

**T.C.
ERCIYES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

OFFSET EĞRİLERİ VE YÜZEYLER

**Tezi Hazırlayan
Zeynep CESUR**

**Tezi Yöneten
Yrd. Doç. Dr. Nural YÜKSEL**

**Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi**

**Temmuz 2008
KAYSERİ**

Yrd. Doç. Dr. Nural YÜKSEL danışmanlığında **Zeynep CESUR** tarafından hazırlanan “ **Offset Eğrileri ve Yüzeyler** ” adlı bu çalışma, jürimiz tarafından Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalında **Yüksek Lisans** tezi olarak kabul edilmiştir.

.../.../2008

JÜRİ:

Başkan : Prof. Dr. Mehmet ÖZDEMİR

Üye : Yrd. Doç. Dr. Nural Yüksel

Üye :

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulunun ... / ... / tarih ve

sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Nusret AYYILDIZ

Enstitü Müdürü

TEŞEKKÜR

Tez çalışmamın her aşamasında; çok değerli bilgi ve deneyimleri ile bana yol gösteren, her zaman ve her konuda en büyük desteği gördüğüm, saygıdeğer hocalarım Sayın Prof. Dr. Mehmet ÖZDEMİR'e , Sayın Yrd. Doç. Dr. Murat Kemal KARACAN'a ve Sayın Yrd. Doç.Dr. Nural YÜKSEL' e teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, bugünlere gelmemde, maddi ve manevi hiçbir fedakarlıktan çekinmeyen aileme ve tez yazımında yardımlarını esirgemeyen eşim Muhammet ÇIKILI'ya teşekkürü bir borç bilirim.

OFFSET EĞRİLERİ ve YÜZEYLER

Zeynep CESUR

**Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Yüksek Lisans Tezi, Temmuz 2008
Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Nural YÜKSEL**

ÖZET

Bu çalışma 6 bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, tezin içeriği ile ilgili giriş yapıldı.

İkinci bölümde, eğriler hakkında temel tanımlar ve teoremler verildi.

Üçüncü bölümde, eğrilikler hakkında tanımlar ve teoremler ifade ve ispat edildi.

Dördüncü bölümde, Bertrand Eğrileri hakkında temel tanımlar ve teoremler ifade ve ispat edildi.

Beşinci bölümde, offset eğrileri ve yüzeyler hakkında tanımlar, teoremler ifade ve ispat edildi.

Altıncı bölümde ise, genel olarak tam offset eğrileri, değişken yarı çaplı offset eğrileri ve sabit yarı çaplı offset eğrileri ifade edildi. Ayrıca, gerekli teoremler ispatlandı.

Anahtar Kelimeler: Eğri, Eğrilik, Frenet Vektörleri, Bertrand Eğrileri, Offset Eğrileri

OFFSET CURVES AND SURFACES

Zeynep CESUR

**Erciyes University, Graduate School of Natural and Applied Sciences
M. Sc. Thesis, July 2008**

Thesis Supervisor: Assist. Prof. Nural YÜKSEL

ABSTRACT

This study has six chapter.

In the first chapter, the introduction about content of the thesis is made.

In the second chapter, it is given the basic definitions and theorems about curves.

In the third chapter, it is expressed and proved about the definitions and theorems of curvatures.

In the fourth chapter, it is given the basic definitions and theorems about Bertrand Curves.

In the fifth chapter, it is expressed and proved about the definitions and theorems of Offset Curves and surfaces.

In the sixth chapter, it is generally expressed the Exact Offset Curves, Constant Radius Offset Curves and Variable Radius Offset Curves. Also, it is made generalizations and the required theorems are proved.

Keywords: Curve, Bertrand Curves, Offset Curves, Curvature, Frenet Vectors

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY	i
TEŞEKKÜR.....	ii
ÖZET	iii
ABSTRACT.....	iv
SİMGELER LİSTESİ	vi
1. BÖLÜM	1
GİRİŞ	1
2. BÖLÜM	2
TEMEL TANIM VE TEOREMLER.....	2
3. BÖLÜM	15
EĞRİLİKLER	15
4. BÖLÜM	20
BERTRAND EĞRİ ÇİFTİ.....	20
5. BÖLÜM	33
OFFSET EĞRİLERİ ve YÜZEYLER.....	33
6. BÖLÜM	39
TAM OFFSET EĞRİLERİ	39
KAYNAKLAR	48
ÖZGEÇMİŞ	50

SİMGELER LİSTESİ

$\mathbb{R}$	:	Reel sayılar cümlesi
E^n	:	Öklid uzayı
D	:	Kovaryant türev operatörü
$k_i(s)$	:	i-inci eğrilik fonksiyonu
$C(t)$	:	Regüler düzlemsel eğri
$N(t)$	:	Birim normal vektör
$C_r(t)$	:	Offset eğrisi
$\wedge$	:	Vektörel çarpım

1. BÖLÜM

GİRİŞ

Bu çalışmada, Offset Eğrileri ve Tam Offset Eğrileri hakkında temel kavramlar ve teoremler verildi.

Diferensiyel geometride önemli bir yeri olan Bertrand Eğrileri incelendi. Ayrıca diferensiyel geometrinin bir çok konularında temel teşkil eden Eğrilikler, iki ve n -boyutlu uzayda ifade ve ispat edilerek, Serret Frenet Vektörleri, Bertrand Eğrileri ve Offset Eğrileri tanımlanarak, aralarındaki ilişkiler incelendi.

2. BÖLÜM

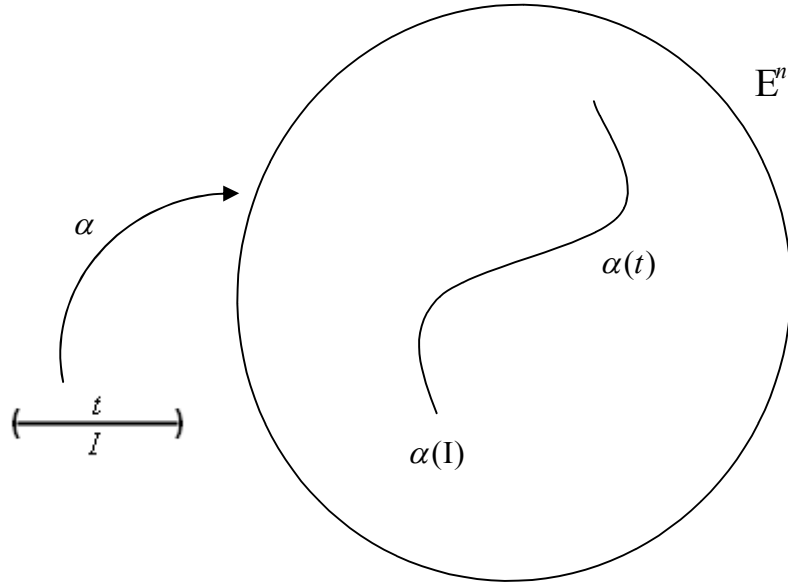
TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Tanım 2.1.1 (Eğri). $I \subseteq \mathbb{R}$ bir aralık olmak üzere,

$$\alpha : I \rightarrow E^n$$

$$t \rightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t))$$

şeklinde tanımlı fonksiyon diferensiyellenebilirse $\alpha(I)$ 'ya E^n 'de (I, α) koordinat komşuluğu ile tanımlanmış bir eğri adı verilir.



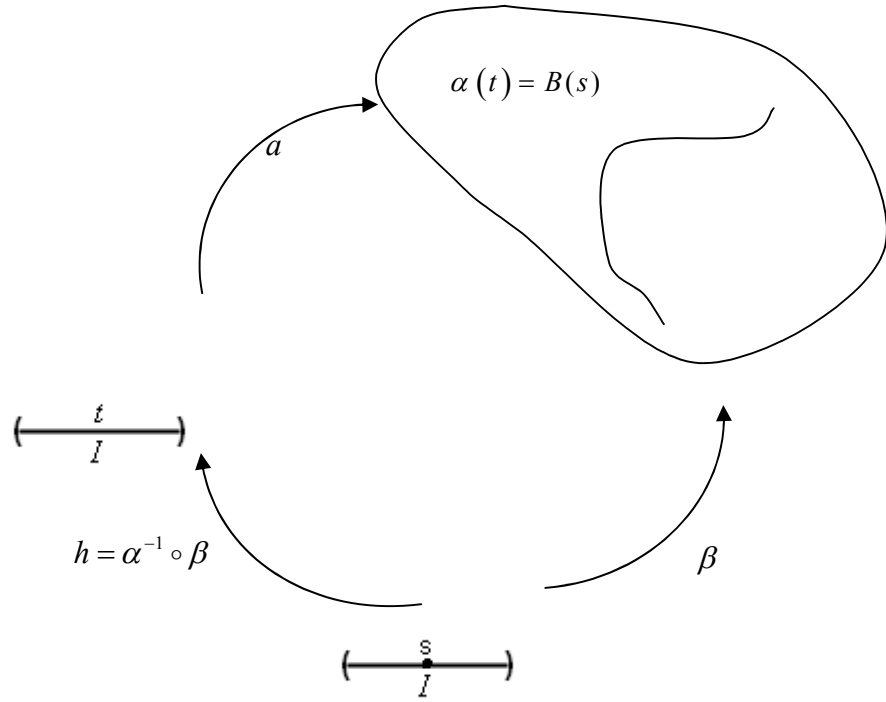
Şekil 2.1.1 Eğri

Tanım 2.1.2 (Parametre Değişimi). E^n de M eğrisi (I, α) ve (J, β) koordinat fonksiyonları ile tanımlanmış olsun.

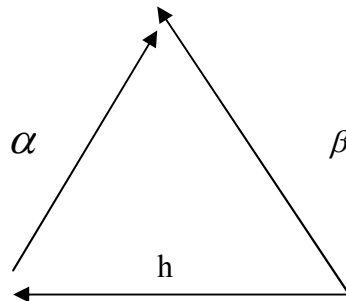
$$h = \alpha^{-1} \circ \beta : J \rightarrow I$$

$$s \rightarrow h(s) = t$$

şeklinde tanımlı diferensiyellenebilir fonksiyona parametre değişim fonksiyonu denir [1].



Şekil 2.1.2. Parametre değişimi



$$\begin{aligned} h &= \alpha^{-1} \circ \beta \\ \beta &= \alpha \circ h \\ \alpha &= \beta \circ h^{-1} \end{aligned}$$

Buradan;

$$\begin{aligned} \beta(s) &= (\alpha \circ h)(s) \\ &= \alpha(h(s)) \end{aligned}$$

$$= \alpha(t)$$

$$\alpha(t) = (\beta \circ h^{-1})(t)$$

$$= \beta(h^{-1}(t))$$

$$= \beta(s)$$

olur.

Tanım 2.1.3 (Bir Eğrinin Hız Vektörü).

