

T.C.
YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANTİPRİZMALAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN : Alper GÜLLE
DANIŞMAN : Prof. Dr. Bülent KARAKAŞ

VAN - 2009

T.C.
YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANTİPRİZMALAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN : Alper GÜLLE

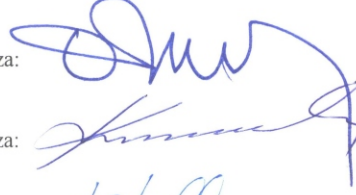
VAN - 2009

KABUL VE ONAY SAYFASI

Matematik Anabilim Dalı'nda Prof. Dr. Bülent Karakaş danışmanlığında, Alper Gülle tarafından sunulan “Antiprizmalar” isimli bu çalışma “Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği” ve “Fen Bilimleri Enstitüsü Yönergesi”nin ilgili hükümleri gereğince 03/03/2009 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile başarılı bulunmuş ve yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

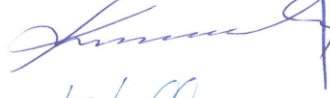
Başkan: Prof. Dr. Cemil Tunç

İmza:



Üye: Prof. Dr. Bülent Karakaş

İmza:



Üye: Yrd. Doç. Dr. İsmail H. Denizler

İmza:



Üye:

İmza:

Üye:

İmza:

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun/....../..... tarih ve sayılı kararı ile onaylanmıştır.

İmza

Enstitü Müdürü

ÖZET

ANTİPRİZMALAR

GÜLLE, Alper

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Ana Bilim Dalı

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Bülent KARAKAŞ

Ocak 2009, 42 sayfa

Bu tezde genel olarak antiprizmalar incelendi. İlgili prizmalardan bunlara karşılık gelen antiprizmaların elde edilişi için bir metod verildi. Ayrıca, düzgün antiprizmaların hacim ve yüzey alanı hesapları yapıldı. Bu hesapları kolaylaştırmak için bir tablo oluşturuldu. Örnek olarak düzgün üçgen ve düzgün dörtgen antiprizmalar tanıtıldı, alan ve hacim hesapları yapıldı.

Anahtar kelimeler : Katı cisimler, Antiprizmalar, Düzgün antiprizmalar.

ABSTRACT

ANTIPRISMS

GÜLLE, Alper

Msc Thesis, Mathematical Departments

Supervisor : Prof. Dr. Bülent KARAKAŞ

January 2009, 42 pages

In this thesis, in general, antiprisms have been investigated. A method for construction of antiprisms from associated prisms has been given. Also, volume and area of surface of regular antiprisms have been calculated. To make this calculation easy a table has been formed. As example; regular triangle and regular quadrangle antiprisms have been introduced, the areas and volumes of them have been calculated.

Key words: Solids, Antiprisms, Regular antiprisms.

ÖN SÖZ

Yüksek lisans eğitimim süresince yetişmem ve kendimi geliştirmem için engin tecrübe ve birikimlerinden faydalandığım, tezimin hazırlanmasının her aşamasında büyük özveri ve çalışmamda sabırla yol gösteren, yardımlarını esirgemeyen değerli hocam Sayın Prof. Dr. Bülent KARAKAŞ' a sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Yüksek lisans eğitimime emeği geçen hocalarım; Sayın Prof. Dr. Bülent KARAKAŞ'a, Sayın Prof. Dr. Cemil TUNÇ'a, Sayın Doç. Dr. Yılmaz Altun'a, Sayın Yrd. Doç. Dr. Aytekin GÜLLE'ye, Sayın Yrd. Doç. Dr. Hakkı DURU'ya, yüksek lisans eğitimim süresince desteklerini esirgemeyen eşim Bahar GÜLLE'ye teşekkür ederim.

Alper GÜLLE

Ocak 2009, VAN

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	i
ABSTRACT	iii
ÖN SÖZ	v
İÇİNDEKİLER	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ	ix
EKLER DİZİNİ	xi
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ	xiii
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK BİLDİRİŞLERİ	2
3. MATERYAL ve YÖNTEM	3
3.1. Prizmalar ve Piramitler	3
3.1.1. Prizmalar	3
3.1.1.1. Prizmaların tanımları	3
3.1.1.2. Prizmaların hacimleri	5
3.1.1.3. Prizmaların alanları	5
3.1.2. Piramitler	6
3.1.2.1. Piramitlerin tanımları	6
3.1.2.2. Piramitlerin hacimleri	7
3.2. Antiprizmalar	8
3.2.1. Antiprizmaların elde edilişi ve tanımlaması	8
3.2.2. Düzgün antiprizmaların hacimleri	12
3.2.2.1. Bir düzgün $2n$ -gen ile oluşturulan prizmanın hacmi	12
3.2.2.2. Dik piramitlerin hacimleri	17
3.2.2.3. Düzgün n -gen antiprizmanın hacmi	18

	Sayfa
3.2.3. Düzgün n-gen antiprizmanın yüzey alanı	21
3.3. Düzgün Antiprizmaların Hacim ve Alan Hesapları İçin (Excel) Hesap Tablosu	23
3.4. Bazı Düzgün Antiprizma Örnekleri	27
3.4.1. Düzgün üçgen antiprizma	27
3.4.2. Düzgün dörtgen antiprizma	30
4. BULGULAR	32
5. TARTIŞMA ve SONUÇ	33
KAYNAKLAR	36
EKLER	37
ÖZGEÇMİŞ	42

ŞEKİLLER DİZİNİ

	Sayfa
Şekil 3.1.1.1. Prizmatik yüzey.	3
Şekil 3.1.1.2. Prizmatik yüzeyin birbirine paralel iki düzlemle kesiştirilmesi.	3
Şekil 3.1.1.3. Düzgün n-gen dik prizma.	4
Şekil 3.1.1.4. Bazı prizma örnekleri.	4
Şekil 3.1.1.5. Birim düzgün altıgen ve tabanı.	5
Şekil 3.1.2.1. Düzlemsel çokgenin her noktasının T noktası ile birleştirilmesi.	6
Şekil 3.1.2.2. Düzgün altıgen piramit ile düzgün altıgen tabanlı dik piramit.	6
Şekil 3.1.2.3. Birim düzgün kare piramit ve tabanı.	7
Şekil 3.2.1.1. 2n- kenarlı prizma.	8
Şekil 3.2.1.2. (P) ve (P') 2n- çokgenlerinin alterne köşelerinin birleştirilmesi.	9
Şekil 3.2.1.3. Alt ve üst tabanların köşelerinin ardışık olarak birleştirilmesi.	9
Şekil 3.2.1.4. Üçgensel bölgelerin dış kısımlarının atılması.	10
Şekil 3.2.1.5. Antiprizma.	11
Şekil 3.2.2.1. 2n- Prizmanın tabanındaki ($P_1P_2P_3...P_{2n-1}P_{2n}$) düzgün 2n-gen.	12
Şekil 3.2.2.2. Düzgün 2n-kenarlı çokgenlerle oluşturulan ((P), (P')) prizması.	14
Şekil 3.2.2.3. Düzgün 2n- dik prizmadan kesilen piramitler ve oluşan antiprizma.	15
Şekil 3.2.2.4. Kesilen dik piramitler ve hesaplarda kullanılacak uzunluklar.	15
Şekil 3.3.1. Antiprizmaların hacim ve alanlarını hesaplayan Excel hesap tablosunun genel görünümü.	26
Şekil 3.4.1.1. Düzgün altıgen dik prizma.	27
Şekil 3.4.1.2. Alt ve üst tabanların alterne köşelerini birleştiren köşegenler.	27
Şekil 3.4.1.3. Alt ve üst tabanların ardışık köşelerinin birleştirilmesi.	28
Şekil 3.4.1.4. Antiprizmadan geriye kalan piramitlerin atılması.	28
Şekil 3.4.1.5. Ayrıt uzunlukları x cm. olan düzgün üçgen antiprizma.	29
Şekil 3.4.2.1. Düzgün sekizgen dik prizma.	30
Şekil 3.4.2.2. Alterne köşeleri ile alt ve üst tabanın ardışık köşeleri birleştirilmiş düzgün sekizgenle elde edilen düzgün dörtgen antiprizma.	30
Şekil 3.4.2.3. Antiprizmadan geriye kalan piramitlerin atılması.	31
Şekil 3.4.2.4. Düzgün 4-gen antiprizma. (Kare Antiprizma)	31
Şekil 5.1. SF_6 ve PCl_6^- bileşiklerinin molekül yapıları ve bağları.	33
Şekil 5.2. $EuZnIn$ bileşiğinin molekül yapısı ve bağları.	34
Şekil 5.3. Uzay çatı sistemlerinde antiprizmaların kullanılması.	35
Şekil 5.4. Uzay çatı sistemleri ile yapılmış iki örnek.	35

EKLER DİZİNİ

	Sayfa
Ek 1. Düzgün Beşgen Antiprizma	38
Ek 2. Düzgün Altıgen Antiprizma	39
Ek 3. Düzgün Sekizgen Antiprizma	40
Ek 4. Düzgün Ongen Antiprizma	41

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler

α	Alfa
V	Hacim
S	Alan

Kısaltmalar

h	Yükseklik
br	Birim
cm	Santimetre
x	Kenar Uzunluğu
n	Kenar Sayısı
((P),(P'))	Alt ve üst tabanları (P) ve (P') çokgenleri olan prizma
(T,(P))	Tepe noktası T noktası ve tabanı (P) çokgeni olan piramit

1. GİRİŞ

Katı cisimler ve katı cisim geometrisi antik çağlar da dahil her zaman ilgi çekici olmuştur. Bu ilgiyle piramitler inşa edilmiş, hatta inanç sistemleri geliştirilmiştir. Mesela Pisagor (M.Ö. 580 - M.Ö. 500) ve Platon (M.Ö. 427 - M.Ö.347) gibi antik çağ düşünürleri tabiatın ancak matematikle ifade edilebileceğini ve doğadaki bazı unsurların temelinde çeşitli katı cisimler olduğunu düşünmüşlerdir. (Anonim, 2008b)

Günümüzde ise fizik, kimya gibi temel bilimlerin yanı sıra mühendislik ve mimari gibi bir çok alanda katı cisimlerden faydalanılmaktadır.

Katı cisimler, Prizmalar, Piramitler ve Küre olmak üzere temel başlıklar altında ilk ve orta öğretim düzeyinde okullarda işlenmektedir. Ancak katı cisimler bu ana başlıklarla kalmayıp çok daha geniş bir konudur.

Bir kaç alt başlık olarak, Antiprizmalar, Kubbeler (Cupolas), Çok Yüzlüler (Polyhedras), Deltoidal Çok Yüzlüler (Deltahedras), Katalan Cisimleri (Catalan Solids), Johnson Cisimleri, Platonik Cisimler, Arşimedyen Cisimler, ... gibi daha bir çok katı cisimden bahsetmek mümkündür.

Bu çalışmada, antiprizmalar incelenecek, antiprizmaların elde edilişleri ile düzgün antiprizmaların hacim ve alan hesaplarının formüle edilmesi üzerinde durulacaktır.

2. KAYNAK BİLDİRİŞLERİ

Anonim (2008a), www.literka.addr.com/antiprisms.htm sayfasında antiprizmanın hacim hesabına ilişkin bazı bilgiler verilmiştir.

Anonim (2008b), Platon ve platonik cisimler hakkında genel bilgiler vermiştir.

Cromwell (1997), bir çok katı cismi göstermiş ve aralarındaki ilişkiden bahsetmiştir. Kullanım alanları ile ilgili bilgiler vermiştir.

Darling (2004), hazırladığı bir çeşit matematik ansiklopedisi olan kitabında antiprizmalardan da bahsetmiştir.

Darvas (2007), daha çok simetriler üzerinde durmasıyla birlikte bir çok katı cisim hakkında bilgiler vermiştir.

Gschneidner ve ark. (1990), kimyasal bileşiklerin molekül yapılarını geometrik cisimlerle izah etmişlerdir.

Huggett ve Jordan (2001), bazı katı cisimleri incelemiştir.

Macintyre ve ark. (1992), bir inorganik maddeler kılavuzu olan kitaplarında moleküller ve yapıları özetle anlatılmıştır.

Singer (1998), kitabında yüzeyler ve katı cisimler üzerine çalışmış, tanımlarını, hacimlerini ve alanlarını vermiştir.

Thyssen (2003), Griffith Üniversitesi web sayfasına bağlı olarak hazırladığı sayfada neredeyse tüm katı cisimlerin resimlerini vermiş ve sınıflandırmıştır.

Weisstein (2007), <http://mathworld.wolfram.com> sayfasında matematiğin bir çok alt dalı ile ilgili bilgiler vermiştir. Antiprizmalar hakkındaki sayfada da bazı antiprizma örneklerinin yanı sıra hacim hesabı üzerine de çalışmıştır.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Prizmalar ve Piramitler

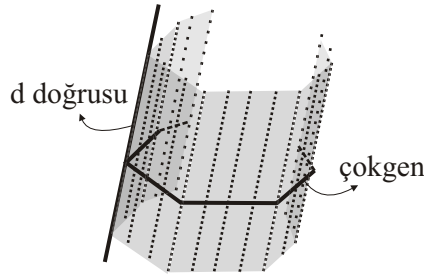
Bu kısımda prizmalar ve piramitler, antiprizmalar için temel teşkil edecek kadar incelenecektir.

3.1.1. Prizmalar

3.1.1.1. Prizmaların Tanımları

Tanım 3.1.1.1.1 (Prizmatik Yüzey)

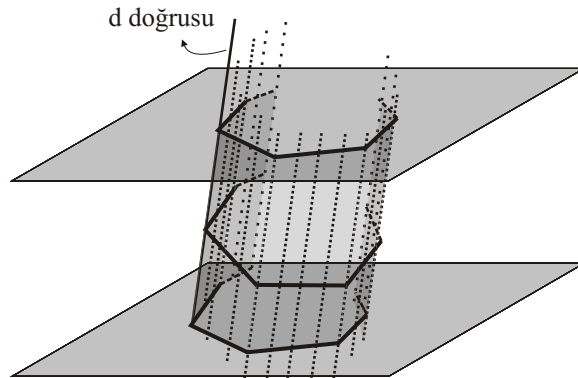
Bir düzlem çokgeni ile, bunun düzlemine paralel olmayan bir d doğrusu verilsin. d doğrusuna paralel olan ve çokgenin kenarlarına dayanarak hareket eden doğruların oluşturduğu yüzeye “prizmatik yüzey” denir. (Singer,1998).



Şekil 3.1.1.1. Prizmatik yüzey.

