil hale getirmiş oluruz. Bu amaçla (4.35) denkleminin her yanını (4.39) ifadesi ile çarparsak b ve $\frac{1}{b}$ olan boyut faktörleri ortadan kalkmış olur. Nihayi olarak (4.40) ve (4.41) tanımlamaları (4.35) da kullanılmak üzere yapılmış olur.

$$\frac{1}{\frac{i}{\pi b} \frac{\mu_B + \mu_C}{\mu_B \mu_C} \tilde{R}_s^{-1}(k_c b)} = -i\pi b \frac{\mu_B \mu_C}{\mu_B - \mu_C} \tilde{R}_s(k_c b) \quad (4.39)$$

$$\tilde{R}_s \stackrel{def}{=} -i\pi b \frac{\mu_B \mu_C}{\mu_B + \mu_C} \tilde{R}_s(k_c b) \tilde{R}_s^{-1}(k_B b) R_s \quad (4.40)$$

$$\tilde{T}_s \stackrel{def}{=} -i\pi b \frac{\mu_B \mu_C}{\mu_B + \mu_C} \tilde{R}_s(k_c b) \tilde{R}_s(k_B b) T_s \quad (4.41)$$

(4.40), (4.41) ve (4.36) denklemleri kullanılarak (4.35) denklemi (4.42) deki gibi yazılabilir.

$$\tilde{T}_s \tilde{R}_s^{-1}(k_B b) \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \tilde{R}_s(k_B a) e^{-i(s-n)\alpha} J_{s-n}(k_B d) + \tilde{R}_s b_s = 2 \frac{\mu_B \mu_C}{\mu_B + \mu_C} \lambda_s \tilde{R}_s(k_c b) \quad (4.42)$$

(4.34) ve (4.42) formüllerini kullanarak cebirsel denklem sistemimizi yeniden yazarsak (4.43) ve (4.44) denklemlerini elde ederiz.

$$\tilde{P}_s C_s + \tilde{Q}_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \left[\tilde{R}_s(k_B a) \tilde{R}_s^{-1}(k_B b) e^{i(n-s)\alpha} J_{n-s}(k_B d) \right] = 0 \quad (4.43)$$

$$\begin{aligned} \tilde{T}_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \left[\tilde{R}_s^{-1}(k_B a) \tilde{R}_s(k_B b) e^{-i(s-n)\alpha} J_{s-n}(k_B d) \right] + \tilde{R}_s b_s \\ = 2 \frac{\mu_B \mu_C}{\mu_B + \mu_C} \lambda_s \tilde{R}_s(k_c b); s = 0, \pm 1, \pm 2.. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Görüldüğü üzere \tilde{P}_s , \tilde{Q}_s , \tilde{T}_s and \tilde{R}_s değerleri $s \rightarrow \pm\infty$ durumu için sabitlere gitmektedir. (4.43) ve (4.44) denkleminde bulunan herbir ifade en genel halde yazılır ise (4.45) – (4.47) denklemleri elde edilir.

$$P = \text{diag} \left\{ \tilde{P}_s \right\}_{s=-\infty}^{\infty}; R = \text{diag} \left\{ \tilde{R}_s \right\}_{s=-\infty}^{\infty} \quad (4.45)$$

$$Q = \left\{ \tilde{Q}_s \tilde{R}_s(k_B a) \tilde{R}_s^{-1}(k_B b) e^{i(n-s)\alpha} J_{n-s}(k_B d) \right\}_{s,n=-\infty}^{\infty} \quad (4.46)$$

$$T = \left\{ \tilde{T}_s R_s^{-1}(k_B b) \tilde{R}_n(k_B a) e^{-i(s-n)\alpha} J_{s-n}(k_B d) \right\}_{s,n=-\infty}^{\infty} \quad (4.47)$$

Elde edilen bu değerler sayesinde (4.43) ve (4.44) denklemleri en genel manada (4.45) – (4.47) denklemlerinden de yararlanılarak (4.48) ve (4.49) denklemleri ile ifade edilebilir. λ değeri ise değerleri bilinen (4.50) denkleminde verilen kolon matrisidir.

$$P_c + Q_b = 0 \quad (4.48)$$

$$T_C + R_b = \lambda \quad (4.49)$$

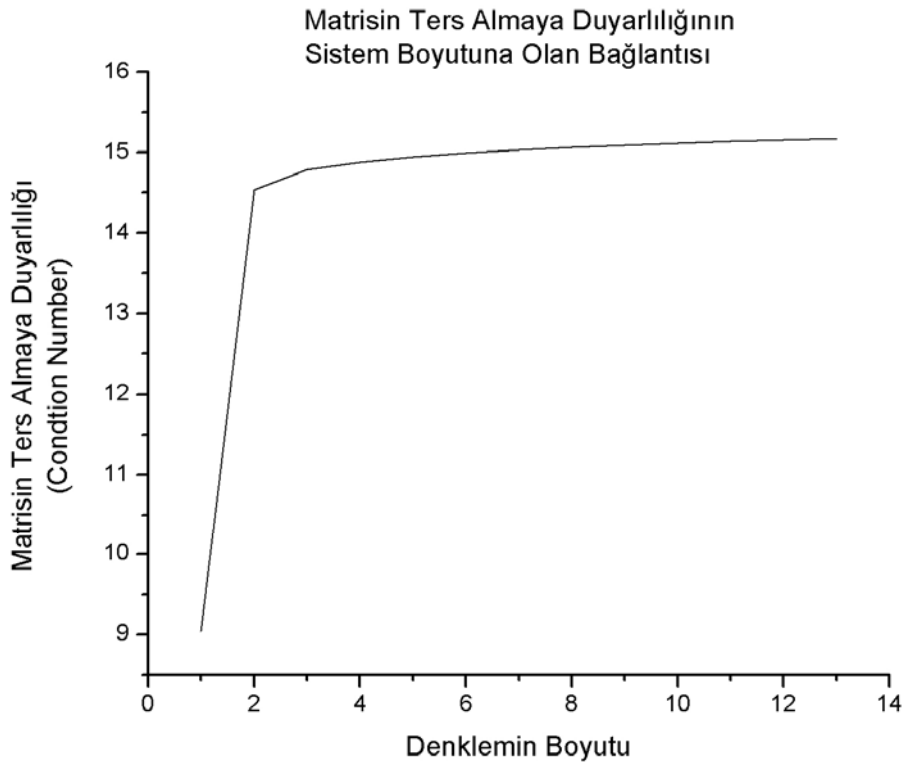
$$\lambda = \left\{ 2 \frac{\mu_B \mu_C}{\mu_B + \mu_C} \lambda_s \tilde{R}_s(k_C b) \right\}_{s=-\infty}^{\infty} \quad (4.50)$$

(4.48) ve (4.49) denklemlerinde verilen sistem gerekli diğer denklemler yardımıyla çözümlerse geometrik yapısı verilen sisteme ait kararlı bir çözüm elde edilmiş olur. Sistem programlama açısından kolaylık sağlaması için aşağıda belirtildiği üzere matris formunda düşünülmüş, oluşan matrisler ise Gauss Eliminasyon metodu ile çözülmüştür[29]. Bu bağlamda matris formu (4.51) deki gibi ifade edilebilmektedir. Sistemin kararlılığını denemek amacıyla kare matris olan P ve Q boyutları farklı seçilebilecek şekilde sistem tasarlanmıştır. Bu nedenle Q ve T matrisleri ise kolon ve satır sayıları değişkenlik gösterebilen matrisler haline gelmiştir.

$$\begin{pmatrix} \tilde{P} & Q \\ \tilde{C} & \tilde{R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{C}^0 \\ \tilde{C}^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{u} \end{pmatrix} \quad (4.51)$$

5. SONUÇLAR

Eş eksenli olmayan içi içe 2 farklı dielektrik diskten 2 boyutlu elektromanyetik dalganın saçılması problemine ilişkin olarak; Analitik Regülerleştirme sonucunda çözülecek sistemi kararlı yaptığı, bu yüzden sistemi çözmek için denklem sisteminin uygun boyutta alınabileceği görülmektedir. Denklem sistemine ait ters almaya matrisin duyarlılığının sistem boyutuna göre değişimi şekil 5.1 de yer almaktadır.

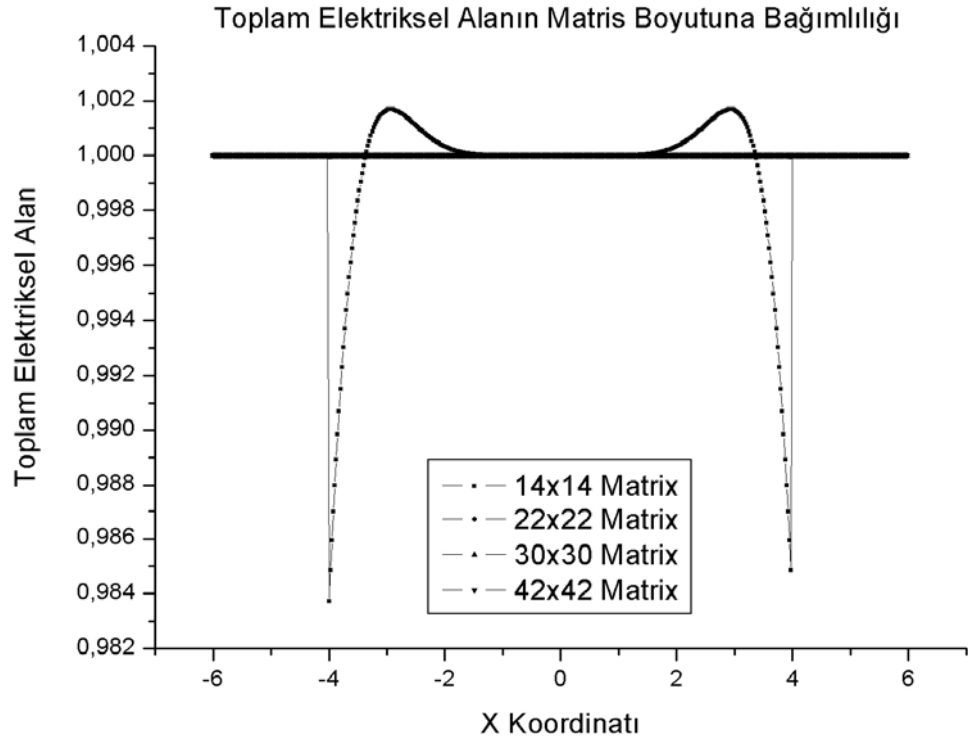


Şekil 5.1 Ters Almaya Duyarlılığının Denklem Boyutuna Bağlılığı

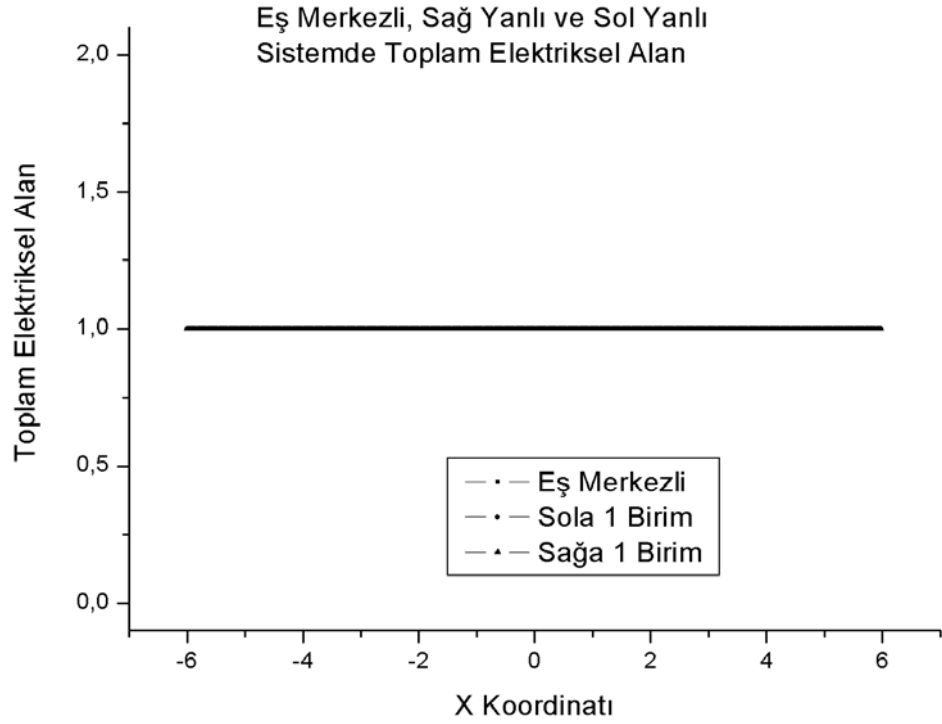
Sistem boyutunun çözüme olan etkisi ise şekil 5.2 de görülmektedir. Belli bir denklem boyutuna erişildikten sonra sistem tam anlamıyla kararlı hale gelmekte, basit şekilde düşük boyutlu denklem sistemi ile yüksek boyutlu aynı şekilde sonuçlar üretmektedir. Sistemi en basit hali ile test etmek için tüm elektriksel parametreleri eş olan eş merkezli, sağ ve sol yanlı 3 adet sistem ele alınmış ve uygun denklem boyutunda çözülmüştür. Şekil 5.3 de de görüldüğü gibi çıkan sonuç elektriksel alanın saçılmadığı ve her yönde ilerleyişine devam ettiği şeklindedir. Şekil 5.4 asimtotik davranış ile cebirsel sistem davranışı arasındaki farkları göstermektedir; sistemi

yaratırken ki teorimiz asimtotik davranış ile cebirsel davranış argümanlarının yeterince küçük olduğunda birbirlerine yaklaşır, burada da bu ifade açıkça görülmektedir.

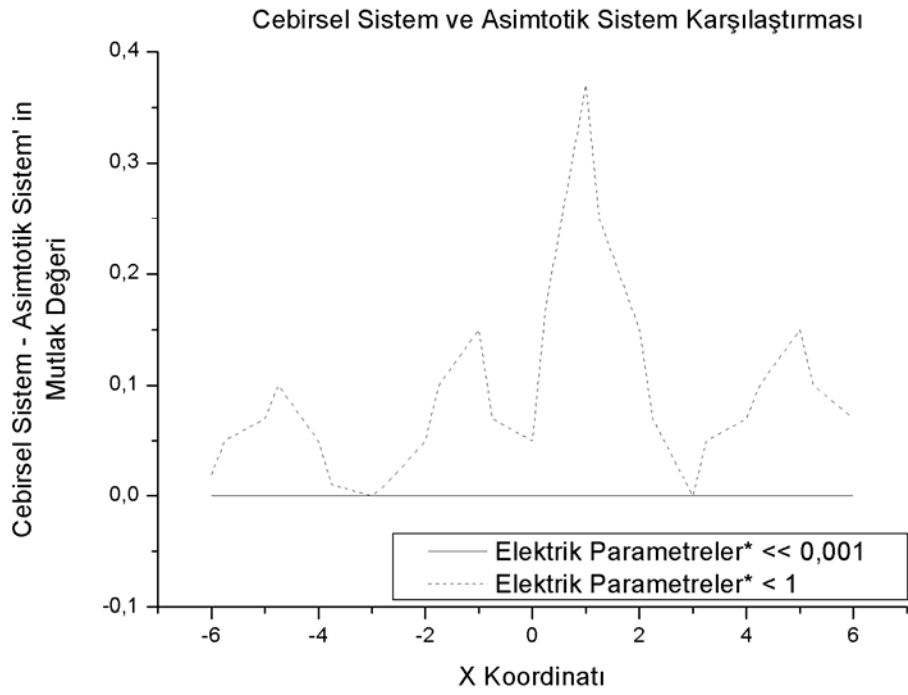
Şekil 5.5 de ise iç ve dış halka aynı elektriksel özelliğe sahipken ortada kalan alan farklı elektriksel özelliklere sahiptir, aynı şekilde eş eksenli sağ ve sol yanlı olmak üzere yapılan üç denemeden de görüldüğü gibi sistem kararlıdır ve herhangi bir anda devamsızlığı yoktur. Şekil 5.5 de görülen durum ise (2.23) denkleminde belirtilen hata durumunu ifade etmektedir; matris boyutu büyüdükçe kararsızlık gittikçe artmaktadır, bu durum ise istenilen bir durum değildir. Problemin nedeni ise Hankel fonksiyonun çok hızlı artan bir fonksiyon olmasına karşın γ değerlerinin hızla azalan bir özelliğe sahip olması dolayısıyla çarpımlarının doğru şekilde ifade edilememesidir. Şekil 5.6 ve şekil 5.7 ise sisteme ait parametrelerin değişmesinden kırılan alanın ne şekilde değiştiği gösterilmiştir; 5.6 grafiğinde sağ, sol ve eş merkezli üç adet sistemin $k_b=2$ durumu için üzerinden saçılan alan grafikleri görülmektedir. Şekil 5.7 de ise $k_a=2$ durumu için sağ, sol ve eş merkezli olan üç adet sistem üzerinden saçılımı görülmektedir. 5.8 – 5.10 şekilleri ise sırasıyla sol, sağ ve eş merkezli sistemlerin $k_b=2$ durumu için enerji dağılımını göstermektedir, aynı şekilde 5.11 - 5.13 şekilleri ise $k_a=2$ durumu için enerji dağılımını göstermektedir. Açıkça görülüyorki 5.8 – 5.10, 5.6 ile kendi içlerinde, 5.11 – 5.13, 5.7 ile kendi içlerinde tutarlı şekildedir. Sonuç olarak elektrik parametreleri farklı olan eş merkezli olmayan iç içe iki disk optik fizikte belirtilen ışık için ince ve kalın kenarlı mercek mekanizmalarını aynı şekilde Elektromanyetik dalgalar için gerçeklemedirler; sola kaydırılmış küçük yarıçaplı disk optik fizikte kalın kenarlı mercek gibi davranıp enerjii dağıtmakta, sola kaydırıldığında ise optik fizikteki ince kenarlı mercek gibi davranarak enerjii toplamaktadır. Sonuçlar bölümünde görülen grafikler yorumlandığında sistem basit bir Luneberg Lens gibi davranmaktadır[32]. Luneberg Lens temel olarak düzlemsel dalga halinde gelen elektromanyetik enerjiiyi bir noktaya toplayıp noktasal kaynak haline getirmek yada tam tersi şeklinde noktasal bir kaynağı düzlemsel dalga kaynağı haline getirmektir. Şekil 5.16 – şekil 5.17 de de gösterildiği gibi elde edilen sistem temelde Luneberg Lens sistemi ile benzer özellikler gösterecek şekilde sonuçlar sağlamıştır.