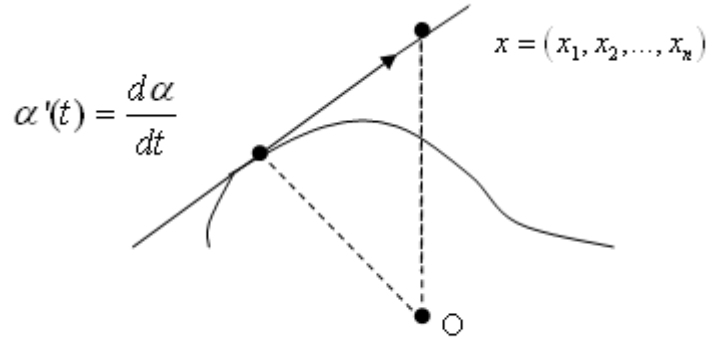
$$\alpha : I \rightarrow E^n$$

$$t \rightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t))$$

eğrisi için;

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= \frac{d\alpha}{dt} \\ &= \left(\frac{d\alpha_1}{dt}, \dots, \frac{d\alpha_n}{dt} \right) \end{aligned}$$

olmak üzere $(\alpha(t), \alpha'(t))$ ikilisine α eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki tanjant vektörü veya $\alpha'(t)$ ye hız vektörü adı verilir. $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ de eğrinin $\alpha(t)$ noktasındaki vektörel ve parametrik denkleminde,



Şekil 2.1.3. Hız Vektörü

$$\overrightarrow{Ox} = \overrightarrow{O\alpha(t)} + \lambda \alpha'(t)$$

$$\overrightarrow{Ox} = \overrightarrow{O\alpha(t)} + \lambda \frac{d\alpha}{dt}$$

$$x = \alpha(t) + \lambda \frac{d\alpha}{dt}$$

elde edilir.

Tanım 2.1.4 (Skaler Hız ve Skaler Hız Fonksiyonu). E^n 'de α eğrisi parametrik olarak,

$$\alpha : I \rightarrow E^n$$

$$t \rightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t))$$

şeklinde tanımlansın.

$$\alpha'(t) = \left(\frac{d\alpha_1}{dt}, \dots, \frac{d\alpha_n}{dt} \right)$$

$$\|\alpha'(t)\| = \left\| \frac{d\alpha}{dt} \right\|$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{d\alpha_i}{dt} \right)^2}$$

olmak üzere,

$$\|\alpha'(t)\| : I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$t \rightarrow \|\alpha'(t)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{d\alpha_i}{dt} \right)^2}$$

şeklinde tanımlı fonksiyona skaler hız fonksiyonu ve $t = t_0$

$$\|\alpha'(t_0)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{d\alpha_i}{dt} \Big|_{t_0} \right)^2} \in \mathbb{R}$$

reel sayısına da skaler hız adı verilir [1].

Teorem 2.1.1. E^n de M eğrisi (I, α) ve (J, β) koordinat komşulukları ile verilsin. Bu durumda

$$h = \alpha^{-1} \circ \beta : J \rightarrow I$$

parametre değişim fonksiyonu olmak üzere,

$$\beta'(s) = \frac{dh}{ds} \alpha'(h(s)) = \frac{dh}{ds} \alpha'(t)$$

dir.

İspat: Parametre değişim fonksiyonunun tanımı gereği Şekil 2.1.2 den,

$$\begin{aligned} \beta(s) &= (\alpha \circ h)(s) \\ &= \alpha(h(s)) \end{aligned}$$

olduğu biliniyor. Bu eşitliğin her iki tarafının s e göre türevi alınır;

$$\begin{aligned} \beta'(s) &= \frac{d\beta}{ds} \\ &= \alpha'(h(s)) \cdot \frac{dh}{ds} \\ &= \frac{dh}{ds} \alpha'(t) \end{aligned}$$

bulunur. Bu da ispatı tamamlar.

Tanım 2.1.5 (Yay Uzunluğu).

$$\begin{aligned} \alpha : I &\rightarrow E^n \\ t &\rightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t)) \end{aligned}$$

eğrisi verilmiş olsun. $t_1, t_2 \in I$ olmak üzere,

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \|\alpha'(t)\| dt$$

reel sayısına α eğrisinin $\alpha(t_1)$ ve $\alpha(t_2)$ noktaları arasındaki yay uzunluğu denir.

Tanım 2.1.6 (Birim Hızlı Eğri).

$$\alpha : I \rightarrow E^n$$

$$s \rightarrow \alpha(s) = (\alpha_1(s), \dots, \alpha_n(s))$$

eğrisi verilsin.

$$\|\alpha'(s)\| = \left\| \frac{d\alpha}{ds} \right\| = 1$$

ise eğriye birim hızlı eğri s parametresine de yay parametresi adı verilir [2].

Tanım 2.1.7 (Regüler Eğri).

$$\alpha : I \rightarrow E^n$$

$$t \rightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t))$$

eğrisi için;

$$\|\alpha'(t)\| = \left\| \frac{d\alpha}{dt} \right\| \neq 0$$

ise eğriye Regüler Eğri denir.

2.2 Serret - Frenet Vektörleri.

E^n de M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile tanımlansın. Bu eğrinin hız vektörü;

$$\begin{aligned} \alpha'(t) \Big|_{\alpha(t)} &= \left(\frac{d\alpha_1}{dt}, \dots, \frac{d\alpha_n}{dt} \right) \Big|_{\alpha(t)=0} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{d\alpha_i}{dt} \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{\alpha(t)} \end{aligned}$$

şeklindedir.

$$\alpha' : M \rightarrow \bigcup_{m \in M} T_M(m)$$

$$m \rightarrow \alpha'(m) = \alpha'(t) \Big|_{\alpha(t)=m}$$

$$t \rightarrow \alpha'(t)$$

$\alpha' \in \chi(m) \subset \chi(E^n)$ E^n 'de kovaryant türev operatörü D olmak üzere $D\alpha' = \frac{d}{dt}$

operatörü göz önüne alınırsa,

$$\alpha'(t) = \left(\frac{d\alpha_1}{dt}, \frac{d\alpha_2}{dt}, \dots, \frac{d\alpha_n}{dt} \right)$$

$$D_\alpha \alpha' = \frac{d\alpha'}{dt} = \alpha''(t)$$

$$= \left(\frac{d^2\alpha_1}{dt^2}, \frac{d^2\alpha_2}{dt^2}, \dots, \frac{d^2\alpha_n}{dt^2} \right)$$

$$(\alpha_1''(t), \dots, \alpha_n''(t)) = \alpha''(t)$$

$$D_\alpha \alpha'' = \frac{d\alpha''}{dt}$$

$$= \left(\frac{d^3\alpha_1}{dt^3}, \frac{d^3\alpha_2}{dt^3}, \dots, \frac{d^3\alpha_n}{dt^3} \right)$$

$$(\alpha_1'''(t), \dots, \alpha_n'''(t)) = \alpha'''(t)$$

$\vdots$

$$D_\alpha \alpha^{(n-1)} = \frac{d\alpha^{(n-1)}}{dt}$$

$$= \left(\frac{d^n\alpha_1}{dt^n}, \frac{d^n\alpha_2}{dt^n}, \dots, \frac{d^n\alpha_n}{dt^n} \right)$$

$$= \alpha^{(n)}(t)$$

elde edilir. Böylece;

$$S = \{\alpha'(t), \alpha''(t), \dots, \alpha^{(n)}(t)\}$$

cümlesi bulunur. Bu S cümlesinde de lineer bağımsız vektörlerin maksimum sayısı r olmak üzere,

$$S' = \{\alpha'(t), \alpha''(t), \dots, \alpha^{(r)}(t)\}$$

lineer bağımsız sistemi göz önüne alınsın. Bu sisteme Gramm-Schmidt ortogonalleştirme ve ortonormalleştirme metodu uygulanacak olursa;

$$E_1 = \alpha'(t)$$

$$E_2 = \alpha''(t) - \frac{\langle \alpha''(t), E_1 \rangle}{\langle E_1, E_1 \rangle} E_1$$

$\vdots$

$$E_r = \alpha^{(r)}(t) - \sum_{k=1}^{r-1} \frac{\langle \alpha^{(r)}(t), E_k \rangle}{\langle E_k, E_k \rangle} E_k$$

şeklinde tanımlanan $\{E_1, E_2, \dots, E_r\}$ ortogonal sistemi elde edilir. Ortogonal sistemi normlamak sureti ile;

$$V_1 = \frac{E_1}{\|E_1\|}, V_2 = \frac{E_2}{\|E_2\|}, \dots, V_r = \frac{E_r}{\|E_r\|}$$

şeklinde tanımlı $\{V_1(t), V_2(t), \dots, V_r(t)\}$ ortonormal sistemi bulunur [3].

Burada

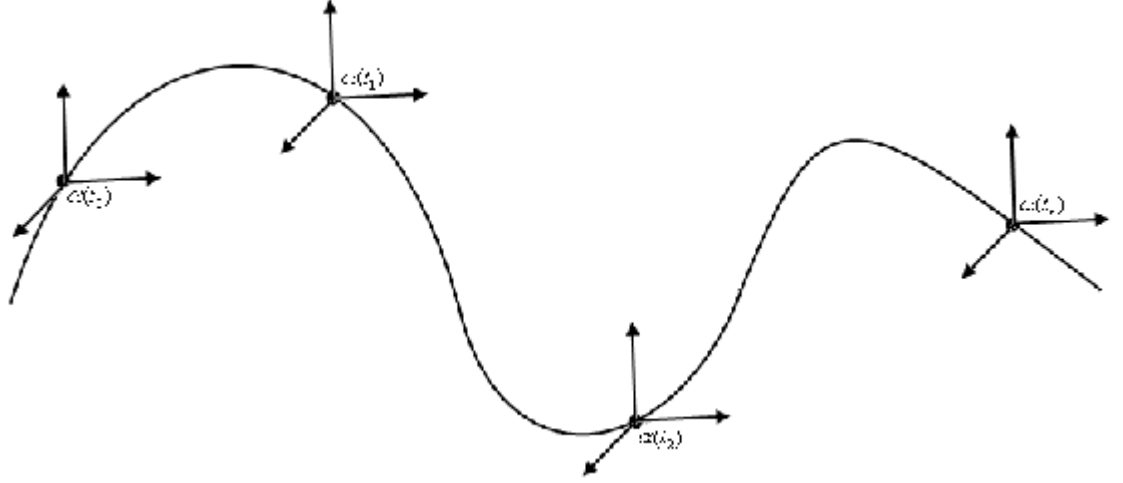
$$\langle V_i, V_j \rangle = \sigma_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

dir.

Tanım 2.2.1 (Frenet Vektörleri). E^n de M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin.

$$S' = \{\alpha'(t), \alpha''(t), \dots, \alpha^{(r)}(t)\}$$

lineer bağımsız sisteminde elde edilen $\{V_1(t), V_2(t), \dots, V_r(t)\}$ sistemine Servet-Frenet r ayaklısı veya r ayaklı alanı adı verilir. Buradaki her bir $V_i(t)$, $1 \leq i \leq r$ vektörlerine Frenet Vektörleri adı verilir.



Şekil 2.2.1. Frenet Vektörleri

Örnek 2.2.1. $I = \{t \mid 0 \leq t \leq 2\pi\}$ olmak üzere;

$$\alpha : I \rightarrow E^3$$

$$t \rightarrow \alpha(t) = \left(\cos t, \sin t, \frac{t^2}{2} \right)$$

şeklinde tanımlı eğrinin $t=0$ ve $t \neq 0$ noktalarında Frenet r ayaklıklarını bulunuz.

