

**T.C.  
ERCIYES ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**SÜZGEÇ UZAYLAR**

**Tezi Hazırlayan  
Selmin YAZGAN**

**Tezi Yöneten  
Yrd. Doç. Dr. Muammer KULA**

**Matematik Anabilim Dalı  
Yüksek Lisans Tezi**

**Ağustos 2008**

**KAYSERİ**

**T.C.  
ERCIYES ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**SÜZGEÇ UZAYLAR**

**Tezi Hazırlayan  
Selmin YAZGAN**

**Tezi Yöneten  
Yrd. Doç. Dr. Muammer KULA**

**Matematik Anabilim Dalı  
Yüksek Lisans Tezi**

**Ağustos 2008**

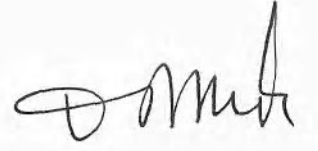
**KAYSERİ**

Yrd. Doç. Dr. Muammer KULA danışmanlığında **Selmin YAZGAN** tarafından hazırlanan “**Süzgeç Uzaylar**” adlı bu çalışma, jürimiz tarafından Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Yüksek Lisans** tezi olarak kabul edilmiştir.

22.08.2008

**JÜRİ:**

Başkan : Prof. Dr. Osman MUCUK



Üye : Yrd. Doç. Dr. Muammer KULA



Üye : Yrd. Doç. Dr. Ali DELİCEOĞLU



**ONAY:**

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulunun 29/08/2008 tarih ve 2008/27-05 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

29.08.2008



**Prof. Dr. Nusret AYYILDIZ**

**Enstitü Müdürü**

## **TEŞEKKÜR**

Bu alıŐma konusunu bana veren, çalıŐmalarım boyunca tavsiye ve eleŐtirileriyle, ilgi ve yardımlarını esirgemeyen değerli zamanını bana veren çok kıymetli sayın hocam Yrd. Doç. Dr. Muammer KULA' ya sonsuz teŐekkürlerimi sunarım.

Tez alıŐması süresince, bana verdiği maddi ve manevi destek, göstermiŐ olduğu sabır ve anlayıŐtan dolayı sevgili eŐim Murat ÖZER' e, beni her zaman her konuda destekleyen değerli aileme ve beni sabırla bekleyen minik oğlum Kerem Efe'ye teŐekkürlerimi sunarım.

**SÜZGEÇ UZAYLAR****Selmin YAZGAN**

**Erciyes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü  
Yüksek Lisans Tezi, Ağustos 2008  
Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Muammer KULA**

**ÖZET**

Bu çalışmanın amacı, Süzgeçler ve Ultrasüzgeçlerle ilgili temel tanım ve teoremleri vermek, Süzgeç uzayların yapısını ve tamlamaları incelemektir. Yakınsak Süzgeç Uzayı kategorisinin bir topolojik fanktor (kategori) olduğunu göstermek ve bu topolojik kategori için geçerli olan  $p$  noktasında ki  $\overline{T}_0$ ,  $T_0'$ , ve  $T_1$  ayırma aksiyomlarını incelemektir.

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, kısaca süzgeç uzayların tarihçesi üzerinde durulmuş olup, literatür taraması mahiyetindedir.

İkinci bölümde, amaca yönelik kategori, fanktor, topolojik fanktor, süzgeç, diskre ve indiskre yapılar gibi temel tanımlara ve bunlarla ilgili teoremlere yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde, Süzgeç uzayı ve Yakınsak Süzgeç Uzayı ile ilgili temel kavramlar, Süzgeç uzayının yapısı ve tamlamalar ele alınmıştır.

Dördüncü bölümde, Yakınsak süzgeç uzayı kategorisinin, topolojik fanktor olduğu gösterildi. Üçüncü bölümde incelenen yakınsak süzgeç uzaylar kategorisinin diskre ve indiskre yapıları karakterize edildi ve  $p$  noktasında  $\overline{T}_0$ ,  $T_0'$ , ve  $T_1$  ayırma aksiyomları karakterize edildi.

**Anahtar Kelimeler:** Süzgeç Uzayı, Cauchy Süzgeçi, Tamlık, Yakınsak Süzgeç Uzaylar, Ultrasüzgeçler.

## THE FILTER SPACES

Selmin YAZGAN

Erciyes University, Graduate School of Natural and Applied Sciences

M. Sc. Thesis, August 2008

Thesis Supervisor: Assist. Prof. Muammer KULA

### ABSTRACT

The purpose of this study is to examine the basic and related theorems of filter and ultrafilters and also complements and structures of filter space. In addition, it will be shown that the category of filter convergence space is a topological functor and separation properties of  $\overline{T}_0$ ,  $T_0'$  and  $T_1$  are examined at a point  $p$  in this topological category.

This thesis are mainly composed of four chapters.

In the first chapter, the historical development of the filter space is given which includes the literature researches.

In the second chapter, some basic definitions and related theorems about category, functor, topological functor, filter, discrete and indiscrete structures which will be needed later are given.

In the third chapter, the basic concepts of filter space and filter convergence space, ultrafilters, complements and structures of filter space are given.

In the fourth chapter, filter convergence space has been showed that these category is an topological functor. The discrete and indiscrete structures of the category of filter convergence spaces which was investigated in the last chapter are characterized and the separation properties of  $\overline{T}_0$ ,  $T_0'$  and  $T_1$  are characterized at a point  $p$  in this topological category.

**Keywords:** Filter Space, Cauchy Filter, Completion, Filter Convergence Spaces, Ultrafilter.

## İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY .....	I
TEŞEKKÜR .....	II
ÖZET .....	III
ABSTRACT .....	IV
İÇİNDEKİLER.....	V
KISALTMALAR VE SİMGELER .....	VI
1. BÖLÜM	
GİRİŞ .....	1
2. BÖLÜM	
TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER .....	3
2.1 Kategori.....	5
2.2 Fanktor.....	5
2.3 Topolojik Fanktor.....	6
2.4 Süzgeçler .....	10
2.5 Süzgeç Tabanları .....	15
2.6 Topolojik Kategori Örnekleri .....	23
3. BÖLÜM	
SÜZGEÇ UZAYLAR.....	28
3.1 Süzgeç Uzaylarının Tanımı.....	28
3.2 Ultrasüzgeçler.....	30
3.3 Süzgeç Uzayı Tamlamaları.....	44
3.4 Wyler Tamlaması .....	46
4. BÖLÜM	
SÜZGEÇ UZAYLARIN TOPOLOJİK KATEGORİSİ .....	53
4.1 FCO nun Topolojik kategorisi .....	53
4.2 Noktada Ayrılma Aksiyomları.....	56
KAYNAKLAR.....	62
ÖZGEÇMİŞ.....	64

## KISALTMALAR VE SİMGELER

SET	Cümleler kategorisi
Top	Topolojik uzaylar kategorisi
FCO	Yakınsak süzgeç uzaylar kategorisi
Lim	Limit uzaylar kategorisi
ConLim	Sabit limit uzaylar kategorisi
Con FCO	Sabit yakınsak süzgeç uzaylar kategorisi
CHY	Cauchy uzayları
$\mathcal{F}, \mathcal{G}$	Süzgeçler
$F(X)$	$X$ üzerindeki tüm süzgeçlerin cümlesi
$U(X)$	$X$ üzerindeki tüm ultrasüzgeçlerin cümlesi
$\dot{x}$	Tek nokta $\{x\}$ cümlesi tarafından üretilen sabit süzgeç
$\mathcal{F} \vee \mathcal{G}$	$\mathcal{F}$ ve $\mathcal{G}$ nin supremumu
$\mathcal{F} \mathcal{G}_c$	$(X, C)$ bir süzgeç uzayı, $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in F(X)$ iki süzgeç olmak üzere eğer sonlu sayıda $H_1, H_2, \dots, H_n$ süzgeçleri için $\mathcal{F} \vee H_1, H_1 \vee H_2, \dots, H_n \vee \mathcal{G}$ varsa $\mathcal{F}$ ve $\mathcal{G}$ 'ye $C$ -linked (bağlı) denir. $\mathcal{F} \mathcal{G}_c$ ile gösterilir. Açıkça " $\mathcal{F} \mathcal{G}_c$ " $C$ ' de bir denklik bağıntısıdır.
$\mathcal{F}_A$	$\{A \cap F : F \in \mathcal{F}\}$ $A$ da oluşturduğu süzgeç, bu süzgece $A$ üzerinde $\mathcal{F}$ in izi denir.
$p_c$	$F \xrightarrow{p_c} X \Leftrightarrow F \cap \dot{x}$
$q_c$	$(F \xrightarrow{q_c} X \Leftrightarrow F \cap \dot{x} \in C)$

## 1. BÖLÜM

### GİRİŞ

Bu bölümde, kısaca süzgeç uzayların tarihçesi üzerinde durulmuş olup, literatür taraması mahiyetindedir.

Süzgeç kavramının ilk izleri 1914 yılında Root' un [1] makalesinde olmakla birlikte, süzgeç tanımı 1937 de Cartan [2] tarafından yapılmıştır. Bourbaki [3] 1940 da süzgeçleri çalışmalarında kullanmış ve ultrasüzgeçleri Cartan [4] 1937 de çalışmıştır. 1955 yılında Bartle [5] ağlarla süzgeçler arasındaki eşdeğerlikten bahsetmiştir. 1961 yılında Kowalsky [6], topolojinin gelişmesi için süzgeçler üzerinde çalışmalar yapmıştır.

Keller [7] 1968 de Cauchy Süzgeçleri cümlesini karakterize eden üç aksiyomu düzgün yakınsak uzaylar (Cook ve Fischer [8]) yardımıyla belirledi. 1965 yılında Katetov [9] tarafından tanımlanan filtermerotopic uzayların FIL kategorisine göre isomorphic olduğunu sırasıyla Bentley, Herrlich ve Colebunders [10] göstermişlerdir.

X üzerindeki süzgeçlerin cümlesi C, Keller' in ilk iki şartını sağlıyorsa C' ye X üzerindeki pre-cauchy yapısı denir. Biz bundan sonra pre-cauchy uzaylarını süzgeç uzayları ile tanımlayacağız. 1970 de Wyler [11]  $T_2$  cauchy uzaylarının tamlamasını yaptı. Aynı sene Reed [12] çalışmayı genişletti ve "seçme fonksiyonların" cümlesini kullanarak tamlamaların ailesini yaptı Ayrıca FIL ilginç ve önemli bir

kategori olduğundan CHY için geliştirilmiş tamlama teorisini Kent ve Rath [13] FIL kategorisine genişletmeye çalışmıştır.

Cauchy ve süzgeç uzaylarının kategorik özelliklerini sağlayan kaynaklar Preuss tur.[14] [15] G. Minkler, J. Minkler ve G. Richardson [16] genişletilmiş uzayların ailesini tanımladı.

Genel topolojide kapanış ve kompaktlık gibi kavramların dizilerle değil süzgeçlerle açıklanabilmesinden dolayı süzgeçler tercih edilmiştir.

Bizim amacımız ise süzgeç uzayının tanımını, süzgeç uzayları ile ilgili temel kavramları, süzgeç ve ultrasüzgeçleri, süzgeç uzayların yapısını ve tamlamalarını incelemektir. Daha sonra Süzgeç uzayı kategorisinin bir topolojik fanktor (kategori) olduğunu göstermek ve bu topolojik kategorinin diskre indiske yapılarını karakterize etmektir. Ayrıca FCO için geçerli olan  $p$  noktasında ki ayırma aksiyomlarını incelemektir.

## 2. BÖLÜM

### TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER

Bu bölümde daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan genel tanımlar ve bunlarla ilgili bazı teoremler ifade edildi.

#### 2.1. Kategori

**Tanım 2.1.1**  $\mathcal{K}$  bir sınıf olsun.  $\mathcal{K}$  nın kategori olması için  $\mathcal{K}$  daki tüm nesnelerin (objelerin) sınıfı, herhangi iki nesne arasındaki dönüşümlerin (morfizimlerin) cümlesi verilmeli ve ayrıca verilen iki dönüşüm için bunların bileşkesi tanımlanmalıdır. Bu bileşke aynı zamanda aşağıdaki şartları sağlamalıdır.

1.  $\mathcal{K}$  da ki her  $A$  nesnesi için  $1_A : A \rightarrow A$  birim dönüşümü vardır öyle ki her  $f : A \rightarrow B$  dönüşümü için  $f \circ 1_A = f$  ve her  $g : B \rightarrow A$  dönüşümü için  $1_A \circ g = g$  olmalıdır.
2.  $f : A \rightarrow B$ ,  $g : B \rightarrow C$ ,  $h : C \rightarrow D$  olmak üzere bileşke “ $\circ$ ” işlemi birleşme özelliğine sahip olmalıdır. Yani,  $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$  sağlanmalıdır.

$\mathcal{K}$  da ki tüm nesnelerin (objelerin) sınıfı kısaca  $Ob(\mathcal{K})$  (veya  $\mathbf{O}_{\mathcal{K}}$ ) şeklinde, herhangi iki nesne arasındaki dönüşümlerin (morfizimlerin) cümlesi;

$\mathcal{K}(A, B) = Hom(A, B) = \{f \mid f : A \rightarrow B \text{ dönüşüm} \}$  şeklinde verilen iki dönüşümün bileşkesi de

$$\begin{aligned} \circ : \mathcal{K}(A, B) \times \mathcal{K}(B, C) &\rightarrow \mathcal{K}(A, C) \\ (f, g) &\rightarrow \circ(f, g) = g \circ f \end{aligned}$$

şeklinde gösterilebilir.

**Örnek 2.1.2**  $\mathcal{K}$  nın nesnelere  $A, B, C, \dots$  cümleleri, dönüşümleri fonksiyonlar ve bileşke işlemi olarak da fonksiyonların bileşkesini alalım.

$\mathcal{K}$  nın kategori olduğunu gösterelim.

1. Her  $A$  cümlesi için  $1_A : A \rightarrow A$  birim fonksiyonu vardır. Ayrıca her  $f : A \rightarrow B$  fonksiyonu için  $f \circ 1_A = f$  ve her  $g : B \rightarrow A$  fonksiyonu için  $1_A \circ g = g$  dir.

2.  $f : A \rightarrow B$ ,  $g : B \rightarrow C$ ,  $h : C \rightarrow D$  olmak üzere fonksiyonlarda  $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$  birleşme özelliği sağlanır.

Dolayısıyla  $\mathcal{K}$  bir kategoridir. Bu kategoriye bütün *cümlelerin kategorisi* denir ve  $\mathcal{K} = \mathbf{SET}$  şeklinde gösterilir.

**Örnek 2.1.3**  $\mathcal{K}$  nın nesnelere  $(X, \tau)$ ,  $(Y, \sigma)$ ,  $(Z, \delta), \dots$  topolojik uzaylar, dönüşümleri  $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$  sürekli fonksiyonlar ve bileşkede fonksiyonların bileşkesi olsun.

$\mathcal{K}$  nın kategori olduğunu gösterelim.

1.  $(X, \tau) \rightarrow (X, \tau)$  olacak şekilde  $1_X : X \rightarrow X$  birim fonksiyonu vardır ve bu birim fonksiyonu sürekli dir. Ayrıca her  $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$  için  $f \circ 1_X = f$  ve her  $f : (Y, \sigma) \rightarrow (X, \tau)$  için  $1_X \circ f = f$  dir.

2.  $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ ,  $g : (Y, \sigma) \rightarrow (Z, \delta)$  ve  $h : (Z, \delta) \rightarrow (W, \mu)$  olmak üzere  $f, g, h$  fonksiyonları sürekli olduklarından bunların birleşimleri olan  $h \circ (g \circ f)$ ,  $(h \circ g) \circ f$  de sürekli ve eşittirler.

Dolayısıyla  $\mathcal{K}$  bir kategoridir. Bu kategoriye bütün *topolojik uzayların kategorisi* denir ve  $\mathcal{K} = \mathbf{TOP}$  şeklinde gösterilir.

**Örnek 2.1.4**  $\mathcal{K}$  nın nesnelere  $(G, \circ)$ ,  $(H, *)$ , ... gruplar, dönüşümleri grup homomorfizmi  $((G, \circ), (H, *))$  iki grup ve  $f : G \rightarrow H$  bir fonksiyon olsun. Her  $a, b \in G$  için  $f(a \circ b) = f(a) * f(b)$  oluyorsa bu fonksiyona grup homomorfizmi denir ve bileşke işlemi de fonksiyonların bileşkesi olsun.

Kolayca görülür ki  $\mathcal{K}$  bir kategoridir. Bu kategoriye bütün *grupların kategorisi* denir ve  $\mathcal{K} = \mathbf{Grps}$  şeklinde gösterilir. Ayrıca bilinmektedir ki grup homomorfizminin bileşkesi de grup homomorfizmidir [17].

### Tanım 2.1.5

1.  $\mathcal{K}$  bir kategori olsun. Verilen bir  $\mathcal{C}$  kategorisi için; eğer  $\mathcal{C}$  nin nesne ve dönüşümleri  $\mathcal{K}$  nin bazı nesne ve dönüşümlerinden oluşuyorsa ve  $\mathcal{K}$  da ki işlem  $\mathcal{C}$  ye kısıtlandığında kategori için gerekli şartlar sağlanıyorsa  $\mathcal{C}$  ye  $\mathcal{K}$  nin *alt kategorisi* denir.

2. Eğer nesnelere kısıtlama olup, dönüşümlerde kısıtlama olmuyorsa yani  $\mathcal{C}(A, B) = \mathcal{K}(A, B)$  ise  $\mathcal{C}$  ye  $\mathcal{K}$  nin *dolgun (full) alt kategorisi* denir [17].

**Tanım 2.1.6**  $\mathcal{K}$  bir kategori ve  $T, \mathcal{K}$  nin bir nesnesi olsun. Eğer  $\mathcal{K}$  nin herhangi bir nesnesi  $A$  olmak üzere  $\mathcal{K}(A, T) = \{ f \mid f : A \rightarrow T \text{ dönüşüm} \}$  tek elemanlı ise  $T$  ye  $\mathcal{K}$  nin *son (terminal) nesnesi* denir [17].

**Tanım 2.1.7**  $\mathcal{K}$  bir kategori ve  $A, B \in Ob(\mathcal{K})$  olsun.  $f : A \rightarrow B$  izomorfizmdir ancak en az bir  $g : B \rightarrow A$  vardır öyle ki  $g \circ f = 1_A$  ve  $f \circ g = 1_B$  dir [24].

## 2.2. Fanktor

**Tanım 2.2.1**  $\mathcal{K}$  ve  $\mathcal{K}'$  iki kategori olsun. Eğer  $\mathcal{K}$  da ki her  $A$  nesnesi için  $F(A)$ ,  $\mathcal{K}'$  nün nesnesi ve  $\mathcal{K}$  nin her  $f : A \rightarrow B$  dönüşümü için  $F(f) : F(A) \rightarrow F(B)$ ,  $\mathcal{K}'$  nün bir dönüşümü oluyorsa ve;

1.  $F(1_A) = 1_{F(A)}$  (Her  $A \in Ob(\mathcal{K})$  için)

2.  $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$

şartları sağlanıyorsa  $F : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}'$  ye  $\mathcal{K}$  dan  $\mathcal{K}'$  ne bir *fanktor* denir [17].

**Örnek 2.2.2**  $U : \mathbf{TOP} \rightarrow \mathbf{SET}$ ,  $U(X, \tau) = X$  şeklinde tanımlanan  $U$  nun bir fanktor olduğunu gösterelim.

$U : \mathbf{TOP} \rightarrow \mathbf{SET}$  de  $U(X, \tau) = X$  ve  $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$  için  $U(f) = f : X \rightarrow Y$  olarak tanımlansın. Bu taktirde kolayca görülür ki  $U$  bir fanktordur.

- a)  $U(1_{(X, \tau)}) = 1_{U(X, \tau)} = 1_X$

- b)  $U(g \circ f)$  yine  $U(g) = g$  ve  $U(f) = f$  olduklarından  $U(g) \circ U(f) = g \circ f$  tir.

Dolayısıyla  $U$  bir fanktordur. Bu fanktora *unutkan (forgetful) fanktor* denir.

**Tanım 2.2.3**  $F : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}'$  fanktor olsun.

1. Her  $A, B \in \mathbf{O}_{\mathcal{K}}$  ve her bir  $f : F(A) \rightarrow F(B)$  için  $F(g) = f$  olacak şekilde bir en az bir  $g : A \rightarrow B$  ye dönüşümü varsa  $F$  ye *dolgun (full) fanktor* denir.
2. Eğer her  $A, B \in \mathbf{O}_{\mathcal{K}}$  ve  $f, g : A \rightarrow B$  dönüşümleri için  $F(f) = F(g)$  olduğunda  $f = g$  ise  $F$  ye *düzenli (faithful) fanktor* denir.
3.  $F$  ye *amnestik* denir ancak ve ancak  $f : A \rightarrow A$  izomorfizmi için eğer  $F(f) = Id = 1_{F(A)}$  ise  $f = Id_A = 1_A$  olmalıdır.
4.  $F$  hem *düzenli fanktor* hem de *amnestik* ise  $F$  ye *belirli (concrete) fanktor* denir [17].

**Tanım 2.2.4**  $\mathcal{K}$  ve  $\mathcal{K}'$  iki kategori olsun. Eğer  $F : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}'$  fanktoru düzenli, dolgun ve  $\mathcal{K}'$  nün her  $A$  objesi için en az bir  $B \in \text{Ob}(\mathcal{K})$  vardır öyleki  $F(B) \cong A$  oluyorsa  $\mathcal{K}$  ve  $\mathcal{K}'$  kategorilerine denktir denir [18].

### 2.3. Topolojik Fanktor

Topolojik uzay kavramı; yakınsak uzay, limit uzayı, bornolojik uzay ve preorder uzaylarını da içine alarak Herrlich [19], Kent [20], Wyler [11], Schwartz [21] ve diğerleri tarafından topolojik kategori kavramına genelleştirilmiştir. Topolojik kategori değişik yollarla tanımlanmıştır. Örneğin, Herrlich [19] de belli kaynakların başlangıç kaldırmalarının (initial lift) varlığına dayanarak topolojik kategori tanımlamıştır. Wyler [11] de topolojik kategori tanımını tam lattice kategorisindeki fanktora dayandırarak tanımlamıştır.

**Tanım 2.3.1**  $\mathcal{K}$  ve  $\mathcal{Z}$  kategorileri verilsin. Eğer  $U : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{Z}$  fanktoru aşağıdaki şartları sağlıyorsa  $U$  ya *topolojik fanktor* ya da  $\mathcal{K}$  ya  $\mathcal{Z}$  kategorisi üzerinde *topolojik kategori* denir.

1.  $U$  belirli (concrete) olmalıdır.
2.  $U$  küçük demetlere sahiptir. Yani, her  $B \in \mathbf{O}_{\mathcal{Z}}$  için  $U^{-1}(B)$  bir cümledir. Burada  $U^{-1}(B) = \{X \in \mathbf{O}_{\mathcal{K}} \mid U(X) = B\}$  şeklinde tanımlanır ve  $B$  üzerindeki demet olarak adlandırılır.