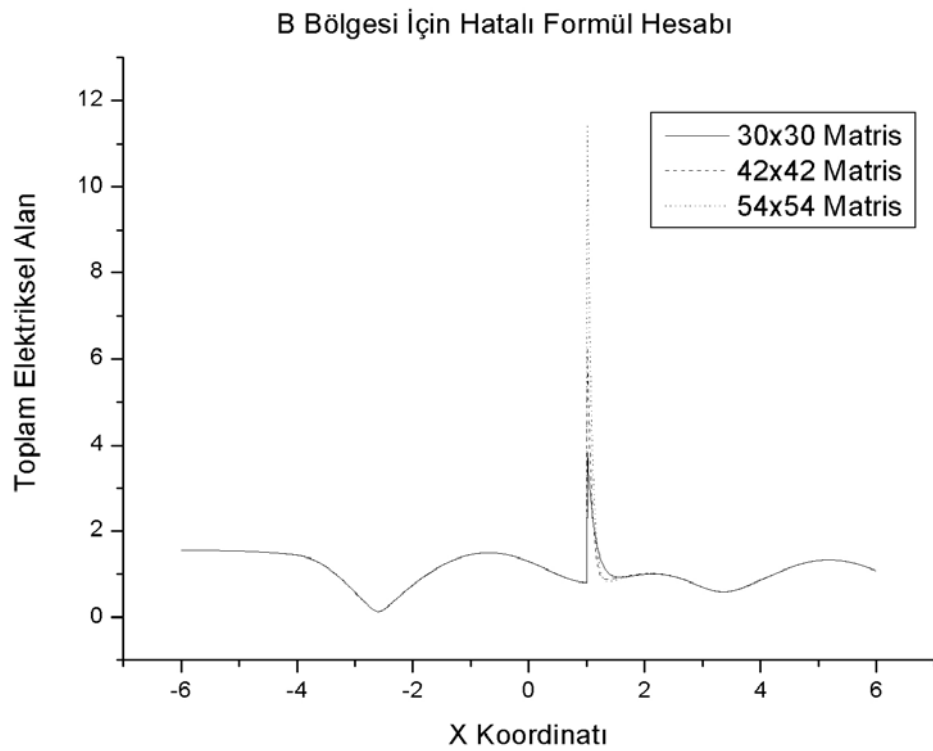
Şekil.5.2 Matris Boyutuna Bağlı Olarak Hesaplamadaki Değişiklikler



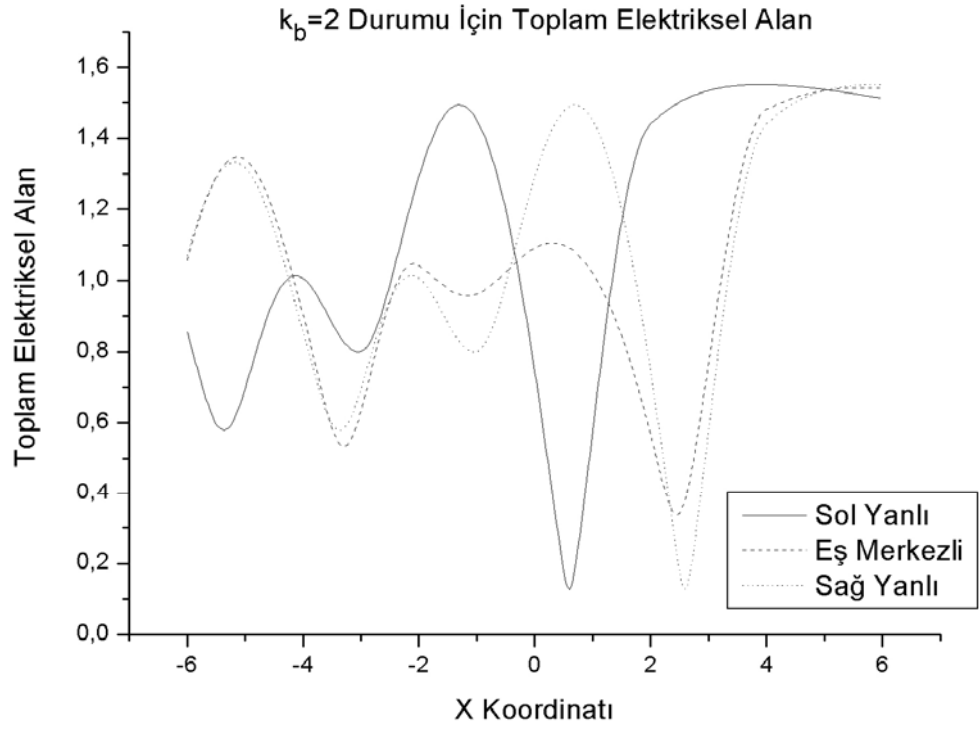
Şekil 5.3. Tüm Parametreleri 1 Olan En Basit Sistem



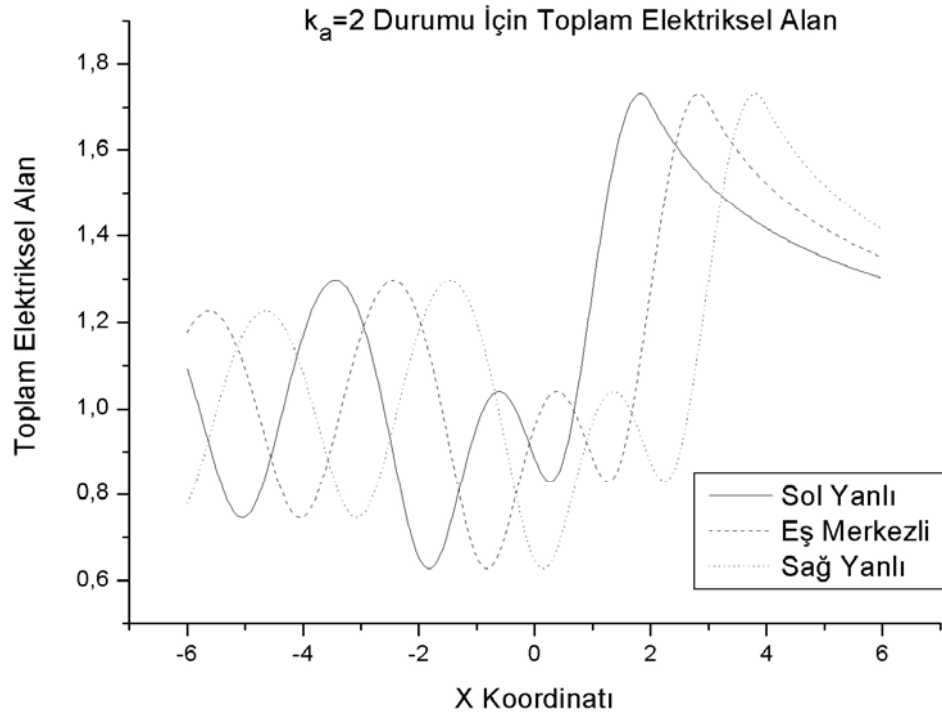
Şekil 5.4. Asimtotik ve Cebrik Sistemin Karşılaştırılması



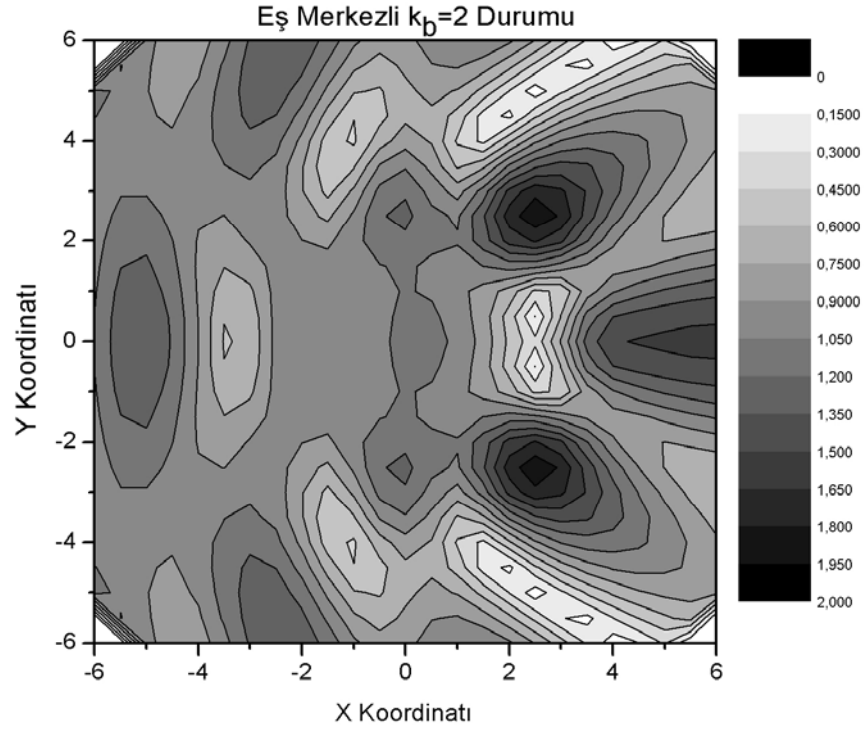
Şekil 5.5. 2.23 ve 2.24 Formülü Arasındaki Tutarsızlık



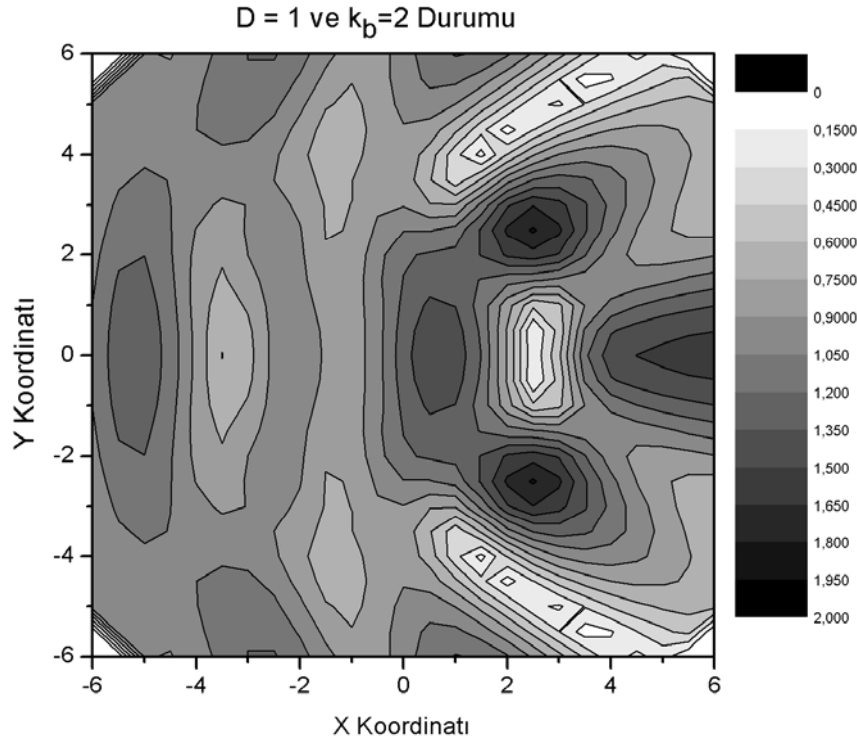
Şekil 5.6. $\varepsilon_A = \varepsilon_C = 1, \varepsilon_B = 2$ İçin $x = 0$ daki Toplam Elektriksel Alan



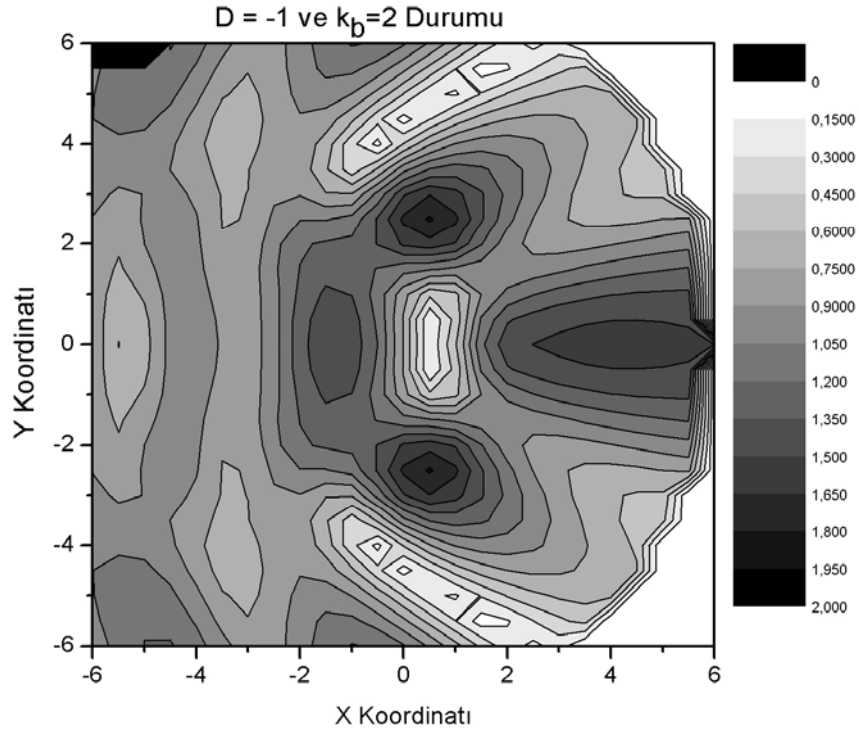
Şekil 5.7. $\varepsilon_B = \varepsilon_C = 1, \varepsilon_A = 2$ İçin $x = 0$ daki Toplam Elektriksel Alan



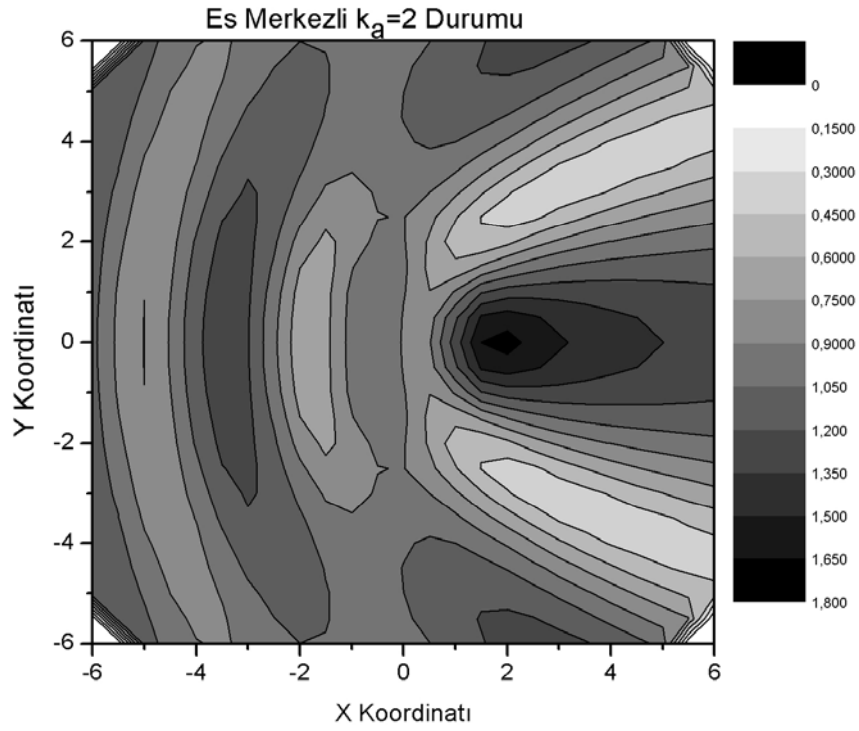
Şekil 5.8. $\varepsilon_A = \varepsilon_C = 1, \varepsilon_B = 2$ ve $d = 0$ için Toplam Elektriksel Alan



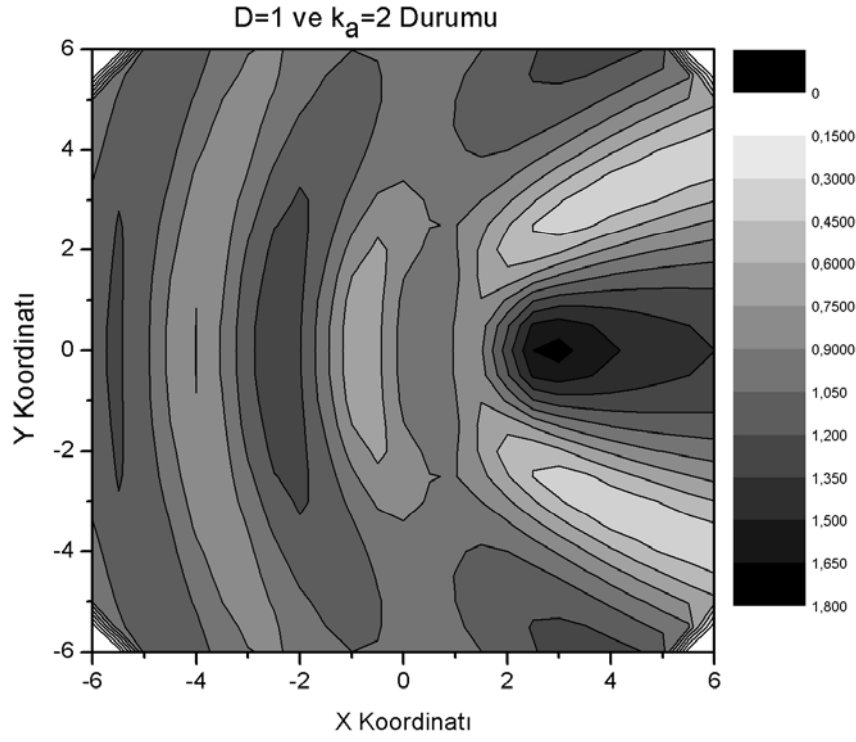
Şekil 5.9. $\varepsilon_A = \varepsilon_C = 1, \varepsilon_B = 2$ ve $d = +1$ için Toplam Elektriksel Alan



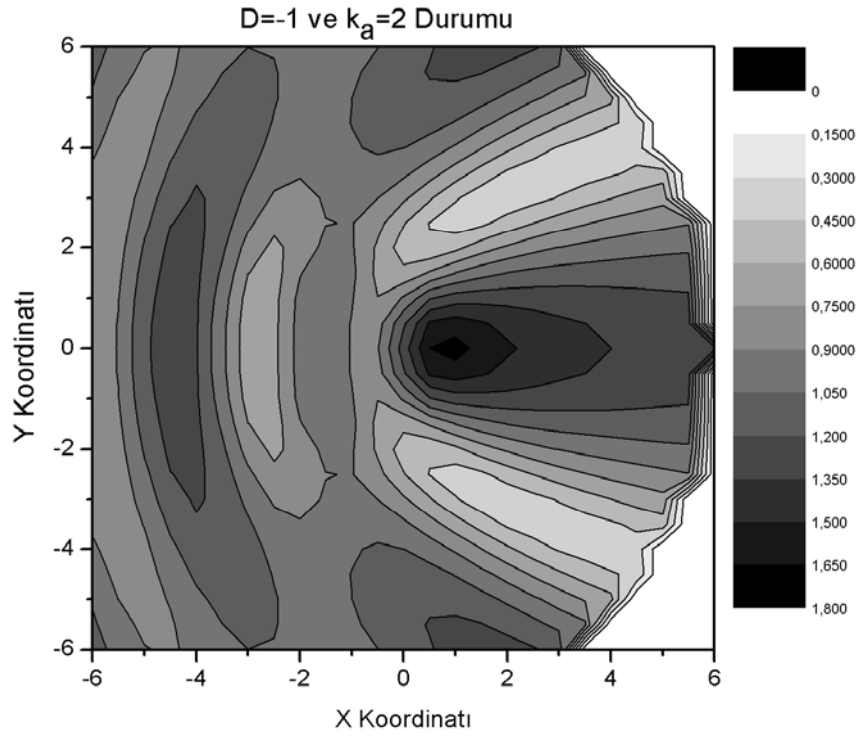
Şkil 5.10. $\varepsilon_A = \varepsilon_C = 1, \varepsilon_B = 2$ ve $d = -1$ için Toplam Elektriksel Alan