Tanım 3.1.1.1.2 (Prizma)

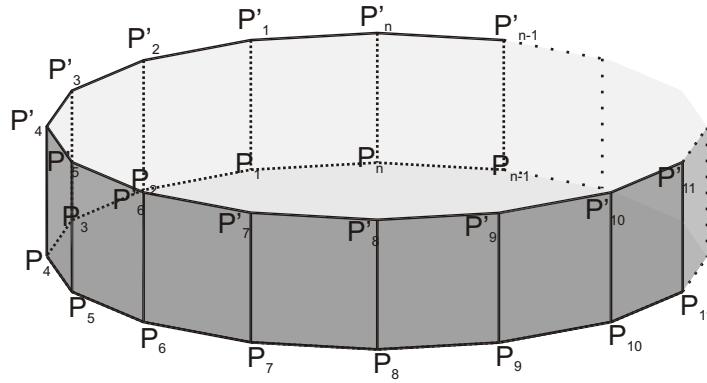
Bir prizmatik yüzeyin birbirine paralel iki düzlemle kesilmesiyle oluşan cisme “prizma” denir. (Singer,1998).



Şekil 3.1.1.2. Prizmatik yüzeyin birbirine paralel iki düzlemle kesiştirilmesi.

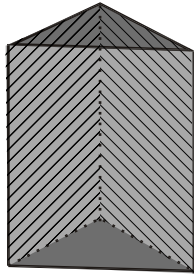
Prizmatik yüzeyle düzlemlerin ara kesiti olan düzlem parçalarına prizmanın tabanları denir. Alt ve üst tabanlar her zaman paraleldir ve birbirine eşittir. İki düzlem arasında kalan prizmatik yüzeyin düzlemsel parçalarına yan yüzeyler denir. Yan yüzeyler her zaman birer paralelkenardır. Prizmanın yüzeylerinde bulunan dörtgen ve çokgenlerin kenarlarına ayrıtlar denir.

Eğer alt ve üst tabanlar birer düzgün çokgen ise prizmaya düzgün prizma, yan yüzeyler taban düzlemine dik ise dik prizma denir. Prizmalar taban şekillerine göre isimlendirilirler. Taban şekli bir kare ise kare prizma, üçgen ise üçgen prizma veya n-kenarlı bir çokgen ise n-gen prizma denir.

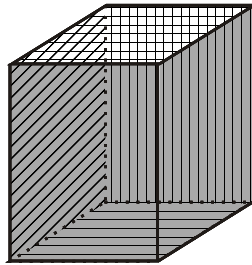


Şekil 3.1.1.3. Düzgün n-gen dik prizma.

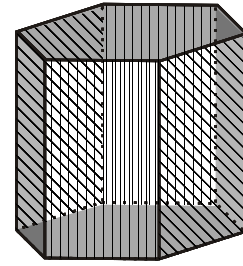
Şekil 3.1.1.3. 'te, tabanı düzgün n-kenarlı çokgen ve yan ayrıtları tabana dik olan bir düzgün n-gen dik prizma verilmiştir. Alt tabanı $(P_1P_2P_3...P_n)$ ve üst tabanı $(P'_1P'_2P'_3...P'_n)$ olan düzgün prizma, $(P_1P_2P_3...P_n, P'_1P'_2P'_3...P'_n)$ şeklinde veya kısaca $((P), (P'))$ şeklinde gösterilir. (Singer, 1998).



Üçgen Prizma



Kare Prizma



Altıgen Prizma

Şekil 3.1.1.4. Bazı prizma örnekleri.

3.1.1.2. Prizmaların Hacimleri

Prizmaların hacimleri genel olarak tabanlarındaki düzlemsel şeklin alanı ile alt ve üst tabanlar arasındaki dik uzaklığın (yüksekliğin) çarpımına eşittir. Prizmanın hacmi V_{prizma} ile, taban alanı S_{taban} ve yükseklik de h ile gösterilirse,

$$V_{\text{prizma}} = S_{\text{taban}} \cdot h \quad (3.1)$$

olur. Örneğin taban ayrıtı x cm ve yan ayrıtı h cm olan bir kare dik prizmanın (yan ayrıt yükseklik olacağından) hacmi, $V_{\text{kare prizma}} = x^2 \cdot h \text{ cm}^3$ olacaktır. (Singer, 1998).

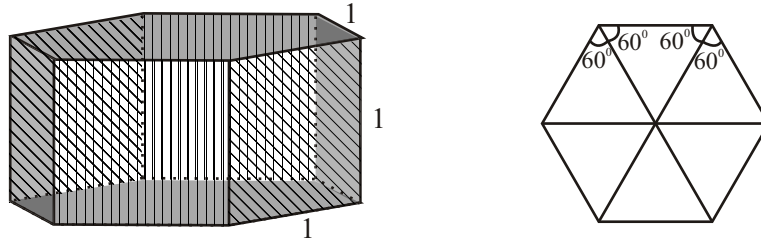
3.1.1.3. Prizmaların Yüzey Alanları

Prizmaların yüzey alanları, tüm yüzeylerindeki alanların toplamına eşittir. Prizmanın yüzey alanı $S_{\text{yüzey}}$, alt ve üst tabandaki birbirine eş çokgenlerin alanlarına S_{taban} ve yan yüzeylerdeki dörtgenlerin alanları toplamına da S_{yanal} denirse,

$$S_{\text{yüzey}} = 2 \cdot S_{\text{taban}} + S_{\text{yanal}} \quad (3.2)$$

olur. Dik prizmalarda yan yüzeyler birer dikdörtgen olduğundan yanal alan taban çevresi ile yükseklik (yan ayrıt) çarpımına eşittir. Örneğin taban ayrıtı x cm ve yan ayrıtı h cm olan bir kare dik prizmanın yüzey alanı, $S_{\text{yüzey}} = 2x^2 + 4xh \text{ cm}^2$ olur.

Örnek 1: Birim düzgün altıgen dik prizmanın hacmi ve yüzey alanı.



Şekil 3.1.1.5. Birim düzgün altıgen ve tabanı.

Birim düzgün altıgen dik prizmanın tüm ayrıt uzunlukları 1 br dir. Öncelikle tabanda bulunan düzgün altıgenin alanı bulunmalıdır. Bir düzgün altıgen 6 tane eşkenar üçgenden oluşur. Bir kenarı x br olan eşkenar üçgenin alanı ise $\frac{x^2\sqrt{3}}{4} \text{ br}^2$ dir. O halde, $S_{\text{taban}} = 6 \left(\frac{1^2\sqrt{3}}{4} \right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ br}^2$ olur. Prizmanın hacmi ise $V_{\text{prizma}} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot 1 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ br}^3$ olur. Yan yüzeylerde ise 6 tane 1 br kenar uzunluğuna sahip kare olduğundan $S_{\text{yanal}} = 6 \text{ br}^2$ dir. O halde $S_{\text{yüzey}} = \frac{3\sqrt{3}}{2} + 6 \text{ br}^2$ dir.

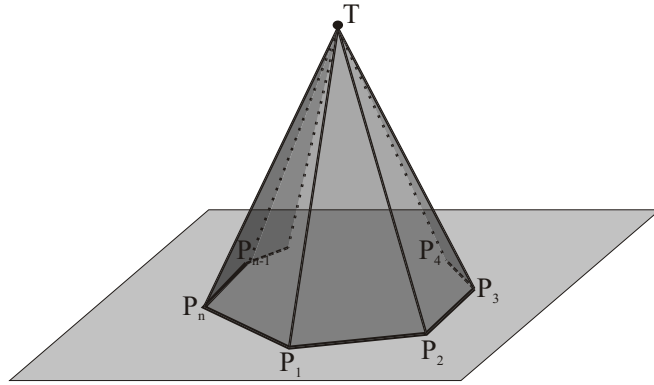
3.1.2. Piramitler

3.1.2.1. Piramitlerin Tanımları

Tanım 3.1.2.1.1 (Piramit)

Bir çokgen ile bunun düzlemi dışında bir T noktası alınsın. T noktasını çokgenin tüm noktaları ile birleştirerek elde edilen cisme “piramit” denir. (Singer ,1998).

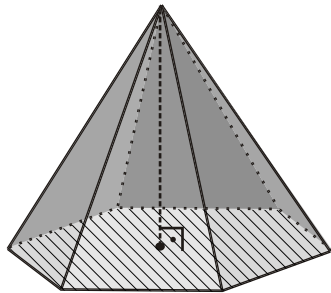
T noktasına “tepe noktası” ve düzlemdeki çokgene de taban denir.



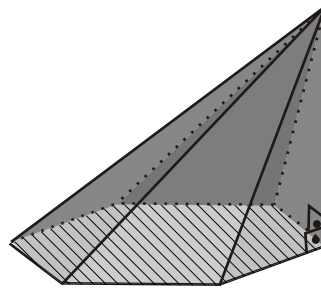
Şekil 3.1.2.1. Düzlemsel çokgenin her noktasının T noktası ile birleştirilmesi.

Tabanı $(P_1P_2P_3...P_n)$ ve tepe noktası T olan piramit, $(T, P_1P_2P_3...P_n)$ şeklinde ya da kısaca $(T, (P))$ şeklinde gösterilir. ($((P), T)$ de olabilir.)

Eğer piramitin taban çokgeni bir düzgün çokgen ve yüksekliği tabanın merkezinden geçiyorsa düzgün piramit denir. Yan ayrıtlarından birinin tabana dik olması durumunda ise bu piramite dik piramit denir.



Düzgün Altıgen Piramit



Tabanı Düzgün Altıgen Dik Piramit

Şekil 3.1.2.2. Düzgün altıgen piramit ile düzgün altıgen tabanlı dik piramit.

3.1.2.2. Piramitlerin Hacimleri

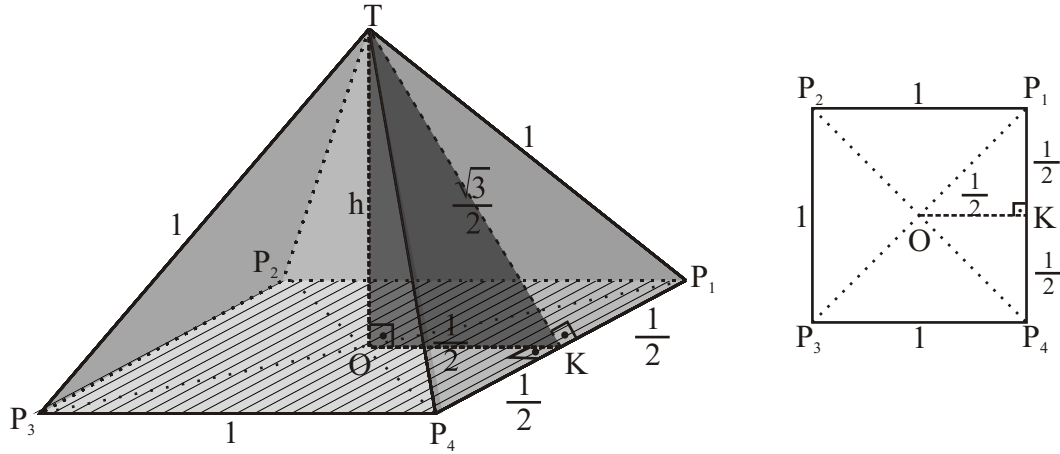
Piramitin yüksekliği, tepe noktasının tabana uzaklığı olmak üzere piramitin hacmi, taban alanı ile yüksekliğinin çarpımının üçte birine eşittir.

Piramitin hacmi V_{piramit} , taban alanı S_{taban} ve yüksekliği h olmak üzere,

$$V_{\text{piramit}} = \frac{1}{3} S_{\text{taban}} \cdot h \quad (3.3)$$

şeklinde bulunur. (Singer, 1998).

Örnek 2: Birim düzgün kare piramitin hacmi.



Şekil 3.1.2.3. Birim düzgün kare piramit ve tabanı.

Şekil 3.1.2.3. 'teki birim düzgün kare piramitin tüm ayrıt uzunlukları 1br ve yan yüzler birer eşkenar üçgen olduğundan (P_1TP_4) üçgeninin yüksekliği $|TK| = \frac{\sqrt{3}}{2}$ br dir. Karenin merkezi, (O) noktasından kenara çizilen dik, $|OK| = \frac{1}{2}$ br dir. (TOK) dik üçgeninde yazılacak olan Pisagor teoremi ile,

$$h^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Rightarrow h^2 + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow h = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ br bulunur.}$$

Piramitin tabanı olan karenin alanı $S_{\text{taban}} = 1^2 = 1 \text{ br}^2$ dir.

O halde piramitin hacmi,

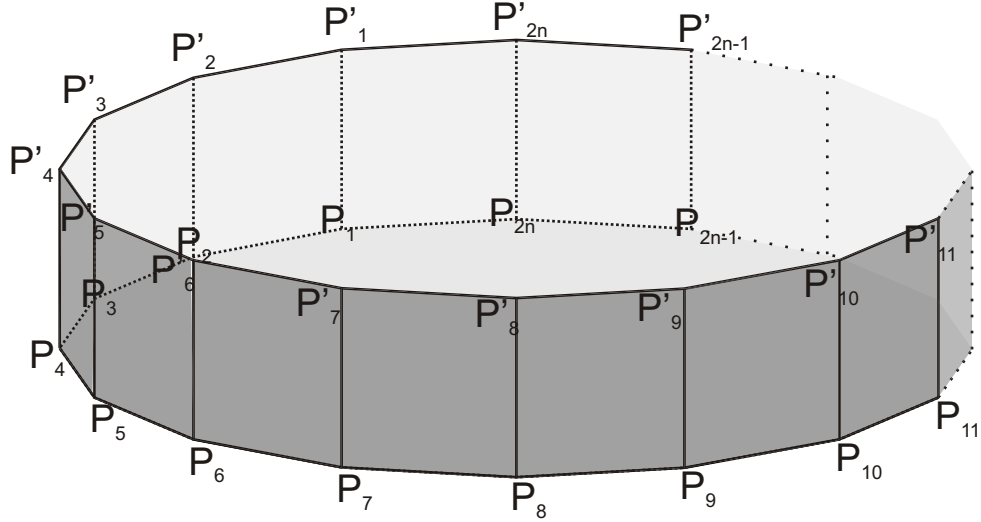
$$V_{\text{piramit}} = \frac{1}{3} S_{\text{taban}} \cdot h \Rightarrow V_{\text{piramit}} = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$V_{\text{piramit}} = \frac{\sqrt{2}}{6} \text{ br}^3 \text{ olur.}$$

3.2. Antiprizmalar

3.2.1. Antiprizmaların Elde Edilişi ve Tanımlaması

$3 \leq n, n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere, n - kenarlı bir antiprizmanın elde edilebilmesi için bir $2n$ - kenarlı prizmadan faydalanılır.