3. Her  $U$  -kaynağı için  $\mathcal{Z}$  'de  $g_i : B \rightarrow U(X_i)$  ailesi için  $\mathcal{K}$  'da  $\bar{f}_i : X \rightarrow X_i$  ailesi vardır öyle ki  $U(\bar{f}_i) = g_i$  dir ve eğer  $U(h_i : Y \rightarrow X_i) = g_i \square k : U(Y) \rightarrow B = U(X) \rightarrow U(X_i)$  ise bu taktirde  $k : UY \rightarrow UX = B$  nin en az bir  $\bar{k} : Y \rightarrow X$  kaldırması vardır, yani  $U(\bar{k}) = k$  dir ve  $\bar{f}_i \square \bar{k} = h_i$  dir. Bunu diagramla gösterelim.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{K} & & \mathcal{Z} \\
 \bar{f}_i & & g_i \\
 X \longrightarrow X_i & & B \longrightarrow U(X_i) \\
 \uparrow \bar{k} \quad \nearrow h_i & \xrightarrow{U} & \uparrow k \quad \nearrow U(h_i) \\
 Y & & U(Y)
 \end{array}$$

Bu son şartın anlamı, her  $U$  - kaynağı bir başlangıç kaldırmaya (initial lift) sahiptir. Keyfi bir  $U$  - kaynağının başlangıç kaldırmasının varlığı, keyfi  $U$  -kavşağı ( $U$  -sink) için bitiş kaldırmasına (final lift) denktir (Bitiş kaldırma, başlangıç kaldırmanın dualidir) [19].

**Tanım 2.3.2**  $U : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{Z}$  topolojik fanktorunda her  $Z \in \mathcal{O}_Z$  sabiti için  $U^{-1}(Z)$  tek bir yapıya sahipse bu takdirde  $U$  ya *normalleştirilmiş* denir.

Burada son nesnenin alt nesnelere sabit olarak adlandırılır ( $Z$  sabittir ancak ve ancak  $Z \subset 1$  = son eleman olmalıdır).

**Uyarı 2.3.3**  $U : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{Z}$  bir topolojik fanktor olsun. Her  $A \in \mathcal{O}_Z$  için  $U^{-1}(A) = \{ (A, \theta) \mid U(A, \theta) = A \text{ ve } f : (A, \theta) \rightarrow (A, \Theta) \text{ dönüşümü için } U(f) = 1_A \}$  şeklinde tanımlansın.  $U^{-1}(A)$ ,  $\mathcal{K}$  nin bir alt kategorisidir [21].

**Teorem 2.3.4**  $f_i : (A, \tau) \rightarrow (A_i, \tau_i)$  sürekli fonksiyonlar ailesi olsun.  $\tau = \tau_*$  olması için gerek ve yeter şart her  $(B, \sigma)$  topolojik uzayı ve her  $g_i : (B, \sigma) \rightarrow (A_i, \tau_i)$  sürekli fonksiyonları için eğer  $g_i = f_i \circ h$  olacak şekilde en az bir  $h : B \rightarrow A$  fonksiyonu varsa,  $h$  süreklidir [17].

Burada  $\tau_*$ ,  $f_i$  ler tarafından doğrulan topolojidir. Yani,  $S = \bigcup_{i \in I} \{ f_i^{-1}(H) : H \in \tau_i \}$  alt bazı tarafından meydana getirilen topolojidir. Buna *doğrulan (induced) topoloji* denir ve  $\tau_*$  ile gösterilir. Bu topoloji  $f_i : (A, \tau) \rightarrow (A_i, \tau_i)$  fonksiyonlarını sürekli kılan en küçük topolojidir [17].

**Teorem 2.3.5**  $f_i : (A_i, \tau_i) \rightarrow (A, \tau)$  sürekli fonksiyonlar olsunlar.  $\tau = \tau^*$  olması için gerek ve yeter şart her  $(B, \sigma)$  topolojik uzayı ve her  $g_i : (A_i, \tau_i) \rightarrow (B, \sigma)$  sürekli fonksiyonları için  $g_i = h \circ f_i$  ise  $h$  fonksiyonu da sürekli dir ( $h : A \rightarrow B$  bir fonksiyon) [17].

Burada  $\tau^* = \{ U \subset A \mid \text{her } i \in I \text{ için } f_i^{-1}(U) \in \tau_i \}$   $A$  üzerinde bir topolojidir. Bu topolojiye *zayıf (coinduced) topoloji* denir. Bu topoloji  $f_i$  leri sürekli kılan en büyük topolojidir [17].

**Örnek 2.3.6**  $U : \mathbf{TOP} \rightarrow \mathbf{SET}$  normalleştirilmiş topolojik fanktordur.

**İspat: 1.**  $U$  nun belirli olduğunu gösterelim.  $f, g : (A, \tau) \rightarrow (B, \tau')$  sürekli iki fonksiyon ve  $U(f) = U(g)$  olsun.  $U : \mathbf{TOP} \rightarrow \mathbf{SET}$  de  $U(X, \tau) = X$  ve  $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$  için  $U(f) = f : X \rightarrow Y$  olarak tanımlansın. Böylece  $U$  unutkan (forgetful) fanktor olur.

Bundan dolayı  $U(f) = f$  ve  $U(g) = g$  dir. Böylece  $f = g$  olur. Dolayısıyla  $U$  faithfuldir.

$f : (A, \tau) \rightarrow (B, \tau')$  sürekli,  $U(f) = 1_A$  ve  $f$  homeomorfizm olsun.  $U(f) = f = 1_A$  olduğundan  $A = B$  dir. Dolayısıyla  $f : (A, \tau) \rightarrow (A, \tau')$  olur. Bu durumda  $\tau = \tau'$  olduğunu göstermeliyiz.

$f$  sürekli olduğundan  $f^{-1}(\tau') \subset \tau$  dur.  $f \circ f^{-1}(\tau') \subset f(\tau)$  dan  $\tau' \subset f(\tau)$  olur.  $f = I$  olduğundan  $\tau' \subset \tau$  dur.

$g : (A, \tau') \rightarrow (A, \tau)$  olsun.  $g$  sürekli olduğundan  $g^{-1}(\tau) \subset \tau'$  dür.  $g \circ g^{-1}(\tau) \subset g(\tau')$  den  $\tau \subset g(\tau')$  olur.  $f^{-1} = g = I$  idi. Öyleyse  $\tau \subset \tau'$  olur. Yani  $U$  amnestiktir.

O halde  $U$  hem faithful, hem de amnestik olduğundan, belirli (concrete) dir.

2.  $U^{-1}(A) = \{ (A, \tau) \mid U(A, \tau) = A, \tau \subset P(A) \text{ ve } f : (A, \tau) \rightarrow (A, \tau_1) \text{ sürekli ve } U(f) = 1_A : A \rightarrow A \}$  ise her  $A \in \mathbf{SET}$  için  $U^{-1}(A)$  nın bir cümle olduğunu göstereceğiz.  $U^{-1}(A)$ ,  $\mathbf{TOP}$  un alt kategorisidir. Öte yandan;  $\Theta = \{ \tau \mid \tau, A \text{ üzerinde bir topoloji} \}$  olsun.  $\theta : U^{-1}(A) \rightarrow \Theta$  alalım.  $\theta(A, \tau) = \tau$  şeklinde tanımlanırsa kolayca görülür ki  $\theta$ , bire bir ve örtendir.

Dolayısıyla,  $U^{-1}(A) \approx \Theta \subset P^2(A)$  dir, yani  $U^{-1}(A)$  bir cümledir.

3. Eğer  $\{ f_i : A \rightarrow U(A_i, \tau_i) = A_i, i \in I \}$   $\mathbf{SET}$  de herhangi bir  $U$  - kaynağı ve  $\tau_*$  üretilen (induced) topoloji olsun.

Teorem 2.3.4 den  $f_i : (A, \tau_*) \rightarrow (A_i, \tau_i)$  verilen kaynağın başlangıç kaldırmasıdır.

Yine;  $\{ f_i : U(A_i, \tau_i) = A_i \rightarrow A, i \in I \}$ ,  $\mathbf{SET}$  de herhangi bir  $U$  -kavşağı ( $U$  -sink) ve  $\tau^*$  zayıf (coinduced) topoloji olsun.

Teorem 2.3.5 den  $f_i : (A_i, \tau_i) \rightarrow (A, \tau^*)$  verilen kaynağın bitiş kaldırmasıdır.

Dolayısıyla  $U : \mathbf{TOP} \rightarrow \mathbf{SET}$  topolojik fanktordur.

Son olarak  $U$  nun normalleştirilmiş olup olmadığına bakalım.  $1 = \{x\}$  tek nokta cümlesi son nesne olduğundan bunun alt nesnelere  $Z = \emptyset$  ve  $Z = \{x\}$  dir.

$U^{-1}(\emptyset) = (\emptyset, \{\emptyset\})$  ve  $U^{-1}(\{x\}) = (\{x\}, \{\emptyset, \{x\}\})$  dir.

Böylece tek nokta ve boş cümle üzerinde sadece bir tek topoloji olduğundan  $U : \mathbf{TOP} \rightarrow \mathbf{SET}$  normalleştirilmiştir.

O halde  $U : \mathbf{TOP} \rightarrow \mathbf{SET}$  normalleştirilmiş topolojik fanktordur.

**Tanım 2.3.7**  $(X, \tau)$  bir topolojik uzay ve  $R, X$  üzerinde bir denklik bağıntısı olsun.  $f : (X, \tau) \rightarrow (X/R, \tau^*)$  fonksiyonu bölüm fonksiyonudur.

**Tanım 2.3.8**  $X$  bir cümle ve  $p \in X$  olmak üzere  $X \amalg X$ ,  $X$  in ayrık iki kopyası olsun.  $X$  in  $p$  de wedge çarpımı  $X \amalg X$  'in  $p$  de çakışmasıdır ve  $XV_p X$  şeklinde gösterilir [30].

$X = \mathbb{R}$ , reel sayılar cümlesini ve  $p=0$  alırsak  $XV_p X$  wedge çarpımı, koordinat düzleminde  $(0,0)$  noktasında çakışan iki doğrudur.

## 2.4. Süzgeçler

**Tanım 2.4.1**  $(X, \tau)$  bir topolojik uzay ve  $x \in X$  olsun.

1. Bir  $U \subset X$  alt cümlesine  $x$  noktasının bir komşuluğudur denir  $\Leftrightarrow$  en az bir  $G \in \tau$  vardır öyle ki  $x \in G \subset U$  dur.

$x$  noktasının  $\tau$  topolojisine göre bütün komşuluklarından oluşan ailesi  $U_\tau(x)$  veya topolojinin belirtmenin gerekmediği yerlerde kısaca  $U(x)$  ile göstereceğiz ve buna “ $x$  in komşuluklar sistemi” diyeceğiz.

2.  $M \subset X$  alt cümle ise bir  $U \subset X$  alt cümlesine  $M$  nin bir komşuluğudur denir  $\Leftrightarrow$  en az bir  $G \in \tau$  vardır öyle ki  $M \subset G \subset U$  dur [23].

**Tanım 2.4.2**  $X$  boş olmayan bir cümle ve  $P(X) = \{A \mid A \subset X\}$ ,  $X$ 'in kuvvet cümlesini gösterebilir.  $\Phi$ ,  $P(X)$ in bir alt sınıfı aşağıdaki 3 koşulu sağlıyorsa  $X$  üzerinde bir süzgeçtir.

f1)  $\emptyset \in \Phi$  dir,

f2)  $\forall A, B \in \Phi$  için  $A \cap B \in \Phi$  dir,

f3)  $\forall A \in \Phi$  ve  $A \subseteq B$  ise  $B \in \Phi$  dir [31].

Birinci ve ikinci aksiyomdan  $\Phi$  süzgecine ait sonlu sayıda kümelerin kesişiminin boş olamayacağı ve üçüncü aksiyomundan  $\Phi$  süzgecine ait keyfi sayıda kümelerin birleşiminin  $\Phi$  süzgecine ait olduğu anlaşılır. Yine üçüncü aksiyomu ise süzgeçlerin artan bir yapıda olduğunu gösterir.

$X$  kümesi üzerinde bir  $\Phi$  süzgeci var ise bu küme üzerinde bir yapı tanımlanmış demektir ve  $X$  kümesi de  $\Phi$  ile süzölmüş kümedir.

**Örnek 2.4.3**  $X$  herhangi bir küme ve  $X$  in boş olmayan bir alt kümesi  $Y$  olsun.  $X$  'in alt kümesi olan  $Y$  'yi kapsayan kümelerin sınıfı olan

$$\Phi = \{A \mid Y \subset A \subset X\}$$

kümesi  $X$  üzerinde bir süzgeçtir. Gerçekten,

1)  $Y \neq \emptyset \Rightarrow Y \subset A$  olduğundan  $Y$  'nin üst kümesi olan  $A$  'larda boştan farklıdır. O halde  $\emptyset \notin \mathcal{A}$  dir.

2)  $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow Y \subset A \subset X$  ve  $Y \subset B \subset X$

$$\Rightarrow Y \subset A \cap B \subset X$$

$$\Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A} \text{ dir.}$$

3)  $A \in \mathcal{A}$  ise  $Y \subset A \subset X$  ve  $A \subset B$  ise  $Y \subset A \subset B \subset X$

$$\Rightarrow B \in \mathcal{A} \text{ dir.}$$

Bu tür süzgeçlere temel süzgeç denir.

**Örnek 2.4.4** Bir  $X$  kümesi üzerinde boş olmayan süzgeçler ailesi  $\{\mathcal{A}_i\}_{i \in I}$  olduğuna göre

$\mathcal{A} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$  de  $X$  üzerinde bir süzgeçtir.

1)  $\{\mathcal{A}_i\}_{i \in I} \neq \emptyset \Rightarrow \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i \neq \emptyset$  o halde  $\emptyset \notin \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$

$$\Rightarrow \emptyset \notin \mathcal{A} \text{ dir,}$$

2)  $A, B \in \mathcal{A}$  ise  $A \cap B \in \mathcal{A}$  olduğunu gösterelim.

$A, B \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$  ise  $\mathcal{A}_i$  'ler süzgeç olduğundan  $A \cap B \in \mathcal{A}_1, A \cap B \in \mathcal{A}_2, \dots, A \cap B \in \mathcal{A}_{i(i \in I)}$

$$\Rightarrow A \cap B \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$$

$$\Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A} \text{ dir.}$$

3)  $A \in \mathcal{A}$  ve  $A \subset B$  ise  $B \in \mathcal{A}$  olduğunu gösterelim,

$A \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$  ise  $A \in \mathcal{A}_1, A \in \mathcal{A}_2, \dots, A \in \mathcal{A}_i$   $A \subset B$  ve  $\mathcal{A}_i$  ' ler süzgeç olduğundan

$$B \in (\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_i)_{i \in I}$$

$$\Rightarrow B \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$$

$$\Rightarrow B \in \mathcal{A} \text{ dir.}$$

**Teorem 2.4.5** Hiçbir sonlu arakesiti boş olmayan  $\mathcal{L} \subset P(X)$  'in sonlu arakesitlerinden oluşan  $M$  sınıfının yani

$$M = \left\{ G = \bigcap_{A \in L} A \mid L \subset \mathcal{L} \text{ sonlu} \right\}$$

sınıfının kümelerini kapsayan tüm altkümelerinin oluşturduğu

$$\mathcal{F} = \{ F \mid F \supset G, G \in M \}$$

sınıfı  $X$  üzerinde  $\mathcal{F}$  'yı içeren bir süzgeçtir.

**İspat.**

$A \subset \mathcal{L}$  olduğu aşikardır. Şimdi  $\mathcal{F}$  'nin  $X$  üzerinde bir süzgeç olduğunu gösterelim.

(1)  $\emptyset \notin M$  olduğundan  $\forall F \in \mathcal{F}$  için  $F \neq \emptyset$  yani  $\emptyset \notin \mathcal{F}$  dir.

(2)  $\forall F_1, F_2 \in \mathcal{F}$  için  $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$  dir. Gerçekten  $F_1 \in \mathcal{F}$  olduğundan  $\exists G_1 \in M$  vardır ki  $F_1 \supset G_1$  dir. Benzer şekilde  $F_2 \in \mathcal{F}$  olduğundan  $\exists G_2 \in M$  vardır ki  $F_2 \supset G_2$  dir. O halde  $F_1 \cap F_2 \supset G_1 \cap G_2$  den  $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$  elde edilir.

(3)  $\forall F \in \mathcal{F}$  ve  $F \subset K$  ise  $K \in \mathcal{F}$  dir. Bunu göstermek için,  $F \in \mathcal{F}$  olduğundan

$\exists G \in M$  vardır ki  $F \supset G$  dir. Bu durumda  $K \supset G$  olacağından  $K \in \mathcal{F}$  dir.

Süzgeçler artan bir yapıda olduğundan  $P(X)$  kümesinin  $\subset$  bağıntısına göre kısmî sıralanmış bir küme olmasından aşağıdaki tanımı verebiliriz.

**Tanımı 2.4.6**  $P$  kümesi  $\leq$  bağıntısına göre kısmi sıralı bir küme olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan  $F \subset P$  kümesine  $P$  üzerinde bir süzgeç denir.

1)  $F$  kümesi  $P$  kümesine eşit değildir

2) Herhangi iki eleman  $x, y \in P$  için onlardan daha küçük bir  $z \in P$  vardır.

3)  $x \in F, y \in P$  için  $x < y$  ise  $y \in F$  dir.

İki tanımda aynı matematiksel yapıyı tanımlamaktadır. Kümeler kuramında süzgecin kardeşi ideal denilen yapılardır.  $F$  'nin artan yapısı ideallerde azalan yapılara dönüşür.

**Tanım 2.4.7**  $I \subset P(X)$  altkümesi aşağıdaki koşulları sağlıyorsa  $X$  kümesi üzerinde bir idealdir.

- 1)  $\emptyset \in I$  fakat  $X \notin I$
- 2)  $A, B \in I$  ise  $A \cup B \in I$
- 3)  $A \in I$  ve  $B \subset A$  ise  $B \in I$

$F$  ve  $I$  kümelerinin her ikisi de tanım gereği boş kümeden farklıdır.  $*$ :  $P(X) \rightarrow P(X)$  operatörünü  $S^* = \{X - A : A \in S\}$  şeklinde tanımlarsak süzgeçlerle idealler arasındaki ilişki  $F^* = I$  ve  $I^* = F$  şeklindedir.

$X$  kümesi sonsuz elemanlı ise  $X$ 'in sonlu altkümelerinin kümesi  $I$  bir idealdir.  $I^*$  ile elde edilen süzgece Frechet süzgeci denir.

**Örnek 2.4.8** (Frechet Süzgeci)

$\square = \{A^c \mid A \subset \square \text{ sonlu}\}$  küme sınıfı  $\square$  üzerinde bir süzgeçtir. Bu süzgece Frechet süzgeci denir.

(1)  $\emptyset \notin \square$  dir.

(2)  $A, B \in \square$  için  $A \cap B \in \square$  dir. Gerçekten  $A \in \square$  ise  $A^c$  sonlu ve

$B \in \square$  ise  $B^c$  sonlu  $\Rightarrow A^c \cup B^c$  sonlu

$$\Rightarrow (A \cap B)^c \text{ sonlu}$$

$$\Rightarrow (A \cap B) \in \square \text{ dir.}$$

(3)  $A \in \square$  [ve  $A \subset B \Rightarrow B \in \square$  dir. Gerçekten

$A \in \square$  ise  $A^c$  sonlu olduğundan

$A \subset B \Rightarrow B^c \subset A^c$  sonlu

$$\Rightarrow (B^c)^c \in \square$$

$\Rightarrow B \in \mathcal{F}$  dir.

**Tanım 2.4.9**  $X$  üzerindeki tüm süzgeçlerin sınıfı  $\mathcal{F}(X)$  ile gösterilir. Eğer  $F$  ve  $G$  iki süzgeç ve  $F \subseteq G$  ise,  $G$  'ye  $F$  'den daha incedir veya  $F$  'ye,  $G$  'den daha kabadır denir,  $F \leq G$  veya  $G \geq F$  şeklinde gösterilir.

$F$  süzgeci için  $G \geq F$  olduğunda  $F = G$  oluyorsa  $F$  'e ultrasüzgeç denir. Bu da  $F$  den daha ince süzgecin var olmadığı anlamına gelir.  $X$  üzerinde ultrasüzgeçlerin sınıfı  $\mathcal{U}(X)$  ile gösterilir.

$\mathcal{F}$  süzgeç ve  $\bigcap \{F : F \in \mathcal{F}\} \neq \emptyset$  ise  $\mathcal{F}$  'e sabit süzgeç denir. Ayrıca  $\bigcap \{F : F \in \mathcal{F}\} = \emptyset$  ise  $\mathcal{F}$  'e free süzgeç denir.

**Tanım 2.4.10** Teorem 2.4.5'de belirttiğimiz  $\mathcal{F}$  süzgecine  $\mathcal{F}$  'nın doğurduğu süzgeç ve  $\mathcal{F}$  ya bu süzgecin alttabanı denir.  $M$  de biraz sonra göreceğiz ki süzgeç tabanıdır. Buradan  $\mathcal{F} \subset M \subset \mathcal{F}$  olduğu aşikardır. Teorem 2.4.5 de  $\mathcal{F}$  'nin doğurduğu  $\mathcal{F}$  süzgeci  $\mathcal{F}$  'yı içeren süzgeçlerin en kabası olan  $\mathcal{F}(\mathcal{F})$  'ya eşittir.

**İspat:**  $\mathcal{F}$  'yı içeren tüm süzgeçler  $\{F_i\}_{i \in I}$  olduğuna göre

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}) = \bigcap_{i \in I} F_i \text{ dir.}$$

Buradan  $\mathcal{F}(\mathcal{F}) \subset \mathcal{F}$  olduğu bellidir. Şimdi  $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}(\mathcal{F})$  olduğunu gösterelim.

$\forall F \in \mathcal{F}$  olduğu için  $\mathcal{F}$  'in tanımından  $\exists A \in \mathcal{F}$  vardır ki,  $F \supset A$  dır. Diğer taraftan

$\mathcal{F} \subset \mathcal{F}(\mathcal{F})$  olduğuna göre  $A \in \mathcal{F}(\mathcal{F})$  dır.  $\mathcal{F}(\mathcal{F})$  süzgeç olduğundan (f3) aksiyomu gereğince  $A \in \mathcal{F}(\mathcal{F})$  ve  $F \supset A$  olduğundan  $F \in \mathcal{F}(\mathcal{F})$  olur.

Bundan sonra  $A \subset P(X)$  in doğurduğu süzgeci  $\mathcal{F}(A)$  ile göstereceğiz.

Tek nokta  $\{x\}$  cümlesi tarafından üretilen sabit süzgeç  $\dot{x}$  ile ya da  $[x]$  gösterilir. Bu ise tek nokta  $\{x\}$  cümlesi tarafından üretilen sabit süzgecin ultrasüzgeç olduğunu doğrular.

Gerçekten her bir sabit ultrasüzgeç tek nokta cümle tarafından üretilmiştir. Süzgeç tanımı üçüncü aksiyomu  $X$  üzerindeki bütün süzgeçlerin  $X'$  i içerdiğini gerektirir. Böylece  $X$  üzerindeki en kaba süzgeç  $\dot{x}$  dir. Bu da  $\forall \square \in F(X)$  için  $\square \geq X$  dir ( $\square$  daha incedir).

**Tanım 2.4.11**  $(X, \tau)$  topolojik uzayının keyfi bir  $x$  noktasının tüm komşuluklarının cümlesi bir süzgeçtir ve bu süzgece  $x$  noktasının komşulukları süzgeci denir. Bu süzgeç  $\square(x)$  ile gösterilir ve

$$\dot{x} \geq \square(x) \text{ dir.}$$

**Tanım 2.4.12**  $(x_n)$ :  $x$ 'in elemanlarından oluşan bir dizisi olsun.  $x_n$  dizisi ile birleştirilmiş temel süzgeç;  $(x_n)$  dizisinin sonsuz terimini içeren  $x$ ' in tüm altcümlelerinin sınıfıdır.  $x_n$  dizisinin birleştirilmiş temel süzgeci olan  $\square$  süzgeci  $\square \rightarrow (x_n)$  notasyonu ile gösterilir.

Eğer  $(x_n)$  dizisinin birleştirilmiş temel süzgeci  $\square$  ve  $(x_n)$  dizisinin bir alt dizisinin birleştirilmiş temel süzgeci  $G$  ise  $G \geq \square$  dir. Çünkü  $(x_n)$  dizisinin sonsuz terimini içeren bir cümle aynı zamanda o dizinin keyfi bir alt dizisinin sonsuz terimini de ihtiva eder.

