

**T.C.  
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MAKSİMUMLU FARK DENKLEM SİSTEMLERİ ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA**

**MEHMET AKPINAR  
YÜKSEK LİSANS TEZİ  
ORTAÖĞRETİM ANA BİLİM DALI  
MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ PROGRAMI  
KONYA, 2009**

## ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

### MAKSİMUMLU FARK DENKLEM SİSTEMLERİ ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

Mehmet AKPINAR

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Ortaöğretim Ana Bilim Dalı

Matematik Öğretmenliği Programı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. İbrahim YALÇINKAYA

2009, 74 Sayfa

Jüri: Prof. Dr. Eşref HATIR

Doç. Dr. Cengiz ÇİNAR

Yrd. Doç. Dr. İbrahim YALÇINKAYA

Bu çalışma üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, maksimumlu ve minimumlu fark denklemleri ile ilgili yapılmış bazı çalışmalar hakkında bilgi verdik.

İkinci bölümde, fark denklemleri ile ilgili genel tanım ve teoremleri verdik.

Üçüncü bölümde,  $A < 0$  ve başlangıç şartları sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere  $x_{n+1} = \max \left\{ \frac{1}{y_n}, Ay_{n-1} \right\}$ ,  $y_{n+1} = \max \left\{ \frac{1}{x_n}, Ax_{n-1} \right\}$  maksimumlu fark denklem sistemini tanımladık ve çözümlerinin periyodikliğini inceledik.

**Anahtar Kelimeler:** Maksimum Operatörü, Fark Denklem Sistemi, Çözüm, Periyodiklik.

## ABSTRACT

The Post Graduate Thesis

### A STUDY ON THE SYSTEMS OF THE MAX-TYPE DIFFERENCE EQUATIONS

Mehmet AKPINAR

Selcuk University Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor : Assist. Prof . Dr. İbrahim YALÇINKAYA

2009, 74 Pages

Jury: Prof. Dr. Eşref HATIR

Assoc. Prof . Dr. Cengiz ÇİNAR

Assist. Prof . Dr. İbrahim YALÇINKAYA

This study consists of three sections. In the first section, we gave information about some difference equations with maximum and minimum studied before.

In the second section, we gave general definitions and theorems about difference equations.

In the third section, we defined the difference equation system with maximum  $x_{n+1} = \max \left\{ \frac{1}{y_n}, Ay_{n-1} \right\}$ ,  $y_{n+1} = \max \left\{ \frac{1}{x_n}, Ax_{n-1} \right\}$  and investigated its periodic solutions where the initial conditions are nonzero real numbers and  $A < 0$ .

**Key Words :** Max Operator, System of The Difference Equation, Solution, Periodicity.

## ÖNSÖZ

Bu çalışma, Selçuk Üniversitesi Ahmet Keleşoğlu Eğitim Fakültesi Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi Bölümü Matematik Eğitimi Anabilim Dalı Öğretim Üyesi Yrd. Doç. Dr. İbrahim YALÇINKAYA yönetiminde yapılarak Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'ne Yüksek Lisans Tezi olarak sunulmuştur.

Yüksek Lisans çalışmamı yönetmeyi kabul ederek karşılaştığım güçlüklerde değerli yardımlarını esirgemeyen, tezimi büyük bir sabır ve titizlikle yöneten saygıdeğer hocam Yrd. Doç. Dr. İbrahim YALÇINKAYA' a ve Doç. Dr. Cengiz ÇİNAR' a teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

**Mehmet AKPINAR**

**Konya, 2009**

## İÇİNDEKİLER

|  |           |
|--|-----------|
| ÖZET.....  | i         |
| ABSTRACT.....  | ii        |
| ÖNSÖZ.....   | iii       |
| İÇİNDEKİLER.....   | iv        |
| <b>1. BÖLÜM</b>  |           |
| GİRİŞ.....   | 1         |
| 1.1. Maksimumlu ve Minimumlu Fark Denklemleri İle İlgili Yapılmış Çalışmalar... 1  |           |
| <b>2. BÖLÜM</b>  |           |
| FARK DENKLEMLERİ İLE İLGİLİ GENEL TANIM VE TEOREMLER.....  | 8         |
| <b>3. BÖLÜM</b>  |           |
| $x_{n+1} = \max \left\{ \frac{1}{y_n}, Ay_{n-1} \right\}, y_{n+1} = \max \left\{ \frac{1}{x_n}, Ax_{n-1} \right\}$ FARK DENKLEM SİSTEMİNİN |           |
| ÇÖZÜMLERİ.....   | 12        |
| 3.1. Nümerik Sonuçlar .....  | 68        |
| <b>SONUÇ VE ÖNERİLER.....</b>  | <b>70</b> |
| <b>KAYNAKLAR .....</b>   | <b>71</b> |

## 1. BÖLÜM

### GİRİŞ

Bu çalışmada, maksimumlu fark denklem sistemlerinin periyodikliği üzerine çalışılmıştır. Bu amaçla maksimumlu fark denklemleri ile ilgili yapılmış çalışmaların büyük bir kısmı incelenmiştir. Bu araştırmalar sonucunda,  $A < 0$  ve  $x_{-1}, x_0, y_{-1}, y_0$  başlangıç şartları sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere,

$$x_{n+1} = \max \left\{ \frac{1}{y_n}, Ay_{n-1} \right\}, y_{n+1} = \max \left\{ \frac{1}{x_n}, Ax_{n-1} \right\}, n = 0, 1, 2, \dots$$

maksimumlu fark denklem sistemi tanımlanmış ve çözümleri incelenmiştir.

#### 1.1. Maksimumlu Ve Minimumlu Fark Denklemleri İle İlgili Yapılmış Çalışmalar

Bu bölümde, maksimumlu ve minimumlu fark denklemleri ile ilgili yapılmış bazı çalışmalar hakkında bilgi verilmiştir.

Amleh ve ark. (1998),  $x_{n+1} = \max \left\{ \frac{1}{x_n}, \frac{A}{x_{n-1}} \right\}$  fark denkleminin çözümlerinin

periyodikliğini inceledikleri çalışmada;  $A$  ve başlangıç değerleri sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere bu fark denkleminin her çözümünün er geç periyodik olduğunu göstermişlerdir.

Amleh (1998), doktora tezinde; fark denklemlerinin üç farklı konusunu ele almıştır. İlk bölümde,  $x_{n+1} = \max \left\{ \frac{A}{x_n}, \frac{B}{x_{n-1}} \right\}$  fark denkleminin çözümlerinin sıfırdan farklı reel sayılar olan  $A, B$  parametreleri ve  $x_{-1}, x_0$  başlangıç değerleri için

periyodik olduğunu göstermiştir. İkinci bölümde,  $x_{n+1} = \frac{x_n + x_{n-1}x_{n-2}}{x_n x_{n-1} + x_{n-2}}$  rasyonel fark denkleminin global asimptotik kararlılığı ve son bölümde ise Plant-Herbivore sisteminin çözümlerinin sınırlılığı üzerine çalışmıştır.

Janowski ve ark. (1998),  $x_{n+1} = \frac{\max\{x_n^k, A\}}{x_{n-1}}$  fark denkleminin çözümlerinin

sınırlılık ve salınımlılık özelliklerini incelemiştir.  $A$ ,  $k$  parametreleri ve başlangıç değerleri pozitif sayılar olmak üzere bu denklemin çözümlerinin sınırlı ve salınımlı olma şartlarını elde etmişlerdir.

Grove ve ark. (1998),  $x_{n+1} = \frac{a_n x_n + b_n}{x_{n-1}}$  otonom olmayan Lyness fark denklemini

ile  $y_{n+1} = \frac{\max\{a_n y_n, b_n\}}{y_{n-1}}$  maksimumlu fark denklemini incelemiştir. Katsayılar

negatif olmayan  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$  ve  $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$  dizileri olmak üzere bu fark denklemlerinin her pozitif çözümünün sürekli ve sınırlı olabilmesi için yeter şartlar elde etmişlerdir.

Papaschinopoulos ve Schinas (1998),  $A$  ve başlangıç değerleri pozitif sayılar

olmak üzere  $x_{n+1} = \frac{\max\{x_n, y_n, A\}}{x_{n-1}}$ ,  $y_{n+1} = \frac{\max\{x_n, y_n, A\}}{y_{n-1}}$  fark denklem sisteminin

çözümlerinin salınımlılığını ve periyodikliğini incelemiştir.

Valicenti (1999), doktora tezinde;  $x_{n+1} = \frac{a_n x_n + b_n}{x_{n-1}}$  otonom olmayan Lyness

fark denklemini ile  $x_{n+1} = \frac{\max\{a_n x_n, b_n\}}{x_{n-1}}$  maksimumlu fark denkleminin çözümlerinin

periyodikliğini ve global asimptotik kararlılığını incelemiştir.

Feuer ve ark. (2000),  $x_{n+1} = \frac{\max\{x_n, A\}}{x_n x_{n-1}}$  maksimumlu Lyness fark denkleminde

$A$  bir reel sayı ve başlangıç değerleri de sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere çözümlerin asimptotik kararlılığını salınımlılığını ve periyodikliğini incelemiştir.

Teixeria (2000), yaptığı doktora tezinde; ilk bölümde  $A$  bir reel sayı ve başlangıç değerleri sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere  $x_{n+1} = \frac{\max\{x_n, A\}}{x_n x_{n-1}}$  fark

denkleminin çözümlerinin periyodikliğini incelemiştir. İkinci bölümde ise,  $x_{n+1} = \frac{a}{x_n} + \frac{b}{y_n}$ ,  $y_{n+1} = \frac{c}{x_n} + \frac{d}{y_n}$  fark denklem sisteminin çözümlerini analiz etmiştir.

Son bölümde ise,  $y_{n+1} = \frac{p + y_{n-1}}{qy_n + y_{n-1}}$  fark denkleminin çözümlerinin pozitif parametreler ve başlangıç değerleri altında asimptotik kararlılığını incelemiştir.

Papaschinopoulos ve Hatzifilippidis (2001), katsayıları pozitif sayı dizileri

olmak üzere  $x_{n+1} = \frac{\max\left\{a_n \left(\prod_{i=n-k+1}^n x_i\right), b_n\right\}}{\prod_{i=n-k}^n x_i}$  fark denkleminin pozitif çözümlerinin

sürekliliğini, sınırlılığını ve periyodikliğini incelemiştir.

Mishev ve ark. (2002),  $x_{n+1} = \max\left\{\frac{A}{x_n}, \frac{B}{x_{n-2}}\right\}$  fark denklemini incelemiştir.

$A, B$  katsayıları ile başlangıç değerleri pozitif sayılar olmak üzere denklemin çözümlerinin er geç periyodik olduğunu göstermişlerdir.

Voulov (2002), yaptığı iki çalışmadan birincisinde;  $A$  ile  $B$  pozitif reel sayılar ve  $k$  ile  $m$  pozitif tam sayılar olmak üzere  $x_{n+1} = \max\left\{\frac{A}{x_{n-k}}, \frac{B}{x_{n-m}}\right\}$  fark denkleminin çözümlerinin er geç periyodik olduğunu ispat etmiştir. İkincisinde ise

$A, B, C$  parametreleri negatif olmayan reel sayılar olmak üzere  $A + B + C > 0$  için

$$x_n = \max \left\{ \frac{A}{x_{n-1}}, \frac{B}{x_{n-3}}, \frac{C}{x_{n-5}} \right\}$$
 fark denkleminin her çözümünün er geç periyodik

olduğunu göstermiştir.

Papaschinopoulos ve ark. (2003), yaptıkları çalışmada; daha önce Feuer tarafından çalışılmış olan  $x_{n+1} = \frac{\max\{x_n, A\}}{x_n x_{n-1}}$  denkleminin çözümlerinin periyodikliği

ve sabit aralığı üzerine çalışmışlardır.

Feuer (2003), daha önce Janowski ve arkadaşlarının da incelediği  $x_{n+1} = \frac{\max\{x_n, A\}}{x_{n-1}}$  maksimumlu Lyness fark denkleminde yaptığı çalışmada  $A$

ve başlangıç değerlerini pozitif reel sayılar olduğunu kabul ederek denklemin

çözümlerinin periyodikliğini incelemiştir. Çalışmasının sonunda  $x_{n+1} = \frac{\max\{x_n, A\}}{x_n x_{n-1}}$

fark denkleminin ilişkili benzer sonuçlar ortaya koymuştur.

Papaschinopoulos ve ark. (2003), yaptıkları çalışmanın birinci bölümünde

$$x_{n+1} = \frac{\max\{\beta_n x_n, \gamma_n x_{n-1}, \alpha_n\}}{x_n x_{n-1} x_{n-2}}$$
 fark denkleminin çözümlerinin sınırlılığını ve

periyodikliğini incelemişlerdir. İkinci bölümde ise  $x_{n+1} = \frac{\max\{a_n y_n, b_n\}}{y_n x_{n-1}}$ ,

$$y_{n+1} = \frac{\max\{c_n x_n, d_n\}}{x_n y_{n-1}}$$
 fark denkleminin pozitif çözümlerinin sınırlılığını ve

periyodikliğini incelemişlerdir.

Patula ve Voulov (2004), yaptıkları çalışmada;  $A_n$  ve  $B_n$ , 3 periyotlu pozitif sayı dizileri olmak üzere  $x_{n+1} = \max\left\{\frac{A_n}{x_n}, \frac{B_n}{x_{n-2}}\right\}$  fark denkleminin çözümlerinin periyodikliğini incelemişlerdir.

Çınar ve ark. (2005),  $A, B > 0$  olmak üzere sıfırdan farklı başlangıç değerleri için  $x_{n+1} = \min\left\{\frac{A}{x_n}, \frac{B}{x_{n-2}}\right\}$  ve  $x_{n+1} = \min\left\{\frac{A}{x_n x_{n-1} \dots x_{n-k}}, \frac{B}{x_{n(k+2)} \dots x_{n-(2k+2)}}\right\}$  minimumlu fark denklemlerinin pozitif çözümlerinin periyodikliğini incelemişlerdir.

Elabbasy ve ark. (2005),  $A_n$  2 periyotlu bir pozitif sayı dizisi olmak üzere  $x_{n+1} = \max\left\{\frac{1}{x_n}, \frac{A_n}{x_{n-1}}\right\}$  fark denkleminin çözümlerinin sınırlılığını ve periyodikliğini incelemişlerdir.

Şimsek ve ark. (2006), pozitif başlangıç değerleri için  $x_{n+1} = \max\{1/x_{n-1}, x_{n-1}\}$  fark denkleminin çözümlerinin periyodikliğini incelemişlerdir.

Yang ve ark. (2006),  $A > 0$  ve  $0 < \alpha < 1$  için  $x_n = \max\left\{\frac{1}{x_{n-1}^\alpha}, \frac{A}{x_{n-2}}\right\}$  fark denkleminin pozitif çözümlerinin kararlılığını ve periyodikliğini incelemişlerdir.

Berenhaut ve ark. (2006),  $k$  ve  $m$  doğal sayıları için  $y_n = \max\left\{c, \frac{y_{n-k}}{y_{n-m}}\right\}$  fark denkleminin pozitif çözümlerinin sınırlılığını incelemişlerdir.  $c \geq 1$  için çözümlerin sınırlı olduğu ve  $c \in (0,1)$  için çözümlerin sınırlı olmadığı sonucuna ulaşmışlardır.

Stefanidou ve Papaschinopoulos (2006),  $A_0, A_1$  ve başlangıç değerleri pozitif fuzzy sayıları,  $k$  ve  $m$  parametreleri pozitif tam sayılar olmak üzere

$$x_n = \max \left\{ \frac{A_0}{x_{n-k}}, \frac{A_1}{x_{n-m}} \right\}$$

fuzzy fark denkleminin pozitif çözümlerinin periyodikliğini incelemiştir.

Yalçinkaya ve ark. (2007),  $A$  bir reel sayı ve başlangıç değerleri de sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere  $x_{n+1} = \max \left\{ \frac{1}{x_n}, Ax_{n-1} \right\}$  fark denkleminin çözümlerini

incelemiştir.

$$\text{Stevic (2008), } p \text{ ve } c \text{ pozitif sayılar olmak üzere } x_{n+1} = \max \left\{ c, \frac{x_n^p}{x_{n-1}^p} \right\}$$

fark denkleminin pozitif çözümlerinin sınırlılığını ve kararlılığını incelemiştir.

$$\text{Sun (2008), } A, B > 0 \text{ ve } 0 < \alpha, \beta < 1 \text{ olmak üzere } x_n = \max \left\{ \frac{A}{x_{n-1}^\alpha}, \frac{B}{x_{n-2}^\beta} \right\}$$

$$\text{fark denkleminin pozitif çözümlerinin } \bar{x} = \max \left\{ A^{\frac{1}{\alpha+1}}, B^{\frac{1}{\beta+1}} \right\}$$

denge noktasına yakınsadığını göstermiştir.

Stevic (2009),  $k$  pozitif bir tamsayı  $A_1, A_2, \dots, A_k > 0$  ve  $0 < \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k < 1$

$$\text{olmak üzere } x_n = \max \left\{ \frac{A_1}{x_{n-1}^{\alpha_1}}, \frac{A_2}{x_{n-2}^{\alpha_2}}, \dots, \frac{A_k}{x_{n-k}^{\alpha_k}} \right\}$$

$$\bar{x} = \max \left\{ A_1^{\frac{1}{\alpha_1+1}}, A_2^{\frac{1}{\alpha_2+1}}, \dots, A_k^{\frac{1}{\alpha_k+1}} \right\}$$

denge noktasına yakınsadığını göstermiştir.

Elsayed ve Stevic (2009), yaptıkları çalışmada;  $x_{n+1} = \max \left\{ \frac{A}{x_n}, x_{n-2} \right\}$  fark denkleminin çözümlerinin en geç 3 periyotlu olduğunu göstermişlerdir.

Gelişken (2009), yaptığı doktora tezinin bir bölümünde; Grove ve Ladas (2005) tarafından açık problem olarak verilen,  $x_{n+1} = \frac{\max\{x_n, A\}}{x_{n-1}}$  fark denkleminin çözümlerinin periyodikliğini,  $A$  pozitif bir reel sayı ve  $r_{-1}$  ile  $r_0$  da pozitif rasyonel sayılar olmak üzere,  $x_{-1} = A^{r_{-1}}$  ve  $x_0 = A^{r_0}$  başlangıç değerleri altında incelenmiştir. Diğer bir bölümünde ise  $A$  pozitif bir reel sayı ve  $\alpha$  ' da  $0 < \alpha < 1$  olacak şekilde bir reel sayı olmak üzere  $x_n = \max\left\{\frac{A}{x_{n-1}}, \frac{1}{x_{n-3}^\alpha}\right\}$  fark denkleminin pozitif çözümlerinin periyodikliği ve kararlılığı incelenmiştir.

Şimşek ve ark. (2009), yaptıkları çalışmada; pozitif başlangıç değerleri için  $x_{n+1} = \max\left\{\frac{A}{x_n}, \frac{y_n}{x_n}\right\}$ ,  $y_{n+1} = \max\left\{\frac{A}{y_n}, \frac{x_n}{y_n}\right\}$  fark denklem sisteminin çözümlerini incelemiştir.

## 2. BÖLÜM

### FARK DENKLEMLERİ İLE İLGİLİ GENEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde fark denklemleri ile ilgili genel tanım ve teoremler verilmiştir.

$x$  bağımsız değişkeninin tanımlı olduğu aralıkta,  $y(x)$  bağımlı değişkeninin değişimi  $y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x), \dots$  türevleri yardımıyla açıklanabilmektedir. Ancak  $x$ 'in kesikli değerler alması durumunda değişim türevler yardımıyla açıklanamaz. Bu bölümde  $x$ 'in tamsayı değerler aldığı durumlarda ortaya çıkan ve içinde sonlu farkların bulunduğu fark denklemleri üzerinde duracağız.

**Tanım 1.1.**  $n$  bağımsız değişken ve buna bağımlı değişken de  $y$  olmak üzere, bağımlı değişken ve bağımsız değişken ile bağımlı değişkenin

$$E(y), E^2(y), E^3(y), \dots, E^n(y), \dots$$

gibi farklarını içeren bağıntılara fark denklemi denir.

Fark denklemlerinin mertebesi, denklemdeki en büyük indis ile en küçük indisin farkına eşittir.

Birinci mertebeden bir fark denklemi;

$$a_0 y(n) + a_1 y(n+1) = f(n)$$

şeklindedir.

İkinci mertebeden bir fark denklemi;

$$a_0 y(n-1) + a_1 y(n) + a_2 y(n+1) = g(n)$$

şeklindedir.

**Teorem 1.1.**  $I$  reel sayıların herhangi bir alt aralığı olmak üzere,  $f : I^{k+1} \rightarrow I$  sürekli diferensiyellenebilen bir fonksiyon ise  $x_{-k}, x_{-(k-1)}, \dots, x_0 \in I$  başlangıç şartları için

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k}), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.1)$$

denklemini bir tek  $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$  çözümüne sahiptir.

**Tanım 1.2.** (1.1) denkleminde

$$\bar{x} = f(\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x})$$

şartını sağlayan  $\bar{x}$  noktasına (1.1) denkleminin denge noktası denir.

**Tanım 1.3.**  $\bar{x}$ , (1.1) denkleminin denge noktası ve  $x_{-k}, x_{-(k-1)}, \dots, x_0 \in I$  olmak üzere:

(i) Her  $\varepsilon > 0$  için

$$|x_0 - \bar{x}| + |x_{-1} - \bar{x}| + \dots + |x_{-k} - \bar{x}| < \delta$$

iken her  $n \geq 0$  için  $|x_n - \bar{x}| < \varepsilon$  olacak şekilde bir  $\delta > 0$  sayısı varsa  $\bar{x}$  denge noktası kararlıdır denir.

(ii)  $\bar{x}$  denge noktası kararlı ve  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}$  olacak şekilde,

$$|x_0 - \bar{x}| + |x_{-1} - \bar{x}| + \dots + |x_{-k} - \bar{x}| < \gamma$$

şartını sağlayan  $\gamma > 0$  sayısı varsa  $\bar{x}$  denge noktası lokal asimptotik kararlıdır denir.

(iii) Eğer  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}$  ise  $\bar{x}$  denge noktasına çekim noktası denir.

(iv) Eğer  $\bar{x}$  denge noktası kararlı ve çekim noktası ise,  $\bar{x}$  denge noktasına global asimptotik kararlıdır denir.

(v) Eğer  $\bar{x}$  denge noktası kararlı değil ise, kararsızdır denir.

(vi) Eğer

$$|x_0 - \bar{x}| + |x_{-1} - \bar{x}| + \dots + |x_{-k} - \bar{x}| < r$$

ve bazı  $N \geq -1$  sayıları için

$$|x_N - \bar{x}| \geq r$$

olacak şekilde bir  $r > 0$  sayısı varsa  $\bar{x}$  denge noktasına repeller denir.

**Tanım 1.4.** (1.1) denkleminde elde edilen

$$y_{n+1} = \sum_{i=0}^k \frac{\partial f}{\partial x_{n-i}}(\bar{x}, \dots, \bar{x}) y_{n-i} \quad (1.2)$$

denkleminde,  $\bar{x}$  denge noktası civarında lineer denklem denir.

