T.C.

YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

BANACH UZAYLARININ BAZI ÖZELLİKLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN: ŞENNUR SERBEST GÜDÜCÜOĞLU

DANIŞMAN: YARD. DOÇ. DR. CESİM TEMEL

VAN–2009

KABUL VE ONAY SAYFASI

Yard. Doç. Dr. Cesim TEMEL danışmanlığında Şennur SERBEST GÜDÜCÜOĞLU tarafından hazırlanan "Banach Uzaylarının Bazı özellikleri" isimli bu çalışma 15/01/2009 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr.Heybetkulu SEFEROĞLU MUSTAFAYEV İmza:

Üye: Prof. Dr. Tünay BİLGİN İmza:

Üye: Yrd. Doç. Dr. Cesim TEMEL İmza:

Üye: ……………………………. İmza:

Üye: ……………………………. İmza:

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun 23/01/ 2009 Gün ve 2009/2-6 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Enstitü Müdürü

ÖZET

BANACH UZAYLARININ BAZI ÖZELLİKLERİ

Şennur SERBEST GÜDÜCÜOĞLU

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Yard. Doç. Dr. Cesim TEMEL

15/01/2009, 51 Sayfa

Banach uzayı kavramı, Hilbert uzayının bir genellemesidir. İç çarpım ifadesinde ele alınmayan norm Banach uzyında vardır. Banach uzayı olup Hilbert uzayı olmayan örnekler mevcut olduğundan genelleme oldukça faydalı olmaktadır.

Banach uzayında hem norma dayalı metrik özellikler hem de normların denklik sınıflarına dayalı topolojik özellik söz konusudur.

Bu çalışmada Banach uzayı ile ilgili varlık süreci normlu uzaylar üzerinden ele alınacak; lineer operatörler ve fonksiyoneller ile Hahn-Banach teoremi verilerek belli bazı sonuçlar Banach limitine uygulamasıyla incelenecektir.

Anahtar kelimeler: Normlu uzaylar, Banach uzayları, Lineer operatör, Bölüm uzayları, Dual uzaylar.

ABSTRACT

BANACH SPACES

Şennur SERBEST GÜDÜCÜOĞLU

Msc. Mathematics Science

Supervisor: Assistant Prof. Dr. Cesim TEMEL

15/01/2009, 51 Pages

A Banach space is a generalization of a Hilbert space. A Banach space contains a norm that is not obtained by an inner product. Since there exist some examples which are not Hilbert spaces that are Banach spaces, generalization of a Hilbert space is rather useful.

Both metrical properties based on norms and topological properties based on classes of equivalent norms will be taken into consideration.

In this study, the existence process relating to Banach spaces will be treated through normed spaces; after introducing linear operators and functionals and the Hahn-Banach theorem, some certain results will be investigated with an application of Banach limits.

Key words: Normed spaces, Banach spaces, Linear operator, Dual spaces.

ÖNSÖZ

Vektör uzayları, normlu uzayların tanımlanması ile birlikte pek çok uygulama söz konusu olmuştur. Hilbert uzayındaki iç çarpım ifadesinde ele alınmayan norm Banach uzayında kullanılmıştır. Yine Banach uzayı olup Hilbert uzayı olmayan örnekler vardır. Bu yüzden Banach uzayı kavramı Hilbert uzayının genellemesidir.

Bu çalışmada öncelikle Banach uzaylarının varlık süreci anlatılmıştır. İkinci bölümde lineer uzaylar ve normlu uzaylar ile bazı özellikleri ifade edilmiştir. Üçüncü bölümde normlu uzaylarda lineer operatörler, sonlu boyutluluk ile çarpım, bölüm uzayları verilmiştir.

Son bölümde ise lineer fonksiyoneller, Hahn-Banach Teoremi ve bazı sonuçlar ile Banach limitine uygulması yapılmıştır.

Bu çalışma süresince göstermiş oldukları yakın ilgi ve yardımlarından dolayı danışman hocam Yard. Doç. Dr. Cesim TEMEL'e teşekkür ederim. Ayrıca Anabilim dalı Başkanı Prof. Dr. Cemil TUNÇ'a, Prof. . Dr.Heybetkulu SEFEROĞLU MUSTAFAYEV'e ve Prof. Dr. Tünay Bilgin hocama teşekkür ederim.

Şennur SERBEST GÜDÜCÜOĞLU

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

IN	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{F}$	$\mathbb{C}$ ya da $\mathbb{R}$ cismi
$C_b(X)$	Sınırlı normlu sürekli fonksiyonlar uzayı
$C_0(X)$	Sonsuzda sıfırlanan sürekli fonksiyonlar uzayı
$\oplus$	Bir $\{x_i\}_{i=1}^{n}$ ailesinin direkt toplamı
$\prod\{X_i : i \in I\}$	X_i vektör uzaylarının çarpımı
$\|T\|$	Bir T operatörünün normu
$B(X, Y)$	Bir X normlu uzayından bir Y normlu uzayına tüm sınırlı lineer operatörlerin vektör uzayı
X/M	X normlu uzayının M bölüm uzayı
$X^{'}$ veya X^{*}	X normlu uzayının dual uzayı
$\int_X fd\mu$	Bir f fonksiyonunun bir X ölçüm uzayı üzerindeki Lebesgue integrali
$L^P(X,\Omega,u)$ ya da L^p	L^p-uzayı
$\langle x, y\rangle$ veya (x, y)	x ve y elemanlarının skaler çarpımı
L^2	Hilbert uzayı

1. GİRİŞ VE LİTERATÜR BİLDİRİŞLERİ

Matematikte Banach uzayları fonksiyonel analizde incelenen ana nesnelerden biridir. Fonksiyonel analizde çalışılan sonsuz boyutlu fonksiyon uzaylarının çoğu Banach uzayı örnekleridir.

Bir vektör uzayı ve üzerinde normla verilen bir metrik tanımlandığında önemli metrik uzaylar elde edilir. Elde edilen uzay bir *normlu uzaydır*. Bu uzay bir tam metrik uzay ise, uzaya *Banach* uzayı denir. *Norm* vektör uzayı üzerinde bir topoloji oluşturduğundan, Banach uzayı bir topolojik vektör uzayı örneğini verir.

Bir X normlu uzayından bir Y normlu uzayına tanımlı dönüşüme *operatör* denir. X uzayından $\Re$ ya da C skaler cismine olan dönüşüme *fonksiyonel* denir. Operatör teorisinde, sürekli olmaları ve vektör uzayı yapısı avantajlarına sahip olmaları nedeniyle *sınırlı lineer operatörler* ve *sınırlı lineer fonksiyoneller* oldukça önemlidir.

Verilen bir X normlu uzayından bir Y normlu uzayına tanımlı tüm sınırlı lineer operatörlerin kümesi ki bu normlu uzay olur. Bu normlu uzay $B(X,Y)$ ile gösterilir. Benzer şekilde, X normlu uzayında tanımlı tüm sınırlı lineer fonksiyonellerin kümesi bir normlu uzaydır ki bu uzaya X uzayının X' *dual uzayı* denir.

Banach uzayı kavramı Hilbert uzayı kavramının bir genelleştirilişidir. Banach uzayı, uzayın tamlığına göre uzayda bir normun mevcut olduğu varsayılır. Fakat normun iç çarpım cinsinden tanımlandığı varsayılmaz. Hilbert uzayı olmayan Banach uzaylarının birçok örneği vardır, bu nedenle genelleştirme oldukça yararlıdır .

Banach uzayı ile ilgili çok önemli sonuçlar ve uygulamalar söz konusudur. Banach teoremi ve matematiğin en önemli sonuçlarından biri olarak belli sonuçları da beraberinde getirmektedir. Örneğin X bir kompleks Banach uzayı, Y de X uzayının reel bir alt uzayı olduğu zaman genelde Hahn-Banach teoremi sağlanmaktadır (Musayev, 2000). Bohnenblust ve Sobczyk (1938) tarafından gösterilmiştir ki X sonlu boyutlu kompleks Banach uzayı içinde öyle bir Y reel alt uzayı bulunabilir ki Y üzerinde tanımlı kompleks sınırlı ve lineer fonksiyonelin X üzerinde sınırlı bir genişlemesi yoktur. Dunford ve Schwartz (1958), bu konuda lineer operatörleri incelemiştir. Larsen (1973) ve Rudin (1973) çalışmalarında bu konuda fonksiyonel analiz için bazı sonuçlar elde etmişlerdir. Kreyszig (1987)'in çalışması bu uygulamalar bakımından önemlidir. Detaylı bilgiler Convay (1990), Bayraktar (1996), Banach (1955) çalışmalarında mevcuttur.

Bu çalışmada Banach uzayı ile ilgili varlık süreci normlu uzaylar üzerinden ele alınacak: lineer operatörler , fonksiyoneller ve Hahn-Banach teoremi yardımıyla bazı sonuçlar Banach limitine uygulamasıyla incelenecektir.

Çalışmanın varlık süreci giriş bölümünde verilecektir. İkinci bölümde lineer uzaylar ve normlu uzaylar ile bazı özellikleri anlatılacaktır.

Üçüncü bölümde normlu uzaylarda lineer operatörler sonlu boyutluluk ile çarpım ve bölüm uzayları verilecektir.

Son bölümde ise lineer fonksiyoneller, Hahn-Banach teoremi ile bazı sonuçları ve Banach limitine uygulamalar incelenecektir .