## 2.5. Süzgeç Tabanları

**Tanım 2.5.1**  $X'$  in kümelerinin bir sınıfı  $\square$  olsun.  $\square$  küme sınıfı aşağıdaki iki özelliği sağlıyorsa  $\square$ 'ye  $X$  üzerinde bir süzgeç tabanı denir.

- 1)  $\square \neq \emptyset$  ve  $\emptyset \notin \square$
- 2)  $\forall A, B \in \square$  iken  $C \subset A \cap B$  olacak şekilde  $\exists C \in \square$  vardır.

**Örnek 2.5.2**  $X$  kümesinin boştan farklı  $A$  alt kümesi sadece  $X$  üzerinde bir süzgeç tabanı oluşturur, yani süzgeci üretir.  $\square = \{A\}$  bir süzgeç tabanıdır ve Örnek 2.4.3 deki süzgeci üretir.

**Sonuç 2.5.3** Her süzgeç aynı zamanda bir süzgeç tabanıdır fakat tersi doğru değildir.

Süzgeç olma birinci ve ikinci aksiyomu süzgeç tabanı aksiyomlarını sağladığından her süzgeç aynı zamanda bir süzgeç tabanıdır.

**Örnek 2.5.4**  $(X, \tau)$  topolojik uzayının herhangi bir  $x$  noktasının  $E(x)$  komşuluk tabanı bir süzgeç tabanıdır.

(1)  $\forall A \in E(x)$  için  $x \in A \Rightarrow A \neq \emptyset$

$\Rightarrow \emptyset \notin E(x)$  dir.

(2)  $\forall A, B \in E(x)$  için  $A \cap B \in E(x)$  dir. O halde  $\exists C \in E(x)$  vardır ki  $C \subset A \cap B$  dir.

O halde  $E(x)$  komşuluk tabanıdır.

**Sonuç 2.5.6**  $X$  üzerindeki her  $\mathcal{F}$  süzgeç tabanı elemanları  $\mathcal{F}$  nin kümelerinin üst kümelerinden oluşan bir  $\mathcal{G}$  süzgeç belirtir.

**İspat:**  $\mathcal{G} = \{F \mid F \supset B \in \mathcal{F}\}$  kümeler sınıfının  $X$  üzerinde bir süzgeç olduğunu, yani 3 süzgeç aksiyomunu sağladığını gösterelim.

(1)  $\emptyset \notin \mathcal{G} \Rightarrow \emptyset \notin \mathcal{F}$  dir.

(2)  $\forall F_1, F_2 \in \mathcal{G} \Rightarrow \exists B_1, B_2 \in \mathcal{F} \ni F_1 \supset B_1, F_2 \supset B_2$

$\Rightarrow F_1 \cap F_2 \supset B_1 \cap B_2$  dir.

$\mathcal{F}$  süzgeç tabanının ikinci aksiyomundan  $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{F}$  için en az bir  $B \in \mathcal{F}$  vardır ki  $B \subset B_1 \cap B_2$  dir.  $(B_1 \cap B_2 \supset B)$  O halde  $F_1 \cap F_2 \supset B$  olur. Bu da  $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{G}$  olduğunu gösterir.

(3)  $\forall F_1 \in \mathcal{G}, F_1 \subset F_2$  iken  $F_2 \in \mathcal{G}$  olduğunu gösterelim.  $F_1 \in \mathcal{G}$  ise en az bir  $B \in \mathcal{F}$  vardır öyle ki  $F_1 \supset B$  dir.  $F_1 \subset F_2$  olduğundan  $F_2 \supset B \Rightarrow F_2 \in \mathcal{G}$  dir.

Tanımdan anlaşıldığı gibi  $\mathcal{G}$  nin her cümlesi  $\mathcal{F}$  nin bir cümlesini içerir.

Buradaki  $\mathcal{B}$  süzgecine  $\mathcal{A}$  süzgeç tabanının ürettiği (doğurduğu) süzgeç denir ve  $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$  dir. Genel olarak  $X$  üzerinde başka süzgeç tabanları da vardır. Çoğu zaman bir süzgecin kendisiyle çalışmaktansa süzgeç bazıyla çalışmak daha kolaydır.

**Örnek 2.5.7**  $(X, \tau)$  topolojik uzayının herhangi bir  $x \in X$  noktasının  $E(x)$  komşuluk temeli bir süzgeç tabanı idi. Bu taban  $\mathcal{B}(x)$  süzgecini üretir ve  $E(x) \subset \mathcal{B}(x)$  dir.

**Örnek 2.5.8**  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  kümesini alalım.  $\forall k \in \mathbb{N}$  için  $S_k = \{x_n \mid n \geq k\}$  olmak üzere  $\mathcal{B} = \{S_k \mid k \in \mathbb{N}\}$  sınıfı  $X$  üzerinde bir süzgeç tabanıdır.

**İspat:**

(1)  $\forall k \in \mathbb{N}$  için  $S_k \neq \emptyset$  olduğundan  $\emptyset \notin \mathcal{B}$  ve  $\mathcal{B} \neq \emptyset$  olduğundan  $\mathcal{B} \neq \emptyset$  dir.

(2)  $\forall k_1, k_2 \in \mathbb{N}$  için  $S_{k_1}, S_{k_2} \in \mathcal{B}$  dir.

$k = \max\{k_1, k_2\}$  olmak üzere  $S_k = S_{k_1} \cap S_{k_2}$  dir ve  $S_k \in \mathcal{B}$ ,  $S_{k_1} \cap S_{k_2} \supset S_k$

$\mathcal{B}$  süzgeç tabanına  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisinin bileşen süzgeç tabanı denir.

$X$ ' in alt cümlelerinin bir sınıfı  $S$  ve  $\mathcal{B}$  de  $S$ ' nin cümlelerinin sonlu kesişimlerini ihtiva etsin. Bu durumda  $S$  nin sonlu hiçbir altkümesinin boş kesişimleri yoksa  $\mathcal{B}$  bir süzgeç bazı oluşturur. Eğer  $\mathcal{B}$  bir süzgeç bazı oluşturuyorsa bu durumda  $\mathcal{B}$  süzgeci  $\mathcal{B}$  tarafından üretilir ve  $S$ ' yi kapsayan en kaba süzgeçtir.  $S$ ' ye  $\mathcal{B}$ ' nin alt bazı denir.

**Örnek 2.5.9**  $X$  ve  $Y$  iki cümle  $f : X \rightarrow Y$  bir fonksiyon ve  $\mathcal{B}$ ,  $X$  üzerinde bir süzgeç ise  $\{f(F) \mid F \in \mathcal{B}\}$  görüntü kümesi bir süzgeç tabanıdır.

**Çözüm:**  $f(F)$  görüntü kümesinin baz aksiyomlarını sağladığını gösterelim.

(1)  $F \neq \emptyset$  iken  $f(F) \neq \emptyset$  olduğunu gösterelim.

Her  $A \in \mathcal{B}$  için  $A \neq \emptyset \Rightarrow f(A) \neq \emptyset$  ve  $\emptyset \notin \mathcal{B}$  olduğundan  $\emptyset \notin f(\mathcal{B})$

(2) Her  $A, B \in f(F)$  ise en az bir  $C \in f(F)$  için  $C \subset A \cap B$  olduğunu göstereceğiz,  $A, B \in f(F)$  ise  $A = f(F_1)$  ve  $B = f(F_2)$  olacak şekilde  $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$  vardır.  $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$  ve  $\mathcal{F}$  süzgeç olduğundan  $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$  olur.

$A \cap B = f(F_1) \cap f(F_2) \supset f(F_1 \cap F_2)$  olduğundan  $C = f(F_1 \cap F_2) \in f(\mathcal{F})$  alınırsa  $C \subset f(F_1) \cap f(F_2)$  olur.

Buradan  $C \subset A \cap B$  elde edilir.

**Uyarı 2.5.10** Eğer  $f : X \rightarrow Y$  fonksiyonu örten ise  $\{f(F) \mid F \in \mathcal{F}\}$  görüntü kümesi de bir süzgeçtir.

**Teorem 2.5.11**  $X$  ve  $Y$  herhangi iki küme ve  $f : X \rightarrow Y$  bir fonksiyon olsun. Eğer  $\mathcal{F}$ ,  $X$  üzerinde bir süzgeç tabanı ise

$$f(\mathcal{F}) = \{f(B) \mid B \in \mathcal{F}\}$$

görüntüsü de  $Y$  üzerinde bir süzgeç tabanıdır.

**İspat:**  $f(\mathcal{F})$  nin baz özelliklerini sağladığını gösterelim

(1)  $\mathcal{F}$  süzgeç tabanı olduğundan  $\mathcal{F} \neq \emptyset$  ve  $\emptyset \notin \mathcal{F}$  dir.  $f(\mathcal{F}) \neq \emptyset$  ve  $\emptyset \notin f(\mathcal{F})$  olduğunu gösterelim.  $\forall B \in \mathcal{F}$  için  $\mathcal{F} \neq \emptyset \Rightarrow f(B) \neq \emptyset$  ve ayrıca  $\emptyset \notin \mathcal{F}$  olduğundan  $\emptyset \notin f(\mathcal{F})$  dir.

(2) Her  $f(B_1), f(B_2)$  için  $f(B) \subset f(B_1) \cap f(B_2)$  olacak şekilde en az bir  $f(B) \in f(\mathcal{F})$  olduğunu gösterelim.  $f(B_1), f(B_2) \in f(\mathcal{F})$  alalım.

$B_1, B_2 \in \mathcal{F}$  ve  $\mathcal{F}$  süzgeç tabanı olduğundan  $\exists B \in \mathcal{F}$  vardır ki  $B \subset B_1 \cap B_2$  dir.

O halde,

$f(B) \subset f(B_1 \cap B_2) \subset f(B_1) \cap f(B_2)$  olduğundan

$f(B) \subset f(B_1) \cap f(B_2)$  elde edilir.

**Tanım 2.5.12**  $f : X \rightarrow Y$  fonksiyon ve  $\mathcal{Q}$  de  $X$  üzerinde bir süzgeç olsun  $\{f(F) \mid F \in \mathcal{Q}\}$  görüntü kümesini taban olarak kabul eden  $Y$  üzerindeki süzgece  $\mathcal{Q}$  süzgecinin  $f$ ' e göre görüntüsü denir ve  $f(\mathcal{Q})$  ile gösterilir.

$$f(\mathcal{Q}) = \{F' \supset f(F) \mid F \in \mathcal{Q}\}$$

**Tanım 2.5.13**  $f : X \rightarrow Y$  bir fonksiyon ve  $\mathcal{Q}'$  de  $Y$  üzerinde süzgeç olsun. Tabanı  $\{f^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{Q}'\}$  kümeler sınıfı olan  $X$  üzerindeki süzgece  $\mathcal{Q}'$  süzgecinin  $f$  fonksiyonuna göre ters görüntüsü denir ve  $f^{-1}(\mathcal{Q}')$  ile gösterilir. O halde;

$$f^{-1}(\mathcal{Q}') = \{A \supset f^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{Q}'\} \text{ dir.}$$

**Tanım 2.5.14**  $X$  kümesi üzerinde boş olmayan süzgeçler ailesi  $\{\mathcal{Q}_i\}_{i \in I}$  olsun.  $X$

üzerinde tüm  $\mathcal{Q}_i$ 'den kaba olan  $\mathcal{Q}$  süzgeci  $\mathcal{Q} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{Q}_i$  dir. Bu  $\mathcal{Q}$  süzgeci  $\{\mathcal{Q}_i\}_{i \in I}$  ailesinin en büyük alt sınırıdır.

**Teorem 2.5.15**  $\mathcal{Q}_1$  ve  $\mathcal{Q}_2$   $X$  kümesi üzerinde iki süzgeç tabanı olsunlar. Bu taktirde aşağıdaki özellikler denktir.

(i)  $\mathcal{Q}_1$ ' in ürettiği  $\mathcal{Q}_1$  süzgeci,  $\mathcal{Q}_2$  nin ürettiği  $\mathcal{Q}_2$  süzgecinden incedir.

(ii)  $\mathcal{Q}_2$ 'nin herhangi bir kümesi,  $\mathcal{Q}_1$  in herhangi bir kümesini kapsar.

**İspat.** (i)  $\Rightarrow$  (ii)  $\mathcal{Q}_1 \supset \mathcal{Q}_2$  ise  $\mathcal{Q}_1 \supset \mathcal{Q}_2 \supset \mathcal{Q}_2$  olduğundan  $\forall A_2 \in \mathcal{Q}_2$  kümesi  $\mathcal{Q}_1$ 'e aittir. Sonuç 2.5.6' ye göre  $\mathcal{Q}_2$ 'nin herhangi bir  $A_2$  kümesi;  $\mathcal{Q}$  in  $\mathcal{Q}_1$  tabanına ait bir  $A_1$  kümesini kapsar.

(ii) $\Rightarrow$ (i)  $\forall A_2 \in \mathcal{Q}_2$  kümesi bir  $A_1 \in \mathcal{Q}_1$  kümesini kapsıyor ise  $\mathcal{Q}_1 \supset \mathcal{Q}_2$  olduğunu gösterelim.

$\forall F_2 \in \mathcal{F}_2$  alalım. Sonuç 2.5.3 e göre en az bir  $A_2 \in \mathcal{F}_2$  vardır ki  $A_2 \subset F_2$  dir.  $A_2 \supset A_1$  olduğundan yine Sonuç 2.5.3 gereğince  $A_2 \in \mathcal{F}_1 \Rightarrow \mathcal{F}_1 \supset \mathcal{F}_2$  dir.

Bir  $X$  kümesi üzerindeki  $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in I}$  süzgeçlerinin ne zaman en küçük üst sınıra sahip olacağını belirten aşağıdaki teoremi verelim.

**Teorem 2.5.16**  $X$  kümesi üzerindeki  $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in I}$  tabanlı süzgeçler sınıfı  $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in I}$  olsun  $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in I}$  süzgeçlerinden daha ince olan bir süzgecinin var olması için gerek ve yeter koşul

$I$  ya ait her farklı  $i_1, i_2, \dots, i_n$  'ler için ve  $B_{ij} \in \mathcal{F}_{i_j}$  ( $j=1, 2, \dots, n$ ) olmak üzere  $\bigcap_{j=1}^n B_{ij} \neq \emptyset$  olmasıdır.

**İspat.** ( $\Rightarrow$ ):  $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in I}$  süzgeçlerinden ince olan bir  $\mathcal{F}$  süzgeci var olduğuna göre  $\forall i \in I$  için  $\mathcal{F}_i \subset \mathcal{F}$  dir. Ayrıca  $\forall i \in I$  için  $\mathcal{F}_i \subset \mathcal{F}_i$  dir. Yani  $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in I}$  tabanına ait olan her küme  $\mathcal{F}$  süzgecine de aittir. O halde  $(f_1)$  ve  $(f_2)$  aksiyomları dikkate alınırsa  $\bigcap_{j=1}^n B_{ij} \neq \emptyset$  olduğu gösterilmiş olur.

( $\Leftarrow$ ):  $i_1, i_2, \dots, i_n$  ler  $I$  ya ait farklı elemanlar ve  $B_{ij} \in \mathcal{F}_{i_j}$  olmak üzere  $\bigcap_{j=1}^n B_{ij} \neq \emptyset$  şeklindeki kümelerin oluşturduğu küme sınıfı  $\mathcal{F}$  olsun; yani  $\mathcal{F} = \left\{ \bigcap_{j=1}^n B_{ij} \mid B_{ij} \in \mathcal{F}_{i_j} \right\}$  olsun

b<sub>1</sub>)  $\bigcap_{j=1}^n B_{ij} \neq \emptyset$  olduğundan  $\emptyset \notin \mathcal{F}$  olur.

b<sub>2</sub>)  $B_{ij}$  lerin tanımından  $\forall B_{i_1}, B_{i_2} \in \mathcal{F}$  için  $\exists B_{i_3} \in \mathcal{F}$  vardır ki  $B_{i_1}, B_{i_2} \supset B_{i_3}$  dir.

$\mathcal{F}$  nin doğurduğu süzgeç  $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in I}$  lerin hepsinden ince olan  $\mathcal{F}$  süzgecidir.

Bu teoremdaki  $\mathcal{F}$  süzgeci kısmi sıralanmış olan  $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in I}$  ailesinin en küçük üst sınırıdır.

**Teorem 2.5.17**  $A \subset X$  ve  $X$  üzerindeki süzgeç  $\mathcal{F}$  olsun.  $A$  kümesinin  $\mathcal{F}$  den daha ince bir süzgece ait olması için gerek ve yeter koşul,  $A^c$  kümesinin  $\mathcal{F}$  süzgecine ait olmamasıdır.

**İspat:** ( $\Rightarrow$ ):  $A$  kümesinin  $\mathcal{F}$  den daha ince bir süzgece ait olsun.  $A^c \notin \mathcal{F}$  olduğunu gösterelim.

Olmayana ergi metodunu kullanalım.  $\mathcal{F}$  süzgecinden daha ince süzgeç  $\mathcal{F}_1$  olsun.  $A \in \mathcal{F}_1$  ise  $A^c \notin \mathcal{F}_1$  olduğunu göstereceğiz; kabul edelim ki  $A^c \in \mathcal{F}_1$  olsun.  $A, A^c \in \mathcal{F}_1$  olduğuna göre ( $f_2$ ) gereğince  $A \cap A^c = \emptyset \in \mathcal{F}_1$  elde edilir. Bu da  $\mathcal{F}_1$ ' in süzgeç olması ile çelişir  $A^c \notin \mathcal{F}_1$  dir.

( $\Leftarrow$ ):  $A^c \notin \mathcal{F}$  ise,  $A$  kümesinin  $\mathcal{F}$  den ince olan bir  $\mathcal{F}_1$  süzgecine ait olduğunu göstereceğiz.  $F \in \mathcal{F}$  olsun. Bu durumda  $F \not\subset A^c$  dir. Çünkü  $F \subset A^c$  olsaydı. Süzgeç olma üçüncü aksiyomu gereğince  $\mathcal{F}$  ile  $A^c$ ' nin üst kümelerinden oluşan süzgecin en küçük üst sınırı vardır ve bu  $A$  yı ihtiva eden  $\mathcal{F}$  den ince bir  $\mathcal{F}_1$  süzgecidir.

**Tanım 2.5.18**  $\mathcal{F}, (X, \tau)$  uzayındaki bir süzgeç ve  $x \in X$  olsun. Eğer  $\mathcal{F}$  süzgeci  $x$  noktasının  $\mathcal{F}(x)$  komşuluklar süzgecinden daha ince ise, yani  $\mathcal{F}(x) \subset \mathcal{F}$  ise  $\mathcal{F}$  süzgeci  $x$  noktasına yakınsıyor denilir ve  $\mathcal{F} \rightarrow x$  veya  $\lim \mathcal{F} = x$  şeklinde gösterilir.

Eğer  $X$  üzerindeki bir  $\mathcal{F}$  süzgeci  $x$  noktasına yakınsıyor ise,  $X$  üzerinde  $\mathcal{F}$  den ince olan tüm süzgeçlerin de  $x$  noktasına yakınsayacağı tanımdan aşikardır. Ayrıca  $X$  kümesi üzerinde  $x$  noktasına yakınsayan tüm süzgeçlerin arakesiti de  $\mathcal{F}(x)$  komşuluklar süzgecidir.

**Tanım 2.5.19**  $\mathcal{F}, (X, \tau)$  topolojik uzayındaki bir süzgeç tabanı ve  $x \in X$  olsun.  $\mathcal{F}$  nin her  $\mathcal{F}$  kümesi  $\mathcal{F}(x)$  nin bir  $N$  kümesi tarafından ihtiva ediliyor ise,  $\mathcal{F}$  süzgeç tabanı  $x$  noktasına yakınsıyor denilir. Yani  $\mathcal{F}$  nin doğurduğu  $\mathcal{F}$  süzgeci  $x$  noktasına yakınsıyor ise,  $\mathcal{F}$  süzgeç tabanı  $x$  noktasına yakınsıyor denir. Bir süzgeç veya tabanı birden fazla noktaya yakınsayabilir.

Bir süzgeç veya süzgeç tabanı birden fazla noktaya yakınsayabilirken daha sonra ispatlayacağız ki eğer uzay hausdorff uzayı ise tek noktaya yakınsarlar.

**Teorem 2.5.20**  $X$  uzayının Hausdorff uzayı olması için gerek ve yeter şart bu uzaydaki yakınsak bir süzgecin tek bir noktaya yakınsamasıdır.

**İspat:**  $(\Rightarrow)$ :  $X$  uzayı Hausdorff uzayı olsun. Bu uzaydaki yakınsak bir  $\square$  süzgecinin tek bir noktaya yakınsadığını göstereceğiz.  $\square$  süzgecinin  $x$  ve  $y$  gibi farklı iki noktaya yakınsadığını kabul edelim.  $X$  uzayı H-uzayı olduğundan  $\exists N \in \square(x)$  ve  $\exists M \in \square(y)$  vardır ki  $N \cap M = \emptyset$  dir. Oysa  $\square$  süzgeci  $x$  noktasına yakınsadığından  $\square(x) \subset \square$  dir ve dolayısı ile  $N \in \square$  dir. Benzer şekilde  $M \in \square$  dir. Süzgeç olma ikinci aksiyomundan  $N \cap M = \emptyset \in \square$  elde edilir ki, bu da Süzgeç olma birinci aksiyomu ile çelişir. O halde  $x=y$  dir, yani  $\square$  tek noktaya yakınsar.

$(\Leftarrow)$ : Yakınsak bir süzgeç tek noktaya yakınsasın,  $X$  uzayının H-uzayı olmadığını kabul edelim. O halde  $\exists x, y \in X$  vardır ki  $\forall N \in \square(x), \forall M \in \square(y)$  için  $N \cap M \neq \emptyset$  dir. Buradan  $N \not\subset M^c$  elde edilir ve Teorem 2.5.17 gereğince  $\forall M \in \square(y)$  için  $M \in \square(x)$  dir. O halde  $\square(y) \subset \square(x)$  elde edilir ki bu da hipoteze aykırıdır. Çünkü  $X$  uzayındaki  $\square(x)$  süzgeci hem  $x$  hem de  $y$  noktasına yakınsar.

**Teorem 2.5.21**  $X$  ve  $Y$  herhangi iki küme  $f: X \rightarrow Y$  fonksiyon ve  $\square'$ ,  $Y$  üzerinde bir süzgeç tabanı olsun.

Bu taktirde  $f^{-1}(\square') = \{f^{-1}(B') \mid B' \in \square'\}$  kümeler sınıfının da  $X$  üzerinde bir süzgeç tabanı olması için gerek ve yeter şart  $B' \in \square'$  için  $f^{-1}(B') \neq \emptyset$  olmasıdır.

**İspat:**  $(\Rightarrow)$ :  $f^{-1}(\square')$  sınıfı  $X$  üzerinde süzgeç tabanı olduğuna göre  $\forall B' \in \square'$  için  $f^{-1}(B') \neq \emptyset$  dir.

$(\Leftarrow)$ :  $\forall B' \in \square'$  için  $f^{-1}(B') \neq \emptyset$  olduğundan birinci aksiyom sağlanır.

$\forall f^{-1}(A'), f^{-1}(B') \in f^{-1}(\square')$  için

$$f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B') = f^{-1}(A' \cap B')$$

$A', B' \in \square'$  ve  $\square'$ 'nin  $X$  üzerinde süzgeç tabanı olması nedeniyle  $\exists C' \in \square'$  vardır ki  $C' \subset A' \cap B'$  dir.

Buradan  $f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B') = f^{-1}(A' \cap B') \supset f^{-1}(C')$  elde edilir.