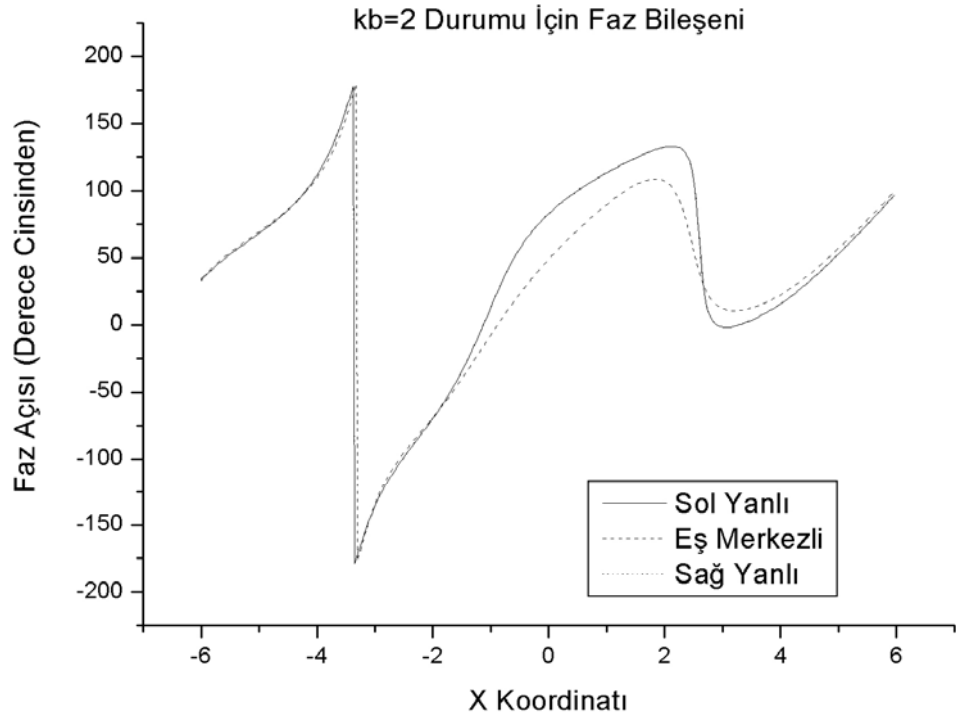
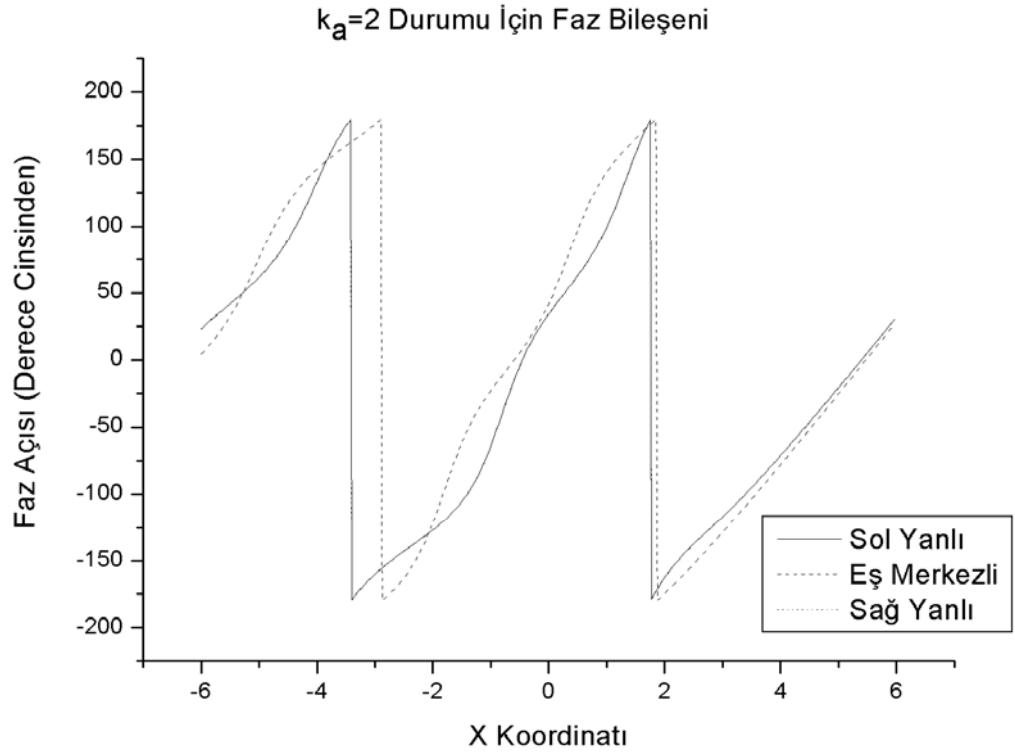
Şkil 5.11. $\varepsilon_B = \varepsilon_C = 1, \varepsilon_A = 2$ ve $d = 0$ için Toplam Elektriksel Alan

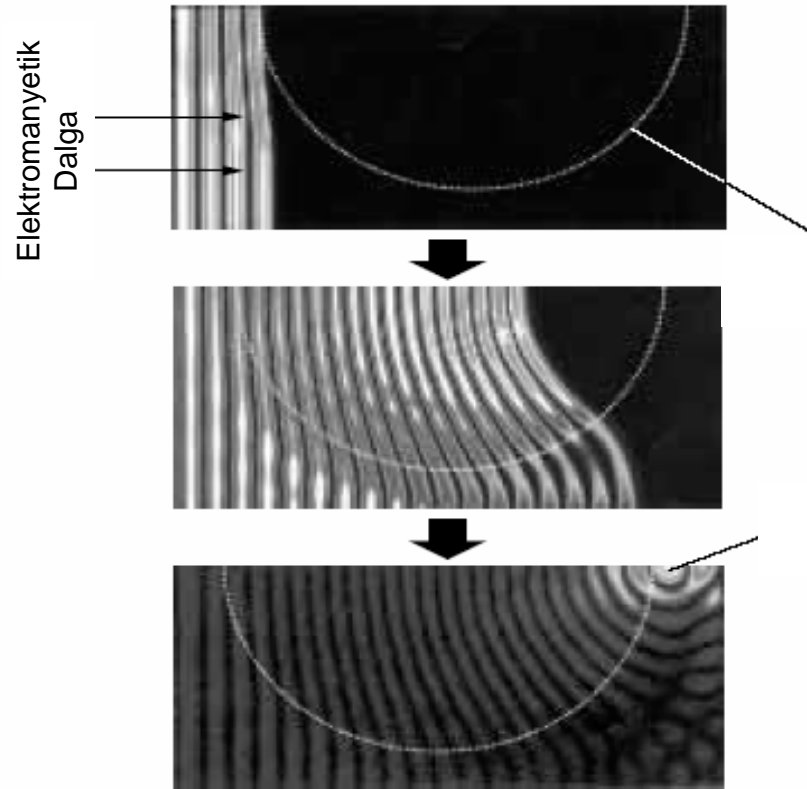


Şekil 5.12. $\varepsilon_B = \varepsilon_C = 1, \varepsilon_A = 2$ ve $d = +1$ için Toplam Elektriksel Alan

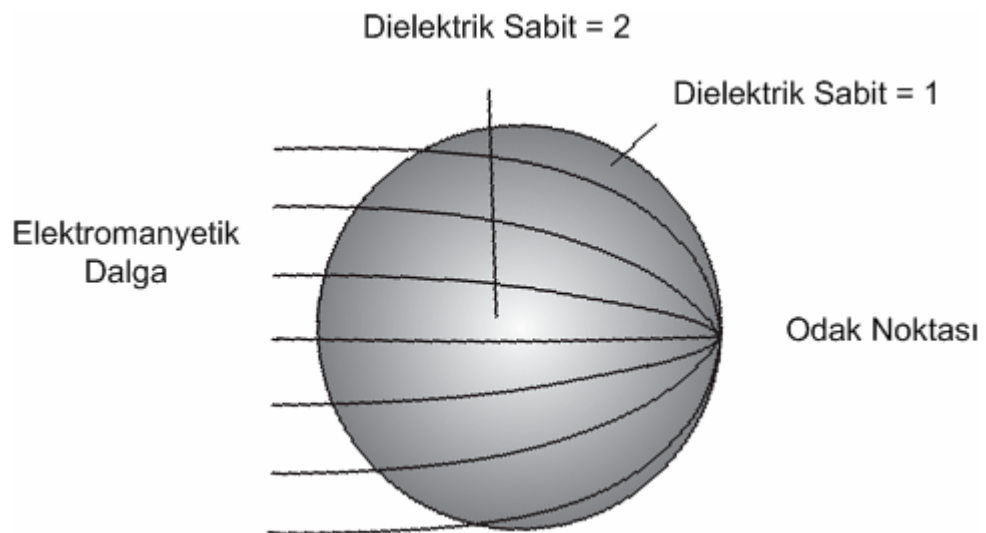


Şekil 5.13. $\varepsilon_B = \varepsilon_C = 1, \varepsilon_A = 2$ ve $d = -1$ için Toplam Elektriksel Alan

Şekil 5.14. $k_B = 2$ için Faz GrafiğiŞekil 5.15. $k_A = 2$ için Faz Grafiği



Şekil 5.16. $\varepsilon_B = \varepsilon_C = 1, \varepsilon_A = 2$ ve $d = 0$ Durumu için Luneberg Lens



Şekil 5.17. $\varepsilon_B = \varepsilon_C = 1, \varepsilon_A = 2$ ve $d = 0$ Durumu için Luneberg Lens

KAYNAKLAR

- [1] Yu. A. Tuchkin. Wave Scattering by unclosed cylindrical screen of arbitrary profile with Dirichlet boundary condition – Soviet Physics Doclady, 1985 v. 30 p.p 1027 – 1030
- [2] A.F.Nikiforov, V.B.Uvarov. Special Functions of mathematical Physics. – Soviet Physics. – Birkhäuser, 1988 (Translated from Russian by R. P. Boas)
- [3] M. Abramovitz, I.A. Stegun. Handbook of Special Functions. Dover Publications Inc, Ninth Printing 1972
- [4] M.İdemen. Kırınım Teorisi. İTÜ Ders notları, 1997
- [5] M.İdemen. Elektromanyetik Dalgaların Teoremleri. İTÜ Elektrik-Elektronik Fakültesi ofset baskı atölyesi, Değiştirilmiş 4. Baskı, 1991
- [6] Yu.A. Tuchkin. Regularization of boundary value problem of wave diffraction by torodial screen of arbitrary profile. - Publishing House of IRE Acad. Sci. The Ukr. SSSRi Kherkov, 1990
- [7] D.N. Black, J.C. Wiltse. Milimeter-Wave Characterists of Phase-Correcting Fresnel Zone Plates. – IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, Vol.MTT 35, No:12, december 1987
- [8] R.Mitra , S.W.Lee, Analytical Techniques in the Theory of the Guided Waves. – The Macmillian Company, 1971.
- [9] C.A.J. Fletcher. Computational Galerkin Method. – Springer Verlag, Berlin, 1984
- [10] J.H.Wilkinson. The Algebraic Eigenvalue Problem. – Clarendon Press, Oxford, 1965
- [11] J.D. jackson. Classical Electrodynamics. – John Wiley & Sons, Second Edition, 1975
- [12] W.H.Press, S.A.Teukolsky, W.T.Vetterlink, B.P. Flannery. Numerical Recipies in C. – Cambridge University Press, Second Edition, 1992
- [13] C.A.Balanis. Advanced Engineering Electromagnetics – John Wiley & Sons, 1989
- [14] Field And Wave Electromagnetics, David K. Cheng. – Adisson Wesley, 1983
- [15] The C++ Programming Language (Third Edition and Special Edition). - Addison-Wesley, 2004
- [16] Collin, R.E., Field Theory of Guided Waves, Second Edition, 1991
- [17] Van Bladel, J., Singular Electromagnetic Fields and Sources, 1995

- [18] Collin, R.E., Foundations for Microwave Engineering, 2nd Edition, 2001
- [19] Lindell, I.V., Differential Forms in Electromagnetics, 2004
- [20] The Classical Theory of Fields, Fourth Edition : Volume 2 (Course of Theoretical Physics Series), 1980
- [21] R.Mitra, S.W. Lee Analytic Techniques in the Theory of the Guided Waves – The Macmillan Company, 1971
- [22] C.A.J. Fletcher. Computational Galerkin Method – Springer Verlag, Berlin, 1984
- [23] J.H. Wilkinson. The Algebraic Eigenvalue problem – Clarendon Press, Oxford, 1965
- [24] J.J.H. Wang Generalized moment method in Electromagnetics, Wiley, 1991
- [25] Principles of Optics: Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light (7th Edition). - Max Born, Emil Wolf - 1999
- [26] E-Polarized Wave Diffraction by Non-Axial Bi Circular Pipe. – Yury A. Tuchkin, 1999
- [27] A.S. Il'inskiy and Yu. G. Smirnov – Electromagnetic waves diffraction by conductive thin screens. Pseudodifferential operators in diffraction problems – Moscow 1996
- [28] G.C. Hsiao, R.E. Kleinman – Mathematical foundations for error estimation in numerical solutions of integral equations in electromagnetics – IEEE Transactions Antennas and Propagation, AP45 1997 pp. 316 – 328
- [29] <http://mathworld.wolfram.com/GaussianElimination.html> - Gauss Elimination
- [30] Mathematical functions and their approximations, Yudell L.Luke, University of Missouri – Academic Press 1975, page:345
- [31] Fatih Dikmen. Sonsuz İnce Mükemmel İletken Dairesel Halkadan Skaler Dalga Saçılması – T.C. Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü Mühendislik Fakültesi ve Fen Bilimleri Enstitüsü, Gebze 1998.127
- [32] Luneberg Lens Stuart K. Tewksbury & Frank Boesch March 1999

ÖZGEÇMİŞ

Soner Muş 1981 yılında Kırıkkale’de doğdu. İlköğrenimini Kırıkkale Atatürk İlköğretim okulu, Orta öğrenimi Kırıkkale Anadolu Lisesi, Lise öğrenimini Kırıkkale Fen Lisesinde tamamladıktan sonra 1999 yılında girdiği İstanbul Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Elektronik Mühendisliğinde lisans öğrenimini tamamladı. 2003 Güz döneminde Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü Mühendislik Fakültesi Elektronik Mühendisliği Bölümü’nde yüksek lisans öğrenimine başladı. Kariyerine yazılım mühendisi olarak başlayıp daha sonra özel bir şirkette Unix Admini olarak çalışmaya devam etmektedir.

Ekler

Ek A Bessel Fonksiyonu Asimtotikleri

EK A – 1 Bessel Fonksiyonları ve Asimtotikleri

$$\begin{aligned}
 J_n(z) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m z^{2m+n}}{2^{2m+n} m!(n+m)!} = \frac{z^n}{2^n n!} - \frac{z^{n+2}}{2^{n+2}(n+1)!} + \frac{z^{n+4}}{2^{n+4} 2(n+2)!} - \dots \\
 &= \frac{1}{n!} \left(\frac{z}{2}\right)^n - \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2} + \frac{1}{2(n+2)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+4} - \dots \quad (\text{EK.1})(\text{EK.2}) \\
 &= \frac{1}{n!} \left(\frac{z}{2}\right)^n \left[1 - \frac{1}{n+1} \left(\frac{z}{2}\right)^2 + \frac{1}{2(n+1)(n+2)} \left(\frac{z}{2}\right)^4 - \dots \right]
 \end{aligned}$$

genelleştirilirse;

$$J_n(z) = \frac{1}{n!} \left(\frac{z}{2}\right)^n \left[1 - \frac{1}{n+1} \left(\frac{z}{2}\right)^2 + \frac{1}{2(n+1)(n+2)} \left(\frac{z}{2}\right)^4 + O\left(\left(\frac{z^2}{2}\right)^3\right) \right], \quad \frac{z^2}{2n} \rightarrow 0 \quad (\text{EK.3})$$

(EK.1) denklemini kullanılırsa (EK.4) denklemini elde edilebilir

$$\begin{aligned}
 J_n'(z) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (2m+n) z^{2m+n-1}}{2^{2m+n} m!(n+m)!} = \frac{nz^{n-1}}{2^n n!} - \frac{(n+2)z^{n+1}}{2^{n+2}(n+1)!} + \\
 &\quad \frac{(n+4)z^{n+3}}{2^{n+4} 2(n+2)!} - \dots = \frac{1}{2(n-1)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n-1} - \frac{n+2}{2(n+1)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+1} \\
 &\quad + \frac{n+4}{4(n+2)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+3} - \dots = \frac{1}{2(n-1)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n-1} \\
 &\quad \left[1 - \frac{n+2}{n(n+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^2 + \frac{n+4}{2n(n+1)(n+2)} \left(\frac{z}{2}\right)^4 + O\left(\left(\frac{z}{2n}\right)^6\right) \right] \quad (\text{EK.4})(\text{EK.5})
 \end{aligned}$$

genelleştirilirse;

$$\begin{aligned}
 J_n'(z) &= \frac{1}{2} \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n-1} \left[1 - \frac{n+2}{n(n+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^2 + \frac{n+4}{2n(n+1)(n+2)} \left(\frac{z}{2}\right)^4 + O\left(\left(\frac{z}{2n}\right)^6\right) \right] \quad (\text{EK.6}) \\
 &\quad , \quad \frac{z^2}{2n} \rightarrow \infty
 \end{aligned}$$

EK A – 2 Neuman Fonksiyonu ve Asimtotikleri

$$Y_n(z) = \frac{2}{\pi} J_n(z) \left[\ln \frac{z}{2} + \gamma \right] - \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(n-m-1)!}{m!} \left(\frac{z}{2} \right)^{-n+2m} - \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (z/2)^{n+2m}}{m!(n+m)!} \left\{ \sum_{k=1}^{n+m} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} \right\} \quad (\text{EK.7})$$

$\gamma=0.5772157..$ ile ifade edilen Euler sabitidir. Amacımıza uygun olarak (EK.7) denkleminde ait ilk toplam değerleri bizim için önemlidir.

$$\begin{aligned} Y_n(z) &\square -\frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(n-m-1)!}{m!} \left(\frac{z}{2} \right)^{-n+2m} = \\ &-\frac{1}{\pi} \left\{ (n-1)! \left(\frac{z}{2} \right)^{-n} + (n-2)! \left(\frac{z}{2} \right)^{-n+2} + \frac{(n-3)!}{2} \left(\frac{z}{2} \right)^{-n+4} \dots \right\} \quad (\text{EK.8}) \\ &= -\frac{1}{\pi} (n-1)! \left(\frac{z}{2} \right)^{-n} \left\{ 1 + \frac{1}{n-1} \left(\frac{z}{2} \right)^2 + \frac{1}{2(n-2)(n-1)} \left(\frac{z}{2} \right)^4 + O \left(\left(\frac{z^2}{2n} \right)^6 \right) \right\} \end{aligned}$$

genel olarak

$$Y_n(z) = -\frac{1}{\pi} (n-1)! \left(\frac{z}{2} \right)^{-n} \left\{ \begin{array}{l} 1 + \frac{1}{n-1} \left(\frac{z}{2} \right)^2 + \frac{1}{2(n-2)(n-1)} \left(\frac{z}{2} \right)^4 + \\ O \left(\left(\frac{z^2}{2n} \right)^6 \right) \end{array} \right\}, \quad \frac{z^2}{2n} \rightarrow 0 \quad (\text{EK.9})$$

(EK.8) denkleminde göre

$$\begin{aligned} Y_n'(z) &\square -\frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(n-m-1)!}{m!} \frac{(-n+2m) z^{-n+2m-1}}{2^{-n+2m}} = \\ &-\frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(n-m-1)!}{m!} (-n+2m) \frac{1}{2} \frac{z^{-n+2m-1}}{2^{-n+2m-1}} \quad (\text{EK.10}) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
Y_n'(z) &\square -\frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(n-m-1)!}{m!} (-n+2m) \left(\frac{z}{2}\right)^{-n+2m-1} = \\
&-\frac{1}{2\pi} \left\{ \begin{aligned} &(n-1)!(-n) \left(\frac{z}{2}\right)^{-n-1} + (n-2)!(-n+2) \left(\frac{z}{2}\right)^{-n+1} + \\ &\frac{(n-3)!}{2} (-n+4) \left(\frac{z}{2}\right)^{-n+3} \dots \end{aligned} \right\} \quad (\text{EK.11}) \\
&= \frac{1}{2\pi} n! \left(\frac{z}{2}\right)^{-n-1} \left\{ \begin{aligned} &1 + \frac{n-2}{n(n-1)} \left(\frac{z}{2}\right)^2 + \frac{(n-4)}{2(n-2)(n-1)n} \left(\frac{z}{2}\right)^4 + \\ &O\left(\left(\frac{z^2}{4n}\right)^3\right) \end{aligned} \right\}
\end{aligned}$$

genel olarak

$$Y_n'(z) = \frac{1}{2\pi} n! \left(\frac{z}{2}\right)^{-n-1} \left\{ 1 + \frac{n-2}{n(n-1)} \left(\frac{z}{2}\right)^2 + \frac{(n-4)}{2(n-2)(n-1)n} \left(\frac{z}{2}\right)^4 + O\left(\left(\frac{z^2}{4n}\right)^3\right) \right\}, \quad \frac{z^2}{4n} \rightarrow 0$$

(EK.12)

elde edilir.