(1.2) denkleminin karakteristik denklemi

$$\lambda^{k+1} - \sum_{i=0}^k \frac{\partial f}{\partial x_{n-i}}(\bar{x}, \dots, \bar{x}) \lambda^{k-i} = 0 \quad (1.3)$$

şeklindedir.

**Teorem 1.2. (Lineer Kararlılık Teoremi)**

(i) Eğer (1.3) denkleminin bütün kökleri mutlak değerce 1'den küçük ise  $\bar{x}$  denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.

(ii) Eğer (1.3) denkleminin köklerinden en az biri mutlak değerce 1'den büyük ise  $\bar{x}$  denge noktası kararsızdır.

**Tanım 1.5.**  $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$  çözümlerinin hepsi birden  $\bar{x}$  denge noktasından ne büyük ne de küçük ise bu çözümlere  $\bar{x}$  denge noktası civarında salınımlıdır denir. Aksi halde bu çözümlere salınımlı değildir denir.

**Tanım 1.6.**  $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$  dizisinde her  $n$  için  $P \leq x_n \leq Q$  olacak şekilde  $P$  ve  $Q$  pozitif sayıları varsa  $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$  dizisi sınırlıdır denir.

**Tanım 1.7.**  $\bar{x}$ , (1.1) denkleminin denge noktası olsun.  $l \geq -k$ ,  $m \leq \infty$  olmak üzere  $\{x_l, x_{l+1}, \dots, x_m\}$  dizisinin her elemanı  $\bar{x}$  denge noktasından büyük veya eşit,  $l = -k$  veya  $l > -k$  için  $x_{l-1} < \bar{x}$  ve  $m = \infty$  veya  $m < \infty$  için  $x_{m+1} < \bar{x}$  oluyorsa  $\{x_l, x_{l+1}, \dots, x_m\}$  dizisine  $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$  çözümünün bir pozitif yarı dönmesi denir. Benzer şekilde,  $l \geq -k$ ,  $m \leq \infty$  olmak üzere  $\{x_l, x_{l+1}, \dots, x_m\}$  dizisinin her elemanı  $\bar{x}$  denge noktasından küçük,  $l = -k$  veya  $l > -k$  için  $x_{l-1} \geq \bar{x}$  ve  $m = \infty$  veya  $m < \infty$  için  $x_{m+1} \geq \bar{x}$  oluyorsa  $\{x_l, x_{l+1}, \dots, x_m\}$  dizisine  $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$  çözümünün bir negatif yarı dönmesi denir.

**Tanım 1.8.** Eğer bir  $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$  dizisinde  $n \geq -k$  olmak üzere her  $n$  tamsayısı için

$$x_{n+p} = x_n$$

olacak şekilde bir  $p$  pozitif tamsayısı var ise  $\{x_n\}$  dizisi  $p$  periyotludur denir. Bu şartı sağlayan en küçük  $p$  pozitif tam sayısına ise esas periyot denir.

**Tanım 1.9.** Eğer bir  $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$  dizisinde sonlu sayıda terim hariç tutulduğunda, geriye kalan sonsuz sayıdaki terim için

$$x_{n+p} = x_n$$

ise  $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$  dizisine er geç  $p$  periyotludur denir ve  $p$  bu şartı sağlayan en küçük pozitif tamsayıdır.

### 3. BÖLÜM

$$x_{n+1} = \max \left\{ \frac{1}{y_n}, Ay_{n-1} \right\}, y_{n+1} = \max \left\{ \frac{1}{x_n}, Ax_{n-1} \right\} \text{ FARK DENKLEM SİSTEMİNİN}$$

**ÇÖZÜMLERİ**

Bu bölümde  $A < 0$  ve  $x_{-1}, x_0, y_{-1}, y_0$  başlangıç şartları sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere,

$$x_{n+1} = \max \left\{ \frac{1}{y_n}, Ay_{n-1} \right\}, y_{n+1} = \max \left\{ \frac{1}{x_n}, Ax_{n-1} \right\}, n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.1)$$

maksimumlu fark denklem sistemi tanımlanmış ve çözümleri incelenmiştir.

**Lemma 3.1.**  $\{(x_n, y_n)\}_{n=-1}^{\infty}$ , (3.1) denklem sisteminin bir çözümü olsun. Eğer

$$x_{k_0} = x_{k_0+2}, x_{k_0+1} = x_{k_0+3} \text{ ve } y_{k_0} = y_{k_0+2}, y_{k_0+1} = y_{k_0+3} \quad (3.2)$$

olacak şekilde  $k_0 \in N_0 \cup \{-1\}$  sayısı mevcut ise o zaman (3.1) denklem sisteminin  $\{(x_n, y_n)\}_{n=-1}^{\infty}$  çözümü er geç iki periyotludur.

**İspat.** (3.1) denklem sisteminin  $\{(x_n, y_n)\}_{n=-1}^{\infty}$  çözümünün er geç iki periyotlu olduğunu ispatlamak için  $m \in N$  olmak üzere

$$x_{k_0} = x_{k_0+2m}, x_{k_0+1} = x_{k_0+2m+1} \text{ ve } y_{k_0} = y_{k_0+2m}, y_{k_0+1} = y_{k_0+2m+1} \quad (3.3)$$

olduğunu göstermeliyiz. İspatı  $m$  üzerine tümevarım ile yapabiliriz.

$m=1$  için (3.3) ün doğru olduğu açıktır.

$1 \leq n \leq m_0$  olmak üzere  $m_0 \in N$  için

$$x_{k_0} = x_{k_0+2m_0}, x_{k_0+1} = x_{k_0+2m_0+1} \text{ ve } y_{k_0} = y_{k_0+2m_0}, y_{k_0+1} = y_{k_0+2m_0+1} \quad (3.4)$$

olduğunu kabul edelim ve  $m_0 + 1 \in N$  için doğru olduğunu gösterelim.  $k_0$  in tek veya çift oluşuna göre iki farklı durum söz konusudur.

$k_0$  in tek olduğunu kabul edelim. Bu durumda, (3.1), (3.2) ve (3.4) den

$$\begin{aligned} x_{k_0+2(m_0+1)} &= \max \left\{ \frac{1}{y_{k_0+2m_0+1}}, Ay_{k_0+2m_0} \right\} = \max \left\{ \frac{1}{y_{k_0+1}}, Ay_{k_0} \right\} = x_{k_0+2} = x_{k_0}, \\ y_{k_0+2(m_0+1)} &= \max \left\{ \frac{1}{x_{k_0+2m_0+1}}, Ax_{k_0+2m_0} \right\} = \max \left\{ \frac{1}{x_{k_0+1}}, Ax_{k_0} \right\} = y_{k_0+2} = y_{k_0}, \\ x_{k_0+2(m_0+1)+1} &= \max \left\{ \frac{1}{y_{k_0+2m_0+2}}, Ay_{k_0+2m_0+1} \right\} = \max \left\{ \frac{1}{y_{k_0+2}}, Ay_{k_0+1} \right\} = x_{k_0+3} = x_{k_0+1}, \\ y_{k_0+2(m_0+1)+1} &= \max \left\{ \frac{1}{x_{k_0+2m_0+2}}, Ax_{k_0+2m_0+1} \right\} = \max \left\{ \frac{1}{x_{k_0+2}}, Ax_{k_0+1} \right\} = y_{k_0+3} = y_{k_0+1}. \end{aligned}$$

olduğu görülür ki  $k_0$  in tek olduğu durum için ispat tamamlanır. ( $k_0$  in çift olduğu durum için de ispat benzer şekilde yapılabilir.)

**Sonuç 3.1.** Lemma 3.1 den dolayı (3.1) denklem sisteminin çözümlerinin er geç iki periyotlu olduğunu göstermek için

$$x_{k_0} = x_{k_0+2}, x_{k_0+1} = x_{k_0+3} \text{ ve } y_{k_0} = y_{k_0+2}, y_{k_0+1} = y_{k_0+3}$$

şartını sağlayan  $k_0 \in N_0 \cup \{-1\}$  sayısının bulunmasının yeterli olduğu açıktır.

**Teorem 3.1** (3.1) denklem sisteminin çözümleri iki periyotlu veya er geç iki periyotludur.

**İspat.(a)**  $0 < y_0, y_{-1}$  ve  $0 < x_0, x_{-1}$  olduğunu kabul edelim. O zaman, çözümler:

$$\begin{aligned} x_1 &= \max \left\{ \frac{1}{y_0}, Ay_{-1} \right\} = \frac{1}{y_0} & y_1 &= \max \left\{ \frac{1}{x_0}, Ax_{-1} \right\} = \frac{1}{x_0} \\ x_2 &= \max \left\{ \frac{1}{y_1}, Ay_0 \right\} = \frac{1}{y_1} = x_0 & y_2 &= \max \left\{ \frac{1}{x_1}, Ax_0 \right\} = \frac{1}{x_1} = y_0 \\ x_3 &= \max \left\{ \frac{1}{y_2}, Ay_1 \right\} = \frac{1}{y_2} = \frac{1}{y_0} & y_3 &= \max \left\{ \frac{1}{x_2}, Ax_1 \right\} = \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_0} \\ x_4 &= \max \left\{ \frac{1}{y_3}, Ay_2 \right\} = \frac{1}{y_3} = x_0 & y_4 &= \max \left\{ \frac{1}{x_3}, Ax_2 \right\} = \frac{1}{x_3} = y_0 \\ &\dots & & \end{aligned}$$

şeklinindedir. Buradan, (3.1) denklem sisteminin

$$(x_n, y_n) = \begin{cases} (x_n) = \left( \frac{1}{y_0}, y_0, \frac{1}{y_0}, y_0, \dots \right) \\ (y_n) = \left( \frac{1}{x_0}, x_0, \frac{1}{x_0}, x_0, \dots \right) \end{cases}$$

şeklinde ve iki periyotlu olduğu görülür.

**(b)**  $0 < y_0, x_0$  ve  $y_{-1}, x_{-1} < 0$  olduğunu kabul edelim. Bu durumda dört farklı durum söz konusu olur:

**(b1)**  $\frac{1}{y_0} > Ay_{-1}$  ve  $\frac{1}{x_0} > Ax_{-1}$  olduğunu kabul edelim. O zaman, çözümler:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \max \left\{ \frac{1}{y_0}, Ay_{-1} \right\} = \frac{1}{y_0} & y_1 &= \max \left\{ \frac{1}{x_0}, Ax_{-1} \right\} = \frac{1}{x_0} \\
x_2 &= \max \left\{ \frac{1}{y_1}, Ay_0 \right\} = \frac{1}{y_1} = x_0 & y_2 &= \max \left\{ \frac{1}{x_1}, Ax_0 \right\} = \frac{1}{x_1} = y_0 \\
x_3 &= \max \left\{ \frac{1}{y_2}, Ay_1 \right\} = \frac{1}{y_2} = \frac{1}{y_0} & y_3 &= \max \left\{ \frac{1}{x_2}, Ax_1 \right\} = \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_0} \\
x_4 &= \max \left\{ \frac{1}{y_3}, Ay_2 \right\} = \frac{1}{y_3} = x_0 & y_4 &= \max \left\{ \frac{1}{x_3}, Ax_2 \right\} = \frac{1}{x_3} = y_0 \\
&\dots & &
\end{aligned}$$

şeklindedir. Buradan, (3.1) denklem sisteminin çözümlerinin

$$(x_n, y_n) = \begin{cases} (x_n) = \left( \frac{1}{y_0}, x_0, \frac{1}{y_0}, x_0, \dots \right) \\ (y_n) = \left( \frac{1}{x_0}, y_0, \frac{1}{x_0}, y_0, \dots \right) \end{cases}$$

şeklinde ve iki periyotlu olduğu görülür.

**(b2)**  $Ay_{-1} > \frac{1}{y_0}$  ve  $\frac{1}{x_0} > Ax_{-1}$  olduğunu kabul edelim. O zaman, çözümler:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \max \left\{ \frac{1}{y_0}, Ay_{-1} \right\} = Ay_{-1} & y_1 &= \max \left\{ \frac{1}{x_0}, Ax_{-1} \right\} = \frac{1}{x_0} \\
x_2 &= \max \left\{ \frac{1}{y_1}, Ay_0 \right\} = \frac{1}{y_1} = x_0 & y_2 &= \max \left\{ \frac{1}{x_1}, Ax_0 \right\} = \frac{1}{x_1} = \frac{1}{Ay_{-1}} \\
x_3 &= \max \left\{ \frac{1}{y_2}, Ay_1 \right\} = \frac{1}{y_2} = Ay_{-1} & y_3 &= \max \left\{ \frac{1}{x_2}, Ax_1 \right\} = \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_0} \\
x_4 &= \max \left\{ \frac{1}{y_3}, Ay_2 \right\} = \frac{1}{y_3} = x_0 & y_4 &= \max \left\{ \frac{1}{x_3}, Ax_2 \right\} = \frac{1}{x_3} = \frac{1}{Ay_{-1}} \\
&\dots & &
\end{aligned}$$

şeklindedir. Buradan, (3.1) denklem sisteminin çözümlerinin

$$(x_n, y_n) = \begin{cases} (x_n) = (Ay_{-1}, x_0, Ay_{-1}, x_0, \dots) \\ (y_n) = \left(\frac{1}{x_0}, \frac{1}{Ay_{-1}}, \frac{1}{x_0}, \frac{1}{Ay_{-1}}, \dots\right) \end{cases}$$

şeklinde ve iki periyotlu olduğu görülür.

**(b3)**  $\frac{1}{y_0} > Ay_{-1}$  ve  $Ax_{-1} > \frac{1}{x_0}$  olduğunu kabul edelim. O zaman, çözümler:

$$\begin{aligned} x_1 &= \max \left\{ \frac{1}{y_0}, Ay_{-1} \right\} = \frac{1}{y_0} & y_1 &= \max \left\{ \frac{1}{x_0}, Ax_{-1} \right\} = Ax_{-1} \\ x_2 &= \max \left\{ \frac{1}{y_1}, Ay_0 \right\} = \frac{1}{y_1} = \frac{1}{Ax_{-1}} & y_2 &= \max \left\{ \frac{1}{x_1}, Ax_0 \right\} = \frac{1}{x_1} = y_0 \\ x_3 &= \max \left\{ \frac{1}{y_2}, Ay_1 \right\} = \frac{1}{y_2} = \frac{1}{y_0} & y_3 &= \max \left\{ \frac{1}{x_2}, Ax_1 \right\} = \frac{1}{x_2} = Ax_{-1} \\ x_4 &= \max \left\{ \frac{1}{y_3}, Ay_2 \right\} = \frac{1}{y_3} = \frac{1}{Ax_{-1}} & y_4 &= \max \left\{ \frac{1}{x_3}, Ax_2 \right\} = \frac{1}{x_3} = y_0 \\ &\dots & & \end{aligned}$$

şeklindedir. Buradan, (3.1) denklem sisteminin çözümlerinin

$$(x_n, y_n) = \begin{cases} (x_n) = \left(\frac{1}{y_0}, \frac{1}{Ax_{-1}}, \frac{1}{y_0}, \frac{1}{Ax_{-1}}, \dots\right) \\ (y_n) = (Ax_{-1}, y_0, Ax_{-1}, y_0, \dots) \end{cases}$$

şeklinde ve iki periyotlu olduğu görülür.

**(b4)**  $Ay_{-1} > \frac{1}{y_0}$  ve  $Ax_{-1} > \frac{1}{x_0}$  olduğunu kabul edelim. O zaman, çözümler:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \max \left\{ \frac{1}{y_0}, Ay_{-1} \right\} = Ay_{-1} & y_1 &= \max \left\{ \frac{1}{x_0}, Ax_{-1} \right\} = Ax_{-1} \\
x_2 &= \max \left\{ \frac{1}{y_1}, Ay_0 \right\} = \frac{1}{y_1} = \frac{1}{Ax_{-1}} & y_2 &= \max \left\{ \frac{1}{x_1}, Ax_0 \right\} = \frac{1}{x_1} = \frac{1}{Ay_{-1}} \\
x_3 &= \max \left\{ \frac{1}{y_2}, Ay_1 \right\} = \frac{1}{y_2} = Ay_{-1} & y_3 &= \max \left\{ \frac{1}{x_2}, Ax_1 \right\} = \frac{1}{x_2} = Ax_{-1} \\
x_4 &= \max \left\{ \frac{1}{y_3}, Ay_2 \right\} = \frac{1}{y_3} = \frac{1}{Ax_{-1}} & y_4 &= \max \left\{ \frac{1}{x_3}, Ax_2 \right\} = \frac{1}{x_3} = \frac{1}{Ay_{-1}} \\
&\dots
\end{aligned}$$

şeklindedir. Buradan, (3.1) denklem sisteminin çözümlerinin

$$(x_n, y_n) = \begin{cases} (x_n) = (Ay_{-1}, \frac{1}{Ax_{-1}}, Ay_{-1}, \frac{1}{Ax_{-1}}, \dots) \\ (y_n) = (Ax_{-1}, \frac{1}{Ay_{-1}}, Ax_{-1}, \frac{1}{Ay_{-1}}, \dots) \end{cases}$$

şeklinde ve iki periyotlu olduğu görülür.

**(c)**  $0 < y_0, y_{-1}$  ve  $x_0, x_{-1} < 0$  olsun. Bu durumda iki farklı durum söz konusu olur:

**(c1)**  $y_0 > Ax_0$  olduğunu kabul edelim. O zaman, çözümler:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \max \left\{ \frac{1}{y_0}, Ay_{-1} \right\} = \frac{1}{y_0} & y_1 &= \max \left\{ \frac{1}{x_0}, Ax_{-1} \right\} = Ax_{-1} \\
x_2 &= \max \left\{ \frac{1}{y_1}, Ay_0 \right\} = \frac{1}{y_1} = \frac{1}{Ax_{-1}} & y_2 &= \max \left\{ \frac{1}{x_1}, Ax_0 \right\} = \frac{1}{x_1} = y_0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_3 &= \max \left\{ \frac{1}{y_2}, Ay_1 \right\} = \frac{1}{y_2} = \frac{1}{y_0} & y_3 &= \max \left\{ \frac{1}{x_2}, Ax_1 \right\} = \frac{1}{x_2} = Ax_{-1} \\
x_4 &= \max \left\{ \frac{1}{y_3}, Ay_2 \right\} = \frac{1}{y_3} = \frac{1}{Ax_{-1}} & y_4 &= \max \left\{ \frac{1}{x_3}, Ax_2 \right\} = \frac{1}{x_3} = y_0 \\
&\dots
\end{aligned}$$

şeklindedir. Buradan, (3.1) denklem sisteminin çözümlerinin

$$(x_n, y_n) = \begin{cases} (x_n) = \left( \frac{1}{y_0}, \frac{1}{Ax_{-1}}, \frac{1}{y_0}, \frac{1}{Ax_{-1}}, \dots \right) \\ (y_n) = (Ax_{-1}, y_0, Ax_{-1}, y_0, \dots) \end{cases}$$

şeklinde ve iki periyotlu olduğu görülür.

**(c2)**  $Ax_0 > y_0$  olduğunu kabul edelim. O zaman, çözümler:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \max \left\{ \frac{1}{y_0}, Ay_{-1} \right\} = \frac{1}{y_0} & y_1 &= \max \left\{ \frac{1}{x_0}, Ax_{-1} \right\} = Ax_{-1} \\
x_2 &= \max \left\{ \frac{1}{y_1}, Ay_0 \right\} = \frac{1}{y_1} = \frac{1}{Ax_{-1}} & y_2 &= \max \left\{ \frac{1}{x_1}, Ax_0 \right\} = \frac{1}{x_1} = Ax_0 \\
x_3 &= \max \left\{ \frac{1}{y_2}, Ay_1 \right\} = \frac{1}{y_2} = \frac{1}{Ax_0} & y_3 &= \max \left\{ \frac{1}{x_2}, Ax_1 \right\} = \frac{1}{x_2} = Ax_{-1} \\
x_4 &= \max \left\{ \frac{1}{y_3}, Ay_2 \right\} = \frac{1}{y_3} = \frac{1}{Ax_{-1}} & y_4 &= \max \left\{ \frac{1}{x_3}, Ax_2 \right\} = \frac{1}{x_3} = Ax_0 \\
x_5 &= \max \left\{ \frac{1}{y_4}, Ay_3 \right\} = \frac{1}{y_4} = \frac{1}{Ax_0} & y_5 &= \max \left\{ \frac{1}{x_4}, Ax_3 \right\} = \frac{1}{x_4} = Ax_{-1} \\
&\dots
\end{aligned}$$

şeklindedir. Buradan, (3.1) denklem sisteminin çözümlerinin

$$(x_n, y_n) = \begin{cases} (x_n) = \left(\frac{1}{y_0}, \frac{1}{Ax_{-1}}, \frac{1}{Ax_0}, \frac{1}{Ax_{-1}}, \frac{1}{Ax_0}, \dots\right) \\ (y_n) = (Ax_{-1}, Ax_0, Ax_{-1}, Ax_0, Ax_{-1}, \dots) \end{cases}$$

şeklinde ve er geç iki periyotlu olduğu görülür.

**(d)**  $0 < y_0, x_{-1}$  ve  $x_0, y_{-1} < 0$  olsun. Bu durumda kırk iki farklı durum söz konusu olur:

**(d1)**  $\frac{1}{y_0} > Ay_{-1}, \frac{1}{x_0} > Ax_{-1}, x_0 > Ay_0, y_0 > Ax_0, A \in [-1, 0)$  olduğunu kabul

edelim. O zaman, çözümler:

$$x_1 = \max \left\{ \frac{1}{y_0}, Ay_{-1} \right\} = \frac{1}{y_0}$$

$$y_1 = \max \left\{ \frac{1}{x_0}, Ax_{-1} \right\} = \frac{1}{x_0}$$

$$x_2 = \max \left\{ \frac{1}{y_1}, Ay_0 \right\} = \frac{1}{y_1} = x_0$$

$$y_2 = \max \left\{ \frac{1}{x_1}, Ax_0 \right\} = \frac{1}{x_1} = y_0$$

$$x_3 = \max \left\{ \frac{1}{y_2}, Ay_1 \right\} = \frac{A}{x_0}$$

$$y_3 = \max \left\{ \frac{1}{x_2}, Ax_1 \right\} = \frac{A}{y_0}$$

$$x_4 = \max \left\{ \frac{1}{y_3}, Ay_2 \right\} = Ay_0$$

$$y_4 = \max \left\{ \frac{1}{x_3}, Ax_2 \right\} = \frac{x_0}{A}$$

$$x_5 = \max \left\{ \frac{1}{y_4}, Ay_3 \right\} = \frac{A}{x_0}$$

$$y_5 = \max \left\{ \frac{1}{x_4}, Ax_3 \right\} = \frac{A^2}{x_0}$$

$$x_6 = \max \left\{ \frac{1}{y_5}, Ay_4 \right\} = x_0$$

$$y_6 = \max \left\{ \frac{1}{x_5}, Ax_4 \right\} = \frac{x_0}{A}$$

$$x_7 = \max \left\{ \frac{1}{y_6}, Ay_5 \right\} = \frac{A}{x_0}$$

$$y_7 = \max \left\{ \frac{1}{x_6}, Ax_5 \right\} = \frac{A^2}{x_0}$$

$$x_8 = \max \left\{ \frac{1}{y_7}, Ay_6 \right\} = x_0$$

$$y_8 = \max \left\{ \frac{1}{x_7}, Ax_6 \right\} = \frac{x_0}{A}$$

...