2. ÖN BİLGİLER

2.1. Vektör Uzayları

Tanım 2.1.1 (Vektör uzayı) Bir F *cismi* üzerinde *bir vektör uzayı (lineer uzay)*, iki cebirsel işlemle birlikte verilen $x, y, \ldots$ elemanlarının boş kümeden farklı X kümesidir. Söz konusu iki işlemin tanımı ve bu işlemlere dair sağlanması gereken özellikler aşağıdaki gibidir:

1. Her $x, y \in X$ elemanı için, bir $z = x + y \in X$ elemanı vardır ki bu elemana x, y elemanlarının *toplamı* denir.

2. Her $x \in X$ elemanı ve her $\alpha \in$ F skaleri için, x elemanının ve α skalerinin *çarpımı* olan $\alpha x \in X$ vardır öyle ki keyfi $x, y, z \in X$ elemanları ve $\alpha, \beta \in$ F skalerleri için aşağıdaki özellikler (*vektör uzayının aksiyomları)* sağlanır:

$(V1)$ $x + (y + z) = (x + y) + z$

$(V2)$ $x + 0 = x$ koşulunu sağlayan bir $0 \in X$ elemanı vardır.

$(V3)$ Her x vektörü için, $x + (-x) = 0$ koşulunu sağlayan bir $-x$ vektörü vardır.

$(V4)$ $x + y = y + x$.

$(V5)$ $1.x = x, 1 \cdot x = x, \ 0.x = 0$.

$(V6)$ $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$.

$(V7)$ $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$.

$(V8)$ $\alpha(x + y) = \alpha x + \beta y$.

F cisminin, $\Re$ reel sayılar cismi ya da C kompleks sayılar cismi olmak üzere X uzayına reel ya da kompleks vektör uzayı denir. X uzayının elemanlarına *nokta* ya da *vektör* denir.

Tanım 2.1.2 (Bir vektör uzayının çekirdeği) $T : V \to W$ vektör uzayları arasında bir lineer dönüşüm olsun. T dönüşümünün 0 elemanına resmettiği V vektör uzayındaki tüm vektörlerin kümesine T lineer dönüşümünün *çekirdeği* denir. Bu küme

$$\ker T = \{x \in V : T(x) = 0\},$$

olarak da ifade edilebilir. Çekirdek V vektör uzayının alt uzayıdır ve boyutuna T dönüşümünün *nülü* denir.

T dönüşümü bire-birdir ancak ve ancak $\ker T = \{0\}$'dir. Özellikle V ve W vektör uzaylarının boyutları birbirine eşit ve sonlu ise, T tersinirdir ancak ve ancak $\ker T = \{0\}$'dır.

Lineer dönüşümler matrislerle verilmişse, A matrisinin çekirdeği

$$\ker A = \{x \in V : A(x) = 0\},$$

şeklinde yazılabilir.

Tanım 2.1.3 (Lineer bağımsızlık) Bir X vektör uzayının sonlu $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ alt kümesi,

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n = 0,$$

eşitliği $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$ sonucunu veriyor ise, bu küme *lineer bağımsızdır* denir. Aksi durumda, bu kümeye *lineer bağımlıdır* denir. $E \subset X$ sonsuz alt kümesinin her sonlu alt kümesi lineer bağımsız ise E kümesine *lineer bağımsızdır* denir. Aksi durumda, E *lineer bağımlıdır*. Boş kümeyi $\varnothing$ lineer bağımsız olarak kabul edebiliriz.

Tanım 2.1.4 (Lineer zarf) S bir X lineer uzayının alt kümesi olsun. Bu durumda, S kümesinin lineer zarfı, $\text{l.hull}(S)$, S kümesini içeren alt uzayların kesişimidir.

Bu küme, $x_1, x_2, ..., x_n \in E$ elemanlarını ve $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathrm{F}$ skalerlerini içeren tüm

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n, \tag{1}$$

(sonlu) lineer bileşimlerinin kümesi ile çakışır.

Tanım 2.1.5 (Hamel tabanı) X lineer uzayının B alt kümesine ancak ve ancak B lineer bağımsız ve $\text{l.hull}(B) = X$ ise X uzayı için bir Hamel tabanıdır.

Örnek 2.1.1

(i) c_0, c, l_∞ uzayları s dizi uzayının alt uzayıdırlar.

(ii) $[0,1]$ aralığındaki tüm polinomların kümesi $C[0,1]$ uzayının alt uzayıdır.

(iii) $\text{l.hull}(\varnothing) = \{\theta\}$.

(iv) C^n uzayındaki birim vektörlerin B kümesi C^n için bir Hamel tabandır.

Tanım 2.1.6 (Lineer operatör ve lineer fonksiyonel) X ve Y aynı F cismi üzerinde vektör uzayları ve D, X uzayının lineer alt kümesi olsun. Keyfi $x, y \in D$ ve $\alpha, \beta \in \mathrm{F}$ için,

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha Tx + \beta Ty \tag{2}$$

ise, $T : D \to Y$ dönüşümüne *lineer dönüşüm* (*lineer operatör ya da lineer homomorfizm*) denir. Y, F vektör uzayı ise, $f : X \to \mathrm{F}$ lineer dönüşümüne *lineer fonksiyonel ya* da *lineer form* denir.

Tanım 2.1.7 (Lineer manifold) Bir X lineer uzayında bir M *alt uzayı* ya da *lineer manifoldu*, tüm $\lambda, \mu \in \mathrm{C}$ için, $x, y \in M$ iken $\lambda x + \mu y \in M$ koşulunu sağlayacak şekilde X uzayının boş olmayan alt kümesidir.

X bir lineer uzay ve L kümesi X uzayının boş olmayan alt kümesi olsun.

$$L + v = \{v + l : l \in L\}$$

kümesi X uzayının alt uzayı olacak şekilde bir $v \in X$ varsa, L, X vektör uzayının lineer manifoldudur. Bu durumda, L lineer manifoldunun boyutu $L + v$ uzayının boyutudur ve $\dim L = \dim(L + v)$ olarak yazılabilir. Dikkat çekici durum $\dim L = \dim X - 1$ olup L uzayına bir *hiperdüzlem* denir.

Diğer bir deyişle, bir lineer manifold orijinden taşınan bir lineer alt uzaydır. Örneğin, $\Re^2$ düzleminde lineer manifold örnekleri noktalar, (hiper-düzlem olan) doğrular ve $\Re^2$ düzleminin kendisidir. $\Re^n$ uzayında hiperdüzlemler pürüzsüz bir hiper-yüzeye teğet düzlemler olarak tanımlanır.

Tanım 2.1.8 (Kısmi sıralı küme, zincir) Bir $''\leq''$ bağıntısının aşağıdaki özellikleri varsa bir S kümesinde kısmi sıralıdır:

1. Yansıma: tüm $a \in S$ için $a \leq a$.

2. Anti-simetri: $a \leq b$ ve $b \leq a$ eşitsizlikleri $a = b$ sonucunu verir.

3. Geçişme: $a \leq b$ ve $b \leq c$ eşitsizlikleri $a \leq c$ sonucunu verir.

S sonlu kısmi sıralı küme olsun. S kümesinde bir *zincir* ikişerli karşılaştırılabilir elemanlar kümesidir (yani tam sıralı alt kümedir).

Kısmi sıralama için, en uzun zincirin boyutuna (anti-zincir) kısmi sıralama uzunluğu (kısmi sıralama genişliği) denir. Kısmi sıralı bir kümeye poset de denir.

Lemma 2.1.1 (Zorn lemması) S her zincirin bir üst sınırının olduğu boş kümeden farklı kısmi sıralı bir küme ise, bu kümenin maksimal bir elemanı vardır.

Tanım 2.1.9 (Konveks küme) $\Re$ kümesindeki bir vektör uzayında bulunan bir S kümesinin herhengi iki noktasını birleştiren doğru parçası tamamen S kümesinin içinde kalıyorsa, S kümesine konveks küme denir.

2.2. Normlu Uzaylar

Tanım 2.2.1 (Metrik uzay) X bir küme olsun ve (x,y $\in X$) negatif olmayan reel $\rho(x, y)$ fonksiyonunun $X \times X$ kartezyen kümesinde tanımlandığını varsayalım. Bu $\rho : X \times X \to IR^{+}$ fonksiyonu, keyfi $x, y, z \in X$ elemanları için aşağıdaki $(M1)-(M3)$ özelliklerini sağlarsa, bu fonksiyona X kümesinde bir *metriktir* ya da *uzaklıktır* denir ve $X = (X, \rho)$ ikilisine *metrik uzay* denir. *Metrik uzayların* aksiyomları:

$(M1)$ $\rho(x, y) \geq 0$ ve $\rho(x, y) = 0$ ancak ve ancak $x = y$,
$(M2)$ $\rho(x, y) = \rho(y, x)$,
$(M3)$ $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$. olarak verilir.

Tanım 2.2.2 (Normlu uzay) X bir F cismi üzerinde vektör uzayı olsun. X vektör uzayında $\|.\| : X \to IR^{+}$ fonksiyonuna *norm* ve keyfi $x, y \in X$ elemanları ve herhangi $\alpha \in F$ skaleri için *normlu uzayın aksiyomları* olarak ifade edilen aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa $(X, \|.\|)$ ikilisine F cismi üzerinde *normlu uzay* denir:

$(N1)$ $\|x\| \geq 0$ ve $\|x\| = 0$ ancak ve ancak $x = 0$ ise,
$(N2)$ $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$,
$(N3)$ $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Tanım 2.2.3 (Norm metriği) Bir $(V,\|.\|)$ normlu vektör uzayı, $d(u,v)=\|u-v\|$ ile verilen $d:V\times V\to\Re$ metriği altında bir metrik uzaydır. Bu metriğe $\|.\|$ normu ile doğrulayan metrik denir.