EK A – 3 Birinci Dereceden Hankel Fonksiyonu ve Asimtotikleri

$$H_v^{(1)}(z) = J_v(z) + iY_v(z) \quad (\text{EK.13})$$

(EK.3), (EK.6) ve (EK.10), (EK.12) denklemleri uyarınca ($J_n(z)$ ve $J_n'(z)$ fonksiyonları $n \rightarrow \infty$ durumu için sifira yakınsayacağı için ihmal edilebilir)

$$H_n^{(1)}(z) = -\frac{i}{\pi}(n-1)! \left(\frac{z}{2}\right)^{-n} \left\{ \begin{array}{l} 1 + \frac{1}{n-1} \left(\frac{z}{2}\right)^2 + \frac{1}{2(n-2)(n-1)} \left(\frac{z}{2}\right)^4 + \\ O\left(\left(\frac{z^2}{4n}\right)^3\right) \end{array} \right\} \quad (\text{EK.14})$$

$$, \frac{z^2}{4n} \rightarrow 0$$

$$H_n^{(1)'}(z) = \frac{i}{2\pi}(n)! \left(\frac{z}{2}\right)^{-n-1} \left\{ \begin{array}{l} 1 + \frac{n-2}{n(n-1)} \left(\frac{z}{2}\right)^2 + \frac{n-4}{2n(n-2)(n-1)} \left(\frac{z}{2}\right)^4 + \\ O\left(\left(\frac{z^2}{4n}\right)^3\right) \end{array} \right\} \quad (\text{EK.15})$$

$$, \frac{z^2}{4n} \rightarrow 0$$

EK A – 4 Bessel ve Hankel Fonksiyonlarının Kombinasyonlar

(EK.3) ve (EK.13) formülleri kullanılarak;

$$\begin{aligned}
 J_n(z)H_n^{(1)}(z) &= \frac{1}{n!} \left(\frac{z}{2}\right)^n \left[1 - \frac{1}{n+1} \left(\frac{z}{2}\right)^2 + \frac{1}{2(n+1)(n+2)} \left(\frac{z}{2}\right)^4 + O\left(\left(\frac{z^2}{4n}\right)^3\right) \right] \\
 \left(-\frac{i}{\pi}\right) (n-1)! \left(\frac{z}{2}\right)^{-n} &\left[1 + \frac{1}{n-1} \left(\frac{z}{2}\right)^2 + \frac{1}{2(n-2)(n-1)} \left(\frac{z}{2}\right)^4 + O\left(\left(\frac{z^2}{4n}\right)^3\right) \right] \\
 &= -\frac{1}{\pi} \frac{1}{n} \left\{ \begin{aligned} &1 - \frac{1}{n+1} \left(\frac{z}{2}\right)^2 + \frac{1}{2(n+1)(n+2)} \left(\frac{z}{2}\right)^4 + O\left(\left(\frac{z^2}{4n}\right)^3\right) + \frac{1}{n-1} \left(\frac{z}{2}\right)^2 - \\ &\frac{1}{(n+1)(n-1)} \left(\frac{z}{2}\right)^4 + O\left(\left(\frac{z^2}{4n}\right)^3\right) + \frac{1}{2(n-2)(n-1)} \left(\frac{z}{2}\right)^4 + O\left(\left(\frac{z^2}{4n}\right)^3\right) \end{aligned} \right\} \\
 &= -\frac{1}{\pi} \frac{1}{n} \left\{ \begin{aligned} &1 + \left[\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right] \left(\frac{z}{2}\right)^2 + \left[\frac{1}{2(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+1)(n-1)} \right] \left(\frac{z}{2}\right)^4 + \\ &\frac{1}{2(n-2)(n-1)} \left(\frac{z}{2}\right)^4 + O\left(\left(\frac{z^2}{4n}\right)^3\right) \end{aligned} \right\} \quad (\text{EK.16})
 \end{aligned}$$

elde edilir. Aşağıdaki ifadeler hesap edilirse

$$\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} = \frac{(n+1) - (n-1)}{(n-1)(n+1)} = \frac{2}{(n-1)(n+1)} \quad (\text{EK.17})$$

$$\frac{1}{(n-1)(n+1)} - \frac{1}{n^2} = \frac{n^2 - (n-1)(n+1)}{n^2(n^2-1)} = \frac{n^2 - (n^2-1)}{n^2(n^2-1)} = \frac{1}{n^2(n^2-1)} \quad (\text{EK.18})$$

$$\frac{1}{n^2(n^2-1)} - \frac{1}{n^4} = \frac{n^4 - n^2(n^2-1)}{n^6(n^2-1)} = \frac{n^4 - n^4 + n^2}{n^6(n^2-1)} = \frac{1}{n^4(n^2-1)} \quad (\text{EK.19})$$

en genel halde

$$\frac{1}{n^2(n^2-1)} = \frac{1}{n^4} + O(n^{-6}), \quad n \rightarrow \infty \quad (\text{EK.20})$$

$$\frac{1}{(n-1)(n+1)} = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2(n^2-1)} = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4} + O(n^{-6}), \quad n \rightarrow \infty \quad (\text{EK.21})$$

$$\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} = \frac{2}{n^2} + \frac{2}{n^4} O(n^{-6}), \quad n \rightarrow \infty \quad (\text{EK.22})$$

ve

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+1)(n-1)} + \frac{1}{2(n-2)(n-1)} = \\
& \frac{(n-1)(n-2) - 2(n+2)(n-2) + (n+1)(n+2)}{2(n+2)(n+1)(n-1)(n-2)} = \\
& \frac{n^2 - 3n + 2 - 2(n^2 - 4) + n^2 + 3n + 2}{2(n+2)(n+1)(n-1)(n-2)} = \frac{n^2 + 2 - 2n^2 + 8 + n^2 + 2}{2(n+2)(n+1)(n-1)(n-2)} = \\
& \frac{12}{2(n+2)(n+1)(n-1)(n-2)} = \frac{6}{(n^2-1)(n^2-4)} = \frac{6}{n^4} + O(n^{-6})
\end{aligned} \tag{EK.23}$$

son olarak

$$\frac{1}{2(n+2)(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n-1)} + \frac{1}{2(n-2)(n-1)} = \frac{6}{n^4} + O(n^{-6}) \tag{EK.24}$$

(EK.22) ve (EK.24)' un (EK.16) e uygulanması sonucunda

$$\begin{aligned}
J_n(z)H_n^{(1)}(z) &= -\frac{i}{\pi n} \left\{ \begin{aligned} & 1 + \left[\frac{2}{n^2} + \frac{2}{n^4} + O(n^{-6}) \right] \left(\frac{z}{2} \right)^2 + \\ & \left[\frac{6}{n^4} + O(n^{-6}) \right] \left(\frac{z}{2} \right)^4 + O\left(\frac{z^2}{4n} \right)^3 \end{aligned} \right\} = \\
& -\frac{i}{\pi n} \left\{ \begin{aligned} & 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{n} \right)^2 + \frac{1}{n^2} O\left(\frac{z}{n} \right)^2 + \frac{3}{8} \left(\frac{z}{n} \right)^4 + \\ & \frac{1}{n^2} O\left(\frac{z}{n} \right)^4 + O\left(\frac{z}{n} \right)^3 \end{aligned} \right\}
\end{aligned} \tag{EK.25}$$

son olarak

$$J_n(z)H_n^{(1)}(z) = -\frac{i}{\pi n} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{n} \right)^2 + O(n^{-4}) \right\}, \quad n \rightarrow \infty \tag{EK.26}$$

Elde edilir. (EK.6) ve (EK.14) denklemleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
J_n'(z)H_n^{(1)'}(z) &= \frac{1}{2} \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n-1} \left[1 - \frac{n+2}{n(n+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^2 + \right. \\
&\quad \left. \frac{n+4}{2n(n+1)(n+2)} \left(\frac{z}{2}\right)^4 + O\left(\left(\frac{z^2}{4n}\right)^3\right) \right] \frac{i}{2\pi} n! \left(\frac{z}{2}\right)^{-n-1} \\
&\quad \left[1 + \frac{n-2}{n(n-1)} \left(\frac{z}{2}\right)^2 + \frac{n-4}{2n(n-1)(n-2)} \left(\frac{z}{2}\right)^4 + O\left(\left(\frac{z^2}{4n}\right)^3\right) \right] \\
&= \frac{1}{4\pi} n \left(\frac{z}{2}\right)^{-2} \left[1 - \frac{n+2}{n(n+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^2 + \frac{n+4}{2n(n+1)(n+2)} \left(\frac{z}{2}\right)^4 + \right. \\
&\quad \left. \frac{n-2}{n(n-1)} \left(\frac{z}{2}\right)^2 - \frac{(n+2)(n-2)}{n^2(n+1)(n-1)} \left(\frac{z}{2}\right)^4 + \right. \\
&\quad \left. \frac{n-4}{2n(n-1)(n-2)} \left(\frac{z}{2}\right)^4 + O\left(\left(\frac{z^2}{4n}\right)^3\right) \right]
\end{aligned} \tag{EK.27}$$

elde edilir

$$\begin{aligned}
J_n'(z)H_n^{(1)'}(z) &= \frac{i}{\pi z} n \left\{ 1 + \left[\frac{n-2}{n(n-1)} - \frac{n+2}{n(n+1)} \right] \left(\frac{z}{2}\right)^2 \right. \\
&\quad + \left[\frac{n+4}{2n(n+1)(n+2)} - \frac{(n+2)(n-2)}{n^2(n+1)(n-1)} + \frac{n-4}{2n(n-1)(n-2)} \right] \left(\frac{z}{2}\right)^4 + \\
&\quad \left. O\left(\left(\frac{z^2}{4n}\right)^3\right) \right\}
\end{aligned} \tag{EK.28}$$

Aynı hesaplamalar tekrar edilirse;

$$\begin{aligned}
\frac{n-2}{n(n-1)} - \frac{n+2}{n(n+1)} &= \frac{1}{n} \left[\frac{n-2}{n-1} - \frac{n+2}{n+1} \right] = \frac{(n-2)(n+1) - (n+2)(n-1)}{n(n^2-1)} = \\
\frac{n^2 - n - 2 - [n^2 + n - 2]}{n(n^2-1)} &= \frac{n^2 - n - 2 - n^2 - n + 2}{n(n^2-1)} = \frac{-2n}{n(n^2-1)} = \frac{-2}{(n^2-1)}
\end{aligned} \tag{EK.29}$$

(EK.22) ile beraber incelenirse;

$$\frac{(n-2)}{n(n-1)} - \frac{(n+2)}{n(n+1)} = -\frac{2}{n^2} - \frac{2}{n^4} + O(n^{-6}), \quad n \rightarrow \infty \tag{EK.30}$$

$$\begin{aligned}
A_n &= \frac{n+4}{2n(n+1)(n+2)} - \frac{(n+2)(n-2)}{n^2(n+1)(n-1)} + \frac{n-4}{2n(n-1)(n-2)} = \\
\frac{1}{n} \left[\frac{n+4}{2(n+1)(n+2)} - \frac{n^2-4}{n(n+1)(n-1)} + \frac{n-4}{2(n-1)(n-2)} \right] &= \\
\frac{1}{n} \frac{(n+4)n(n-1)(n-2) - 2(n^2-4)(n+2)(n-2) + (n-4)n(n+1)(n+2)}{2(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)} &
\end{aligned} \tag{EK.31}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_n &= (n+4)n(n-1)(n-2) = n(n-1)[n^2 + 4n - 2n - 8] = \\
&= n(n-1)(n^2 + 2n - 8) = n(n^3 - n^2 + 2n^2 - 2n - 8n + 8) = \\
&= n(n^3 + n^2 - 10n + 8) = n^4 + n^3 - 10n^2 + 8n
\end{aligned} \tag{EK.32}$$

$$\begin{aligned}
\beta_n &= (n-4)n(n+1)(n+2) = n(n+1)[n^2 - 4n + 2n - 8] = \\
&= n(n+1)[n^2 - 2n - 8] = n(n^3 + n^2 - 2n^2 - 2n - 8n - 8) = \\
&= n(n^3 - n^2 - 10n - 8) = n^4 - n^3 - 10n^2 - 8n
\end{aligned} \tag{EK.33}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_n &= 2(n^2 - 4)(n+2)(n-2) = 2(n^2 - 4)^2 = \\
&= 2(n^4 - 8n^2 + 16) = 2n^4 - 16n^2 + 32
\end{aligned} \tag{EK.34}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_n + \beta_n - \gamma_n &= (1+1-2)n^4 + (1-1)n^3 + (-10-10+16)n^2 + \\
&= (8-8)n + (0+0+32) = 4n^2 + 32
\end{aligned} \tag{EK.35}$$

Son olarak;

$$\begin{aligned}
A_n &= \frac{n+4}{2n(n+1)(n+2)} - \frac{(n+2)(n-2)}{n^2(n+1)(n-1)} + \frac{n+4}{2n(n-1)(n-2)} = \\
&= \frac{1}{n} \frac{4n^2 + 32}{2(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)} = \frac{2n^2 + 16}{n^2(n^2 - 1)(n^2 - 2)} = \frac{2}{n^4} + O(n^{-6})
\end{aligned} \tag{EK.36}$$

(EK.28), (EK.30) ve (EK.36) kullanılarak

$$J_n'(z)H_n^{(1)'}(z) = \frac{i}{\pi z} n \left\{ \begin{aligned} &1 - \left[\frac{2}{n^2} + \frac{2}{n^4} + O(n^{-6}) \right] \left(\frac{z}{2} \right)^4 + \\ &\left[\frac{2}{n^4} + O(n^{-6}) \right] \left(\frac{z}{2} \right)^4 + O\left(\frac{z^2}{4n} \right)^3 \end{aligned} \right\} \tag{EK.37}$$

Genel halde

$$J_n'(z)H_n^{(1)'}(z) = \frac{i}{\pi z} n \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{z}{n} \right)^2 + O(n^{-4}) \right\}, \quad n \rightarrow \infty \tag{EK.38}$$

(EK.3) ve (EK.14) beraber incelenirse

$$\begin{aligned}
J_n(z)H_n^{(1)'}(z) &= \frac{1}{n!} \left(\frac{z}{2} \right)^n \left[1 - \frac{1}{n+1} \left(\frac{z}{2} \right)^2 + O(n^{-2}) \right] \\
&= \frac{i}{2\pi} n! \left(\frac{z}{2} \right)^{-n-1} \left[1 + \frac{1}{n} \left(\frac{z}{2} \right)^2 + O(n^{-2}) \right] = \\
&= \left(\frac{z}{2} \right)^{-1} \frac{i}{2\pi} \left[1 - \frac{1}{n} \left(\frac{z}{2} \right)^2 + O(n^{-2}) \right] \left[1 + \frac{1}{n} \left(\frac{z}{2} \right)^2 + O(n^{-2}) \right] = \\
&= \frac{i}{\pi z} [1 + O(n^{-2})]
\end{aligned} \tag{EK.39}$$

Son olarak;

$$J_n(z)H_n^{(1)'}(z) = \frac{i}{\pi z} [1 + O(n^{-2})], \quad n \rightarrow \infty \quad (\text{EK.40})$$

Elde edilir. Aynı şekilde 1.6 ve 3.1 beraberince incelenirse;

$$\begin{aligned} J_n'(z)H_n^{(1)}(z) &= \frac{1}{2} \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n-1} \left[1 - \frac{1}{n} \left(\frac{z}{2}\right)^2 + O(n^{-2})\right] \\ &\quad \left(-\frac{1}{\pi}\right) (n-1)! \left(\frac{z}{2}\right)^{-n} \left[1 + \frac{1}{n} \left(\frac{z}{2}\right)^2 + O(n^{-2})\right] = \\ &\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{\pi}\right) \left(\frac{z}{2}\right)^{-1} [1 + O(n^{-2})] = -\frac{i}{\pi z} [1 + O(n^{-2})] \end{aligned} \quad (\text{EK.41})$$

Son olarak;

$$J_n'(z)H_n^{(1)}(z) = -\frac{i}{\pi z} [1 + O(n^{-2})], \quad n \rightarrow \infty \quad (\text{EK.42})$$

Elde edilir.(EK.13) ve (EK.14) kullanılarak

$$\begin{aligned} \frac{H_n^{(1)}(z)}{H_n^{(1)'}(z)} &= \frac{-\frac{i}{\pi} (n-1)! \left(\frac{z}{2}\right)^{-n} \left[1 + \frac{1}{n} \left(\frac{z}{2}\right)^2 + O(n^{-2})\right]}{\frac{i}{2\pi} n! \left(\frac{z}{2}\right)^{-n-1} \left[1 + \frac{1}{n} \left(\frac{z}{2}\right)^2 + O(n^{-2})\right]} = \\ &-2 \frac{1}{n} \frac{2}{z} \left[1 + \frac{1}{n} \left(\frac{z}{2}\right)^2 + O(n^{-2})\right] \left[1 - \frac{1}{n} \left(\frac{z}{2}\right)^2 + O(n^{-2})\right] = \\ &-\frac{4}{nz} [1 + O(n^{-2})], \quad n \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (\text{EK.43})$$

$$\frac{H_n^{(1)}(z)}{H_n^{(1)'}(z)} = -\frac{4}{nz} [1 + O(n^{-2})], \quad n \rightarrow \infty \quad (\text{EK.44})$$

(EK.3) ve (EK.6) ile

$$\frac{J_n(z)}{J_n'(z)} = \frac{\frac{1}{n!} \left(\frac{z}{2}\right)^n \left[1 - \frac{1}{n} \left(\frac{z}{2}\right)^2 + O(n^{-2})\right]}{\frac{1}{2} \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n-1} \left[1 - \frac{1}{n} \left(\frac{z}{2}\right)^2 + O(n^{-2})\right]} \quad (\text{EK.45})$$

$$= 2 \frac{1}{n} \frac{z}{2} [1 + O(n^{-2})] = \frac{z}{n} [1 + O(n^{-2})], \quad n \rightarrow \infty$$

$$\frac{J_n(z)}{J_n'(z)} = \frac{z}{n} [1 + O(n^{-2})], \quad n \rightarrow \infty \quad (\text{EK.46})$$

Elde edilir. Son olarak (EK.26), (EK.38), (EK.40) ve (EK.42) tekrar yazılırsa

$$J_n(z)H_n^{(1)}(z) = -\frac{i}{\pi n} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{n} \right)^2 + O(n^{-4}) \right\}, \quad n \rightarrow \infty \quad (\text{EK.47})$$

$$J_n'(z)H_n^{(1)'}(z) = \frac{i}{\pi z} n \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{z}{n} \right)^2 + O(n^{-4}) \right\}, \quad n \rightarrow \infty \quad (\text{EK.48})$$

$$J_n(z)H_n^{(1)'}(z) = \frac{i}{\pi z} [1 + O(n^{-2})], \quad n \rightarrow \infty \quad (\text{EK.49})$$

$$J_n'(z)H_n^{(1)}(z) = -\frac{i}{\pi z} [1 + O(n^{-2})], \quad n \rightarrow \infty \quad (\text{EK.50})$$

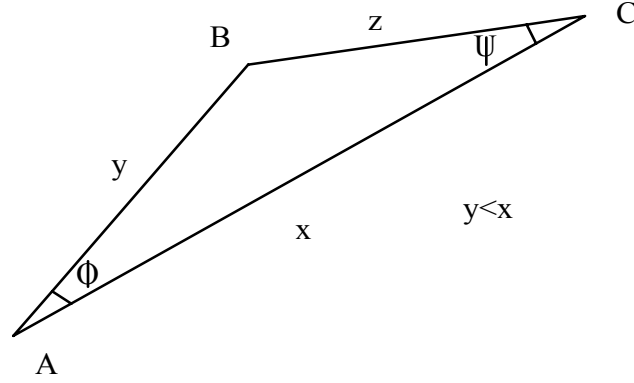
$$\frac{H_n^{(1)}(z)}{H_n^{(1)'}(z)} = -\frac{4}{nz} [1 + O(n^{-2})], \quad n \rightarrow \infty \quad (\text{EK.51})$$

$$\frac{J_n(z)}{J_n'(z)} = \frac{z}{n} [1 + O(n^{-2})], \quad n \rightarrow \infty \quad (\text{EK.52})$$

ifade edilir.