Çözüm: $\alpha'(t) = (-\sin t, \cos t, t)$

$$\alpha''(t) = (-\cos t, -\sin t, 1)$$

$$\alpha'''(t) = (\sin t, -\cos t, 0)$$

$t \neq 0$ ise $\{\alpha'(t), \alpha''(t), \alpha'''(t)\}$ sistemi birbiri ile lineer bağımsızdır. Bunlarda birbiri ile lineer bağımsız olduğundan Frenet 3-ayaklısı bulunur.

$t=0$ ise;

$$\alpha'(0) = (0, 1, 0)$$

$$\alpha''(0) = (-1, 0, 1)$$

$$\alpha'''(0) = (0, -1, 0)$$

olup $\{\alpha'(0), \alpha''(0)\}$ lineer bağımsızdır. Dolayısıyla Frenet 2- ayaklısı hesaplanır.

$$E_1 = \alpha'(0)$$

$$E_2 = \alpha''(0) - \frac{\langle \alpha''(0), E_1 \rangle}{\langle E_1, E_1 \rangle} E_1$$

$$E_2 = (-1, 0, 1)$$

$$V_1 = \frac{E_1}{\|E_1\|} = (0, 1, 0)$$

$$V_2 = \frac{E_2}{\|E_2\|} = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

Buradan $\left\{ (0, 1, 0), \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\}$ Frenet 2-ayaklısı bulunur.

Tanım 2.2.2 (n=3 Özel Hali). E^3 de M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile

$$\alpha : I \rightarrow E^3$$

$$t \rightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$$

şeklinde tanımlansın.

$$E_1 = \alpha'(t)$$

olmak üzere,

$$V_1(t) = T(t) = \frac{E_1}{\|E_1\|} = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}$$

vektörüne eğrinin birim teğet vektör alanı adı verilir. Eğer,

$$\alpha : I \rightarrow E_3$$

$$S \rightarrow \alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \alpha_3(s))$$

şeklinde yay parametresi ile verilmiş ise $\|\alpha'(s)\| = 1$ olacağından;

$$V_1(s) = T(s) = \alpha'(s)$$

$$E_2 = \alpha''(s) - \frac{\langle \alpha''(s), \alpha'(s) \rangle}{\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle} \cdot \alpha'(s)$$

olup,

$$\|\alpha'(s)\| = 1 \Rightarrow \langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle = 1$$

dir. Her iki tarafın s e göre türevi alınırsa;

$$\langle \alpha''(s), \alpha'(s) \rangle + \langle \alpha'(s), \alpha''(s) \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle \alpha''(s), \alpha'(s) \rangle = 0$$

$$\Rightarrow E_2 = \alpha''(s)$$

bulunur.

$$V_2(s) = N(s)$$

$$= \frac{E_2}{\|E_2\|} = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}$$

olup, buna da eğrinin birim normal vektör alanı adı verilir. Böylece,

$$V_3(s) = B(s)$$

$$= V_1(s) \wedge V_2(s)$$

$$= T(s) \wedge N(s)$$

$$= \alpha'(s) \wedge \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}$$

$$= \frac{\alpha'(s) \wedge \alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}$$

elde edilir. Buna da eğrinin binormal vektör alanı denir.

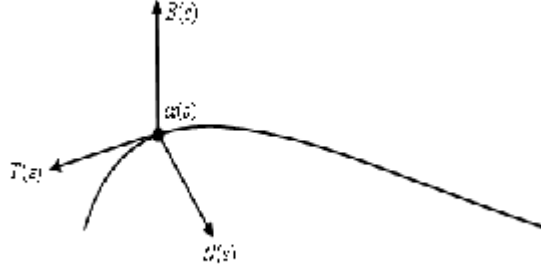
Burada,

$$V_1 \wedge V_2 = V_3$$

$$V_2 \wedge V_3 = V_1$$

$$V_2 \wedge V_1 = V_1$$

dir. Ayrıca,



Şekil 2.2.2 Frenet 3- ayaklısı

$$\langle T, T \rangle = \langle B, B \rangle = \langle N, N \rangle = 1$$

$$T \wedge N = B, \quad N \wedge B = T, \quad B \wedge T = N$$

$$T \wedge T = 0, \quad N \wedge N = 0, \quad B \wedge B = 0$$

şeklindedir [4].

$$\alpha : I \rightarrow E^3$$

$$s \rightarrow \alpha(s)$$

$$T(s) = V_1(s) = \alpha'(s)$$

$$N(s) = V_2(s) = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}$$

$$B(s) = V_3(s) = \frac{\alpha'(s) \wedge \alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}$$

dir.

Teorem 2.2.1. E^3 'de M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. t keyfi bir parametre olmak üzere;

$$\alpha : I \rightarrow E_3$$

$$t \rightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $\{T(t), N(t), B(t)\}$ Frenet 3-ayaklısı;

$$T(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}$$

$$N(t) = B(t) \wedge T(t)$$

$$B(t) = \frac{\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)}{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|}$$

dır [4].

3. BÖLÜM

EĞRİLİKLER

Tanım 3.1.1 (i-inci Eğrilik). E^n de M eğrisi s yay parametresi ile

$$\alpha : I \rightarrow E^n$$

$$s \rightarrow \alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \dots, \alpha_n(s))$$

şeklinde verilsin. α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet r ayaklısı $\{V_1(s), V_2(s), \dots, V_r(s)\}$ olmak üzere,

$$k_i : I \rightarrow IR$$

$$s \rightarrow k_i(s) = \langle V_i(s), V_{i+1}(s) \rangle, \quad 1 \leq i < r$$

şeklinde tanımlı fonksiyona i-inci eğrilik fonksiyonu $s \in I$ için $k_i(s) \in IR$ sayısında i-inci eğrilik adı verilir. Buna göre;

$$i=1 \text{ için} \quad k_1(s) = \langle V_1'(s), V_2(s) \rangle$$

$$i=2 \text{ için} \quad k_2(s) = \langle V_2'(s), V_3(s) \rangle$$

$$\vdots$$

$$i=r-1 \text{ için} \quad k_{r-1}(s) = \langle V_{r-1}'(s), V_r(s) \rangle$$

dır [5].

Tanım 3.1.2 (İnvolüt ve Evolüt). M, N $\subset E^n$ eğrileri sırası ile (I, α) ve (I, β) koordinat komşulukları ile verilmiş olsun. $\alpha(s)$ ve $\beta(s)$ noktalarında Frenet r-ayaklıları;

$$M = \{V_1(s), V_2(s), \dots, V_r(s)\}$$

$$\mathbf{N} = \{V_1^*(s), V_2^*(s), \dots, V_r^*(s)\}$$

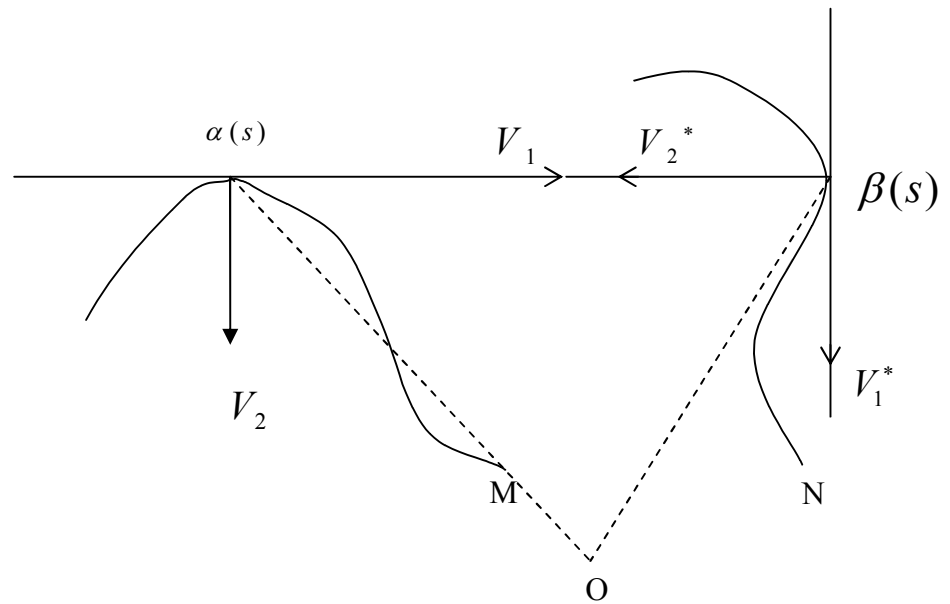
ile gösterilsin. Eğer; $\langle V_1(s), V_1^*(s) \rangle = 0$ ise N'ye M'nin involütü, M'ye de N'nin evolütü denir [6].

Teorem 3.1.1. $M, N \subset E^n$ eğrileri (I, α) ve (I, β) koordinat komşuluğu ile verilsin. Eğer N M 'nin bir involütü ise,

$$d(\alpha(s), \beta(s)) = |c - s|, \quad c \in \mathbb{R}$$

dir.

İspat:



Şekil 3.1.1. Eğrilerin İnvolut ve Evolütleri

Şekil 3.1.1’den,

$$\overrightarrow{O\beta}(s) = \beta(s)$$

$$\beta(s) = \alpha(s) + \lambda V_1(s)$$

yazılır.

$$\frac{d\beta}{d(s)} = \alpha'(s) + \lambda' V_1(s)$$

$$V_1^*(s) = V_1(s) + \lambda' V_1(s) + \lambda k_1 V_2$$

$$V_1^*(s) = (1 + \lambda') V_1(s) + \lambda k_1 V_2$$

bulunur. Buradan,

$$\langle \underbrace{V_1^*(s), V_1(s)}_0 \rangle = (1 + \lambda') \langle \underbrace{V_1, V_1}_1 \rangle + \lambda k_1 \langle \underbrace{V_2, V_1}_0 \rangle$$

$$\Rightarrow 0 = \lambda' + 1$$

$$\Rightarrow \frac{d\lambda}{ds} = -1$$

$$\Rightarrow d\lambda = -ds$$

elde edilir. Her iki taraftın integrali alınırsa,

$$\lambda = c - s$$

bulunur. Buna göre;

$$\begin{aligned} d(\alpha(s), \beta(s)) &= \|\overline{\alpha(s), \beta(s)}\| \\ &= \|\beta(s) - \alpha(s)\| \\ &= \|\lambda V_1\| \\ &= |c - s| \cdot \underbrace{\|V_1\|}_1 \\ &= |c - s| \end{aligned}$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 3.1.2. $M, N \subset E^n$ eğrilikleri birbirinin involutü olan eğriler olsunlar. M nin $\alpha(s)$ noktasında Frenet r -ayaklısı $\{V_1(s), V_2(s), \dots, V_r(s)\}$ ile N nin $\beta(s)$

noktasındaki Frenet r-ayaklısı $\{V_1^*(s), V_2^*(s), \dots, V_r^*(s)\}$ ile gösterilsin. M'nin eğrilikleri $k_i(s)$, $1 \leq i < r$ ve N'nin eğrilikleri $k_i^*(s)$, $1 \leq i < r$ olmak üzere,

$$k_1^*(s)^2 = \frac{k_1(s)^2 + k_2(s)^2}{k_1(s)^2(c-s)^2}$$

dır [7].