## 2.6 Topolojik Kategori Örnekleri

$A$  bir cümle ve  $\sigma \subset P(A)$  olsun.  $[\sigma] = \{ B \subset A \mid \text{en az bir } C \in \sigma \text{ vardır öyle ki } C \subset B \}$  şeklinde tanımlansın [22].

**Tanım 2.6.1** Eğer  $[\sigma] = \sigma$  ise  $\sigma \subset P(A)$  ya  $A$  üstünde bir *yığın (stack)* denir. Yani  $\sigma$  süper cümle altında kapalıdır [21].

$\alpha$ ,  $A$  üzerinde boş olmayan bir yığın olsun. Eğer  $B, C \in \alpha$  iken  $B \cap C \in \alpha$  oluyorsa  $\alpha$  ya  $A$  üzerinde *süzgeç (filter)* denir [21].

$\alpha$  yığınının (süzgeç), *öz yığın (süzgeç) (proper)* olması için gerek ve yeter şart  $\emptyset \notin \alpha$ , yani  $\alpha \neq [P(A)]$  olmasıdır. Aksi durumda  $\alpha$  ya *öz olmayan yığın (süzgeç) (improper)*

denir.  $A$  üzerinde yığın ve süzgeçlerin cümlesi sırasıyla  $S(A)$  ve  $F(A)$  ile gösterilir.

Eğer  $\alpha$  ve  $\beta \in F(A)$  ise bu taktirde  $\alpha \cap \beta = \{ B \subset A \mid B \in \alpha \text{ ve } B \in \beta \}$  da bir süzgeçtir. Yani  $[\alpha \cap \beta] = \alpha \cap \beta$  dir.  $\alpha \cap \beta \subset [\alpha \cap \beta]$  süzgeç tanımından açıktır.

Şimdi  $[\alpha \cap \beta] \subset \alpha \cap \beta$  olduğunu gösterelim.  $B \in [\alpha \cap \beta]$  alalım. En az bir  $G \in \alpha \cap \beta$  vardır öyle ki  $G \subset B$  dir.  $G \in \alpha \cap \beta$  olduğundan  $G \in \alpha$  ve  $G \in \beta$  dir.  $\alpha$  ve  $\beta$  süzgeç olduğundan  $B \in \alpha$  ve  $B \in \beta$  dir.

$A$  bir cümle ve  $K: A \rightarrow P(F(A))$  her bir  $a \in A$  için  $K(a)$ ,  $A$  nın  $a$  noktasına 'yakınsayan' boş olmayan tüm süzgeçlerin cümlesi olacak şekilde tanımlanan bir fonksiyon olsun.

**Tanım 2.6.2**  $(A, K)$  yakınsak süzgeç uzayı ve  $a \in A$  olsun. Eğer  $\forall a \in A$  ve  $K(a)$  da ki bütün süzgeçlerin kesişimi  $N_a$  olmak üzere,  $N_a \in K(a)$  ve  $N_a$  “ $\forall v \in B_a$  ise her  $b \in V$  için  $v \in B_b$ ” şartını sağlayan bir  $B_a$  bazına sahipse  $(A, K)$  ya *süzgeç topolojik uzay* denir [20].

**Tanım 2.6.3**  $\mathcal{K}$  ve  $\mathcal{K}'$  birer kategori,  $F$  ve  $G$  de  $\mathcal{K}$  dan  $\mathcal{K}'$  ne iki fanktor olsunlar. Eğer her  $A, B \in \text{Ob}(\mathcal{K})$  ve her  $f : A \rightarrow B$  dönüşümü için  $\alpha_A : F(A) \rightarrow G(A)$   $\mathcal{K}'$  de bir dönüşüm ve  $G(f) \circ \alpha_A = \alpha_B \circ F(f)$  oluyorsa  $\alpha : F \rightarrow G$  ya bir *doğal dönüşüm* (*natural transformation*) denir. Buda aşağıdaki diyagramın değişmeli olmasına karşılık gelir.

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathcal{K} & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{K}' \\
 & & & \alpha_A \\
 A & F(A) & \xrightarrow{\quad} & G(A) \\
 \downarrow f & \downarrow F(f) & & \downarrow G(f) \\
 B & F(B) & \xrightarrow{\quad} & G(B) \\
 & & & \alpha_B
 \end{array}$$

Yani  $G(f) \circ \alpha_A = \alpha_B \circ F(f)$  olmasıdır.

**Tanım 2.6.4**  $\mathcal{K}$  ve  $\mathcal{A}$  birer kategori,  $R$  ve  $L$  de fanktor olmak üzere;  $\mathcal{K} \xrightarrow{R} \mathcal{A}$  fonksiyonları için aşağıdaki şartlar sağlanırsa  $L$  ye  $R$  nin *sol adjointi* veya  $R$  ye  $L$  nin *sağ adjointi* denir.  $L \dashv R$  şeklinde gösterilir. Bu şartlar;

(1)  $\eta : I \rightarrow R \circ L$  ve  $\varepsilon : L \circ R \rightarrow I$  doğal dönüşümler olmalıdır.

(2)  $L \xrightarrow{L\eta} LRL \xrightarrow{\varepsilon L} L$  de  $(\varepsilon L) \circ (L\eta) = I$  ve

$R \xrightarrow{\eta R} RLR \xrightarrow{R\varepsilon} R$  ve  $(R\varepsilon) \circ (\eta R) = I$  eşitlikleri sağlanmalıdır.

**Tanım 2.6.5** 1)  $U : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$  topolojik fanktoru bir  $D : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{E}$  sol adjointine sahiptir ki bu sol adjointe *diskre fanktoru* denir. Yani  $E = D(U(E))$  nesnesi,  $\mathcal{E}$  de diskre nesne olarak adlandırılır.

2)  $U: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$  topolojik fanktoru bir  $D^*: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{E}$  sağ adjointine sahiptir ki bu sağ adjointe *indiskre fanktoru* denir. Yani  $X = D^*(U(X))$  nesnesi  $\mathcal{E}$  den indiskre nesne olarak adlandırılır [19].

**Teorem 2.6.6** 1)  $\mathcal{E}$  topolojik kategori olsun,  $e \in \mathcal{E}$  nesnesi diskredir. Yani  $e = D \cup e$  olması için gerek ve yeter şart her  $c \in \mathcal{E}$  için her  $Ue \rightarrow Uc$  dönüşümünün,  $e \rightarrow c$  dönüşümüne kaldırılabilir olmasıdır.

2)  $d \in \mathcal{E}$  indiskre, yani  $d = D^*Ud$  olması için gerek ve yeter şart her  $c \in \mathcal{E}$  için her  $Uc \rightarrow Ud$  dönüşümünün,  $c \rightarrow d$  dönüşümüne kaldırılabilir olmasıdır.

**İspat:** 1. ( $\Rightarrow$ )  $e$  diskre her  $c \in \mathcal{E}$  için  $f: Ue \rightarrow Uc$  olsun. En az bir  $\bar{k}: e \rightarrow c$  dönüşümünün var olduğunu ve  $U(\bar{k}) = f$  olduğunu göstereceğiz.

$U$  topolojik fanktor olduğundan  $\bar{f}: \bar{e} \rightarrow c$ ,  $f$  nin başlangıç kaldırması olsun. Burada  $U\bar{e} = Ue$  ve  $e$  diskre olduğu için tanım gereği  $e \leq \bar{e}$  dir, yani  $h: e \rightarrow \bar{e}$  bir dönüşüm vardır öyleki  $U(h) = \bar{Id}: Ue \rightarrow U\bar{e} = Ue$  dir.  $\bar{k} = \bar{f} \circ h$  olsun.

$$U(\bar{k}) = U(\bar{f} \circ h) = U(\bar{f}) \circ U(h) = \bar{f} \circ \bar{Id} = \bar{f} \text{ olur.}$$

( $\Leftarrow$ ) Her  $c \in \mathcal{E}$  için her  $Ue \rightarrow Uc$  dönüşümü  $e \rightarrow c$  dönüşümüne kaldırılabilsin,  $e$ 'nin diskre olduğunu gösterelim. Özel olarak  $Ue \rightarrow Uc$  ve  $id: Ue \rightarrow Uc$  alalım, hipotezden  $\bar{k}: e \rightarrow c$  ye bir dönüşüm vardır öyle ki  $U(\bar{k}) = \bar{Id}$  dir. Bu demet üzerinde alınan her  $c$  nesnesi için geçerli olduğundan,  $e$  bu demet de en küçük nesnedir. Bu da  $e$ 'nin diskre olduğunu gösterir.

2. ( $\Rightarrow$ )  $d$  indiskre ve her  $c \in \mathcal{E}$  için  $f: Uc \rightarrow Ud$  olsun,  $U$  topolojik fanktor olduğundan  $\bar{f}: c \rightarrow \bar{d}$   $f$ 'nin bitiş kaldırması olsun.

Burada  $U(d) = U(\bar{d})$  ve  $d$  indiskre olduğu için  $\bar{d} \leq d$  dir, yani  $h: \bar{d} \rightarrow d$  ye bir dönüşüm vardır, öyle ki  $U(h) = \bar{Id}: U\bar{d} = Ud \rightarrow Ud$  dir.  $\bar{k} = h \circ \bar{f}$  olsun,

$$U(\bar{k}) = U(h \circ \bar{f}) = U(h) \circ U(\bar{f}) = \bar{Id} \circ \bar{f} = \bar{f} \text{ dolayısıyla } U(\bar{k}) = \bar{f} \text{ dir.}$$

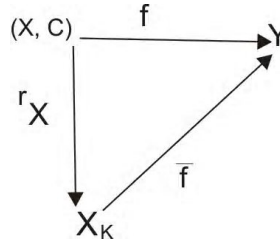
( $\Leftarrow$ ) Her  $c \in E$  için her  $Uc \rightarrow Ud$  dönüşümü,  $c \rightarrow d$  dönüşümüne kaldırılabilir,  $d$ 'nin indiske olduğunu gösterelim.

Özel olarak  $Ud = Uc$  ve  $\bar{Id} : Uc \rightarrow Ud$  alalım. Hipotezden  $\bar{k} : c \rightarrow d$  dönüşümü vardır, öyle ki  $U(\bar{k}) = \bar{Id}$  dir. Bu dönüşüm her  $c$  için geçerli olduğundan  $d$  bu demette en büyük nesnedir. Bu da  $d$ 'nin en büyük olduğunu gösterir, yani  $d$  indiske nesnedir.

Görülür ki  $e \in E$  diskre nesne kavramı, topolojik uzayların kategorisi  $\text{Top}$ 'daki  $e$  diskre topolojik uzayı kavramının genelleştirilmesidir. Çünkü tanım cümlesi diskre uzayı olan her fonksiyon süreklidir.

**Tanım 2.6.7**  $K, C$  nin alt kategorisi ve  $F_C : K \rightarrow C$  inclusion (içine) fanktor olsun. Bu takdirde  $K$ 'nin  $C$ 'nin reflective (yansıyan) alt kategorisi olması için gerek ve yeter şart  $F_C$  nin bir  $R$  sol adjointe sahip olmasıdır veya aşağıdaki koşulları sağlamalıdır:

Her bir  $X \in |C|$ , en az bir  $X_K \in |K|$  objesi ve  $r_X : X \rightarrow X_K$  bir  $C$  morfizmi için, ayrıca herhangi bir  $Y \in |K|$  objesi ve her bir  $f : X \rightarrow Y$  morfizmi için, aşağıdaki diagram komutatif olacak şekilde bir tek  $\bar{f} : X_K \rightarrow Y$   $K$  morfizmi mevcut olmalıdır.



$r_X$  e  $K$  ya göre  $X \in |C|$  nin *reflection* (yanıması) ve  $R$  ye de *reflector* (yansıtıcı) denir.

**Tanım 2.6.8**  $U : K \rightarrow \text{SET}$  bir concrete kategori olsun.  $X, Y \in \text{Ob}(K)$  olmak üzere, eğer  $K$  daki her  $g : Z \rightarrow Y$  morfizmi ve her bir  $h : U(Z) \rightarrow U(X)$  fonksiyonu için  $U(g) = U(f) \circ h$  olduğunda  $f \circ \bar{h} = g$  olacak şekilde tek bir  $\bar{h} : Z \rightarrow X$  morfizmi mevcut oluyorsa  $X \xrightarrow{f} Y$  morfizmine *gömme* (embedding) denir.

**Tanım 2.6.9**  $(X, \varphi)$  bir düzgün uzay ise her  $x \in X$  ve  $U \in \varphi$  için  $U(x) = \{y \in X : (x, y) \in U\}$  şeklinde tanımlanır.

**Teorem 2.6.10**  $(X, \tau)$  bir topolojik uzay ve  $x \in X$  ise  $U(x)$  komşuluk sistemi aşağıdaki özelliklere sahiptir.

a)  $U \in U(x) \Rightarrow x \in U$  dır.

b)  $U \in U(x)$  ve  $U \subset V$  ise  $V \in U(x)$  dır.

c)  $U, V \in U(x) \Rightarrow U \cap V \in U(x)$  dır.

d)  $U \in U(x)$  ise bir  $V \in U(x)$  vardır öyle ki her  $y \in V$  için  $U \in U(y)$  dır.

Tersine olarak  $X \neq \emptyset$  bir küme ve her  $x \in X$  için bir  $U_x \subset P(X)$  ailesi a, b, c ve d özelliklerini sağlayacak şekilde verilmiş olsun. Bu  $X$  cümlesi üzerinde öyle bir topoloji vardır ki bu  $U_x$  ailesi o topoloji için  $x$  noktasındaki komşuluk sistemini oluşturur.

### 3. BÖLÜM

#### SÜZGEÇ UZAYLAR

Bu bölümde yakınsak süzgeç uzayların tanımı, ultrasüzgeçler ve süzgeç uzayı ile ilgili teorem ve örneklere yer verilmiştir. Bunlarla ilgili [13], [16], [27], [29], [34], [35] referanslarındaki temel kaynaklar verilebilir.

##### 3.1. Yakınsak Süzgeç Uzayların Tanımı

**Tanım 3.1.1**  $A$  bir cümle ve  $K:A \rightarrow PF(A)$  her bir  $a \in A$  için  $K(a)$ ,  $A$  nın  $a$  noktasına “yakınsayan” boş olmayan tüm süzgeçlerin cümlesi olacak şekilde tanımlanan bir fonksiyon olsun. Eğer  $K$  aşağıdaki şartları sağlıyorsa  $(A,K)$  çiftine yakınsak süzgeç uzayı (filter convergence space) denir.

1. Her  $a \in A$  için  $[a] \in K(a)$ , burada  $[a] = \{B \subset A \mid a \in B\}$  dir.

2.  $\alpha$  ve  $\beta$ ,  $A$  üstünde süzgeçler ve  $\alpha \subset \beta$  olsun. Eğer  $\alpha \in K(a)$  ise  $\beta \in K(a)$  dir.  $(A,K)$  dan  $(B,L)$  ye bir  $f$  dönüşümü,  $f:A \rightarrow B$  fonksiyondur öyle ki eğer  $\alpha \in K(a)$  ise  $f(\alpha) \in L(f(a))$  dir. Yani  $f$  süreklidir.

Burada  $[f\alpha] = \{U \mid U \subset B \text{ ve en az bir } C \in \alpha \text{ için } U \supset f(C)\}$  şeklinde tanımlanır.

Nesneleri yakınsak süzgeç uzaylar ve dönüşümleri yukarıda tanımlanan sınıfa yakınsak süzgeç uzaylar kategorisi denir ve FCO ile gösterilir [21].

**Örnek 3.1.2**  $A = \{x, y, z\}$  olmak üzere;

$K(x) = \{[x], [y], [z], [\emptyset], [\{x,y\}]\}$ ,  $K(y) = \{[y], [z], [\emptyset], [\{y,z\}]\}$ ,  $K(z) = \{[z], [x], [\emptyset]\}$  verilsin.  $(A, K)$  nın Süzgeç uzayı olduğunu gösterelim.

1)  $\forall a \in A$  için  $[a] \in K(a)$  dır. Yani  $[x] \in K(x)$ ,  $[y] \in K(y)$ ,  $[z] \in K(z)$  dır.

2)  $\forall a \in A$  için  $\forall \alpha \in K(a)$  ve  $\alpha \subset \beta$  ise  $\beta \in K(a)$  dır. Yani;

$[x] \in K(x)$  ve  $[x] \subset [\emptyset]$  ise  $[\emptyset] \in K(x)$ ,  $[y] \in K(x)$  ve  $[y] \subset [\emptyset]$  ise  $[\emptyset] \in K(x)$ ,

$[z] \in K(x)$  ve  $[z] \subset [\emptyset]$  ise  $[\emptyset] \in K(x)$ ,  $[\{x,y\}] \subset [\emptyset]$  ise  $[\emptyset] \in K(x)$ ,  $[\{x,y\}] \subset [x]$  ise  $[x] \in K(x)$ ,  $[\{x,y\}] \subset [y]$  ise  $[y] \in K(x)$  dir.

$[y] \in K(y)$  ve  $[y] \subset [\emptyset]$  ise  $[\emptyset] \in K(y)$ ,  $[z] \in K(y)$  ve  $[z] \subset [\emptyset]$  ise  $[\emptyset] \in K(y)$ ,

$[\{y,z\}] \subset [\emptyset]$  ise  $[\emptyset] \in K(y)$ ,  $[\{y,z\}] \subset [y]$  ise  $[y] \in K(y)$ ,  $[\{y,z\}] \subset [z]$  ise  $[z] \in K(y)$  dir.

$[z] \in K(z)$  ve  $[z] \subset [\emptyset]$  ise  $[\emptyset] \in K(z)$ ,  $[x] \in K(z)$  ve  $[x] \subset [\emptyset]$  ise  $[\emptyset] \in K(z)$  dir.

**Örnek 3.1.3**  $K = \text{FCO}$ , tüm süzgeçlerin sınıfı bir kategoridir.

$K$  nın objeleri  $(A, K)$ ,  $(B, L)$ ,  $(C, M)$ ... yakınsak süzgeç uzaylar, dönüşümleri de  $K((A, K), (B, L)) = \{f \mid f : A \rightarrow B \exists \alpha \in K(a) \text{ için } f(\alpha) \in L(f(a))\}$  fonksiyonlar olarak verilsin. Bileşke işlemi olarak fonksiyonların bileşkesini alalım.

$(A, K) \xrightarrow{f} (B, L) \xrightarrow{g} (C, M)$   $g \circ f$  sürekli olduğunu gösterelim.

$\forall a \in A$  için  $\alpha \in K(a)$  olsun.  $f$  sürekli olduğundan  $f(\alpha) \in L(f(a))$ ,  $g$  sürekli olduğundan  $g(f(\alpha)) \in M(g(f(a)))$  olur. Bu durumda  $g \circ f$  sürekli dir.

**1.** Her  $A$  cümlesi için  $1_{(A, K)} : (A, K) \rightarrow (A, K)$  birim fonksiyonu vardır.  $1_{(A, K)}$  nın sürekli olduğunu göstermeliyiz.  $\alpha \in K(a)$  olsun.  $1_{(A, K)}(\alpha) = \alpha \in K(a)$  olduğundan  $1_{(A, K)}$  sürekli dir.

Ayrıca her  $f : (A, K) \rightarrow (B, L)$  fonksiyonu için  $f \circ 1_{(A, K)} = f$  sürekli ve her  $g : (B, L) \rightarrow (A, K)$  fonksiyonu için  $1_{(A, K)} \circ g = g$  sürekli dir.

2.  $(A, K) \xrightarrow{f} (B, L) \xrightarrow{g} (C, M) \xrightarrow{h} (D, N)$  olmak üzere  $f, g$  ve  $h$  fonksiyonları sürekli olduğundan  $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$  süreklidir. Birleşme özelliği sağlanır. Dolayısıyla  $K = \text{FCO}$  bir kategoridir.

**Tanım 3.1.4**  $\alpha, \beta \in F(A)$ ,  $\gamma \in F(B)$  ve  $f : A \rightarrow B$  bir fonksiyon olsun.  $\alpha \cap \beta = \{U \mid U \in \alpha \text{ ve } U \in \beta\}$ ,  $\alpha \cup \beta = \{U \subset A \mid U \supset V \cap W, V \in \alpha \text{ ve } W \in \beta\}$  ve  $f^{-1}(\gamma) = \{U \mid U \supset f^{-1}(C) \text{ olacak şekilde en az bir } C \in \gamma \text{ mevcuttur}\}$  şeklinde tanımlanırlar. Görülür ki bunların her biri birer süzgeçtirler [25].

**Tanım 3.1.5**  $(A, K)$  yakınsak süzgeç uzayı ve  $a \in A$  olsun. Eğer  $\forall a \in A$ ,  $\alpha$  ve  $\beta \in K(a)$  olduğunda  $\alpha \cap \beta \in K(a)$  ise  $(A, K)$  ya limit uzayı denir.

Dönüşümleri Tanım 3.1.1 deki gibi tanımlanan sürekli fonksiyonlardan oluşan ve nesnelere yerine de limit uzaylar alınarak elde edilen sınıfa limit uzayların kategorisi denir ve  $\text{Lim}$  ile gösterilir [24].

**Tanım 3.1.6**  $(A, K)$  yakınsak süzgeç uzayı olsun. Eğer  $K$  sabit fonksiyon ise  $(A, K)$  ya sabit yakınsak süzgeç uzayı denir. Nesnelere sabit yakınsak süzgeç uzaylar ve dönüşümleri Tanım 3.1.1 deki gibi tanımlanan sınıfa sabit yakınsak süzgeç uzayların kategorisi denir ve  $\text{ConFCO}$  ile gösterilir.  $\text{ConFCO}$ ,  $\text{FCO}$  nun dolgun alt kategorisidir.

### 3.2 ULTRASÜZGEÇLER

**Tanım 3.2.1** Eğer  $\alpha$ ,  $A$  üzerinde en büyük öz süzgeç ise  $\alpha$  ya *maksimum süzgeç* (*ultrafilter*) denir ve  $\alpha$  aşağıdaki gibi karakterize edilebilir.

$A$  nın her  $B$  alt cümlesi için ya  $B \in \alpha$  ya da  $B^c \in \alpha$  dır.

**Teorem 3.2.2**  $X$  kümesindeki  $\square$  süzgecinin ultrasüzgeç olması için gerek ve yeter koşul  $\forall A \subset X$  için ya  $A \in \square$  veya  $A^c \in \square$  olmasıdır.

**İspat:**  $(\Rightarrow)$ :  $\square$ ,  $X$  üzerinde bir ultrasüzgeç olsun. Bu taktirde ya  $A \in \square$  veya  $A^c \in \square$  olduğunu göstereceğiz.

$A^c \notin \mathcal{A}$  olması halinde  $A \in \mathcal{A}$  olduğunu gösterelim Teorem 2.5.17' ye göre  $A$  kümesi  $\mathcal{A}$  süzgecinden daha ince bir  $\mathcal{A}_1$  süzgecine ait olmalıdır. Oysa hipotezde  $\mathcal{A}$  ultrasüzgeç olduğundan  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1$  dir. O halde  $A \in \mathcal{A}$  dir. Benzer olarak  $A \notin \mathcal{A}$  olması durumunda da doğrudur.

( $\Leftarrow$ ):  $\forall A \subset X$  için ya  $A \in \mathcal{A}$  veya  $A^c \in \mathcal{A}$  ise  $\mathcal{A}$  süzgecinin ultrasüzgeç olduğunu gösterelim. Olmayana ergi metodunu kullanalım.

$\mathcal{A}$  ultrasüzgeç olmasın. Bu taktirde  $\mathcal{A}$  den kesinlikle daha ince bir  $\mathcal{A}_1$  süzgeci vardır. Yani  $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_1$  dir. Bu da  $\mathcal{A}_1$  içinde  $\mathcal{A}$  'e ait olmayan  $A$  gibi bir küme olduğunu gösterir.  $A \notin \mathcal{A}$  ve hipotezden  $A^c \in \mathcal{A}$  ve  $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_1$  olduğundan  $A^c \in \mathcal{A}_1$  olur.  $A \in \mathcal{A}_1$  idi.  $\mathcal{A}_1$  süzgeç olduğundan süzgeç olma ikinci aksiyomundan  $A \cap A^c \in \mathcal{A}_1$  olmalıdır.  $A \cap A^c = \emptyset$ ,  $\emptyset \in \mathcal{A}_1$  olur ki bu da çelişkidir.  $\mathcal{A}$  ultrasüzgeçtir.