Tanım 2.2.4 (Kanonik dönüşüm ve kanonik norm) L uzayı, X lineer uzayının lineer alt uzayı olsun. X uzayından $X-L$ uzayına (X uzayının *modulo* L *fark uzayına*) olan $x\to x'$ dönüşümüne *kanonik dönüşüm* (ya da *bölüm dönüşümü*) denir. L uzayı X uzayının kapalı lineer alt uzayı iken, norm $X-L$ uzayında,

$$\|z\|=\inf\{\|x\|:x\in z\}\qquad (z\in X-L)$$

ile tanımlanır ki burada x elemanları z eşkümelerinin elemanlarıdır. Bu norma $X-L$ uzayında *kanonik norm* denir.

Tanım 2.2.5 (Sürekli lineer operatör) $X=(X,d)$ ve $Y=(Y,\tilde{d})$ metrik uzay olsun. Bir $T:X\to Y$ dönüşümü, her $\varepsilon>0$ için $d(x,x_0)<\delta$ koşulunu sağlayan tüm x elemanları için

$$\tilde{d}(Tx,Tx_0)<\varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta>0$ varsa bu T dönüşümüne $x_0\in X$ noktasında *süreklidir* denir.

$T:X\to Y$ bir operatör olsun. Burada X ve Y normlu uzaylar olsun. Yukarıda verdiğimiz tanımdan, her $\varepsilon>0$ için bir $\delta>0$ varsa öyle ki

$$\|x-x_0\|<\delta \text{ koşlunu sağlayan tüm } x\in X \text{ için } \|Tx-Tx_0\|<\varepsilon$$

ise T operatörü bir $x_0\in X$ noktasında *süreklidir* denir.

Tanım 2.2.6 (Operatör normu ve dual uzay) Keyfi bir $T:X\to Y$ operatörü için,

$$\|Tx\|\le\lambda\|x\|,\qquad \forall x\in X \tag{3}$$

olacak şekilde bir $\lambda>0$ reel sayısı varsa T operatörüne *sınırlı* denir. (3) eşitsizliğini sağlayan en küçük λ sabitine T *operatörünün normu* denir ve $\|T\|$ ile gösterilir yani

$$\|T\|:=\inf\{\lambda>0:\|Tx\|\le\lambda\|x\|,\ x\in X\}.$$

Bir X normlu uzayının X^* ile gösterilen *dual uzayı* ya da *konjuge uzayı* X uzayındaki tüm sürekli lineer fonksiyonellerin normlu uzayıdır (yani $X^*=B[X,F]$ burada F ya $\Re$ reel cismini ya da C kompleks cismini gösteriyor, X sırasıyla reel ya da kompleks normlu uzaydır.)

Tanım 2.2.7 (Açık dönüşüm) Bir *açık dönüşüm*, açık kümeleri açık kümelere dönüştüren iki topolojik uzay arasında bir fonksiyondur. Yani X uzayındaki bir U açık kümesi için $f(U)$ görüntüsü Y uzayında açık ise $f : X \to Y$ fonksiyonu açıktır. Benzer şekilde, *kapalı dönüşüm* kapalı kümeleri kapalı kümelere dönüştüren bir fonksiyondur.

Tanım 2.2.8 (Topolojik uzay) X , boştan farklı bir küme ve τ , X 'de bir kümeler sınıfı olsun. Aşağıdaki dört koşulu sağlayan (X , τ) ikilisine bir topolojik uzay, τ sınıfından olan kümelere ise açık kümeler denir.

1. $\varnothing$ küme, τ sınıfındandır.
2. X , τ sınıfındandır
3. τ sınıfındaki sonlu sayıdaki kümenin kesişimi de τ sınıfındandır.
4. τ sınıfındaki keyfi sayıdaki kümenin birleşimi de τ sınıfındandır.

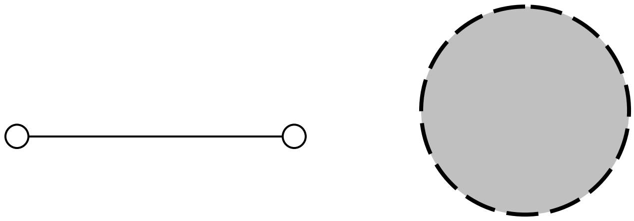
Alternatif olarak, τ topolojisi 3 ve 4 koşullarının aşağıdaki biçimde yaniden ifade edileceği açık kümelerin yerine kapalı kümelerle tanımlanabilir:

3. τ kümesindeki keyfi sayıdaki kümenin kesişimi de τ kümesindedir
4. τ kümesindeki sonlu sayıdaki kümenin birleşimi de τ kümesindedir.

Bu aksiyomlar, reel doğrunun geleneksel açık ve kapalı aralık tanımları doğru kalacak şekilde tasarlanmıştır. Örneğin, 3. aksiyomdaki sınırlama $\bigcap_{n=1}^{\infty}(-1/n,1/n,)=\{0\}$ örneği dikkate alınarak zorunluluğu anlaşılabilir, burada görüldüğü gibi açık aralıkların sonsuz kesişimi bir kapalı kümedir.

Tanım 2.2.9 (Komşuluk) X bir topolojik uzay ve p , X uzayında bir nokta ise, p noktasının bir *komşuluğu* V kümesidir ki bu küme p noktasını içeren bir U açık kümesini içerir, $p \in U \subseteq V$. Bu, aynı zamanda $p \in X$ noktasının V komşuluğunun *iç noktası* olarak $p \in X$ ifadesine denktir. V komşuluğunun bir açık küme olması gerekmediğini görüyoruz. V açık (küme) ise, *açık komşuluk* adını alır.

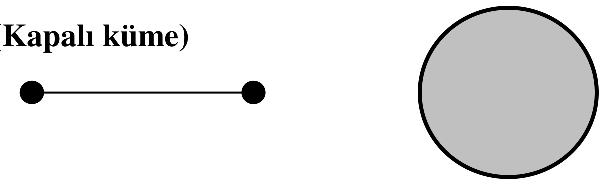
Tanım 2.2.10 (Açık küme)



açık aralık açık disk

S bir metrik uzayın alt kümesi olsun. O halde S kümesindeki her noktanın kümede bulunan bir komşuluğu varsa S kümesine *açık* denir. r yarıçaplı ve x_0 merkezli bir açık küme $|x - x_0| < r$ koşulunu sağlayan tüm x noktalarının kümesidir ve $D_r(x_0)$ ile gösterilir. Bir boyutlu uzayda, açık küme bir açık aralıktır. İki boyutlu uzayda, açık küme disktir. Üç boyutlu uzayda, açık küme bir yuvardır .

Tanım 2.2.11 (Kapalı küme)



kapalı aralık kapalı disk

Kapalı bir kümenin birbirine denk birkaç tanımı vardır. S bir metrik uzayın alt kümesi olsun.

1. $_s$ kümesinin tümleyeni bir açık küme ise,
2. S kümesi kendisinin kapanışı ise,
3. S kümesinde tanımlı diziler S kümesinin bir elemanına yakınsaksa,
4. S kümesinin dışındaki her noktanın S kümesinden ayrık bir komşuluğu varsa S kümesi kapalıdır.

Tanım 2.2.12 (Komşuluk tabanı) Bir x noktasının *komşuluk sistemi tabanı*, açıkların bir N sınıfıdır öyle ki x noktası N sınıfının her üyesine aittir ve x noktasını içeren bir açık da bir alt küme olarak N sınıfının bir üyesini içerir.

Tanım 2.2.13 (Cauchy dizisi) Reel sayıların bir

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

dizisi, her pozitif $\varepsilon > 0$ reel sayısı, tüm $m, n > N$ doğal sayıları için

$$|x_m - x_n| < \varepsilon,$$

olacak şekilde bir N pozitif tam sayısı varsa (x_n) dizisine *Cauchy* dizisidir denir.

Benzer şekilde, kompleks sayıların Cauchy dizileri tanımlanabilir.

Tanım 2.2.14 (Hausdorff uzayı) (X , τ) bir topolojik uzay olsun. X 'in farklı iki noktası için ayrık komşulukları varsa (X , τ) uzayına T_2 *uzayı* yada *Hausdorff uzayı* denir.

Tanım 2.2.15 (Diskrit topoloji) Daha önce tanımladığımız gibi, bir topoloji, bir X kümesinin alt kümelerinin sınıfıyla verilir. En küçük topolojinin iki açık alt kümesi vardır, bunlar $\varnothing$ boş küme ve X kümesidir. En büyük topoloji, tüm alt kümeleri açık küme olarak içerir ve bu topoloji *diskrit topoloji* adını alır. Özellikle, X kümesinin her noktası diskrit toplojide bir açık kümedir.

Tanım 2.2.16 (Yoğun küme) Bir X topolojik uzayının A alt kümesi, sezgisel olarak X uzayındaki bir nokta A kümesindeki noktalara "iyi yaklaştırılabilir" ise, (X uzayında) *yoğun* adını alır. Biçimsel olarak, X uzayındaki bir x noktası için x noktasının bir komşuluğu A kümesinden en az bir nokta içerirse X uzayında yoğundur. Denk olarak, A kümesini içeren X uzayının tek kapalı alt kümesi X uzayının kendisi ise, A kümesi X uzayında yoğundur. Bu, A kümesinin kapanışının uzayı olduğu (simgesel olarak bu $\overline{A} = X$ şeklinde gösterilir) yani A kümesinin tümleyeninin içinin boş olduğu söylenerek de ifade edilebilir.