EK B – Graf Teoremi

Elektriksel alanların bölge bazında birbirleri cinsinden ifade etmek için kullanılan ve Graf teoremi olarak anılan teorem geometrik yapı için aynen uygulanabilir. Bunun için en temel geometrik şekil EK.1 de verilmiştir.

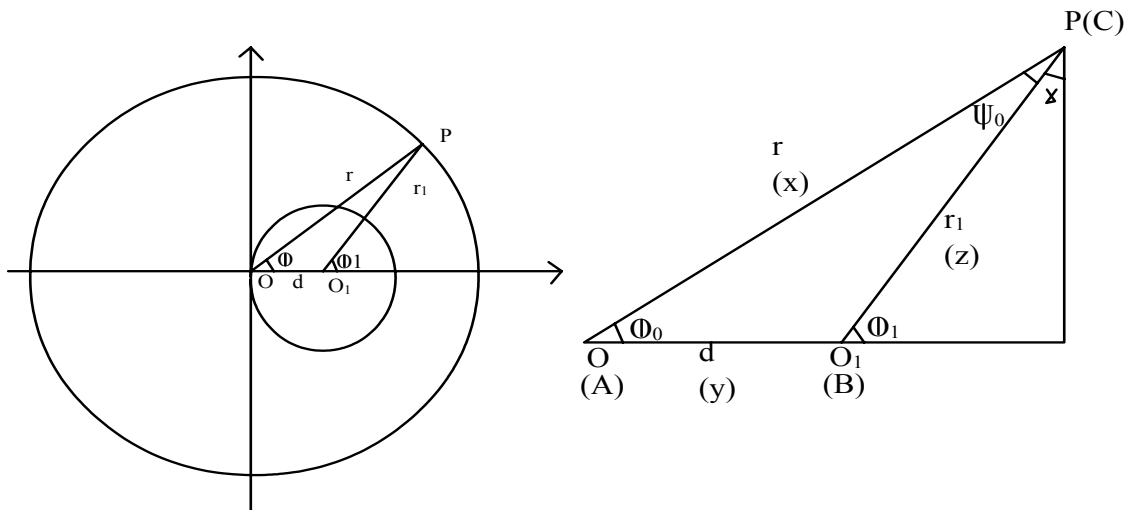


Şekil EK.1. Graf Teoremi için En Basit Sistem

$$Z_n(z)e^{im\psi_0} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} Z_{n+m}(x)J_m(y)e^{im\psi_0}, y \leq x \quad (\text{EK.53})$$

$Z_n(t)$ Bessel eşitliğinin çözümü olan Bessel, Neuman veya Hankel fonksiyonlarından biridir. Çözümünü bulmaya çalıştığımız sistem için aşağıda bulunan iki durumu inceleyeceğiz.

EK B – 1.1. Durum 1 $(\tau_1, \varphi_1) \rightarrow (\tau, \varphi)$ Dönüşümü



Şekil EK.2. Graf Teoreminde $(t_1, j_1) \otimes (t, j)$ Dönüşümü

$$y = k_b d; x = k_b \tau; z = k_b \tau_1 \quad (\text{EK.54})$$

$$O \leftrightarrow A; O_1 \leftrightarrow B; p \leftrightarrow C \quad (\text{EK.55})$$

$$\varphi_0 = \angle pOO_1; \psi_0 = \angle OpO_1 \quad (\text{EK.56})$$

$$Z_n(k_B \tau_1) e^{in\varphi_0} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} Z_{n+m}(k_B \tau) J_m(k_B d) e^{im\varphi_0} \quad (\text{EK.57})$$

Şekil EK.2 nin sağ yanı uyarınca;

$$\varphi_0 = \varphi \quad (\text{EK.58})$$

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - \varphi_1; \psi_0 + \gamma = \frac{\pi}{2} - \varphi_0 = \frac{\pi}{2} - \varphi \quad (\text{EK.59})$$

$$\psi_0 = \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) - \gamma = \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) - \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_1\right) = \varphi_1 - \varphi \quad (\text{EK.60})$$

ifadeleri bulunur. Genel halde;

$$Z_n(k_B \tau_1) e^{in(\varphi_1 - \varphi)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} Z_{n+m}(k_B \tau) J_m(k_B d) e^{im\varphi} \quad (\text{EK.61})$$

$$(s = n + m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} Z_s(k_B \tau) J_{s-n}(k_B d) e^{i(s-n)\varphi} \quad (\text{EK.62})$$

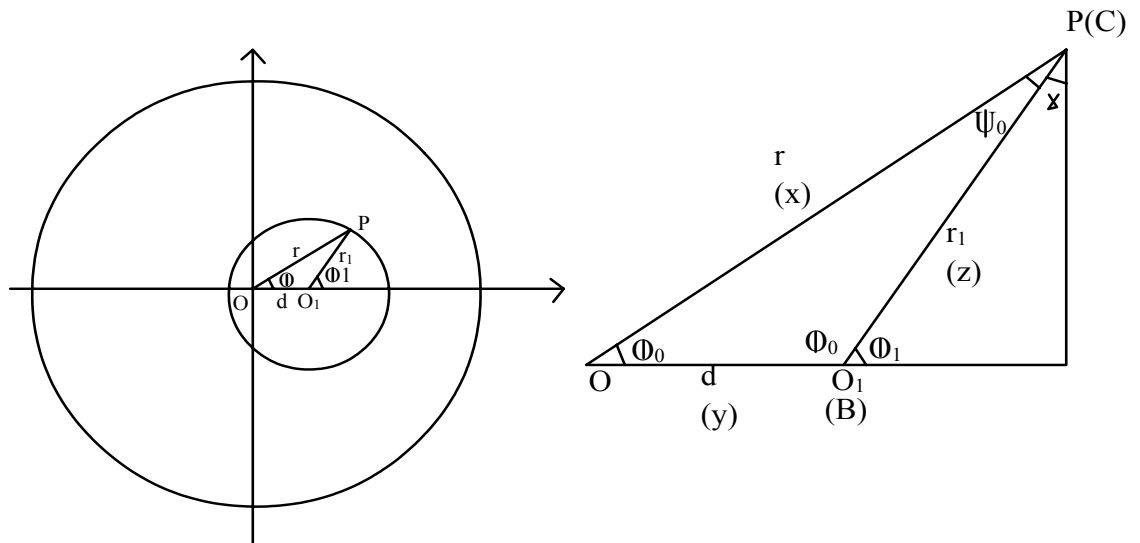
$$(m = s - n)$$

Sonuç olarak

$$Z_n(k_B \tau_1) e^{in\varphi_1} = \sum_{s=-\infty}^{\infty} Z_s(k_B \tau) J_{s-n}(k_B d) e^{is\varphi}; d < \tau \quad (\text{EK.63})$$

EK B – 1.2. Durum 2 $(\tau, \varphi) \rightarrow (\tau_1, \varphi_1)$ Dönüşümü

EK B - 1.2.1 Durum 2.1 $d < \tau_1$ Hali



Şekil EK.3. Graf Teoreminde $(t, j) \rightarrow (t_1, j_1)$ ve $d < t_1$ Dönüşümü

$$z = k_b \tau; y = k_b d; x = k_b \tau_1 \quad (\text{EK.64})$$

$$\varphi_0 = \pi - \varphi_1; \psi_0 = \varphi_1 - \varphi \quad (\text{EK.65})$$

$$\begin{aligned} Z_n(k_B \tau) e^{in(\varphi_1 - \varphi)} &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} Z_{n+m}(k_B \tau_1) J_m(k_B d) e^{in(\pi - \varphi_1)} \\ (s = n + m) &= \sum_{s=-\infty}^{\infty} Z_s(k_B \tau_1) J_{s-n}(k_B d) e^{i(s-n)\pi} e^{-is\varphi_1} e^{is\varphi} \\ (m = s - n) & \end{aligned} \quad (\text{EK.66})$$

Genel olarak;

$$Z_n(k_B \tau) e^{-in\varphi} = \sum_{s=-\infty}^{\infty} (-1)^{s-n} Z_s(k_B \tau_1) J_{s-n}(k_B d)^{-es\varphi_1} \quad (\text{EK.67})$$

$$q = -s; (s = -q) \quad Z_{-p}(t) = (-1)^p Z_p(t) \quad (\text{EK.68})$$

$$s - n = -q + p = p - q$$

$$(-1)^p Z_p(k_B \tau) e^{ip\varphi} = \sum_{q=-\infty}^{\infty} (-1)^{p-q} (-1)^q Z_q(k_B \tau_1) J_{p-q}(k_B d) e^{iq\varphi_1} \quad (\text{EK.69})$$

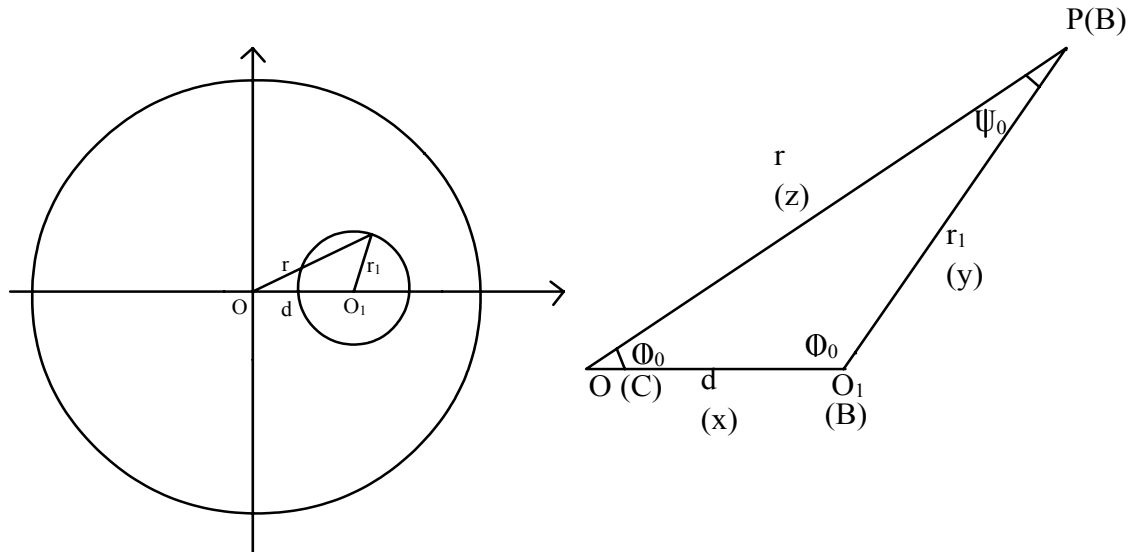
$$Z_p(k_B \tau) e^{ip\varphi} = \sum_{q=-\infty}^{\infty} Z_q(k_B \tau_1) J_{p-q}(k_B d) e^{iq\varphi_1} \quad (\text{EK.70})$$

Son olarak ise ($p \rightarrow n, q \rightarrow s$);

$$Z_n(k_B \tau) e^{in\varphi} = \sum_{s=-\infty}^{\infty} Z_s(k_B \tau_1) J_{n-s}(k_B d) e^{is\varphi_1}; d < \tau_1 \quad (\text{EK.71})$$

ifadesi elde edilir.

EK B - 1.2.2 Durum 2.2 $d > \tau_1$ Hali



Şekil EK.4. Graf Teoreminde $(t, j) \otimes (t_1, j_1)$ ve $d > \tau_1$ Dönüşümü

$$z = k_B \tau; y = k_B \tau_1; x = k_B d \quad (\text{EK.72})$$

$$\psi_0 = \varphi; \varphi_0 = \pi - \varphi_1 \quad (\text{EK.73})$$

$$Z_n(k_B \tau) e^{in\varphi} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} Z_{n+m}(k_B d) J_m(k_B \tau_1) e^{im(\pi-\varphi_1)} \quad (\text{EK.74})$$

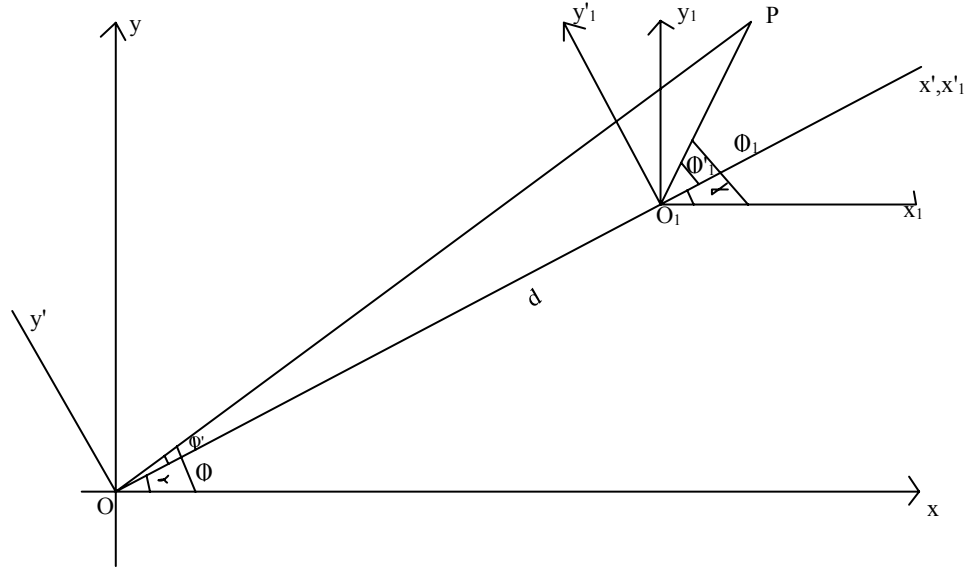
$$s = -m \quad \sum_{m=-\infty}^{\infty} Z_{n-s}(k_B d) (-1)^s J_s(k_B \tau_1) e^{is\pi} e^{is\varphi_1} \quad (\text{EK.75})$$

$$m = -s$$

Son olarak;

$$Z_n(k_B \tau) e^{in\varphi} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} Z_{n-s}(k_B d) J_s(k_B \tau_1) e^{im\varphi_1}; d > \tau_1 \quad (\text{EK.76})$$

EK B - 1.3 Keyfi Seçilen O_1 Noktası İçin Graf Teoremi



Şekil EK.5. Keyfi O_1 noktası için Graf Teoremi

O_1 noktası $O_1 = (d, \alpha)$ koordinatlarına sahip XOY koordinat sisteminde bir nokta olsun. $X'OY'$ ve $X_1'OY_1'$ şeklinde yeni eksenleri OX' ve OX_1' in OO_1 doğrusu üzerinde bulunduğu döndürülmüş bir koordinat sistemi tanımlayalım. Bu yeni koordinat sistemleri $X'OY'$ ve $X_1'OY_1'$, XOY ve X_1OY_1 koordinat sistemlerinin O ve O_1 noktaları ile α açısı yapmış yeni halleri olsunlar. Graf teoremi $X'OY'$ ve $X_1'OY_1'$ koordinat sistemlerinde (τ', φ') ve (τ_1', φ_1') koordinatlarında geçerlidirler. Bu teoriden yola çıkarak hedefimiz Graf teoremini (τ, φ) ve (τ_1, φ_1) koordinatlarında yazmaktır, bunun için bize gereken ise yeni ve eski koordinat sistemlerini birbirine bağlamaktır. Bu bağlantı ise şekil EK.5 de gösterildiği gibi;

$$\begin{aligned}\tau &= \tau', & \varphi' &= \varphi - \alpha; \\ \tau_1 &= \tau_1', & \varphi_1' &= \varphi_1 - \alpha;\end{aligned}\quad (\text{EK.77})$$

Şeklindedir. (EK.25), (EK.32) ve (EK.36) en genel halde aşağıdaki ifadeler haline gelecektir;

$$Z_n(k_B \tau_1) e^{in\varphi_1} = e^{in\alpha} \sum_{s=-\infty}^{\infty} Z_s(k_B \tau) J_{s-n}(k_B d) e^{in(\varphi-\alpha)}; d < \tau \quad (\text{EK.78})$$

$$Z_n(k_B \tau) e^{in\varphi} = e^{in\alpha} \sum_{s=-\infty}^{\infty} Z_s(k_B \tau_1) J_{n-s}(k_B d) e^{is(\varphi_1-\alpha)}; d < \tau_1 \quad (\text{EK.79})$$

$$Z_n(k_B \tau) e^{in\varphi} = e^{in\alpha} \sum_{s=-\infty}^{\infty} Z_{n-s}(k_B d) J_s(k_B \tau_1) e^{is(\varphi_1-\alpha)}; d > \tau_1 \quad (\text{EK.80})$$

Çıkarılan bu ifadeleri kırımın probleminin gerektirdiği şekli ile özel durumlar için Bessel ve Hankel fonksiyonları için yeniden yazmak gereklidir. Bazı özel haller için bunlar;

$$\begin{aligned}H_n^{(1)}(k_B \tau_1) e^{in\varphi_1} &= e^{in\alpha} \sum_{s=-\infty}^{\infty} H_s^{(1)}(k_B \tau) J_{s-n}(k_B d) e^{is(\varphi-\alpha)} \\ &= \sum_{s=-\infty}^{\infty} e^{-i(s-n)\alpha} J_{s-n}(k_B d) H_s^{(1)}(k_B \tau) e^{is\varphi}; d < \tau\end{aligned}\quad (\text{EK.81})$$

Sonuç olarak

$$H_n^{(1)}(k_B \tau_1) e^{in\varphi_1} = \sum_{s=-\infty}^{\infty} e^{-i(s-n)\alpha} J_{s-n}(k_B d) H_s^{(1)}(k_B \tau) e^{is\varphi}; d < \tau \quad (\text{EK.82})$$

İkinci olarak;

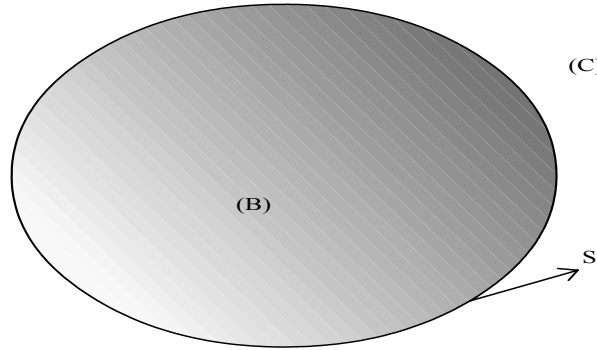
$$J_n(k_B \tau) e^{in\varphi} = \sum_{s=-\infty}^{\infty} e^{i(n-s)\alpha} J_{n-s}(k_B d) J_s(k_B \tau_1) e^{is\varphi_1}; d < \tau_1 \quad (\text{EK.83})$$

Üçüncü olarak;

$$J_n(k_B \tau) e^{in\varphi} = \sum_{s=-\infty}^{\infty} e^{i(n-s)\alpha} J_{n-s}(k_B d) J_s(k_B \tau_1) e^{is\varphi_1}; d > \tau_1 \quad (\text{EK.84})$$

EK C – Saçılan Alan İfadesinin Green Formülü ve Cismın Konturu Üzerindeki Limit Değerleri ile İntegral Gösterimi

S bir saçıcının herhangi bir konturu olsun. B bölgesini S konturu ile kapatılmış bölge ve C bölgesini ise R^2/B şeklinde ifade edebiliriz. Green formülününü 3. teoremi uyarınca C ve B bölgesinden saçılan $u^s(p)$ (EK.85) ve (EK.86) deki gibi ifade edilebilir.