İspat: Teorem 3.1.1 gereğince

$$\begin{aligned} \beta(s) &= \alpha(s) + \lambda V_1(s) \\ &= \alpha(s) + (c-s)V_1(s) \quad (3.1.2) \end{aligned}$$

olduğu biliniyor. M nin yay parametresi s ve N nin yay parametresi $s^* \in I$ olmak üzere (3.1.2) eşitliğinin her iki tarafının $s \in I$ yay parametresine göre türevi alınacak olursa,

$$\frac{d\beta}{ds^*} \cdot \frac{ds^*}{ds} = \alpha'(s) - V_1(s) + (c-s)V_1'(s)$$

$$\frac{d\beta}{ds^*} \cdot \frac{ds^*}{ds} = (c-s)k_1V_2$$

$$V_1^*(s) \cdot \frac{ds^*}{ds} = (c-s)k_1V_2$$

bulunur. V_1^* ile V_2 lineer bağımlı olduğundan $V_1^* = 1.V_2$ olup,

$$V_2(s) \cdot \frac{ds^*}{ds} = (c-s)k_1V_2$$

$$\Rightarrow \frac{ds^*}{ds} = (c-s)k_1$$

elde edilir. Burada $V_1^*(s) = V_2(s)$ ifadesinin her iki tarafının s yay parametresine göre türevi alınırsa;

$$\begin{aligned} \frac{dV_1^*}{ds^*} \cdot \frac{ds^*}{ds} &= V_2'(s) \\ &= -k_1V_1 + k_2V_3 \end{aligned}$$

$$V_1^*(s) \cdot \frac{ds^*}{ds} = -k_1 V_1 + k_2 V_3$$

$$k_1^*(s) \cdot V_2^*(s) \cdot \frac{ds^*}{ds} = -k_1 V_1 + k_2 V_3$$

$$\begin{aligned} k_1^*(s) &= \frac{-k_1 V_1 + k_2 V_3}{V_2^*(s) \cdot \frac{ds^*}{ds}} \\ &= \frac{-k_1 V_1 + k_2 V_3}{V_2^*(s)(c-s) \cdot k_1} \end{aligned}$$

dır. Burada gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$k_1^*(s)^2 = \frac{k_1(s)^2 + k_2(s)^2}{(c-s)^2 \cdot k_1(s)^2}$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

4. BÖLÜM

BERTRAND EĞRİ ÇİFTİ

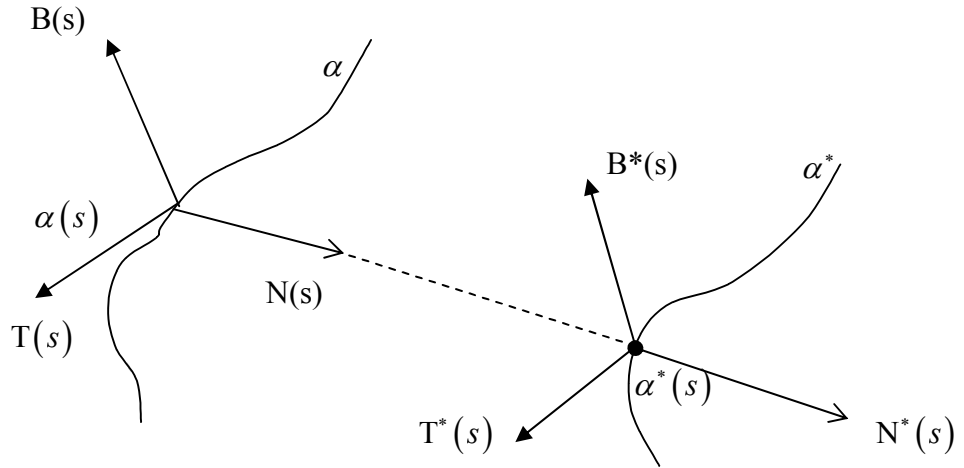
Tanım 4.1.1 (Bertrand eğri çifti). Birim hızlı

$$\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$$

eğrisi ile aynı aralıkta tanımlı

$$\alpha^* : I \rightarrow \mathbb{R}^3$$

eğrisi verilsin. Her bir $s \in I$ için $\alpha^*(s)$ noktası ile $\alpha(s)$ noktasını birleştiren doğru, α^* eğrisinin $\alpha^*(s)$ noktasındaki birinci normalini ve α 'nın $\alpha(s)$ noktasındaki birinci normalini kapsıyorsa, α^* eğrisi α eğrisiyle Bertrand eğri çifti oluşturuyor denir. Kısaca karşılıklı noktalarında aynı asal normale sahip olan eğri çiftlerine Bertrand eğrileri adı verilir. [8].



Şekil-4.1.1. Bertrand Eğrileri

Teorem 4.1.1. α^* eğrisi α eğrisiyle Bertrand eğri çifti oluşturuyorsa, k sabit bir sayı olmak üzere, α^* eğrisi

$$\alpha^* = \alpha + kN \quad (4.1.1)$$

şeklindedir.

İspat: $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi birim hızlı bir eğri olsun. Bertrand eğri çifti tanımına göre α^* eğrisi,

$$\alpha^*(s) = \alpha(s) + \mu(s).N(s)$$

şeklinde verilebilir.

$$\begin{aligned} (\alpha^*)' &= \alpha' + \mu'N + \mu N' \\ &= \alpha' + \mu'N + \mu(-\kappa T + \gamma B) \end{aligned}$$

ve buradan,

$$(\alpha^*)' = (1 - \mu\kappa)T + \mu'N + \mu\gamma B$$

bulunur. $(\alpha^*)'(s)$ vektörü $T^*(s)$ vektörüne paralel olduğundan;

$$(\alpha^*)'(s) \perp N^*(s)$$

dir. $N^*(s)$ vektörü $N(s)$ vektörüne paralel olduğundan,

$$(\alpha^*)'(s) \perp N(s)$$

olur. O halde,

$$\langle (\alpha^*)', N \rangle = 0$$

dır. Burada $(\alpha^*)'$ yerine yukarıda bulunan eşiti yazılarak, $\mu' = 0$ elde edilir. Buna göre

$$\mu = I \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu sabittir. $\mu = k$ denirse buradan (4.1.1) eşitliği elde edilir.

Sonuç 4.1.1. α^* eğrisi α eğrisiyle Bertrand eğri çifti oluşturuyorsa,

$$(\alpha)' = (1 - k\kappa)T + k\gamma B \quad (4.1.2)$$

dır [9].

İspat: $\alpha : I \rightarrow IR^3$ eğrisi birim hızlı bir eğri olmak üzere, α^* eğrisi α eğrisiyle Bertrand eğri çifti oluşturuyorsa, (4.1.1) eşitliğine göre

$$\alpha^* = \alpha + kN$$

şeklindedir. Buradan,

$$\begin{aligned} (\alpha^*)' &= \alpha' + kN' \\ &= T + k(-\kappa T + \gamma B) \\ &= (1 - k\kappa)T + k\gamma B \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 4.1.2. Bertrand eğri çiftlerinin karşılıklı noktalardaki teğet vektörleri arasındaki açının ölçüsü sabittir.

İspat: $\langle T^*, T \rangle' = 0$ olduğu gösterilirse ispat yapılmış olur.

$$\begin{aligned} \langle T^*, T \rangle' &= \langle (T^*)', T \rangle + \langle T^*, T' \rangle \\ &= \langle V^* \kappa^* N^*, T \rangle + \langle T^*, \kappa N \rangle \\ &= V^* \kappa^* \langle N^*, T \rangle + \kappa \langle T^*, N \rangle \end{aligned}$$

dır. $N^*(s) // N(s)$ ve $N(s) \perp T(s)$ olduğundan $\langle N^*, T \rangle = 0$ dır. $T^* \perp N^*$ ve $N // N^*$ olduğundan, $\langle T^*, N \rangle = 0$ dır. Demek ki $\langle T^*, T \rangle' = 0$ dır.

Teorem 4.1.3 $\alpha : I \rightarrow IR^3$ birim hızlı bir eğri olmak üzere, $\alpha^* : I \rightarrow IR^3$ eğrisi α eğrisi ile Bertrand eğri çifti oluştursun. α^* eğrisinin eğrilik ve burulma fonksiyonları κ^* ve γ^* olduğuna göre,

$$\kappa^* = \frac{k\kappa - \sin^2 \theta}{k(1 - k\kappa)} \quad (4.1.3)$$

$$\gamma^* = \frac{1}{k^2 \gamma} \sin^2 \theta \quad (4.1.4)$$

olduğunu gösteriniz. Burada $\cos \theta = \langle T^*, T \rangle$ dır [10].

İspat: (4.1.3) ve (4.1.4) eşitliklerinin birincisine göre,

$$T^* = \frac{(\alpha^*)'}{\|(\alpha^*)'\|}$$

olduğundan, $(\alpha^*)' = v^* T^*$ dır. $T^* = (\cos \theta) T - (\sin \theta) \beta$ eşitliğinden yararlanarak,

$$(\alpha^*)' = v^* (\cos \theta) T - v^* (\sin \theta) \beta$$

bulunur. (4.1.2) eşitliğine göre,

$$(\alpha^*)' = (1 - k\kappa)T + k\gamma B$$

olduğundan,

$$\begin{cases} v^*(s) \cos \theta = (1 - k\kappa(s)) \\ v^*(s) \sin \theta = -k\Upsilon(s) \end{cases} \quad (4.1.5)$$

yazılır.

$$\alpha^* : I \rightarrow IR^3$$

eğrisinin yay uzunluğu fonksiyonunu f^* ile gösterilsin ve $(f^*)^{-1} = h^*$ olsun

$f^*(s) = t$ ise $h^*(t) = s$ olur. $f^*(I) = J$ olmak üzere;

$$\alpha^* \circ h^* : J \rightarrow IR^3$$

eğrisi birim hızlı bir eğri olur. $\alpha^* = \alpha + kN$ eşitliğinin her iki yanının h^* fonksiyonu ile bileşkesi alınarak,

$$\alpha^* \circ h^* = \alpha \circ h^* + k.(N \circ h^*)$$

ve buradan,

$$\alpha \circ h^* = \alpha^* \circ h^* - (N \circ h^*)$$

elde edilir. $N^* = N$ olduğundan, bu eşitlik,

$$\alpha \circ h^* = \alpha^* \circ h^* - k(N^* \circ h^*)$$

biçiminde yazılabilir. Demek ki,

$$\alpha \circ h^* : J \rightarrow IR^3$$

eğrisi birim hızlı,

$$\alpha^* \circ h^* : J \rightarrow IR^3$$

eğrisi ile Bertrand çifti oluşturur [11].

$$(\alpha \circ h^*) \circ (h^*)^{-1} = \alpha$$

ve α birim hızlı bir eğri olduğundan $\alpha \circ h^*$ eğrisinin yay uzunluğu fonksiyonu h^* dır. $f^*(s) = t$ olsun

$$f^*(s) = \left\| (\alpha^*)'(s) \right\|$$

$$= v^*(s)$$

$$(h^*)'(t) = \left\| (\alpha \circ h^*)'(t) \right\|$$

$$= v(t)$$

$$(h^*)'(t) = \frac{1}{(f^*)'(s)}$$

$$= \frac{1}{v^*(s)}$$

olduğundan $v(t) = \frac{1}{v^*(s)}$ olur. Başka bir anlatımla,

$$v(t) \cdot v^*(s) = 1$$

dir. Şimdi,

$$\alpha \circ h^* : J \rightarrow \mathbb{R}^3$$

eğrisinin, birim hızlı

$$a^* \circ h^* : J \rightarrow \mathbb{R}^3$$

eğrisi ile Bertrand çifti oluşturduğu göz önüne alınarak (4.1.5) eşitlikleri yazılsın.