Metrik uzaylarda yoğun küme için verilebilecek bir tanım şöyledir: Bir X metrik uzayındaki A kümesi, X uzayındaki her x noktası A kümesindeki elemanları dizisinin limiti ise yoğundur.

Örnek 2.2.1

1. Her topolojik uzay kendisinin içinde yoğundur.
2. Alışılmış topoloji ile donatılı reel sayıların yoğun olarak rasyonel ve irrasyonel sayılar alt kümeleri vardır.
3. Bir M metrik uzayı γM kapanışında yoğundur.

Tanım 2.2.17 (Kapanış ve kompakt kapanış) Bir A kümesinin *kapanışı* A kümesini içeren en küçük kapalı kümedir. Tipik olarak, A kümesinin kapanışı A ile A kümesinin tüm limit noktalarından oluşur.

Bir U kümesinin kapanışı kompakt ise bu kümenin *kompakt kapanışı* vardır. Tipik olarak, kompakt kapanış U kümesinin sınırlı olma koşuluna denktir.

Tanım 2.2.18 (Tam metrik uzay) Bir tam metrik uzay, içinde her Cauchy dizisinin yakınsadığı bir metrik uzaydır. Tam metrik uzay olarak, alışılmış metrikli reel sayılar, kompleks sayılar örnekleri verilebilir.

Tanım 2.2.19 (Yakınsaklık ve tamlık) (X, d) bir metrik uzay olsun. Bir X -değerli $\{x_n\}$ dizisi (yani $\aleph$ ya da $\aleph_0$ indeksli X uzayında bir dizi), her reel $\varepsilon > 0$ için

$$n \geq n_\varepsilon \ , \qquad d(x_n, x) < \varepsilon$$

koşulunu sağlayan pozitif bir n_ε tam sayısı varsa X uzayında bir x noktasına *yakınsar*. $\{x_n\}$, $x \in X$ noktasına yakınsak ise, $\{x_n\}$ dizisine *yakınsak dizi* denir ve x noktasına $\{x_n\}$ dizisinin *limiti* denir. $\lim x_n = x, \lim_n x_n = x, \lim_{n\to\infty} x_n = x, x_n \to x$ ya da $n \to \infty$ iken $x_n \to x$ simgelerinden biriyle gösterilir.

Tanım 2.2.20 (Limit (yığılma) noktası) (X, d) bir metrik uzay ve A, X uzayının alt kümesi olsun. X uzayında bir x noktası $A \setminus \{x\}$ kümesinin bitişik noktası ise, A kümesinin *limit noktası* ya da *yığılma noktasıdır.*

Tanım 2.2.21 (Kompakt uzay ve yerel kompakt uzay) (M, ρ) bir metrik uzay olsun. M uzayının her elemanı $\{U_i\}_{i\in I}$ açık küme sisteminin en az bir U_i açığına aitse, $\{U_i\}_{i\in I}$ sistemine M metrik uzayının bir *açık örtüsü* denir. $M = U_{i_1} \cup, \ldots, \cup U_{i_n}$ olacak şekilde M uzayının her

$\{U_i\}_{i\in I}$ açık örtüsünden sonlu sayıda $U_{i_1},...,U_{i_n}$ seçmek mümkünse (M,ρ) metrik uzayı kompakt adını alır.

Tanım 2.2.22 (Ayrılabilirlik) Bir X metrik uzayında yoğun sayılabilir bir alt küme varsa X uzayına *ayrılabilir uzay* denir.

Tanım 2.2.23 (Noktasal ve düzgün yakınsaklık) $\{f_n\}$ aynı X bölgesinde tanımlı fonksiyonlar dizisi olsun.

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),$$

ifadesini ele alalım. X bölgesindeki her x değeri için bunun doğru olduğunu söylemek $\{f_n\}$ dizisinin f fonksiyonuna *noktasal yakınsadığını* söylemektir ve yakınsama

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

noktasal, olarak yazılır.

Düzgün yakınsaklık, noktasal yakınsaklıktan daha kuvvetli olan bir yakınsaklık tipidir. Bir $\{f_n\}$ fonksiyonlar dizisi, $f_n(x)$ fonksiyonlarının $f(x)$ fonksiyonuna yakınsama hızı x değerine bağlı değilse bir f limit fonksiyonuna *düzgün yakınsar*.

S bir küme ve her n doğal sayısı için $f_n : S \to \Re$ reel değerli fonksiyonlar olsun. Her $\varepsilon > 0$ için, S kümesindeki tüm x değerleri ve $n \geq N$ için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ koşullarını sağlayan bir N doğal sayısı varsa $\{f_n\}$ fonksiyonlar dizisinin $f : S \to \Re$ limitine *düzgün yakınsak* olduğunu söyleriz.

$a_n = \sup|f_n(x) - f(x)|$ dizisini ele alalım. Açıktır ki f_n fonksiyonlar dizisi ancak ve ancak a_n sayıları 0 sayısına yaklaşıyorsa f fonksiyonuna düzgün yaklaşır.

Tanım 2.2.24 (İzomorfizm ve izometri) *İzomorfizma* kümeleri ve elemanlar arasındaki bağıntıları koruyan bir dönüşümdür. "A kümesinin B kümesine izomorf olması" $A \cong B$ olarak yazılır.

Uzaklıkları koruyan yani

$$d(f(x), f(y)) = d(x, y),$$

iki metrik arasındaki bijektif dönüşüme *izometri* denir, burada f sözkonusu dönüşüm olup $d(a,b)$ uzaklık fonksiyonudur. İzometrilere bazen *eşlik (kongrüans) dönüşümleri* de denir.

Tanım 2.2.25 (İç çarpım uzayı ve Hilbert uzayı) Bir F cismi (çoğunlukla $\mathrm{F}=\mathrm{C}$) üzerindeki V vektör uzayı için, her $x,y\in V$ elemanlar ikilisine karşılık, skaler *çarpım aksiyomları* sağlanacak şekilde yani keyfi $x,y,z\in V$ ve $\alpha\in\mathrm{F}$ için aşağıdaki koşullar sağlanacak şekilde $\langle x,y\rangle\in\mathrm{F}$ (x ve y elemanlarının skaler çarpımı) sayısı verilmişse V uzayına skaler *çarpımlı uzay* ya da iç *çarpım uzayı* ya da *ön-Hilbert uzayı* denir:

(H1) $\langle x,x\rangle\geq 0$,(yani $\langle x,x\rangle$ reel) ve $\langle x,x\rangle=0$ ancak ve ancak $x=0$ ise,

(H2) $\langle \alpha x,y\rangle=\alpha\langle x,y\rangle$,

(H3) $\langle x+y,z\rangle=\langle x,y\rangle+\langle y,z\rangle$,

(H4) $\langle x,y\rangle=\overline{\langle y,x\rangle}$.

Daha başka özellikler aksiyomlardan elde edilebilir:

$$\langle x,\alpha y\rangle=\overline{\alpha}\langle x,y\rangle \text{ ve } \langle x,y+z\rangle=\langle x,y\rangle+\langle x,z\rangle.$$

H ön-Hilbert uzayında bir norm aşağıdaki gibi skaler çarpım vasıtasıyla ifade edilebilir:

$$\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}\quad (x\in\mathrm{H}) \tag{4}$$

(4) eşitliğini sağlayan skaler bir çarpım varsa, $(\mathrm{H},\|.\|)$ normlu uzayına *üniter uzay* denir.

Tam üniter H uzayına *Hilbert uzayı* denir. Bir Hilbert uzayının alt uzayı kapalı lineer bir alt uzaydır (Kreyszig, 1987).

Örnek 2.2.3

$$\langle x,y\rangle=\sum_{k=1}^{n}\xi_k\overline{\eta_k}\ ,\ \langle x,y\rangle=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\overline{\eta_k} \text{ ve } \langle x,y\rangle=\int_a^b x(t)\overline{y(t)}dt \tag{5}$$

skaler çarpımlı $l^2(n)$, l^2 ve $L^2((a,b))$ uzayları birer Hilbert uzayıdır.

Örnek 2.2.4 f ve $g\in L^2(\mu)\equiv L^2(X,\Omega,\mu)$ ise, Hölder eşitsizliği $f\overline{g}\in L^1(\mu)$ sonucunu verir.

$$\langle f,g\rangle=\int f\overline{g}d\mu$$

ise bu $L^2(\mu)$ Hilbert uzayında bir iç çarpım tanımlar.

2.3. Ölçüm Uzayı

Tanım 2.3.1 (**Sigma cebir**) X bir küme olsun. O halde bir F σ-cebiri, aşağıdaki koşulları sağlayan X kümesinin alt kümelerinin boş kümeden farklı bir sınıfıdır:

1. X kümesi F cebirindedir.
2. A kümesi F cebirinde ise, A kümesinin tümleyeni de F cebirindedir.
3. A_n F cebirinin elemanlarının dizisi ise, A_n kümelerinin birleşimi F cebirindedir.

Tanım 2.3.2 (Ölçülebilir uzay) Bir küme ve bu küme üzerinde tanımlı sigma-cebiri ikilisine *ölçülebilir uzay* denir.