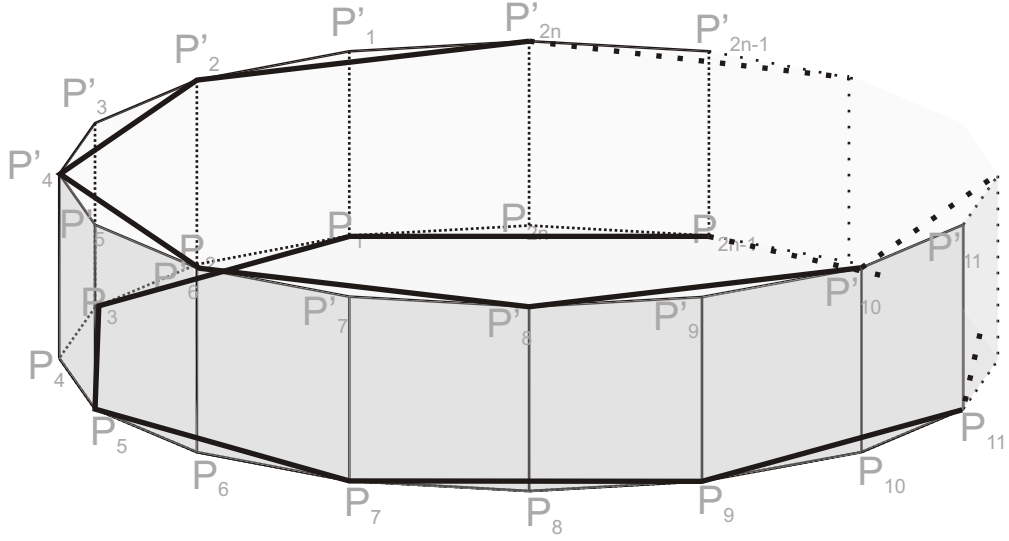


Şekil 3.2.1.1. $2n$ - kenarlı prizma.

$2n$ - kenarlı prizmanın alt ve üst tabanları (P) ve (P') $2n$ - kenarlı çokgenler birbirilerine paralel olsunlar. $i = 1, 2, 3, \dots, 2n-1, 2n$ olmak üzere alt tabanın köşeleri P_i noktaları ve üst taban köşeleri P'_i noktaları olsunlar. $[P_i P'_i]$ doğru parçaları çizilerek $2n$ - kenarlı $(P_i P'_i)$ prizması elde edilir.

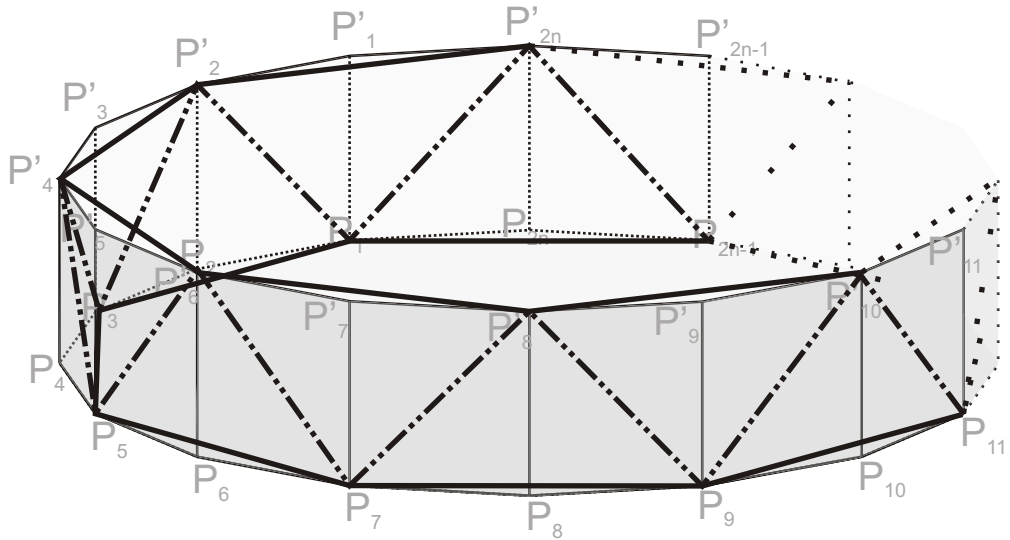
Bir çokgenin $P_1, P_3, P_5, \dots, P_{2n-1}$ şeklinde birer atlamalı köşelerine alterne köşeleri denir. Benzer şekilde $P_2, P_4, P_6, \dots, P_{2n}$ köşeleri de diğer alterne köşelerdir.

Alt taban olan (P) $2n$ - çokgeninin alterne köşeleri, P_1 noktasından başlayarak birleştirilsin. Yani $[P_1 P_3], [P_3 P_5], [P_5 P_7], \dots, [P_{2n-3} P_{2n-1}]$ ve son olarak da $[P_{2n-1} P_1]$ köşegenleri çizilsin. Aynı işlem üst taban olan (P') $2n$ - çokgeni için de P'_2 noktasından başlayarak yapılsın. Yani $[P'_2 P'_4], [P'_4 P'_6], [P'_6 P'_8], \dots, [P'_{2n-2} P'_{2n}]$ ve son olarak da $[P'_{2n} P'_2]$ köşegenleri çizilsin.



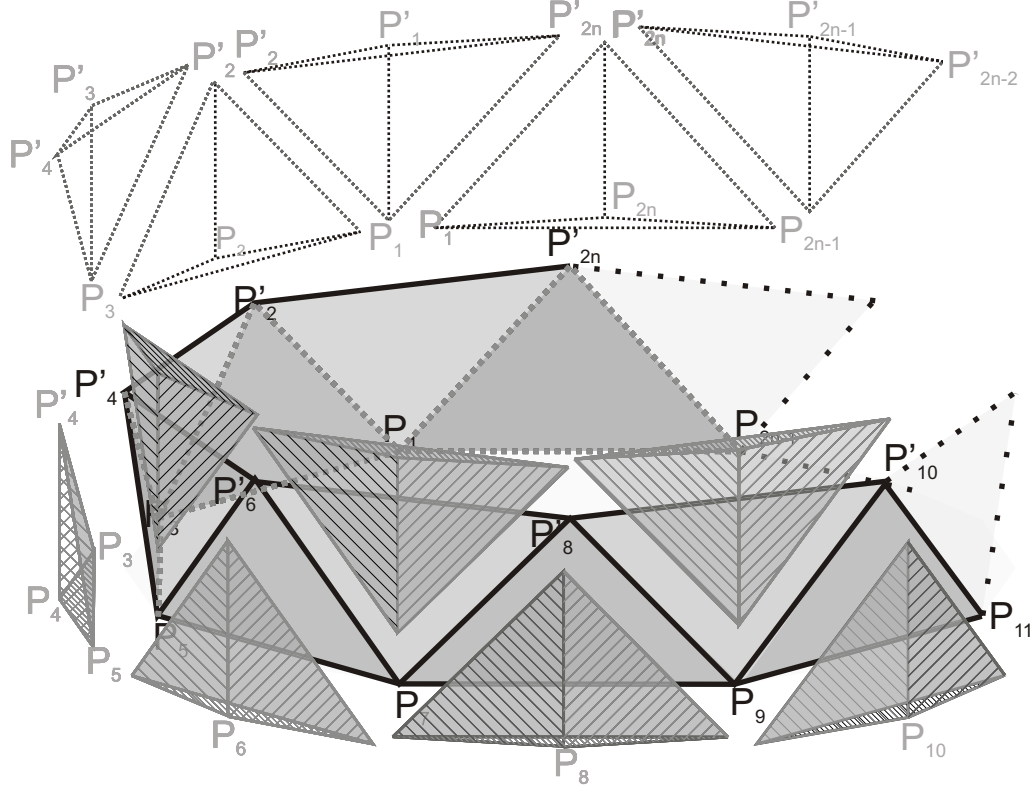
Şekil 3.2.1.2. (P) ve (P') 2n- çokgenlerinin alterne köşelerinin birleştirilmesi.

Böylelikle elde edilen şekle yapılması gereken bir sonraki işlem, alt taban köşeleri ile üst taban köşelerini ardışık olacak biçimde birleştirmektir. Yani $[P_1P'_2]$, $[P'_2P_3]$, $[P_3P'_4]$, ..., $[P_{2n-1}P'_{2n}]$ ve son olarak $[P'_{2n}P_1]$ çizilsin.



Şekil 3.2.1.3. Alt ve üst tabanların köşelerinin ardışık olarak birleştirilmesi.

n - kenarlı antiprizmanın elde edilmesi için yapılması gereken son işlem, en son adımda elde edilen: $(P_1P_2P_3)$, $(P'_2P_3P'_4)$, $(P_3P_4P_5)$, ... , $(P'_{2n-2}P_{2n-1}P'_{2n})$ ve son olarak da $(P_{2n-1}P'_{2n}P_1)$ üçgenlerinin dış kısımlarını keserek atmaktır.



Şekil 3.2.1.4. Üçgensel bölgelerin dış kısımlarının atılması.

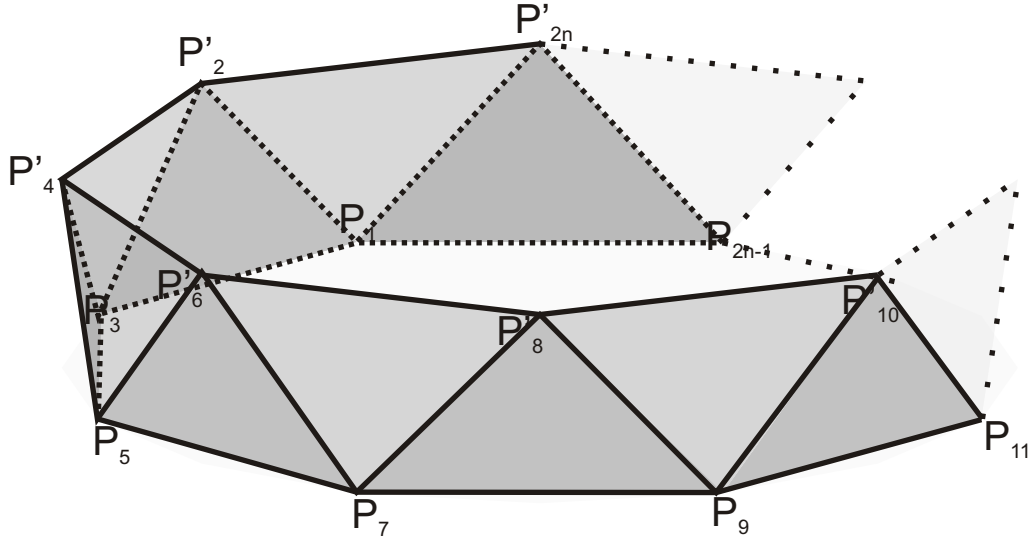
Bu işlem ile yapılan:

$$(P_1P_2P_3, P'_2), (P'_2P_3P'_4, P_3), (P_3P_4P_5, P'_4), \dots, (P_{2n-1}P_{2n}P_1, P'_{2n})$$

ve son olarak da $(P'_{2n}P'_1P'_2, P_1)$ dik piramitlerinin kesilip atılmasıdır.

Sonuç olarak kalan cisim bir n - kenarlı antiprizmadır.

Bu antiprizmanın alt ve üst tabanlarında n - kenarlı 2 adet çokgen ve yan yüzlerinde ise $2n$ - adet üçgen vardır.



Şekil 3.2.1.5. Antiprizma.

Bir düzgün $2n$ - kenarlı dik prizmadan elde edilen n - kenarlı antiprizmanın yan yüzeylerinde oluşan üçgenler birer düzgün üçgen (eşkenar üçgen) ise bu n - kenarlı antiprizmaya “düzgün n -gen antiprizma” denir.

Daha genel olarak bir n - kenarlı antiprizmanın tüm ayrıtları eşit uzunlukta ise bu n -gen antiprizmaya “düzgün n -gen antiprizma” denir.

Uyarı: Bu çalışmalar herhangi bir kaynaktan alınmamıştır, kendi çalışmalarımızdır.

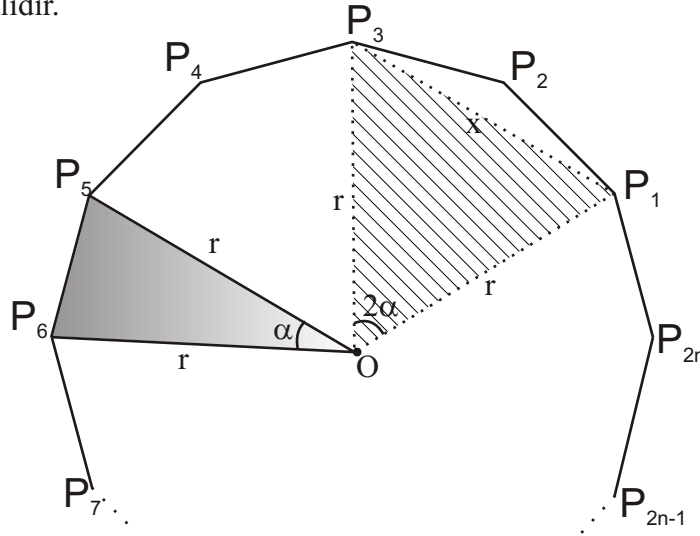
3.2.2. Düzgün Antiprizmaların Hacimleri

Hemen başta belirtilmelidir ki düzgün olmayan antiprizmaların hacim hesaplamaları için genel bir yordamdan bahsetmek mümkün değildir. Bu yüzden genel bir formülizasyon için düzgün antiprizmaların hacim hesaplamaları incelenecektir.

Bir düzgün n -gen antiprizmanın hacminin hesaplanması, aynen elde edilmiş olduğu gibi yapılacaktır. Yani n -gen düzgün antiprizmanın hacmi, $2n$ -kenarlı düzgün çokgenle oluşturulan düzgün dik prizmanın hacminden, kesilerek atılan $2n$ adet dik piramitin hacminin çıkarılmasıyla bulunacaktır.

3.2.2.1. Bir Düzgün $2n$ -gen ile Oluşturulan Prizmanın Hacmi

Bilindiği gibi bir prizmanın hacmi, taban alanı ile yüksekliğinin çarpımına eşittir. O halde öncelikle prizmanın tabanı olan bir düzgün $2n$ -kenarlı çokgenin alanı hesaplanılmalıdır.



Şekil 3.2.2.1. $2n$ - Prizmanın tabanındaki $(P_1P_2P_3...P_{2n-1}P_{2n})$ düzgün $2n$ -geni.

Taban düzgün $2n$ -geninin çevrel çemberinin merkezi olan O noktası, çokgenin her bir köşesiyle birleştirildiğinde oluşan $2n$ - sayıdaki üçgen birbirine eştir. Bu üçgenlerden birinin alanı bulunup $2n$ ile çarpılacaktır.