Bu eşitliklerde, k yerine $-k$, θ yerine $-\theta$ gelecektir. Böylece,

$$v(t) \cos \theta = 1 + \kappa^{*'}(t)$$

$$v(t) \sin \theta = -k\gamma^{*'}(t)$$

elde edilir. Burada $\kappa^{*'}(t)$ ve $\gamma^{*'}(t)$ ile $a^* \circ h^*$ birim hızlı eğrisinin eğrilik ve burulması gösterildi. $\kappa^{*'}(t) = \kappa^*(s)$ ve $\gamma^{*'}(t) = \gamma^*(s)$ olduğundan,

$$\begin{cases} v(t) \cos \theta = 1 + k\kappa^*(s) \\ v(t) \sin \theta = -k\gamma^*(s) \end{cases} \quad (4.1.6)$$

olur. (4.1.5) ve (4.1.6) eşitliklerinin birincileri taraf tarafa çarpılarak,

$$\cos^2 \theta = (1 - k\kappa)(1 + k\kappa^*) \quad (4.1.7)$$

bulunur. Buradan (4.1.3) eşitliği elde edilir.

(4.1.5) ve (4.1.6) eşitliklerinin ikinci tarafları taraf tarafa çarpılarak,

$$\sin^2 \theta = k^2 \gamma \gamma^* \quad (4.1.8)$$

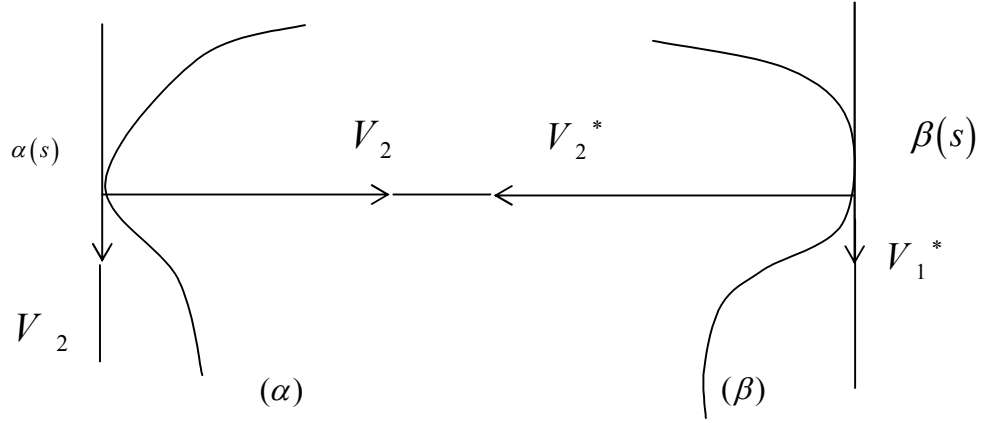
bulunur. Buradan (4.1.4) eşitliği elde edilir. Buda ispatı tamamlar.

Teorem 4.1.4. α ve β bir Bertrand eğri çifti olsun. α 'nın yay parametresi s ile β 'nin yay parametresi de s^* ile gösterilsin. Bu durumda $\forall s \in I$ için

$$d(\alpha(s), \beta(s)) = \text{sabit}$$

dir.

İspat:



Şekil 4.1.2 Bertrand Eğri Çifti

Şekil 4.1.2'ye göre,

$$\beta(s) = \alpha(s) + \lambda V_2 \quad (4.1.9)$$

dır. (4.1.9) eşitliğinin her iki tarafının s yay parametresine göre türevi alınacak olursa,

$$\frac{d\beta}{ds^*} \cdot \frac{ds^*}{ds} = \alpha'(s) + \lambda' V_2 + \lambda V_2'$$

$$V_1^*(s) \frac{ds^*}{ds} = V_1(s) + \lambda' V_2 + \lambda(-k_1 V_1 + k_2 V_3)$$

$$V_1^*(s) \frac{ds^*}{ds} = (1 - \lambda k_1) V_1 + \lambda' V_2 + \lambda k_2 V_3$$

$$\frac{ds^*}{ds} \underbrace{\langle V_1^*, V_2 \rangle}_0 = (1 - \lambda k_1) \underbrace{\langle V_1, V_2 \rangle}_0 + \lambda \underbrace{\langle V_2, V_2 \rangle}_1 + \lambda k_2 \underbrace{\langle V_3, V_2 \rangle}_0$$

$$\Rightarrow 0 = \lambda'$$

$$\Rightarrow \lambda = \text{sabit bulunur.}$$

(4.1.9) eşitliğinden,

$$d(\alpha(s), \beta(s)) = \|\beta(s) - \alpha(s)\|$$

$$= \|\lambda V_2\|$$

$$= |\lambda|$$

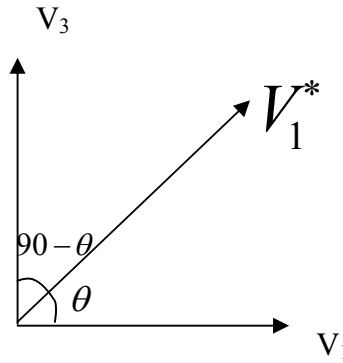
sabittir. Buda ispatı tamamlar.

Teorem 4.1.5. $\alpha, \beta: I \rightarrow E^3$ eğrileri verilmiş olsun. α 'nın eğrilikleri $k_1(s)$ ve $k_2(s)$ (α, β) 'nin Bertrand eğri çiftidir $\Leftrightarrow \lambda k_1 + \mu k_2 = 1$ dir.

İspat: α, β bir bertrand eğri çifti olsun. $\alpha(s)$ noktasında Frenet 3 ayaklısı $\{V_1(s), V_2(s), V_3(s)\}$ ile $\beta(s)$ noktasında Frenet 3 ayaklısı da $\{V_1^*(s), V_2^*(s), V_3^*(s)\}$ ile gösterilsin. (α, β) bir Bertrand eğri çifti olduğundan $V_2(s)$ ile $V_2^*(s)$ lineer bağımlı olup;

$$\langle V_1^*, V_2^* \rangle = \langle V_1^*, V_2 \rangle = \langle V_1, V_2^* \rangle = 0$$

dır. $V_1^*(s)$ ile $V_1(s)$ vektörleri arasındaki açı θ olmak üzere,



Şekil 4.1.3. Vektörler Arasındaki Açı

Şekil 4.1.3'den

$$V_1^* = \cos \theta V_1 + \sin \theta V_3 \quad (4.1.10)$$

yazılabilir. α 'nın yay parametresi s , β 'nin yay parametresi de s^* olmak üzere (4.1.10) eşitliğinin her iki tarafının s yay parametresine göre türevi alınacak olursa;

$$\frac{dV_1^*}{ds} \cdot \frac{ds^*}{ds} = \frac{d(\cos \theta)}{ds} V_1 + \cos \theta V_1' + \frac{d(\sin \theta)}{ds} V_3 + \sin \theta V_3'$$

$$V_1^*(s) \cdot \frac{ds^*}{ds} = \frac{d(\cos \theta)}{ds} V_1 + \cos \theta k_1 V_2 + \frac{d(\sin \theta)}{ds} V_3 + \sin \theta \left(-k_2 V_2 + \overbrace{k_3 V_1}^0 \right)$$

$$k_1^*(s) \cdot V_2^*(s) \cdot \frac{ds^*}{ds} = \frac{d(\cos \theta)}{ds} V_1 + (\cos \theta k_1 - \sin \theta k_2) V_2 + \frac{d(\sin \theta)}{ds} V_3$$

(4.1.11)

dır. (4.1.11) eşitliğinin her tarafı V_1 ile iç çarpıma tabi tutulursa;

$$k_1^*(s) \cdot \frac{ds^*}{ds} \langle \overbrace{V_2^*(s), V_1(s)}^0 \rangle = \frac{d(\cos \theta)}{ds} \langle \overbrace{V_1, V_1}^1 \rangle + \langle \cos \theta k_1 - \sin \theta k_2 \rangle \langle \overbrace{V_2, V_1}^0 \rangle + \frac{d(\sin \theta)}{ds} \langle \overbrace{V_3, V_1}^0 \rangle$$

$$\Rightarrow \frac{d(\cos \theta)}{ds} = 0$$

$\Rightarrow \theta = \text{sabit demektir.}$

$$\beta(s) = \alpha(s) + \lambda V_2$$

$$\Rightarrow \beta'(s) \cdot \frac{ds^*}{ds} = \alpha'(s) + \lambda V_2'$$

$$= V_1(s) + \lambda(-k_1 V_1 + k_2 V_3)$$

$$\Rightarrow V_1^*(s) \cdot \frac{ds^*}{ds} = (1 - \lambda k_1) V_1 + \lambda k_2 V_3$$

$$\frac{ds^*}{ds} (\cos \theta V_1 + \sin \theta V_3) = (1 - \lambda k_1) V_1 + \lambda k_2 V_3$$

$$\frac{ds^*}{ds} \cos \theta = 1 - \lambda k_1 \text{ ve } \frac{ds^*}{ds} \sin \theta = \lambda k_2$$

olmalıdır.

$$\frac{ds^*}{ds} = \frac{1 - \lambda k_1}{\cos \theta} \text{ ve } \frac{ds^*}{ds} = \frac{\lambda k_2}{\sin \theta}$$

$$\Rightarrow \frac{1 - \lambda k_1}{\cos \theta} = \frac{\lambda k_2}{\sin \theta}$$

$$\Rightarrow 1 - \lambda k_1 = \underbrace{\frac{\cos \theta}{\sin \theta}}_v \lambda k_2$$

$$\Rightarrow 1 - \lambda k_1 = \mu k_2$$

$$\Rightarrow \lambda k_1 + \mu k_2 = 1$$

dir. Bu da ispatı tamamlar.

Örnek 4.1.1. Karşılıklı noktalardaki teğetleri φ açısı yapan (α, β) Bertrand eğri çifti için gösteriniz ki, $k_2=0$ ise her eğrinin sonsuz sayıda Bertrand çifti vardır.

Çözüm. (α, β) Bertrand eğri çifti verilsin. β ve α nın Frenet elemanları sırasıyla $k_1^*, k_2^*, V_1^*, V_2^*, V_3^*$ ve k_1, k_2, V_1, V_2, V_3 olsun. $(V_1^*, V_1) = \varphi = s b t$ veriliyor. α 'nın s ve β 'nin da s^* yay parametresi olsun.