şeklindedir. Buradan, (3.1) denklem sisteminin çözümlerinin

$$(x_n, y_n) = \begin{cases} (x_n) = \left( \frac{1}{y_0}, x_0, \frac{A}{x_0}, Ay_0, \frac{A}{x_0}, x_0, \frac{A}{x_0}, x_0, \dots \right) \\ (y_n) = \left( \frac{1}{x_0}, y_0, \frac{A}{y_0}, \frac{x_0}{A}, \frac{A^2}{y_0}, \frac{x_0}{A}, \frac{A^2}{y_0}, \frac{x_0}{A}, \dots \right) \end{cases}$$

şeklinde ve er geç iki periyotlu olduğu görülür.

$$(d2) \quad \frac{1}{y_0} > Ay_{-1}, \frac{1}{x_0} > Ax_{-1}, x_0 > Ay_0, y_0 > Ax_0, y_0 > A^3 x_0, A \in (-\infty, -1) \text{ olduğunu}$$

kabul edelim.  $y_0 < A^5 x_0$  olsun ( $A \in (-\infty, -1)$  için  $\lim_{n \rightarrow \infty} A^{2n+1} x_0 = +\infty$  olacağından

belirli değerden sonra  $A^{2n+1} x_0 > y_0$  olacaktır). O zaman, çözümler:

$$\begin{aligned} x_1 &= \max \left\{ \frac{1}{y_0}, Ay_{-1} \right\} = \frac{1}{y_0} & y_1 &= \max \left\{ \frac{1}{x_0}, Ax_{-1} \right\} = \frac{1}{x_0} \\ x_2 &= \max \left\{ \frac{1}{y_1}, Ay_0 \right\} = x_0 & y_2 &= \max \left\{ \frac{1}{x_1}, Ax_0 \right\} = y_0 \\ x_3 &= \max \left\{ \frac{1}{y_2}, Ay_1 \right\} = \frac{A}{x_0} & y_3 &= \max \left\{ \frac{1}{x_2}, Ax_1 \right\} = \frac{A}{y_0} \\ x_4 &= \max \left\{ \frac{1}{y_3}, Ay_2 \right\} = \frac{y_0}{A} & y_4 &= \max \left\{ \frac{1}{x_3}, Ax_2 \right\} = Ax_0 \\ x_5 &= \max \left\{ \frac{1}{y_4}, Ay_3 \right\} = \frac{1}{Ax_0} & y_5 &= \max \left\{ \frac{1}{x_4}, Ax_3 \right\} = \frac{A}{y_0} \\ x_6 &= \max \left\{ \frac{1}{y_5}, Ay_4 \right\} = A^2 x_0 & y_6 &= \max \left\{ \frac{1}{x_5}, Ax_4 \right\} = y_0 \\ x_7 &= \max \left\{ \frac{1}{y_6}, Ay_5 \right\} = \frac{A^2}{y_0} & y_7 &= \max \left\{ \frac{1}{x_6}, Ax_5 \right\} = \frac{1}{A^2 x_0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_8 &= \max \left\{ \frac{1}{y_7}, Ay_6 \right\} = A^2 x_0 & y_8 &= \max \left\{ \frac{1}{x_7}, Ax_6 \right\} = A^3 x_0 \\
x_9 &= \max \left\{ \frac{1}{y_8}, Ay_7 \right\} = \frac{1}{Ax_0} & y_9 &= \max \left\{ \frac{1}{x_8}, Ax_7 \right\} = \frac{1}{A^2 x_0} \\
x_{10} &= \max \left\{ \frac{1}{y_9}, Ay_8 \right\} = A^2 x_0 & y_{10} &= \max \left\{ \frac{1}{x_9}, Ax_8 \right\} = A^3 x_0 \\
x_{11} &= \max \left\{ \frac{1}{y_{10}}, Ay_9 \right\} = \frac{1}{Ax_0} & y_{11} &= \max \left\{ \frac{1}{x_{10}}, Ax_9 \right\} = \frac{1}{A^2 x_0} \\
&\dots & &
\end{aligned}$$

şeklindedir. Buradan, (3.1) denklem sisteminin çözümlerinin

$$(x_n, y_n) = \begin{cases} (x_n) = \left( \frac{1}{y_0}, x_0, \frac{A}{x_0}, \frac{y_0}{A}, \frac{1}{Ax_0}, A^2 x_0, \frac{A^2}{y_0}, A^2 x_0, \frac{1}{Ax_0}, A^2 x_0, \frac{1}{Ax_0}, \dots \right) \\ (y_n) = \left( \frac{1}{x_0}, y_0, \frac{A}{y_0}, Ax_0, \frac{A}{y_0}, y_0, \frac{1}{A^2 x_0}, A^3 x_0, \frac{1}{A^2 x_0}, A^3 x_0, \dots \right) \end{cases}$$

şeklinde ve er geç iki periyotlu olduğu görülür.

**(d3)**  $\frac{1}{y_0} > Ay_{-1}, \frac{1}{x_0} > Ax_{-1}, Ay_0 > x_0, Ax_0 > y_0, A \in (-\infty, -1)$  olduğunu kabul

edelim.  $x_0 > A^3 y_0$  olsun ( $A \in (-\infty, -1)$  için  $\lim_{n \rightarrow \infty} A^{2n+1} y_0 = -\infty$  olacağından belirli

değerden sonra  $x_0 > A^{2n+1} y_0$  olacaktır). O zaman, çözümler:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \max \left\{ \frac{1}{y_0}, Ay_{-1} \right\} = \frac{1}{y_0} & y_1 &= \max \left\{ \frac{1}{x_0}, Ax_{-1} \right\} = \frac{1}{x_0} \\
x_2 &= \max \left\{ \frac{1}{y_1}, Ay_0 \right\} = Ay_0 & y_2 &= \max \left\{ \frac{1}{x_1}, Ax_0 \right\} = Ax_0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_3 &= \max \left\{ \frac{1}{y_2}, Ay_1 \right\} = \frac{A}{x_0} & y_3 &= \max \left\{ \frac{1}{x_2}, Ax_1 \right\} = \frac{1}{Ay_0} \\
x_4 &= \max \left\{ \frac{1}{y_3}, Ay_2 \right\} = Ay_0 & y_4 &= \max \left\{ \frac{1}{x_3}, Ax_2 \right\} = A^2 y_0 \\
x_5 &= \max \left\{ \frac{1}{y_4}, Ay_3 \right\} = \frac{1}{y_0} & y_5 &= \max \left\{ \frac{1}{x_4}, Ax_3 \right\} = \frac{1}{Ay_0} \\
x_6 &= \max \left\{ \frac{1}{y_5}, Ay_4 \right\} = Ay_0 & y_6 &= \max \left\{ \frac{1}{x_5}, Ax_4 \right\} = A^2 y_0 \\
x_7 &= \max \left\{ \frac{1}{y_6}, Ay_5 \right\} = \frac{1}{y_0} & y_7 &= \max \left\{ \frac{1}{x_6}, Ax_5 \right\} = \frac{1}{Ay_0} \\
&\dots & &
\end{aligned}$$

şeklindedir. Buradan, (3.1) denklem sisteminin çözümlerinin

$$(x_n, y_n) = \begin{cases} (x_n) = \left( \frac{1}{y_0}, Ay_0, \frac{A}{x_0}, Ay_0, \frac{1}{y_0}, Ay_0, \frac{1}{y_0}, \dots \right) \\ (y_n) = \left( \frac{1}{x_0}, Ax_0, \frac{1}{Ay_0}, A^2 y_0, \frac{1}{Ay_0}, A^2 y_0, \frac{1}{Ay_0}, \dots \right) \end{cases}$$

şeklinde ve er geç iki periyotlu olduğu görülür.

$$\text{(d4)} \quad \frac{1}{y_0} > Ay_{-1}, \frac{1}{x_0} > Ax_{-1}, Ay_0 > x_0, y_0 > Ax_0 \quad \text{olduğunu kabul edelim}$$

( $A \in [-1, 0)$  olur). O zaman, çözümler:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \max \left\{ \frac{1}{y_0}, Ay_{-1} \right\} = \frac{1}{y_0} & y_1 &= \max \left\{ \frac{1}{x_0}, Ax_{-1} \right\} = \frac{1}{x_0} \\
x_2 &= \max \left\{ \frac{1}{y_1}, Ay_0 \right\} = Ay_0 & y_2 &= \max \left\{ \frac{1}{x_1}, Ax_0 \right\} = y_0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_3 &= \max \left\{ \frac{1}{y_2}, Ay_1 \right\} = \frac{1}{y_0} & y_3 &= \max \left\{ \frac{1}{x_2}, Ax_1 \right\} = \frac{A}{y_0} \\
x_4 &= \max \left\{ \frac{1}{y_3}, Ay_2 \right\} = Ay_0 & y_4 &= \max \left\{ \frac{1}{x_3}, Ax_2 \right\} = y_0 \\
x_5 &= \max \left\{ \frac{1}{y_4}, Ay_3 \right\} = \frac{1}{y_0} & y_5 &= \max \left\{ \frac{1}{x_4}, Ax_3 \right\} = \frac{A}{y_0} \\
x_6 &= \max \left\{ \frac{1}{y_5}, Ay_4 \right\} = Ay_0 & y_6 &= \max \left\{ \frac{1}{x_5}, Ax_4 \right\} = y_0 \\
&\dots & &
\end{aligned}$$

şeklindedir. Buradan, (3.1) denklem sisteminin çözümlerinin

$$(x_n, y_n) = \begin{cases} (x_n) = \left( \frac{1}{y_0}, Ay_0, \frac{1}{y_0}, Ay_0, \frac{1}{y_0}, Ay_0, \dots \right) \\ (y_n) = \left( \frac{1}{x_0}, y_0, \frac{A}{y_0}, y_0, \frac{A}{y_0}, y_0, \dots \right) \end{cases}$$

şeklinde ve er geç iki periyotlu olduğu görülür.

$$\text{(d5)} \quad \frac{1}{y_0} > Ay_{-1}, \frac{1}{x_0} > Ax_{-1}, x_0 > Ay_0, Ax_0 > y_0 \quad \text{olduğunu kabul edelim}$$

( $A \in (-1, -\infty)$  olur). O zaman, çözümler:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \max \left\{ \frac{1}{y_0}, Ay_{-1} \right\} = \frac{1}{y_0} & y_1 &= \max \left\{ \frac{1}{x_0}, Ax_{-1} \right\} = \frac{1}{x_0} \\
x_2 &= \max \left\{ \frac{1}{y_1}, Ay_0 \right\} = x_0 & y_2 &= \max \left\{ \frac{1}{x_1}, Ax_0 \right\} = Ax_0 \\
x_3 &= \max \left\{ \frac{1}{y_2}, Ay_1 \right\} = \frac{A}{x_0} & y_3 &= \max \left\{ \frac{1}{x_2}, Ax_1 \right\} = \frac{1}{x_0} \\
x_4 &= \max \left\{ \frac{1}{y_3}, Ay_2 \right\} = x_0 & y_4 &= \max \left\{ \frac{1}{x_3}, Ax_2 \right\} = Ax_0
\end{aligned}$$

$$x_5 = \max \left\{ \frac{1}{y_4}, Ay_3 \right\} = \frac{A}{x_0} \qquad y_5 = \max \left\{ \frac{1}{x_4}, Ax_3 \right\} = \frac{1}{x_0}$$

...

şeklindedir. Buradan, (3.1) denklem sisteminin çözümlerinin

$$(x_n, y_n) = \begin{cases} (x_n) = \left( \frac{1}{y_0}, x_0, \frac{A}{x_0}, x_0, \frac{A}{x_0}, \dots \right) \\ (y_n) = \left( \frac{1}{x_0}, Ax_0, \frac{1}{x_0}, Ax_0, \frac{1}{x_0}, \dots \right) \end{cases}$$

şeklinde ve er geç iki periyotlu olduğu görülür.

$$(d6) \quad \frac{1}{y_0} > Ay_{-1}, \frac{1}{x_0} < Ax_{-1}, x_{-1}y_0 > \frac{1}{A^2}, y_0 > Ax_0 \quad \text{olduğunu kabul edelim}$$

( $A \in [-1, 0)$  olur).  $x_{-1}y_0 < \frac{1}{A^4}$  olsun ( $A \in [-1, 0)$  için  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{A^{2n}} = +\infty$  olacağından

belirli değerden sonra  $x_{-1}y_0 < \frac{1}{A^{2n}}$  olacaktır). O zaman, çözümler:

$$\begin{aligned} x_1 &= \max \left\{ \frac{1}{y_0}, Ay_{-1} \right\} = \frac{1}{y_0} & y_1 &= \max \left\{ \frac{1}{x_0}, Ax_{-1} \right\} = Ax_{-1} \\ x_2 &= \max \left\{ \frac{1}{y_1}, Ay_0 \right\} = \frac{1}{Ax_{-1}} & y_2 &= \max \left\{ \frac{1}{x_1}, Ax_0 \right\} = y_0 \\ x_3 &= \max \left\{ \frac{1}{y_2}, Ay_1 \right\} = A^2 x_{-1} & y_3 &= \max \left\{ \frac{1}{x_2}, Ax_1 \right\} = \frac{A}{y_0} \\ x_4 &= \max \left\{ \frac{1}{y_3}, Ay_2 \right\} = Ay_0 & y_4 &= \max \left\{ \frac{1}{x_3}, Ax_2 \right\} = \frac{1}{A^2 x_{-1}} \\ x_5 &= \max \left\{ \frac{1}{y_4}, Ay_3 \right\} = A^2 x_{-1} & y_5 &= \max \left\{ \frac{1}{x_4}, Ax_3 \right\} = \frac{1}{Ay_0} \\ x_6 &= \max \left\{ \frac{1}{y_5}, Ay_4 \right\} = \frac{1}{Ax_{-1}} & y_6 &= \max \left\{ \frac{1}{x_5}, Ax_4 \right\} = \frac{1}{A^2 x_{-1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_7 &= \max \left\{ \frac{1}{y_6}, Ay_5 \right\} = A^2 x_{-1} & y_7 &= \max \left\{ \frac{1}{x_6}, Ax_5 \right\} = A^3 x_{-1} \\
x_8 &= \max \left\{ \frac{1}{y_7}, Ay_6 \right\} = \frac{1}{Ax_{-1}} & y_8 &= \max \left\{ \frac{1}{x_7}, Ax_6 \right\} = \frac{1}{A^2 x_{-1}} \\
x_9 &= \max \left\{ \frac{1}{y_8}, Ay_7 \right\} = A^2 x_{-1} & y_9 &= \max \left\{ \frac{1}{x_8}, Ax_7 \right\} = A^3 x_{-1} \\
&\dots
\end{aligned}$$

şeklindedir. Buradan, (3.1) denklem sisteminin çözümlerinin

$$(x_n, y_n) = \begin{cases} (x_n) = \left( \frac{1}{y_0}, \frac{1}{Ax_{-1}}, A^2 x_{-1}, Ay_0, A^2 x_{-1}, \frac{1}{Ax_{-1}}, A^2 x_{-1}, \frac{1}{Ax_{-1}}, A^2 x_{-1}, \dots \right) \\ (y_n) = \left( Ax_{-1}, y_0, \frac{A}{y_0}, \frac{1}{A^2 x_{-1}}, \frac{1}{Ay_0}, \frac{1}{A^2 x_{-1}}, A^3 x_{-1}, \frac{1}{A^2 x_{-1}}, A^3 x_{-1}, \dots \right) \end{cases}$$

şeklinde ve er geç iki periyotlu olduğu görülür.

$$\text{(d7)} \quad \frac{1}{y_0} > Ay_{-1}, Ax_{-1} > \frac{1}{x_0}, x_{-1}y_0 > \frac{1}{A^2}, Ax_0 > y_0, A \in [-1, 0) \text{ olduğunu kabul}$$

edelim. O zaman, çözümler:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \max \left\{ \frac{1}{y_0}, Ay_{-1} \right\} = \frac{1}{y_0} & y_1 &= \max \left\{ \frac{1}{x_0}, Ax_{-1} \right\} = Ax_{-1} \\
x_2 &= \max \left\{ \frac{1}{y_1}, Ay_0 \right\} = \frac{1}{Ax_{-1}} & y_2 &= \max \left\{ \frac{1}{x_1}, Ax_0 \right\} = Ax_0 \\
x_3 &= \max \left\{ \frac{1}{y_2}, Ay_1 \right\} = A^2 x_{-1} & y_3 &= \max \left\{ \frac{1}{x_2}, Ax_1 \right\} = Ax_{-1} \\
x_4 &= \max \left\{ \frac{1}{y_3}, Ay_2 \right\} = \frac{1}{Ax_{-1}} & y_4 &= \max \left\{ \frac{1}{x_3}, Ax_2 \right\} = \frac{1}{A^2 x_{-1}} \\
x_5 &= \max \left\{ \frac{1}{y_4}, Ay_3 \right\} = A^2 x_{-1} & y_5 &= \max \left\{ \frac{1}{x_4}, Ax_3 \right\} = A^3 x_{-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_6 &= \max \left\{ \frac{1}{y_5}, Ay_4 \right\} = \frac{1}{Ax_{-1}} & y_6 &= \max \left\{ \frac{1}{x_5}, Ax_4 \right\} = \frac{1}{A^2 x_{-1}} \\
x_7 &= \max \left\{ \frac{1}{y_6}, Ay_5 \right\} = A^2 x_{-1} & y_7 &= \max \left\{ \frac{1}{x_6}, Ax_5 \right\} = A^3 x_{-1} \\
&\dots
\end{aligned}$$

şeklindedir. Buradan, (3.1) denklem sisteminin çözümlerinin

$$(x_n, y_n) = \begin{cases} (x_n) = \left( \frac{1}{y_0}, \frac{1}{Ax_{-1}}, A^2 x_{-1}, \frac{1}{Ax_{-1}}, A^2 x_{-1}, \frac{1}{Ax_{-1}}, A^2 x_{-1}, \dots \right) \\ (y_n) = \left( Ax_{-1}, Ax_0, Ax_{-1}, \frac{1}{A^2 x_{-1}}, A^3 x_{-1}, \frac{1}{A^2 x_{-1}}, A^3 x_{-1}, \dots \right) \end{cases}$$

şeklinde ve er geç iki periyotlu olduğu görülür.

$$\text{(d8)} \quad \frac{1}{y_0} > Ay_{-1}, \frac{1}{x_0} < Ax_{-1}, x_{-1}y_0 > \frac{1}{A^2}, y_0 < Ax_0, A \in (-\infty, -1) \text{ olduğunu kabul}$$

edelim. O zaman, çözümler:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \max \left\{ \frac{1}{y_0}, Ay_{-1} \right\} = \frac{1}{y_0} & y_1 &= \max \left\{ \frac{1}{x_0}, Ax_{-1} \right\} = Ax_{-1} \\
x_2 &= \max \left\{ \frac{1}{y_1}, Ay_0 \right\} = \frac{1}{Ax_{-1}} & y_2 &= \max \left\{ \frac{1}{x_1}, Ax_0 \right\} = Ax_0 \\
x_3 &= \max \left\{ \frac{1}{y_2}, Ay_1 \right\} = A^2 x_{-1} & y_3 &= \max \left\{ \frac{1}{x_2}, Ax_1 \right\} = Ax_{-1} \\
x_4 &= \max \left\{ \frac{1}{y_3}, Ay_2 \right\} = \frac{1}{Ax_{-1}} & y_4 &= \max \left\{ \frac{1}{x_3}, Ax_2 \right\} = \frac{1}{x_{-1}} \\
x_5 &= \max \left\{ \frac{1}{y_4}, Ay_3 \right\} = A^2 x_{-1} & y_5 &= \max \left\{ \frac{1}{x_4}, Ax_3 \right\} = Ax_{-1} \\
x_6 &= \max \left\{ \frac{1}{y_5}, Ay_4 \right\} = \frac{1}{Ax_{-1}} & y_6 &= \max \left\{ \frac{1}{x_5}, Ax_4 \right\} = \frac{1}{x_{-1}}
\end{aligned}$$

$$x_7 = \max \left\{ \frac{1}{y_6}, Ay_5 \right\} = A^2 x_{-1} \qquad y_7 = \max \left\{ \frac{1}{x_6}, Ax_5 \right\} = Ax_{-1}$$

...

şeklindedir. Buradan, (3.1) denklem sisteminin çözümlerinin

$$(x_n, y_n) = \begin{cases} (x_n) = \left( \frac{1}{y_0}, \frac{1}{Ax_{-1}}, A^2 x_{-1}, \frac{1}{Ax_{-1}}, A^2 x_{-1}, \frac{1}{Ax_{-1}}, A^2 x_{-1}, \dots \right) \\ (y_n) = \left( Ax_{-1}, Ax_0, Ax_{-1}, \frac{1}{x_{-1}}, Ax_{-1}, \frac{1}{x_{-1}}, Ax_{-1}, \dots \right) \end{cases}$$

şeklinde ve er geç iki periyotlu olduğu görülür.

$$(d9) \quad \frac{1}{y_0} > Ay_{-1}, \frac{1}{x_0} < Ax_{-1}, x_{-1}y_0 < \frac{1}{A^2}, y_0 > Ax_0, A \in [-1, 0) \text{ olduğunu kabul}$$

edelim. O zaman, çözümler:

$$x_1 = \max \left\{ \frac{1}{y_0}, Ay_{-1} \right\} = \frac{1}{y_0} \qquad y_1 = \max \left\{ \frac{1}{x_0}, Ax_{-1} \right\} = Ax_{-1}$$

$$x_2 = \max \left\{ \frac{1}{y_1}, Ay_0 \right\} = Ay_0 \qquad y_2 = \max \left\{ \frac{1}{x_1}, Ax_0 \right\} = y_0$$

$$x_3 = \max \left\{ \frac{1}{y_2}, Ay_1 \right\} = \frac{1}{y_0} \qquad y_3 = \max \left\{ \frac{1}{x_2}, Ax_1 \right\} = \frac{A}{y_0}$$

$$x_4 = \max \left\{ \frac{1}{y_3}, Ay_2 \right\} = Ay_0 \qquad y_4 = \max \left\{ \frac{1}{x_3}, Ax_2 \right\} = y_0$$

$$x_5 = \max \left\{ \frac{1}{y_4}, Ay_3 \right\} = \frac{1}{y_0} \qquad y_5 = \max \left\{ \frac{1}{x_4}, Ax_3 \right\} = \frac{A}{y_0}$$

...