Örneğin (P_5OP_6) üçgeni ele alınırsa $\alpha = \frac{2\pi}{2n} = \frac{\pi}{n}$, $(\alpha \leq \frac{\pi}{3})$ olmak üzere,

$$\text{Alan}(P_5OP_6) = \frac{r^2 \cdot \sin\alpha}{2} \quad (3.4)$$

dir. O halde düzgün $2n$ -genin alanı,

$$\text{Alan}(P_1P_2P_3\dots P_{2n-1}P_{2n}) = 2n \frac{r^2 \cdot \sin\alpha}{2} = n \cdot r^2 \cdot \sin\alpha \quad (3.5)$$

olacaktır. Bu düzgün çokgenin alterne köşeleri birleştirilerek antiprizma elde edilecek ve bu antiprizmanın hacmi hesaplanacağına göre r uzunluğunun, $|P_1P_3| = |P_3P_5| = |P_5P_7| = \dots = |P_{2n-3}P_{2n-1}| = |P_{2n-1}P_1| = x$ köşegen uzunlukları cinsinden yazılması gerekir. Bunun için (P_1OP_3) üçgeninde kosinüs teoremi uygulanılarak,

$$x^2 = r^2 + r^2 - 2 \cdot r \cdot r \cdot \cos 2\alpha$$

$$x^2 = 2r^2 - 2r^2 \cdot \cos 2\alpha \quad (3.6)$$

elde edilir. Buradan r^2 ifadesi çekilirse,

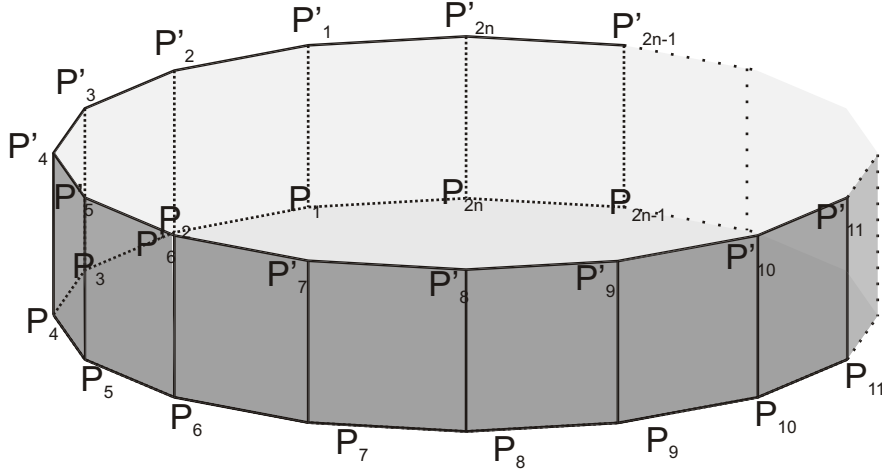
$$r^2 = \left(\frac{x^2}{2(1 - \cos 2\alpha)} \right) \quad (3.7)$$

bulunur ve (3.7) ifadesindeki r^2 , (3.5) ifadesinde yerine yazılırsa,

$$\text{Alan}(P_1P_2P_3\dots P_{2n-1}P_{2n}) = n \left(\frac{x^2}{2(1 - \cos 2\alpha)} \right) \sin\alpha \quad (3.8)$$

elde edilir. Böylece prizmanın taban alanı, antiprizmanın kenar uzunluğu (x) ve kenar sayısı (n) cinsinden ifade edilmiş olur.

Alt tabanı (P) ve üst tabanı (P') düzgün 2n- kenarlı düzgün çokgenler olacak şekilde $(P_1P_2P_3...P_{2n-1}P_{2n}, P'_1P'_2P'_3...P'_{2n-1}P'_{2n})$ düzgün dik prizmasını oluşturmak için karşılıklı köşeler birleştirilerek $[P_1P'_{11}]$, $[P_2P'_{22}]$, $[P_3P'_{33}]$, ..., $[P_{2n-1}P'_{2n-1}]$ ve $[P_{2n}P'_{2n}]$ ayrıtları çizilir. Bu ayrıtlar aynı zamanda dik prizmanın yükseklikleridir.



Şekil 3.2.2.2. Düzgün 2n-kenarlı çokgenlerle oluşturulan ((P) , (P')) prizması.

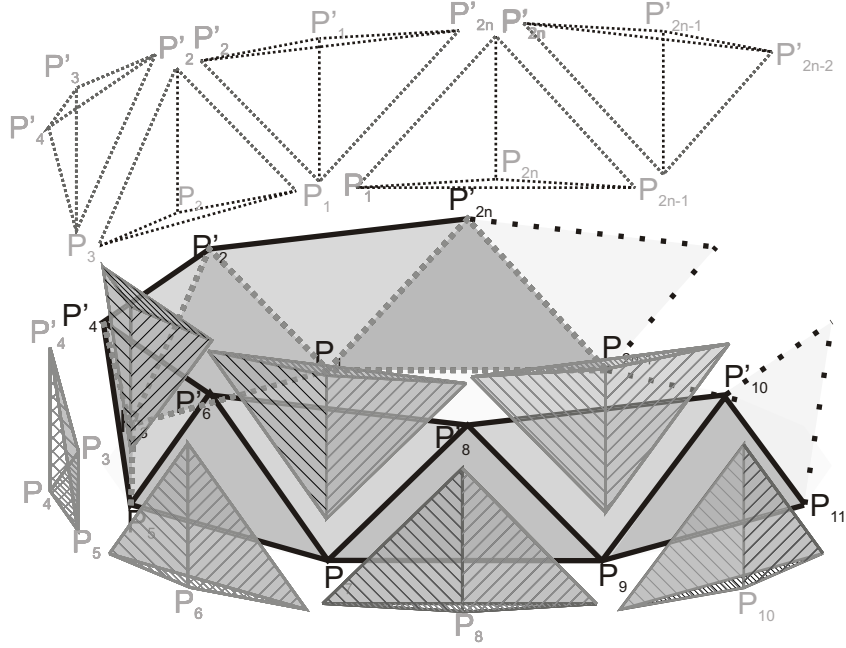
Yan ayrıt uzunlukları, yani dik prizmanın yükseklikleri h olsun.

Düzgün 2n- dik prizmanın hacmi (V_{prizma}) ile gösterilirse, bu hacim taban alanı ile yüksekliğinin çarpımı olduğundan,

$$V_{prizma} = \left(n \left(\frac{x^2}{2(1-\cos 2\alpha)} \right) \sin \alpha \right) .h \quad (3.9)$$

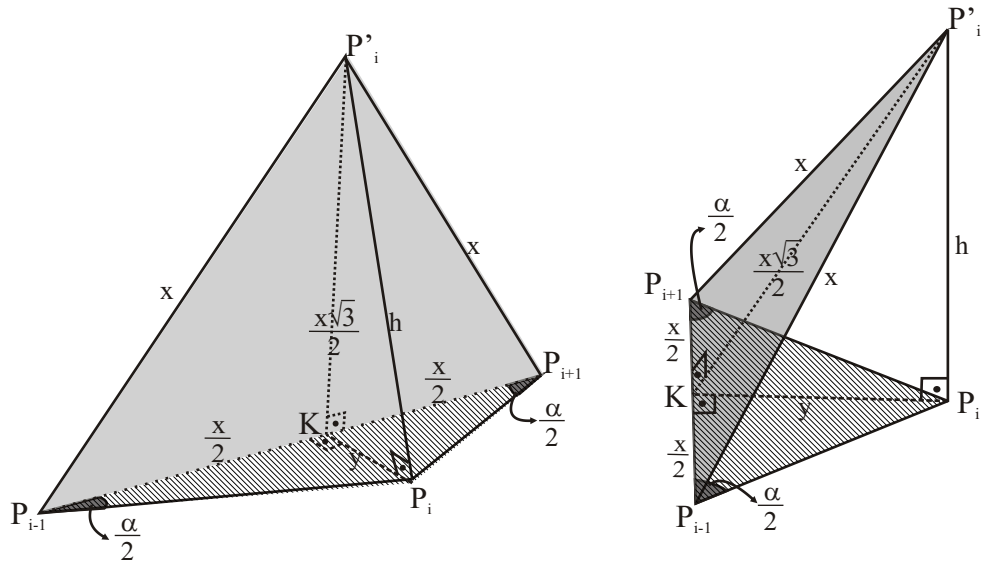
şeklindedir. Hacim formülizasyonu yapabilmek için h uzunluğu da x uzunluğu cinsinden hesaplanmalıdır. Bunun için artık antiprizmaya geçilmelidir.

Antiprizmanın elde ediliş işlemleri sırayla yapılmalıdır. Yani alt ve üst tabanın alterne köşelerini birleştiren (2 kenar ayıran) köşegenler çizilmeli ve sonra karşılıklı tabanların ardışık köşelerini birleştiren doğru parçalarıyla antiprizma ortaya çıkarılmalıdır. Elde edilen cisim bir düzgün antiprizma olmalıdır. Yani yan yüzeylerde oluşan üçgenler, birer eşkenar üçgen olup antiprizmanın tüm ayrıt uzunlukları eşit olmalıdır. Geriye kalan piramitler atılacaktır. (Bkz. Bölüm 3.2.1.)



Şekil 3.2.2.3. Düzgün $2n$ -dik prizmadan kesilen piramitler ve oluşan antiprizma.

Düzgün $2n$ -dik prizmadan kesilen dik piramitlerin her biri, birbirilerine eşitler. Şekil 3.2.2.4. 'te bu piramitlerin hepsini temsil eden bir piramit verilmiştir. Diğer hesaplamalar bu piramit üzerinde yapılacaktır.



Şekil 3.2.2.4. Kesilen dik piramitler ve hesaplarda kullanılacak uzunluklar.

Piramitin hacmi taban alanı ile yüksekliğinin çarpımının 3 e bölümü ile bulunduğundan önce bu piramitin taban alanı ve yüksekliği, (ki bu yükseklik aynı zamanda düzgün 2n- dik prizmanın da yüksekliğidir) x ve n cinsinden bulunmalıdır. Daha sonra da piramitin hacmi bulunacaktır.

Başta alınan prizma 2n- düzgün prizma olup tabanı bir düzgün çokgen olduğundan $(P_{i-1} P_i P_{i+1})$ üçgeni $|P_{i-1} P_i| = |P_i P_{i+1}|$ olacak şekilde bir ikizkenar üçgendir. O halde K noktası $[P_{i-1} P_{i+1}]$ kenarının orta noktası olarak alınırsa,

$$|P_{i-1} K| = |K P_{i+1}| = \frac{x}{2} \quad (3.10)$$

dir ve üçgenin P_i köşesinden çizilen yükseklik K noktasına gidecektir. Bu $[P_i K]$ yüksekliğinin uzunluğu y olsun. Hesaplamalarda kullanılacağı için y, x cinsinden bulunmalıdır. Bunun için $(P_i K P_{i-1})$ üçgeninde,

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{y}{\frac{x}{2}}$$

olup bu ifadedden y çekilirse,

$$y = \frac{x}{2} \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad (3.11)$$

bulunur.

Şimdi ise h yüksekliği bulunmalıdır.

Antiprizma düzgün olduğundan Şekil 3.2.2.4. 'teki $(P_{i-1} P'_i P_{i+1})$ üçgeni bir eşkenar üçgendir. Bu üçgenin yüksekliği ise $[P'_i K]$ dır. $(P'_i K P_{i-1})$ üçgeninde yazılan Pisagor Teoremi ile,

$$|P'_i K|^2 + |P_{i-1} K|^2 = |P'_i P_{i-1}|^2 \quad (3.12)$$

$$|P'_i K|^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = x^2$$

$$|P'_i K| = \frac{x\sqrt{3}}{2} \quad (3.13)$$

bulunur.

Bir Pisagor Teoremi de $(P'_i P_i K)$ üçgeninde yazılarak h yüksekliği x cinsinden elde edilmiş olur.

$$\begin{aligned} |P'_i P_i|^2 + |P_i K|^2 &= |P'_i K|^2 \\ h^2 + y^2 &= \left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)^2 \end{aligned} \quad (3.14)$$

ifadesinde y için (3.11) ifadesi kullanılırsa,

$$\begin{aligned} h^2 + \left(\frac{x}{2} \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)^2 &= \left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)^2 \\ h^2 &= \frac{x^2}{4} \left(3 - \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) \\ h &= \frac{x}{2} \sqrt{3 - \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \end{aligned} \quad (3.15)$$

olarak elde edilir ki (3.15) ile belirtilen h ifadesi aynı zamanda antiprizmanın düzgün olma şartıdır. Yani yan kenarların eşkenar üçgen, ve dolayısıyla tüm ayrıt uzunluklarının eşit oluşu h yüksekliğinin (3.15) 'teki ifadesi ile belirlenir. Artık prizmanın ve piramitlerin hacimleri rahatlıkla bulunabilir.

Düzgün $2n$ - dik prizmanın hacmi (3.9) ifadesinde, (3.15) ifadesinin yerine yazılıp düzenlenmesiyle,

$$\begin{aligned} V_{\text{prizma}} &= \left(n \left(\frac{x^2}{2(1-\cos 2\alpha)}\right) \sin \alpha\right) \left(\frac{x}{2} \sqrt{3 - \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right) \\ V_{\text{prizma}} &= \left(\frac{n \cdot x^3}{4}\right) \left(\frac{\sin \alpha \sqrt{3 - \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}}{(1-\cos 2\alpha)}\right) \end{aligned} \quad (3.16)$$

şeklinde bulunur.

3.2.2.2. Dik Piramitlerin Hacimleri

Düzgün $2n$ - dik prizmanın hacmi bulunduktan sonra kesilerek atılacak olan $2n$ adet eş piramitin hacmi bulunmalıdır. Piramitlerin hacimleri (V_{piramit}) ile

gösterilirse bu hacim (3.3) ifadesinde taban alanı ile yüksekliğinin çarpımının üçte biri olduğundan Şekil 3.2.2.4. 'e göre,

$$V_{\text{piramit}} = \frac{1}{3} \left(\frac{x \cdot y}{2} \right) h \quad (3.17)$$

Piramitin (3.17) hacim ifadesinde y ve h için sırasıyla (3.11) ve (3.15) ifadeleri yerlerine yazıldığı zaman,

$$V_{\text{piramit}} = \frac{1}{3} \left(\frac{x \left(\frac{x}{2} \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right)}{2} \right) \left(\frac{x}{2} \sqrt{3 - \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \right)$$

olur ki bu ifade düzenlenirse,

$$V_{\text{piramit}} = \frac{x^3}{24} \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sqrt{3 - \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \quad (3.18)$$

bulunur.