$k_2=0$ ise (α, β) Bertrand eğri çifti olacak şekilde sonsuz çoklukta β nın mevcut olduğunu göstereceğiz. Bunun için $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ 'ye karşılık,

$$\beta(s) = \alpha(s) + \lambda V_2(s)$$

olmak üzere (α, β) nın bir Bertrand eğri çifti olduğunu göstermek yeterlidir.

$$\beta'(s) = \frac{ds^*}{ds} = V_1(s) + \lambda(-k_1(s)V_1(s) + 0.V_3(s))$$

$$\Rightarrow \frac{ds^*}{ds} V_1^*(s) = (1 - \lambda k_1(s)) V_1(s)$$

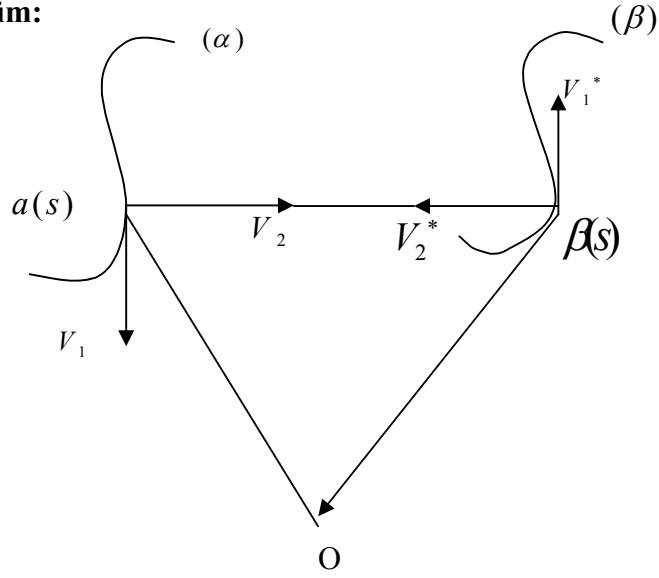
$$\Rightarrow V_1^*(s) = \pm V_1(s)$$

olup; $k_2=0$ iken α düzlemsel olduğundan, β ; tanım gereğince, α nın yattığı düzlemde kalır ve böylece $k_2=0$ dır. O halde; α ve β nın Frenet 2 ayaklıları mevcuttur.

Halbuki $V_1^* = \mp V_1$ dir. O halde; α ve β nın 2-Frenet vektörleri lineer bağımlı olur. Buna göre (α, β) bir Bertrand eğri 2-lisidir.

Örnek 4.1.2. E^3 de yay parametresi ile verilmiş bir α eğrisi için öyle bir β vardır ki α ve β bir Bertrand eğri çifti oluşturur.

Çözüm:



Şekil 4.1.4 Bertrand Eğri Çifti

Şekil 4.1.4'e göre,

$\beta(s) = \alpha(s) + \lambda V_2(s)$ olmak üzere bunun s e göre türevi alınırsa,

$$\begin{aligned} \frac{d\beta}{ds} &= \frac{d\beta}{ds^*} \cdot \frac{ds^*}{ds} \\ &= \frac{d\alpha}{ds} + \frac{d\lambda}{ds} V_2 + \lambda \frac{dV_2}{ds} \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} V_1^* \cdot \frac{ds^*}{ds} &= V_1 + \frac{d\alpha}{ds} + \frac{d\lambda}{ds} V_2 + \lambda(-k_1 V_1 + k_2 V_3) \\ &= (1 - \lambda k_1) V_1 + \frac{d\lambda}{ds} V_2 + \lambda k_2 V_3 \end{aligned}$$

dır.

$$\langle V_1^*, V_2 \rangle = 0 \Rightarrow \frac{d\lambda}{ds} = 0 = \lambda = \text{sabit}$$

dir. Buradan,

$$\beta(s) = \alpha(s) + c V_2(s)$$

c 'nin her bir değeri için bir β eğrisi vardır.

Örnek 4.1.3. E^3 de 3. sınıftan diferensiyellenebilen bir regüler eğri α ve α 'nın k_2 eğriliği sıfırdan farklı olsun. α eğrisi bir dairesel helistir $\Leftrightarrow \alpha$ eğrisi birden fazla Bertrand çiftine dahildir.

Çözüm: $\alpha(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos s, -\sin s, s)$

$$\alpha'(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin s, -\cos s, 1)$$

$\Rightarrow \|\alpha'(s)\| = 1$ olup α nin yay parametresi s dir. Dolayısıyla

$$\alpha''(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos s, -\sin s, 0)$$

$$\Rightarrow V_2(s) = (\cos s, \sin s, 0)$$

dır. Buna göre, α 'nın Bertrand çifti olarak karşılığı $\lambda = \frac{2}{\sqrt{2}}$ için ,

$$\beta(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos s, -\sin s, s) + \frac{2}{\sqrt{2}}(\cos s, \sin s, 0)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos s, \sin s, s)$$

dir. Diğer taraftan,

$$\wp(s) = \frac{\sqrt{2}}{4}(\cos s, \sin s, 2s)$$

eğrisi için,

$$\wp'(s) = \frac{\sqrt{2}}{4}(-\sin s, \cos s, 2)$$

olduğundan

$$\|\wp'(s)\| = \frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{5} = \text{sabit}$$

ve dolayısıyla

$$\wp'(s) = \frac{\sqrt{2}}{4}(-\cos s, -\sin s, 0)$$

$$\Rightarrow V_2(s) = -(\cos s, \sin s, 0)$$

dir. Buna göre α ;

$$\begin{aligned}\beta(s) &= \frac{\sqrt{2}}{4}(\cos s, \sin s, 2s) + \frac{1}{2\sqrt{2}}(\cos s, \sin s, 0) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos s, \sin s, s)\end{aligned}$$

olup, β eğrisi hem α hem de β' 'nin Bertrand çiftine dahildir.

5. BÖLÜM

OFFSET EĞRİLERİ ve YÜZEYLER

Eğrileri ve yüzeyleri temsil etmek için iki yol vardır. Bunlar parametrik ve implicit gösterimlerdir. Parametrik gösterimler pratikte implicit gösterimden daha çok tercih edilir. Çünkü eğrilerin ve yüzeylerin çiziminde daha etkilidir [11].

Eğri ve yüzeyler boyunca offset eğrileri ve yüzeyler; geometrik modellerin meydana çıkması gibi geniş bir uygulama alanına sahiptir [12].

Bu bölümde offset eğrileri ve yüzeylerinin özelliklerini araştıracağız.

5.1. Düzlem Eğrilerinin Offsetleri

$$C(t) = (x(t), y(t)), \quad t \in I$$

bir parametre ile parametrelendirilen bir düzlem eğrisi olsun. Burada I , $[0,1]$ aralığıdır. Kabul edelim ki C eğrisi regüler bir eğri olsun. Regüler teriminin anlamı C 'nin birinci mertebeden türevi,

$$C'(t) = (x'(t), y'(t))$$

asla sıfır değildir.

$$C'(t) \neq 0, \quad \forall t \in I \text{ için,}$$

C regüler eğri olduğundan her zaman, $\forall t \in I$ için eğrinin $N(t)$ normal vektörünü ($\neq 0$) nonzero olarak tanımlayabiliriz.

$$C(t) = (x(t), y(t))$$

regüler düzlemsel eğri için birim normal vektör,

$$N(t) = \frac{(-y'(t), x'(t))}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}$$

(5.1.1)

şeklinde tanımlanır ve açık olarak,

$$C'(t), N'(t) = 0, \quad \forall t \in I \text{ için}$$

dır [13].

Tanım 5.1.1 (Offset Eğrisi). $C(t)$ bir t parametresi ile parametrelendirilmiş regüler düzlemsel eğri ve “ r ” de pozitif bir sabit olsun. r offset yarıçapı ile $C(t)$ için $C_r(t)$ offset eğrisi

$$C_r(t) = C(t) + r.N(t)$$

şeklinde tanımlı bir düzlemsel eğridir. Offset eğrilerinin bu tanımı N normal vektörünün yönlendirmesine göre bir yanlı offseti verir, diğer yanlı offset r ile $-r$ değişimi ile elde edilir. Diferensiyel geometride offset eğrileri paralel eğriler olarak bilinir ve offsetler Betrand eğrilerinin özel bir durumu olarak 1850 de Betrand tarafından çalışmaya başlanıldı [14].

Offset eğrileri, aynı zamanda eğrilerin bir ailesinin örtüsü olarak tanımlanabilir. Bunu yapmak için,

$$F(t, x, y) : IR \times IR^2 \rightarrow IR$$

bir fonksiyon olsun ve F' i $t \in I$ ile parametrelendirilen (x, y) deki fonksiyonların bir ailesi olarak düşünebilir. Kabul edelim ki $\forall t \in I$ için,

$$F_t(x, y) = F(t, x, y)$$

fonksiyonunun regüler değeri “0” olsun. Yani $F_t(x \cdot y) = 0$ olması demek $\frac{\partial F_t}{\partial x}$,

$\frac{\partial F_t}{\partial y}$ kısmi türevlerinin her ikisi birden sıfır değildir anlamındadır. Bu kabul ile

“0” aynı zamanda F ’nin regüler değeridir. Çünkü, şu gerçek ki, $\frac{\partial F_t}{\partial x}, \frac{\partial F_t}{\partial y}$ nin bazıları sıfırdan farklıdır.

Tanım 5.1.2 (Envelope = Örtü). F ailesinin örtüsü,

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(t, x, y) = \frac{\partial F}{\partial t}(t, x, y) = 0, t \in I \right\}$$

cümlesidir [15]. $(x, y) \in D$ ve $F(t, x, y) = \frac{\partial F}{\partial t}(t, x, y) = 0$ alındığı zaman t parametresi (x, y) ye karşılık geliyordur denir.

Böylece $\forall (x, y) \in D$ için $\exists t$ elemanı vardır ki (x, y) ye karşılık gelen $C(t)$ 'nin offset eğrisi olması durumunda,

$$F(t, x) = (x - C(t)) \cdot (x - C(t)) - r^2 \quad (5.1.2)$$

ile çemberlerin ailesi tanımlanabilir.

Burada "." skaler çarpım, r offset yarıçapı ve $X = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ dir.

Böylece $\forall t$ için $F^{-1}(0)$ bir dairedir. "0" F nin regüler değeridir.

Gösterilir ki (5.1.2) deki F in örtüsü C için bir offset eğridir, C ye göre F in türevleri hesaplanırsa,

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -2C'(t) \cdot (x - C(t))$$

dır.