**Örnek 3.2.3**  $X$  herhangi bir küme ve  $x \in X$  olsun.  $\mathcal{A} = \{A \subset X \mid x \in A\}$  sınıfı  $X$  üzerinde bir ultrasüzgeçtir.

$\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_1$  için  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1$  olduğunu göstereceğiz. Bunun için  $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}$  olduğunu göstermeliyiz.  $A_1 \in \mathcal{A}_1$  alalım.  $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_1$  olduğuna göre  $x \in A_1$  veya  $x \notin A_1$  dir.  $x \notin A_1$  olması mümkün değildir. Çünkü  $x \in A_1^c \Rightarrow A_1^c \in \mathcal{A}_1$  den

$$\Rightarrow A_1 \cap A_1^c = \emptyset \in \mathcal{A}_1 \text{ çelişkisine varılır.}$$

O halde  $x \in A_1$  yani  $A_1 \in \mathcal{A}$  dolayısıyla  $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}$  bulunur.

**Teorem 3.2.4**  $f : X \rightarrow Y$  fonksiyon ve  $\mathcal{A}$  de  $X$  üzerinde bir ultrasüzgeç olsun. Bu taktirde  $f(\mathcal{A})$  süzgecinin  $f$ 'e göre

$$f(\mathcal{A}) = \{F' \supset f(F) \mid F \in \mathcal{A}\} \text{ görüntü süzgeci de bir ultrasüzgeçtir.}$$

**İspat:**  $A' \subset Y$  olsun.  $f(\mathcal{A})$  nin ultrasüzgeç olduğunu göstermek için üstteki teoremi kullanacağız. Buna göre  $A' \in f(F)$  ya da  $A'^c (Y \text{ ye göre}) \in f(F)$  olduğunu

göstermeliyiz.  $\square$ ,  $X$  üzerinde ultrasüzgeç olduğundan ya  $f^{-1}(A') \in \square$  ya da  $[f^{-1}(A')]_X^c \in \square$  olmalıdır.

$f^{-1}(A') \in \square$  ise  $f(f^{-1}(A')) \in f(\square)$  dir.  $f(f^{-1}(A')) \subset A'$  olduğuna göre  $A' \in f(F)$  dir.

$[f^{-1}(A')]_X^c \in \square$  ise,  $[f^{-1}(A')]_X^c = f^{-1}(A'_Y{}^c)$  olduğuna göre  $f(f^{-1}(A'_Y{}^c)) \in f(\square)$

$\Rightarrow f(f^{-1}(A'_Y{}^c)) \subset A'_Y{}^c \in f(\square)$  elde edilir.

**Önerme 3.2.5** a)  $\{\square_\alpha : \alpha \in \wedge\}$ ,  $X$  üzerindeki süzgeçlerin bir sınıfı olsun. Süzgeçler

sınıfının infimumu  $\bigcap_{\alpha \in \wedge} \square_\alpha = \left\{ \bigcup_{\alpha \in \wedge} F_\alpha : F_\alpha \in \square_\alpha \right\}$  dir.

b) Kabul edelim ki  $\square$  ve  $\square$ ,  $X$  üzerindeki iki süzgeç olsun.  $\square$  ve  $\square$  nin supremumu  $\square \vee \square$  vardır  $\Leftrightarrow F \in \square$  ve  $\forall G \in \square$  için  $F \cap G \neq \emptyset$  dir. Eğer  $\square \vee \square$  varsa bu durumda  $\square \vee \square = \{F \cap G : F \in \square \text{ ve } G \in \square\}$  dir.

**İspat:** a) Kabul edelim ki  $H = \left\{ \bigcup_{\alpha \in \wedge} F_\alpha \mid F_\alpha \in \square_\alpha \right\}$  olsun. Bu durumda herhangi  $F_\alpha \in \square_\alpha$  için  $A \in \square$  olması  $A = \bigcup_{\alpha \in \wedge} F_\alpha$  'yı gerektirir. Bu yüzden  $\forall \alpha \in \wedge$  için  $A \supseteq F_\alpha$  ve bundan dolayı  $\forall \alpha \in \wedge$  için  $A \in \square_\alpha$  dir veya  $A \in \bigcap_{\alpha \in \wedge} \square_\alpha$  dir. Tersine olarak  $A \in \bigcap_{\alpha \in \wedge} \square_\alpha$  olsun. Buradan  $\forall \alpha \in \wedge$  için  $A \in \square_\alpha$  dir. Şu halde  $A = \bigcup_{\alpha \in \wedge} F_\alpha$  burada  $\square_\alpha$  'lar  $A$  ya eşit olan bir cümledir. Buradan  $A \in H$  dir.

b) Eğer  $\square \vee \square$  varsa tüm  $F \in \square$  ve  $G \in \square$  leri içerir ve bundan dolayı süzgeç olma ikinci aksiyomundan  $F \in \square$ ,  $G \in \square$  ise  $F \cap G \in \square$  dir. Buradan tüm  $F \in \square$  ve  $G \in \square$  ler için süzgeç olma birinci aksiyomundan  $F \cap G \neq \emptyset$  dir. Diğer taraftan tüm  $F \in \square$  ve  $G \in \square$  için  $F \cap G \neq \emptyset$  olduğunu kabul edelim.

$\square = \{F \cap G : F \in \square \text{ ve } G \in \square\}$  olsun.  $\square$  'ın süzgeç aksiyomlarını sağladığına dikkat edelim. Gerçektende  $\forall F \in \square$  ve  $G \in \square$  için  $F \cap G \neq \emptyset$  olduğundan  $X \in \square$  ve  $X \in \square$  den dolayı  $X \in \square$  dir. Böylece  $\square \neq \emptyset$  dir.

Ayrıca  $A \in \square$  ve  $B \in \square$  olması  $A \cap B \in \square$  olmasını gerektirir ve süzgeç olma ikinci aksiyomundan sağlanır. Şimdi herhangi  $F \in \square$  ve  $G \in \square$  için  $H \supseteq F \cap G$  olsun. Bu sebepten  $H \cup F \in \square$  ve  $H \cup G \in \square$  dir.

Buradan  $H = H \cup (F \cap G) = (H \cup F) \cap (H \cup G) \in \square$  dir.

Şimdi de  $\square$  in  $\square$  ve  $\square$  nin supremumu olduğu gösterilecektir. Her  $F \in \square$  için  $F = F \cap X \in \square$  ve her  $G \in \square$  için  $G = X \cap G \in \square$  tır. Bu sebepten  $\square$ ,  $\square$  ve  $\square$  den daha incedir. Şimdi  $K$  nın  $\square$  ve  $\square$  den daha ince bir süzgeç olduğunu kabul edelim. Herhangi  $F \in \square$  ve  $G \in \square$  için  $H = F \cap G$  ( $H \in \square$ ) olsun.  $K \geq \square$ ,  $K \geq \square$  olduğundan ve süzgeç olma ikinci aksiyomundan  $F \cap G \in K$  dır. Buradan  $H \in K$  ve  $K \geq \square$  dır. Bu sebepten  $\square = \square \vee \square$  dir.

**Önerme 3.2.6**  $\{\square_\alpha : \alpha \in \wedge\}$   $X$  üzerindeki süzgeçlerin bir sınıfı olsun.  $\{\square_\alpha : x \in \wedge\}$  nin supremumu vardır ancak ve ancak herhangi sonlu  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subseteq \wedge$  alt sınıfı ve herhangi  $F_{\alpha_i} \in \square_{\alpha_i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  için  $F_{\alpha_1} \cap \dots \cap F_{\alpha_n} \neq \emptyset$  dir ve  $\bigvee_{\alpha \in \wedge} \square_\alpha$  ile gösterilir. Bundan başka  $\bigvee_{\alpha \in \wedge} \square_\alpha$  varsa  $\bigvee_{\alpha \in \wedge} \square_\alpha = \{F_{\alpha_1} \cap \dots \cap F_{\alpha_n} : \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subseteq \wedge, F_{\alpha_i} \in \square_{\alpha_i} \text{ } i = 1, 2, \dots, n\}$

$\square$ ,  $X$  üzerinde bir süzgeç ve  $A$ ,  $X$  in bir alt cümlesi olsun. Eğer her  $F \in \square$  için  $A \cap F \neq \emptyset$  ise bu durumda  $\{A \cap F : F \in \square\}$  süzgeç bazı oluşturur ve bu sınıf  $\square$  den daha ince bir süzgeç üretir. Bundan başka  $\{A \cap F : F \in \square\}$   $A$  da  $\square_A$  ile gösterilen bir süzgeç oluşturur ve bu süzgece  $A$  üzerinde  $\square$  in izi denir.

Genellikle ultra süzgeçlerle çalışmak daha uygundur. Aşağıdaki önerme bir ultrasüzgeci karakterize etmek için diğer iki şartı sağlar.

**Önerme 3.2.7**  $\square \in F(X)$  olsun. Aşağıdaki durumlar birbirine denktir.

- $\square$  bir ultrasüzgeçtir.
- $A \cup B \in \square$  ise  $A \in \square$  veya  $B \in \square$  dir.
- $A \subseteq X$  ise  $A \in \square$  veya  $X - A \in \square$  dir.

**İspat:** (a)  $\Rightarrow$  (b)  $A \notin \mathcal{F}$  olsun.  $B \in \mathcal{F}$  olduğunu gösterelim.  $A \notin \mathcal{F}$  olduğunda tüm  $F \in \mathcal{F}$  için  $A \supseteq F$  veya  $A^c \cap F \neq \emptyset$  (tüm  $F \in \mathcal{F}$  için). Bu durumda  $\{A^c \cap F : F \in \mathcal{F}\}$ ,  $\mathcal{F}$  den daha ince bir süzgeç üretir. Bu süzgeç  $A^c$  ni içerir. Bu süzgeç  $\mathcal{F}$  ile gösterilsin,  $\mathcal{G}$  bir ultrasüzgeç olduğundan  $\mathcal{G} = \mathcal{F}$  dir. Buradan  $A^c \in \mathcal{G}$  elde edilir.  $A \cup B \in \mathcal{F}$  ise  $A^c \cap (A \cup B) \in \mathcal{F}$  dir. Süzgeç olma ikinci aksiyomundan  $A^c \cap (A \cup B) = A^c \cap B \in \mathcal{F}$  dir. Süzgeç olma üçüncü aksiyomundan  $A^c \cap B \in \mathcal{F}$  ve  $B \supseteq A^c \cap B$  ise  $B \in \mathcal{F}$  dir. Benzer olarak  $B \notin \mathcal{F}$  alalım,  $A \in \mathcal{F}$  olduğu görülür.

(b)  $\Rightarrow$  (c)  $A \cup B \in \mathcal{F}$  iken  $A \in \mathcal{F}$  veya  $B \in \mathcal{F}$  olsun.  $A \subseteq X$  ise  $A \in \mathcal{F}$  veya  $X - A \in \mathcal{F}$  olduğunu gösterelim.  $X = A \cup (X - A) \in \mathcal{F}$  şeklinde yazdığımızda (b) den  $A \in \mathcal{F}$  ve  $X - A \in \mathcal{F}$  dir.

(c)  $\Rightarrow$  (a)  $A \subseteq X$  olsun.  $\mathcal{F}$  in ultrasüzgeç olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki  $\mathcal{F}$  den daha ince ve  $\mathcal{F}$  'e eşit olmayan bir  $\mathcal{G}$  süzgeci olsun.  $A \notin \mathcal{G}$  olacak şekilde  $A \in \mathcal{F}$  vardır. Kabulden ve (c) den  $X - A \in \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$  olmasını gerektirir ve süzgeç olma ikinci aksiyomundan  $A \cap (X - A) = \emptyset \in \mathcal{G}$  olmasını gerektirir. Bu ise süzgeç olma birinci aksiyomundan ile çelişir. O halde  $\mathcal{G}$  den daha ince bir  $\mathcal{G}$  süzgeci yoktur.  $\mathcal{F}$  ultrasüzgeçtir.

**Sonuç 3.2.8**  $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathcal{F}(X)$  ve  $\mathcal{H} \in \mathcal{U}(X)$  olsun. Eğer  $\mathcal{F} \geq \mathcal{G} \cap \mathcal{H}$  ise  $\mathcal{F} \geq \mathcal{G}$  veya  $\mathcal{F} \geq \mathcal{H}$  dir.

**İspat:** Kabul edelim ki  $F \notin \mathcal{G}$  olacak şekilde  $F \in \mathcal{F}$  olsun.  $G \notin \mathcal{G}$  olacak şekilde  $G \in \mathcal{F}$  vardır. Bu durumda  $\mathcal{F}$  bir ultrasüzgeç olduğundan Önerme 3.2.7(c) den,  $F^c, G^c \in \mathcal{F}$  dir. Buradan  $(F \cup G)^c = F^c \cap G^c \in \mathcal{F}$  elde edilir.

Fakat Önerme 3.2.5 (a) dan  $F \cup G \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G} \leq \mathcal{H}$  olur ki buda çelişkidir.

**Önerme 3.2.9** Her  $\mathcal{F} \in \mathcal{F}(X)$  için  $\mathcal{F} \geq \mathcal{G}$  olacak şekilde bir  $\mathcal{G}$  ultrasüzgeci vardır.

**İspat:** Her süzgecin bir ultrasüzgeç tarafından kapsandığını gösterelim.

Zorn lemmasına göre kısmi sıralanmış ve zinciri (lineer sıralı altcümleler) bir üst sınıra sahip olan bir kümenin herhangi bir  $a$  elemanı için  $b \geq a$  olacak şekilde bir  $b$  maksimal elemanı vardır. O halde her  $\mathcal{A} \in F(X)$  için  $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$  olacak şekilde bir  $\mathcal{B}$  maksimal süzgeci vardır.

Şimdi  $\mathcal{A}$  nin ultrasüzgeç olduğunu gösterelim. Herhangi  $L \in F(X)$  için  $\mathcal{A} \leq L$  olsun. Bu durumda  $\mathcal{A}$  maksimal olduğundan  $\mathcal{A} = L$  olur. Bu da  $\mathcal{A}$  nin ultrasüzgeç olduğunu gösterir.

**Önerme 3.2.10** Her  $\mathcal{A} \in F(X)$  süzgeci  $\mathcal{A}$  den daha ince olan  $X$ ' deki ultrasüzgeçlerin bir kesişimidir.

**İspat:** Kabul edelim ki  $\mathcal{A} = \bigcap \{ \mathcal{B} \in U(X) : \mathcal{A} \geq \mathcal{B} \}$  olsun. Bu durumda  $\mathcal{A} \geq \mathcal{A}$  dir. Tersine olarak  $A \in \mathcal{A}$  olsun. Bu durumda  $\mathcal{A} \geq \mathcal{A}$  olacak şekilde her  $\mathcal{B}$  ultrasüzgeci için  $A \in \mathcal{B}$  dir. Eğer  $A \notin \mathcal{A}$  ise  $\{A^c \cap F : F \in \mathcal{A}\}$   $\mathcal{A}$  den daha ince bir süzgeç üretir ve  $\mathcal{A}_1$  ile gösterilir.

Önerme 3.2.9 den  $\mathcal{A}_1$  den daha ince olan  $\mathcal{A}_1$  ultrasüzgeci vardır. Bu durumda  $A^c \in \mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}$  dir. Fakat  $\mathcal{A}_1 \geq \mathcal{A}$  olduğundan  $A \in \mathcal{A}_1$  dir. Bu çelişkidir.  $A \in \mathcal{A}$  olması gerekir ve böylece  $\mathcal{A} = \mathcal{A}$  dir.

Kabul edelim ki  $f : X \rightarrow Y$  bir dönüşüm ve  $\mathcal{A} \in F(X)$  olsun. Bu durumda  $\{f(F) : F \in \mathcal{A}\}$   $Y$ 'de bir süzgeç üretir  $f(\mathcal{A})$  veya  $f \mathcal{A}$  ile gösterilir.

**Önerme 3.2.11** Kabul edelim ki  $f : X \rightarrow Y$  bir dönüşüm olsun. Eğer  $\mathcal{A} \in U(X)$  ise  $f \mathcal{A} \in U(Y)$  dir.

**İspat:** Kabul edelim ki  $A$ ,  $Y$ ' nin bir alt cümlesi ve  $A \notin f(\mathcal{A})$  olsun. Dikkat edelim ki  $f^{-1}(A) \notin \mathcal{A}$  olması  $f(f^{-1}(A)) \in f \mathcal{A}$  olmasını gerektirir.  $A \supseteq f(f^{-1}(A))$  olduğundan süzgeç tanımı üçüncü aksiyomundan  $A \in f \mathcal{A}$  tir.  $\mathcal{A}$  bir ultrasüzgeç olduğundan

$f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c \in \mathcal{A}$  dir (Önerme 3.2.7 (c) den).

Bu durumda  $f(f^{-1}(A^c)) \in f \mathcal{A}$  ve  $A^c \supseteq f(f^{-1}(A))$  olduğundan  $A^c \in f \mathcal{A}$  olur.

Böylece Önerme 3.2.7 den  $f \mathcal{A}$  bir ultrasüzgeçtir.

$X$  bir cümle  $F(X)$  de  $X$  üzerindeki tüm öz süzgeçlerin cümlesini gösteren ve kısmi sıralı alt küme bağıntısı ile tanımlansın.

$[x] = \{A \subset X : x \in A\}$ , her  $x \in X$  için  $\{x\}$  tarafından üretilen ultrasüzgeçleri gösterebiliriz.

$\mathcal{A}, \mathcal{B} \in F(X)$  tüm  $F \in \mathcal{A}$  ve  $G \in \mathcal{B}$  için  $F \cap G \neq \emptyset$  ise  $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ ,  $X$  üzerinde  $\{F \cap G : F \in \mathcal{A} \text{ ve } G \in \mathcal{B}\}$  tarafından üretilen süzgeçleri gösterebiliriz. Eğer  $F \cap G = \emptyset$  olacak şekilde  $F \in \mathcal{A}$  ve  $G \in \mathcal{B}$  mevcut ise  $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$  mevcut değildir denir.

$(X, C)$  bir süzgeç uzayı,  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in F(X)$  iki süzgeç olmak üzere eğer sonlu sayıda  $H_1, H_2, \dots, H_n$  süzgeçleri için  $\mathcal{A} \vee H_1, H_1 \vee H_2, \dots, H_n \vee \mathcal{B}$  varsa  $\mathcal{A}$  ve  $\mathcal{B}$ 'ye  $C$ -linked (bağlı) denir.  $\mathcal{A} \sim_c \mathcal{B}$  ile gösterilir. Açıkça " $\sim_c$ "  $C$ 'de bir denklik bağıntısıdır.

$[\mathcal{A}]_c$ :  $\mathcal{A}$ 'yi içeren  $\sim_c$ 'ye bağlı bir denklik sınıfıdır.

Cauchy yapıları ilk olarak bazı düzgün yakınsak uzayların cauchy süzgeçlerinin bir cümlesi olarak tanımlandı. Şimdi süzgeç uzayları ve  $c$ -süzgeç uzaylarını tanımlayacağız.

**Tanım 3.2.12**  $X$  cümlesi üzerindeki süzgeçlerin bir sınıfı  $C$ , aşağıdaki şartları sağlıyorsa  $C$  alt cümlesine  $X$  cümlesi üzerinde Cauchy yapısı ve  $(X, C)$  ikilisine de Cauchy Uzayı denir.

( $c_1$ )  $\forall x \in X$  için  $[x] \in C$ ,

( $c_2$ )  $\mathcal{A} \in C$  ve  $\mathcal{B} \leq \mathcal{A}$  ise  $\mathcal{B} \in C$  dir.

( $c_3$ ) Eğer  $\mathcal{A} \in C$ ,  $\mathcal{B} \in C$  ve  $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$  mevcut ise  $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \in C$  dir

$(c_1)$  ve  $(c_2)$  şartını sağlayan  $(X, C)$  ikilisine pre-cauchy uzayı  $C$  ye pre-cauchy yapı denir.  $C$  deki süzgeçlere cauchy süzgeçleri denir (ilk iki aksiyomu sağlayan  $(X, C)$  ye sabit süzgeç uzayıda denir).

$(X, C)$  ve  $(Y, D)$  iki cauchy (süzgeç) uzayı olmak üzere  $f: (X, C) \rightarrow (Y, D)$  dönüşümü cauchy (süzgeç) süreklidir ancak ve ancak  $f: X \rightarrow Y$  bir fonksiyon olacak öyle ki  $\square \in C$  ise  $f(\square) \in D$  sağlanmalıdır.

$(X, C)$  süzgeç uzayı ve  $C$  aşağıdaki  $(c_3)$  şartını sağlıyorsa  $(X, C)$  nin  $c$ -süzgeç uzayı olduğu görülür.

$(c_3) \square \square_c [x]$  ise  $\square \cap [x] \in C$  dir.

$(X, C)$  bir yakınsak süzgeç uzay ise  $\square \in C$  olduğunda  $\square, x'$  e  $q$  yakınsaktır denir ve  $\square \xrightarrow{q} x$  ile gösterilir. Bundan başka eğer her süzgeç bir noktaya  $q$ -yakınsaksa  $(X, C)$ 'ye hausdorf denir.

$X$  için verilmiş herhangi iki ön yakınsak yapı  $p$  ve  $q$  olmak üzere eğer  $\square \xrightarrow{q} x$  olması,  $\square \xrightarrow{p} x$  olmasını gerektiriyorsa  $p \leq q$  olur.

$f: (X, q) \rightarrow (Y, p)$  iki önyakınsak uzay arasında tanımlanmış  $f$  dönüşümü  $\square \xrightarrow{q} x$  olduğunda  $f(\square) \xrightarrow{p} f(x)$  oluyorsa süreklidir.

Objeleri Süzgeç (Cauchy) uzayları, dönüşümleri süzgeç (cauchy) sürekli dönüşümler olan kategori  $FIL(CHY)$  ile gösterilir. Ayrıca  $FIL(CHY)$  deki tüm objeler  $|FIL|(|CHY|)$  ile gösterilir.

$C, D$   $X$  üzerinde iki cauchy yapısı olsun.  $C \leq D$  olması için gerek ve yeter şart  $D \subseteq C$  dir. Eğer  $C \leq D$  ise, “ $C, D$ 'den daha kaba” veya “ $D, C$ 'den daha ince” diyoruz.

$(X, C), (X, D) \in |FIL|(|CHY|)$  için  $C \subseteq D$  olduğunda  $D \leq C$  ile tanımlanır. Buna bağlı olarak  $X$ ' deki tüm süzgeç (cauchy) yapıları complete lattice oluşturur.

Kabul edelim ki  $p_c$  ;  $(X, C)$  için oluşturulmuş ön-yakınsak yapı olsun.

$$F \xrightarrow{p_c} X \Leftrightarrow F \sqcap \dot{x} \quad (F \xrightarrow{q_c} x \Leftrightarrow F \cap \dot{x} \in C) \text{ dir.}$$

Eğer objeler ve fixed (sabit) morfizmler için ( $p(f)$  ve  $f$ , her  $f \in \text{FIL}$  için aynı fonksiyonlar olsun)

$$P: \text{FIL} \rightarrow \text{PCONV}$$

$P(X, C) = (X, p_c)$  ile tanımlanmışsa  $P$  bir fanktordur.

$(X, C)$  süzgeç uzayı ve  $(X, C)$  için oluşturulmuş ön yakınsak  $p_c$  yapısı bir yakınsak yapı ise  $(X, C)$  ye yakınsak süzgeç uzayı veya kısaca  $c$ -süzgeç uzayı denir. Bu durumda  $C$ ,  $c$ -precauchy yapısıdır.