3.2.2.3. Düzgün n-gen Antiprizmanın Hacmi

Artık düzgün antiprizmanın hacmi hesaplanabilir. Düzgün n-gen antiprizmanın hacmi, düzgün 2n- dik prizmanın hacminden 2n adet dik piramitin hacminin çıkarılmasıyla bulunacaktır. O halde düzgün n-gen antiprizmanın hacmi ($V_{\text{antiprizma}}$) ile gösterilirse,

$$V_{\text{antiprizma}} = V_{\text{prizma}} - (2n) V_{\text{piramit}} \quad (3.19)$$

olur. (3.19) ifadesinde V_{prizma} için (3.16) ve V_{piramit} için (3.18) ifadeleri yazılırsa,

$$V_{\text{antiprizma}} = \left(\frac{n \cdot x^3}{4} \right) \left(\frac{\sin \alpha \sqrt{3 - \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}}{(1 - \cos 2\alpha)} \right) - (2n) \left(\frac{x^3}{24} \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sqrt{3 - \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \right) \quad (3.20)$$

şeklinde bulunur. (3.20) ifadesi $\left(\frac{n \cdot x^3}{4} \right) \sqrt{3 - \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$ parantezine alınarak düzenlenirse,

$$V_{\text{antiprizma}} = \left(\frac{n \cdot x^3}{4} \right) \sqrt{3 - \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \left\{ \frac{\sin \alpha}{(1 - \cos 2\alpha)} - \frac{1}{3} \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right\} \quad (3.21)$$

(3.21) bulunur ki bu ifade düzenlenerek düzgün antiprizmaların genel hacim formülüne ulaşılabacaktır. Öncelikle (3.21) ifadesinde parantez içi olan,

$$\left\{ \frac{\sin\alpha}{(1-\cos 2\alpha)} - \frac{1}{3} \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right\}$$

ifadesi düzenlensin. Bunun için,

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha \text{ eşitliği ile } \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \text{ eşitliğinden faydalanılarak,}$$

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\sin\alpha}{(1-\cos 2\alpha)} - \frac{1}{3} \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right\} &= \frac{\sin\alpha}{1-(1-2\sin^2\alpha)} - \frac{1}{3} \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \\ &= \frac{1}{2\sin\alpha} - \frac{1}{3} \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \end{aligned}$$

$\sin\alpha = 2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ eşitliği de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{4\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} - \frac{1}{3} \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \\ &= \frac{3 - 4\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{12\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \\ &= \frac{1 + 2 \cos\alpha}{6 \sin\alpha} \end{aligned} \tag{3.22}$$

olur ki bulunan (3.22) ifadesi (3.21) ifadesinde yerine yazılır ve düzenlenirse,

$$\begin{aligned} V_{\text{antiprizma}} &= \left(\frac{n \cdot x^3}{4} \right) \sqrt{3 - \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \frac{1 + 2 \cos\alpha}{6 \sin\alpha} \\ V_{\text{antiprizma}} &= \left(\frac{n \cdot x^3}{12} \right) \left(\frac{1}{2} \sqrt{3 - \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \right) \left(\frac{1 + 2 \cos\alpha}{\sin\alpha} \right) \end{aligned} \tag{3.23}$$

formülasyonu elde edilmiş olur. Bu formül antiprizmanın hacmini verir. Ancak formülün daha düzenli bir hal alması için bazı düzenlemelere daha ihtiyaç duyulacaktır. Bunun için,

(3.23) ‘teki $\left(\frac{1}{2} \sqrt{3 - \tan^2(\frac{\alpha}{2})}\right)$ ifadesi düzenlenirse,

$$\frac{1}{2} \sqrt{3 - \tan^2(\frac{\alpha}{2})} = \sqrt{\frac{3}{4} - \frac{1}{4} \tan^2(\frac{\alpha}{2})}$$

kök içindeki ifadeye $\frac{1}{4}$ ekleyip çıkarılarak tekrar düzenlenirse,

$$\begin{aligned} &= \sqrt{1 - \frac{1}{4} (\tan^2(\frac{\alpha}{2}) + 1)} \\ &= \sqrt{1 - \frac{1}{4} \sec^2(\frac{\alpha}{2})} \end{aligned} \quad (3.24)$$

bulunur. (3.23) ‘teki $\left(\frac{1 + 2 \cos \alpha}{\sin \alpha}\right)$ ifadesi düzenlenirse,

$$\begin{aligned} \frac{1 + 2 \cos \alpha}{\sin \alpha} &= \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \\ &= \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} + \cot \alpha \end{aligned}$$

ifadesinde $\cos \alpha = 2 \cos^2(\frac{\alpha}{2}) - 1$ ve $\sin \alpha = 2 \sin(\frac{\alpha}{2}) \cos(\frac{\alpha}{2})$ yarım açı formülleri yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} &= \frac{1 + 2 \cos^2(\frac{\alpha}{2}) - 1}{2 \sin(\frac{\alpha}{2}) \cos(\frac{\alpha}{2})} + \cot \alpha \\ &= \cot(\frac{\alpha}{2}) + \cot \alpha \end{aligned} \quad (3.25)$$

bulunur. Son olarak (3.24) ve (3.25) ifadeleri ile $\alpha = \frac{\pi}{n}$ ifadeleri, (3.23) ‘te yerlerine yazılarak,

$$V_{\text{antiprizma}} = \left(\frac{n \cdot x^3}{12}\right) \left(\sqrt{1 - \frac{1}{4} \sec^2(\frac{\pi}{2n})}\right) \left(\cot(\frac{\pi}{2n}) + \cot(\frac{\pi}{n})\right) \quad (3.26)$$

formülü elde edilir ki bu da n-kenarlı ve x kenar uzunluğuna sahip olan düzgün antiprizmanın hacim formülüdür. (Weisstein, 2007 ; Anonim, 2008a).

3.2.3. Düzgün n-gen Antiprizmanın Yüzey Alanı

Şekil 3.2.1.2. 'de gösterilen $(P_1P_2P_3...P_{2n-1}P_{2n})$ düzgün $2n$ -geninin $[P_1P_3]$, $[P_3P_5]$, $[P_5P_7]$, $\dots$, $[P_{2n-3}P_{2n-1}]$ ve $[P_{2n-1}P_1]$ köşegenleriyle oluşturulan düzgün n -geninin, düzgün n -gen antiprizmaya taban oluşturduğu önceki bölümlerde gösterilmişti. (Bkz. Bölüm 3.2.1.) O halde antiprizmanın yüzey alanı, 2 adet tabanlardaki düzgün n -genlerin alanları ile yanıl alan olan yan yüzeylerdeki $2n$ adet eşkenar üçgenin alanlarının toplamı şeklinde olacaktır.

Alt ve üst tabanlardaki düzgün n -genlerin alanları birbirine eşittir ve alanlarını bulabilmek için Şekil 3.2.2.1. 'deki (P_1OP_3) üçgeninden faydalanılırsa yine $\alpha = \frac{\pi}{n}$ olmak üzere,

$$\text{Alan}(P_1OP_3) = \frac{1}{2} r^2 \cdot \sin(2\alpha) \quad (3.27)$$

olur. r uzunluğunun x cinsinden gösterildiği (3.7) ifadesi, (3.27) ifadesinde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \text{Alan}(P_1OP_3) &= \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2(1-\cos 2\alpha)} \right) \sin(2\alpha) \\ \text{Alan}(P_1OP_3) &= \frac{x^2}{4} \left(\frac{\sin(2\alpha)}{(1-\cos 2\alpha)} \right) \end{aligned} \quad (3.28)$$

elde edilir. (3.28) ifadesinde $\sin(2\alpha) = 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha$ ve $\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2\alpha$ yarım açı formülleri yazılarak,

$$\text{Alan}(P_1OP_3) = \frac{x^2}{4} \cot\alpha \quad (3.29)$$

bulunur. O halde taban alanları (S_{taban}) ile gösterilirse düzgün n -genin alanı (P_1OP_3) gibi n - adet üçgenden meydana geldiğinden,

$$S_{\text{taban}} = n \frac{x^2}{4} \cot\left(\frac{\pi}{n}\right) \quad (3.30)$$

olur. Yanıl alan ($S_{\text{yanıl}}$) ile gösterilsin. Bir kenarı x olan eşkenar üçgenin alanı $\frac{x^2\sqrt{3}}{4}$

olup yan yüzeylerde $2n$ - adet eş eşkenar üçgen olduğu için bu ifade $2n$ ile çarpılır.

$$S_{\text{yanıl}} = 2n \left(\frac{x^2\sqrt{3}}{4} \right) \quad (3.31)$$

olur. Yüzey alanı ($S_{\text{yüzey}}$) ile gösterilirse taban alanları ile yanıl alanın toplamı olduğu

için,

$$S_{\text{yüzey}} = 2(S_{\text{taban}}) + (S_{\text{yanal}})$$

ifadesinde (3.30) ve (3.31) ifadeleri yerlerine yazılarak,

$$S_{\text{yüzey}} = 2 \left(n \frac{x^2}{4} \cot\left(\frac{\pi}{n}\right) \right) + 2n \left(\frac{x^2 \sqrt{3}}{4} \right) \quad (3.32)$$

$$S_{\text{yüzey}} = \frac{n \cdot x^2}{2} \left(\cot\left(\frac{\pi}{n}\right) + \sqrt{3} \right) \quad (3.33)$$

şeklinde bulunur. (3.33) ifadesi bir düzgün n-gen antiprizmanın yüzey alanı formülüdür.

Uyarı: Bu çalışmalar herhangi bir kaynaktan alınmamıştır, kendi çalışmalarımızdır.

3.3. Antiprizmaların Hacim ve Alan Hesapları İçin (Excel) Hesap Tablosu

Düzgün n-gen antiprizmanın hacim ve alan formülasyonu sadece kenar sayısı (n) ve kenar uzunluğu (x) e bağlı olarak Bölüm 3.2.2. ve Bölüm 3.2.3. 'te hazırlanmıştı. Yapılan formülasyonun doğruluğunun ve geçerliliğinin kontrol edilebilmesi ve sadece (x) ile (n) değerlerinin girilerek hacim ve alan hesabının kolaylıkla elde edilebilmesi amacıyla Microsoft Firmasının Office elemanlarından Excel programı kullanılarak bir hesap tablosu oluşturulacaktır.

Hesap tablosunun 1 inci satırına “n”, kenar sayısı değerleri ve 2 nci satırına “x”, kenar uzunluğu değerleri girilecektir. Daha sonraki satırlarda sırasıyla 3 üncü satırda “ALFA”, $(\alpha = \frac{\pi}{n})$; 4 üncü satırda (3.16) ifadesiyle belirtilen “Prizmanın Hacmi”; 5 inci satırda (3.18) ifadesiyle belirtilen “Piramitin Hacmi”; 6 ncı satırda $(2n)$ ile (3.18) ifadesinin çarpımı, yani $2n$ adet piramitin hacmiyle belirtilen “ $2n$.Piramit Hacmi”; 7 nci satırda 4 ve 6 ncı satırların farkı olan “FARK”; 8 inci satırda (3.26) ifadesiyle belirtilen “ANTİPRİZMANIN HACMI”; 9 uncu satırda (3.30) ifadesi ile belirtilen antiprizmanın “Taban Alanı”; 10 uncu satırda (3.31) ifadesi ile belirtilen antiprizmanın “Yanal Alanı”; 11 inci satırda, 9 uncu satırdaki taban alanının iki katı ile 10 uncu satırın toplamı ile hesaplanan “TOPLAM” ve 12 nci satırda (3.33) ifadesi ile belirtilen antiprizmanın “YÜZEY ALANI” hesaplanacaktır. (Bkz. Şekil 3.3.1.)

Matematiksel gösterimi $\alpha = \frac{\pi}{n}$ olan, 3 üncü satırdaki “ALFA” ifadesinin Excel 'deki hesap gösterimi, (B1) girilecek olan (n) ifadesini belirtmek üzere,

$$\alpha = \pi / B1$$

şeklindedir.

Matematiksel gösterimi (3.16) ifadesiyle,

$$V_{\text{prizma}} = \left(\frac{n \cdot x^3}{4} \right) \left(\frac{\sin \alpha \sqrt{3 - \tan^2(\frac{\alpha}{2})}}{(1 - \cos 2\alpha)} \right)$$

şeklinde belirtilen, 4 üncü satırdaki “Prizmanın Hacmi” nin Excel' deki hesap gösterimi, (B2) girilecek olan (x) ifadesini, (B3) 3 üncü satırda hesaplanan “ALFA” ifadesini belirtmek üzere,

$$f_x = (B1*(B2^3)/4)*\sin(B3)*\text{KAREKÖK}(3-(\tan(B3/2))^2)/(1-\cos(2*B3))$$

biçimindedir.

Matematiksel gösterimi (3.18) ifadesiyle,

$$V_{\text{piramit}} = \frac{x^3}{24} \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sqrt{3 - \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

şeklinde belirtilen, 5 inci satırdaki “Piramitin Hacmi” nin Excel’ deki hesap gösterimi,

$$f_x = B2^3/24*\tan(B3/2)*\text{KAREKÖK}(3-(\tan(B3/2))^2)$$

biçimindedir.

6 ncı satırda, 5 inci satırda hesaplanan piramitin hacminin (2n) katı alınacağından, “(2n).Piramit Hacmi” nin Excel’ deki hesap gösterimi,

$$f_x = B5*2*B1$$

şeklindedir.

Hesaplanacak olan 7 inci satırdaki “FARK” , 4 üncü satırda hesaplanan prizmanın hacminden 6 ncı satırda hesaplanan piramitin hacminin (2n) katının çıkarılmasıdır. Bu ifadenin Excel deki hesap gösterimi,

$$f_x = B4-B6$$

biçimindedir.

8 inci satırda ise (3.26) ifadesiyle verilen düzgün n-gen “ANTİPRİZMANIN HACMİ” hesabını gösteren,

$$V_{\text{antiprizma}} = \left(\frac{n \cdot x^3}{12} \right) \left(\sqrt{1 - \frac{1}{4} \sec^2\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \right) \left(\cot\left(\frac{\pi}{2n}\right) + \cot\left(\frac{\pi}{n}\right) \right)$$

formülünün Excel deki hesap gösterimi,

$$f_x = \text{ÇARPIM}(B1*\text{KU\VEET}(B2;3)/12;\text{KAREKÖK}(1-(1/4)*((1/(\cos(B3/2)))^2);(1/(\tan(B3/2)))+(1/(\tan(B3))))$$

şeklinde verilmiştir. Dikkat edilmelidir ki, 7 nci ve 8 inci satırdaki ifadelerin birbirine eşit sonuçlar vermesi (3.26) daki formülasyonun doğru olduğunu kanıtlar.

9 uncu satırdaki “Taban Alanı” ile hesaplanan ise düzgün n-gen antiprizmanın tabanı olan düzgün n- kenarlı çokgenin,

$$S_{\text{taban}} = n \frac{x^2}{4} \cot\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

ifadesiyle yani (3.30) ile belirtilen alanıdır. Bunun Excel’deki hesabının gösterimi,

$$f_x = (1/4) * B1 * B2^2 * (1 / (\tan(B3)))$$

biçimindedir.