Bir örtü olması için $\frac{\partial F}{\partial t} = 0$ olmalı ve bazı $\lambda = \lambda(t)$ skalar fonksiyonu için

$$x - C(t) = \lambda \cdot N(t)$$

eşitliği elde edilir. $F=0$ değeri (5.1.2) denkleminde yerine konursa, $\lambda = \mp r$ ve sonuç olarak,

$$x = C(t) \mp r \cdot N(t)$$

elde edilir. Böylece r yarıçaplı çemberlerin F ailesinin örtüsü offset eğriler için istenilendir. Pratikte bir $C(t)$ eğrisi genellikle polinom veya rotational fonksiyonları tarafından parametrelendirilir[11]. Fakat C nin offset eğrileri $N(t)$, (5.1.1) deki köklü terimden dolayı rotational fonksiyonları ile parametrelendirilemez. Bununla birlikte hızı;

$$\|C'(t)\| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$$

bir polynomol ile ifade edilebilen eğrilerin bir çeşidi vardır ve onlar “pythogoreon hodograph eğriler” olarak adlandırılır [16]. Böylesi eğriler için offset eğriler dönme parametreleri ile temsil edildi.

Diğer yandan önemli bir sonuç vardır ki dönme parametrelili eğri için herhangi offsetler cebirsel eğrilerdir. Eğer,

$$C_r(t) = C(t) \mp r \cdot N(t)$$

ile birlikte iç ve dış offsetler göz önüne alınırsa onlar implicit formdadır. Bu sonuç

$$F = \frac{\partial F}{\partial t} = 0$$

denkleminde t parametre değişkeni elimine edilerek bulundu.

5.2. Offset Eğrilerinin Analitik Özellikleri

Bu kısımda düzlem eğrileri için offset eğrilerinin analitik özellikleri araştırılacaktır.

$C(t)$, t keyfi parametresi ile parametrelendirilmiş regüler bir eğri ve s de $C(t)$ 'nin t_0 'dan t'ye

$$s = \int_{t_0}^t \|C'(t)\| \cdot dt$$

yay uzunluğu olsun. Burada norm

$$\|C'(t)\|^2 = C'(t) \cdot C'(t)$$

iç çarpımı ile tanımlıdır.

Kabul edilebilir ki C eğrisi genelliği bozmaksızın s yay uzunluğu ile parametrelendirilmiştir. Bu durumda,

$$t(s) = C'(s) = \frac{dC(s)}{ds}$$

birim vektördür ve $C(s)$ in birim tanjant vektörü olarak adlandırılır. Regüler eğriler incelendiğinden her zaman $C(s)$ için birim tanjant vektörü vardır. $\|t(s)\|=1$ gerçeğinden

$$t'(s) \cdot t(s) = 0, \quad \forall s \text{ için} \quad (5.2.1)$$

s e göre her iki yandan diferensiyellenebilir olan (5.2.1) eşitliği elde edilir.

Eğer N birim vektörü ile t' nün yönü gösterilirse, $K(s)$ skaler fonksiyonu için

$$t(s) = K(s).N(s) \quad (5.2.2)$$

eşitliliği elde edilir.

(5.2.2) de tanımlanan N birim vektörü C için normal vektördür ve s de K skaler fonksiyonunun değeri $C(s)$ nin eğriliği olarak adlandırılır.

(5.2.2) denkleminde $C'' = K.N$ olarak yeniden yazılabilir ve N ile her iki yan iç çarpıma tabii tutulursa;

$$K = C'' . N \quad (5.2.3)$$

elde edilir. Bu şu anlama gelir, eğriliğin değeri C'' nün C üzerine izdüşümünün uzunluğuna eşittir.

Eşitliğin $1/K(s)$ tersi $C(s)$ 'nin eğriliğinin yarıçapı olarak adlandırılır.

$N(s)$ birim vektör olduğundan $\|N(s)\|=1$ dır ve

$$N(s) \cdot N'(s) = 0$$

dır. Böylece bazı $a(s)$ fonksiyonları için

$$N'(s) = a(s).t(s)$$

dır. $a(s)$ i hesaplamak için (5.2.1) de $t.n=0$ olduğundan $t(s)$ ile her iki yanın iç çarpımı alınarak,

$$a(s) = t(s).N'(s)$$

$$= -t'(s).N(s)$$

$$= -K(s)$$

elde edilir. Böylece;

$$N'(s) = -K(s) \cdot t(s)$$

(5.2.4)

dır. $C_r(s)$, r offset yarıçapı ile $C(s)$ için bir offset eğrisi olsun.

$$C'_r(s) = C(s) + r.N(s)$$

dır. Burada s, C'nin yay uzunluğudur.

C_r 'nin singüler noktası, burada C_r için tanjant vektörü tanımlanamaz ve böylece

$$C'_r(s) = 0$$

dır. (5.2.2) ve (5.2.4) deki bağıntılar kullanılarak s'e göre $C_r(s)$ nin türevi,

$$C_r(s) = (1 - r.K(s)).C'(s)$$

$C'(s)$ asla sıfır olmadığından (regüler) singüler nokta s_0 dır [17].

6. BÖLÜM

TAM OFFSET EĞRİLERİ

Bu bölümde, parametrik ve tam yüzeysel eğriler için cebirsel formülle sınırlanan tam, sabit ve değişken yarıçaplı eğriler elde edilecektir.

6.1. Sabit Yarıçaplı Offset Eğrileri

$C(t) = (x(t), y(t))$ bir parametrik eğrisi için $P = C(t) = (x(t), y(t))$ noktasında eğrinin $N(t) = N_c(t) = N_p$ birim normal vektörü;

$$N_t = N_p = \frac{(y'(t), -x'(t))}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}$$

şeklindedir. Bir r yarıçapına göre $C(t)$ 'nin

$$C_r(t) = (x_r(t), y_r(t))$$

Offset eğrisi;

$$C_r(t) = (x_r(t), y_r(t))$$

$$= C(t) + rN(t)$$

$$= \left(x(t) + r \frac{y'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}, y(t) + r \frac{-x'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} \right)$$

olarak verilir. Böylece;

$$(x_r(t) - x(t), y_r(t) - y(t)) = \left(r \frac{y'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}, r \frac{-x'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} \right)$$

ve

$$x'(t)(x_r(t) - x(t)) + y'(t)(y_r(t) - y(t)) = r \frac{x'(t)y'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} + r \frac{-y'(t)x'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} = 0$$

elde edilir.

$C_r(t)$ offset eğrisi (6.1.1) ve (6.1.2) denklemlerini sağlar.

$$x'(t)(x_r(t) - x(t)) + y'(t)(y_r(t) - y(t)) = 0 \quad (6.1.1)$$

$$(x_r(t) - x(t))^2 + (y_r(t) - y(t))^2 = r^2 \quad (6.1.2)$$

Burada;

$$\begin{aligned} (x_r(t) - x(t))^2 + (y_r(t) - y(t))^2 &= r^2 \frac{y'(t)^2}{x'(t)^2 + y'(t)^2} + r^2 \frac{(-x'(t))^2}{x'(t)^2 + y'(t)^2} \\ &= r^2 \end{aligned}$$

olduğu gösterilir.

(6.1.1) ve (6.1.2) denkleminde $x_r = x_r(t)$ ve $y_r = y_r(t)$ yazılarak (6.1.3) ve (6.1.4) denklemleri bulunur. $x(t)=t$, $y(t)=t^2$ olmak üzere;

$$C(t) = (t, t^2)$$

$$C_r(t) = (x_r(t), y_r(t))$$

$$= C(t) + rN(t)$$

$$= (t, t^2) + r \frac{2t, -1}{\sqrt{4t^2 + 1}}$$

dır.

$$(x_r(t) - x(t), y_r(t) - y(t)) = \left(t + \frac{2rt}{\sqrt{4t^2 + 1}} - t, t^2 - \frac{r}{\sqrt{4t^2 + 1}} - t^2 \right)$$

$$= \left(\underbrace{\frac{2rt}{\sqrt{4t^2+1}}}_{x_r(t)-x(t)}, \underbrace{\frac{-r}{\sqrt{4t^2+1}}}_{y_r(t)-y(t)} \right)$$

ise,

$$x'(t).(x_r(t)-x(t)) + y'(t).(y_r(t)-y(t)) = 1 \cdot \left(\frac{2rt}{\sqrt{4t^2+1}} \right) + 2t \cdot \left(\frac{-r}{\sqrt{4t^2+1}} \right) = 0$$

dır. Böylece (6.1.1) elde edilir.

$$(x_r(t)-x(t))^2 + (y_r(t)-y(t))^2 = r^2$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{2rt}{\sqrt{4t^2+1}} \right)^2 + \left(\frac{-r}{\sqrt{4t^2+1}} \right)^2 &= \frac{4r^2t^2 + r^2}{4t^2+1} \\ &= r^2 \end{aligned}$$

dır. Buradan da (6.1.2) bulunur. Bu eşitliklerden

$$x'(t)(x_r(t)-x(t)) + y'(t)(y_r(t)-y(t)) = 0 \quad (6.1.3)$$

$$(x_r(t)-x(t))^2 + (y_r(t)-y(t))^2 = r^2 \quad (6.1.4)$$

elde edilir.

$C_r(t)$ offset eğrisi için $f_r(x_r, y_r) = 0$ tam cebirsel denklemini (6.1.3) ve (6.1.4) denklemlerinden “t” değişkeni elimine edilerek elde edilir.

$$x_r - t + 2t.y_r - 2t^3 = 0$$

$$\Rightarrow x_r - t = -2ty_r - 2t^3$$

$$= -2t(y_r - t^2)$$

bulunur. Bulunan değer (6.1.4) denkleminde yerine yazılırsa;

$$(-2t(y_r - t^2))^2 + (y_r - t^2) = r^2$$

$$\Rightarrow 4t^2(y_r - t^2)^2 + (y_r - t^2) = r^2$$

$$\Rightarrow (y_r - t^2) = \frac{r^2}{\sqrt{4t^2 + 1}}$$

elde edilir. $x(t)$ ve $y(t)$ iki koordinat fonksiyonu olduğunda t 'nin integral polinomlarıdır.

$f(x,y)=0$ şeklinde tanımlanan bir implicit C eğrisi için $p=(x,y)$ non -singüler noktasında eğrinin N_p birim normal vektörü,

$$N_p = \frac{(f_x, f_y)}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2}}$$

olarak verilir. Bir r yarıçapına göre C 'nin C_r offset eğrisi;

$$P_r = (x_r, y_r)$$

$$= p + rN_p$$

$$= \left(x + r \frac{f_x}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2}}, y + r \frac{f_y}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2}} \right)$$

olacak şekilde $P_r = (x_r, y_r)$ noktalarının cümlesidir. $P_r = (x_r, y_r)$ noktası aynı zamanda (6.1.5), (6.1.6) ve (6.1.7) denklemlerini de sağlar.

$$f(x, y) = 0 \quad \text{ve} \quad p = (x, y) \in C \quad (6.1.5)$$

$$(x_r - x)f_y(x, y) - (y_r - y)f_x(x, y) = 0 \quad (6.1.6)$$

$$(x_r - x)^2 + (y_r - y)^2 = r^2 \quad (6.1.7)$$

$C_r(t)$ offset eğrisi için $f_r(x_r, y_r) = 0$ implicit denklemi yukarıdaki (6.1.5) ve (6.1.7) denklemlerinden x ve y değişkenleri elimine edilerek elde edilir.

$$f_r(x_r, y_r) = 0 \text{ cebirsel eğrisidir.}$$

6.2. Değişken Yarıçaplı Offset Eğrileri

$r(t)$ bir değişken offset yarıçap fonksiyonu için $C(t)$ eğrisi boyunca t 'nin bir fonksiyonu olarak verilen $C_r(t)$ offset eğrisine karşılık gelen eğri,

$$C_r(t) = C(t) + r(t)N(t)$$

$$= \left(x(t) + r(t) \frac{y'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}, y(t) + r(t) \frac{-x'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} \right)$$

ile verilir. $C_r(t)$ offset eğrisi (6.2.1) ve (6.2.2) denklemlerini sağlar.

$$x'(t)(x_r(t) - x(t)) + y'(t)(y_r(t) - y(t)) = 0 \quad (6.2.1)$$

$$(x_r(t) - x(t))^2 + (y_r(t) - y(t))^2 = r(t)^2 \quad (6.2.2)$$

$C_r(t)$ offset eğrisi için, $f_r(x_r, y_r) = 0$ implicit cebirsel denklemi (6.2.3) ve (6.2.4) denklemlerinden t değişkeninin elimine edilmesiyle elde edilir.

$$x'(t)(x_r - x(t)) + y'(t)(y_r - y(t)) = 0 \quad (6.2.3)$$

$$(x_r - x(t))^2 + (y_r - y(t))^2 = r(t)^2 \quad (6.2.4)$$

(6.2.3) ve (6.2.4) denklemleri (6.2.1) ve (6.2.2) denklemlerinde $x_r = x_r(t)$ ve $y_r = y_r(t)$ yazılarak bulundu.