2.3.3 (**Halka, δ-halkası ve Ölçüm**) Bir X kümesi, X kümesinin alt kümelerinin boş olmayan bir kümesi F olsun. O halde F kümesindeki her küme ikilisi için kesişim, birleşim ve küme farkı da F kümesinde ise F bir halkadır. F bir halka ve $A_n \in f$ kümelerinin sayılabilir bir birleşimi için, $\bigcap A_n$ kesişimi de F halkasında ise F halkasına bir δ*-halkası* denir.

Bir *ölçüm*,

$$m(\varnothing) = 0,$$

koşulunu sağlayacak şekilde bir F δ-halkasından elde edilen negatif olmayan reel fonksiyon olarak tanımlanır, burada $\varnothing$ boş kümedir ve $A = \bigcup A_n$ birleşimi de F halkasında bulunacak şekilde F halkasındaki sonlu ya da sayılabilir sayıda ikişerli ayrık (A_n) kümelerinin sınıfı için

$$m(A) = \sum_n m(A_n).$$

Tanım 2.3.4 (σ-sonlu ölçüm uzayı) X sonlu ölçümlü ölçülebilir kümelerin sayılabilir birleşimi ise, μ ölçümüne σ*-sonlu* denir. Bir ölçüm uzayındaki bir küme, sonlu ölçümlü kümelerin bir birleşimi ise σ*-sonlu ölçümlüdür*.

Tanım 2.3.5. (Lebesgue) Dış ölçüm Bir *dış ölçüm*, aşağıdaki koşulları sağlayan bir X kümesinin tüm alt kümelerinde tanımlı bir

$$\varphi : 2^X \to [0,\infty]$$

fonksiyonudur:

- Boş küme sıfır dış ölçümlüdür (sıfır ölçümlü). $\varphi(\varnothing) = 0$
- Monotonluk $A \subseteq B \Rightarrow \varphi(A) \leq \varphi(B)$
- Sayılabilir yarı-toplanırlık: X kümesinin alt kümelerinin bir $\{A_j\}$ dizisi için

(karşılıklı ayrık ya da ayrık olmayan)

$$\varphi\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \varphi(A_j).$$

Bu bize ölçülebilirlik kavramını şöyle tanımlamamızı sağlar: X kümesinin bir E alt kümesi ancak ve ancak X kümesinin her A alt kümesi için

$$\varphi(A) = \varphi(A \cap E) + \varphi(A \setminus \mathrm{E}),$$

ise, φ-ölçülebilirdir (ya da φ vasıtasıyla Carathéodory-ölçülebilirdir).

Tanım 2.3.6 (Borel kümesi ve regüler Borel ölçümü) Borel kümeleri sayılabilir birleşimler ve kesişimler tekrarlı olarak alınmasıyla açık ya da kapalı kümelerden oluşturulabilen kümelerdir. Rasyonel sayılar kümesi bir Borel kümesidir. Bir n-boyutlu $\Re^n$ Öklidyen uzayında bir μ dış ölçümü aşağıdaki iki koşul sağlanırsa *Borel regüler* adını alır:

- Her $B \subseteq \Re^n$ Borel kümesi, Carathéodory kriteri anlamında μ-ölçülebilirdir:

$$\text{her } A \subseteq \Re^n \text{ için, } \mu(A) = \mu(A \cap B) + \mu(A \setminus B).$$

- Her $A \subseteq \Re^n$ kümesi için, (μ-ölçülebilir olması gerekmeyen) $A \subseteq B$ ve $\mu(A) = \mu(B)$ olacak şekilde bir $B \subseteq \Re^n$ Borel kümesi vardır.

Bu iki gerektirmeden yalnız ilkini sağlayan bir dış ölçüme *Borel ölçümü* denir oysa yalnız ikinci gerektirmeyi sağlayan bir dış ölçüme *regüler ölçüm* denir. $\Re^n$ uzayında Lebesgue dış ölçümü bir Borel regüler ölçümü örneğidir.

Tanım 2.3.7 (Lebesgue ölçümü ve Lebesgue integrali) Lebesgue ölçümü, klasik uzunluk ve alan kavramlarının daha karmaşık kümelere genişletişidir. Ayrık aralıkları içeren $S \equiv \sum_k (a_k, b_k)$ açık kümesi verildiğinde, Lebesgue ölçümü

$$\mu_L(S) \equiv \sum_k (b_k - a_k),$$

ile tanımlanır.

Bir $S^{'} \equiv [a,b] - \sum_k (a_k, b_k)$ kapalı kümesi verildiğinde

$$\mu_L(S^{'}) \equiv (b-a) - \sum_k (b_k - a_k).$$

Birim doğru parçasının Lebesgue ölçümü 1 sayısıdır.

Lebesgue integrali, bir kümenin Lebesgue ölçümü kullanılarak üst ve alt sınırlar cinsinden tanımlanır. Bu $S_n = \sum_i \eta_i \mu(E_i)$ Lebesgue toplamı ele alınarak tanımlanır burada η_i i alt aralığında fonksiyonun değeridir, $\mu(E_i)$ değerleri yaklaşık olarak η_i olan noktalar kümesinin Lebesgue ölçümüdür. Bir f fonksiyonunun bir X ölçüm uzayı üzerindeki Lebesgue integrali,

$$\int_X f$$

ya da bazen integralin μ ölçümüne göre alındığını vurgulamak üzere

$$\int_X f d\mu$$

olarak yazılır.

Tanım 2.3.8 (L^p uzayları) L^p-fonksiyonlar kümesi L^2-uzayını genelleştirir. Kare integrallanebilirlik yerine, f ölçülebilir fonksiyonunun L^p uzayında olması için p-integrallenebilir olması gerekir.

Bir X ölçüm uzayında, bir f fonksiyonunun L^p-normu

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_X |f|^p\right)^{1/p},$$

şeklinde tanımlanır. L^p-fonksiyonları bu integralin yakınsadığı fonksiyonlardır. $p \neq 2$ için, L^p-fonksiyonlar uzayı Hilbert uzayı olmayan bir Banach uzayıdır. $\Re^n$ Öklidyen uzayında ve diğer birçok durumda, L^p-uzayı L^p normu kullanılarak elde edilen kompakt destekli sürekli fonksiyonların tamlanışıdır. L^2-uzayı durumunda olduğu gibi, bir L^p-fonksiyonu h.h.h. uyumlu fonksiyonların denklik sınıfıdır. Bir f_n fonksiyonlar dizisinin L^p uzayında yakınsaması mümkün iken bir diğer $p^{'}$ için $L^{p^{'}}$ uzayında yakınsaması mümkün olmaz örneğin, $f_n = \left(1+x^2\right)^{-1/2-1/n}$ fonksiyon dizisi L^2-uzayında yakınsar ancak L^1-uzayında yakınsamaz. Bununla birlikte, bir dizi L^p ve $L^{p^{'}}$ uzaylarında yakınsaksa, limiti her iki uzayda da aynı olmalı. $p > 1$ iken L^p uzayının dual uzayı L^q uzayındaki fonksiyonlara karşın integrali alınarak verilir, burada $1/p + 1/q = 1$. İntegraller için Hölder eşitsizliğinden dolayı bu anlamlıdır. Özellikle kendisine dual olan tek L^p-uzayı L^2 uzayıdır. L^p fonksiyonlarının kullanımı L^2 kadar sık değilse de analizde ve kısmi diferensiyel denklemlerde çok önemlidir. Örneğin, bazı operatörler bir $p > 2$ sayısı için yalnız L^p-uzayında sınırlıdırlar.

Teorem 2.3.1 (Mutlak Süreklilik ve Radon-Nikodym teoremi) Bir λ ölçümü, $\mu(E) = 0$ koşulunu sağlayan her küme için $\lambda(E) = 0$ ise başka bir μ ölçümüne göre *mutlak süreklidir*. Bu, μ Lebesgue ölçümü gibi pozitif ölçüm olduğu sürece anlamlıdır ancak λ herhangi bir ölçüm örneğin kompleks ölçüm olabilir.

Radon-Nikodym teoremi, pozitif μ ölçümüne (Lebesgue ölçümü ya da Haar ölçümü olabilen) göre mutlak sürekli bir λ kompleks ölçümünün bir f $L^1(\mu)$-fonksiyonunun integrali

$$\lambda(E) = \int_E f d\mu ,$$

ile verildiğini ifade eder. f fonksiyonu ölçüm için bir yoğunluk fonksiyonu gibidir.

Teorem 2.3.2 (Fubini teoremi) Bazen Tonelli teoremi olarak adlandırılan Fubini teoremi, çok katlı bir integralle tekrarlı bir integral arasında bir bağlantı kurar. $f(x, y)$ fonksiyonu $R : a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d$ dikdörtgensel bölgesi üzerinde sürekli ise,

$$\iint_R f(x, y) d(x, y) = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx$$

eşitliği sağlanır.

Tanım 2.3.9 (Analitik fonksiyon) Bir kompleks fonksiyon bir R bölgesindeki her noktada kompleks diferensiyel-lenebilir ise fonksiyona R bölgesinde *analitiktir* denir. Diğer bir ifadeyle, bir analitik fonksiyon, yakınsak bir kuvvet serisi ile yerel olarak verilen fonksiyondur. Bir kompleks fonksiyon, bir R bölgesinde analitik ise, R bölgesinde sonsuz diferensiyellenebilirdir. Herhangi bir polinom (reel ya da kompleks) bir analitik fonksiyondur. Üstel fonksiyon analitiktir. $z \to \bar{z}$ fonksiyonunun reel doğruya sınırlanışı reel analitikse de kompleks analitik değildir.