10 uncu satırda “Yanal Alan” olarak hesaplanacak olan, (3.31) ‘de,

$$S_{\text{yanal}} = 2n \left(\frac{x^2 \sqrt{3}}{4} \right)$$

şeklinde verilen yan yüzeylerdeki (2n) adet eşkenar üçgenin alanları toplamıdır. Bu ifadenin Excel’deki hesap gösterimi,

$$f_x = B1 * B2^2 * \text{KAREKÖK}(3) / 2$$

şeklindedir.

11 inci satırdaki “TOPLAM” olarak belirtilen, 10 uncu satırda hesaplanan yan al alan ile 9 uncu satırda hesaplanan taban alanının 2 katının toplamıdır. Alt ve üst taban olmak üzere 2 adet aynı n- kenarlı çokgendin bulunduğu için taban alanı 2 ile çarpılır. Bu ifadenin Excel’deki hesap gösterimi,

$$f_x = 2 * B9 + B10$$

biçimindedir.

Son olarak 12 nci satırda “YÜZEY ALANI” ile belirtilen,

$$S_{\text{yüzey}} = \frac{n \cdot x^2}{2} \left(\cot\left(\frac{\pi}{n}\right) + \sqrt{3} \right)$$

şeklindeki (3.33) , düzgün n-gen antiprizmanın yüzey alanı formülasyonudur. Bu formül Excel’de,

$$f_x = (1/2) * B1 * B2^2 * ((1 / (\tan(B3))) + \text{KAREKÖK}(3))$$

şeklinde hesaplanır.

Excel programında kotanjant ve sekant fonksiyonları bulunmadığı için hesaplamalarda kotanjant yerine tanjantın çarpmaya göre tersi, sekant yerine de kosinüsün çarpmaya göre tersi kullanılmıştır.

Excel ile hazırlanan bu hesap tablosunun genel görünümü Şekil 3.3.1. ‘de verilmiştir. Birim antiprizma olması için kenar uzunlukları 1 olarak verilmiştir.

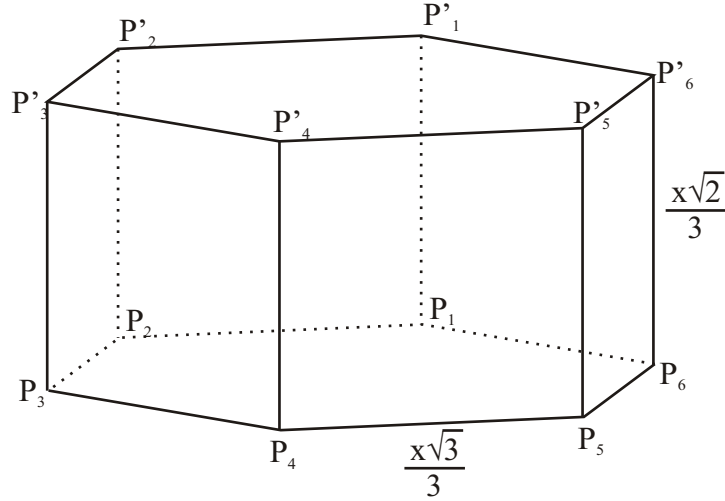
Microsoft Excel - HACIM.xls										
Dosya Düzen Görünüm Ekle Biçim Araçlar Yeri Pencere Yardım										
Arial Tur 10 K T A E Yeri Pencere Yardım % 100										
N22										
A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	(n)	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	(x)	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	ALFA	1,0472	0,7854	0,6283	0,5236	0,4488	0,3927	0,3491	0,3142	0,2866
4	Prizmanın Hacmi	0,7071	1,1892	1,8090	2,5668	3,4625	4,4961	5,6676	6,9769	8,4241
5	Piramitin Hacmi	0,0393	0,0290	0,0230	0,0191	0,0163	0,0143	0,0127	0,0114	0,0103
6	Zn.Piramit Hacmi	0,2367	0,2322	0,2303	0,2293	0,2286	0,2282	0,2279	0,2277	0,2275
7	FARK	0,4714	0,9570	1,5787	2,3375	3,2339	4,2680	5,4397	6,7493	8,1966
8	ANTİPRİZMANIN HACMI	0,4714	0,9570	1,5787	2,3375	3,2339	4,2680	5,4397	6,7493	8,1966
9	Taban Alanı	0,4330	1,0000	1,7205	2,5981	3,6339	4,8284	6,1818	7,6942	9,3666
10	Yanal Alan	2,5981	3,4641	4,3301	5,1962	6,0622	6,9282	7,7942	8,6603	9,5263
11	TOPLAM	3,4641	5,4641	7,7711	10,3923	13,3300	16,5851	20,1579	24,0487	28,2576
12	YÜZEY ALANI	3,4641	5,4641	7,7711	10,3923	13,3300	16,5851	20,1579	24,0487	28,2576
13										

Şekil 3.3.1. Antiprizmaların hacim ve alanlarını hesaplayan Excel hesap tablosunun genel görünümü.

3.4. Bazı Düzgün Antiprizma Örnekleri

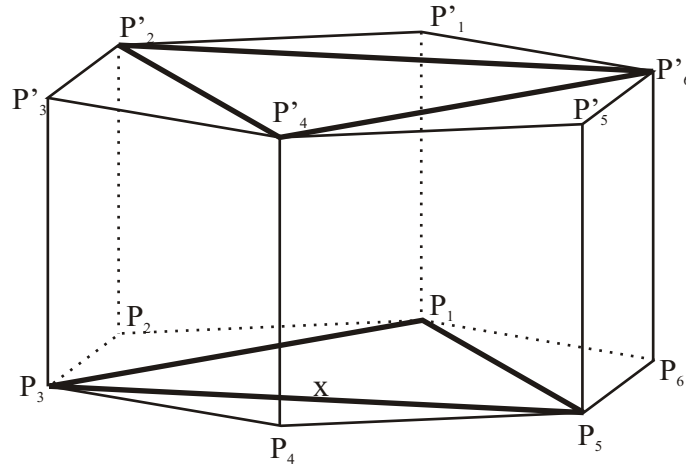
3.4.1. Düzgün Üçgen Antiprizma

Kenar sayısı 3 ve kenar uzunluğu x cm. olan düzgün antiprizma elde edebilmek için öncelikle bir kenarı $\frac{x\sqrt{3}}{3}$ cm ve yüksekliği ise $h = \frac{x\sqrt{2}}{3}$ cm olacak şekilde bir düzgün altıgen dik prizma alınır.



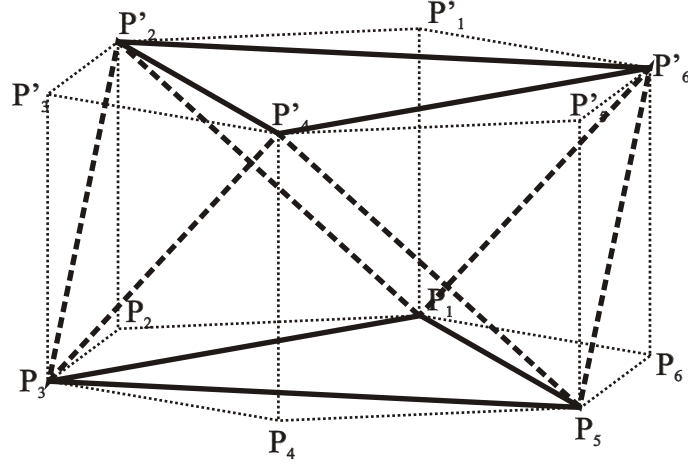
Şekil 3.4.1.1. Düzgün altıgen dik prizma.

Sonraki adımda alt tabanın alterne köşelerini birleştiren $[P_1P_3]$, $[P_3P_5]$ ve $[P_5P_1]$ köşegenleri ile üst tabanın alterne köşeleri olan $[P'_2P'_4]$, $[P'_4P'_6]$ ve $[P'_6P'_2]$ köşegenleri çizilir. Bu köşegenlerin uzunlukları da x cm olur. Böylece kenar uzunluğu x cm olan düzgün üçgen antiprizmanın tabanları belirlenir.



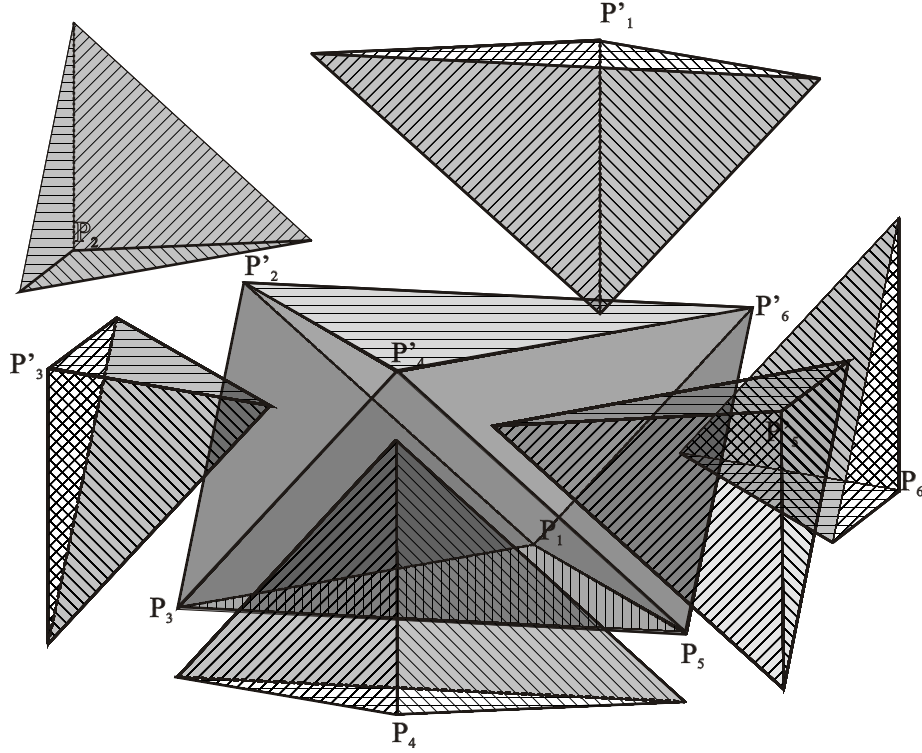
Şekil 3.4.1.2. Alt ve üst tabanların alterne köşelerini birleştiren köşegenler.

Bir sonraki adımda alt ve üst tabanların ardışık köşelerini birleştiren doğru parçaları çizilir. Yani $[P_1P'_2]$, $[P'_2P_3]$, $[P_3P'_4]$, $[P'_4P_5]$, $[P_5P'_6]$ ve $[P'_6P_1]$ çizilir. Böylece yan ayrıt uzunlukları da x cm olacak şekilde 6 adet eşkenar üçgen elde edilir.



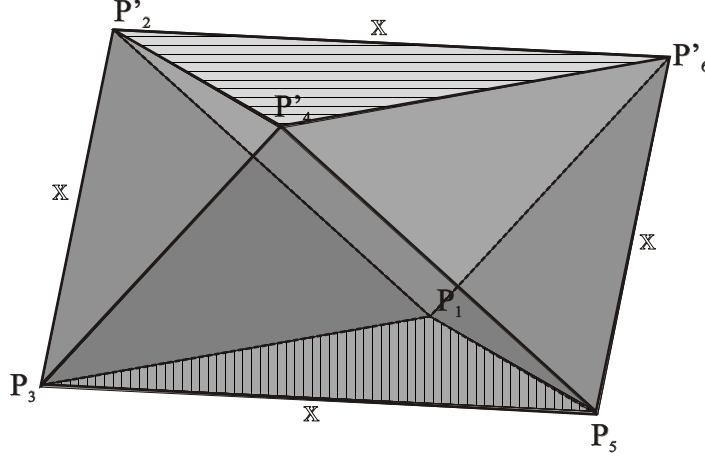
Şekil 3.4.1.3. Alt ve üst tabanların ardışık köşelerinin birleştirilmesi.

Böylece oluşturulan şekil bir antiprizmadır. Prizmanın içi ile antiprizmanın dışı arasında kalan piramitler kesilerek atılacaktır.



Şekil 3.4.1.4. Antiprizmadan geriye kalan piramitlerin atılması.

Atılan 6 adet piramitten sonra geriye kalan cisim bir düzgün üçgen antiprizmadır.



Şekil 3.4.1.5. Ayrit uzunlukları x cm olan düzgün üçgen antiprizma.

Şekil 3.4.1.5. ile elde edilen bir kenar uzunluğu x cm olan düzgün üçgen antiprizmanın hacmi, (3.26) ifadesinde n=3 alınarak,

$$V_{3\text{-gen antiprizma}} = \frac{x^3 \sqrt{2}}{3} \text{ cm}^3$$

bulunur. Yüzey alanı ise (3.33) ifadesinde n=3 alınarak,

$$S_{3\text{-gen antiprizma}} = x^2 2\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

bulunur.

Örnek olarak birim düzgün üçgen antiprizma alınırsa yani x = 1 br alınırsa hacim,

$$V_{\text{birim 3-gen antiprizma}} = \frac{\sqrt{2}}{3} \text{ br}^3 = 0.4714 \text{ br}^3$$

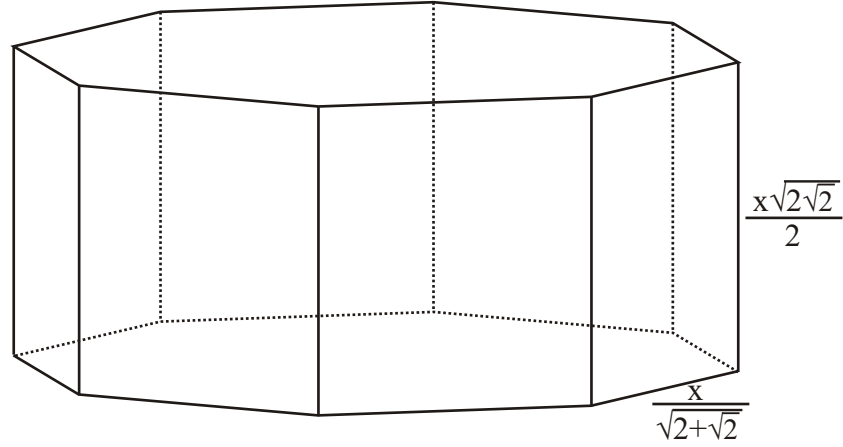
yüzey alanı ise,

$$S_{\text{birim 3-gen antiprizma}} = 2\sqrt{3} \text{ br}^2 = 3.4641 \text{ br}^2$$

olarak bulunur.