$r(x, y)$ bir değişken offset yarıçap fonksiyonu için $f(x, y) = 0$ ile tanımlanan C eğrisi boyunca $P = (x, y)$ noktaları için tanımlandı [17].

$r(x, y)$ yarıçapına göre C 'nin C_r offset eğrisine karşılık gelen,

$$P_r = (x_r, y_r)$$

$$= p + r(x, y)N_p$$

$$= \left(x + r(x, y) \frac{f_y}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2}}, y + r(x, y) \frac{-f_x}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2}} \right)$$

noktası aynı zamanda (6.2.5), (6.2.6) ve (6.2.7) denklemlerini de sağlar.

$$f(x, y) = 0 \quad \text{ve} \quad p = (x, y) \in C \quad (6.2.5)$$

$$(x_r - x)f_y(x, y) - (y_r - y)f_x(x, y) = 0 \quad (6.2.6)$$

$$(x_r - x)^2 + (y_r - y)^2 = r(x, y)^2 \quad (6.2.7)$$

$C_r(t)$ offset eğrisi için, $f_r(x, y) = 0$ implicit cebirsel denklemi (6.2.5) ve (6.2.7) denklemlerinden x ve y değişkenlerini elimine edilerek elde edildi.

6.3. Offset Eğrileri için Türevler

$C_r(t)$ sabit yarıçaplı offset eğrisi aynı t parametresine bağlı $C(t)$ orjinal eğrisi ile aynı tanjant yönüne sahiptir. Buradan;

$C_r(t) // C'(t)$ için $\forall 0 \leq t \leq 1$ ve buna denk olarak

$$C_r'(t) = \wp(t).C'(t)$$

bazı $\wp(t)$ reel fonksiyon için $\wp(t)$ fonksiyonu t de $C(t)$ nin $\kappa(t)$ eğrilğine bağlıdır.

Lemma 6.3.1. r yarıçapına göre $C(t)$ parametrik eğrisi için $C_r(t)$ sabit yarıçaplı offset eğrisi

$$\begin{aligned} C_r'(t) &= \wp(t).C'(t) \\ &= (1 + r.\kappa(t)).C'(t) \end{aligned}$$

ile hesaplanan $C_r'(t)$ türevine sahiptir.

İspat: $\frac{d}{dt} \frac{y'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} = \frac{d}{dt} \left(y'(t)(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{-\frac{1}{2}} \right)$

$$= y''(t)(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{-\frac{1}{2}} - y'(t)(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{-\frac{3}{2}}(x'x'' + y'y'')$$

$$= \frac{y''(t)(x'(t)^2 + y'(t)^2)}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{y'(t)(x'(t)x''(t) + y'(t)y''(t))}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{x'(t)(y''(t)x'(t) - y'(t)x''(t))}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

ve

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \left(\frac{-x'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} \right) &= \frac{d}{dt} \left(-x'(t) \left(x'(t)^2 + y'(t)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \right) \\
 &= -x''(t) \left(x'(t)^2 + y'(t)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} + x'(t) \left(x'(t)^2 + y'(t)^2 \right)^{-\frac{3}{2}} (x'x'' + y'y'') \\
 &= \frac{-x''(t) \left(x'(t)^2 + y'(t)^2 \right) + x'(t) \left(x'(t)x''(t) + y'(t)y''(t) \right)}{\left(x'(t)^2 + y'(t)^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \\
 &= y'(t) \cdot \frac{\left(x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t) \right)}{\left(x'(t)^2 + y'(t)^2 \right)^{\frac{3}{2}}}
 \end{aligned}$$

dir. Buradan,

$$\begin{aligned}
 N(t) &= \left(\frac{y'(t), -x'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} \right) \\
 N'(t) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{y'(t), -x'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} \right) \\
 &= \underbrace{\frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{\left(x'(t)^2 + y'(t)^2 \right)^{\frac{3}{2}}}}_{\kappa(t)} \cdot \underbrace{(x'(t), y'(t))}_{C'(t)}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow N'(t) = \kappa(t).C'(t)$$

bulunur. Böylece,

$$\begin{aligned}
 C_r'(t) &= C'(t) + rN'(t) \\
 &= C'(t) + r\kappa(t).C'(t) \\
 &= C'(t).(1 + r\kappa(t))
 \end{aligned}$$

şartları sağlanır. Bu da ispatı tamamlar.

Şimdi $C(t)$ değişken yarıçaplı offset eğrisini göz önüne alalım. Bununla birlikte bu durumda $C_r(t)$ tam değişken yarıçaplı offset eğrisi t de $C(t)$ orjinal eğrisi ile aynı tanjant yönüne sahip olmayabilir [18].

Lemma 6.3.2. $r(t)$ değişken offset yarıçap fonksiyonuna göre $C(t)$ parametrik eğrisi için $C_r(t)$ değişken yarıçaplı offset eğrisi olmak üzere $C_r(t)$ nin türevi olan $C'_r(t)$

$$C'_r(t) = (1 + r(t)\kappa(t)).C'(t) + r'(t)N(t)$$

$$= \wp(t).C'(t) + r'(t)N(t)$$

$$= C'(t) \cdot \begin{bmatrix} \wp(t) & \frac{-r'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} \\ \frac{-r'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} & \wp(t) \end{bmatrix}$$

ile hesaplanır.

İspat: $C_r(t) = C(t) + r(t)N(t)$

Offset eğrisinin türevi alınır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$C'_r(t) = C'(t) + r'(t)N(t) + r(t)N'(t)$$

$$= C'(t) + r'(t)N(t) + r(t)\kappa(t).C'(t)$$

$$= \left(\underbrace{1 + r(t)\kappa(t)}_{\wp(t)} \right) . C'(t) + r'(t).N(t)$$

$$= \wp(t).C'(t) + r'(t).N(t)$$

$$\begin{aligned}
&= C'(t) \cdot \varphi(t) + \left((y'(t), -x'(t)) \cdot \frac{r'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} \right) \\
&= C'(t) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \varphi(t) + (x'(t), y'(t)) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{r'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} \\
&= C'(t) \cdot \begin{pmatrix} \varphi(t) & 0 \\ 0 & \varphi(t) \end{pmatrix} + C'(t) \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{-r'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} \\ \frac{r'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} & 0 \end{pmatrix} \\
&= C'(t) \cdot \begin{pmatrix} \varphi(t) & \frac{-r'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} \\ \frac{r'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} & \varphi(t) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

KAYNAKLAR

1. Hacısalihoğlu, H. H. ,“ Yüksek Diferensiyel Geometriye Giriş ”, Fırat Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi yayınları, 2, Elazığ,1980.
2. Hacısalihoğlu, H.H., “Yüksek Boyutlu Uzaylarda Dönüşümler ve Geometrilere” İnönü Üniversitesi, Temel Bilimler Fakültesi yayınları, 1, Malatya, 1980.
3. Spivak, M, A, Comprehensive Indroduction to Differential Geometry, Vols . I, II, III, IV, V . Brandeis University.
4. O'Neill, B., Elementary Diferential Geometry, Academic Press , New York, 1966.
5. Spivak, M, Calculus, On Manifolds, W. A. Benjamin, Inc. New York, 1965.
6. Hicks, N.J., Notes On Differential Geometry, Van Nosrand Reinhold Company, London, 1974.
7. Kobayashi, S.-Nomizu, K., Foundations of Differential Geometry,Vols.I, II, John Wiley Sons Inc . New York, Lccn:63-19209.
8. Boothby, M. W., An Introductions To Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry, Ac.Press, New York, 1975.
9. Auslander, L., Diferential Geometry, A Harper International Edition, Harper Row. New York, 1963.
10. Flanders, H., Diferential Forms With Aplications to the Physical Sciences, Acedemic Prees, New York, 1963.
11. Thorpe, J.A., Elementary Topics in Differential Geomtry, Springer – Verlag,pp:32, Berlin, 1974.
12. Goetz, A., Introductions to Differential Geometry, University of Notre Dame, Indiana.
13. Abhyankar, S., Baraj, C., " Automatic Parametrization of Rotational Curves and Surfaces III :Algebraic Plane Curves " Computer Aided Geometric Design, Vol.pp.309-321, 1988.
14. Siltanen, P., Woodward, C., " Normal Orientation Methods for 3D Offset Curves, Sweep Surfaces and Skinning " Computer Graphics Forum, Vol. 11, No. 3, (Proc. of Eurographics'92), pp. 449-457, 1988.

15. Chua, Y., "Bezier Brushstrokes, " Computer Aided Design, Vol, 22, No. 9, pp. 550-555, 1990.
16. Coquillart, S., "Computing Offsets of B-spline Curves", Computer Aided Design, Vol. 19, No.6, pp. 305-309, 1987.
17. Farouki, R.,and Neff, C., " Analytic Properties of Plane Offset Curves ", Computer Aided Geometric Design, Vol. 7, pp.83-99, 1990.
18. Farouki, R., Neff, C., " Algebraic Properties of Plane Offset Curves ", Computer Aided Geometric Design, Vol. 7, pp.101-127,1990.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Zeynep CESUR

Baba Adı : Necmetdin

Anne Adı : Gülsevim

Doğum Yeri : Kayseri

Doğum Tarihi : 12.01.1982

İlk ve orta öğrenimini Kayseri’de tamamladı. Erciyes Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü’nden lisans diploması alarak 2004 yılında mezun oldu. Aynı yıl Eras Dershanesinde göreve başladı. 2006 yılında Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda Yüksek Lisans öğrenimine başladı ve halen bu anabilim dalında öğrenimine devam etmektedir.

İletişim Bilgileri;

Adres: Yenidoğan Mah. Alperen Cad. Orkide Sok. Çağdaş Sit. No:40

Talas/KAYSERİ

e-posta: zeynepcesur@windowslive.com

GSM: 0 535 830 77 01