Tanım 2.3.10 (Kutup) U **,** $\mathbb{C}$ kompleks düzleminin açık alt kümesi, a, U açığının elemanı olsun ve $f : U - \{a\} \to \mathbb{C}$ verilen tanım bölgesinde holomorfik bir fonksiyon olsun. Tüm $U - \{a\}$ kümesindeki z elemanları için,

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^n},$$

koşulunu sağlayan bir $g : U \to \mathbb{C}$ holomorfik fonksiyonu ve negatif olmayan bir n tam sayısı varsa, a f fonksiyonunun *kutup noktası* adını alır. Yukarıdaki koşulu sağlayan en küçük n sayısına *kutbun mertebesi* denir. 1 mertebesindeki kutba *basit kutup* denir. 0 mertebesindeki kutba *kaldırılabilir tekillik (singülarite)* denir.

3. TEMEL ÖZELLİKLER

Bu bölümde, normlu uzaylarda lineer uzaylar, sonlu boyutlu normlu uzaylar, normlu uzayların bölüm ve çarpımları ele alınmıştır.

3.1. Yarı Normlu Uzaylar

Tanım 3.1.1 X , F üzerinde vektör uzayı ise, bir *yarı-norm* aşağıdaki özelliklere sahip olan bir $p : X \to [0,\infty)$ fonksiyonudur:

(a) X 'te tüm x, y için $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$,

(b) F'de tüm α ve X 'te tüm x için $p(ax) = |\alpha| p(x)$.

(b)'den $p(0) = 0$ olduğu görülür. Bir *norm* bir p yarı-normudur öyle ki

(c) $p(x) = 0$ ise $x = 0$.

Genellikle bir norm $\|.\|$ ile gösterilir.

Bir Hilbert uzayında tanımlı norm (a)-(c) koşullarını sağlar. Aynı zamanda bu koşulları $B(H)$'de tanımlı norm da sağlar.

X bir norm ise, $d(x, y) = \|x - y\|$, X 'te bir metrik tanımlar.

Tanım 3.1.2 X bir vektör uzayı ve $\|.\|$ X 'te bir norm olsun. Bir *normlu uzay*, $(X, \|.\|)$ ikilisidir. Bir *Banach uzayı* normla tanımlı metriğe göre tam olan bir normlu uzaydır.

Önerme 3.1.1 X bir normlu uzaysa,

(a) $(x, y) \mapsto x + y$ ile tanımlı $X \times X \to X$ fonksiyonu süreklidir;

(b) $(\alpha, x) \mapsto \alpha x$ ile tanımlı $F \times X \to X$ fonksiyonudur.

İspat. $x_n \to x$ ve $y_n \to y$ ise , $n \to \infty$ iken

$$\|(x_n + y_n) - (x + y)\| = \|(x_n - x) + (y_n - y)\| \leq \|x_n - x\| + \|y_n - y\| \to 0.$$

Bu sonuç (a)' yı ispatlar.(b)'nin ispatı kolayca görülür.

Lemma 3.1.1 p ve q bir X vektör uzayı üzerinde yarı-normlar ise, aşağıdaki ifadeler denktir.

(a) Tüm x' ler için $p(x) \leq q(x)$ ($p \leq q$).

(b) $\{x \in X : q(x) < 1\} \subseteq \{x \in X : p(x) < 1\}$.

(b') $p(x) < 1$ olduğu sürece $q(x) < 1$'dır.

(c) $\{x : q(x) \leq 1\} \subseteq \{x : p(x) \leq 1\}$.

(c') $q(x) \leq 1$ olduğu sürece $p(x) \leq 1$'dır.

(d) $\{x : q(x) < 1\} \subseteq \{x : p(x) \leq 1\}$.

(d') $q(x) < 1$ olduğu sürece $p(x) \leq 1$'dır.

İspat. Açıktır ki (b) ile (b'), (c) ile (c') ve (d) ile (d') denkliği açıktır. Aynı zamanda (a) nın kalan diğer tüm koşulları ve (b) nin (d) yi doğruladığı açıktır. Şimdi (d) nin (a) yı verdiği gösterilecektir.

(d) nin sağlandığını varsayalım ve $q(x) = a$ diyelim. $\varepsilon > 0$ ise,

$$q\left((a+\varepsilon)^{-1} x\right) = (a+\varepsilon)^{-1} a < 1.$$

(d)'den ,

$$1 \geq p\left((a+\varepsilon)^{-1} x\right) = (a+\varepsilon)^{-1} p(x),$$

böylece $p(x) \geq a + \varepsilon = q(x) + \varepsilon$. $\varepsilon \to 0$ olması (a) yı verir.

$\|.\|_1$ ve $\|.\|_2$ X' te iki norm ise, X' te aynı topolojiyi tanımlıyorlarsa bu normlara *denk normlar* denir.

Önerme 3.1.2 $\|.\|_1$ ve $\|.\|_2$ X' te iki norm ise, bu normlar denktir ancak ve ancak X' teki tüm x'ler için

$$c\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C\|x\|_1,$$

olacak şekilde pozitif c ve C sabitleri vardır.

İspat. X'teki tüm x' ler için , $c\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C\|x\|_1$ olacak şekilde pozitif c ve C sabitlerinin mevcut olduğunu varsayalım. X'te x_0 sabitleyelim, $\varepsilon > 0$. O halde

$$\{x \in X : \|x - x_0\|_1 < \varepsilon / C\} \subseteq \{x \in X : \|x - x_0\|_2 < \varepsilon\},$$

$$\{x \in X : \|x - x_0\|_2 < \varepsilon / C\} \subseteq \{x \in X : \|x - x_0\|_1 < \varepsilon\}.$$

Bu iki topolojinin aynı olduğunu gösteriyor. Şimdi bu iki normun denk olduklarını varsayalım.Buradan $\{x : \|x\|_1 < 1\}$, $\|.\|_2$ ile tanımlanan topolojide 0'ın açık komşuluğudur. Bu nedenle

$$\{x : \|x\|_2 < r\} \subseteq \{x : \|x\|_1 < 1\}$$

olacak şekilde bir $r > 0$ vardır. $g(x) = r^{-1}\|x\|_2$ ve $p(x) = \|x\|_1$ ise, önceki lemmadan

$$\|x\|_1 \le r^{-1}\|x\|_2 \text{ ya da } c\|x\|_1 \le \|x\|_2 ,$$

ki burada $c = r$.

Bir Banach uzayının iki tip özelliği vardır: topolojik ve metrik olanlar. Metrik özellikleri tamamen norma bağlıdır; topolojik olanlar yalnızca normların denklik sınıfına bağlıdır.

Örnek 3.1.1 X herhangi bir Hausdorff uzayı olsun ve $C_b(X)$, tüm sürekli $f : X \to F$ fonksiyonları öyle ki $\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in X\} < \infty$. $C_b(X)$ uzayındaki f, g elemanları için, $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ eşitliği ile $(f + g) : X \to F$ dönüşümünü ve F cismindeki a sayıları için $(af)(x) = af(x)$ tanımlayalım. O halde $C_b(X)$, bir Banach uzayıdır.

(3.1.1)'deki ifadelerin ispatları $C_b(X)$'in tamlığı dışında tamamen bilinmektedir.Bunu görmek için, $\{f_n\}$, $C_b(X)$'de Cauchy dizisi diyelim. Böylece $\varepsilon > 0$ ise, bir N_ε tam sayısı vardır öyle ki $n, m \ge N_\varepsilon$ için

$$\varepsilon > \|f_n - f_m\| = \sup\{\|f_n(x) - f_m(x)\| : x \in X\}.$$

Özellikle, X uzayındaki herhangi bir x için , $n, m \ge N_\varepsilon$ iken

$$|f_n(x) - f_m(x)| \le \|f_n - f_m\| < \varepsilon .$$

Böylece, $\{f_n(x)\}$, F cisminde bir Cauchy dizisidir. $x \in X$ ise $f(x) = \lim f_n(x)$ olsun. X ' te x elemanını sabitleyelim. $n, m \ge N_\varepsilon$ ise,

$$|f(x) - f_n(x)| \le |f(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f_n(x)| < |f(x) - f_m(x)| + \varepsilon$$

dır. $m \to \infty$ alarak $n \ge N_\varepsilon$ iken $|f(x) - f_n(x)| \le \varepsilon$ eşitsizliğini veriyor.Bu, x'den bağımsızdır. Buradan $n \ge N_\varepsilon$ için $\|f - f_n\| \le \varepsilon$, dur.

Şimdiye dek gösterdiğimiz, $n \to \infty$ iken $\|f - f_n\| \to 0$. Bunun X uzayında $f_n(x) \to f(x)$ düzgünce olduğuna dikkat edelim. f fonksiyonunun sürekli olacağını temel analizden bilmekteyiz. Aynı zamanda,

$$\|f\| < \|f - f_n\| + \|f_n\| < \infty .$$

Buradan $f \in C_b(X)$ ve bu nedenle $C_b(X)$ tamdır.

Topolojik olarak kapalı olan bir X Banach uzayının Y lineer alt uzayı X uzayının normuna sahipse Y ’ de bir Banach uzayıdır.