şeklindedir. Buradan, (3.1) denklem sisteminin çözümlerinin

$$(x_n, y_n) = \begin{cases} (x_n) = \left(\frac{1}{y_0}, Ay_0, \frac{1}{y_0}, Ay_0, \frac{1}{y_0}, \dots\right) \\ (y_n) = \left(Ax_{-1}, y_0, \frac{A}{y_0}, y_0, \frac{A}{y_0}, \dots\right) \end{cases}$$

şeklinde ve er geç iki periyotlu olduğu görülür.

$$(d10) \frac{1}{y_0} > Ay_{-1}, \frac{1}{x_0} < Ax_{-1}, x_{-1}y_0 < \frac{1}{A^2}, y_0 > Ax_0, A \in (-\infty, -1) \text{ olduğunu}$$

kabul edelim. O zaman, çözümler:

$$\begin{aligned} x_1 &= \max \left\{ \frac{1}{y_0}, Ay_{-1} \right\} = \frac{1}{y_0} & y_1 &= \max \left\{ \frac{1}{x_0}, Ax_{-1} \right\} = Ax_{-1} \\ x_2 &= \max \left\{ \frac{1}{y_1}, Ay_0 \right\} = Ay_0 & y_2 &= \max \left\{ \frac{1}{x_1}, Ax_0 \right\} = y_0 \\ x_3 &= \max \left\{ \frac{1}{y_2}, Ay_1 \right\} = \frac{1}{y_0} & y_3 &= \max \left\{ \frac{1}{x_2}, Ax_1 \right\} = \frac{1}{Ay_0} \\ x_4 &= \max \left\{ \frac{1}{y_3}, Ay_2 \right\} = Ay_0 & y_4 &= \max \left\{ \frac{1}{x_3}, Ax_2 \right\} = A^2 y_0 \\ x_5 &= \max \left\{ \frac{1}{y_4}, Ay_3 \right\} = \frac{1}{y_0} & y_5 &= \max \left\{ \frac{1}{x_4}, Ax_3 \right\} = \frac{1}{Ay_0} \\ x_6 &= \max \left\{ \frac{1}{y_5}, Ay_4 \right\} = Ay_0 & y_6 &= \max \left\{ \frac{1}{x_5}, Ax_4 \right\} = A^2 y_0 \\ & \dots & & \dots \end{aligned}$$

şeklindedir. Buradan, (3.1) denklem sisteminin çözümlerinin

$$(x_n, y_n) = \begin{cases} (x_n) = \left(\frac{1}{y_0}, Ay_0, \frac{1}{y_0}, Ay_0, \frac{1}{y_0}, Ay_0, \dots\right) \\ (y_n) = \left(Ax_{-1}, y_0, \frac{1}{Ay_0}, A^2 y_0, \frac{1}{Ay_0}, A^2 y_0, \dots\right) \end{cases}$$

şeklinde ve er geç iki periyotlu olduğu görülür.

Benzer şekilde, aşağıdaki durumlarda da (3.1) denklem sisteminin çözümlerinin er geç iki periyotlu olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Bu nedenle, bu durumlar ispatsız olarak verilmiştir.

$$(d11) \frac{1}{y_0} > Ay_{-1}, \frac{1}{x_0} < Ax_{-1}, y_0 < Ax_0, x_{-1}y_0 < \frac{1}{A^2}, A^2x_{-1} > \frac{1}{Ax_0}$$

$$(d12) \frac{1}{y_0} > Ay_{-1}, \frac{1}{x_0} < Ax_{-1}, y_0 < Ax_0, x_{-1}y_0 < \frac{1}{A^2}, A^2x_{-1} < \frac{1}{Ax_0}, A \in (-\infty, -1)$$

$$(d13) \frac{1}{y_0} > Ay_{-1}, \frac{1}{x_0} < Ax_{-1}, y_0 < Ax_0, x_{-1}y_0 < \frac{1}{A^2}, A^2x_{-1} < \frac{1}{Ax_0}, A^2x_0 > \frac{y_0}{A},$$

$$A \in [-1, 0)$$

$$(d14) \frac{1}{y_0} > Ay_{-1}, \frac{1}{x_0} < Ax_{-1}, x_{-1}y_0 < \frac{1}{A^2}, y_0 < Ax_0, A^2x_{-1} < \frac{1}{Ax_0}, A^2x_0 < \frac{y_0}{A},$$

$$A \in [-1, 0)$$

$$(d15) Ay_{-1} > \frac{1}{y_0}, \frac{1}{x_0} > Ax_{-1}, x_0 > Ay_0, \frac{1}{Ay_{-1}} > Ax_0, Ay_{-1} > \frac{A}{x_0}, A \in [-1, 0)$$

$$(d16) Ay_{-1} > \frac{1}{y_0}, \frac{1}{x_0} > Ax_{-1}, x_0 > Ay_0, \frac{1}{Ay_{-1}} > Ax_0, Ay_{-1} > \frac{A}{x_0}, A \in (-\infty, -1)$$

$$(d17) Ay_{-1} > \frac{1}{y_0}, \frac{1}{x_0} > Ax_{-1}, x_0 > Ay_0, \frac{1}{Ay_{-1}} > Ax_0, \frac{A}{x_0} > Ay_{-1}, A \in [-1, 0)$$

$$(d18) Ay_{-1} > \frac{1}{y_0}, \frac{1}{x_0} > Ax_{-1}, x_0 > Ay_0, \frac{1}{Ay_{-1}} > Ax_0, \frac{A}{x_0} > Ay_{-1}, A \in (-\infty, -1)$$

$$(d19) \quad Ay_{-1} > \frac{1}{y_0}, \frac{1}{x_0} > Ax_{-1}, x_0 > Ay_0, Ax_0 > \frac{1}{Ay_{-1}}, A \in [-1, 0)$$

$$(d20) \quad Ay_{-1} > \frac{1}{y_0}, \frac{1}{x_0} > Ax_{-1}, x_0 > Ay_0, Ax_0 > \frac{1}{Ay_{-1}}, A \in (-\infty, -1)$$

$$(d21) \quad Ay_{-1} > \frac{1}{y_0}, \frac{1}{x_0} > Ax_{-1}, Ay_0 > x_0, \frac{1}{Ay_{-1}} > Ax_0, \frac{A}{x_0} > Ay_{-1}, \frac{1}{Ay_0} > A^2 y_{-1}$$

$$(d22) \quad Ay_{-1} > \frac{1}{y_0}, \frac{1}{x_0} > Ax_{-1}, Ay_0 > x_0, \frac{1}{Ay_{-1}} > Ax_0, \frac{A}{x_0} > Ay_{-1}, A^2 y_{-1} > \frac{1}{Ay_0},$$

$$A \in [-1, 0)$$

$$(d23) \quad Ay_{-1} > \frac{1}{y_0}, \frac{1}{x_0} > Ax_{-1}, Ay_0 > x_0, \frac{1}{Ay_{-1}} > Ax_0, \frac{A}{x_0} > Ay_{-1}, A^2 y_{-1} > \frac{1}{Ay_0},$$

$$A \in (-\infty, -1)$$

$$(d24) \quad Ay_{-1} > \frac{1}{y_0}, Ax_{-1} > \frac{1}{x_0}, \frac{1}{Ax_{-1}} > Ay_0, \frac{1}{Ay_{-1}} > Ax_0, Ay_{-1} > A^2 x_{-1}, Ax_{-1} > A^2 y_{-1},$$

$$A \in [-1, 0)$$

$$(d25) \quad Ay_{-1} > \frac{1}{y_0}, Ax_{-1} > \frac{1}{x_0}, \frac{1}{Ax_{-1}} > Ay_0, \frac{1}{Ay_{-1}} > Ax_0, Ay_{-1} > A^2 x_{-1}, Ax_{-1} > A^2 y_{-1},$$

$$A \in (-\infty, -1)$$

$$(d26) \quad Ay_{-1} > \frac{1}{y_0}, Ax_{-1} > \frac{1}{x_0}, \frac{1}{Ax_{-1}} > Ay_0, \frac{1}{Ay_{-1}} > Ax_0, A^2 x_{-1} > Ay_{-1}, Ax_{-1} > A^2 y_{-1}$$

$$(d27) \quad Ay_{-1} > \frac{1}{y_0}, Ax_{-1} > \frac{1}{x_0}, \frac{1}{Ax_{-1}} > Ay_0, \frac{1}{Ay_{-1}} > Ax_0, A^2 x_{-1} > Ay_{-1}, A^2 y_{-1} > Ax_{-1},$$

$$A \in (-\infty, -1)$$

$$(d28) \quad Ay_{-1} > \frac{1}{y_0}, Ax_{-1} > \frac{1}{x_0}, \frac{1}{Ax_{-1}} > Ay_0, \frac{1}{Ay_{-1}} > Ax_0, A^2x_{-1} > Ay_{-1}, A^2y_{-1} > Ax_{-1},$$

$$A \in [-1, 0)$$

$$(d29) \quad Ay_{-1} > \frac{1}{y_0}, Ax_{-1} > \frac{1}{x_0}, \frac{1}{Ax_{-1}} > Ay_0, Ax_0 > \frac{1}{Ay_{-1}}, A \in [-1, 0)$$

$$(d30) \quad Ay_{-1} > \frac{1}{y_0}, Ax_{-1} > \frac{1}{x_0}, \frac{1}{Ax_{-1}} > Ay_0, Ax_0 > \frac{1}{Ay_{-1}}, \frac{1}{Ax_0} > A^2x_{-1}, A \in (-\infty, -1)$$

$$(d31) \quad Ay_{-1} > \frac{1}{y_0}, Ax_{-1} > \frac{1}{x_0}, Ay_0 > \frac{1}{Ax_{-1}}, \frac{1}{Ay_{-1}} > Ax_0, \frac{1}{Ay_0} > A^2y_{-1}, A \in (-\infty, -1)$$

$$(d32) \quad Ay_{-1} > \frac{1}{y_0}, Ax_{-1} > \frac{1}{x_0}, Ay_0 > \frac{1}{Ax_{-1}}, \frac{1}{Ay_{-1}} > Ax_0, \frac{1}{Ay_0} > A^2y_{-1}, A \in [-1, 0)$$

$$(d33) \quad Ay_{-1} > \frac{1}{y_0}, Ax_{-1} > \frac{1}{x_0}, Ay_0 > \frac{1}{Ax_{-1}}, \frac{1}{Ay_{-1}} > Ax_0, A^2y_{-1} > \frac{1}{Ay_0}$$

$$(d34) \quad Ay_{-1} > \frac{1}{y_0}, Ax_{-1} > \frac{1}{x_0}, Ay_0 > \frac{1}{Ax_{-1}}, Ax_0 > \frac{1}{Ay_{-1}}, \frac{1}{Ay_0} > A^2y_{-1}, Ay_0 > A^2x_0,$$

$$A \in [-1, 0)$$

$$(d35) \quad Ay_{-1} > \frac{1}{y_0}, Ax_{-1} > \frac{1}{x_0}, Ay_0 > \frac{1}{Ax_{-1}}, Ax_0 > \frac{1}{Ay_{-1}}, \frac{1}{Ay_0} > A^2y_{-1}, A^2x_0 > Ay_0,$$

$$A \in [-1, 0)$$

$$(d36) \quad Ay_{-1} > \frac{1}{y_0}, Ax_{-1} > \frac{1}{x_0}, Ay_0 > \frac{1}{Ax_{-1}}, Ax_0 > \frac{1}{Ay_{-1}}, A^2y_{-1} > \frac{1}{Ay_0}, \frac{1}{A^2y_{-1}} > A^2x_0,$$

$$Ax_0 > A^2y_0, A \in [-1, 0)$$

$$(d37) \quad Ay_{-1} > \frac{1}{y_0}, Ax_{-1} > \frac{1}{x_0}, Ay_0 > \frac{1}{Ax_{-1}}, Ax_0 > \frac{1}{Ay_{-1}}, A^2 y_{-1} > \frac{1}{Ay_0}, \frac{1}{A^2 y_{-1}} > A^2 x_0,$$

$$A^2 y_0 > Ax_0, x_0 > A^3 y_0, A \in [-1, 0)$$

$$(d38) \quad Ay_{-1} > \frac{1}{y_0}, Ax_{-1} > \frac{1}{x_0}, Ay_0 > \frac{1}{Ax_{-1}}, Ax_0 > \frac{1}{Ay_{-1}}, A^2 y_{-1} > \frac{1}{Ay_0}, \frac{1}{A^2 y_{-1}} > A^2 x_0,$$

$$A^2 y_0 > Ax_0, A^3 y_0 > x_0, A \in [-1, 0)$$

$$(d39) \quad Ay_{-1} > \frac{1}{y_0}, Ax_{-1} > \frac{1}{x_0}, Ay_0 > \frac{1}{Ax_{-1}}, Ax_0 > \frac{1}{Ay_{-1}}, Ay_0 > A^2 x_0, \frac{1}{A^2 x_{-1}} > A^2 y_0,$$

$$A \in (-\infty, -1)$$

$$(d40) \quad Ay_{-1} > \frac{1}{y_0}, Ax_{-1} > \frac{1}{x_0}, Ay_0 > \frac{1}{Ax_{-1}}, Ax_0 > \frac{1}{Ay_{-1}}, Ay_0 > A^2 x_0, A^2 y_0 > \frac{1}{A^2 x_{-1}},$$

$$A \in (-\infty, -1)$$

$$(d41) \quad Ay_{-1} > \frac{1}{y_0}, Ax_{-1} > \frac{1}{x_0}, Ay_0 > \frac{1}{Ax_{-1}}, Ax_0 > \frac{1}{Ay_{-1}}, A^2 x_0 > Ay_0, \frac{1}{A^2 x_{-1}} > A^2 y_0,$$

$$A \in (-\infty, -1)$$

$$(d42) \quad Ay_{-1} > \frac{1}{y_0}, Ax_{-1} > \frac{1}{x_0}, Ay_0 > \frac{1}{Ax_{-1}}, Ax_0 > \frac{1}{Ay_{-1}}, A^2 x_0 > Ay_0, A^2 y_0 > \frac{1}{A^2 x_{-1}},$$

$$A \in (-\infty, -1)$$

(e)  $0 < y_0, x_0, y_{-1}$  ve  $x_{-1} < 0$  olsun. Bu durumda iki farklı durum söz konusu olur:

(e1)  $\frac{1}{x_0} > Ax_{-1}$  olduğunu kabul edelim. O zaman, çözümler:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \max \left\{ \frac{1}{y_0}, Ay_{-1} \right\} = \frac{1}{y_0} & y_1 &= \max \left\{ \frac{1}{x_0}, Ax_{-1} \right\} = \frac{1}{x_0} \\
x_2 &= \max \left\{ \frac{1}{y_1}, Ay_0 \right\} = x_0 & y_2 &= \max \left\{ \frac{1}{x_1}, Ax_0 \right\} = y_0 \\
x_3 &= \max \left\{ \frac{1}{y_2}, Ay_1 \right\} = \frac{1}{y_0} & y_3 &= \max \left\{ \frac{1}{x_2}, Ax_1 \right\} = \frac{1}{x_0} \\
x_4 &= \max \left\{ \frac{1}{y_3}, Ay_2 \right\} = x_0 & y_4 &= \max \left\{ \frac{1}{x_3}, Ax_2 \right\} = y_0 \\
&\dots & &
\end{aligned}$$

şeklindedir. Buradan, (3.1) denklem sisteminin çözümlerinin

$$(x_n, y_n) = \begin{cases} (x_n) = \left( \frac{1}{y_0}, x_0, \frac{1}{y_0}, x_0, \dots \right) \\ (y_n) = \left( \frac{1}{x_0}, y_0, \frac{1}{x_0}, y_0, \dots \right) \end{cases}$$

şeklinde ve iki periyotlu olduğu görülür.

**(e2)**  $Ax_{-1} > \frac{1}{x_0}$  olduğunu kabul edelim. O zaman, çözümler:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \max \left\{ \frac{1}{y_0}, Ay_{-1} \right\} = \frac{1}{y_0} & y_1 &= \max \left\{ \frac{1}{x_0}, Ax_{-1} \right\} = Ax_{-1} \\
x_2 &= \max \left\{ \frac{1}{y_1}, Ay_0 \right\} = \frac{1}{Ax_{-1}} & y_2 &= \max \left\{ \frac{1}{x_1}, Ax_0 \right\} = y_0 \\
x_3 &= \max \left\{ \frac{1}{y_2}, Ay_1 \right\} = \frac{1}{y_0} & y_3 &= \max \left\{ \frac{1}{x_2}, Ax_1 \right\} = Ax_{-1} \\
x_4 &= \max \left\{ \frac{1}{y_3}, Ay_2 \right\} = \frac{1}{Ax_{-1}} & y_4 &= \max \left\{ \frac{1}{x_3}, Ax_2 \right\} = y_0 \\
&\dots & &
\end{aligned}$$

şeklindedir. Buradan, (3.1) denklem sisteminin çözümlerinin

$$(x_n, y_n) = \begin{cases} (x_n) = \left(\frac{1}{y_0}, \frac{1}{Ax_{-1}}, \frac{1}{y_0}, \frac{1}{Ax_{-1}}, \dots\right) \\ (y_n) = (Ax_{-1}, y_0, Ax_{-1}, y_0, \dots) \end{cases}$$

şeklinde ve iki periyotlu olduğu görülür.

**(f)**  $0 < y_0, x_{-1}, y_{-1}$  ve  $x_0 < 0$  olsun. Bu durumda yirmi farklı durum söz konusu olur:

**(f1)**  $\frac{1}{x_0} > Ax_{-1}, x_0 > Ay_0, y_0 > Ax_0, y_0 > A^3 x_0, A \in (-\infty, -1)$  olduğunu kabul

edelim.  $y_0 < A^5 x_0$  olsun ( $A \in (-\infty, -1)$  için  $\lim_{n \rightarrow \infty} A^{2n+1} = +\infty$  olacağından belirli

değerden sonra  $y_0 < A^{2n+1} x_0$  olacaktır). O zaman, çözümler:

$$x_1 = \max \left\{ \frac{1}{y_0}, Ay_{-1} \right\} = \frac{1}{y_0}$$

$$y_1 = \max \left\{ \frac{1}{x_0}, Ax_{-1} \right\} = \frac{1}{x_0}$$

$$x_2 = \max \left\{ \frac{1}{y_1}, Ay_0 \right\} = x_0$$

$$y_2 = \max \left\{ \frac{1}{x_1}, Ax_0 \right\} = y_0$$

$$x_3 = \max \left\{ \frac{1}{y_2}, Ay_1 \right\} = \frac{A}{x_0}$$

$$y_3 = \max \left\{ \frac{1}{x_2}, Ax_1 \right\} = \frac{A}{y_0}$$

$$x_4 = \max \left\{ \frac{1}{y_3}, Ay_2 \right\} = \frac{y_0}{A}$$

$$y_4 = \max \left\{ \frac{1}{x_3}, Ax_2 \right\} = Ax_0$$

$$x_5 = \max \left\{ \frac{1}{y_4}, Ay_3 \right\} = \frac{1}{Ax_0}$$

$$y_5 = \max \left\{ \frac{1}{x_4}, Ax_3 \right\} = \frac{A}{y_0}$$

$$x_6 = \max \left\{ \frac{1}{y_5}, Ay_4 \right\} = A^2 x_0$$

$$y_6 = \max \left\{ \frac{1}{x_5}, Ax_4 \right\} = y_0$$

$$\begin{aligned}
x_7 &= \max \left\{ \frac{1}{y_6}, Ay_5 \right\} = \frac{A^2}{y_0} & y_7 &= \max \left\{ \frac{1}{x_6}, Ax_5 \right\} = \frac{1}{A^2 x_0} \\
x_8 &= \max \left\{ \frac{1}{y_7}, Ay_6 \right\} = A^2 x_0 & y_8 &= \max \left\{ \frac{1}{x_7}, Ax_6 \right\} = A^3 x_0 \\
x_9 &= \max \left\{ \frac{1}{y_8}, Ay_7 \right\} = \frac{1}{Ax_0} & y_9 &= \max \left\{ \frac{1}{x_8}, Ax_7 \right\} = \frac{1}{A^2 x_0} \\
x_{10} &= \max \left\{ \frac{1}{y_9}, Ay_8 \right\} = A^2 x_0 & y_{10} &= \max \left\{ \frac{1}{x_9}, Ax_8 \right\} = A^3 x_0 \\
x_{11} &= \max \left\{ \frac{1}{y_{10}}, Ay_9 \right\} = \frac{1}{Ax_0} & y_{11} &= \max \left\{ \frac{1}{x_{10}}, Ax_9 \right\} = \frac{1}{A^2 x_0} \\
&\dots & &
\end{aligned}$$

şeklindedir. Buradan, (3.1) denklem sisteminin çözümlerinin

$$(x_n, y_n) = \begin{cases} (x_n) = \left( \frac{1}{y_0}, x_0, \frac{A}{x_0}, \frac{y_0}{A}, \frac{1}{Ax_0}, A^2 x_0, \frac{A^2}{y_0}, A^2 x_0, \frac{1}{Ax_0}, A^2 x_0, \frac{1}{Ax_0}, \dots \right) \\ (y_n) = \left( \frac{1}{x_0}, y_0, \frac{A}{y_0}, Ax_0, \frac{A}{y_0}, y_0, \frac{1}{A^2 x_0}, A^3 x_0, \frac{1}{A^2 x_0}, A^3 x_0, \frac{1}{A^2 x_0}, \dots \right) \end{cases}$$

şeklinde ve er geç iki periyotlu olduğu görülür.

(f2)  $\frac{1}{x_0} > Ax_{-1}, x_0 > Ay_0, y_0 > Ax_0, x_0 > A^3 y_0, A \in [-1, 0)$  olduğunu kabul

edelim.  $x_0 < A^5 y_0$  olsun ( $A \in [-1, 0)$  için  $\lim_{n \rightarrow \infty} A^{2n+1} = 0$  olacağından belirli değerden

sonra  $x_0 < A^{2n+1} y_0$  olacaktır). O zaman, çözümler:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \max \left\{ \frac{1}{y_0}, Ay_{-1} \right\} = \frac{1}{y_0} & y_1 &= \max \left\{ \frac{1}{x_0}, Ax_{-1} \right\} = \frac{1}{x_0} \\
x_2 &= \max \left\{ \frac{1}{y_1}, Ay_0 \right\} = x_0 & y_2 &= \max \left\{ \frac{1}{x_1}, Ax_0 \right\} = y_0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_3 &= \max \left\{ \frac{1}{y_2}, Ay_1 \right\} = \frac{A}{x_0} & y_3 &= \max \left\{ \frac{1}{x_2}, Ax_1 \right\} = \frac{A}{y_0} \\
x_4 &= \max \left\{ \frac{1}{y_3}, Ay_2 \right\} = Ay_0 & y_4 &= \max \left\{ \frac{1}{x_3}, Ax_2 \right\} = \frac{x_0}{A} \\
x_5 &= \max \left\{ \frac{1}{y_4}, Ay_3 \right\} = \frac{A}{x_0} & y_5 &= \max \left\{ \frac{1}{x_4}, Ax_3 \right\} = \frac{1}{Ay_0} \\
x_6 &= \max \left\{ \frac{1}{y_5}, Ay_4 \right\} = x_0 & y_6 &= \max \left\{ \frac{1}{x_5}, Ax_4 \right\} = A^2 y_0 \\
x_7 &= \max \left\{ \frac{1}{y_6}, Ay_5 \right\} = \frac{1}{A^2 y_0} & y_7 &= \max \left\{ \frac{1}{x_6}, Ax_5 \right\} = \frac{A^2}{x_0} \\
x_8 &= \max \left\{ \frac{1}{y_7}, Ay_6 \right\} = A^3 y_0 & y_8 &= \max \left\{ \frac{1}{x_7}, Ax_6 \right\} = A^2 y_0 \\
x_9 &= \max \left\{ \frac{1}{y_8}, Ay_7 \right\} = \frac{1}{A^2 y_0} & y_9 &= \max \left\{ \frac{1}{x_8}, Ax_7 \right\} = \frac{1}{Ay_0} \\
x_{10} &= \max \left\{ \frac{1}{y_9}, Ay_8 \right\} = A^3 y_0 & y_{10} &= \max \left\{ \frac{1}{x_9}, Ax_8 \right\} = A^2 y_0 \\
x_{11} &= \max \left\{ \frac{1}{y_{10}}, Ay_9 \right\} = \frac{1}{A^2 y_0} & y_{11} &= \max \left\{ \frac{1}{x_{10}}, Ax_9 \right\} = \frac{1}{Ay_0} \\
&\dots & &
\end{aligned}$$

şeklindedir. Buradan, (3.1) denklem sisteminin çözümlerinin

$$(x_n, y_n) = \begin{cases} (x_n) = \left( \frac{1}{y_0}, x_0, \frac{A}{x_0}, Ay_0, \frac{A}{x_0}, x_0, \frac{1}{A^2 y_0}, A^3 y_0, \frac{1}{A^2 y_0}, A^3 y_0, \frac{1}{A^2 y_0}, \dots \right) \\ (y_n) = \left( \frac{1}{x_0}, y_0, \frac{A}{y_0}, \frac{x_0}{A}, \frac{1}{Ay_0}, A^2 y_0, \frac{A^2}{x_0}, A^2 y_0, \frac{1}{Ay_0}, A^2 y_0, \frac{1}{Ay_0}, \dots \right) \end{cases}$$

şeklinde ve er geç iki periyotlu olduğu görülür.