Tüm ön yakınsak uzaylar (yakınsak uzaylar, limit uzayları) ve sürekli dönüşümler  $\text{PCONV}(\text{CONV}, \text{LIM})$  ile gösterdik.

Yani açıkça  $\text{CONV}$  ve  $\text{LİM}$ ,  $\text{PCONV}$ ' nin bireflektif alt kategorileridir.

$X$  bir cümle  $A$  ve  $B$ ,  $X \times X$ 'in birer alt kümesi ve  $A^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in A\}$  ve

$A \circ B = \{(x, y) \mid \exists z \in X \ni (x, z) \in B \text{ ve } (z, y) \in A\}$  ile tanımlanır. Süzgeçlerin tersi ve birleşimi de aynı şekilde tanımlanır.

**Tanım 3.2.13**  $X$  boş olmayan bir cümle,  $F(X^2)$ ,  $X^2$  üzerindeki tüm süzgeçlerin cümlesini göstermek üzere  $\mu = \{\alpha : \alpha \in F(X^2)\}$  olsun.  $[x] = \{A \subset X : x \in A\}$  ve  $\alpha^{-1} = \{F^{-1} : F \in \alpha\}$  olmak üzere eğer aşağıdaki şartlar sağlanırsa  $\mu$  ye düzgün yakınsak yapı ve  $(X, \mu)$  ikilisine de düzgün yakınsak uzay denir.

(1) Her  $x \in X$  için  $[x] \times [x] \in \mu$

(2)  $\alpha \in \mu$  ve  $\alpha \subset \beta$  ise  $\beta \in \mu$

(3)  $\alpha \in \mu$  ise  $\alpha^{-1} \in \mu$

(4)  $\alpha, \beta \in \mu$  ise  $\alpha \circ \beta \in \mu$  olmalıdır. Burada

$$\alpha \circ \beta = \{U \subset X^2 : \text{en az bir } F \in \alpha \text{ ve en az bir } G \in \beta \text{ vardır öyle ki } F \circ G \subset U\}$$

(5)  $\alpha, \beta \in \mu$  ise  $\alpha \cap \beta \in \mu$  dir [26].

(1)-(4) şartını sağlayanlara öndüzgün yakınsak yapı,  $\mu$  düzgün yakınsak yapısı aşağıdaki (6) şartını da sağlıyorsa  $\mu$  ye c-düzgün yakınsak yapı denir.

6)  $[x] \times F \in \mu$  ise  $[x] \times (F \cap [x]) \in \mu$

Eğer  $(X, \mu)$  cauchy süzgeçleriyle oluşturulan düzgün yakınsak uzaysa,  $C_\mu = \{ \square \in F(X) : \square \times \square \in \mu \}$  de bir ön-cauchy yapısıdır. Eğer  $\mu$  c-öndüzgün yakınsak yapı (ya da düzgün yakınsak yapı) ise bu durumda  $(X, C_\mu)$  bir c-süzgeç uzayı (ya da, cauchy uzayı) dir.

$(X, C)$  süzgeç uzayı için

$$\mu_c = \{ A \in F(X \times X) \mid \square \square_c \square \text{ ve } \square \times \square \leq A \text{ olacak şekilde } \exists \square, \square \in C \text{ vardır} \}$$

Yapısı  $C_{\mu_c} = C$  olacak şekilde  $X$  üzerindeki en ince öndüzgün yakınsak yapısıdır.

Eğer  $(X, C)$  bir c-süzgeç uzayı ise,  $\mu_c$  bir c-öndüzgün yakınsak yapısıdır.

Eğer  $(X, C)$  bir cauchy uzayı ise

$$\nu_c = \left\{ A \in F(X \times X) \mid A \geq \bigcup_{i=1}^n \square_i \times \square_i \text{ olacak şekilde } \exists \square_1, \dots, \square_n \in C \text{ vardır} \right\}$$

yapısı  $C_{\nu_c} = C$  olacak şekilde  $X$  üzerindeki en ince düzgün yakınsak yapısıdır.

c-öndüzgün yakınsak uzaylar ve düzgün yakınsak dönüşümlerin kategorisi PUCON olsun.

$$F: \text{PUCON} \rightarrow \text{FIL}, F(X, \mu) = (X, C_\mu)$$

$$U: \text{FIL} \rightarrow \text{PUCON}, U(X, C) = (X, \mu_c)$$

$$V: \text{CHY} \rightarrow \text{UCON}, V(X, C) = (X, \nu_c) \text{ fanktorları tanımlansın.}$$

### Önerme 3.2.14

(a)  $U, F$  nin sol adjointidir.

(b)  $U|_{\text{CFILL}}, F|_{\text{CUCON}}$  nun sol adjointidir.

(c)  $V, F|_{\text{UCON}}$  un sol adjointidir.

Dikkat edelim ki  $U \circ F$ ,  $\text{PUCON}$  da bir co-reflektördür ve sonuç olarak  $\text{FIL}$ , full altkategoridir.  $\text{PUCON}$ 'a corefleksif olarak gömülmüştür (embedding) diyebiliriz.

**Sonuç 3.2.15**  $(X, C)$  bir süzgeç (ya da c-süzgeç, cauchy) uzayıdır ancak ve ancak  $\mu$ 'de  $C = C_\mu$  olacak şekilde bir öndüzgün (ya da c-öndüzgün, düzgün) yakınsak yapı vardır.

$(X, \mu)$  bir öndüzgün yakınsak uzay ise  $\text{PoF}(X, \mu) = (X, p_{C_\mu})$  önyakınsak uzaylarla kurulmuştur.

Dikkat edelim ki;  $(X, \mu) \in \text{PUCON}$  için

(a)  $(X, \mu) \in \text{CUCON}$

(b)  $F(X, \mu) \in \text{CFIL}$

(c)  $\text{PoF}(X, \mu) \in \text{CONV}$  ifadeleri denktir.

\*  $(X, q)$  ön yakınsak uzayı  $[x] \in q(y)$  olduğunda  $x = y$  oluyorsa  $T_1$  dir. Ve  $x \neq y$  olduğunda  $q(x) \cap q(y) = \emptyset$  oluyorsa  $T_2$  dir.  $c \ell q$ ,  $(X, q)$  için kapanış operatörü olmak üzere  $\square \in q(x)$  olduğunda  $c \ell q \square \in q(x)$  oluyorsa  $(X, q)$  ya regulerdir denir.

Dikkat edelim ki, her reguler ön yakınsak uzay, yakınsak uzaydır.

\*  $T_1$  reguler uzaya  $T_3$  uzayı denir.

\* Bir reguler ön yakınsak uzaya  $\square \in q(y)$  ve  $[y] \in q(x)$  olduğunda  $\square \in q(x)$  oluyorsa, bu uzaya simetriktir denir.

\* Eğer  $A$ 'yı kapsayan her ultra süzgeç  $A$ ' da bir noktaya  $q$ -yakınsaksa,  $(X, q)$  önyakınsak uzayın bir  $A$  alt cümlesi kompakttır.

- \* Eğer her  $q$  yakınsak süzgeç bir kompakt cümleyi kapsıyorsa,  $(X, q)$  lokal kompakttır.
- \* Eğer  $[x] \cap_c [y]$  olması  $x = y$  olmasını gerektiriyorsa,  $(X, C)$  süzgeç uzayı  $T_2$  dir.
- \* Eğer  $\square \in C$  olduğundan  $c\ell p_c \square \in C$  ise  $(X, C)$  regulerdir.
- \* Eğer her cauchy süzgeç  $p_c$  yakınsaksa,  $(X, C)$ 'ye tamdır denir ve eğer her ultrafiltre  $C$  de ise,  $(X, C)$ 'ye tam sınırlı denir.
- \*  $(X, p_c)$  lokal kompaktsa  $(X, C)$  ye lokal kompakt denir.

**Önerme 3.2.16**  $(X, C)$  bir süzgeç uzayı olmak üzere aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

- (1)  $(X, C)$  bir  $T_2$  süzgeç uzayı
- (2)  $P(X, C)$  bir  $T_1$  önyakınsak uzayı
- (3)  $P(X, C)$  bir  $T_2$  önyakınsak uzayı [13]

**Önerme 3.2.17**  $(X, C)$  reguler bir süzgeç uzayı ise  $(X, C)$  bir  $c$ -süzgeç uzayı ve  $P(X, C)$  simetrik yakınsak uzaydır.

Aşağıda, PCONV ve FIL kategorilerinden uygun alt kategorilerine birkaç fanktor tanımladık.

$X$  üzerindeki  $q$  önyakınsak yapı için  $\gamma q (\lambda q, \sigma q)$  ile gösterilen yapı  $X$  üzerindeki  $q$  dan kalın, en ince yakınsak yapı (limit yapısı, simetrik yakınsak yapı)dir.

Kabul edelim ki SCONV, (objeleri simetrik yakınsak uzaylar olan) CONV nin full alt kategorisi olsun ve

$$R_\gamma : \text{PCONV} \rightarrow \text{CONV}, \quad R_\gamma(X, q) = (X, \gamma q)$$

$$R_\lambda : \text{PCONV} \rightarrow \text{LİM}, \quad R_\lambda(X, q) = (X, \lambda q)$$

$R_\sigma: \text{PCONV} \rightarrow \text{SCONV}$ ,  $R_\sigma(X, q) = (X, \sigma q)$  fonksiyonlarını tanımlayalım. Buradan

$R_\gamma$ ,  $R_\lambda$  ve  $R_\sigma$  nın  $\text{PCONV}$  üzerindeki reflektörlerdir.

$X$  üzerindeki  $c$ -precauchy yapısı için  $C_{cp}(C_c, C_r)$   $X$ ' de  $C'$  den daha kalın en ince  $c$ -precauchy (cauchy yapısı, regüler precauchy) gösterebilir. Objeleri regüler süzgeç uzayları  $\text{RFIL}$ ,  $\text{FIL}$  in full (dolgun) alt kategorisi olsun.

$$M_{cp}: \text{FIL} \rightarrow \text{CFIL}, \quad M_{cp}(X, C) = (X, C_{cp})$$

$$M_c: \text{FIL} \rightarrow \text{CHY}, \quad M_c(X, C) = (X, C_c)$$

$$M_r: \text{FIL} \rightarrow \text{RFIL}, \quad M_r(X, C) = (X, C_r) \text{ fanktorları tanımlansın.}$$

Dikkat edelim ki bu fanktorlar  $\text{FIL}$  üzerindeki reflektörlerdir. Bu reflektörler arasındaki ilişkiler aşağıdaki önermede verilmiştir.

### Önerme 3.2.18

$$a) \text{Po}M_r = R_\sigma \circ P$$

$$b) \text{Po}M_r \circ M_c = R_\lambda \circ R_\sigma \circ P$$

Burada, tüm yakınsak yapıların [27] de limit yapısı olduğunu kabul edildiğinden bizim kullandığımız ' $\sigma q$ ' notasyonu [27] deki ' $\lambda \sigma q$ ' ya benzemektedir.

### Önerme 3.2.19

1)  $(X, C)$  bir süzgeç uzayı ise

$C_{cp} = C \cup \{ \square \cap [x_1] \cap \dots \cap [x_n] : \square \in C, [x_i] \text{ olacak şekilde } X \text{ de } \square \in C \text{ ve } \exists x_1, \dots, x_n \text{ vardır } 1 \leq i \leq n \}$  dir.

2)  $(X, C)$  süzgeç uzayı ise,

$C_c = \{ \square \in F(X) : C' \text{ de } [\square_1]_c = \dots = [\square_n]_c \text{ ve } \square \geq \bigcap_{i=1}^n \square_i \text{ olacak şekilde } \exists \square_1, \dots, \square_n \text{ vardır} \}$  dir

3)  $(X, C)$  süzgeç uzayı ise  $C, C_{cp}$  ve  $C_c$  aynı ultra süzgeçleri içerirler.

**İspat.** 1) in ispatı kolay, 3) ise 2) ve 1) den kolayca elde edilebilir. Bu sebepten biz 2) yi ispat edeceğiz.

2) yi ispatlamak için süzgeçlerin özgün cümlesinin ( $C'$  ile gösterelim) Keller'in 3. aksiyomunu sağladığını göstermek yeterli olacaktır. Yani;  $\square, \square \in C'$  ve  $\square \vee \square$  varsa

$\square \cap \square \in C'$  olduğunu göstermeliyiz. Eğer  $\square, \square \in C'$  ise bu durumda  $C'$  ünde  $[\square_1]_c = \dots = [\square_n]_c, [\square]_c = \dots = [\square_k]_c, \square \geq \bigcap_{i=1}^n \square_i$  ve  $\square \geq \bigcap_{j=1}^k \square_j$  olacak şekilde  $\square_1, \dots, \square_n, \square_1, \dots, \square_n$  süzgeçleri vardır.

Kabulden  $\square \vee \square$  varsa  $\square_i \vee \square_j$  var olacak şekilde i ve j indislerinin olduğu sonucunu çıkarırız. Buradan

$[\square_1]_c = \dots = [\square_n]_c = [\square]_c = \dots = [\square_k]_c$  elde edilir. Ve böylece

$$\square \cap \square \geq \left( \bigcap_{i=1}^n \square_i \right) \cap \left( \bigcap_{j=1}^k \square_j \right)$$

olması  $\square \cap \square \in C'$  olmasını gerektirir O halde

$$C' = C_c$$

olduğu sonucuna ulaşırız.

$(X, C)$  süzgeç uzayı ise önceki önermeden

$PoM_c(X, C) = R_\lambda oP(X, C), PoM_{cp}(X, C) = R_\lambda oP(X, C), P(X, C), M_{cp}oP(X, C)$  ve  $M_c oP(X, C)$  nin tümünün aynı ultrasüzgeç yakınsaklığa ve sonuç olarak da aynı kapanış operatörüne sahip olduğu elde edilir. Bu düşüncüyü ve Önerme 3.2.19 'i kullanarak Önerme 3.2.20 'yi elde ederiz.

**Önerme 3.2.20**  $(X, C), T_2$  (sırasıyla regüler lokal kompakt, tam, tam sınırlı) olan bir süzgeç uzayı ise bu durumda  $M_{cp}(X, C)$  ve  $M_c(X, C)$  benzer şekilde  $T_2$  (Ya da regular, lokal kompakt, tam, tam sınırlı) dir.

$(X, C)$  süzgeç uzayı  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{C} \in C$  ise Önerme 3.2.19'dan  $\mathcal{C} \in C \Leftrightarrow \mathcal{C} \in C_c$  bu sebepten  $\mathcal{C} \in C \Leftrightarrow \mathcal{C} \cap \mathcal{C} \in C_c$  olduğu sonucunu çıkarırız. Ayrıca  $\mathcal{C} \in C$  için  $[\mathcal{C}]_C$ ,  $[\mathcal{C}]_{C_{cp}}$  ve  $[\mathcal{C}]_{C_c}$  denklik sınıflarının hepsinin aynı ultrasüzgeçleri ihtiva ettiğine dikkat edelim. Bu düşünceler diğer bölümlerde ispatlarda kullanılacaktır.

### 3.3. SÜZGEÇ UZAYI TAMLAMALARI

Bu bölümde zaten var olan cauchy tamlamalarını, süzgeç uzayları tamlamasının bazı basit kurallarını oluşturmak için kullanacağız.

Kabul edelim ki  $T_2$  objeleri ile tanımlanan  $T_2FIL$  (ya da  $T_2CFIL$ ,  $T_2CHY$ )  $FIL$  (ya da  $CFIL$ ,  $CHY$ ) in full alt kategorisi ve kabul edelim ki, tam objelerle tanımlanan  $T_2FIL^*$  (yada  $T_2CFIL^*$ ,  $T_2CHY^*$ ),  $T_2FIL$  in (ya da  $T_2CFIL$ ,  $T_2CHY$ ) full alt kategorisi olsun. Önerme 3.2.16 da tanımlanan  $M_c$  fonksiyonu ile  $FIL$ 'e tanımlanmış  $M_c$  ve  $FIL$  in  $T_2FIL$  ya da  $T_2CFIL$  full alt kategorilere olan kısıtlamaları arasında notasyonal bir fark yoktur. Aynı durum  $M_{cp}$  ve  $M_r$  fanktorları içinde geçerlidir. Kabul edelimki  $(X, C)$  bir süzgeç uzayı olsun.  $(Y, D)$  tam süzgeç uzayı  $\varphi(x)$ ,  $Y$  de yoğun olacak şekilde,  $\varphi: (X, C) \rightarrow (Y, D)$  cauchy embeddigi boyunca  $((Y, D), \varphi)$  ye  $(X, C)$  nin süzgeç uzayı tamlaması denir.

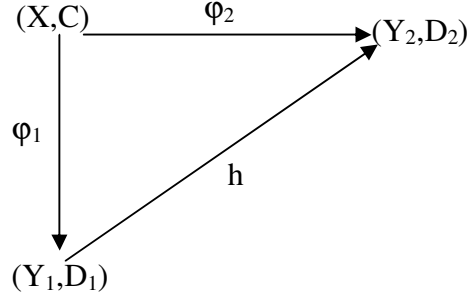
**Tanım 3.3.1**  $(X, C)$  cauchy uzayının  $(Y, D, k)$  tamlaması,  $(Y, D)$  tam cauchy uzayı ve  $k: X \rightarrow Y$  cauchy gömmesinden oluşuyor ve burada  $k(X)$ ,  $Y$  de yoğundur.  $(X, C)$  cauchy uzaylarını  $T_2$  olarak alacağız.

**Tanım 3.3.2**  $((Y, D), \varphi)$  çifti,  $(X, C)$   $T_2$  cauchy uzayının tamlaması denir gerek ve yeter şart;

- (1)  $(Y, D)$ , tam  $T_2$  cauchy uzayıdır.
- (2)  $\varphi: (X, C) \rightarrow (Y, D)$  cauchy gömmesidir.
- (3)  $\varphi(X)$ ,  $Y$  de yoğundur yani  $cl_{qD} \varphi(X) = Y$

Her  $T_2$  cauchy uzayı  $T_2$  tamlamasına sahiptir.

$(X,C)$  cauchy uzayının  $((Y_1,D_1), \varphi_1)$  ve  $((Y_2,D_2), \varphi_2)$  iki tamlamaları verilsin.  $((Y_1,D_1), \varphi_1), ((Y_2,D_2), \varphi_2)$  den daha incedir gerek ve yeter şart aşağıdaki diagram komutatif olacak şekilde  $h:(Y_1,D_1) \rightarrow (Y_2,D_2)$  en az bir cauchy sürekli fonksiyonu varsa:

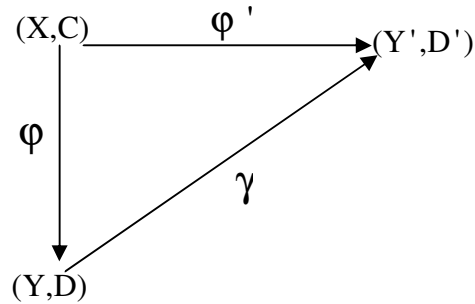


Bu durumda biz  $((Y_1,D_1), \varphi_1) \geq ((Y_2,D_2), \varphi_2)$  yazarız.

“Tam” terimi “süzgeç uzay tamlaması” na karşılık gelecektir. Eğer  $(Y,D)$  tamlama uzayı  $T_3$  (ya da c-ön cauchy, cauchy, tam sınırlı) ise  $((Y,D), \varphi)$  de  $T_3$  (ya da c-ön cauchy, cauchy, tam sınırlı) tamlama olacaktır.

Ayrıca c-öncauchy tamlamaları c-süzgeç uzayı tamlamasına karşılık gelecektir.

**Tanım 3.3.3**  $(X,C)$  cauchy uzayının  $((Y,D), \varphi)$  ve  $((Y',D'), \varphi')$  iki  $T_2$  tamlamaları denktir denir eğer en az bir  $\gamma:(Y,D) \rightarrow (Y',D')$  cauchy izomorfizmi varsa, öyle ki aşağıdaki diagram komutatiftir:



Başka bir deyişle  $((Y,D), \varphi)$  ve  $((Y',D'), \varphi')$  iki tamlamaları denktir gerek ve yeter şart  $((Y,D), \varphi) \geq ((Y',D'), \varphi')$  ve  $((Y',D'), \varphi') \geq ((Y,D), \varphi)$  ise.

### 3.4. WYLER TAMLAMASI

1970’de Wyler [11], düzgün yakınsak uzaylar için bir tamlama yaptı. Daha sonra Reed [12] aynı yapıyı cauchy uzayları terimine çevirdi. Bu cauchy uzayları tamlaması, Wyler tamlaması olarak biliniyor.  $X$  üzerindeki herhangi bir  $C$  cauchy yapısı ile birlikte aşağıdaki gibi tanımlanan “ $\square_c$ ” bir denklik bağıntısı vardır;

$(X, C) T_2$  olsun,  $(X, C)$  süzgeç uzayı için  $X^*_C = \{[F]_c : F \in C\}$  cümlesi ‘ $\square_c$ ’ nin denklik sınıfları ile tanımlansın.  $[x]_c = [y]_c \Leftrightarrow x = y$  elde ederiz. Bu sebepten her  $\forall x \in X$  için  $j(x) = [x]$  ile tanımlanmış  $X \rightarrow X^*_C$  içine dönüşümdür ve

$C^* = \{A \mid \exists F \in C \text{ öyle ki } A \geq j(F) \cap [F]\}$  olsun.

$((X^*, C^*), j)$ ,  $(X, C)$  nin  $T_2$  tamlamasıdır. Bu  $T_2$  tamlamasına  $(X, C)$  cauchy uzayının  $T_2$ -Wyler tamlaması denir.

$p_{c^*}$  yakınsak uzayı ile ilgili iki uyarı aşağıdadır;

(I) Eğer  $\mathcal{A} \in F(X^*)$  ise bu takdirde  $\mathcal{A} \xrightarrow{p_{c^*}} [F]$  dir gerek ve yeter şart  $[G] = [F]$  olacak şekilde en az bir  $G \in C$  için  $j(G) \cap [F] \leq \mathcal{A}$  dır.

(II)  $X^* \setminus j(X)$  i ihtiva eden bir süzgecin yakınsak olması için gerek ve yeter şart bu süzgecin sabit ultrasüzgeç olmasıdır.

(II) yi kullanarak Miller [28],  $X^* \setminus j(X)$  in kalanının bu tamlık içinde her zaman diskre olduğunu göstermiştir.

**Tanım 3.4.1** Eğer  $Y = X^*$ ,  $\varphi = j$  ve  $j(F) \xrightarrow{p_D} [F]$  ( $j(F) \square_D [\dot{F}]$ )  $F \in C$  için,  $(X, C)$  nin  $((Y, D), \varphi)$  tamlamasına standart formda denir. Reed [12], her  $T_2$  cauchy tamlamasının standart formdaki tamlamalardan birine denk olduğunu gösterdi. Wyler tamlamasının standart form içinde en ince tamlama olduğu anlaşılıyor. Ayrıca bu tamlama aşağıdaki genel özelliğe sahiptir.

**Önerme 3.4.2**  $(X, C)$ ’i süzgeç uzayının her tamlaması standart formdan bir tamlamaya denktir.

**İspat:**  $((Y, D), \varphi), (X, C)$  nin bir tamlaması olsun.  $\sigma: Y \rightarrow X_C^*$ ,  $\sigma(Y) = [F]$  olsun. Burada  $F \in C$  ve  $\varphi(F) \in PD(Y)$  dir.  $\sigma$ 'nın iyi tanımlı ve bijektif (1-1) dönüşüm olduğunu gösterebiliriz.