Önerme 3.1.3 X bir yerel kompakt uzay ve $C_b(X)$ tüm sürekli $f : X \to F$ fonksiyonları öyle ki tüm $\varepsilon > 0$ için, $\{x \in X : |f(x)| \geq \varepsilon\}$ kompakt ise, $C_0(X)$, $C_b(X)$ uzayının kapalı alt uzayıdır ve bu nedenle bir Banach uzayıdır.

İspat. $C_0(X)$ 'in $C_b(X)$ ’te bir lineer manifold olduğu açıktır. Yalnızca $C_0(X)$ uzayının $C_b(X)$ uzayında kapalı olduğu gösterilecektir. $\{f_n\ ) \subseteq C_0(X)$ olsun ve $C_b(X)$ ’te $f_n \to f$ olduğunu varsayalım. $\varepsilon > 0$ ise, bir N tamsayısı vardır öyle ki $\|f_n - f\| < \varepsilon / 2$ dır. Yani tüm $n \geq N$ ve X ’te tüm x elemanları için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon / 2$ olur. $|f(x)| < \varepsilon$ ise, $n \geq N$ için

$$\varepsilon \leq |f(x) - f_n(x) + f_n(x)| \leq \varepsilon / 2 + |f_n(x)| \ ;$$

böylece $n \geq N$ için $|f_n(x)| \geq \varepsilon / 2$. Bu nedenle

$$\{\ x \in X : |f(x)| \geq \varepsilon\} \subseteq \{x \in X : |f_N(x)| \geq \varepsilon / 2\},$$

o halde $f \in C_0(X)$.

$C_0(X)$ uzayı *sonsuzda sıfıra giden* X uzayındaki sürekli fonksiyonların kümesidir. $X = \Re$ ise, $C_0(\Re)$, tüm sürekli $f : \Re \to \mathrm{F}$ fonksiyonlarıdır öyle ki $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$. X kompakt ise, $C_0(X) = C_b(X) = C(X)$ (Convay, 1990).

I herhangi bir küme ise, I ya diskrit topoloji verelim. Buradan I yerel kompakt olur. Aynı zamanda I ’da herhangi bir fonksiyon süreklidir. $C_B(Z)$ gösterimindense geleneksel olanı $I^{\infty}(I) = Z(Z)$ dır.Yani $I^{\infty}(I)$, tüm sınırlı $f : I \to F$ fonksiyonlarıdır ve

$$\|f\| = \sup\{|f(i)| : i \in I\}.$$

$C_0(I)$ tüm $f : I \to F$ fonksiyonlarından oluşur öyle ki her $\varepsilon > 0$ için,

$$\{i \in I : |f(i)| \geq \varepsilon\},$$

sonludur. $I = \aleph$ ise, bu uzaylar için alışılmış gösterim I^{∞} ve C_0'dır, I^{∞} tüm sınırlı skaler dizilerinden ve C_0, 0'a yakınsayan tüm dizilerden oluşur.

Örnek 3.1.2 (X,Ω,u) bir ölçüm uzayıdır ve $1 \le p \le \infty$ ise, $L^P(X,\Omega,u)$ bir Banach uzayıdır.

Örnek 3.1.3 I bir küme ve $1 \le p \le \infty$ olsun. $l^P(I)$ tüm $f : I \to F$ fonksiyonlarının kümesi öyle ki $\sum \{|f(i)|^p : i \in I\} < \infty$ olarak tanımlayalım ve

$$\|f\|_p = \left(\sum \{|f(i)|^p : i \in I\}\right)^{1/p}$$

tanımlayalım. O halde bir Banach uzayıdır. $I = \aleph$ ise, $l^p(\aleph) = l^p$.

$\Omega = I$ nın alt kümeleri ve Ω'daki her için, $u(\Delta) = \Delta$ sonlu iken Δ daki noktaların sayısı ve aksi durumda $u(\Delta) = \infty$ ise, $l^P(I) = L^p(X,\Omega,u)$ olur. Böylece (3.1.3)'deki ifade (3.1.2)'ifadesinin sonucudur.

Örnek 3.1.4 $n \ge 1$ ve $C^{(n)}[0,1] = f$ nin n sürekli türevleri mevcut olacak şekilde
$f : [0,1] \to F$ fonksiyonlarının derlemi olsun.

$$\|f\| = \sup_{0 \le k \le n}\{\sup\{|f^{(k)}(x)| : 0 \le x \le 1\ \}\ \}$$

tanımlayalım. O halde $C^{(n)}[0,1]$ bir Banach uzayıdır.

Örnek 3.1.5 $1 \le p \le \infty$ ve $n \ge 1$ ve $W_p^n[0,1] = f$ nin $n-1$ sürekli türevleri mevcut olacak şekilde $f : [0,1] \to F$ fonksiyonları olsun, $f^{(n-1)}$ mutlak sürekli ve $f^{(n)} \in L^p[0,1]$ dır. $W_p^n[0,1]$ uzayında f için

$$\|f\| = \sum_{k=0}^{n}\left[\int_0^1 |f^{(k)} : (x)|^p\, dx\right]^{1/p}$$

tanımlayalım. O halde $W_p^n[0,1]$ bir Banach uzayıdır.

Aşağıdaki önerme yarı-normlar konusunda yaralıdır.

Önerme 3.1.4 P, X 'te bir yarı-norm ise, X 'teki tüm x, y ler için $|p(x) - p(y)| \leq p(x - y)$ dır. $\|.\|$ bir norm ise, X 'teki tüm x, y ler için $\|\|x\| - \|y\|\| \leq \|x - y\|$ dir.

İspat. Şüphesiz, normlara ait eşitsizlik yarı-normlar için olanın bir sonucudur. $x, y \in X$ ise,

$$p(x) = p(x - y + y) \leq p(x - y) + p(y)$$

olduğunu görüyoruz, böylece $p(x) - p(y) \leq p(x - y)$. Benzer şekilde,

$$p(y) - p(x) \leq p(x - y).$$

Banach uzayları kategorisi için "izomorfizm" kavramı vardır.

Tanım 3.1.3 X ve Y normlu uzaylar ise, X ten Y ye bir örten lineer izometri varsa X ve Y *izometrik izomorfiktir.*

Banach uzayı kuramında *izomorfizm* terimi homeomorfizm olan $T : X \to Y$ lineer fonksiyonları için ayrılmıştır.

3.2. Normlu Uzaylarda Lineer Operatörler

Bu kesimde normlu uzaylardaki lineer operatörlerle ilgili birkaç bilgiyi ve örneği bir araya getiriyor. Banach uzayları ile ilgili operatörlerin daha tam incelenişi daha sonra devam edecektir. $B(X, Y)$, tüm sürekli $A : X \to Y$ lineer dönüşümlerini temsil etsin.

Önerme 3.2.1 X ve Y normlu uzaylar ve $A : X \to Y$ bir lineer dönüşüm ise, aşağıdaki ifadeler denktir:

(a) $A \in B(X, Y)$

(b) A , 0 ' da süreklidir.

(c) A bir noktada süreklidir.

(d) X 'te tüm x ' ler için, $\|Ax\| \leq c\|x\|$ olacak şekilde pozitif bir c sabiti vardır.

$A \in B(X, Y)$ ve

$$\|A\| = \sup\{\|Ax\| : \|x\| \leq 1\}$$

ise,

$$\begin{aligned} \|A\| &= \sup\{\|Ax\| : \|x\| = 1\} \\ &= \sup\{\ \|Ax\| / \|x\| : x \neq 0\} \\ &= \inf\{c > 0 : \|Ax\| \leq c\|x\| \ \ X' \text{teki } x \text{ elemanları için } \}. \end{aligned}$$

$\|A\|$ sayısına, A' nın *normu* denir ve toplama ve çarpma noktasal olarak tanımlanmışsa, $B(X,Y)$ bir normlu uzay olur. Y bir Banach uzayı ise $B(X,Y)$ Banach uzayıdır. Sürekli lineer bir operatöre *sınırlı lineer operatör* de denir.

Örnek 3.2.1 (X,Ω,u) bir σ-sonlu ölçüm uzayı ve $\phi\in L^{\infty}(X,\Omega,u)$ ise, $L^{p}(X,\Omega,u)$ uzayındaki tüm f' ler için $M_{\phi}f=\phi f$ ile

$$M_{\phi}:L^{p}(X,\Omega,u)\rightarrow L^{p}(X,\Omega,u), 1\leq p\leq\infty$$

tanımlayalım. O halde $M_{\phi}\in B(L^{p}(X,\Omega,u))$ ve $\|M_{\phi}\|=\|\phi\|_{\infty}$ dur.

Örnek 3.2.2 $(X,\Omega,u),K,c_1$ ve c_2 ifadeleri Hilbert uzaylarında ifade edildiği gibidir ve $1\leq p\leq\infty$ ise, $L^{p}(u)$'deki tüm f operatörler ve X' teki x'ler için

$$(Kf)(x)=\int k(x,y)f(y)d\mu(y)$$

ile tanımlı $K:L^{p}(u)\rightarrow L^{p}(u)L^{p}(u)$' de bir sınırlı operatördür ve

$$\|K\|\leq c_1^{1/p}c_2^{1/p},$$

dır. Ki burada $1/p+1/q=1$ dır.

Örnek 3.2.3 X ve Y kompakt uzaylar ve $\tau:Y\rightarrow X$ sürekli bir dönüşüm ise, $(Af)(y)=f(\tau(y))$ ile $A:C(X)\rightarrow C(Y)$ tanımlayalım. O halde

$$A\in B(C(X),C(Y)) \text{ ve } \|A\|=1 \text{dır.}$$

3.3. Sonlu-Boyutlu Normlu Uzaylar

Fonksiyonel analizde, bir kavramın sonlu boyutlu uzaylarda sahip olduğu anla-mını görmek her zaman kolaylık sağlar.