(f3)  $\frac{1}{x_0} > Ax_{-1}, x_0 > Ay_0, y_0 > Ax_0, A^3 y_0 > x_0, A \in [-1, 0)$  olduğunu kabul

edelim. O zaman, çözümler:

$$x_1 = \max \left\{ \frac{1}{y_0}, Ay_{-1} \right\} = \frac{1}{y_0}$$

$$y_1 = \max \left\{ \frac{1}{x_0}, Ax_{-1} \right\} = \frac{1}{x_0}$$

$$x_2 = \max \left\{ \frac{1}{y_1}, Ay_0 \right\} = x_0$$

$$y_2 = \max \left\{ \frac{1}{x_1}, Ax_0 \right\} = y_0$$

$$x_3 = \max \left\{ \frac{1}{y_2}, Ay_1 \right\} = \frac{A}{x_0}$$

$$y_3 = \max \left\{ \frac{1}{x_2}, Ax_1 \right\} = \frac{A}{y_0}$$

$$x_4 = \max \left\{ \frac{1}{y_3}, Ay_2 \right\} = Ay_0$$

$$y_4 = \max \left\{ \frac{1}{x_3}, Ax_2 \right\} = \frac{x_0}{A}$$

$$x_5 = \max \left\{ \frac{1}{y_4}, Ay_3 \right\} = \frac{A}{x_0}$$

$$y_5 = \max \left\{ \frac{1}{x_4}, Ax_3 \right\} = \frac{A^2}{x_0}$$

$$x_6 = \max \left\{ \frac{1}{y_5}, Ay_4 \right\} = x_0$$

$$y_6 = \max \left\{ \frac{1}{x_5}, Ax_4 \right\} = \frac{x_0}{A}$$

$$x_7 = \max \left\{ \frac{1}{y_6}, Ay_5 \right\} = \frac{A}{x_0}$$

$$y_7 = \max \left\{ \frac{1}{x_6}, Ax_5 \right\} = \frac{A^2}{x_0}$$

$$x_8 = \max \left\{ \frac{1}{y_7}, Ay_6 \right\} = x_0$$

$$y_8 = \max \left\{ \frac{1}{x_7}, Ax_6 \right\} = \frac{x_0}{A}$$

...

şeklindedir. Buradan, (3.1) denklem sisteminin çözümlerinin

$$(x_n, y_n) = \begin{cases} (x_n) = \left( \frac{1}{y_0}, x_0, \frac{A}{x_0}, Ay_0, \frac{A}{x_0}, x_0, \frac{A}{x_0}, x_0, \dots \right) \\ (y_n) = \left( \frac{1}{x_0}, y_0, \frac{A}{y_0}, \frac{x_0}{A}, \frac{A^2}{x_0}, \frac{x_0}{A}, \frac{A^2}{x_0}, \frac{x_0}{A}, \dots \right) \end{cases}$$

şeklinde ve er geç iki periyotlu olduğu görülür.

(f4)  $\frac{1}{x_0} > Ax_{-1}, x_0 > Ay_0, Ax_0 > y_0$  olduğunu kabul edelim. O zaman,

çözümler:

$$x_1 = \max \left\{ \frac{1}{y_0}, Ay_{-1} \right\} = \frac{1}{y_0}$$

$$y_1 = \max \left\{ \frac{1}{x_0}, Ax_{-1} \right\} = \frac{1}{x_0}$$

$$x_2 = \max \left\{ \frac{1}{y_1}, Ay_0 \right\} = x_0$$

$$y_2 = \max \left\{ \frac{1}{x_1}, Ax_0 \right\} = Ax_0$$

$$x_3 = \max \left\{ \frac{1}{y_2}, Ay_1 \right\} = \frac{A}{x_0}$$

$$y_3 = \max \left\{ \frac{1}{x_2}, Ax_1 \right\} = \frac{1}{x_0}$$

$$x_4 = \max \left\{ \frac{1}{y_3}, Ay_2 \right\} = x_0$$

$$y_4 = \max \left\{ \frac{1}{x_3}, Ax_2 \right\} = Ax_0$$

$$x_5 = \max \left\{ \frac{1}{y_4}, Ay_3 \right\} = \frac{A}{x_0}$$

$$y_5 = \max \left\{ \frac{1}{x_4}, Ax_3 \right\} = \frac{1}{x_0}$$

...

şeklindedir. Buradan, (3.1) denklem sisteminin çözümlerinin

$$(x_n, y_n) = \begin{cases} (x_n) = \left( \frac{1}{y_0}, x_0, \frac{A}{x_0}, x_0, \frac{A}{x_0}, \dots \right) \\ (y_n) = \left( \frac{1}{x_0}, Ax_0, \frac{1}{x_0}, Ax_0, \frac{1}{x_0}, \dots \right) \end{cases}$$

şeklinde ve er geç iki periyotlu olduğu görülür.

(f5)  $\frac{1}{x_0} > Ax_{-1}, Ay_0 > x_0, y_0 > Ax_0$  olduğunu kabul edelim. O zaman,

çözümler:

$$x_1 = \max \left\{ \frac{1}{y_0}, Ay_{-1} \right\} = \frac{1}{y_0}$$

$$y_1 = \max \left\{ \frac{1}{x_0}, Ax_{-1} \right\} = \frac{1}{x_0}$$

$$\begin{aligned}
x_2 &= \max \left\{ \frac{1}{y_1}, Ay_0 \right\} = Ay_0 & y_2 &= \max \left\{ \frac{1}{x_1}, Ax_0 \right\} = y_0 \\
x_3 &= \max \left\{ \frac{1}{y_2}, Ay_1 \right\} = \frac{1}{y_0} & y_3 &= \max \left\{ \frac{1}{x_2}, Ax_1 \right\} = \frac{A}{y_0} \\
x_4 &= \max \left\{ \frac{1}{y_3}, Ay_2 \right\} = Ay_0 & y_4 &= \max \left\{ \frac{1}{x_3}, Ax_2 \right\} = y_0 \\
x_5 &= \max \left\{ \frac{1}{y_4}, Ay_3 \right\} = \frac{A}{x_0} & y_5 &= \max \left\{ \frac{1}{x_4}, Ax_3 \right\} = \frac{A}{y_0} \\
&\dots & &
\end{aligned}$$

şeklindedir. Buradan, (3.1) denklem sisteminin çözümlerinin

$$(x_n, y_n) = \begin{cases} (x_n) = \left( \frac{1}{y_0}, Ay_0, \frac{1}{y_0}, Ay_0, \frac{1}{y_0}, \dots \right) \\ (y_n) = \left( \frac{1}{x_0}, y_0, \frac{A}{y_0}, y_0, \frac{A}{y_0}, \dots \right) \end{cases}$$

şeklinde ve er geç iki periyotlu olduğu görülür.

Benzer şekilde, aşağıdaki durumlarda da (3.1) denklem sisteminin çözümlerinin er geç iki periyotlu olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Bu nedenle, bu durumlar ispatsız olarak verilmiştir.

$$\text{(f6)} \quad \frac{1}{x_0} > Ax_{-1}, Ay_0 > x_0, Ax_0 > y_0, A^3 x_0 > y_0, A \in [-1, 0)$$

$$\text{(f7)} \quad \frac{1}{x_0} > Ax_{-1}, Ay_0 > x_0, Ax_0 > y_0, A^3 y_0 > x_0, A \in (-\infty, -1)$$

$$\text{(f8)} \quad Ax_{-1} > \frac{1}{x_0}, \frac{1}{Ax_{-1}} > Ay_0, y_0 > Ax_0, Ax_{-1} > \frac{A}{y_0}, A \in (-\infty, -1)$$

$$(f9) \quad Ax_{-1} > \frac{1}{x_0}, \frac{1}{Ax_{-1}} > Ay_0, y_0 > Ax_0, Ax_{-1} > \frac{A}{y_0}, A \in [-1, 0)$$

$$(f10) \quad Ax_{-1} > \frac{1}{x_0}, \frac{1}{Ax_{-1}} > Ay_0, y_0 > Ax_0, \frac{A}{y_0} > Ax_{-1}, x_{-1}y_0 > \frac{1}{A^4}, A \in [-1, 0)$$

$$(f11) \quad Ax_{-1} > \frac{1}{x_0}, \frac{1}{Ax_{-1}} > Ay_0, Ax_0 > y_0, A \in (-\infty, -1)$$

$$(f12) \quad Ax_{-1} > \frac{1}{x_0}, \frac{1}{Ax_{-1}} > Ay_0, Ax_0 > y_0, A \in [-1, 0)$$

$$(f13) \quad Ax_{-1} > \frac{1}{x_0}, Ay_0 > \frac{1}{Ax_{-1}}, y_0 > Ax_0, A \in [-1, 0)$$

$$(f14) \quad Ax_{-1} > \frac{1}{x_0}, Ay_0 > \frac{1}{Ax_{-1}}, y_0 > Ax_0, A \in (-\infty, -1)$$

$$(f15) \quad Ax_{-1} > \frac{1}{x_0}, Ay_0 > \frac{1}{Ax_{-1}}, Ax_0 > y_0, \frac{1}{Ax_0} > A^2x_{-1}, A^3x_0 > y_0, A \in [-1, 0)$$

$$(f16) \quad Ax_{-1} > \frac{1}{x_0}, Ay_0 > \frac{1}{Ax_{-1}}, Ax_0 > y_0, \frac{1}{Ax_0} > A^2x_{-1}, y_0 > A^3x_0, A \in [-1, 0)$$

$$(f17) \quad Ax_{-1} > \frac{1}{x_0}, Ay_0 > \frac{1}{Ax_{-1}}, Ax_0 > y_0, \frac{1}{Ax_0} > A^2x_{-1}, Ax_0 > A^2y_0, A \in (-\infty, -1)$$

$$(f18) \quad Ax_{-1} > \frac{1}{x_0}, Ay_0 > \frac{1}{Ax_{-1}}, Ax_0 > y_0, A^2x_{-1} > \frac{1}{Ax_0}, y_0x_{-1} < \frac{1}{A^4}, A \in (-\infty, -1)$$

$$(f19) \quad Ax_{-1} > \frac{1}{x_0}, y_0 x_{-1} < \frac{1}{A^2}, Ax_0 > y_0, A^2 x_{-1} > \frac{1}{Ax_0}, A^3 x_0 > y_0, y_0 x_{-1} < 1,$$

$$A \in [-1, 0)$$

$$(f20) \quad Ax_{-1} > \frac{1}{x_0}, y_0 x_{-1} < \frac{1}{A^2}, Ax_0 > y_0, A^2 x_{-1} > \frac{1}{Ax_0}, A^3 x_0 < y_0, y_0 x_{-1} < 1, A \in [-1, 0)$$

(g)  $0 < y_0, x_{-1}, x_0$  ve  $y_{-1} < 0$  olsun. Bu durumda iki farklı durum söz konusu olur:

(g1)  $\frac{1}{y_0} > Ay_{-1}$  olduğunu kabul edelim. O zaman, çözümler:

$$\begin{aligned} x_1 &= \max \left\{ \frac{1}{y_0}, Ay_{-1} \right\} = \frac{1}{y_0} & y_1 &= \max \left\{ \frac{1}{x_0}, Ax_{-1} \right\} = \frac{1}{x_0} \\ x_2 &= \max \left\{ \frac{1}{y_1}, Ay_0 \right\} = x_0 & y_2 &= \max \left\{ \frac{1}{x_1}, Ax_0 \right\} = y_0 \\ x_3 &= \max \left\{ \frac{1}{y_2}, Ay_1 \right\} = \frac{1}{y_0} & y_3 &= \max \left\{ \frac{1}{x_2}, Ax_1 \right\} = \frac{1}{x_0} \\ x_4 &= \max \left\{ \frac{1}{y_3}, Ay_2 \right\} = x_0 & y_4 &= \max \left\{ \frac{1}{x_3}, Ax_2 \right\} = y_0 \end{aligned}$$

...

şeklinindedir. Buradan, (3.1) denklem sisteminin çözümleri

$$(x_n, y_n) = \begin{cases} (x_n) = \left( \frac{1}{y_0}, x_0, \frac{1}{y_0}, x_0, \frac{1}{y_0}, \dots \right) \\ (y_n) = \left( \frac{1}{x_0}, y_0, \frac{1}{x_0}, y_0, \frac{1}{x_0}, \dots \right) \end{cases}$$

şeklinde ve iki periyotlu olduğu görülür.

**(g2)**  $Ay_{-1} > \frac{1}{y_0}$  olduğunu kabul edelim. O zaman, çözümler:

$$\begin{aligned} x_1 &= \max \left\{ \frac{1}{y_0}, Ay_{-1} \right\} = Ay_{-1} & y_1 &= \max \left\{ \frac{1}{x_0}, Ax_{-1} \right\} = \frac{1}{x_0} \\ x_2 &= \max \left\{ \frac{1}{y_1}, Ay_0 \right\} = x_0 & y_2 &= \max \left\{ \frac{1}{x_1}, Ax_0 \right\} = \frac{1}{Ay_{-1}} \\ x_3 &= \max \left\{ \frac{1}{y_2}, Ay_1 \right\} = Ay_{-1} & y_3 &= \max \left\{ \frac{1}{x_2}, Ax_1 \right\} = \frac{1}{x_0} \\ x_4 &= \max \left\{ \frac{1}{y_3}, Ay_2 \right\} = x_0 & y_4 &= \max \left\{ \frac{1}{x_3}, Ax_2 \right\} = \frac{1}{Ay_{-1}} \end{aligned}$$

...

şeklindedir. Buradan, (3.1) denklem sisteminin çözümleri

$$(x_n, y_n) = \begin{cases} (x_n) = (Ay_{-1}, x_0, Ay_{-1}, x_0, \dots) \\ (y_n) = \left( \frac{1}{x_0}, \frac{1}{Ay_{-1}}, \frac{1}{x_0}, \frac{1}{Ay_{-1}}, \dots \right) \end{cases}$$

şeklinde ve iki periyotlu olduğu görülür.

**(h)**  $0 < y_0, x_{-1}, y_{-1}$  ve  $y_0 < 0$  olsun. Bu durumda on altı farklı durum söz konusu olur:

**(h1)**  $\frac{1}{y_0} > Ay_{-1}, x_0 > Ay_0, Ax_0 > y_0$  olduğunu kabul edelim. O zaman,

çözümler:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \max \left\{ \frac{1}{y_0}, Ay_{-1} \right\} = \frac{1}{y_0} & y_1 &= \max \left\{ \frac{1}{x_0}, Ax_{-1} \right\} = \frac{1}{x_0} \\
x_2 &= \max \left\{ \frac{1}{y_1}, Ay_0 \right\} = x_0 & y_2 &= \max \left\{ \frac{1}{x_1}, Ax_0 \right\} = Ax_0 \\
x_3 &= \max \left\{ \frac{1}{y_2}, Ay_1 \right\} = \frac{A}{x_0} & y_3 &= \max \left\{ \frac{1}{x_2}, Ax_1 \right\} = \frac{1}{x_0} \\
x_4 &= \max \left\{ \frac{1}{y_3}, Ay_2 \right\} = x_0 & y_4 &= \max \left\{ \frac{1}{x_3}, Ax_2 \right\} = Ax_0 \\
x_5 &= \max \left\{ \frac{1}{y_4}, Ay_3 \right\} = \frac{A}{x_0} & y_5 &= \max \left\{ \frac{1}{x_4}, Ax_3 \right\} = \frac{1}{x_0} \\
&\dots & &
\end{aligned}$$

şeklindedir. Buradan, (3.1) denklem sisteminin çözümleri

$$(x_n, y_n) = \begin{cases} (x_n) = \left( \frac{1}{y_0}, x_0, \frac{A}{x_0}, x_0, \frac{A}{x_0}, \dots \right) \\ (y_n) = \left( \frac{1}{x_0}, Ax_0, \frac{1}{x_0}, Ax_0, \frac{1}{x_0}, \dots \right) \end{cases}$$

şeklinde ve er geç iki periyotlu olduğu görülür.

**(h2)**  $\frac{1}{y_0} > Ay_{-1}, x_0 > Ay_0, y_0 > Ax_0, y_0 > A^3 x_0, A \in [-1, 0)$  olduğunu kabul

edelim.  $y_0 < A^5 x_0$  olsun ( $A \in [-1, 0)$  için  $\lim_{n \rightarrow \infty} A^{2n+1} x_0 = 0$  olacağından belirli

değerden sonra  $A^{2n+1} x_0 > y_0$  olacaktır). O zaman, çözümler:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \max \left\{ \frac{1}{y_0}, Ay_{-1} \right\} = \frac{1}{y_0} & y_1 &= \max \left\{ \frac{1}{x_0}, Ax_{-1} \right\} = \frac{1}{x_0} \\
x_2 &= \max \left\{ \frac{1}{y_1}, Ay_0 \right\} = x_0 & y_2 &= \max \left\{ \frac{1}{x_1}, Ax_0 \right\} = y_0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_3 &= \max \left\{ \frac{1}{y_2}, Ay_1 \right\} = \frac{A}{x_0} & y_3 &= \max \left\{ \frac{1}{x_2}, Ax_1 \right\} = \frac{A}{y_0} \\
x_4 &= \max \left\{ \frac{1}{y_3}, Ay_2 \right\} = \frac{y_0}{A} & y_4 &= \max \left\{ \frac{1}{x_3}, Ax_2 \right\} = Ax_0 \\
x_5 &= \max \left\{ \frac{1}{y_4}, Ay_3 \right\} = \frac{1}{Ax_0} & y_5 &= \max \left\{ \frac{1}{x_4}, Ax_3 \right\} = \frac{A}{y_0} \\
x_6 &= \max \left\{ \frac{1}{y_5}, Ay_4 \right\} = A^2 x_0 & y_6 &= \max \left\{ \frac{1}{x_5}, Ax_4 \right\} = y_0 \\
x_7 &= \max \left\{ \frac{1}{y_6}, Ay_5 \right\} = \frac{A^2}{y_0} & y_7 &= \max \left\{ \frac{1}{x_6}, Ax_5 \right\} = \frac{1}{A^2 x_0} \\
x_8 &= \max \left\{ \frac{1}{y_7}, Ay_6 \right\} = A^2 x_0 & y_8 &= \max \left\{ \frac{1}{x_7}, Ax_6 \right\} = A^3 x_0 \\
x_9 &= \max \left\{ \frac{1}{y_8}, Ay_7 \right\} = \frac{1}{Ax_0} & y_9 &= \max \left\{ \frac{1}{x_8}, Ax_7 \right\} = \frac{1}{A^2 x_0} \\
x_{10} &= \max \left\{ \frac{1}{y_9}, Ay_8 \right\} = A^2 x_0 & y_{10} &= \max \left\{ \frac{1}{x_9}, Ax_8 \right\} = A^3 x_0 \\
x_{11} &= \max \left\{ \frac{1}{y_{10}}, Ay_9 \right\} = \frac{1}{Ax_0} & y_{11} &= \max \left\{ \frac{1}{x_{10}}, Ax_9 \right\} = \frac{1}{A^2 x_0} \\
&\dots & &
\end{aligned}$$

şeklindedir. Buradan, (3.1) denklem sisteminin çözümleri

$$(x_n, y_n) = \begin{cases} (x_n) = \left( \frac{1}{y_0}, x_0, \frac{A}{x_0}, \frac{y_0}{A}, \frac{1}{Ax_0}, A^2 x_0, \frac{A^2}{y_0}, A^2 x_0, \frac{1}{Ax_0}, A^2 x_0, \frac{1}{Ax_0}, \dots \right) \\ (y_n) = \left( \frac{1}{x_0}, y_0, \frac{A}{y_0}, Ax_0, \frac{A}{y_0}, y_0, \frac{1}{A^2 x_0}, A^3 x_0, \frac{1}{A^2 x_0}, A^3 x_0, \frac{1}{A^2 x_0}, \dots \right) \end{cases}$$

şeklinde ve er geç iki periyotlu olduğu görülür.