$C' = \{\sigma(\square) : \square \in D\}$  olsun. Buradan  $(X_C^*, C')$  nün tam süzgeç uzayı ve  $((X_C^*, C'), j)$ ,  $(X, C)$  nin standart formdaki tamlaması olduğunu elde edilir ki buda  $\sigma: (Y, D) \rightarrow (X_C^*, C')$  bir cauchy isomorfizmi olmasını verir.

Bu sebepten, genelliği kaybetmeden  $(X, C)$  süzgeç uzayının tüm tamlamaları standart formdadır.

Eğer her  $p_c$  yakınsak olmayan  $F \in C$  süzgeci ve  $jF \cap [F] \in D$  ise,  $(X, C)$  nin  $((X_C^*, D), j)$  tamlamasına kararlıdır denir.

Burada dikkat edelim ki herhangi  $c$ -süzgeç tamlaması (özellikle herhangi  $T_3$  tamlaması) kararlıdır.

Kararlı tamlamanın bir örneği de  $K^* = ((X_C^*, C^*), j)$  Wyler tamlamasıdır. Wyler tamlamasının birkaç özelliği aşağıdaki önermede toplanmıştır.

**Önerme 3.4.3** Wyler tamlaması süzgeç uzayının en geniş kararlı tamlamasıdır.  $f: (X, C) \rightarrow (Y, D)$  bir cauchy dönüşümü ve  $(Y, D)$  bir  $c$ -süzgeç uzayı ise bu durumda  $f^*([F]) = [f(F)]$  ile tanımlı ve

$$\begin{array}{ccc} (X, C) & \xrightarrow{f} & (Y, D) \\ j_x \downarrow & & \downarrow \\ (X_C^*, C^*) & \xrightarrow{f^*} & (Y_D^*, D^*) \end{array}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde bir tek  $f^*: (X^*, C^*) \rightarrow (Y^*, D^*)$  şeklinde kısıtlanmış cauchy dönüşümü vardır.

Eğer  $(X, C)$  bir  $c$ -süzgeç uzayı (ya da bir cauchy uzayı) ise  $K^*$  bir  $c$ -süzgeç uzayı (ya da cauchy uzayı) tamlamasıdır ve her iki durumda da en ince tamlamadır.

**Önerme 3.4.4**  $W: T_2CFIL \rightarrow T_2CFIL^*$  fanktörü  $\forall (X,C) \in T_2CFIL$  ve  $f: (X,C) \rightarrow (Y,D)$  morfizmi için  $W(f)=f^*$  olacak şekilde  $W(X,C) = (X^*,C^*)$  ile tanımlansın. Burada  $f^*$ ,  $f$  in tek genişlemesidir, aynı zamanda bireflector olan kovaryant fanktördür. Bu  $W$  fanktorüne Wyler tamlama fanktorü denir.

### Sonuç 3.4.5

(a)  $W, T_2CFIL$  den  $T_2CFIL^*$  a bireflektördür.

(b)  $W|_{T_2CHY}; T_2CHY$  den  $T_2CHY^*$  a bireflektördür.

$W$  fanktoruna Wyler tamlama fanktorü denir.

Buradaki  $W$  fanktorü  $T_2FIL$  den  $T_2FIL^*$  a tanımlandığında bireflektör değildir. Gerçekten de böyle bireflektör yoktur. Böyle olsaydı  $T_2FIL$  deki her  $(X,C)$  objesi bir en ince tamlamaya sahip olurdu. Aşağıdaki önerme  $X_c^*|j(X)$  sonsuz ise hiç bir tane en ince tamlama olmadığını gösterir.

**Önerme 3.4.6**  $(X,C)$  bir süzgeç uzayı, ve  $X_c^*|j(X)$  bir sonsuz cümle ise  $(X,C)$  nin en ince bir süzgeç tamlaması yoktur.

**İspat:** Tersine olarak  $(X_c^*,D)$ ,  $(X,C)$  nin standart formdaki en ince süzgeç uzayı tamlaması olsun.

**Durum 1:**  $(X_c^*,D) = (X_c^*,C^*)$  Wyler tamlaması olsun.  $[H]_c \in X_c^*|j(X)$ , ile  $A \in X_c^*$  üzerinde  $X_c^*|j(X)$  i ihtiva eden herhangi bir free ultrasüzgeç olsun. Kabul edelim ki  $D', D$  den her  $G \in [H]_c$  için  $j(G) \cap [\dot{H}]_c$  silinerek de her  $G \in [H]_c$  için  $j(G) \cap A$  ve  $A \cap [\dot{H}]_c$  eklenerek türetilir. Dikkat edelim ki, her  $G \in [H]$  için  $(G) \square_{D'} [H]_c$  olup buradan da,  $(H) \cap [\dot{H}]_c \in D$  de olup,  $D'$  ünde olmadığından  $(X_c^*,D')$ ,  $(X,C)$  nin standart formdaki tamlaması  $(X_c^*,D)$  den daha kalın değildir.

**Durum 2:**  $(X_c^*,D)$  Wyler tamlaması olmasın. Bu durumda  $j(H) \cap [\dot{H}]_c \notin D$  olacak şekilde  $[H] \in X_c^* \setminus X(j)$  vardır.  $(X_c^*,D)$  'den daha ince olacaktır.

$j(H) \square_c [H]$  sağlanması gerektiğinden  $A \cap H \in D$  olacak şekilde  $X_c^* \setminus X(j)$  i içeren  $X_c^*$  'de bir  $A$  ultrasüzgeci vardır. Fakat bu  $(X_c^*, D)$  nin Wyler tamlamasından daha ince değildir.

**Sonuç 3.4.7**  $T_2\text{FIL}^*$ ,  $T_2\text{FIL}$  in bireflektif altkategorisi değildir.

$(X, C)$  süzgeç uzayı ve  $F \in C$  olsun. Önceki bölümde Önerme 3.2.20 de  $[\square]_c$ ,  $[\square]_{c_p}$  ve  $[\square]_{c_c}$  denklik sınıflarının hepsinin ultrasüzgeç olduğu gösterilmişti. Sonuç olarak  $X_c^*$ ,  $X_{c_p}^*$  ve  $X_{c_c}^*$  cümleleri arasında doğal bir (1-1) bijektion vardır. Bu cümleleri tanımlama ve üçünün yerine de  $X^*$  sembolü kullanmak uygun olacaktır.

Notasyondaki bu kolaylık genelliğin kaybolmasını gerektirmez. Bu  $(X, C)$ ,  $(X, C_{c_p})$  ve  $(X, C_c)$  nin tamlamalarının karşılaştırılmasını kolaylaştırır.

Bir sonraki önerme, Önerme 3.2.19 ve Önerme 3.2.20 'den direkt olarak elde edilir.

**Önerme 3.4.8**  $K = ((X^*, D), j)$ ,  $(X, C)$  süzgeç uzayının bir tamlaması olsun. Bu durumda  $K_{c_p} = (M_{c_p}(X^*, D), j)$ ,  $M_{c_p}(X, C)$  nin  $c$ -süzgeç uzayı tamlaması ve  $K_c = (M_c(X^*, D), j)$ ,  $M_c(X, C)$  nin cauchy tamlamasıdır.

Eğer  $K$ ,  $T_3$  (ya da tam sınırlı) tamlaması ise bu durumda  $K_{c_p}$  ve  $K_c$  de  $T_3$  (ya da tam sınırlı) tamlamalardır.

**Önerme 3.4.9**  $(X, C)$ , süzgeç uzayı için,  $(K^*)_{c_p}$ ,  $M_{c_p}(X, C)$  nin Wyler tamlaması ve  $(K^*)_c$ ,  $M_c(X, C)$  nin Wyler tamlamasıdır.  $(X, C) \in \text{CFIL}$  için  $WoM_c(X, C) = M_c o W(X, C)$  dır.

Kabul edelim ki  $(X, C)$ , bir süzgeç uzayı,  $K = ((X^*, D), j)$ ,  $M_c(X, C)$  nin bir cauchy tamlaması olsun.  $D_1 = \{A \in D : X^* \setminus j(X) \in A\}$  olarak alalım.

$$D' = \{j(F) : F \in C_{cp}\} \cup \{B \in D : B = A \cap j(F) \cup D_1 \text{ olacak şekilde } \exists A \in D_1 \text{ ve } F \in C_{cp} \text{ var dır}\}$$

$$\text{ve } D'' = \{j(F) : F \in C\} \cup \{B \in D : B = A \cap j(F) \text{ olacak şekilde } \exists A \in D_1 \text{ ve } F \in C\} \text{ olsun.}$$

**Önerme 3.4.10**  $(X, C)$ , bir süzgeç uzayı ve  $K = ((X^*, D), j)$ ,  $M_c(X, C)$  nin bir cauchy tamlaması olsun.  $K' = ((X^*, D'), j)$  ve  $K'' = ((X^*, D''), j)$  olsun ( $D'$  ve  $D''$  yukarıda tanımlandığı gibidir).  $K'$ ,  $M_c(X, C)$  nin  $c$ -süzgeç uzayı tamlaması ve  $K''$ ,  $(X, C)$ , nin tamlaması olsun. Eğer  $K$  bir  $T_3$  (ya da tamsınırlı) tamlaması ise  $K'$  ve  $K''$  de  $T_3$  (ya da tam sınırlı) tamlamalardır.

**İspat:**  $(X^*, D')$  nin bir tam  $c$ -süzgeç uzayı ve  $(X^*, D'')$  nün bir tam süzgeç uzayı olduğu kolaylıkla doğrulanır.

Tanımlardan,  $j : M_{cp}(X, C) \rightarrow (X^*, D')$  ve  $j : (X, C) \rightarrow (X^*, D'')$  dönüşümlerinin cauchy embeddingi olduğu açıktır. Dikkat edelim ki  $D$ ,  $D'$  ve  $D''$  tam olarak aynı ultrasüzgeçleri ihtiva ederler ve bu sebepten  $p_D$ ,  $p_{D'}$  ve  $p_{D''}$  aynı kapanış operatörüne sahiptir. Özellikle  $j(X)$ ,  $X^*$  da yoğun olması  $p_{D'}$  ve  $p_{D''}$  ne bağlıdır.

Son olarak, kabul edelim ki  $D$ ,  $T_3$  olsun. Eğer  $F \in C_{cp}$  ise bu durumda  $c\ell_{p_D} j(F) = c\ell_{p_D} j(F) = j(c\ell_{p_C} F) \cap B$  dir ki buradan  $B$ ,  $X / j(X)$  üzerindeki  $c\ell_{p_D} j(F)$  in izidir. Bu sebepten  $c\ell_{p_C} F \in C_{cp}$ ,  $B \in D_1$  ve  $c\ell_{p_D} j(F) \in D$  olduğundan  $c\ell_{p_D} j(F) \in D'$  dür.

Diğer iki durumda benzer çıkarımları ihtiva ettiği için,  $D'$  nün  $T_3$  olduğunu sonucuna ulaşıyoruz. Aynı sebep  $D''$  nün  $T_3$  olduğu sonucuna götürür.

**Sonuç 3.4.11**  $(X, C)$  süzgeç uzayı için aşağıdaki ifadeler denktir.

(1)  $(X, C)$ ,  $T_3$  tamlamaya sahiptir.

(2)  $M_{cp}(X, C)$ ,  $T_3$   $c$ -süzgeç tamlamasına sahiptir.

(3)  $M_c(X, C)$  nin  $T_3$  cauchy tamlaması vardır.

**Önerme 3.4.12** Tam sınırlı süzgeç uzayının  $T_3$  tamlaması da tam (total) sınırlıdır

**İSPAT:**  $((X^*, D), j)$  total (tam) sınırlı  $(X, C)$  süzgeç uzayının  $T_3$  tamlaması olsun.  $A$  ise  $X^*$  üzerinde bir ultrasüzgeç olsun. O halde  $X$ 'te  $A \geq c\ell_p(F)$  olacak şekilde bir  $F$  ultrasüzgeci vardır.  $(X, C)$  tam sınırlı olduğundan  $F \in C$  dir.  $(X^*, D)$  regüler olduğundan  $A \in D$  dir.

Her  $T_3$  cauchy uzayının regular cauchy tamlamasının olmadığı çok iyi bilinir [27]. Bu sebepten Sonuç 3.4.11 dan her  $T_3$  süzgeç uzayının bir  $T_3$  tamlaması yoktur.

Bir cauchy uzayı  $C_3$  dür gerek ve yeter şart Cauchy uzayı,  $T_3$  tamlamasına sahiptir.  $(X, C)$  süzgeç uzayının  $T_3$  tamlaması her  $C_3$  süzgeç uzayı olacak şekilde tanımlayalım. Bu tanıma göre  $C_3$  cauchy uzayı  $C_3$  süzgeç uzayının tamlamasına sahiptir.

Bu sebepten bizim  $C_3$  tanımımız cacuhy uzaylarına uygulandığında [27] ve [29] daki “ $C_3$  Cauchy Uzayı” ile uygunluk gösterir.

$C_3$ FIL objeleri  $C_3$  süzgeç uzayları olan  $T_2$ CFIL bir alt kategorisini gösterebilir.

**Önerme 3.4.13**  $(X, C)$  süzgeç uzayı  $C_3$  tür  $\Leftrightarrow \square \notin C$  olduğunda,  $T_3$  cauchy uzayı olan bir  $(Y, D)$  tamlaması ve  $f(\square) \notin D$  olacak şekilde bir  $f : (X, C) \rightarrow (Y, D)$  cauchy dönüşümü vardır.

**İspat :**  $(X, C)$   $C_3$  ise Sonuç 3.4.11 den  $M_c(X, C)$  de  $T_3$  tür. Bir tamlamanın varlığı  $f(\square) \notin D$  olacak şekilde  $T_3$  cauchy uzayı Önerme 3.4.2 den görülebilir.

$f : (X, C) \rightarrow (Y, D)$  zaten bir cauchy dönüşümü olduğundan şartlar sağlanır.

Tersine olarak, şartlar sağlansın fakat  $\square \notin C_c$  olsun. Bu durumda  $\square \notin C$  olduğundan ve Önerme 3.4.2 den  $M_c(X, C)$  bir  $C_3$  tür. İstenilen sonuca Sonuç 3.4.11 den ulaşılır.

Bir süzgeç uzayına Cauchy-ayrılmış (separated) denir eğer  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{C} \in \mathcal{C}$  ve  $\mathcal{C} \not\subseteq_c \mathcal{C}$  olduğundan,  $f(\mathcal{C})$  ve  $f(\mathcal{C})$   $\mathbb{R}$ 'de ayırık noktalara yakınsayacak şekilde  $f : (X, \mathcal{C}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{C}_{\mathbb{R}})$  bir cauchy dönüşümü vardır.

$(X, \mathcal{C})$  bir cauchy- ayrılmış olması için  $\Leftrightarrow M_c(X, \mathcal{C})$  bir cauchy- ayrılmış olmasıdır.

## 4. BÖLÜM

### SÜZGEÇ UZAYLARIN TOPOLOJİK KATEGORİSİ

Bu bölümde yakınsak süzgeç uzaylar kategorisinin (FCO) nun SET üzerinde bir topolojik kategori olduğu gösterildi. Bu topolojik fanktorun diskre ve indiskre yapıları verildi. Ayrıca  $p$  noktasındaki  $\bar{T}_0$ ,  $T_0'$  ve  $T_1$  ayrılma aksiyomları karakterize edildi.

#### 4.1. FCO Topolojik Kategori

**Teorem 4.1.1**  $E = \text{FCO}$  olsun.  $U: \text{FCO} \rightarrow \text{SET}$  topolojik fanktordur.

**İspat:** Önce fanktor olduğunu gösterelim.  $(A, K)$ ,  $(B, L)$  süzgeç uzayında herhangi iki obje olmak üzere;

$U(A, K) = A \in \text{SET}$  ve  $f: (A, K) \rightarrow (B, L)$  için  $U(f) = f: A \rightarrow B$  tanımlansın.

1)  $U(1_{(A, K)}) = 1_{U(A, K)}$  olduğunu gösterelim.

$1_{(A, K)}: (A, K) \rightarrow (A, K)$  sürekli birim morfizm olmak üzere

$U(1_{(A, K)}): A \rightarrow A = U(A, K) = 1_A$  birim fonksiyon ve

$U(1_{(A, K)}) = 1_A = 1_{U(A, K)}$   $U(1_{(A, K)}) = 1_{U(A, K)}$  olur.

2)  $(A, K) \xrightarrow{f} (B, L) \xrightarrow{g} (C, T)$  tanımlansın.

$U(g \circ f) = g \circ f = U(g) \circ U(f)$  olur. Böylece bu bir fanktordür. Şimdi düzenli olduğunu gösterelim.

1)  $(A, K), (B, L) \in E$ ,  $f, g: (A, K) \rightarrow (B, L)$  ve  $U(f) = U(g)$  olsun. Tanımdan  $U(f) = f$  ve

$U(g) = g$  olduğundan  $f = g$  dir. Böylece  $U$  düzenlidir.

$f:(A,K) \rightarrow (A,L)$  olacak şekilde  $U(f)=f=1_A:A \rightarrow A$  ve  $f$  izomorfizm olsun.  $K=L$  olduğunu gösterelim.

$\forall a \in A$  için  $\alpha \in K(a)$  olsun,  $f$  sürekli olduğundan  $f(\alpha) \in L(f(a))$

$1_A: A \rightarrow A \Rightarrow 1_A(\alpha) \in L(1_A(a))$  ise  $\alpha \in L(a)$  olur ki  $\forall a \in A$  için  $K(a) \subset L(a)$  dir.

Benzer şekilde  $\forall a \in A$  için  $\alpha \in L(a)$  ve  $f^{-1}$  sürekli olduğundan

$f^{-1}(\alpha) \in K(f^{-1}(a))$  dan  $f=1_A: A \rightarrow A$  ise  $f^{-1}=1_A$  olur.

$1_A(\alpha) \in K(1_A(a))$  ise  $\alpha \in K(a)$  olur.  $L(a) \subset K(a)$  dir. Böylece  $K = L$  elde edilir.

$f = 1_{(A,K)}$  olur yani  $f$  amnestiktir. Hem amnestik hem düzenli olduğundan belirlidir.

**2)**  $U^{-1}(A) = \{(A,K) \mid U(A,K) = A\}$  ve  $\varphi = \{K \mid K \subset (A, P(F(A)))\}$  olsun.

$\theta: U^{-1}(A) \rightarrow \varphi$  de  $\theta(A,K) = K$  şeklinde tanımlanır.

$\theta$  birebirdir ve  $\theta$  genelde örten değildir. Dolayısıyla  $U^{-1}(A) \approx \theta(U^{-1}(A)) \subset \varphi$  ve  $\varphi$

cümle olduğundan  $U^{-1}(A)$  da bir cümledir. Buradan  $U$  küçük demetlere sahiptir

**3)**  $(A_i, K_i)$ ,  $E$  nin nesneleri ve  $f_i: A \rightarrow U(A_i, K_i) = A_i$ ,  $i \in I$  SET kategorisinde  $U$

kaynağı olsun.  $\forall a \in A$  için  $K(a) = \{\alpha \mid f_i(\alpha) \in K_i(f_i(a)), i \in I\}$  şeklinde tanımlansın;  $(A, K) \in \text{Ob}(E)$  olduğunu gösterelim.

$\forall a \in A$  için,  $[a] \in K(a)$  olduğunu gösterelim

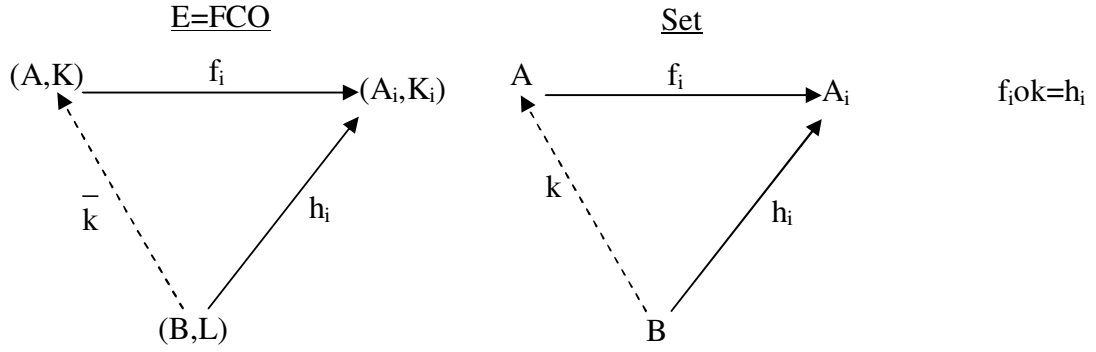
$f_i[a] = [f_i(a)] \in K_i(f_i(a))$  dir. Çünkü  $(A_i, K_i)$   $E$  de bir objedir.  $K(a)$  nın tanımından  $[a] \in K(a)$  olur.

Yine  $\alpha \in K(a)$  ve  $\alpha \subset \beta$  olsun.  $\beta \in K(a)$  olduğunu gösterelim.  $f_i(\alpha) \in K_i(f_i(a))$  ve  $\alpha \subset \beta$  olduğundan  $f_i(\alpha) \subset f_i(\beta)$  dir.  $(A_i, K_i)$   $E$  de bir obje olduğundan  $f_i(\beta) \in K_i(f_i(a))$ ,  $K(a)$  nın tanımından  $\beta \in K(a)$  dir. Dolayısıyla  $(A, K) \in E$  dir.

Şimdi  $f_i: (A, K) \rightarrow (A_i, K_i)$  nin  $f_i: A \rightarrow A_i$  nin başlangıç kaldırması olduğunu gösterelim. Bunun için  $E$  deki her  $(B, L)$ ,  $(A_i, K_i)$  objeleri ve  $E$  de herhangi

$h_i : (B, L) \rightarrow (A_i, K_i)$  dönüşümlerin ailesi için en az bir  $k: B \rightarrow A$  vardır ve  $U(f_i) \circ k = U(h_i)$  dir.

Göstereceğiz ki en az bir  $\bar{k} : (B, L) \rightarrow (A, K)$  vardır öyle ki  $U(\bar{k}) = k$  dir.



Yani  $\forall b \in B, \forall \alpha \in L(b)$  için  $\bar{k}\alpha \in K(\bar{k}(b))$  olduğunu göstermeliyiz.

$b \in B$  ve  $\alpha \in L(b)$  olsun,  $h_i$  sürekli olduklarından  $h_i(\alpha) \in K_i$  dir.  $\bar{k} = k$  olsun.

Diğer taraftan  $f_i \circ \bar{k} = h_i$  olduğundan

$h_i(\alpha) = f_i(\bar{k}(\alpha)) = (U(f_i))(U(k)(\alpha)) = U(h_i)(\alpha) = h_i(\alpha) \in K_i(f_i(k(b)))$  olur. Böylece

$f_i(k(\alpha)) \in K_i(f_i(k(b)))$  ve  $K$  nın tanımından  $k(\alpha) \in K_i(k(b))$  dir.

Dolayısıyla  $U: E \rightarrow SET$  bir topolojik fanktordur. Şimdi  $U: E \rightarrow SET$  normalleştirilmiş olduğunu gösterelim.

$U^{-1}(\phi) = (\phi, \{\phi\}) = (\phi, K)$  yani  $K = \{\phi\}$  dur.

$U^{-1}(\{x\}) = (\{x\}, K)$   $K = \{[x], [\phi]\}$  dir.

Dolayısıyla  $\phi$  ve tek nokta cümlesi üzerinde yalnız tek bir yapı vardır. Bundan dolayı  $U: E \rightarrow SET$  normalleştirilmiştir.

Şimdi de bu kategorinin bitiş kaldırmalarını karakterize edelim.

$f_i: (A_i, K_i) \rightarrow (A, K)$  epi-kavşağı FCO da bitiş kaldırmadır ancak ve ancak  $\forall a \in A$  ve  $\alpha \in K(a)$  için  $\alpha \supset f_k \beta$  olacak şekilde  $\exists a_k \in A_k$  ve  $\beta$  vardır öyleki  $f_k(a_k) = a$  ve  $\beta \in K_k(a_k)$   $k=1,2,\dots,n$  dir.