Şekil EK.6. Konturlerin Gösterimi

$$u^s(q) = - \int_s \left[\frac{u^{s(+)}(p) \frac{\partial \varepsilon_2(k_C |q-p|)}{\partial n_p}}{\varepsilon_2(k_C |q-p|) \frac{\partial u^{s(+)}(p)}{\partial n_p}} \right] dl_p ; q \in C \quad (\text{EK.85})$$

$$u^s(q) = \int_s \left[\frac{u^{s(-)}(p) \frac{\partial \varepsilon_2(k_B |q-p|)}{\partial n_p}}{\varepsilon_2(k_B |q-p|) \frac{\partial u^{s(-)}(p)}{\partial n_p}} \right] dl_p ; q \in B \quad (\text{EK.86})$$

$u^s(p)$ ifadesi (EK.87) ve (EK.88) deki özellikleri sağlamaktadır.

$$u^{s(\pm)}(q) = \lim_{h \rightarrow +0} u^s(p \pm hn_p) ; \frac{\partial u^{s(\pm)}}{\partial n}(p) = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{\partial u^s(p \pm hn_p)}{\partial n_p} \quad (\text{EK.87})$$

$$\varepsilon_2(k|q-p|) = -\frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|q-p|) \quad (\text{EK.88})$$

Eğer (EK.85) ve (EK.86) denklemlerine $\eta(\mathcal{G}) = (x(\mathcal{G}), y(\mathcal{G}))$; $\mathcal{G} \in [-\pi, \pi]$ şeklinde bir parametrizasyon uygulanırsa (EK.89) ve (EK.90) daki şekliyle yeniden yazılabilirler.

$$u^s(q) = - \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \begin{array}{l} u^{(+)}(\tau) \left[\frac{\partial \varepsilon_2(k_C | q-p|)}{\partial n_p} \right]_{p=\eta(\tau)} - \\ \left[\varepsilon_2(k_C | q-p|) \right]_{p=\eta(\tau)} v^{(+)}(\tau) \end{array} \right\} l(\tau) d(\tau) ; q \in C \quad (\text{EK.89})$$

$$u^s(q) = \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \begin{array}{l} u^{(-)}(\tau) \left[\frac{\partial \varepsilon_2(k_C | q-p|)}{\partial n_p} \right]_{p=\eta(\tau)} \\ - \left[\varepsilon_2(k_C | q-p|) \right]_{p=\eta(\tau)} v^{(-)}(\tau) \end{array} \right\} l(\tau) d(\tau) \quad (\text{EK.90})$$

(EK.89) ve (EK.90) yazılırken (EK.91) ve (EK.92) de belirtilen notasyonlar kullanılmıştır.

$$u^{s(\pm)}(\tau) = u^{s(\pm)}(\eta(\mathcal{G})) ; v^{s(\pm)}(\tau) = \frac{\partial u^{s(\pm)}(\eta(\mathcal{G}))}{\partial n} ; \quad (\text{EK.91})(\text{EK.92})$$

$$l(\tau) = \left\{ [x'(\tau)]^2 [y'(\tau)]^2 \right\}^{1/2} > 0$$

Burada önemli olan $u^{s(\pm)}(p)$ ve $\frac{\partial u^{s(\pm)}(p)}{\partial n}$ fonksiyonlarının belirtilen

Sobolev uzayına dahil olmasıdır. Bağlantıları (EK.93) denkleminde verilen ifadeye $H^v(s)$ S konturu üzerinde tanımlı Sobolev uzayını simgelemektedir. [27, 28]

$$u^{(\pm)}(p) \in H^{1/2}(s) ; \frac{\partial u^{(\pm)}}{\partial n} \in H^{-1/2}(s) \quad (\text{EK.93})$$

Kolayca gösterilebileceği gibi (EK.93)1.9 denklemi (EK.94) – (EK.96) deki ifadeler kullandığında eşittir.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |u^{(\pm)}| (1+|n|) < \infty ; \sum_{n=-\infty}^{\infty} |v^{(\pm)}| (1+|n|)^{-1} < \infty \quad (\text{EK.94})$$

$$u^{(\pm)}(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n^{(\pm)} e^{in\tau} ; \tau \in [-\pi, \pi] \quad (\text{EK.95})$$

$$v^{(\pm)}(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_n^{(\pm)} e^{in\tau} ; \tau \in [-\pi, \pi] \quad (\text{EK.96})$$

(EK.95) – (EK.96) de belirtilen $u^{(\pm)}$ ve $v^{(\pm)}$ ifadeleri sırasıyla $u^{(\pm)}(\tau)$ ve $v^{(\pm)}(\tau)$ nin Fourie katsayılarıdır. Sistem (EK.97) de belirtildiği gibi parametrize edilirse Graf teoremi (EK B) de kullanılarak (EK.98) deki gibi yeniden yazılabilir.

$$\eta(\varphi) = (x(\varphi), y(\varphi)) ; x(\varphi) = b \cos(\varphi) ; y(\varphi) = b \sin(\varphi) \quad (\text{EK.97})$$

$$\varepsilon_2(k|q-p|) = \begin{cases} -\frac{i}{4} \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(k\tau_q) H_m^{(1)}(k\tau_p) e^{im(\varphi_q - \varphi_p)} ; \tau_q < \tau_p \\ -\frac{i}{4} \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(k\tau_p) H_m^{(1)}(k\tau_q) e^{im(\varphi_q - \varphi_p)} ; \tau_q > \tau_p \end{cases} \quad (\text{EK.98})$$

(EK.98) de belirtilen q ve p silindirik koordinat sisteminde $q = (\tau_q, \varphi_q)$, $p = (b, \varphi_p) \in C_B$ ile ifade edilmektedir. (EK.98) ifadesi kullanılarak $p = (\tau_p, \varphi_p)$, $p = (\tau_q, \varphi_q)$ uyarınca (EK.99) ve (EK.100) ifadesi bulunabilir.

$$\frac{\partial \varepsilon_2(k|q-p|)}{\partial \tau_p} = -\frac{i}{4} \sum_{m=-\infty}^{\infty} k J_m'(k\tau_p) H_m^{(1)}(k\tau_q) e^{im(\varphi_q - \varphi_p)} \quad (\text{EK.99})$$

$$\frac{\partial \varepsilon_2(k|q-p|)}{\partial \tau_p} = -\frac{i}{4} \sum_{m=-\infty}^{\infty} k J_m'(k\tau_q) H_m^{(1)}(k\tau_p) e^{im(\varphi_q - \varphi_p)} \quad (\text{EK.100})$$

(EK.99), (EK.98) ve (EK.95) ifadeleri (EK.90) de $\tau_p < \tau_q$ koşulu için uygulanırsa;

$$\begin{aligned} & -\int_{-\pi}^{\pi} u^{(+)}(\varphi_p) \left[\frac{\partial \varepsilon_2(k|q-p|)}{\partial \tau_p} \right]_{\tau_p=b+0} l(\varphi_p) d(\varphi_p) \\ &= -\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n^{(+)} e^{in\varphi_p} \left(-\frac{i}{4} \right) \sum_{m=-\infty}^{\infty} k J_m'(kb) H_m^{(1)}(k\tau_q) e^{im(\varphi_q - \varphi_p)} b d\varphi_p \\ &= \frac{i}{4} kb \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} u_n^{(+)} J_m'(kb) H_m^{(1)}(k\tau_q) e^{im\varphi_q} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)\varphi_p} d\varphi_p}_{=2\pi\delta_{nm}} \\ &= 2\pi \frac{i}{4} (kb) \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n^{(+)} J_n'(kb) H_n^{(1)}(k\tau_q) e^{in\varphi_q} \end{aligned} \quad (\text{EK.101})$$

$$\begin{aligned} & + \int_{-\pi}^{\pi} v^{(+)}(\varphi_p) [\varepsilon_2(k|q-p|)]_{\tau_p=b} l(\varphi_p) d\varphi_p \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_n^{(+)} e^{in\varphi_p} \left(-\frac{i}{4} \right) \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(kb) H_m^{(1)}(k\tau_q) e^{im(\varphi_q - \varphi_p)} b d\varphi_p \\ &= -\frac{i}{4} b 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_n^{(+)} J_n(kb) H_n^{(1)}(k\tau_q) e^{in\varphi_q} \end{aligned} \quad (\text{EK.102})$$

Son olarak $u^s(q)$ (EK.89) deki gösterimiyle (EK.103) elde edilir.

$$u^s(q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} \tilde{c}_1^{(+)} u_n^{(+)} J_n'(k_c b) + \\ \tilde{c}_2^{(+)} v_n^{(+)} J_n(k_c b) \end{array} \right\} H_m^{(1)}(k_c \tau_q) e^{im\varphi_q} \quad (\text{EK.103})$$

$\tilde{c}_1^{(+)}$ ve $\tilde{c}_2^{(+)}$ şuan için önemi olmayan sabit ifadelerdir.

(EK.103) ifadesi $E_z^{(C)}(p) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n H_n^{(1)}(k_C \tau) e^{in\varphi}$, $p = (\tau, \varphi)$, $\tau \geq b$ ile beraberce

ele alınır ise (EK.104) ifadesi bulunabilir. Bu aşamada C bölgesindeki alan değeri

$$E_z^{(C)}(p) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n H_n^{(1)}(k_C \tau) e^{in\varphi}, p = (\tau, \varphi), \tau \geq b \quad \text{şeklinde ifade edilebilir.}$$

(EK.94) da bulunan $u_n^{(\pm)}$ ve $v_n^{(\pm)}$ ifadeleri (EK.105) de gösterildiği gibi ifade

edilebilir. $\hat{u}_n^{(\pm)}$ ve $\hat{v}_n^{(\pm)}$ ifadeleri (EK.106) ve (EK.107) de gösterildiği gibi l_2 uzayına dahildir.

$$D_n = \tilde{C}_1^{(+)} u_n^{(+)} J_n'(k_C b) + \tilde{C}_2^{(+)} v_n^{(+)} J_n(k_C b) \quad (\text{EK.104})$$

$$u_n^{(\pm)} = \tau_n^{-1} \hat{u}_n^{(\pm)}, \quad v_n^{(\pm)} = \tau_n^{+1} \hat{v}_n^{(\pm)} \quad (\text{EK.105})$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{u}_n^{(\pm)}|^2 < \infty, \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{v}_n^{(\pm)}|^2 < \infty \quad (\text{EK.106})$$

$$\tau_n = \max(1, |n|^{1/2}) \quad (\text{EK.107})$$

Yukarıdaki belirtilen nedenler ve gösterimlerden dolayı (EK.104) ifadesi (EK.108) deki gibi ifade edilebilir. $\tau_n J_n(z)$ ve $\tau_n^{-1} J_n'(z)$ ifadeleri $n \rightarrow \infty$ durumunda (EK.109) ve (EK.110) daki gibi davranırlar.(EK A)

$$D_n = \tilde{C}_1^{(+)} \hat{u}_n^{(+)} \tau_n^{-1} J_n'(k_C b) + \tilde{C}_2^{(+)} \hat{v}_n^{(+)} \tau_n^{+1} J_n(k_C b) \quad (\text{EK.108})$$

$$\tau_n J_n(z) = \sqrt{n} \frac{1}{n!} \left(\frac{z}{2}\right)^n \left[1 + O\left(\frac{z^2}{n}\right)\right] \quad n \rightarrow \infty \quad (\text{EK.109})$$

$$\begin{aligned} \tau_n^{-1} J_n'(z) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{2} \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n-1} \left[1 + O\left(\frac{z^2}{n}\right)\right] \\ &= \frac{\sqrt{n}}{n!} \frac{1}{2} \frac{z}{z} \left(\frac{z}{2}\right)^n \left[1 + O\left(\frac{z^2}{n}\right)\right] = \frac{1}{z} \frac{\sqrt{n}}{n!} \left(\frac{z}{2}\right)^n \left[1 + O\left(\frac{z^2}{n}\right)\right] \quad n \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (\text{EK.110})$$

(EK.109) ve (EK.110) denklemleri uyarınca açıkça görülüyor ki $\tau_n J_n(z)$ ve $\tau_n^{-1} J_n'(z)$ ifadeleri $n \rightarrow \infty$ durumu için benzer asimtotik özellikleri gösterirler.

(EK.109) ve (EK.110) denklemleri sonucunda (EK.111) de bulunan eşitlik kolayca tanımlanabilir. (EK.111) tanımlamasından sonra (EK.109) ve (EK.110) ifadeleri (EK.111) ve (EK.112)daki şekli ile yeniden yazılabilir. (EK.108) ifadesi (EK.112) ve (EK.113) ifadeleri kullanılarak (EK.113) ve (EK.114) deki gibi yeniden yazılabilir.

$$\rho_n(z) \stackrel{def}{=} \frac{\tau_n}{n!} \left(\frac{z}{2}\right)^n \quad (\text{EK.111})$$

$$\tau_n J_n(z) = \rho_n(z)[1 + O(n^{-1})] \quad (\text{EK.112})$$

$$\tau_n^{-1} J_n(z) = \frac{1}{z} \rho_n(z)[1 + O(n^{-1})] \quad (\text{EK.113})$$

$$D_n = \gamma_n \rho_n(k_c b) \quad ; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (\text{EK.114})$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\tilde{\gamma}_n|^2 < \infty \quad (\text{EK.115})$$

(EK.114) ve (EK.115) denklemlerinden görüldüğü gibi $n \rightarrow \infty$ koşulunda D_n ifadesi hızla sıfıra doğru gitmektedir. Yukarıda belirtilen denklemler sonrasında (EK.90) da bulunan integral ifadesini C çemberi etrafında $\tau_p > \tau_q$ durumu için yeniden yazarsak (EK.116) ve (EK.117) denklemlerini elde ederiz.

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{\pi} u^{(-)}(\varphi_p) \left[\frac{\partial \varepsilon_2(k|q-p|)}{\partial n_p} \right]_{p=b-0} l(\varphi_p) d(\varphi_p) = \\ & \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n^{(-)} e^{in\varphi_p} \left(-\frac{i}{4}\right) \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(k\tau_q) H_m^{(1)}(kb) e^{im(\varphi_q - \varphi_p)} b d\varphi_p = \quad (\text{EK.116}) \\ & -2\pi \frac{i}{4} (kb) \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n^{(-)} H_n^{(1)}(kb) J_n(k\tau_q) e^{in\varphi_q} \end{aligned}$$

$$-\int_{-\pi}^{\pi} v^{(-)}(\varphi_p) \varepsilon_2(k|q-p|) l(\varphi_p) = \frac{i}{4} b 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_n^{(-)} H_n^{(1)}(kb) J_n(k\tau_q) e^{in\varphi_q} \quad (\text{EK.117})$$

$$u^s(q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} \tilde{c}_1^{(-)} u_n^{(-)} H_n^{(1)}(k_c b) + \\ \tilde{c}_2^{(-)} v_n^{(-)} H_n^{(1)}(k_c b) \end{array} \right\} J_n(k_c \tau_q) e^{in\varphi_q} \quad ; \quad \tau_q < b \quad (\text{EK.118})$$

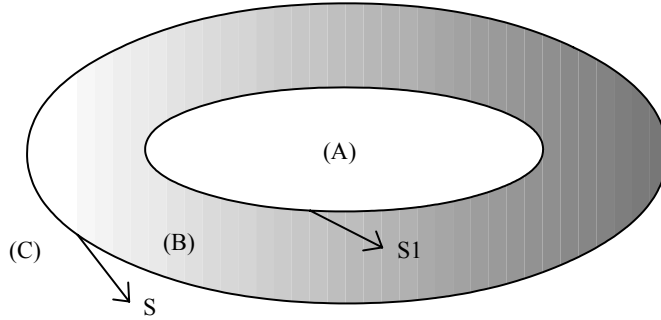
$\tilde{c}_1^{(-)}$ ve $\tilde{c}_2^{(-)}$ sabit katsayılarıdır. (EK.118) ve Bessel fonksiyonunun asimtotik davranışları nedeniyle $n \rightarrow \infty$ durumu için (EK.119) ve (EK.120) ifadeleri doğrudur. (EK.119) ve (EK.120) uyarınca (EK.120) ve (EK.122) ifadesi yazılabilir.

$$\begin{aligned} \tau_n H_n^{(1)}(z) &= \tau_n \left(-\frac{i}{\pi}\right) (n-1)! \left(\frac{z}{2}\right)^{-n} [1 + O(n^{-1})] \\ &= -\frac{i}{\pi} \frac{n!}{\sqrt{n}} \left(\frac{z}{2}\right)^{-n} [1 + O(n^{-1})] = -\frac{i}{\pi} \frac{1}{\rho_n(z)} [1 + O(n^{-1})] \quad ; \quad n \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (\text{EK.119})$$

$$\begin{aligned}
\tau_n^{-1} H_n^{(1)}(z) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{2\pi} n! \left(\frac{z}{2}\right)^{-n-1} [1 + O(n^{-1})] \\
&= \frac{i}{2\pi} \frac{n!}{\sqrt{n}} \left(\frac{z}{2}\right)^{-n} \frac{2}{z} [1 + O(n^{-1})] = \frac{i}{\pi z} \frac{n!}{\sqrt{n}} [1 + O(n^{-1})] \text{ (EK.120)(EK.121)} \\
&\quad - \frac{i}{\pi z} \frac{1}{\rho_n(z)} [1 + O(n^{-1})]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_n &= \tilde{a}_n \rho_n^{-1}(k_A a), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\
\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\tilde{a}_n|^2 &< \infty
\end{aligned} \tag{EK.122)(EK.123)$$

şekil EK.6 da gösterilenden daha karmaşık ve homojen olmayan bir yapı şekil E.7 de gösterildiği gibi olabilir.