Benzer şekilde, aşağıdaki durumlarda da (3.1) denklem sisteminin çözümlerinin er geç iki periyotlu olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Bu nedenle, bu durumlar ispatsız olarak verilmiştir.

$$(h3) \frac{1}{y_0} > Ay_{-1}, x_0 > Ay_0, y_0 > Ax_0, x_0 > A^3 y_0, A \in (-\infty, -1)$$

$$(h4) \frac{1}{y_0} > Ay_{-1}, Ay_0 > x_0, y_0 > Ax_0, A^3 y_0 > x_0$$

$$(h5) \frac{1}{y_0} > Ay_{-1}, Ay_0 > x_0, Ax_0 > y_0, A^3 y_0 > x_0, A \in [-1, 0)$$

$$(h6) \frac{1}{y_0} > Ay_{-1}, Ay_0 > x_0, Ax_0 > y_0, A^3 x_0 > y_0, A \in (-\infty, -1)$$

$$(h7) Ay_{-1} > \frac{1}{y_0}, x_0 > Ay_0, \frac{1}{Ay_{-1}} > Ax_0, Ay_{-1} > \frac{A}{x_0}, A \in (-\infty, -1)$$

$$(h8) Ay_{-1} > \frac{1}{y_0}, x_0 > Ay_0, x_0 y_{-1} > 1, y_{-1} x_0 > \frac{1}{A^2}, y_{-1} x_0 > \frac{1}{A^4}, A \in [-1, 0)$$

$$(h9) Ay_{-1} > \frac{1}{y_0}, x_0 > Ay_0, y_{-1} x_0 > \frac{1}{A^2}, x_0 y_{-1} > 1, y_{-1} x_0 > A^2, A \in (-\infty, -1)$$

$$(h10) Ay_{-1} > \frac{1}{y_0}, x_0 > Ay_0, Ax_0 > \frac{1}{Ay_{-1}}, A \in (-\infty, -1)$$

$$(h11) Ay_{-1} > \frac{1}{y_0}, x_0 > Ay_0, Ax_0 > \frac{1}{Ay_{-1}}, A \in [-1, 0)$$

$$(h12) y_{-1} y_0 > \frac{1}{A}, Ay_0 > x_0, \frac{1}{Ay_{-1}} > Ax_0, y_0 y_{-1} > \frac{1}{A^3}$$

$$(h13) \quad Ay_{-1} > \frac{1}{y_0}, Ay_0 > x_0, Ax_0 > \frac{1}{Ay_{-1}}, y_0y_{-1} > \frac{1}{A^3}, A^2x_0 > Ay_0, A \in (-\infty, -1)$$

$$(h14) \quad Ay_{-1} > \frac{1}{y_0}, Ay_0 > x_0, Ax_0 > \frac{1}{Ay_{-1}}, y_0y_{-1} > \frac{1}{A^3}, Ay_0 > A^2x_0, A^3x_0 > y_0,$$

$$A \in (-\infty, -1)$$

$$(h15) \quad Ay_{-1} > \frac{1}{y_0}, Ay_0 > x_0, Ax_0 > \frac{1}{Ay_{-1}}, \frac{1}{A^3} > y_0y_{-1}, x_0y_{-1} < \frac{1}{A^4}, A \in (-\infty, -1)$$

$$(h16) \quad Ay_{-1} > \frac{1}{y_0}, Ay_0 > x_0, Ax_0 > \frac{1}{Ay_{-1}}, A^3y_0 > x_0, A \in [-1, 0)$$

(i)  $0 < x_0, y_{-1}$  ve  $y_0x_{-1} < 0$  olsun. Bu durumda otuz bir farklı durum söz konusu olur:

$$(i1) \quad \frac{1}{y_0} > Ay_{-1}, \frac{1}{x_0} > Ax_{-1}, x_0 > Ay_0, y_0 > Ax_0, y_0 > A^3x_0, A \in [-1, 0) \text{ olduğunu}$$

kabul edelim.  $y_0 > A^5x_0$  olsun ( $A \in [-1, 0)$  için  $\lim_{n \rightarrow \infty} A^{2n+1} = 0$  olacağından belirli

değerden sonra  $y_0 > A^{2n+1}x_0$  olacaktır). O zaman, çözümler:

$$x_1 = \max \left\{ \frac{1}{y_0}, Ay_{-1} \right\} = \frac{1}{y_0}$$

$$y_1 = \max \left\{ \frac{1}{x_0}, Ax_{-1} \right\} = \frac{1}{x_0}$$

$$x_2 = \max \left\{ \frac{1}{y_1}, Ay_0 \right\} = x_0$$

$$y_2 = \max \left\{ \frac{1}{x_1}, Ax_0 \right\} = y_0$$

$$x_3 = \max \left\{ \frac{1}{y_2}, Ay_1 \right\} = \frac{A}{x_0}$$

$$y_3 = \max \left\{ \frac{1}{x_2}, Ax_1 \right\} = \frac{A}{y_0}$$

$$x_4 = \max \left\{ \frac{1}{y_3}, Ay_2 \right\} = \frac{y_0}{A}$$

$$y_4 = \max \left\{ \frac{1}{x_3}, Ax_2 \right\} = Ax_0$$

$$\begin{aligned}
x_5 &= \max \left\{ \frac{1}{y_4}, Ay_3 \right\} = \frac{1}{Ax_0} & y_5 &= \max \left\{ \frac{1}{x_4}, Ax_3 \right\} = \frac{A}{y_0} \\
x_6 &= \max \left\{ \frac{1}{y_5}, Ay_4 \right\} = A^2 x_0 & y_6 &= \max \left\{ \frac{1}{x_5}, Ax_4 \right\} = y_0 \\
x_7 &= \max \left\{ \frac{1}{y_6}, Ay_5 \right\} = \frac{A^2}{y_0} & y_7 &= \max \left\{ \frac{1}{x_6}, Ax_5 \right\} = \frac{1}{A^2 x_0} \\
x_8 &= \max \left\{ \frac{1}{y_7}, Ay_6 \right\} = A^2 x_0 & y_8 &= \max \left\{ \frac{1}{x_7}, Ax_6 \right\} = A^3 x_0 \\
x_9 &= \max \left\{ \frac{1}{y_8}, Ay_7 \right\} = \frac{1}{Ax_0} & y_9 &= \max \left\{ \frac{1}{x_8}, Ax_7 \right\} = \frac{1}{A^2 x_0} \\
x_{10} &= \max \left\{ \frac{1}{y_9}, Ay_8 \right\} = A^2 x_0 & y_{10} &= \max \left\{ \frac{1}{x_9}, Ax_8 \right\} = A^3 x_0 \\
x_{11} &= \max \left\{ \frac{1}{y_{10}}, Ay_9 \right\} = \frac{1}{Ax_0} & y_{11} &= \max \left\{ \frac{1}{x_{10}}, Ax_9 \right\} = \frac{1}{A^2 x_0} \\
&\dots & &
\end{aligned}$$

şeklinde. Buradan, (3.1) denklem sisteminin çözümleri

$$(x_n, y_n) = \begin{cases} (x_n) = \left( \frac{1}{y_0}, x_0, \frac{A}{x_0}, \frac{y_0}{A}, \frac{1}{Ax_0}, A^2 x_0, \frac{A^2}{y_0}, A^2 x_0, \frac{1}{Ax_0}, A^2 x_0, \frac{1}{Ax_0}, \dots \right) \\ (y_n) = \left( \frac{1}{x_0}, y_0, \frac{A}{y_0}, Ax_0, \frac{A}{y_0}, y_0, \frac{1}{A^2 x_0}, A^3 x_0, \frac{1}{A^2 x_0}, A^3 x_0, \frac{1}{A^2 x_0}, \dots \right) \end{cases}$$

şeklinde ve er geç iki periyotlu olduğu görülür.

$$\text{(i2)} \quad \frac{1}{y_0} > Ay_{-1}, \quad \frac{1}{x_0} > Ax_{-1}, \quad x_0 > Ay_0, \quad y_0 > Ax_0, \quad x_0 > A^3 y_0, \quad A \in (-\infty, -1)$$

olduğunu kabul edelim.  $A^5 y_0 > x_0$  olsun ( $A \in (-\infty, -1)$  için  $\lim_{n \rightarrow \infty} A^{2n+1} y_0 = \infty$

olacağından belirli değerden sonra  $A^{2n+1} y_0 > x_0$  olacaktır). O zaman, çözümler:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \max \left\{ \frac{1}{y_0}, Ay_{-1} \right\} = \frac{1}{y_0} & y_1 &= \max \left\{ \frac{1}{x_0}, Ax_{-1} \right\} = \frac{1}{x_0} \\
x_2 &= \max \left\{ \frac{1}{y_1}, Ay_0 \right\} = x_0 & y_2 &= \max \left\{ \frac{1}{x_1}, Ax_0 \right\} = y_0 \\
x_3 &= \max \left\{ \frac{1}{y_2}, Ay_1 \right\} = \frac{A}{x_0} & y_3 &= \max \left\{ \frac{1}{x_2}, Ax_1 \right\} = \frac{A}{y_0} \\
x_4 &= \max \left\{ \frac{1}{y_3}, Ay_2 \right\} = Ay_0 & y_4 &= \max \left\{ \frac{1}{x_3}, Ax_2 \right\} = \frac{x_0}{A} \\
x_5 &= \max \left\{ \frac{1}{y_4}, Ay_3 \right\} = \frac{A}{x_0} & y_5 &= \max \left\{ \frac{1}{x_4}, Ax_3 \right\} = \frac{1}{Ay_0} \\
x_6 &= \max \left\{ \frac{1}{y_5}, Ay_4 \right\} = x_0 & y_6 &= \max \left\{ \frac{1}{x_5}, Ax_4 \right\} = A^2 y_0 \\
x_7 &= \max \left\{ \frac{1}{y_6}, Ay_5 \right\} = \frac{1}{A^2 y_0} & y_7 &= \max \left\{ \frac{1}{x_6}, Ax_5 \right\} = \frac{A^2}{x_0} \\
x_8 &= \max \left\{ \frac{1}{y_7}, Ay_6 \right\} = A^3 y_0 & y_8 &= \max \left\{ \frac{1}{x_7}, Ax_6 \right\} = A^2 y_0 \\
x_9 &= \max \left\{ \frac{1}{y_8}, Ay_7 \right\} = \frac{1}{A^2 y_0} & y_9 &= \max \left\{ \frac{1}{x_8}, Ax_7 \right\} = \frac{1}{Ay_0} \\
x_{10} &= \max \left\{ \frac{1}{y_9}, Ay_8 \right\} = A^3 y_0 & y_{10} &= \max \left\{ \frac{1}{x_9}, Ax_8 \right\} = A^2 y_0 \\
x_{11} &= \max \left\{ \frac{1}{y_{10}}, Ay_9 \right\} = \frac{1}{A^2 y_0} & y_{11} &= \max \left\{ \frac{1}{x_{10}}, Ax_9 \right\} = \frac{1}{Ay_0} \\
&\dots & &
\end{aligned}$$

şeklindedir. Buradan, (3.1) denklem sisteminin çözümleri

$$(x_n, y_n) = \begin{cases} (x_n) = \left( \frac{1}{y_0}, x_0, \frac{A}{x_0}, Ay_0, \frac{A}{x_0}, x_0, \frac{1}{A^2 y_0}, A^3 y_0, \frac{1}{A^2 y_0}, A^3 y_0, \frac{1}{A^2 y_0}, \dots \right) \\ (y_n) = \left( \frac{1}{x_0}, y_0, \frac{A}{y_0}, \frac{x_0}{A}, \frac{1}{Ay_0}, A^2 y_0, \frac{A^2}{x_0}, A^2 y_0, \frac{1}{Ay_0}, A^2 y_0, \frac{1}{Ay_0}, \dots \right) \end{cases}$$

şeklinde ve er geç iki periyotlu olduğu görülür.

Benzer şekilde, aşağıdaki durumlarda da (3.1) denklem sisteminin çözümlerinin er geç iki periyotlu olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Bu nedenle, bu durumlar ispatsız olarak verilmiştir.

$$(i3) \frac{1}{y_0} > Ay_{-1}, \frac{1}{x_0} > Ax_{-1}, x_0 > Ay_0, Ax_0 > y_0, A^3 x_0 > y_0, A \in (-\infty, -1)$$

$$(i4) \frac{1}{y_0} > Ay_{-1}, \frac{1}{x_0} > Ax_{-1}, x_0 > Ay_0, Ax_0 > y_0, A \in [-1, 0)$$

$$(i5) \frac{1}{y_0} > Ay_{-1}, \frac{1}{x_0} > Ax_{-1}, Ay_0 > x_0, Ax_0 > y_0, A^3 y_0 > x_0$$

$$(i6) \frac{1}{y_0} > Ay_{-1}, \frac{1}{x_0} > Ax_{-1}, Ay_0 > x_0, y_0 > Ax_0$$

$$(i7) \frac{1}{y_0} > Ay_{-1}, Ax_{-1} > \frac{1}{x_0}, \frac{1}{Ax_{-1}} > Ay_0, Ax_0 > y_0$$

$$(i8) \frac{1}{y_0} > Ay_{-1}, Ax_{-1} > \frac{1}{x_0}, \frac{1}{Ax_{-1}} > Ay_0, y_0 > Ax_0, \frac{A}{y_0} > Ax_{-1}, \frac{1}{A^4} > x_{-1}y_0$$

$$(i9) \frac{1}{y_0} > Ay_{-1}, Ax_{-1} > \frac{1}{x_0}, Ay_0 > \frac{1}{Ax_{-1}}, y_0 > Ax_0, A \in (-\infty, -1)$$

$$(i10) \frac{1}{y_0} > Ay_{-1}, Ax_{-1} > \frac{1}{x_0}, Ay_0 > \frac{1}{Ax_{-1}}, y_0 > Ax_0, A \in [-1, 0)$$

$$(i11) \quad \frac{1}{y_0} > Ay_{-1}, Ax_{-1} > \frac{1}{x_0}, Ay_0 > \frac{1}{Ax_{-1}}, Ax_0 > y_0, \frac{1}{Ax_0} > A^2x_{-1}, A^3x_0 > y_0,$$

$$A \in (-\infty, -1)$$

$$(i12) \quad \frac{1}{y_0} > Ay_{-1}, Ax_{-1} > \frac{1}{x_0}, Ay_0 > \frac{1}{Ax_{-1}}, Ax_0 > y_0, \frac{1}{Ax_0} > A^2x_{-1}, Ax_0 > A^2y_0,$$

$$A \in [-1, 0)$$

$$(i13) \quad \frac{1}{y_0} > Ay_{-1}, Ax_{-1} > \frac{1}{x_0}, Ay_0 > \frac{1}{Ax_{-1}}, Ax_0 > y_0, A^2x_{-1} > \frac{1}{Ax_0}, y_0x_{-1} > \frac{1}{A^4}$$

$$(i14) \quad Ay_{-1} > \frac{1}{y_0}, \frac{1}{x_0} > Ax_{-1}, x_0 > Ay_0, Ax_0 > \frac{1}{Ay_{-1}}, A \in [-1, 0)$$

$$(i15) \quad Ay_{-1} > \frac{1}{y_0}, \frac{1}{x_0} > Ax_{-1}, x_0 > Ay_0, Ax_0 > \frac{1}{Ay_{-1}}, A \in (-\infty, -1)$$

$$(i16) \quad Ay_{-1} > \frac{1}{y_0}, \frac{1}{x_0} > Ax_{-1}, x_0 > Ay_0, \frac{1}{Ay_{-1}} > Ax_0, Ay_{-1} > \frac{A}{x_0}$$

$$(i17) \quad Ay_{-1} > \frac{1}{y_0}, \frac{1}{x_0} > Ax_{-1}, x_0 > Ay_0, \frac{1}{Ay_{-1}} > Ax_0, \frac{A}{x_0} > Ay_{-1}, x_0y_{-1} > A^2, A \in (-\infty, -1)$$

$$(i18) \quad Ay_{-1} > \frac{1}{y_0}, \frac{1}{x_0} > Ax_{-1}, x_0 > Ay_0, \frac{1}{Ay_{-1}} > Ax_0, \frac{A}{x_0} > Ay_{-1}, x_0y_{-1} > \frac{1}{A^4}, A \in [-1, 0)$$

$$(i19) \quad Ay_{-1} > \frac{1}{y_0}, \frac{1}{x_0} > Ax_{-1}, Ay_0 > x_0, \frac{1}{Ay_{-1}} > Ax_0, y_0y_{-1} > \frac{1}{A^3}$$

$$(i20) \quad Ay_{-1} > \frac{1}{y_0}, \frac{1}{x_0} > Ax_{-1}, Ay_0 > x_0, Ax_0 > \frac{1}{Ay_{-1}}, y_0y_{-1} > \frac{1}{A^3}, Ay_0 > A^2x_0,$$

$$Ay_0 > A^4x_0, A \in (-\infty, -1)$$

$$(i21) \quad Ay_{-1} > \frac{1}{y_0}, \frac{1}{x_0} > Ax_{-1}, Ay_0 > x_0, Ax_0 > \frac{1}{Ay_{-1}}, \frac{1}{A^3} > y_0 y_{-1}, \frac{1}{A^4} > x_0 y_{-1},$$

$$A \in (-\infty, -1)$$

$$(i22) \quad Ay_{-1} > \frac{1}{y_0}, \frac{1}{x_0} > Ax_{-1}, Ay_0 > x_0, Ax_0 > \frac{1}{Ay_{-1}}, A^3 y_0 > x_0, A \in [-1, 0)$$

$$(i23) \quad Ay_{-1} > \frac{1}{y_0}, Ax_{-1} > \frac{1}{x_0}, \frac{1}{Ax_{-1}} > Ay_0, Ax_0 > \frac{1}{Ay_{-1}}, x_0 > \frac{A}{x_{-1}}, A \in (-\infty, -1)$$

$$(i24) \quad Ay_{-1} > \frac{1}{y_0}, Ax_{-1} > \frac{1}{x_0}, \frac{1}{Ax_{-1}} > Ay_0, Ax_0 > \frac{1}{Ay_{-1}}, \frac{A}{x_{-1}} > x_0, A \in (-\infty, -1)$$

$$(i25) \quad Ay_{-1} > \frac{1}{y_0}, Ax_{-1} > \frac{1}{x_0}, \frac{1}{Ax_{-1}} > Ay_0, Ax_0 > \frac{1}{Ay_{-1}}, \frac{1}{A^3} > x_0 x_{-1}, A \in [-1, 0)$$

$$(i26) \quad Ay_{-1} > \frac{1}{y_0}, Ax_{-1} > \frac{1}{x_0}, \frac{1}{Ax_{-1}} > Ay_0, \frac{1}{Ay_{-1}} > Ax_0, Ay_{-1} > A^2 x_{-1}, Ax_{-1} > A^2 y_{-1},$$

$$A^3 y_{-1} > x_{-1}, A \in (-\infty, -1)$$

$$(i27) \quad Ay_{-1} > \frac{1}{y_0}, Ax_{-1} > \frac{1}{x_0}, \frac{1}{Ax_{-1}} > Ay_0, \frac{1}{Ay_{-1}} > Ax_0, Ay_{-1} > A^2 x_{-1}, Ax_{-1} > A^2 y_{-1},$$

$$A^3 x_{-1} > y_{-1}, A \in [-1, 0)$$

$$(i28) \quad Ay_{-1} > \frac{1}{y_0}, Ax_{-1} > \frac{1}{x_0}, \frac{1}{Ax_{-1}} > Ay_0, \frac{1}{Ay_{-1}} > Ax_0, Ay_{-1} > A^2 x_{-1}, A^2 y_{-1} > Ax_{-1}$$

$$(i29) \quad Ay_{-1} > \frac{1}{y_0}, Ax_{-1} > \frac{1}{x_0}, \frac{1}{Ax_{-1}} > Ay_0, \frac{1}{Ay_{-1}} > Ax_0, A^2 x_{-1} > Ay_{-1}, Ax_{-1} > A^2 y_{-1}$$

$$(i30) \quad Ay_{-1} > \frac{1}{y_0}, Ax_{-1} > \frac{1}{x_0}, \frac{1}{Ax_{-1}} > Ay_0, \frac{1}{Ay_{-1}} > Ax_0, A^2x_{-1} > Ay_{-1}, A^2y_{-1} > Ax_{-1},$$

$$y_{-1} > A^3x_{-1}, A \in (-\infty, -1)$$

$$(i31) \quad Ay_{-1} > \frac{1}{y_0}, Ax_{-1} > \frac{1}{x_0}, \frac{1}{Ax_{-1}} > Ay_0, \frac{1}{Ay_{-1}} > Ax_0, A^2x_{-1} > Ay_{-1}, A^2y_{-1} > Ax_{-1},$$

$$x_{-1} > A^3y_{-1}, A \in [-1, 0)$$

(j)  $x_{-1}, y_{-1} > 0$  ve  $0 > y_0, x_0$  olsun. Bu durumda on üç farklı durum söz konusu olur:

$$(j1) \quad \frac{1}{y_0} > Ay_{-1}, \frac{1}{x_0} > Ax_{-1}, A \in (-\infty, -1) \text{ olduğunu kabul edelim. O zaman,}$$

çözümler:

$$x_1 = \max \left\{ \frac{1}{y_0}, Ay_{-1} \right\} = \frac{1}{y_0}$$

$$y_1 = \max \left\{ \frac{1}{x_0}, Ax_{-1} \right\} = \frac{1}{x_0}$$

$$x_2 = \max \left\{ \frac{1}{y_1}, Ay_0 \right\} = Ay_0$$

$$y_2 = \max \left\{ \frac{1}{x_1}, Ax_0 \right\} = Ax_0$$

$$x_3 = \max \left\{ \frac{1}{y_2}, Ay_1 \right\} = \frac{A}{x_0}$$

$$y_3 = \max \left\{ \frac{1}{x_2}, Ax_1 \right\} = \frac{A}{y_0}$$

$$x_4 = \max \left\{ \frac{1}{y_3}, Ay_2 \right\} = \frac{y_0}{A}$$

$$y_4 = \max \left\{ \frac{1}{x_3}, Ax_2 \right\} = \frac{x_0}{A}$$

$$x_5 = \max \left\{ \frac{1}{y_4}, Ay_3 \right\} = \frac{A}{x_0}$$

$$y_5 = \max \left\{ \frac{1}{x_4}, Ax_3 \right\} = \frac{A}{y_0}$$

$$x_6 = \max \left\{ \frac{1}{y_5}, Ay_4 \right\} = \frac{y_0}{A}$$

$$y_6 = \max \left\{ \frac{1}{x_5}, Ax_4 \right\} = \frac{x_0}{A}$$

...

şeklindedir. Buradan, (3.1) denklem sisteminin çözümlerinin

$$(x_n, y_n) = \begin{cases} (x_n) = \left(\frac{1}{y_0}, Ay_0, \frac{A}{x_0}, \frac{y_0}{A}, \frac{A}{x_0}, \frac{y_0}{A}, \dots\right) \\ (y_n) = \left(\frac{1}{x_0}, Ax_0, \frac{A}{y_0}, \frac{x_0}{A}, \frac{A}{y_0}, \frac{x_0}{A}, \dots\right) \end{cases}$$

şeklinde ve er geç iki periyotlu olduğu görülür.

**(j2)**  $\frac{1}{y_0} > Ay_{-1}, \frac{1}{x_0} > Ax_{-1}, A \in [-1, 0)$  olduğunu kabul edelim. O zaman,

çözümler:

$$x_1 = \max \left\{ \frac{1}{y_0}, Ay_{-1} \right\} = \frac{1}{y_0}$$

$$y_1 = \max \left\{ \frac{1}{x_0}, Ax_{-1} \right\} = \frac{1}{x_0}$$

$$x_2 = \max \left\{ \frac{1}{y_1}, Ay_0 \right\} = Ay_0$$

$$y_2 = \max \left\{ \frac{1}{x_1}, Ax_0 \right\} = Ax_0$$

$$x_3 = \max \left\{ \frac{1}{y_2}, Ay_1 \right\} = \frac{1}{Ax_0}$$

$$y_3 = \max \left\{ \frac{1}{x_2}, Ax_1 \right\} = \frac{1}{Ay_0}$$

$$x_4 = \max \left\{ \frac{1}{y_3}, Ay_2 \right\} = Ay_0$$

$$y_4 = \max \left\{ \frac{1}{x_3}, Ax_2 \right\} = Ax_0$$

$$x_5 = \max \left\{ \frac{1}{y_4}, Ay_3 \right\} = \frac{1}{Ax_0}$$

$$y_5 = \max \left\{ \frac{1}{x_4}, Ax_3 \right\} = \frac{1}{Ay_0}$$

...