**Uyarı 4.1.2** FCO kategorisinde  $(A, K)$  objesi diskre objedir  $\Leftrightarrow \forall a \in A$  için  $K(a) = \{[a], [\phi]\}$  dir.

2-  $(A,K)$  nin indiske uzayı olması için gerek ve yeter şart  $K=F(A)$  olmasıdır.

**İspat:** Teorem 2.4.11 den yararlanarak:

1.  $e=(A,K) \in FCO$ ,  $c=(B,L) \in FCO$  olsun. Eğer  $f:A \rightarrow B$  bir fonksiyon ise bu takdirde  $f$ ,  $FCO$  da  $(A,K) \rightarrow (B,L)$  dönüşümüne kaldırılabilir. Yani  $a \in K(a)$  ise  $f(a) \in L(f(a))$  olduğu gösterilmelidir.  $a \in K$  olsun.  $a=[a]$  veya  $[\emptyset]$ , buradan  $f(a)=[f(a)]$  veya  $[\emptyset]$  dur. Dolayısıyla  $f(a) \in L$ , yani  $f$  süreklidir.

2.  $d=(A,K) \in FCO$ ,  $c=(B,L) \in FCO$  olsun. Eğer  $f:B \rightarrow A$  bir fonksiyon ise  $f$  kaldırılabilir.  $a \in L$  ise  $f(a) \in K$  olduğunu göstermeliyiz. Hipotezden  $K=F(A)$  idi.  $a \in L$  olsun, bu durumda  $f(a) \in F(A)$  olur. O halde  $f(a) \in K$  dır.

#### 4.2. Noktada ayrılma aksiyomları

$X$  bir cümle ve  $p \in X$ ,  $X \vee_p X$  de  $X$  in  $p$  wedge çarpımı olsun.

**Tanım 4.2.1.  $p$  de Temel Eksen Dönüşümü (Principle  $p$  Axis Map):**

$$A_p : X \vee_p X \rightarrow X^2, A_p(x_1)=(x,p), A_p(x_2)=(p,x),$$

**$p$  de Skewed Eksen Dönüşümü (Skewed  $p$  Axis Map):**

$$S_p : X \vee_p X \rightarrow X^2, x_1 \rightarrow S_p(x_1)=(x,x) \text{ ve } x_2 \rightarrow S_p(x_2)=(p,x)$$

**$p$  de Katlama Dönüşümü (The Fold Map):**

$$\nabla_p : X \vee_p X \rightarrow X, \nabla_p(x_i) = x, i=1,2 \text{ olarak tanımlanır [30] ve [25].}$$

**Örnek 4.2.2**  $X$  cümlesi yerine  $IR$  reel sayılar cümlesini ve  $p = 0$  olarak alırsak  $p$  de Temel Eksen Dönüşümünün görüntüsü  $x$  ve  $y$  eksenlerinin birleşimi, Skewed Eksen Dönüşümünün görüntüsü  $y = x$  doğrusu ve  $y$  ekseninin birleşimidir.

**Tanım 4.2.3**  $(X, \tau)$  bir topolojik uzay ve  $p \in X$  olsun.

(1)  $(X, \tau)$  uzayının  $p$  de  $T_0$  olması için gerek ve yeter şart her  $q \neq p$  için  $p$  nin  $q$  yu ihtiva etmeyen en az bir  $N_p$  komsuluğu veya  $q$  nun  $p$  yi ihtiva etmeyen en az bir  $N_q$  komşuluğunun olmasıdır [31].

(2)  $(X, \tau)$  uzayının  $p$  de  $T_1$  olması için gerek ve yeter şart her  $q \neq p$  için  $p$  nin ve  $q$  nun  $N_p$  ve  $N_q$  komşulukları vardır, öyle ki  $q \notin N_p$  ve  $p \notin N_q$  dur.

**Teorem 4.2.4**  $(X, \tau)$  bir topolojik uzay ve  $p \in X$  olsun.

(1)  $(X, \tau)$  uzayının  $p$  noktasında  $T_0$  olması için gerek ve yeter şart  $X \forall p X$  üzerinde  $\{ A_p : X \forall_p X \rightarrow X^2, \nabla_p : X \forall_p X \rightarrow (X, PX) \}$  fonksiyonları tarafından doğrulan topolojinin diskre olmasıdır.

(2)  $(X, \tau)$  uzayının  $p$  noktasında  $T_1$  olması için gerek ve yeter şart  $X \forall p X$  üzerinde  $\{ S_p : X \forall_p X \rightarrow X^2, \nabla_p : X \forall_p X \rightarrow (X, PX) \}$  fonksiyonları tarafından doğrulan topolojinin diskre olmasıdır.

$U: \mathcal{K} \rightarrow \text{SET}$  topolojik fanktor  $X$  de  $\mathcal{K}$  nın bir nesnesi ve  $p$  de  $UX = B$  nin bir elemanı olsun.

**Tanım 4.2.5** (1)  $X$  in  $p$  de  $\overline{T}_0$  uzayı olması için gerek ve yeter şart

$\{ A_p : B \forall_p B \rightarrow U(X^2) = B^2$  ve  $\nabla_p : B \forall_p B \rightarrow UDB = B \}$   $U$ -kaynağının başlangıç kaldırmasının diskre olmasıdır. Burada  $D$  diskre fanktordur [30] ve [25].

(2)  $X$  in  $p$  de  $T_0'$  uzayı olması için gerek ve yeter şart

$\{ \text{Id} : B \forall_p B \rightarrow U(X \forall_p X) = B \forall_p B$  ve  $\nabla_p : B \forall_p B \rightarrow UDB = B \}$  yani  $\{ i_1, i_2 : B \rightarrow B \forall_p B \}$   $U$ -kavşağının bitiş kaldırmasıdır. Burada  $i_1, i_2$  kanonik dönüşümleri göstermektedir [30] ve [25].

(3)  $X$  in  $p$  de  $T_1$  uzayı olması için gerek ve yeter şart

$\{ S_p : B \vee_p B \rightarrow U(X^2) = B^2 \text{ ve } \nabla_p : B \vee_p B \rightarrow UDB = B \}$  U-kaynağının başlangıç kaldırmasının diskre olmasıdır [30] ve [25]. Burada  $X \vee_p X$ ,  $\mathcal{K}$  nin wedge çarpımıdır.

**Uyarı 4.2.6**  $\{ f_i : (A, K) \rightarrow (A_i, K_i) \mid i \in I \}$  kaynağı başlangıç kaldırmadır ancak ve ancak  $\alpha \in K(a)$  olduğunda tüm  $i \in I$  için  $f_i(\alpha) \in K_i(f_i(a))$  dir.[30]

**Uyarı 4.2.7**  $p_1, p_2, \nabla_p, \pi_{ij}$  sırasıyla  $1+p, p+1, 1+1: B \vee_p B \rightarrow B$   $\pi_i + \pi_j : B^2 \vee_p B^2 \rightarrow B$  ile gösterilir. Burada  $1: B \rightarrow B$  birim dönüşüm,  $p: B \rightarrow B$   $p$  noktası sabit dönüşüm ve  $\pi_i : B^2 \rightarrow B$   $i$ . izdüşüm dönüşümdür ( $i=1,2$ ). Dikkat edelim ki  $\pi_1 A_p = p_1 = \pi_1 S_p$ ,  $\pi_2 A_p = p_2$ ,  $\pi_2 S_p = \nabla$ , ki burada  $A_p$  ve  $S_p$  temel eksen ve skewed eksen dönüşümleridir. Kolayca gösterilebilir ki  $A_p$  ( $p_1$  ve  $p_2$ ) ve  $S_p$  ( $p_1$  ve  $\nabla$ ) nin başlangıç kaldırmalarını göstermekle aynıdır. [30]

**Teorem 4.2.8**  $X = (B, K)$  FCO nun bir objesi olsun.  $(B, K)$   $p$  de  $\overline{T}_0$  dir  $\Leftrightarrow B$  deki her farklı  $x$  ve  $p$  noktaları için  $[x] \notin K(p)$  veya  $[p] \notin K(x)$  dir [30].

**İspat:** Kabul edelim ki  $X$   $p$  de  $\overline{T}_0$  olsun. Yani 4.2.6, 4.2.7, 4.1.2, ve tanım 4.2.5 den, Wedge çarpımındaki her  $\sigma$  süzgeci ve Wedge çarpımındaki herhangi  $z$  noktası için  $p_1 \sigma \in K(p_1 z)$ ,  $p_2 \sigma \in K(p_2 z)$  ve  $\nabla \sigma = [\nabla z]$  veya  $[\phi]$  tur  $\Leftrightarrow \sigma = [\phi]$  veya  $[z]$  dir. Göstereceğiz ki  $B$  deki her farklı  $x$  ve  $p$  noktası için  $[x] \in K(p)$  ise  $[p], K(x)$  de değildir.

Eğer  $[p] \in K(x)$  ise bu durumda  $\sigma = [(p, x)]$  alalım.  $p_1 \sigma = [p] \in K(x)$ ,  $p_2 \sigma = [x] \in K(p)$   $\sigma = [x]$  dir ve  $\nabla \sigma = [(x, p)]$  tır.  $X$ ,  $p$  de  $\overline{T}_0$  olduğundan buradan,  $\sigma = [z] = [(x, p)]$  dir. Bu ise  $x \neq p$  olduğundan çelişkidir.  $[p] \notin K(x)$  dir.

Benzer olarak gösterilebilir ki herhangi  $x \neq p$  için  $[p] \in K(x)$  ise  $[x] \notin K(p)$  dir.

Tersine olarak, şartların sağlandığını kabul edelim.  $X$ ,  $p$  de  $\overline{T}_0$  olduğunu göstereceğiz. Eğer  $\sigma$ ,  $p_1 \sigma \in K(p_1(x, p))$ ,  $p_2 \sigma \in K(p_2(x, p))$  ve  $\nabla \sigma = [x]$  veya  $[\phi]$  ise bu durumda,

$\sigma = [(x, p)], [(p, x)], [\phi]$  ya da  $\sigma \supset [(x, p) \cup (p, x)]$  olduğunu görmek kolaydır. Biz  $\sigma = [(x, p)]$  veya  $[\phi]$  olduğunu göstermeliyiz. Eğer  $\sigma = [(p, x)]$  ise bu durumda  $p_1\sigma = [p] \in K(x), p_2\sigma = [x] \in K(p)$  olur ki buda kabulümüzle çelişir. Buradan  $\sigma \neq [(p, x)]$  dir. Eğer  $\sigma = [(x, p) \cup (p, x)]$  ise bu taktirde  $p_1\sigma = [x \cup p] = [\{x, p\}] \subset [p]$  ve  $p_2\sigma = [p \cup x] \subset [x]$  ve sonuç olarak  $[x] \in K(p)$  ve  $[p] \in K(x)$  olur ki buda çelişkidir. Buradan  $\sigma \neq [(x, p) \cup (p, x)]$  dir.

Şimdi gösterelim ki  $\sigma \neq [(x, p) \cup (p, x)]$  ve  $\sigma \neq [\phi]$  olmak üzere  $\sigma \supset [(x, p) \cup (p, x)]$  dir. Eğer  $[\phi] \neq \sigma \neq [(x, p) \cup (p, x)]$  ise  $\sigma \supset [(x, p) \cup (p, x)]$  olması için  $\Leftrightarrow \sigma = [(x, p)]$  veya  $[(p, x)]$  olmasıdır. Açıkça eğer  $\sigma = [(x, p)]$  veya  $[(p, x)]$  ise  $\sigma \supset [(x, p) \cup (p, x)]$  dir.

Tersine olarak eğer  $\sigma \supset [(x, p) \cup (p, x)]$  ve  $[\phi] \neq \sigma \neq [(x, p) \cup (p, x)]$  ise bu durumda  $U = \{(x, p), (p, x)\}$  ve  $U \neq \phi$  olacak şekilde  $U \in \sigma$  vardır.  $\{(x, p), (p, x)\} \in \sigma$  ve  $\sigma$  süzgeç olduğundan  $U \cap \{(x, p), (p, x)\} = (x, p)$  veya  $(p, x)$  olur ki bunlarda  $\sigma$  dadır. Bu yüzden  $\sigma = [(x, p)]$  veya  $[(p, x)]$  dir. Yukarda  $\sigma \neq [(p, x)]$  olduğu gösterildi. Bu sebepten  $\sigma = [\phi]$  veya  $\sigma = [(x, p)]$  dir. Benzer olarak gösterilebilir ki  $p_1\sigma \in K(p), p_2\sigma \in K(x) \nabla \sigma = [x]$  veya  $[\phi]$  şartı sağlanırsa  $\sigma = [(p, x)]$  veya  $[\phi]$  dir. Eğer  $\sigma, p_1\sigma \in K(p), p_2\sigma \in K(x) \nabla p = [p]$  veya  $[\phi]$  şartı sağlanırsa  $\sigma = [(p, p)]$  veya  $[\phi]$  dir. Sonuç olarak  $\nabla^{-1}(p) = (p, p)$  olduğunda  $\sigma = [(p, p)] = [z]$  dir.

Bu yüzden  $X p$  de  $\bar{T}_0$  dir.

**Teorem 4.2.9** FCO da ki tüm  $X = (B, K)$  objeleri  $p$  de  $T_0$  ' 'dir.

**İspat:** Kabul edelim ki  $X p$  de,  $T_0$  ' olsun.  $X = (B, K)$  nın  $p$  de  $T_0$  ' olması için Wedge çarpımındaki herhangi  $\sigma$  süzgeci ve Wedge çarpımındaki herhangi  $z$  noktası için

$\exists \sigma_1 \in K(x) \ni \sigma \supset i_k \sigma_1$ ,  $k=1,2$  için  $i_k = z$  ve  $\nabla \sigma = [x]$  veya  $[\phi] \Leftrightarrow \sigma = [z]$  veya  $[\phi]$  olmasıdır.  $\exists \sigma_1 \in K(x)$  için eğer  $\sigma \supset i_1 \sigma_1$  ve  $\nabla \sigma = [x]$  veya  $[\phi]$  ise bu taktirde kolayca gösterilebilir ki  $\sigma = [(x,p)], [(p,x)], [\phi]$  veya  $\sigma \supset [(x,p) \cup (p,x)]$  dir.  $\sigma_1 \in K(x)$ ,  $\sigma \supset i_1 \sigma_1$  olduğundan  $\sigma = [(x,p)]$  veya  $[\phi]$  olmalıdır.

Benzer olarak,  $\sigma_1 \in K(x)$  için  $\sigma \supset i_2 \sigma_1$  ise bu durumda  $i_2(x) = (p,x)$  olduğundan  $\sigma = [(p,x)]$  veya  $[\phi]$  dur.  $\sigma_1, \sigma_2 \in K(p)$ ,  $K(p) = (p,p)$   $k=1$  veya  $2$  için eğer  $\sigma \supset i_k \sigma_1$  ve  $\nabla \sigma = [p]$  veya  $[\phi]$  ise bu durumda  $\nabla^{-1}(p) = (p,p)$  olduğundan  $\sigma = [(p,p)]$  veya  $[\phi]$  dur. Bu da ispatı tamamlar.  $X$   $p$  de  $T_0'$  dir.

**Teorem 4.2.10**  $X = (B, K)$  FCO nun bir objesi olsun  $(B, K)$   $p$  de  $T_1$  dir  $\Leftrightarrow B$  deki her farklı  $x$  ve  $p$  noktaları için  $[x] \notin K(p)$  ve  $[p] \notin K(x)$  dir.

**İspat:** Kabul edelim ki  $X$ ,  $p$  de  $T_1$  olsun. Yani 4.1.6, 4.1.8, 4.1.7 ve tanım 4.2.5 den ve Wedge çarpımındaki herhangi  $\sigma$  süzgeci ve wedge çarpımındaki herhangi  $z$  noktası için,  $p_1 \sigma \in K(p_1, z)$ ,  $\nabla \sigma \in K[\nabla z]$ ,  $\nabla \sigma = [\nabla z]$  veya  $[\phi]$  dir  $\Leftrightarrow \sigma = [z]$  veya  $[\phi]$  dur. Biz  $x \neq p$  ise  $[x] \in K(p)$  olduğunu göstereceğiz.  $[x] \in K(p)$  ise  $\sigma = [(x,p)]$  dir. Dikkat edelim ki  $p_1 \sigma = [x] \in K(p)$ ,  $\nabla \sigma = [x] \in K(x)$  dir.  $X$ ,  $T_1$  olduğundan  $\sigma = [(p,x)]$  olup, buda çelişkidir. Buradan  $[x] \notin K(p)$  dir.

$x \neq p$  olmak üzere eğer  $[p] \in K(x)$  ise  $\sigma = [(p,x)]$  dir. Açıkça  $p_1 \sigma = [p] \in K(x)$  ve  $\nabla \sigma = [x] \in K(x)$  olur ki bu  $X$  in  $p$  de  $T_1$  olduğuyula çelişir. Buradan  $[p] \notin K(x)$  dir.

Tersine olarak, farz edelim ki şart sağlansın.  $\sigma$ ,  $p_1 \sigma \in K(x)$ ,  $\nabla \sigma \in K[x]$  ve  $\nabla \sigma = [x]$  veya  $[\phi]$  ise bu taktirde kolayca gösterilebilir ki  $\sigma = [(x,p)], [(p,x)], [\phi]$  veya  $\sigma \supset [(x,p) \cup (p,x)]$  dir.

Şimdi  $\sigma = [(x,p)]$  veya  $[\phi]$  olduğunu gösterelim.  $\sigma = [(p,x)]$  bu taktirde  $p_1 \sigma = [p] \in K(x)$ , olur ki buda çelişkidir. Eğer  $\sigma = [(x,p) \cup (p,x)]$  alırsak

$p_1\sigma = [x \cup p] \subset [p]$  ve buradan  $[p] \in K(x)$  dir, yine çelişkidir.  $[\phi] \neq \sigma \neq [(x,p) \cup (p,x)]$  olacak şekilde eğer  $\sigma \supset [(x,p) \cup (p,x)]$  ise, bu durumda Teorem 4.2.8 in ispatında kullanılan aynı yaklaşımla, ve kabulden  $\sigma = [(x,p)]$  veya  $[(p,x)]$  dir. Buradan  $\sigma \neq [(p,x)]$  olduğundan  $\sigma = [(x,p)]$  veya  $[\phi]$  elde ederiz. Benzer olarak eğer  $\sigma = p_1\sigma \in K(p)$ ,  $\nabla\sigma \in K(x)$  ve  $\nabla\sigma = [x]$  veya  $[\phi]$  şartları sağlansın. Bu taktirde  $\sigma = [(p,x)]$  veya  $[\phi]$  dur. Eğer  $\sigma = p_1\sigma \in K(p)$ ,  $\nabla\sigma \in K(p)$  ve  $\nabla\sigma = [p]$  veya  $[\phi]$  şartları sağlamıyorsa  $\sigma = [(p,p)]$  veya  $[\phi]$  dur.  $\nabla^{-1}(p) = (p,p)$  dir. Bu yüzden  $X, p$  de  $T_1$  ' dir.

## KAYNAKLAR

1. Root, R., Iterated limits in general analysis, Am. J. Math.,36,79-134 (1914).
2. Cartan, H., Theorie des Filtres, Compt. Rend.,205, 595-598 (1937a).
3. Bourbaki,N., Topologie generale. Chapitre 1 et 2.Actualites Sci. Ind.,858 (1940).
4. Cartan, H., Filtres et ultrafiltres, Compt. Rend.,205, 777-779 (1937b).
5. Bartle, R.G., Nets and Filters in Topology, this Montly, vol.62,551-557,1955.
6. Kowalsky, H.j., Topologische Raume, Basel-Stuttgart New York,1964.
7. Keller, H.H. Die Limes- Uniformisierbarkeit der Limesraume,Math. Ann.176, 334-341, 1968.
8. Cook C.H and H.R Fischer Uniform Convergence Structures, Math. Ann.137, 269-303, 1959.
9. Katetov, M., On Continuity Structures and Spaces of Mappings, Comment, Math. Univ. Carolinae, 6, 257-265, 1965.
10. Bentley, H.L., Herrlich, H. and Lowen-Colebunders, E., Convergence, J.Pure Appl. Algebra, 68,27-45,1990.
11. Wyler, O., Top Categories and Categorical Topology, Gen. Top. Appl.11,17-28,1971.
12. Reed, E.E., Completion of Uniform Convergence Spaces, Math. Ann. 194, 83-108, 1971.
13. Kent, D.C. and Rath N., Filtre Spaces, Applied Categorical Structures 1,297-310, 1993.
14. Preuss, G., Theory of Topological Structures, D, Reidel Publ. Co. Dordrecht, 1988.
15. Preuss, G., Improvement of Cauchy Spaces,Q&A in Gen. Top 9, 159-166,1991.

16. G. Minkler, J. Minkler and G. Richardson, Extensions For Filter Spaces Math. Hungar 82(4), , 301-310, (1999).
17. Munkres, J.R., Topology: A First Course, Prentice Hall Inc., New Jersey, 1975.
18. Maclane, S., Categories For Working Mathematician Springer-Verlag, New York, 1971.
19. Herrlich, H., Topological Funktors, Gen. Top. Appl., 4,125-142, 1975.
20. Kent, D.C., Convergence Quotient Maps, Fund, Math., 165, 197-205, 1969.
21. Schwartz, F., Connections Beetween Convergence and Nearness, Lecture
22. Notes in Math. No. 719, Springer-Verlag, 345-354, 1978.
23. Mielke, M.V., Geometric Topological Competions with Universal Final Lifts,
24. Top. and Appl., 9, 277-293, 1985.
25. Bourbaki, N., Elements of Mathematics General Topology, Addison-Wesley
26. Publishing Company, 1966.
27. Dikranjan, D. and Giuli, E., Closure operators I, Topology Appl., 27, 129-143,1987.
28. Baran, M., Seperation Properties, Indian J. Pure and Appl. Math. 23(5), 333-341, 1992.
29. Peruse, G., Theory of Topological Structures an Approach to Categorical Topology,
30. D. Reidel Publishing Company, 1988.
31. Kent, D.C., Richardson, G.D., Cauchy Spaces with Regular Completions, Pacific J, Math., Vol 3, No.1, 105-116, 1984.
32. Miller, F.R., The approximation of Topologies in Functional Analysis, Doctoral Dissertation, University of Massachusetts, 1968.
33. Kent, D.C., Richardson, G.D., Cauchy Completion categories, Canad. Math., Bull 32, 78-84, (1989).

34. Baran, M., Separation Properties, in Topological Categories, Disserttion, University of Miami, 1990.
35. Baran, M., The Notion of closedness in Topological Categories, Comment. Math.Univ. Carolinae, 34, 383-395, 1993.
36. M. Baran, Separation properties in category of filter convergence spaces, Bull. Calcutta Math. Soc., 85, 249-254,1993.
37. M. Baran and M. Kula, A note on separation and compactness in categories of convergence spaces, Applied General Topology, 4, 1-13, 2003.
38. Minkler, J. Q. On the Regularity Of Probabilistic Convergence And Filtler Spaces University of Florida, 1998.
39. Aslım Gülhan, Genel Topoloji, Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları 109 174-192, 2004.

## ÖZGEÇMİŞ

Selmin YAZGAN, 1979 yılında Kayseri doğdu. İlk öğrenimini Kayseri, orta öğrenimini Mersin’de tamamladı. 1997 yılında Ankara Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünü kazandı. 2002 yılında mezun oldu. Aynı yıl Mardin’de Matematik Öğretmeni olarak göreve başladı. 2005 yılında kazandığı Yüksek Lisans çalışmalarına devam etmektedir.

## İLETİŞİM BİLGİLERİ

**Adres:** Nur mahallesi TOKİ Konutları D1 A Blok 6/13 MARDİN  
**e-posta:** selminy@mynet.com