Şekil EK.7. Homojen Olmayan Yapıda Konturların Gösterimi

Şekil E.7 durmunda B bölgesi için (EK.86) de gösterilenden daha karmaşık bir ifade olan (EK.124) ifadesinin kullanılması gereklidir.

$$\begin{aligned}
u^s(q) &= \int_S \left[u^{s(-)}(p) \frac{\partial \varepsilon_2(k_B | q-p)}{\partial n_p} - \varepsilon_2(k_B | q-p) v^{s(-)}(p) \right] dl_p + \\
&\quad \int_S \left[u_1^{s(-)}(p) \frac{\partial \varepsilon_2(k_B | q-p)}{\partial n_p} - \varepsilon_2(k_B | q-p) v^{s(-)}(p) \right] dl_p
\end{aligned} \tag{EK.124}$$

Birinci index iç yüzeyde bulunan S₁ konturunu göstermek üzere önceden yapılan adımlar tekrar edilir ise B_n ve C_n için (EK.125) – (EK.128) de bulunan ifadeler bulunur.

$$B_n = \tilde{b}_n \rho_n^{-1}(k_B b), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\tilde{b}_n|^2 < \infty \text{ (EK.125)(EK.126)}$$

$$C_n = \tilde{c}_n \rho_n^{-1}(k_B a), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\tilde{c}_n|^2 < \infty \text{ (EK.127)(EK.128)}$$

(EK.114) – (EK.115), (EK.122) – (EK.123) ve (EK.125) – (EK.128) ifadelerini tekrar yazar isek (EK.129) – (EK.132) ifadelerini elde ederiz.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |D_n \rho_n^{-1}(k_C b)| < \infty \quad (\text{EK.129})$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |A_n \rho_n(k_A a)| < \infty \quad (\text{EK.130})$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |B_n \rho_n(k_B b)| < \infty \quad (\text{EK.131})$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n \rho_n^{-1}(k_B a)| < \infty \quad (\text{EK.132})$$

(EK.129) – (EK.132) denklemleri ile yeni bir bilinmeyen sınıfı yaratmış oluruz, yaratılan bu yeni sınıf ise l_2 uzayının elemanlarıdır. Çok büyük z ve çok küçük n değeri için $\rho_n(z)$ çok büyük değerlere sahip olmaktadır. Bu durum ise numerik olarak denklem sisteminin kararsız olmasına neden olacaktır. Öte yandan $\rho_n(z)$ fonksiyonu Bessel, Hankel ve bunların türevlerinin asimtotik davranışlarından yaratılmıştı. Bu yüzden bu asimtotik davranış sadece $z > n$ koşulunda geçerli olacaktır. Bu yüzden 1.49 da belirtildiği gibi yeni bir açılım yazmak yerinde olacaktır. (EK.133) da belirtilen A değeri ise $A \rho_n^{\sim}(z) \square 1$ şartını sağlayak şekilde seçilmelidir.

$$\rho_n^{\sim}(z) = \begin{cases} 1 ; n < z \\ A \rho_n(z) ; n \geq z \end{cases} \quad (\text{EK.133})$$

A ifadesini bulabilmek için (EK.134) ve (EK.135) ifadeleri yazılabilir.

$$M = M(z) = [|z|]^{\dagger} \quad (\text{EK.134})$$

$$A(z) = \frac{1}{\rho_M(z)} \quad (\text{EK.135})$$

(EK.133)ifadesi (EK.134) ve (EK.135) sayesinde (EK.136) de olduğu gibi yeniden yazılabilir.

$$\rho_n^{\sim}(z) = \begin{cases} 1 ; n < M(z) \\ A(z) \rho_n(z) ; n \geq M(z) \end{cases} \quad (\text{EK.136})$$

[†] [|z|] ifadesi |z| ye en yakın tamsayı değerini ifade etmek için kullanılmıştır.

(EK.136) ifadesi $n \ll M$ durumu için bize hesaplama olanağı sunmayacaktır. Bu yüzden (EK.136) deki ifadeyi bulabilmek için (EK.137) – (EK.141) ifadeleri yazılabilir.

$$\tau_n(z) = \frac{1}{n!} \left(\frac{z}{2} \right)^n, \quad \hat{\tau}_n(z) = \frac{\tau_n(z)}{\tau_{M(z)}(z)} \quad (\text{EK.137})$$

$$\hat{\tau}_N(z) = 1; \quad (\text{EK.138})$$

$$\hat{\tau}_{n+1}(z) = \frac{1}{n+1} \left(\frac{z}{2} \right) \hat{\tau}_n(z) \quad (\text{EK.139})$$

$$\rho_n^1 = \frac{\rho_n(z)}{\rho_M(z)} = \frac{\tau_n}{\tau_M} \quad \frac{\tau_n(z)}{\tau_M(z)} = \frac{\tau_n}{\tau_N} \hat{\tau}_N(z) \quad (\text{EK.140})$$

$$\rho_n^1 = \frac{\tau_n}{\tau_M} \hat{\tau}_N(z); n \geq N \quad (\text{EK.141})$$

(EK.135) ve (EK.136) denklemlerinde de görüldüğü gibi $A(z)$ değeri $\rho_n(z)$ fonksiyonunun asimtotik davranışı açısından uygun değildir. (EK.142) de bulunan denkleme yaklaşıklık yapmaya çalışırsak; $M!$ Değerinin en çok bilinen asimtotik değeri ni Γ fonksiyonu cinsinden ifade ederiz. Bu amaçla (EK.143) ve (EK.144) denklemleri yazılır.

$$A(z) = \frac{1}{\rho_M(z)} \square \frac{1}{\rho_M(\mu)} = \frac{1}{\tau_M} M! \frac{2}{M^M} = \frac{M!}{\sqrt{M} M^M} 2^M \quad (\text{EK.142})$$

$$M! = \Gamma(M+1) \quad (\text{EK.143})$$

$$\ln \Gamma(x) = (x-1/2) \ln(x) - x + \frac{1}{2} \ln 2\pi + O(x^{-1}), \quad x \rightarrow \infty \quad (\text{EK.144})$$

Genel olarak ise $M!$ Değeri yine M değerinden (EK.150) daki gibi ifade edilebilir. Buna bağlı olarak ise $A(z)$ değeri (EK.151) denkleminde belirtilen eşitlik ile ifade edilir.

$$\ln \Gamma(x) = (x-1/2) \ln(x) - x + \frac{1}{2} \ln 2\pi + O(x^{-1}), \quad x \rightarrow \infty$$

$$\ln \Gamma(x) = (x-1/2) \ln(x) - x + \frac{1}{2} \ln 2\pi + O(x^{-1}), \quad x \rightarrow \infty \quad (\text{EK.145})$$

$$\ln \Gamma(x+1) = (x+1/2) \ln(x+1) - (x+1) + \frac{1}{2} \ln 2\pi + O(x^{-1}), \quad x \rightarrow \infty \quad (\text{EK.146})$$

$$\ln(x+1) = \ln x \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1 + \frac{1}{x} + O(x^{-2}) \quad (\text{EK.147})$$

$$\begin{aligned}
(x+1/2) \ln(x+1) &= \\
(x+1/2) \ln x \left[1 + \frac{1}{x} + O(x^{-2}) \right] &= \\
\ln x \left[x + \frac{1}{2} + 1 + O(x^{-1}) \right] &= \\
(x + \frac{3}{2}) \ln x + O(x^{-1} \ln x) &
\end{aligned} \tag{EK.148}$$

$$\ln \Gamma(x+1) = (x + \frac{3}{2}) \ln x - (x+1) + \frac{1}{2} \ln 2\pi + O(x^{-1} \ln x) \tag{EK.149}$$

$$M! \square M^{M+\frac{3}{2}} e^{-(M+1)} \sqrt{2\pi} \tag{EK.150}$$

$$\begin{aligned}
A(z) \square \frac{M!}{\sqrt{M} M^M} 2^M &= \frac{2^M}{\sqrt{M} M^M} M^{M+\frac{3}{2}} e^{-(M+1)} \sqrt{2\pi} = \\
\frac{1}{2} \sqrt{2\pi} \left(\frac{2}{e} \right)^{(-M+1)} M &
\end{aligned} \tag{EK.151}$$

$e > 2$ olduğundan $M \rightarrow \infty$ ifadesi için $A(z)$ değeri büyük z değerleri için hızla sıfıra yakınsar. Bu işlemler sonucunda $A(z)$ nin büyük değerli olması cebirsel denklemin kötü sonuçlar üretmesine neden olacaktır. Bu nedenle bu değer Bessel fonksiyonunda olduğu gibi büyük argüman ve indis için yeterli derecede iyi asimtotik davranışlara sahip olmalıdır. Sanılanın aksine bu durumun sağlanması zor bir işlemdir. Bu davranış z ve n nin davranışına bağlıdır. Bu noktada (EK.111) yerine $1/H_n^{(1)'}(z)$ ifadesinin kullanılması olaya farklı bir bakış açısı getirmektedir. Yapılan bu önerme sonucunda elde edilecek sistemin daha kararlı olduğu deneylerde görülebilecek hale getirilmiştir. Yapılan ilk önerme (EK.152) formülünün kullanılması yönünde idi, fakat bu öneri $1 \ll n \ll z$ durumu için hiç de iyi sonuçlar üretmemektedir; nedenleri ise (EK.153) ve (EK.154) denklemlerinde açıkça görüldüğü gibi elemanlar $n^{1/2}$ katsayısı ile artmaktaydı, bizim istediğimiz ise $n \leq |z|$ civarında sabit değer alması yönünde idi.

$$\rho_n(z) \square \frac{i}{\pi z} \frac{\tau_n}{|H_n^{(1)'}(z)|} = \frac{i}{\pi z} \frac{n^{1/2}}{H_n^{(1)'}(z)} [1 + O(n^{-1})], \quad n \rightarrow \infty \tag{EK.152}$$

$$|H_n^{(1)'}(z)| \square \frac{const}{\sqrt{|z|}}, \quad |z| \gg n \tag{EK.153}$$

$$\frac{i}{\pi z} \frac{n^{1/2}}{H_n^{(1)'}(z)} \square \frac{in^{1/2}}{\pi z^{1/2}} \tag{EK.154}$$

İkinci önerme ise (EK.155) formülünün kullanılması şeklinde idi. $|H_n^{(1)}(z)|$ fonksiyonu $z \gg n$ civarında $|H_n^{(1)'}(z)|$ ile aynı asimtotik davranışı sergilemektedir.

$$\rho_n(z) \square -\frac{i}{\pi \tau_n H_n^{(1)'}(z)} [1 + O(n^{-1})] \quad (\text{EK.155})$$

$$|H_n^{(1)}(z)| \square \frac{\text{const}}{\sqrt{|z|}}, \quad |z| \gg n \quad (\text{EK.156})$$

$$-\frac{i}{\pi \tau_n H_n^{(1)}(z)} \square -\frac{iz^{1/2}}{\pi n^{1/2}}, \quad |z| \gg |n| \quad (\text{EK.157})$$

(EK.157)de de açıkça görüldüğü gibi seri $|z| \gg n$ için $n^{-1/2}$ ile azalmaya devam etmektedir. Bu durumu bertaraf etmek için (EK.158) deki gibi denklem sistemi kullanılabilir.

$$\rho_n^2(z) = \begin{cases} -\frac{i}{\pi z^{1/2} H_n^{(1)}(z)}, & n < z \\ -\frac{i}{\pi n^{1/2} H_n^{(1)}(z)}, & z \geq n \end{cases} \quad (\text{EK.158})$$

(EK.158) ifadesi (EK.111) de belirtilen $\rho_n(z)$ ile (EK.159)da da gösterildiği gibi aynı asimtotik davranışa sahiptir. Aynı zamanda (EK.160)de de ifade edildiği gibi $n \ll |z|$ durumu için sabite yakınsamaktadır. $z=n$ durumu için ise herhangi bir süreksizliğe sahip değildir.

$$\rho_n(z) \equiv \frac{\tau_n}{n!} \left(\frac{z}{2}\right)^n = \rho_n^2(z) [1 + O(n^{-1})] \quad (\text{EK.159})$$

$$\rho_n^2(z) \square \text{const} \quad n \ll |z| \quad (\text{EK.160})$$

Başka bir düşünce ise aynı ifadeyi $H_n^{(1)}(z)$ ve $H_n^{(1)'}(z)$ yerine $J_n(z)$ ve $J_n'(z)$ ile ifade etmektir, fakat buda $J_n(z)$ ve $J_n'(z)$ ' in reel eksende kökleri olduğu için iyi bir seçim olmayacaktır. Aynı sıkıntı her ne kadar $H_n^{(1)}(z)$ ve $H_n^{(1)'}(z)$ için bulunsada Hankel fonksiyonunun reel köklerinin olmaması durumu rahatlatmaktadır. Unutulmaması gereken ise Hankel fonksiyonunu sıfıra yakın olan complex köklerinin bulunmasıdır. Bu yüzden k_A, k_B ve k_C nin complex değerleri ile çalışılırken bu sıfırlara rastlanabilir. Bu durumu göz ardı edersek bizim için en uygun ifadeyi elde etmiş oluruz. $\rho_n^3(z)$ ifadesi cebirsel sistemde kullanılırken $\tilde{R}_n(z)$ olarak ifade edilecektir.

$$t_n(z) = \begin{cases} 1, & \text{if } 1 > |H_n^{(1)}(z)| \\ H_n^{(1)}(z), & 1 \leq |H_n^{(1)}(z)| \end{cases} \quad (\text{EK.161})$$

$$\rho_n^3(z) = -\frac{i}{\pi} \begin{cases} \frac{1}{z^{1/2} t_n(z)}, & |n| < |z| \\ \frac{1}{|n|^{1/2} t_n(z)}, & |n| \geq |z| \end{cases} \quad (\text{EK.162})$$

EK D Bessel Fonksiyonu İçin C++ Kodları

EK D 1 Bessel, Neuman ve Hankel Fonksiyonu

```

#ifndef TTBESSEL_H_
#define TTBESSEL_H_
#include <complex>

/*
    1. ve 2. Tipte Bessel Fonksiyonlarının tamsayı indisleri için değerlerin
    veren sınıf
    Platform : Suse Linux 10.0
    IDE      : Edit Plus
    Tarih    : 29.09.2005
*/
template <class T, class IntType = long>
class TTBessel
{
public:
    T J0(T x); //1.Tipte Bessel Fonksiyonunun 0.Değeri
    T Y0(T x); //2.Tipte Bessel Fonksiyonunun 0.Değeri
    T J1(T x); //1.Tipte Bessel Fonksiyonunun 1.Değeri
    T Y1(T x); //2.Tipte Bessel Fonksiyonunun 1.Değeri

private:
    enum FunctionType {First_Kind, Second_Kind};
    T Bessel0_(T x, FunctionType fn_type);

    T J0_(T x);
    T Y0_(T x);

    T J1_0_(T x);
    T J1_1_(T x);
    T Y1_(T x);

    std::complex<T> H0(T x); //1.Tipte Hankel fonksiyon değeri
    std::complex<T> H1(T x); //1.Tipte Hankel fonksiyon değeri
};

template <class T, class IntType>
T TTBessel<T, IntType>::J0(T x)
{
    if (-8 <= x && x <= 8)
        return J0_(x);
}

```

```

        else
            return Bessel0_(x, TTBessel<T, IntType>::First_Kind);
    }

template <class T, class IntType>
T TTBessel<T, IntType>::Y0(T x)
{
    if (0 < x && x <= 8)
        return Y0_(x);
    else
        return Bessel0_(x, TTBessel<T, IntType>::Second_Kind);
}

template <class T, class IntType>
T TTBessel<T, IntType>::J1(T x)
{
    return J1_1_(x);
}

template <class T, class IntType>
T TTBessel<T, IntType>::Y1(T x)
{
    return Y1_(x);
}

template <class T, class IntType>
std::complex<T> TTBessel<T, IntType>::H0(T x)
{
    return std::complex<T>(J0(x), Y0(x));
}

template <class T, class IntType>
std::complex<T> TTBessel<T, IntType>::H1(T x)
{
    return std::complex<T>(J1(x), -Y1(x));
}

template <class T, class IntType>
T TTBessel<T, IntType>::Bessel0_(T x, FunctionType fn_type)
{
    static T R[] =
        {
            0.99898808985896515390,
            -0.00133842854997185578,
            -0.00031878987806189289,
            0.00000851123221065665,

```

```
    0.00000069154234913894,  
    -0.00000009077010153734,  
    0.00000000145492807929,  
    0.00000000092676248672,  
    -0.00000000013916619797,  
    0.00000000000323797518,  
    0.00000000000253535729,  
    -0.00000000000055909032,  
    0.0000000000004191896,  
    0.0000000000000873316,  
    -0.0000000000000361861,  
    0.0000000000000059438,  
    -0.000000000000000964,  
    -0.0000000000000002436,  
    0.0000000000000000789,  
    -0.0000000000000000125,  
    -0.0000000000000000002,  
    0.0000000000000000008,  
};  
  
static T I[] =  
{  
    -0.01233152057854414382,  
    -0.01224949628125947486,  
    0.00009649418499342287,  
    0.00001365557049035682,  
    -0.00000085180664442635,  
    -0.00000002724405341355,  
    0.00000000964642133771,  
    -0.00000000068334751799,  
    -0.0000000006062738000,  
    0.00000000002169571634,  
    -0.0000000000230489890,  
    -0.00000000000012255390,  
    0.00000000000009231372,  
    -0.00000000000001677838,  
    0.00000000000000075375,  
    0.00000000000000046244,  
    -0.00000000000000015906,  
    0.0000000000000002500,  
    0.00000000000000000015,  
    -0.00000000000000000135,  
    0.00000000000000000044,  
    -0.00000000000000000007  
};
```

```

TTChebyshev<T,IntType> cheb = TTBessel<T,IntType>();
TTArray1D<T> arr = TTArray1D<T>(0,21,"TTChebyshev_Arr");
cheb.TnStar(5/x,arr);

TTArray1D<std::complex<T>> cn=TTArray1D<std::complex<T>>(0,22,"Cn_Arr");
for (IntType i = 0; i < 21; i++)
{
    cn(i) = std::complex<T>(R[i],I[i]);
}
std::complex<T> retval =std::complex<T>(T(0),T(0));
for (IntType i = 0; i < 21; i++)
{
    retval = retval + cn(i) * arr(i);
}
std::complex<T> val_((x - PI / 4),0);
retval = std::complex<T>(Complex_Product(retval,exp(Complex_Product(
IMAG,val_))));
if (fn_type == TTBessel<T,IntType>::First_Kind)
    return real(retval) * sqrt(2 / (PI * x));
else if (fn_type == TTBessel<T,IntType>::Second_Kind)
    return imag(retval) * sqrt(2 / (PI * x));
else
    return 0;
}

template <class T,class IntType>
T TTBessel<T,IntType>::J0_(T x)
{
    T retval = T(0);
    static T an[] =
    {
        0.15772797147489011956,
        -0.00872344235285222129,
        0.26517861320333680987,
        -0.37009499387264977903,
        0.15806710233209726128,
        -0.03489376941140888516,
        0.00481918006946760450,
        -0.00046062616620627505,
        0.00003246032882100508,
        -0.00000176194690776215,
        0.00000007608163592419,
        -0.00000000267925353056,
        0.00000000007848696314,
        -0.00000000000194383469,
        0.00000000000004125321,
    }
}

```

```

        -0.000000000000000075885,
        0.00000000000000001222,
        -0.0000000000000000017
    };

    TTChebyshev<T, IntType> cheb = TTChebyshev<T, IntType>();
    TTAarray1D<T> arr = TTAarray1D<T>(0, 17, "TTChebyshev_Arr");
    cheb.T2n(x/8, arr);

    for (IntType i = 0; i < 17; i++)
    {
        retval = retval + an[i] * arr(i);
    }
    return retval;
}

template <class T, class IntType>
T TTBessel<T, IntType>::Y0_(T x)
{
    T retval = T(0.0);
    static T bn[] =
    {
        -0.02150511144965755061,
        -0.27511813304351879146,
        0.19860563470255415556,
        0.23425274610902180210,
        -0.16563598171365041312,
        0.04462137954066928217,
        -0.00693228629152318829,
        0.00071911740375230309,
        -0.00005392507972293939,
        0.00000307649328810848,
        -0.00000013845718123009,
        0.00000000505105436909,
        -0.00000000015258285043,
        0.00000000000388286747,
        -0.00000000000008442875,
        0.00000000000000158748,
        -0.00000000000000002608,
        0.00000000000000000038
    };
};

TTChebyshev<T, IntType> cheb = TTChebyshev<T, IntType>();
TTAarray1D<T> arr = TTAarray1D<T>(0, 17, "TTChebyshev_Arr");
cheb.T2n(x/8, arr);