şeklinindedir. Buradan, (3.1) denklem sisteminin çözümlerinin

$$(x_n, y_n) = \begin{cases} (x_n) = \left(\frac{1}{y_0}, Ay_0, \frac{1}{Ax_0}, Ay_0, \frac{1}{Ax_0}, \dots\right) \\ (y_n) = \left(\frac{1}{x_0}, Ax_0, \frac{1}{Ay_0}, Ax_0, \frac{1}{Ay_0}, \dots\right) \end{cases}$$

şeklinde ve er geç iki periyotlu olduğu görülür.

Benzer şekilde, aşağıdaki durumlarda da (3.1) denklem sisteminin çözümlerinin er geç iki periyotlu olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Bu nedenle, bu durumlar ispatsız olarak verilmiştir.

$$(j3) \frac{1}{y_0} > Ay_{-1}, Ax_{-1} > \frac{1}{x_0}, \frac{1}{Ax_0} > A^2x_{-1}, A \in (-\infty, -1)$$

$$(j4) \frac{1}{y_0} > Ay_{-1}, Ax_{-1} > \frac{1}{x_0}, A^2x_{-1} > \frac{1}{Ax_0}, A \in (-\infty, -1)$$

$$(j5) \frac{1}{y_0} > Ay_{-1}, Ax_{-1} > \frac{1}{x_0}, A \in [-1, 0)$$

$$(j6) Ay_{-1} > \frac{1}{y_0}, \frac{1}{x_0} > Ax_{-1}, \frac{1}{Ay_0} > \frac{A}{x_0}, \frac{1}{Ay_0} > A^2y_{-1}$$

$$(j7) Ay_{-1} > \frac{1}{y_0}, \frac{1}{x_0} > Ax_{-1}, \frac{1}{Ay_0} > \frac{A}{x_0}, A^2y_{-1} > \frac{1}{Ay_0}$$

$$(j8) Ay_{-1} > \frac{1}{y_0}, \frac{1}{x_0} > Ax_{-1}, \frac{A}{x_0} > \frac{1}{Ay_0}, \frac{1}{Ay_0} > A^2y_{-1}$$

$$(j9) Ay_{-1} > \frac{1}{y_0}, \frac{1}{x_0} > Ax_{-1}, \frac{A}{x_0} > \frac{1}{Ay_0}, A^2y_{-1} > \frac{1}{Ay_0}$$

$$(j10) Ay_{-1} > \frac{1}{y_0}, Ax_{-1} > \frac{1}{x_0}, \frac{1}{Ax_0} > A^2x_{-1}, \frac{1}{Ay_0} > A^2y_{-1}$$

$$(j11) Ay_{-1} > \frac{1}{y_0}, Ax_{-1} > \frac{1}{x_0}, \frac{1}{Ax_0} > A^2x_{-1}, A^2y_{-1} > \frac{1}{Ay_0}$$

$$(j12) \quad Ay_{-1} > \frac{1}{y_0}, Ax_{-1} > \frac{1}{x_0}, A^2x_{-1} > \frac{1}{Ax_0}, \frac{1}{Ay_0} > A^2y_{-1}$$

$$(j13) \quad Ay_{-1} > \frac{1}{y_0}, Ax_{-1} > \frac{1}{x_0}, A^2x_{-1} > \frac{1}{Ax_0}, A^2y_{-1} > \frac{1}{Ay_0}$$

(k)  $x_{-1}, x_0 > 0$  ve  $0 > y_0, y_{-1}$  olsun. Bu durumda iki farklı durum söz konusu olur:

(k1)  $x_0 > Ay_0$  olduğunu kabul edelim. O zaman, çözümler:

$$x_1 = \max \left\{ \frac{1}{y_0}, Ay_{-1} \right\} = Ay_{-1}$$

$$y_1 = \max \left\{ \frac{1}{x_0}, Ax_{-1} \right\} = \frac{1}{x_0}$$

$$x_2 = \max \left\{ \frac{1}{y_1}, Ay_0 \right\} = x_0$$

$$y_2 = \max \left\{ \frac{1}{x_1}, Ax_0 \right\} = \frac{1}{Ay_{-1}}$$

$$x_3 = \max \left\{ \frac{1}{y_2}, Ay_1 \right\} = Ay_{-1}$$

$$y_3 = \max \left\{ \frac{1}{x_2}, Ax_1 \right\} = \frac{1}{x_0}$$

$$x_4 = \max \left\{ \frac{1}{y_3}, Ay_2 \right\} = x_0$$

$$y_4 = \max \left\{ \frac{1}{x_3}, Ax_2 \right\} = \frac{1}{Ay_{-1}}$$

...

şeklindedir. Buradan, (3.1) denklem sisteminin çözümlerinin

$$(x_n, y_n) = \begin{cases} (x_n) = (Ay_{-1}, x_0, Ay_{-1}, x_0, \dots) \\ (y_n) = \left( \frac{1}{x_0}, \frac{1}{Ay_{-1}}, \frac{1}{x_0}, \frac{1}{Ay_{-1}}, \dots \right) \end{cases}$$

şeklinde ve iki periyotlu olduğu görülür.

(k2)  $Ay_0 > x_0$  olduğunu kabul edelim. O zaman, çözümler:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \max \left\{ \frac{1}{y_0}, Ay_{-1} \right\} = Ay_{-1} & y_1 &= \max \left\{ \frac{1}{x_0}, Ax_{-1} \right\} = \frac{1}{x_0} \\
x_2 &= \max \left\{ \frac{1}{y_1}, Ay_0 \right\} = Ay_0 & y_2 &= \max \left\{ \frac{1}{x_1}, Ax_0 \right\} = \frac{1}{Ay_{-1}} \\
x_3 &= \max \left\{ \frac{1}{y_2}, Ay_1 \right\} = Ay_{-1} & y_3 &= \max \left\{ \frac{1}{x_2}, Ax_1 \right\} = \frac{1}{Ay_0} \\
x_4 &= \max \left\{ \frac{1}{y_3}, Ay_2 \right\} = Ay_0 & y_4 &= \max \left\{ \frac{1}{x_3}, Ax_2 \right\} = \frac{1}{Ay_{-1}} \\
x_5 &= \max \left\{ \frac{1}{y_4}, Ay_3 \right\} = Ay_{-1} & y_5 &= \max \left\{ \frac{1}{x_4}, Ax_3 \right\} = \frac{1}{Ay_0} \\
&\dots & &
\end{aligned}$$

şeklindedir. Buradan, (3.1) denklem sisteminin çözümlerinin

$$(x_n, y_n) = \begin{cases} (x_n) = (Ay_{-1}, Ay_0, Ay_{-1}, Ay_0, Ay_{-1}, \dots) \\ (y_n) = \left( \frac{1}{x_0}, \frac{1}{Ay_{-1}}, \frac{1}{Ay_0}, \frac{1}{Ay_{-1}}, \frac{1}{Ay_0}, \dots \right) \end{cases}$$

şeklinde ve er geç iki periyotlu olduğu görülür.

(I)  $x_{-1} > 0$  ve  $0 > y_0, y_{-1}, x_0$  olsun. Bu durumda sekiz farklı durum söz konusu olur:

(II)  $\frac{1}{x_0} > Ax_{-1}, \frac{1}{Ay_{-1}} > Ax_0, \frac{A}{x_0} > Ay_{-1}$  olduğunu kabul edelim. O zaman,

çözümler:

$$x_1 = \max \left\{ \frac{1}{y_0}, Ay_{-1} \right\} = Ay_{-1} \qquad y_1 = \max \left\{ \frac{1}{x_0}, Ax_{-1} \right\} = \frac{1}{x_0}$$

$$\begin{aligned}
x_2 &= \max \left\{ \frac{1}{y_1}, Ay_0 \right\} = Ay_0 & y_2 &= \max \left\{ \frac{1}{x_1}, Ax_0 \right\} = \frac{1}{Ay_{-1}} \\
x_3 &= \max \left\{ \frac{1}{y_2}, Ay_1 \right\} = \frac{A}{x_0} & y_3 &= \max \left\{ \frac{1}{x_2}, Ax_1 \right\} = \frac{1}{Ay_0} \\
x_4 &= \max \left\{ \frac{1}{y_3}, Ay_2 \right\} = Ay_0 & y_4 &= \max \left\{ \frac{1}{x_3}, Ax_2 \right\} = \frac{x_0}{A} \\
x_5 &= \max \left\{ \frac{1}{y_4}, Ay_3 \right\} = \frac{A}{x_0} & y_5 &= \max \left\{ \frac{1}{x_4}, Ax_3 \right\} = \frac{1}{Ay_0} \\
x_6 &= \max \left\{ \frac{1}{y_5}, Ay_4 \right\} = Ay_0 & y_6 &= \max \left\{ \frac{1}{x_5}, Ax_4 \right\} = \frac{x_0}{A} \\
&\dots
\end{aligned}$$

şeklindedir. Buradan, (3.1) denklem sisteminin çözümlerinin

$$(x_n, y_n) = \begin{cases} (x_n) = (Ay_{-1}, Ay_0, \frac{A}{x_0}, Ay_0, \frac{A}{x_0}, Ay_0, \dots) \\ (y_n) = (\frac{1}{x_0}, \frac{1}{Ay_{-1}}, \frac{1}{Ay_0}, \frac{x_0}{A}, \frac{1}{Ay_0}, \frac{x_0}{A}, \dots) \end{cases}$$

şeklinde ve er geç iki periyotlu olduğu görülür.

**(12)**  $\frac{1}{x_0} > Ax_{-1}, \frac{1}{Ay_{-1}} > Ax_0, Ay_{-1} > \frac{A}{x_0}$  olduğunu kabul edelim. O zaman,

çözümler:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \max \left\{ \frac{1}{y_0}, Ay_{-1} \right\} = Ay_{-1} & y_1 &= \max \left\{ \frac{1}{x_0}, Ax_{-1} \right\} = \frac{1}{x_0} \\
x_2 &= \max \left\{ \frac{1}{y_1}, Ay_0 \right\} = Ay_0 & y_2 &= \max \left\{ \frac{1}{x_1}, Ax_0 \right\} = \frac{1}{Ay_{-1}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_3 &= \max \left\{ \frac{1}{y_2}, Ay_1 \right\} = Ay_{-1} & y_3 &= \max \left\{ \frac{1}{x_2}, Ax_1 \right\} = \frac{1}{Ay_0} \\
x_4 &= \max \left\{ \frac{1}{y_3}, Ay_2 \right\} = Ay_0 & y_4 &= \max \left\{ \frac{1}{x_3}, Ax_2 \right\} = \frac{1}{Ay_{-1}} \\
x_5 &= \max \left\{ \frac{1}{y_4}, Ay_3 \right\} = Ay_{-1} & y_5 &= \max \left\{ \frac{1}{x_4}, Ax_3 \right\} = \frac{1}{Ay_0} \\
&\dots
\end{aligned}$$

şeklindedir. Buradan, (3.1) denklem sisteminin çözümlerinin

$$(x_n, y_n) = \begin{cases} (x_n) = (Ay_{-1}, Ay_0, Ay_{-1}, Ay_0, Ay_{-1}, \dots) \\ (y_n) = \left( \frac{1}{x_0}, \frac{1}{Ay_{-1}}, \frac{1}{Ay_0}, \frac{1}{Ay_{-1}}, \frac{1}{Ay_0}, \dots \right) \end{cases}$$

şeklinde ve er geç iki periyotlu olduğu görülür.

Benzer şekilde, aşağıdaki durumlarda da (3.1) denklem sisteminin çözümlerinin er geç iki periyotlu olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Bu nedenle, bu durumlar ispatlı olarak verilmiştir.

$$(13) \quad \frac{1}{x_0} > Ax_{-1}, Ax_0 > \frac{1}{Ay_{-1}}, A \in (-\infty, -1)$$

$$(14) \quad \frac{1}{x_0} > Ax_{-1}, Ax_0 > \frac{1}{Ay_{-1}}, A \in [-1, 0)$$

$$(15) \quad Ax_{-1} > \frac{1}{x_0}, \frac{1}{Ay_{-1}} > Ax_0, Ay_{-1} > A^2 x_{-1}$$

$$(16) \quad Ax_{-1} > \frac{1}{x_0}, \frac{1}{Ay_{-1}} > Ax_0, A^2 x_{-1} > Ay_{-1}$$

$$(17) \quad Ax_{-1} > \frac{1}{x_0}, Ax_0 > \frac{1}{Ay_{-1}}, \frac{1}{Ax_0} > A^2x_{-1}$$

$$(18) \quad Ax_{-1} > \frac{1}{x_0}, Ax_0 > \frac{1}{Ay_{-1}}, A^2x_{-1} > \frac{1}{Ax_0}$$

(m)  $x_0 > 0$  ve  $0 > y_0, y_{-1}, x_{-1}$  olsun. Bu durumda dört farklı durum söz konusu olur:

(m1)  $\frac{1}{x_0} > Ax_{-1}, x_0 > Ay_0$  olduğunu kabul edelim. O zaman, çözümler:

$$x_1 = \max \left\{ \frac{1}{y_0}, Ay_{-1} \right\} = Ay_{-1}$$

$$y_1 = \max \left\{ \frac{1}{x_0}, Ax_{-1} \right\} = \frac{1}{x_0}$$

$$x_2 = \max \left\{ \frac{1}{y_1}, Ay_0 \right\} = x_0$$

$$y_2 = \max \left\{ \frac{1}{x_1}, Ax_0 \right\} = \frac{1}{Ay_{-1}}$$

$$x_3 = \max \left\{ \frac{1}{y_2}, Ay_1 \right\} = Ay_{-1}$$

$$y_3 = \max \left\{ \frac{1}{x_2}, Ax_1 \right\} = \frac{1}{x_0}$$

$$x_4 = \max \left\{ \frac{1}{y_3}, Ay_2 \right\} = x_0$$

$$y_4 = \max \left\{ \frac{1}{x_3}, Ax_2 \right\} = \frac{1}{Ay_{-1}}$$

...

şeklindedir. Buradan, (3.1) denklem sisteminin çözümlerinin

$$(x_n, y_n) = \begin{cases} (x_n) = (Ay_{-1}, x_0, Ay_{-1}, x_0, \dots) \\ (y_n) = \left( \frac{1}{x_0}, \frac{1}{Ay_{-1}}, \frac{1}{x_0}, \frac{1}{Ay_{-1}}, \dots \right) \end{cases}$$

şeklinde ve iki periyotlu olduğu görülür.

**(m2)**  $\frac{1}{x_0} > Ax_{-1}, x_0 > Ay_0$  olduğunu kabul edelim. O zaman, çözümler:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \max \left\{ \frac{1}{y_0}, Ay_{-1} \right\} = Ay_{-1} & y_1 &= \max \left\{ \frac{1}{x_0}, Ax_{-1} \right\} = \frac{1}{x_0} \\
 x_2 &= \max \left\{ \frac{1}{y_1}, Ay_0 \right\} = x_0 & y_2 &= \max \left\{ \frac{1}{x_1}, Ax_0 \right\} = \frac{1}{Ay_{-1}} \\
 x_3 &= \max \left\{ \frac{1}{y_2}, Ay_1 \right\} = Ay_{-1} & y_3 &= \max \left\{ \frac{1}{x_2}, Ax_1 \right\} = \frac{1}{Ay_0} \\
 x_4 &= \max \left\{ \frac{1}{y_3}, Ay_2 \right\} = Ay_0 & y_4 &= \max \left\{ \frac{1}{x_3}, Ax_2 \right\} = \frac{1}{Ay_{-1}} \\
 x_5 &= \max \left\{ \frac{1}{y_4}, Ay_3 \right\} = Ay_{-1} & y_5 &= \max \left\{ \frac{1}{x_4}, Ax_3 \right\} = \frac{1}{Ay_0} \\
 x_6 &= \max \left\{ \frac{1}{y_5}, Ay_4 \right\} = Ay_0 & y_6 &= \max \left\{ \frac{1}{x_5}, Ax_4 \right\} = \frac{1}{Ay_{-1}} \\
 &\dots & &
 \end{aligned}$$

şeklindedir. Buradan, (3.1) denklem sisteminin çözümlerinin

$$(x_n, y_n) = \begin{cases} (x_n) = (Ay_{-1}, Ay_0, Ay_{-1}, Ay_0, Ay_{-1}, \dots) \\ (y_n) = \left( \frac{1}{x_0}, \frac{1}{Ay_{-1}}, \frac{1}{Ay_0}, \frac{1}{Ay_{-1}}, \frac{1}{Ay_0}, \dots \right) \end{cases}$$

şeklinde ve er geç iki periyotlu olduğu görülür.

Benzer şekilde, aşağıdaki durumlarda da (3.1) denklem sisteminin çözümlerinin er geç iki periyotlu olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Bu nedenle, bu durumlar ispatsız olarak verilmiştir.

$$\mathbf{(m3)} \quad Ax_{-1} > \frac{1}{x_0}, \frac{1}{Ax_{-1}} > Ay_0$$

$$(m4) \quad Ax_{-1} > \frac{1}{x_0}, Ay_0 > \frac{1}{Ax_{-1}}$$

(n)  $y_{-1} > 0$  ve  $0 > y_0, x_0, x_{-1}$  olsun. Bu durumda sekiz farklı durum söz konusu olur:

$$(n1) \quad \frac{1}{y_0} > Ay_{-1}, \frac{1}{Ax_{-1}} > Ay_0, Ax_{-1} > \frac{A}{y_0} \text{ olduğunu kabul edelim. O zaman,}$$

çözümler:

$$\begin{aligned} x_1 &= \max \left\{ \frac{1}{y_0}, Ay_{-1} \right\} = \frac{1}{y_0} & y_1 &= \max \left\{ \frac{1}{x_0}, Ax_{-1} \right\} = Ax_{-1} \\ x_2 &= \max \left\{ \frac{1}{y_1}, Ay_0 \right\} = \frac{1}{Ax_{-1}} & y_2 &= \max \left\{ \frac{1}{x_1}, Ax_0 \right\} = Ax_0 \\ x_3 &= \max \left\{ \frac{1}{y_2}, Ay_1 \right\} = \frac{1}{Ax_0} & y_3 &= \max \left\{ \frac{1}{x_2}, Ax_1 \right\} = Ax_{-1} \\ x_4 &= \max \left\{ \frac{1}{y_3}, Ay_2 \right\} = \frac{1}{Ax_{-1}} & y_4 &= \max \left\{ \frac{1}{x_3}, Ax_2 \right\} = Ax_0 \\ x_5 &= \max \left\{ \frac{1}{y_4}, Ay_3 \right\} = \frac{1}{Ax_0} & y_5 &= \max \left\{ \frac{1}{x_4}, Ax_3 \right\} = Ax_{-1} \\ & \dots & & \dots \end{aligned}$$

şeklindedir. Buradan, (3.1) denklem sisteminin çözümlerinin

$$(x_n, y_n) = \begin{cases} (x_n) = \left( \frac{1}{y_0}, \frac{1}{Ax_{-1}}, \frac{1}{Ax_0}, \frac{1}{Ax_{-1}}, \frac{1}{Ax_0}, \dots \right) \\ (y_n) = (Ax_{-1}, Ax_0, Ax_{-1}, Ax_0, Ax_{-1}, \dots) \end{cases}$$

şeklinde ve er geç iki periyotlu olduğu görülür.

(n2)  $\frac{1}{y_0} > Ay_{-1}, \frac{1}{Ax_{-1}} > Ay_0, \frac{A}{y_0} > Ax_{-1}$  olduğunu kabul edelim. O zaman,

çözümler:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \max \left\{ \frac{1}{y_0}, Ay_{-1} \right\} = \frac{1}{y_0} & y_1 &= \max \left\{ \frac{1}{x_0}, Ax_{-1} \right\} = Ax_{-1} \\
 x_2 &= \max \left\{ \frac{1}{y_1}, Ay_0 \right\} = \frac{1}{Ax_{-1}} & y_2 &= \max \left\{ \frac{1}{x_1}, Ax_0 \right\} = Ax_0 \\
 x_3 &= \max \left\{ \frac{1}{y_2}, Ay_1 \right\} = \frac{1}{Ax_0} & y_3 &= \max \left\{ \frac{1}{x_2}, Ax_1 \right\} = \frac{A}{y_0} \\
 x_4 &= \max \left\{ \frac{1}{y_3}, Ay_2 \right\} = \frac{y_0}{A} & y_4 &= \max \left\{ \frac{1}{x_3}, Ax_2 \right\} = Ax_0 \\
 x_5 &= \max \left\{ \frac{1}{y_4}, Ay_3 \right\} = \frac{1}{Ax_0} & y_5 &= \max \left\{ \frac{1}{x_4}, Ax_3 \right\} = \frac{A}{y_0} \\
 x_6 &= \max \left\{ \frac{1}{y_5}, Ay_4 \right\} = \frac{y_0}{A} & y_6 &= \max \left\{ \frac{1}{x_5}, Ax_4 \right\} = Ax_0 \\
 & \dots & &
 \end{aligned}$$

şeklindedir. Buradan, (3.1) denklem sisteminin çözümlerinin

$$(x_n, y_n) = \begin{cases} (x_n) = \left( \frac{1}{y_0}, \frac{1}{Ax_{-1}}, \frac{1}{Ax_0}, \frac{y_0}{A}, \frac{1}{Ax_0}, \frac{y_0}{A}, \dots \right) \\ (y_n) = \left( Ax_{-1}, Ax_0, \frac{A}{y_0}, Ax_0, \frac{A}{y_0}, Ax_0, \dots \right) \end{cases}$$

şeklinde ve er geç iki periyotlu olduğu görülür.

Benzer şekilde, aşağıdaki durumlarda da (3.1) denklem sisteminin çözümlerinin er geç iki periyotlu olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Bu nedenle, bu durumlar ispatsız olarak verilmiştir.

$$(n3) \frac{1}{y_0} > Ay_{-1}, Ay_0 > \frac{1}{Ax_{-1}}, A \in (-\infty, -1)$$

$$(n4) \frac{1}{y_0} > Ay_{-1}, Ay_0 > \frac{1}{Ax_{-1}}, A \in [-1, 0)$$

$$(n5) Ay_{-1} > \frac{1}{y_0}, \frac{1}{Ax_{-1}} > Ay_0, Ax_{-1} > A^2 y_{-1}$$

$$(n6) Ay_{-1} > \frac{1}{y_0}, \frac{1}{Ax_{-1}} > Ay_0, A^2 y_{-1} > Ax_{-1}$$

$$(n7) Ay_{-1} > \frac{1}{y_0}, Ay_0 > \frac{1}{Ax_{-1}}, \frac{1}{Ay_0} > A^2 y_{-1}$$

$$(n8) Ay_{-1} > \frac{1}{y_0}, Ay_0 > \frac{1}{Ax_{-1}}, A^2 y_{-1} > \frac{1}{Ay_0}$$

(ö)  $y_0 > 0$  ve  $0 > y_{-1}, x_0, x_{-1}$  olsun. Bu durumda dört farklı durum söz konusu olur:

(ö1)  $\frac{1}{y_0} > Ay_{-1}, y_0 > Ax_0$  olduğunu kabul edelim. O zaman, çözümler:

$$x_1 = \max \left\{ \frac{1}{y_0}, Ay_{-1} \right\} = \frac{1}{y_0}$$

$$y_1 = \max \left\{ \frac{1}{x_0}, Ax_{-1} \right\} = Ax_{-1}$$

$$x_2 = \max \left\{ \frac{1}{y_1}, Ay_0 \right\} = \frac{1}{Ax_{-1}}$$

$$y_2 = \max \left\{ \frac{1}{x_1}, Ax_0 \right\} = y_0$$

$$\begin{aligned}
 x_3 &= \max \left\{ \frac{1}{y_2}, Ay_1 \right\} = \frac{1}{y_0} & y_3 &= \max \left\{ \frac{1}{x_2}, Ax_1 \right\} = Ax_{-1} \\
 x_4 &= \max \left\{ \frac{1}{y_3}, Ay_2 \right\} = \frac{1}{Ax_{-1}} & y_4 &= \max \left\{ \frac{1}{x_3}, Ax_2 \right\} = y_0 \\
 &\dots & &
 \end{aligned}$$

şeklindedir. Buradan, (3.1) denklem sisteminin çözümlerinin

$$(x_n, y_n) = \begin{cases} (x_n) = \left( \frac{1}{y_0}, \frac{1}{Ax_{-1}}, \frac{1}{y_0}, \frac{1}{Ax_{-1}}, \dots \right) \\ (y_n) = (Ax_{-1}, y_0, Ax_{-1}, y_0, \dots) \end{cases}$$

şeklinde ve iki periyotlu olduğu görülür.