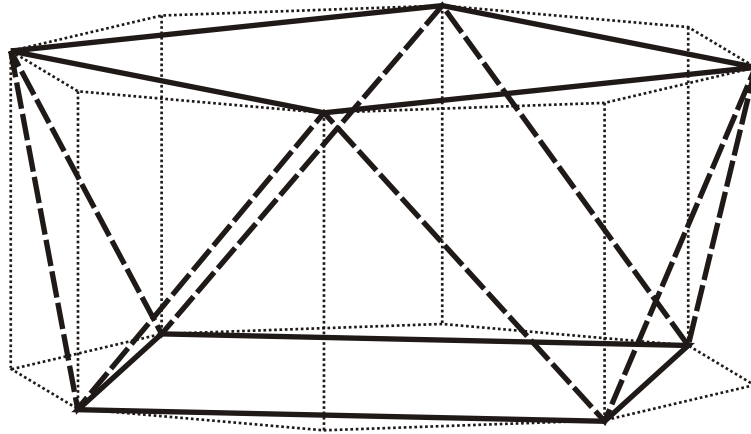
3.4.2. Düzgün Dörtgen Antiprizma

Düzgün dörtgen antiprizmaya özel olarak “kare antiprizma” da denir. Kenar sayısı 4 ve kenar uzunluğu x cm olan düzgün antiprizma elde edebilmek için öncelikle bir kenarı $\frac{x}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}$ cm ve yüksekliği ise $h = \frac{x\sqrt{2}\sqrt{2}}{2}$ cm olacak şekilde bir düzgün sekizgen dik prizma alınır.



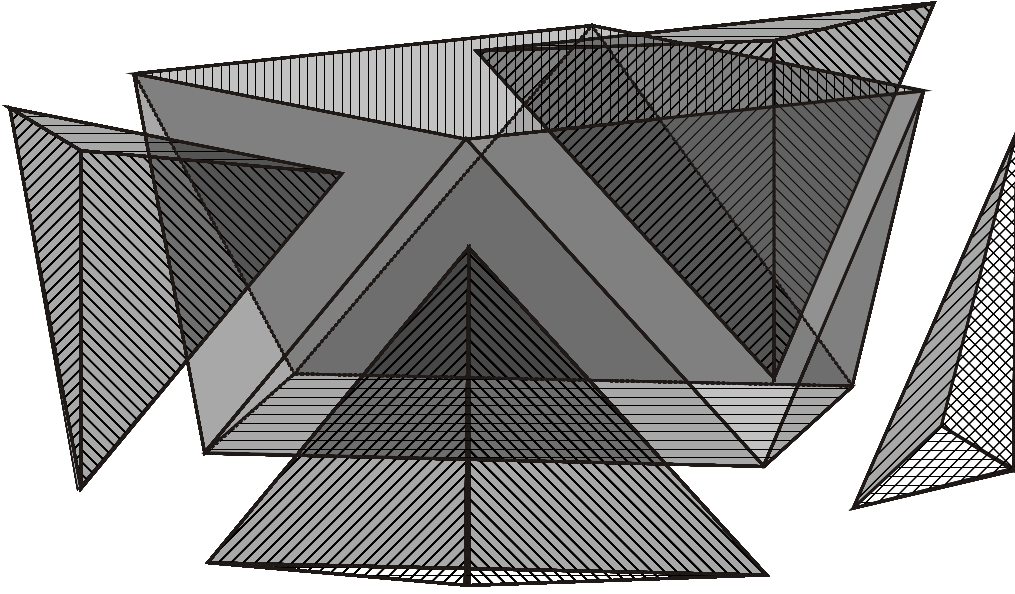
Şekil 3.4.2.1. Düzgün sekizgen dik prizma.

Sonraki iki adım olan alterne köşelerin birleştirilmesi ile alt ve üst tabanın ardışık köşelerinin birleştirilmesi işlemleri yapılırsa,



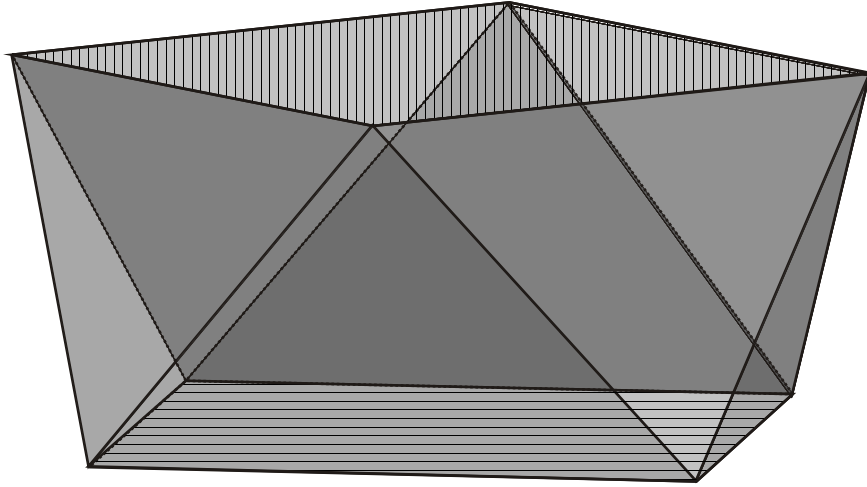
Şekil 3.4.2.2. Alterne köşeleri ile alt ve üst tabanın ardışık köşeleri birleştirilmiş düzgün sekizgenle elde edilen düzgün dörtgen antiprizma.

şeklinde düzgün dörtgen antiprizma bulunur ki bu prizmanın tüm ayrıtları x cm uzunluğundadır. Antiprizmanın dışında kalan piramitler atılırsa,



Şekil 3.4.2.3. Antiprizmadan geriye kalan piramitlerin atılması.

geriye kalan cisim bir kenarı x cm olan düzgün dörtgen antiprizmadır.



Şekil 3.4.2.4. Düzgün 4-gen antiprizma. (Kare Antiprizma)

$x = 1$ br alınarak birim kare antiprizmanın hacmi ve alanı,

$$V_{\text{birim kare antiprizma}} = 0.9570 \text{ br}^3$$

$$S_{\text{birim kare antiprizma}} = 5.4641 \text{ br}^2$$

şeklinde bulunur. Diğer bazı antiprizma örnekleri EKLER kısmında verilmiştir.

4. BULGULAR

Temel bilgiler kapsamında prizmaların tanımları, hacimleri ve alanları ile piramitlerin hacimleri ve ilgili birer örnek verildi.

Bir antiprizmanın prizmadan faydalanılarak elde edilişı gösterildi. Böylece bir prizma ile antiprizma arasındaki ilişki ortaya konuldu.

Antiprizmaların hacim hesapları çıkarılarak formüle edildi.

Antiprizmaların alan hesapları çıkarılarak formüle edildi.

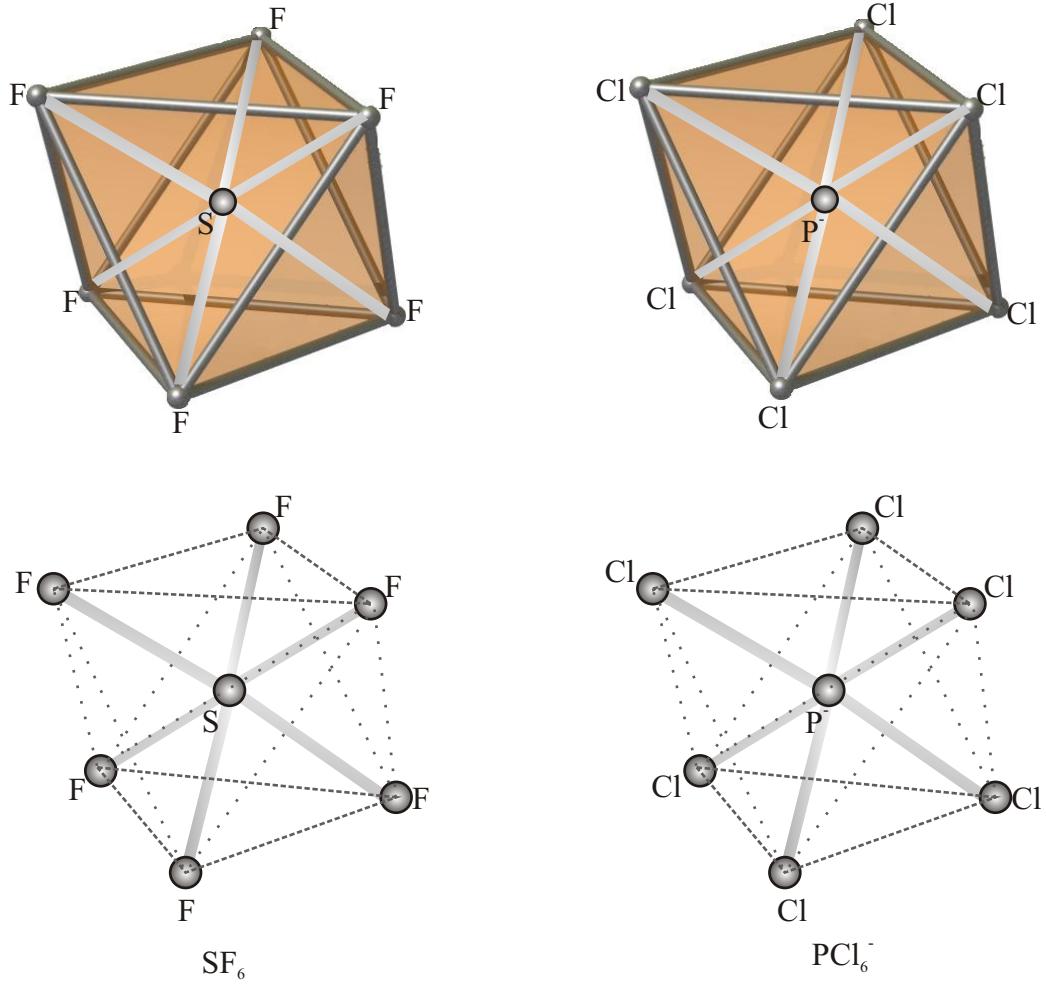
Antiprizmaların hacim ve alanlarının kolayca hesaplanabilmesi için Microsoft Office elemanlarından Excel programı kullanılarak bir hesap tablosu oluşturuldu.

Bazı örnek antiprizmaların hacim ve alanları gösterildi.

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Antiprizmaların matematik için hacim ve alan hesapları ortaya konduktan sonra biraz daha geniş düşünülerek başka bilim dallarıyla olan ilişkisi de görülebilir.

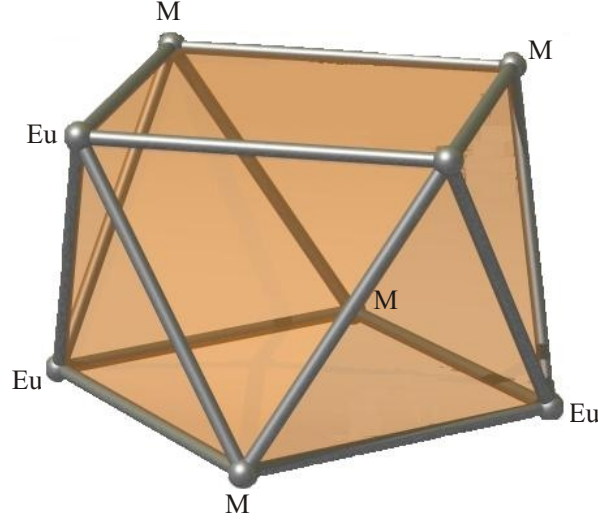
Kimyada bazı bileşiklerin molekül yapıları antiprizmalarla izah edilmektedir.



Şekil 5.1. SF_6 ve PCl_6^- bileşiklerinin molekül yapıları ve bağları.

Şekil 5.1. 'de görüldüğü gibi Antiprizmanın merkezinde, yani tüm köşelerine eşit uzaklıkta bulunan noktada; SF_6 molekülünde S, PCl_6^- molekülünde P⁻ atomu vardır. Diğer köşelerde ise SF_6 molekülünde F, PCl_6^- molekülünde Cl vardır. Bir

başka örnek olarak EuZnIn molekülü verilebilir.



Şekil 5.2. EuZnIn bileşiğinin molekül yapısı ve bağları. ($M = \text{Zn}_{0.50}\text{In}_{0.50}$) (Gschneidner ve ark., 1990).

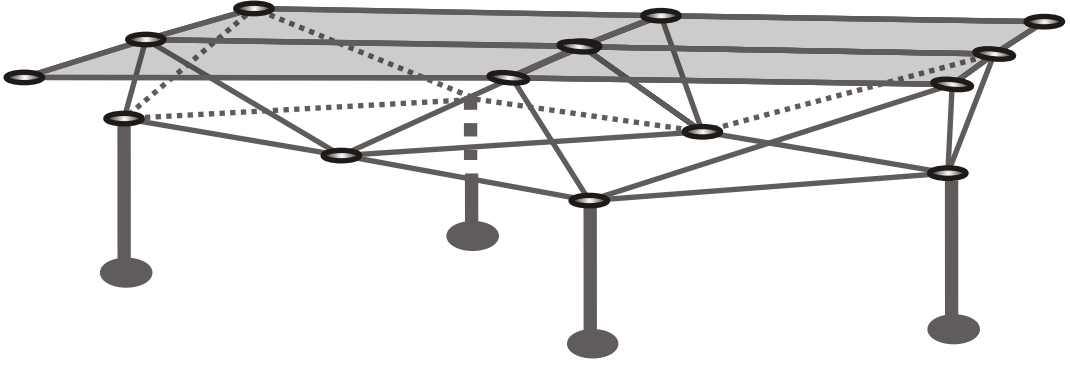
Molekül yapıları antiprizma biçiminde olan bileşik örnekleri arttırılabilir. Örneğin BaSe_8 , BaTe_8 , HoCl_8 ... (Macintyre ve ark., 1992).

Antiprizmanın kullanıldığı diğer bir alan ise mimaridir. Özellikle iç içe geçmiş yapıda “uzay çatı (kafes) sistemleri” olarak adlandırılan bir çatı modelinde kullanılmaktadır. Kullanılacak yere göre farklı katı cisim modelleri de vardır.

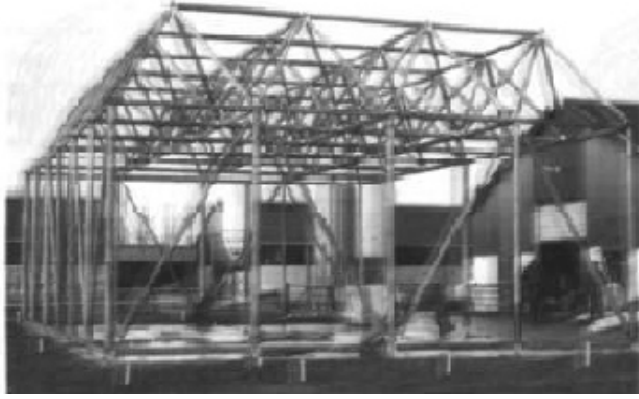
Uzay kafes sistemler, özellikle geniş mekanları, mekan ortasında kolon kullanmadan veya az sayıda kolon kullanarak örtmede son derece elverişlidir.