```

```

for (IntType i = 0; i < 17; i++)
{
    retval = retval + bn[i] * arr(i);
}

retval=retval+(2/PI)*(GAMMA_E + log(x/2)) * TTBessel<T,IntType>::J0_(x);
return retval;
}

template <class T,class IntType>
T TTBessel<T,IntType>::J1_0_(T x)
{
    T retval = T(0);
    static T an[] =
        {
            0.05245819033465648458,
            0.04809646915823037394,
            0.31327508236156718380,
            -0.24186740844740748475,
            0.07426679621678703781,
            -0.01296762731173517510,
            0.00148991289666763839,
            -0.00012227868505432427,
            0.00000756263022969605,
            -0.00000036613085523363,
            0.00000001427732438731,
            -0.00000000045857003076,
            0.00000000001235174811,
            -0.00000000000023817735,
            0.00000000000000559509,
            -0.0000000000000009629,
            0.0000000000000000146,
            -0.0000000000000000002
        };

    TTBsbychev<T,IntType> cheb = TTBsbychev<T,IntType>();
    TTBArray1D<T> arr = TTBArray1D<T>(0,17,"TTBsbychev_Arr");
    cheb.TnOdd(x/8,arr);

    for (IntType i = 0; i < 17; i++)
    {
        retval += an[i] * arr(i);
    }
    return retval;
}

```

```

template <class T,class IntType>
T TTBessel<T,IntType>::J1_1_(T x)
{
    T retval = T(0);
    static T bn[] =
        {
            0.64835877060526492084,
            -1.19180116054121687251,
            1.28799409885767762038,
            -0.66144393413454325277,
            0.17770911723972828328,
            -0.02917552480615420766,
            0.00324027018268385747,
            -0.00026044438934858068,
            0.00001588701923993213,
            -0.00000076175878054003,
            0.00000002949707007278,
            -0.00000000094242129816,
            0.00000000002528123664,
            -0.00000000000057774042,
            0.00000000000001138572,
            -0.00000000000000019554,
            0.000000000000000000295,
            -0.000000000000000000004
        };

    TTBessel<T,IntType> cheb = TTBessel<T,IntType>();
    TTBessel<T,IntType> arr = TTBessel<T,IntType>(0,18,"TTBessel_Arr");
    cheb.T2n(x/8, arr);

    for (IntType i = 0; i < 18; i++)
    {
        retval += bn[i] * arr(i);
    }
    return retval * x / 8;
}

template <class T,class IntType>
T TTBessel<T,IntType>::Y1_(T x)
{
    T retval = T(0);
    static T cn[] =
        {
            -0.04017294654441407579,
            -0.44444714763055806261,
            -0.02271924442841773587,

```

```

        0.20664454101749051976,
        -0.08667169705694852366,
        0.01763670300316313441,
        -0.00223561929448509524,
        0.00019706230270154078,
        -0.00001288585329924086,
        0.00000065284795235852,
        -0.00000002645073717479,
        0.00000000087803011712,
        -0.00000000002434327870,
        0.00000000000057261216,
        -0.000000000000001157794,
        0.000000000000000020347,
        -0.000000000000000000314,
        0.000000000000000000004
    };

    TTChebyshev<T, IntType> cheb = TTChebyshev<T, IntType>();
    T TArray1D<T> arr = TArray1D<T>(0, 18, "TTChebyshev_Arr");
    cheb.TnOdd(x/8, arr);

    for (IntType i = 0; i < 18; i++)
    {
        retval = retval + cn[i] * arr(i);
    }

    return retval + (2/PI) * (GAMMA_E + log(x/2)) * J1_0_(x) - 2/(PI*x);
}
#endif /*END OF TTBESSEL_H_*/

```

EK D.2 Bessel Fonksiyonlarının Herhangi Bir Tamsayı İndisindeki Değerleri

```

#ifndef TTBESEL_REC_H_
#define TTBESEL_REC_H_

/*
    Tamsayı değerli Bessel fonksiyonlarının 0. ve 1. dereceden Bessel
    fonksiyonları kullanılarak ileri ve geri Rekürsif fonksiyonları
    kullanılarak bulunması.
    Platform : Suse Linux 10.0
    IDE      : Edit Plus
    Tarih    : 12.01.2006
*/

template<class T, class IntType = long>
class TTBessel_Rec
{
public:
    //Neuman fonksiyonunun değerleri
    void NeumanRecurrence(T x, IntType N, TTAarray1D<T>& arr);
    //Bessel fonksiyonlarının değerleri
    void BesselRecurrence(T x, IntType N, TTAarray1D<T>& arr);
    //1. Tipte Hankel Fonksiyonlarının değerleri
    void HankelFirst(T x, IntType N, TTAarray1D< std::complex<T>>&
arr);

    //2. Tipte Hankel Fonksiyonlarının değerleri
    void HankelSecond(T x, IntType N, TTAarray1D< std::complex<T>
>& arr);

private:
    void BesselBackwardRecurrence_(T x, IntType N, TTAarray1D<T>&
arr); //Geriye Rekürsif hesaplama
    void BesselDirectRecurrence_(T x, IntType N, TTAarray1D<T>&
arr); //Toplamsallık teoremi ile hesaplama
    void NeumanDirectRecurrence_(T x, IntType N, TTAarray1D<T>&
arr); //Neuman değerlinin hesap edilmesi

    //Hesap edilecek değerlerin hatayı minimize etmek için
    //toplamsallık mı yoksa geriye rekürsif ile yapılacağını bildirir
    bool IsBesselBackwardRecurrence_(T x, IntType N);
    //Kritik n0 değerini hesap etmek için kullanılır
    IntType Boundaries_(T x, IntType N);
    //M değerinin bulunması için kullanılır

```

```

        void Boundaries_(IntType n0, T x, IntType& M);
//Bessel fonksiyonu için toplamsallık yönteminin 2
//adet parçasını hesap eden fonksiyonlar
        T BesselDirectRecurrenceFirstPart_(T x, IntType N);
        T BesselDirectRecurrenceSecondPart_(T x, IntType N, IntType
M);

//Yaratılan arraylerin memoryde yer tutmasını
//engellemek için kullanılan null array
        TArray1D<T> null_array;

};/*END OF TTBessel_Rec*/

template<class T, class IntType>
void TTBessel_Rec<T,IntType>::NeumanRecurrence(T x, IntType N, TArray1D<T>&
arr)
{
    TArray1D<T> arr_;
    NeumanDirectRecurrence_(x,N,arr_);
    arr_.Swap(arr);
}

template<class T,class IntType>
void TTBessel_Rec<T,IntType>::BesselRecurrence(T x, IntType N, TArray1D<T>&
arr)
{
    if (x == T(0))
    {
        TArray1D<T> arr_(0,N);
        arr_(0) = T(1);
        for (IntType i = 1; i <= arr_.HBound(); i++)
            arr_(i) = T(0);
        arr.Swap(arr_);
    }
    else
    {
        //hangi tipte hesap yapılacağını belirlemek için kullanılır
        if (IsBesselBackwardRecurrence_(x,N))
            BesselDirectRecurrence_(x,N,arr);
        else
            BesselBackwardRecurrence_(x,N,arr);
    }
}

```

```

template<class T, class IntType>
void   TTBessel_Rec<T,IntType>::HankelFirst(T   x,   IntType   N,TTArray1D<
std::complex<T> >& arr)
{
    TTArray1D<T> bes_;
    TTArray1D<T> neu_;
    //*****
    if (N == 0) N = 1;//Algebraic sistemdeki hatalar yüzünden eklendi
    //*****
    TTArray1D< std::complex<T> > arr_(0,N);

    BesselRecurrence(x,N,bes_);
    NeumanRecurrence(x,N,neu_);

    for (IntType i = arr_.LBound(); i < arr_.HBound(); i++)
        arr_(i) = std::complex<T>(bes_(i),neu_(i));

    arr.Swap(arr_);

    null_array.Swap(bes_);
    null_array.Swap(neu_);
}

template<class T, class IntType>
void   TTBessel_Rec<T,IntType>::HankelSecond(T   x,   IntType   N,   TTArray1D<
std::complex<T> >& arr)
{
    TTArray1D<T> bes_;
    TTArray1D<T> neu_;
    //*****
    if (N == 0) N = 1;//Algebraic sistemdeki hatalar yüzünden eklendi
    //*****
    TTArray1D< std::complex<T> > arr_(0,N);

    BesselRecurrence(x,N,bes_);
    NeumanRecurrence(x,N,neu_);

    for (IntType i = arr_.LBound(); i < arr_.HBound(); i++)
        arr_(i) = std::complex<T>(bes_(i),-1 * neu_(i));

    arr.Swap(arr_);

    null_array.Swap(bes_);
    null_array.Swap(neu_);
}

```

```

template<class T,class IntType>
void  TTBessel_Rec<T,IntType>::BesselBackwardRecurrence_(T  x,  IntType  N,
TTArray1D<T>& arr)
{
    IntType M = -1;
    Boundaries_(Boundaries_(x,N),x,M);

    TTArray1D<T> arr_(0,M);
    arr_(M) = T(0);
    arr_(M - 1) = T(1);

    for (IntType i = M - 1; i > 0; i--)
        arr_(i - 1) = 2 * i / x * arr_(i) - arr_(i + 1);

    TTBessel<T> bes_;
    T bes0 = bes_.J0(x);
    T bes1 = bes_.J1(x);

    T C = 1;
    if (fabs(bes0) > fabs(bes1))
        C = bes0 / arr_(0);
    else
        C = bes1 / arr_(1);

    for (IntType i = 0; i < M; i++)
        arr_(i) *= C;

    arr.Swap(arr_);
}

```

```

template<class T,class IntType>
void  TTBessel_Rec<T,IntType>::BesselDirectRecurrence_(T  x,  IntType  N,
TTArray1D<T>& arr)
{
    IntType M = 1;
    Boundaries_(Boundaries_(x,N),x,M);
    TTArray1D<T> arr_(0,2,"BesselDirectRecurrence");
    arr_(0)=BesselDirectRecurrenceFirstPart_(x,N)*BesselDirectRecurrences
econdPart_(x,N,M);
    arr_(1)=BesselDirectRecurrenceFirstPart_(x,N)*BesselDirectRecurrences
econdPart_(x,N,M+10);
    arr_(2)=BesselDirectRecurrenceFirstPart_(x,N)*BesselDirectRecurrences
econdPart_(x,N,M+20);

```

```

while(fabs(arr_(2) - arr_(1)) > fabs(arr_(1) - arr_(0)))
{
    M += 10;

    arr_(0)=BesselDirectRecurrenceFirstPart_(x,N)*BesselDirectRecurrenceS
econdPart_(x,N,M);

    arr_(1)=BesselDirectRecurrenceFirstPart_(x,N)*BesselDirectRecurrenceS
econdPart_(x,N,M+10);

    arr_(2)=BesselDirectRecurrenceFirstPart_(x,N)*BesselDirectRecurrenceS
econdPart_(x,N,M+20);
}

M -= 10;
TArray1D<T> arr__(0,N);
for (IntType i = 0; i < N; i++)
    arr__(i)=BesselDirectRecurrenceFirstPart_(x,i)*
BesselDirectRecurrenceSecondPart_(x,i,M);

arr__.Swap(arr);
}

template<class T,class IntType>
void    TTBessel_Rec<T,IntType>::NeumanDirectRecurrence_(T    x,    IntType
N,TTArray1D<T>& arr)
{
    TTBessel<T> bes_;
    TTBessel<T> arr_(0,N);
    arr_(0) = bes_.Y0(x);
    arr_(1) = bes_.Y1(x);

    for(IntType i = 2; i < N + 1; i++)
        arr_(i) = 2 * (i - 1) / x * arr_(i-1) - arr_(i-2);

    arr_.Swap(arr);
}

template<class T,class IntType>
IntType TTBessel_Rec<T,IntType>::Boundaries_(T x, IntType N)
{
    return max(N, IntType(x) + 5);
}

template<class T,class IntType>

```

```

void TTBessel_Rec<T,IntType>::Boundaries_(IntType n0, T x, IntType& M)
{
    T P = 1, computer_error = COMPUTER_EPSILON / 64;
    x = Pow2(x / 2);
    while(P > computer_error)
    {
        P *= x * 1 / (n0 + 1);
        ++n0;
    }

    M = n0 + 2; //+2 değeri hem M+1 hemde M+2 yi hesap etmek için
    kullanılır
}

template<class T, class IntType>
bool TTBessel_Rec<T, IntType>::IsBesselBackwardRecurrence_(T x, IntType N)
{
    if (N != 0)
        return ((Pow2(x) / N > T(1/2)) ? true : false);
    else
        return false;
}

template<class T, class IntType>
T TTBessel_Rec<T,IntType>::BesselDirectRecurrenceFirstPart_(T x, IntType N)
{
    return exp(N * log(x/2) - FactorialLog(N));
}

template<class T, class IntType>
T TTBessel_Rec<T,IntType>::BesselDirectRecurrenceSecondPart_(T x, IntType
N,IntType M)
{
    T temp_ = T(0);

    /*
    http://gershwin.ens.fr/vdaniel/Doc-Locale/Cours-Mirrored/Methodes-
    Maths/white/math/s8/s8bess/s8bess.html
    yukarıdaki internet sitesi uyarınca kullandığımız formülde hatalar
    bulunmakta bu yüzden aşağıdaki
    gibi değilde çalışan şekli ile değerlendirilecektir.

    for (int i = 1; i < M + 1; i++)
        temp_-=PowN(Pow2(x)/4,i)*exp(-FactorialLog(i)-
FactorialLog(i+N));
    return temp_ + 1;

```

```
        std::cout << M << std::endl;
    */

    for (IntType i = 1; i < M; i++)
        temp_+=PowN((-x*x/4),i)*exp(FactorialLog(N)-FactorialLog(i)-
FactorialLog(N+i));

    return 1 + temp_;
}
#endif /*END OF TTBESSEL_REC_H_*/
```

EK D 3 Bessel, Neuman ve Hankel Fonksiyonlarının 1. Dereceden Türevleri

```
#ifndef TTBESEL_DER_H_
#define TTBESEL_DER_H_

/*
    Herhangi bir tamsayı indisinden bulunan Bessel, Neuman ve Hankel
fonksiyonunun türevleri
    Platform : Suse Linux 10.0
    IDE      : Edit Plus
    Tarih    : 12.01.2006
*/

/*
* -----For Bessel-----
*  $J_v'(x) = J_{v-1}(x) - (v/x) * J_v(x)$ 
*  $J_v'(x) = -J_{v+1}(x) + (v/x) * J_v(x)$ 
* -----For Neuman-----
*  $Y_v'(x) = Y_{v-1}(x) - (v/x) * Y_v(x)$ 
*  $Y_v'(x) = -Y_{v+1}(x) + (v/x) * Y_v(x)$ 
* -----
*  $J'(v, x) = -BesselJ(v+1, x) + v/x * BesselJ(v, x)$ 
*  $Y'(v, x) = -BesselY(v+1, x) + v/x * BesselY(v, x)$ 
*
*  $J''(v, x) = -BesselJ(v, x) + (v+1)/x * BesselJ(v+1, x) - v/x^2 * BesselJ(v, x) + v/x * (-$ 
 $BesselJ(v+1, x) + v/x * BesselJ(v, x))$ 
*  $Y''(v, x) = -BesselY(v, x) + (v+1)/x * BesselY(v+1, x) - v/x^2 * BesselY(v, x) + v/x * (-$ 
 $BesselY(v+1, x) + v/x * BesselY(v, x))$ 
*
* */

template<class T, class IntType=long int>
class TTBessel_Der
{
public:
    TTBessel_Der();
    void BesselDer1(T x, IntType s, TTAarray1D<T>& arr); //Bessel
Fonksiyonu 1. türevi
    void NeumanDer1(T x, IntType s, TTAarray1D<T>& arr); //Neuman
fonksiyonu 1. türevi
    void Hankel1Der1(T x, IntType s, TTAarray1D< std::complex<T> >&
arr); //1.Tipte Hankel fonksiyonunun 1. dereceden türevi

```

```

        void Hankel2Der1(T x, IntType s, TTAarray1D< std::complex<T> >
&arr); //2.Tipte Hankel fonksiyonunun 1. dereceden türevi
        private:
            TTBessel_Rec<T,IntType> bes_;
        protected:
};

template<class T,class IntType>
TTBessel_Der<T,IntType>::TTBessel_Der()
{
    bes_ = TTBessel_Rec<T,IntType>();
}

template<class T,class IntType>
void TTBessel_Der<T,IntType>::BesselDer1(T x, IntType s, TTAarray1D<T>& arr)
{
    TTAarray1D<T> arr_(-1,s+1);
    TTAarray1D<T> arr_bes_;
    bes_.BesselRecurrence(x,s+3,arr_bes_);

    for(IntType i=arr_.LBound(); i<=arr_.HBound(); i++)
        arr_(i) = -(i+1)>=0 ? arr_bes_(i+1) : -arr_bes_(abs(i+1))+
            (T(i)/x)*(i>=0?arr_bes_(i):arr_bes_(abs(i)));
    arr.Swap(arr_);
}

template<class T,class IntType>
void TTBessel_Der<T,IntType>::NeumanDer1(T x, IntType s, TTAarray1D<T>& arr)
{
    TTAarray1D<T> arr_(-1,s+1);
    TTAarray1D<T> arr_bes_;
    bes_.NeumanRecurrence(x,s+3,arr_bes_);

    for(IntType i=arr_.LBound(); i<=arr_.HBound(); i++)
        arr_(i) = -(i+1)>=0 ? arr_bes_(i+1) : -arr_bes_(abs(i+1))+
            (T(i)/x)*(i>=0?arr_bes_(i):arr_bes_(abs(i)));
    arr.Swap(arr_);
}

template<class T,class IntType>
void TTBessel_Der<T,IntType>::Hankel1Der1(T x, IntType s, TTAarray1D<
std::complex<T> >& arr)
{
    TTAarray1D< std::complex<T> > arr_(-1,s+1);
    TTAarray1D<T> arr_bes;
    TTAarray1D<T> arr_neu;

```

```

bes_.BesselRecurrence(x,s+3,arr_bes);
bes_.NeumanRecurrence(x,s+3,arr_neu);

for(IntType i=arr_.LBound(); i<=arr_.HBound(); i++)
    arr_(i)=- (i+1)>=0 ? arr_bes(i+1) : -arr_bes(abs(i+1))
        -std::complex<T>(0.,1.)*(i+1)>=0?arr_neu(i+1):-
        arr_neu(abs(i+1)))+(T(i)/x)*((i>=0?arr_bes(i):-
        arr_bes(abs(i)))+std::complex<T>(0.,1.)*(i>=0?
        arr_neu(i):-arr_neu(abs(i))));
arr.Swap(arr_);
}

template<class T,class IntType>
void TTBessel_Der<T,IntType>::Hankel2Der1(T x, IntType s, TTArray1D<
std::complex<T> >& arr)
{
    TTArray1D< std::complex<T> > arr_(1,s);
    TTArray1D<T> arr_bes;
    TTArray1D<T> arr_neu;

    bes_.BesselRecurrence(x,s+2,arr_bes);
    bes_.NeumanRecurrence(x,s+2,arr_neu);

    for(IntType i=arr_.LBound(); i<=arr_.HBound(); i++)
        arr_(i)=- (i+1)>=0?arr_bes(i+1):-arr_bes(abs(i+1)) +
            std::complex<T>(0.,1.)*(i+1)>=0?arr_neu(i+1):-
            arr_neu(abs(i+1)))+(T(i)/x)*((i>=0?arr_bes(i):-
            arr_bes(abs(i)))-std::complex<T>(0.,1.)*(i>=0?
            arr_neu(i):-arr_neu(abs(i))));
    arr.Swap(arr_);
}
#endif/*END OF TTBESSEL_DER_H_*/

```