**(ö2)**  $\frac{1}{y_0} > Ay_{-1}, Ax_0 > y_0$  olduğunu kabul edelim. O zaman, çözümler:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \max \left\{ \frac{1}{y_0}, Ay_{-1} \right\} = \frac{1}{y_0} & y_1 &= \max \left\{ \frac{1}{x_0}, Ax_{-1} \right\} = Ax_{-1} \\
 x_2 &= \max \left\{ \frac{1}{y_1}, Ay_0 \right\} = \frac{1}{Ax_{-1}} & y_2 &= \max \left\{ \frac{1}{x_1}, Ax_0 \right\} = Ax_0 \\
 x_3 &= \max \left\{ \frac{1}{y_2}, Ay_1 \right\} = \frac{1}{Ax_0} & y_3 &= \max \left\{ \frac{1}{x_2}, Ax_1 \right\} = Ax_{-1} \\
 x_4 &= \max \left\{ \frac{1}{y_3}, Ay_2 \right\} = \frac{1}{Ax_{-1}} & y_4 &= \max \left\{ \frac{1}{x_3}, Ax_2 \right\} = Ax_0 \\
 x_5 &= \max \left\{ \frac{1}{y_4}, Ay_3 \right\} = \frac{1}{Ax_0} & y_5 &= \max \left\{ \frac{1}{x_4}, Ax_3 \right\} = Ax_{-1} \\
 &\dots & &
 \end{aligned}$$

şeklindedir. Buradan, (3.1) denklem sisteminin çözümlerinin

$$(x_n, y_n) = \begin{cases} (x_n) = \left(\frac{1}{y_0}, \frac{1}{Ax_{-1}}, \frac{1}{Ax_0}, \frac{1}{Ax_{-1}}, \frac{1}{Ax_0}, \dots\right) \\ (y_n) = (Ax_{-1}, Ax_0, Ax_{-1}, Ax_0, Ax_{-1}, \dots) \end{cases}$$

şeklinde ve er geç iki periyotlu olduğu görülür.

Benzer şekilde, aşağıdaki durumlarda da (3.1) denklem sisteminin çözümlerinin er geç iki periyotlu olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Bu nedenle, bu durumlar ispatsız olarak verilmiştir.

$$(ö3) \quad Ay_{-1} > \frac{1}{y_0}, \frac{1}{Ay_{-1}} > Ax_0$$

$$(ö4) \quad Ay_{-1} > \frac{1}{y_0}, Ax_0 > \frac{1}{Ay_{-1}}$$

(p)  $0 > y_0, y_{-1}, x_0, x_{-1}$  olsun. Bu durumda dört farklı durum söz konusu olur:

(p1)  $\frac{1}{Ax_{-1}} > Ay_0, \frac{1}{Ay_{-1}} > Ax_0$  olduğunu kabul edelim. O zaman, çözümler:

$$x_1 = \max \left\{ \frac{1}{y_0}, Ay_{-1} \right\} = Ay_{-1}$$

$$y_1 = \max \left\{ \frac{1}{x_0}, Ax_{-1} \right\} = Ax_{-1}$$

$$x_2 = \max \left\{ \frac{1}{y_1}, Ay_0 \right\} = \frac{1}{Ax_{-1}}$$

$$y_2 = \max \left\{ \frac{1}{x_1}, Ax_0 \right\} = \frac{1}{Ay_{-1}}$$

$$x_3 = \max \left\{ \frac{1}{y_2}, Ay_1 \right\} = Ay_{-1}$$

$$y_3 = \max \left\{ \frac{1}{x_2}, Ax_1 \right\} = Ax_{-1}$$

$$x_4 = \max \left\{ \frac{1}{y_3}, Ay_2 \right\} = \frac{1}{Ax_{-1}}$$

$$y_4 = \max \left\{ \frac{1}{x_3}, Ax_2 \right\} = \frac{1}{Ay_{-1}}$$

...

şeklindedir. Buradan, (3.1) denklem sisteminin çözümlerinin

$$(x_n, y_n) = \begin{cases} (x_n) = (Ay_{-1}, \frac{1}{Ax_{-1}}, Ay_{-1}, \frac{1}{Ax_{-1}}, \dots) \\ (y_n) = (Ax_{-1}, \frac{1}{Ay_{-1}}, Ax_{-1}, \frac{1}{Ay_{-1}}, \dots) \end{cases}$$

şeklinde ve iki periyotlu olduğu görülür.

**(p2)**  $\frac{1}{Ax_{-1}} > Ay_0, Ax_0 > \frac{1}{Ay_{-1}}$  olduğunu kabul edelim. O zaman, çözümler:

$$\begin{aligned} x_1 &= \max \left\{ \frac{1}{y_0}, Ay_{-1} \right\} = Ay_{-1} & y_1 &= \max \left\{ \frac{1}{x_0}, Ax_{-1} \right\} = Ax_{-1} \\ x_2 &= \max \left\{ \frac{1}{y_1}, Ay_0 \right\} = \frac{1}{Ax_{-1}} & y_2 &= \max \left\{ \frac{1}{x_1}, Ax_0 \right\} = Ax_0 \\ x_3 &= \max \left\{ \frac{1}{y_2}, Ay_1 \right\} = \frac{1}{Ax_0} & y_3 &= \max \left\{ \frac{1}{x_2}, Ax_1 \right\} = Ax_{-1} \\ x_4 &= \max \left\{ \frac{1}{y_3}, Ay_2 \right\} = \frac{1}{Ax_{-1}} & y_4 &= \max \left\{ \frac{1}{x_3}, Ax_2 \right\} = Ax_0 \\ &\dots & & \end{aligned}$$

şeklindedir. Buradan, (3.1) denklem sisteminin çözümlerinin

$$(x_n, y_n) = \begin{cases} (x_n) = (Ay_{-1}, \frac{1}{Ax_{-1}}, \frac{1}{Ax_0}, \frac{1}{Ax_{-1}}, \frac{1}{Ax_0}, \dots) \\ (y_n) = (Ax_{-1}, Ax_0, Ax_{-1}, Ax_0, Ax_{-1}, \dots) \end{cases}$$

şeklinde ve er geç iki periyotlu olduğu görülür.

Benzer şekilde, aşağıdaki durumlarda da (3.1) denklem sisteminin çözümlerinin er geç iki periyotlu olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Bu nedenle, bu durumlar ispatsız olarak verilmiştir.

$$(p3) \quad Ay_0 > \frac{1}{Ax_{-1}}, \frac{1}{Ay_{-1}} > Ax_0$$

$$(p4) \quad Ay_0 > \frac{1}{Ax_{-1}}, Ax_0 > \frac{1}{Ay_{-1}}$$

### 3.1. Nümerik Sonuçlar

Bu kısımda, (3.1) denklem sisteminin çözümlerine ait nümerik örnekler verilmiştir.

**Örnek 3.1.**  $A = -0,5$  ve başlangıç değerleri  $x_{-1} = 10, x_0 = -0,25, y_{-1} = -2, y_0 = 0,6$  olmak üzere (3.1) denklem sisteminin çözümleri aşağıdaki tablo ile verilmiştir.

| $n$ | $x_n$    | $y_n$  | $n$ | $x_n$ | $y_n$ | $n$ | $x_n$ | $y_n$ |
|-----|----------|--------|-----|-------|-------|-----|-------|-------|
| -1  | 10       | -2     | 8   | -0,25 | 0,5   | 17  | 2     | -1    |
| 0   | -0,25    | 0,6    | 9   | 2     | -1    | 18  | -0,25 | 0,5   |
| 1   | 1,666667 | -4     | 10  | -0,25 | 0,5   | 19  | 2     | -1    |
| 2   | -0,25    | 0,6    | 11  | 2     | -1    | 20  | -0,25 | 0,5   |
| 3   | 0        | -0,833 | 12  | -0,25 | 0,5   | 21  | 2     | -1    |
| 4   | -0,3     | 0,5    | 13  | 2     | -1    | 22  | -0,25 | 0,5   |
| 5   | 2        | -1     | 14  | -0,25 | 0,5   | 23  | 2     | -1    |
| 6   | -0,25    | 0,5    | 15  | 2     | -1    | 24  | -0,25 | 0,5   |
| 7   | 2        | -1     | 16  | -0,25 | 0,5   | 25  | 2     | -1    |

**Tablo 3.1**

**Örnek 3.2.**  $A = -0,5$  ve başlangıç değerleri  $x_{-1} = 4, x_0 = 5, y_{-1} = 3,2, y_0 = 0,6$  olmak üzere (3.1) denklem sisteminin çözümleri aşağıdaki tablo ile verilmiştir.

| $n$ | $x_n$    | $y_n$ | $n$ | $x_n$    | $y_n$ | $n$ | $x_n$    | $y_n$ |
|-----|----------|-------|-----|----------|-------|-----|----------|-------|
| -1  | 4        | 3,2   | 8   | 5        | 0,6   | 17  | 1,666667 | 0,2   |
| 0   | 5        | 0,6   | 9   | 1,666667 | 0,2   | 18  | 5        | 0,6   |
| 1   | 1,666667 | 0,2   | 10  | 5        | 0,6   | 19  | 1,666667 | 0,2   |
| 2   | 5        | 0,6   | 11  | 1,666667 | 0,2   | 20  | 5        | 0,6   |
| 3   | 1,666667 | 0,2   | 12  | 5        | 0,6   | 21  | 1,666667 | 0,2   |
| 4   | 5        | 0,6   | 13  | 1,666667 | 0,2   | 22  | 5        | 0,6   |
| 5   | 1,666667 | 0,2   | 14  | 5        | 0,6   | 23  | 1,666667 | 0,2   |
| 6   | 5        | 0,6   | 15  | 1,666667 | 0,2   | 24  | 5        | 0,6   |
| 7   | 1,666667 | 0,2   | 16  | 5        | 0,6   | 25  | 1,666667 | 0,2   |

**Tablo 3.2**

**Örnek 3.3.**  $A = -0,5$  ve başlangıç değerleri  $x_{-1} = -0,1, x_0 = 5, y_{-1} = -2, y_0 = -0,01$  olmak üzere (3.1) denklem sisteminin çözümleri aşağıdaki tablo ile verilmiştir.

| $n$ | $x_n$ | $y_n$ | $n$ | $x_n$ | $y_n$ | $n$ | $x_n$ | $y_n$ |
|-----|-------|-------|-----|-------|-------|-----|-------|-------|
| -1  | -0,1  | -2    | 8   | 5     | 1     | 17  | 1     | 0,2   |
| 0   | 5     | -0,01 | 9   | 1     | 0,2   | 18  | 5     | 1     |
| 1   | 1     | 0,2   | 10  | 5     | 1     | 19  | 1     | 0,2   |
| 2   | 5     | 1     | 11  | 1     | 0,2   | 20  | 5     | 1     |
| 3   | 1     | 0,2   | 12  | 5     | 1     | 21  | 1     | 0,2   |
| 4   | 5     | 1     | 13  | 1     | 0,2   | 22  | 5     | 1     |
| 5   | 1     | 0,2   | 14  | 5     | 1     | 23  | 1     | 0,2   |
| 6   | 5     | 1     | 15  | 1     | 0,2   | 24  | 5     | 1     |
| 7   | 1     | 0,2   | 16  | 5     | 1     | 25  | 1     | 0,2   |

Tablo 3.3

**Örnek 3.4.**  $A = -25$  ve başlangıç değerleri  $x_{-1} = -5$ ,  $x_0 = 0,25$ ,  $y_{-1} = 4$ ,  $y_0 = -16$  olmak üzere (3.1) denklem sisteminin çözümleri aşağıdaki tablo ile verilmiştir.

| $n$ | $x_n$   | $y_n$  | $n$ | $x_n$  | $y_n$ | $n$ | $x_n$  | $y_n$ |
|-----|---------|--------|-----|--------|-------|-----|--------|-------|
| -1  | -5      | 4      | 8   | 156,25 | -6,25 | 17  | -0,16  | 4     |
| 0   | 0,25    | -16    | 9   | -0,16  | 4     | 18  | 156,25 | -6,25 |
| 1   | -0,0625 | 125    | 10  | 156,25 | -6,25 | 19  | -0,16  | 4     |
| 2   | 400     | -6,25  | 11  | -0,16  | 4     | 20  | 156,25 | -6,25 |
| 3   | -0,16   | 1,5625 | 12  | 156,25 | -6,25 | 21  | -0,16  | 4     |
| 4   | 156,25  | -6,25  | 13  | -0,16  | 4     | 22  | 156,25 | -6,25 |
| 5   | -0,16   | 4      | 14  | 156,25 | -6,25 | 23  | -0,16  | 4     |
| 6   | 156,25  | -6,25  | 15  | -0,16  | 4     | 24  | 156,25 | -6,25 |
| 7   | -0,16   | 4      | 16  | 156,25 | -6,25 | 25  | -0,16  | 4     |

Tablo 3.4

**Örnek 3.5.**  $A = -150$  ve başlangıç değerleri  $x_{-1} = -76$ ,  $x_0 = -25$ ,  $y_{-1} = 0,1$ ,  $y_0 = -45$  olmak üzere (3.1) denklem sisteminin çözümleri aşağıdaki tablo ile verilmiştir.

| $n$ | $x_n$    | $y_n$    | $n$ | $x_n$    | $y_n$    | $n$ | $x_n$    | $y_n$    |
|-----|----------|----------|-----|----------|----------|-----|----------|----------|
| -1  | -76      | 0,1      | 8   | 0,3      | 3750     | 17  | 0,000267 | 3,333333 |
| 0   | -25      | -45      | 9   | 0,000267 | 3,333333 | 18  | 0,3      | 3750     |
| 1   | -0,02222 | 11400    | 10  | 0,3      | 3750     | 19  | 0,000267 | 3,333333 |
| 2   | 6750     | 3750     | 11  | 0,000267 | 3,333333 | 20  | 0,3      | 3750     |
| 3   | 0,000267 | 3,333333 | 12  | 0,3      | 3750     | 21  | 0,000267 | 3,333333 |
| 4   | 0,3      | 3750     | 13  | 0,000267 | 3,333333 | 22  | 0,3      | 3750     |
| 5   | 0,000267 | 3,333333 | 14  | 0,3      | 3750     | 23  | 0,000267 | 3,333333 |
| 6   | 0,3      | 3750     | 15  | 0,000267 | 3,333333 | 24  | 0,3      | 3750     |
| 7   | 0,000267 | 3,333333 | 16  | 0,3      | 3750     | 25  | 0,000267 | 3,333333 |

Tablo 3.5

## SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada,  $A < 0$  ve  $x_{-1}, x_0, y_{-1}, y_0$  başlangıç şartları sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \max \left\{ \frac{1}{y_n}, Ay_{n-1} \right\}, y_{n+1} = \max \left\{ \frac{1}{x_n}, Ax_{n-1} \right\}$$

fark denklem sistemi tanımlanmış ve çözümlerinin periyodikliği incelenmiştir. Çalışma sonucunda bu sisteminin çözümlerinin 2 periyotlu veya er geç 2 periyotlu olduğu gösterilmiştir.

Tanımlanan bu fark denklem sisteminin ışığında katsayılar birbirinden farklı reel sayı, dizi veya fonksiyon alınarak yeni denklem sistemleri tanımlanabilir ve çözümleri bu çalışmada verilen yöntemle incelenebilir. Ayrıca yeni tanımlanacak denklem sistemlerinin sınırlılığı ve kararlılığı da incelenebilir.

## KAYNAKLAR

**Amleh, A. M., Hoag, J. and Ladas, G., 1998**, A difference equation with eventually periodic solutions, *Computers & Mathematics with Applications*, 36, 401-404.

**Amleh, A. M., 1998**, Boundedness Periodicity and Stability of Some Difference Equations, *University of Rhode Island*, (PhD Thesis).

**Berenhaut, K. S., Foley, J. D. and Stevic, S., (2006)**, Boundedness character of positive solutions of a max difference equation, *Journal of Difference Equations and Applications*, 12, 12, 1193-1199.

**Çinar, C., Stevic, S. and Yalçınkaya, İ., 2005**, On the positive solutions of reciprocal difference equation with minimum, *Journal of Applied Mathematics and Computation*, 17(1-2), 307-314.

**Elabbasy, E. M., El-Metwally, H. and Elsayed, E. M., 2005**, On the periodic nature of some max-type difference equations, *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 14, 2227-2239.

**Elaydi, S., 1996**, An Introduction to Difference Equations, Springer-Verlag, New York.

**Elsayed, E. M. and Stevic, S., 2009**, On the max-type difference equation  $x_{n+1} = \max\left\{\frac{A}{x_n}, x_{n-2}\right\}$ , *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 71, 910-922.

**Feuer, J., Janowski, E. J., Ladas, G. and Teixeira, C., 2000**, Global Behavior of Solutions of  $x_{n+1} = \max\{x_n, A\}/x_n x_{n-1}$ , *Journal of Computational Analysis and Applications*, 2, 3.

**Feuer, J., 2003**, Periodic solutions of the Lyness max equation, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 288, 147-160.

**Gelişken, A., Çinar, C. and Karataş, R., 2008**, A note on the periodicity of the Lyness max equation, *Advances in Difference Equations*, Vol. 2008, doi: 10.1155/2008/651747.

**Gelişken, A. and Çinar, C., 2009**, On the global attractivity of a max-type difference equation, *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 2009, doi: 10.1155/2009/812674.

**Gelişken, A., 2009**, Bazı Maksimumlu ve Minimumlu Fark Denklemlerinin Periyodikliği ve Kararlılığı Üzerine Bir Çalışma, *Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, (Doktora Tezi).

**Grove, E. A. and Ladas, G., 2005**, Periodicities in Nonlinear Difference Equations, *Advances in Discrete Mathematics and Applications*, Chapman & Hall / CRC, 4, Boca Raton, Florida.

**Grove, E. A., Kent, C. M. and Ladas, G., 1998**, Boundedness and persistence of the nonautonomous Lyness and max Equations, *Journal of Difference Equations and Applications*, 3, 241-258.

**Janowski, E. J., Kocic, V. L., Ladas, G. and Tzanetopoulos, G., 1998**, Global behaviour of solutions of  $x_{n+1} = \max\{x_n^k, A\} / x_{n-1}$ , *Journal of Difference Equations and Applications*, 3, 297-310.

**Kulenovic, M. R. S. and Merino, O., 2002**, Discrete Dynamical Systems and Difference Equations with Mathematica, Chapman & Hall / CRC, Boca Raton, Florida.

**Kulenovic, M. R. S. and Ladas, G., 2002**, Dynamics of Second Order Rational Difference Equations with Open Problems and Conjecture, Boca Raton, Florida.

**Mishev, D. P., Patula, W. T. and Voulov, H. D., 2002**, A reciprocal difference equation with maximum, *Computers & Mathematics with Applications*, 43, 1021-1026.

**Moybe, L. A., 2000**, Difference Equations with Public Health Applications, New York, USA.

**Papaschinopoulos, G. and Schinas, C. J., 1998**, Persistence, oscillatory behavior and periodicity of the solutions of a system of two nonlinear difference equations, *Journal of Difference Equations and Applications*, 4, 315-323.

**Papaschinopoulos, G. and Hatzifilippidis, V., 2001**, On a max difference equation, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 258, 258-268.

**Papaschinopoulos, G., Schinas, J. and Hatzifilippidis, V., 2003**, Global behaviour of the solutions of a max-equation and of a system of two max-equation, *Journal of Computational Analysis and Applications*, 5, 2, 237-247.

**Patula, W. T. and Voulov, H. D., 2004**, On a max type recurrence relation with periodic coefficients, *Journal of Difference Equations and Applications*, 10, 3, 329-338.

**Stefanidou, G. and Papaschinopoulos, G., 2006**, The periodic nature of the positive solutions of a nonlinear fuzzy max – difference equation, *Information Sciences*, 176, 3694-3710.

**Stevic, S., 2008**, On the recursive sequence  $x_{n+1} = \max\left\{c, \frac{x_n^p}{x_{n-1}^p}\right\}$ , *Applied Mathematics Letters*, 21, 8, 791-796.

**Stevic, S., 2009**, Global stability of a difference equation with maximum, *Applied Mathematics and Computation*, 210, 2, 525-529.

**Sun, F., 2008**, On the asymptotic behavior of a difference equation with maximum, *Discrete Dynamics in Nature and Society*, Vol. 2008.

**Şimşek, D., Çinar, C. and Yalçınkaya, İ., 2006**, On the solution of the difference equation  $x_{n+1} = \max\{1/x_{n-1}, x_{n-1}\}$ , *International Journal of Contemporary Mathematics Sciences*, 1, 10, 481-487.

**Şimşek, D., Demir, B. and Çinar, C., 2009**, On the solutions of the system of the difference equation  $x_{n+1} = \max\{A/x_n, y_n/x_n\}$ ,  $y_{n+1} = \max\{A/y_n, x_n/y_n\}$ , *Discrete Dynamics in Nature and Society*, Vol. 2009 (baskıda).

**Teixeria, C. T., 2000**, Existence Stability Boundedness and Periodicity of Some Difference Equations, *University of Rhode Island*, (PhD Thesis).

**Valicenti, S., 1999**, Periodicity and Global Attractivity of Some Difference Equations, *University of Rhode Island*, (PhD Thesis).

**Voulov, H. D., 2002**, On the periodic character of some difference equations, *Journal of Difference Equations and Applications*, 8, 799-810.

**Voulov, H. D., 2002**, Periodic solutions to a difference equation with maximum, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 131, 2155-2160.

**Yalçınkaya, İ., Iricanin B. D. and Çinar, C., 2007**, On a max-type difference equation, *Discrete Dynamics in Nature and Society*, Vol. 2007.

**Yang, X., Liao, X. and Li, C., 2006**, On a difference equation with maximum, *Applied Mathematics and Computation*, 181, 1-5.