Bu sistemler incelendiğinde joint olarak kullanılan kürelerle birbirine bağlanan çubukların oluşturduğu üçgensel yapılar görülür.

Sistemin sağlamlığını sağlayan şey küre-üçgen sistemidir. Bu, en sağlam düzlemsel cismin üçgen olması sayesinde. Dolayısıyla üçgen ve kürelerin birbirine bağlanması sayesinde sağlam yapılar elde edilir. Böylece çok geniş mekanlar, az sayıda destek noktası ile kapatılabilecektir.



Şekil 5.3. Uzay çatı sistemlerinde antiprizmaların kullanılması.



Şekil 5.4. Uzay çatı sistemleri ile yapılmış iki örnek.

KAYNAKLAR

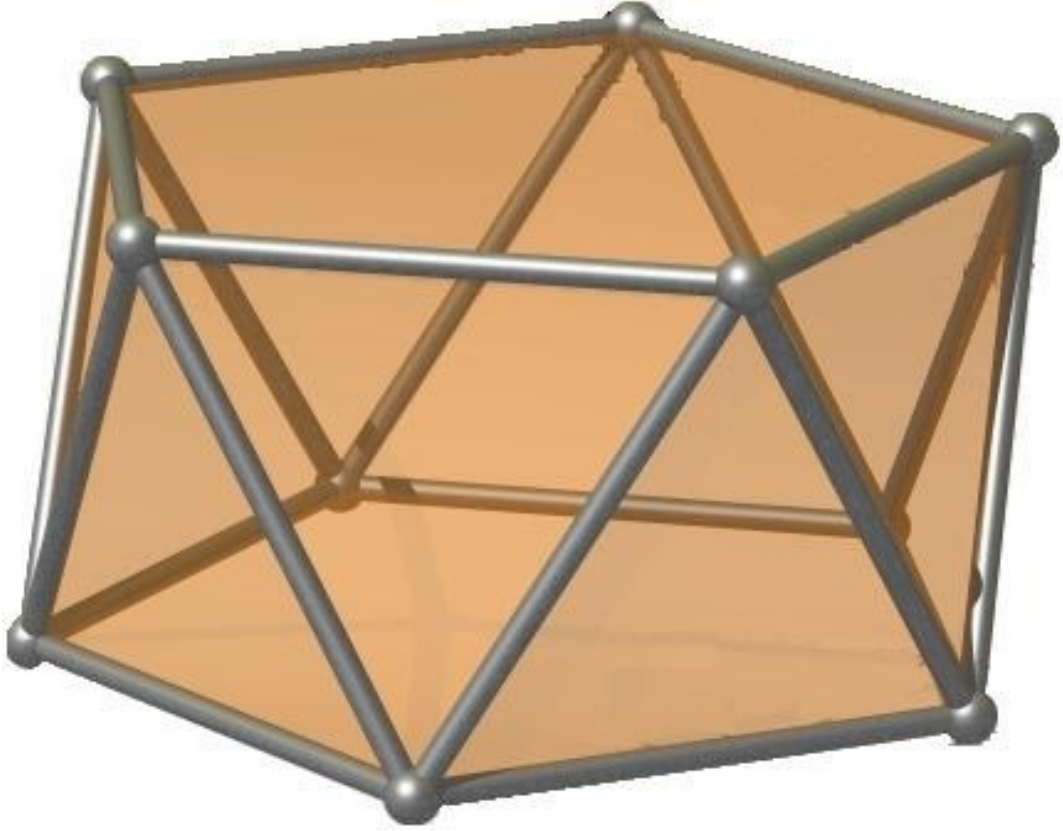
- Anonim, 2008a. Antiprisms. Volume Formula. 'Literka': math@literka.addr.com
<http://www.literka.addr.com/antiprisms.htm> . Eriřim Tarihi: 12.11.2008
- Anonim, 2008b. Platonik Cisimler. Wikipedia. http://tr.wikipedia.org/wiki/Platonik_cisimler. Eriřim Tarihi: 12.11.2008
- Cromwell, P. R., 1997. *Polyhedra* . Cambridge University Press , Cambridge. 451.
- Darling, D., 2004. *The Universal Book of Mathematics*. John Wiley and Sons, Hoboken . 383.
- Darvas, G., 2007. *Symmetry* . Birkhäuser Verlag, Basel. 508.
- Gschneidner, K. A., Gschneid, Jr., Gschneidner, K. A., Eyring, L., Brian Maple, M., 1990. Rare earth - transition metal - indides, 1, *Handbook on the Physics and Chemistry of Rare Earths* , (Editor: J.-C.G. Bünzli, P.K. Pecharsky). Volume 34. Elsevier, North Holland. 894.
- Huggett, S., Jordan, D., 2001. *A Topological Aperitif*. Springer-Verlag, London. 166.
- Macintyre, J. E., Daniel, F. M., Stirling, V. M., 1992. *Dictionary of Inorganic Compounds*. Volume 5. CRC Press, London. 5400.
- Singer, D., 1998. *Geometry: plane and fancy*. Springer-Verlag, New York. 159.
- Thyssen, A., 2003. Prisms, Anti-prisms, Pyramids, and related Polyhedra. <http://www.cit.gu.edu.au/~anthony/graphics/polyhedra/prisms.shtml>. School of Computing and Information Technology at the Nathan campus of Griffith University, Brisbane, Australia. Eriřim Tarihi: 12.11.2008
- Weisstein, E.W., 2007. Antiprism. From MathWorld. <http://mathworld.wolfram.com/Antiprism.html>. A Wolfram Web Resource. Eriřim Tarihi: 12.11.2008

EKLER

EK 1.

Düzgün Beşgen Antiprizma

(Bkz. <http://www.cit.gu.edu.au/~anthony/graphics/polyhedra/prisms.shtml>.)



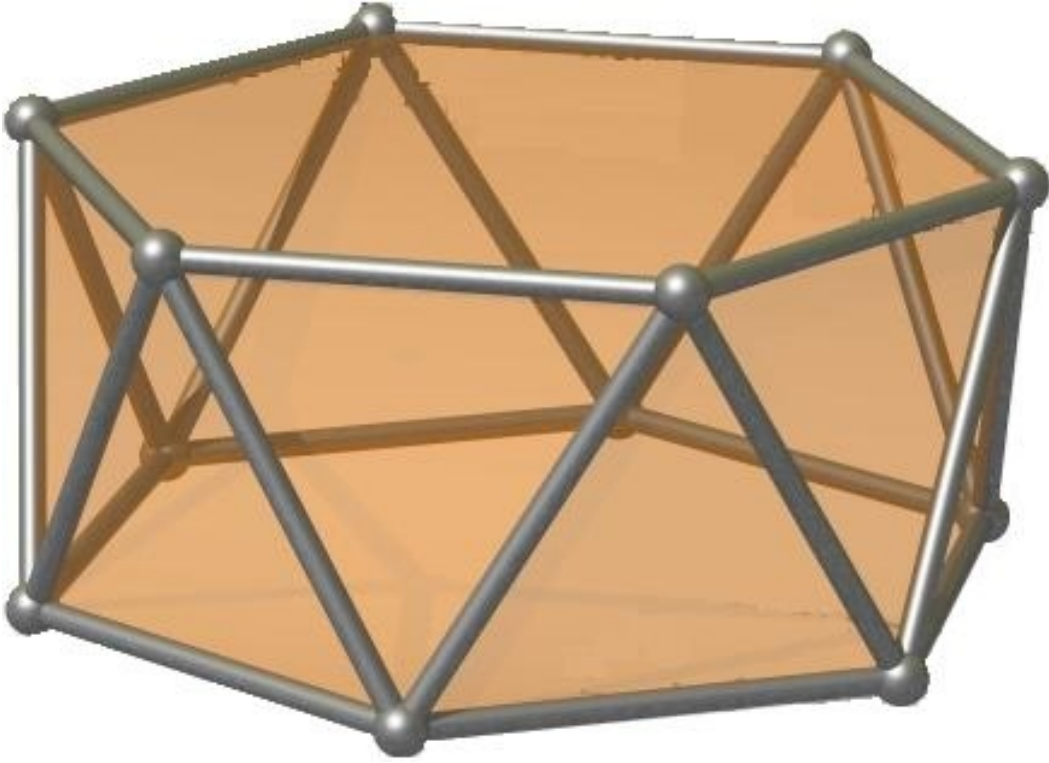
$$V_{\text{birim düzgün beşgen antiprizma}} = 1.5787 \text{ br}^3$$

$$S_{\text{birim düzgün beşgen antiprizma}} = 7.7711 \text{ br}^2$$

EK 2.

Düzgün Altıgen Antiprizma

(Bkz. <http://www.cit.gu.edu.au/~anthony/graphics/polyhedra/prisms.shtml>.)



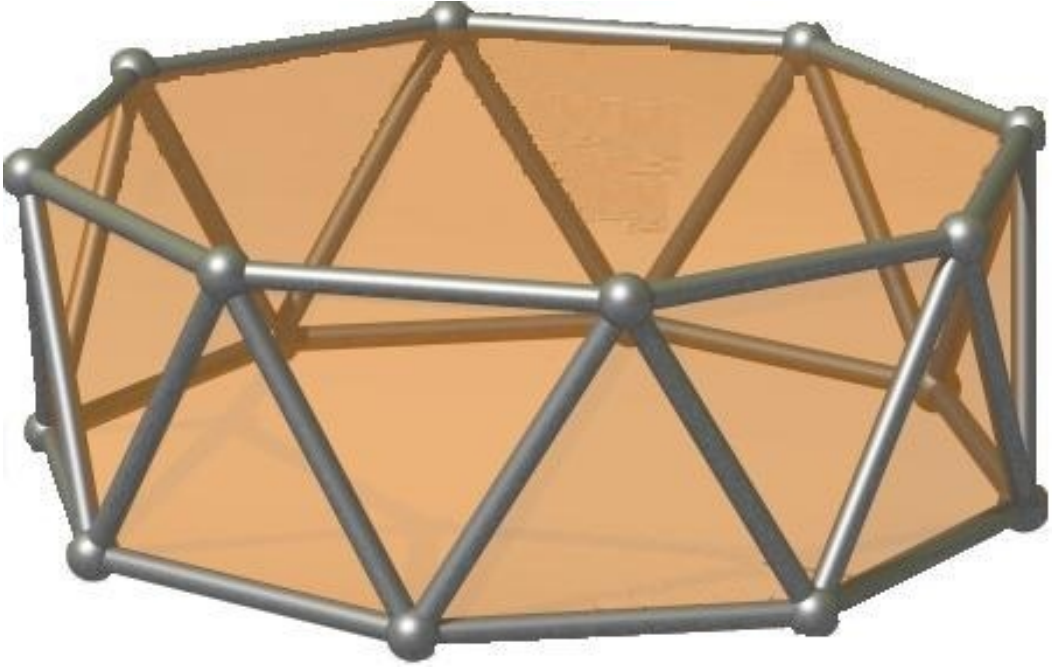
$$V_{\text{birim düzgün altıgen antiprizma}} = 2.3375 \text{ br}^3$$

$$S_{\text{birim düzgün altıgen antiprizma}} = 10.3923 \text{ br}^2$$

EK 3.

Düzgün Sekizgen Antiprizma

(Bkz. <http://www.cit.gu.edu.au/~anthony/graphics/polyhedra/prisms.shtml>.)



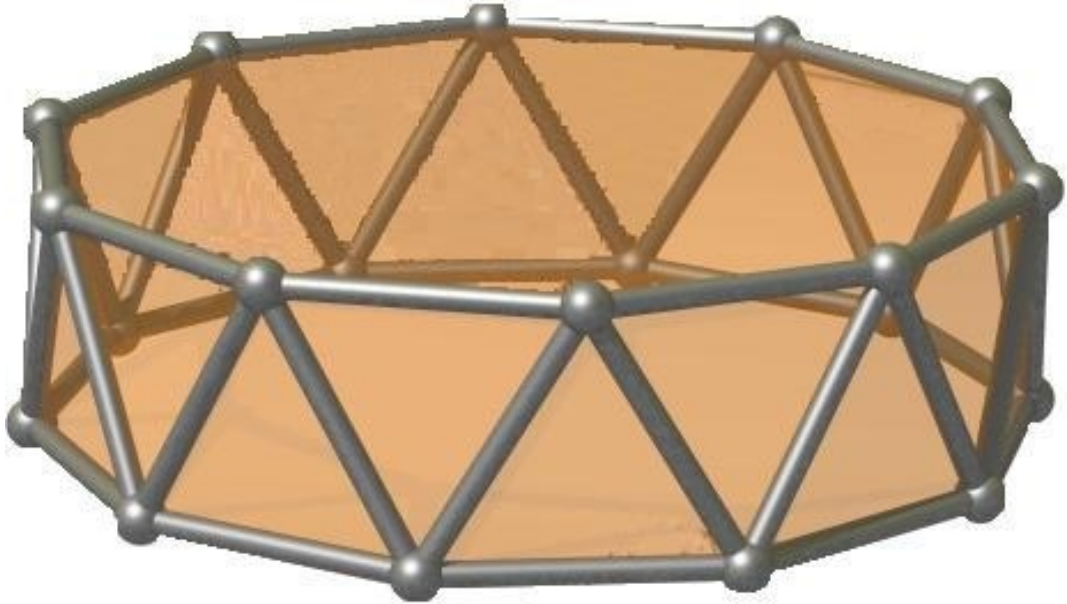
$$V_{\text{birim düzgün sekizgen antiprizma}} = 4.2680 \text{ br}^3$$

$$S_{\text{birim düzgün sekizgen antiprizma}} = 16.5851 \text{ br}^2$$

EK 4.

Düzgün Ongen Antiprizma

(Bkz. <http://www.cit.gu.edu.au/~anthony/graphics/polyhedra/prisms.shtml>.)



$$V_{\text{birim düzgün ongen antiprizma}} = 6.7493 \text{ br}^3$$

$$S_{\text{birim düzgün ongen antiprizma}} = 24.0487 \text{ br}^2$$

ÖZ GEÇMİŞ

Adı Soyadı : Alper GÜLLE

Doğum Yeri : Elazığ

Doğum Yılı : 1981

Eğitim Durumu :

Lise	1993 - 1996	Elazığ Lisesi
Ön Lisans	1997 - 2000	Fırat Üniversitesi T.B.M.Y.O. Bilgisayar Programcılığı
Lisans	2000 - 2004	Fırat Üniversitesi Fen - Edebiyat Fakültesi Matematik

İş Tecrübesi:

1997 - 2000	Bilgisayar Sektöründe Çeşitli İşler.
2004 - 2005	Elazığ Özel Modern İstanbul Dershanesi, Elazığ
2005 - 2008	Van Final Dergisi Dershaneleri, Van
2008 - . . .	Bilge Final Dergisi Dershaneleri, Salihli/Manisa