Teorem 3.3.1 X, F üzerinde sonlu-boyutlu vektör uzayı ise, X'teki herhangi iki norm denktir.

İspat. $\{\ell_1,...,\ell_d\}$, X için bir Hamel tabanı olsun. $x=\sum_{j=1}^{d}x_j\ell_j$ için,

$$\|x\|_{\infty}\equiv\max\{|x_j|:1\leq j\leq d\}$$

tanımlayalım. $\|.\|_\infty$ 'in bir norm olduğu kolayca görülebilir. $\|.\|$, X 'te herhangi bir norm olsun. $\|.\|_\infty$ ve $\|.\|$ normlarının denk oldukları gösterilecek. $x=\sum_{j=1}^{d} x_j \ell_j$ ise, $C=\sum_j \left|\ell_j\right|$ iken $\|x\| \leq \sum_j \left|x_j\right| \left\|\ell_j\right\| \leq C\|x\|_\infty$ 'dır. Diğer eşitsizliği göstermek üzere, τ, $\|.\|_\infty$ normu vasıtasıyla X uzayında tanımlı topoloji ve U, $\|.\|$ normu vasıtasıyla X 'te tanımlı topoloji olsun. $B=\{x\in X : \|x\|_\infty \leq 1\}$ olarak verilsin. İspatın ilk bölümü $\tau \supseteq U$ olduğunu gösterir. B, τ-kompakt ve $\tau \supseteq U$ olduğundan, B, U-kompakttır ve iki topolojinin B ile karşılıklı ilişkilendirilmeleri uyuşur. $A=\{x\in X : \|x\|_\infty < 1\}$ olsun. A, τ-açık olduğundan (B,U)'da açıktır. Buradan U 'da bir V kümesi vardır öyle ki $V \cap B = A$. Böylece $0\in V$ ve bir $r>0$ vardır öyle ki $\{x\in X : \|x\|_\infty < r\} \subseteq V$.

Buradan

$$\|x\| < r \quad \text{ve} \ \|x\|_\infty \leq 1 \quad \|x\|_\infty < 1 \qquad (6)$$

demektir. Şimdi de $\|x\| < r$ eşitsizliğinin $\|x\|_\infty \leq 1$ eşitsizliğini verdiği şeklindeki iddiayı ele alalım.

$\|x\| < r$ olsun, $x=\sum_j x_j \ell_j$ diyelim ve $\alpha = \|x\|_\infty$ dır. Böylece $\|x/\alpha\|_\infty = 1$ ve $x/a \in B$ dır. $\alpha \geq 1$ ise, $\|x/\alpha\| < r/\alpha \leq r$ ve bu durumda (6)'dan $\|x/\alpha\|_\infty < 1$, bu ise bir çelişkidir. Böylece $\|x\|_\infty = \alpha < 1$ ve buradan iddia sağlanmıştır.

Lemma 3.1.1'den, tüm x' ler için $\|x\|_\infty < r^{-1}\|x\|$ ve ispat tamamlanmış olur.

Önerme 3.3.2 X bir normlu uzay ve M, X 'te sonlu boyutlu bir lineer manifold ise, M kapalıdır.

İspat. $x_0 \in X \setminus M$ ve $M_1 = M$ ve $\{x_0\}$ kümelerinin lineer doğurucusu olsun. M 'de x ve F 'de α_0 için

$$\|x+\alpha_0 x_0\|_1 = \|x\| + |\alpha_0|$$

ile M_1'de $\|.\|_1$ normunu tanımlayalım. $\|.\|_1$'in M_1'de bir norm olduğunu göstermek alıştırma olarak bırakılmıştır. Teorem 3.3.1 ve Önerme 3.1.2'e göre , c *ve* C sabitleri vardır öyle ki M 'deki tüm x'ler ve F'deki tüm α_0 için

$$c\|x+\alpha_0 x_0\|_1 \leq \|x\| + |\alpha_0| \leq C\|x+\alpha_0 x_0\|.$$

Buradan M 'deki tüm x 'ler için,

$$\|x_0 - x\| \geq C^{-1}(\|x\|+1) \geq C^{-1}.$$

Böylece

$$0 < C^{-1} \leq \inf\{\|x_0 - x\| : x \in M\} \equiv dist(x_0, M)$$

Yani, M 'de bulunmayan her x_0 noktası M 'den pozitif bir uzaklıktadır. Buradan M kapalıdır.

Önerme 3.3.3 X bir sonlu-boyutlu normlu uzay ve Y herhangi bir normlu uzay $T : X \to Y$ bir lineer dönüşüm ise, T süreklidir.

İspat. X 'teki tüm normlar denk olduklarından ve $T : X \to Y$ herhangi bir norma göre sürekli iken X 'teki bu norma denk bir norm olduğundan,

$$\left\|\sum_{j=1}^{d} \xi_j e_j\right\| = \max\{|\xi_j| : 1 \leq j \leq d\}$$

olduğunu varsayabiliriz ki burada $\{e_j\}$, X için bir Hamel tabanıdır. Böylece, $x = \sum \xi_j e_j$ için,

$$\left\|\sum_j \xi_j Te_j\right\| \leq \sum_j |\xi_j| \|Te_j\| \leq C\|x\|$$

dır. Ki burada $C = \sum \|Te_j\|$. dır. Önerme 3.2.1'den dolayı T süreklidir.

3.4. Normlu Uzayların Bölümleri ve Çarpımları

Tanım 3.4.1 X bir normlu uzay ve M, X 'te bir lineer manifold ve $Q : X \to X/M$ $Qx : x + M$ doğal dönüşümü olsun. X/M 'yi bir normlu uzay kabul etmek böylece

$$\|x + M\| = \inf\{\|x + y\| : y \in M\} \quad (7)$$

tanımlamak istiyoruz. M bir lineer uzay olduğundan

$$\|x + M\| = \inf\{\|x + y\| : y \in M\} = dist(x, M)$$

X 'ten M 'ye olan (7) uzaklığının X/M 'de bir yarı-norm tanımladığı açıktır. Ancak M, X 'te kapalı ise, (7) norm tanımlar. Bununla birlikte, M kapalı değilse, (7) niceliği norm tanımlamaz.

Teorem 3.4.1 $M \leq X$ ve $\|x + M\|$ (7)'deki gibi tanımlanmışsa, $\|.\|$, X/M 'de bir normdur. Aynı zamanda:

(a) X 'teki tüm x 'ler için $\|Q(x)\| \le \|x\|$ ve Q süreklidir.

(b) X bir Banach uzayı ise, X/M de Banach uzayıdır.

(c) X/M nin bir W alt kümesi norma göre göreli açıktır ancak ve ancak $Q^{-1}(W)$, X 'te açıktır.

(d) U X 'te açıksa, Q (U) X/M 'de açıktır.

İspat. (7)'nin X/M 'de bir norm tanımladığı kolayca görülebilir.

(a)'yı göstermek için, $0 \in M$ olduğundan $\|Q(x)\| = \|x+M\| \le \|x\|$; Q bu nedenle (7)'den süreklidir.

(b) $\{x_n + M\}$ X/M 'de Cauchy dizisi olsun. Bir $\{x_{n_k} + M\}$ alt dizisi vardır öyle ki

$$\left\|\left(x_{n_k} + M\right) - \left(x_{n_k} + M\right)\right\| = \left\|x_{n_k} - x_{n_k} + M\right\| < 2^{-k} \text{.}$$

$y_1 = 0$ olsun. M 'de y_2 seçelim öyle ki

$$\left\|x_{n_1} - x_{n_2} + y_2\right\| \le \left\|x_{n_k} - x_{n_k} + M\right\| + 2^{-1} < 2.2^{-1}$$

M 'de y_3 seçelim öyle ki

$$\left\|\left(x_{n_2} + y_2\right) - \left(x_{n_3} + y_3\right)\right\| \le \left\|x_{n_2} - x_{n_3} + M\right\| < 2^{-2} < 2.2^{-2}$$

Bu şekilde devam edildiğinde , M 'de $\{y_k\}$ dizisi vardır öyle ki

$$\left\|\left(x_{n_k} + y_k\right) - \left(x_{n_{k+1}} + y_{k+1}\right)\right\| < 2.2^{-k}$$

dır.Böylece $\{x_{n_k} + y_k\}$ X 'te bir Cauchy dizisidir . X tam olduğundan, X 'te bir x_0 vardır öyle ki X 'te

$$x_{n_k} + y_k \rightarrow x_0$$

dır. (a)'dan dolayı,

$$x_{n_k} + M = Q\left(x_{n_k} + y_k\right) \rightarrow Qx_0 = x_0 + M$$

$\{x_n + M\}$ Cauchy dizisi olduğundan $x_n + M \rightarrow x_0 + M$ ve X/M tamdır.

(c) W, X/M 'de açıksa, $Q^{-1}(W)$, X 'te açıktır çünkü Q süreklidir. Şimdi $W \subseteq X/M$ ve $Q^{-1}(W)$ 'in X 'te açık olduğunu varsayalım. $r > 0$ ve $B_r \equiv \{x \in X : \|x\| < r\}$ diyelim. $Q(B_r) = \{x + m : \|x + M\| < r\}$ olduğu gösterilecektir. Gerçekten, $\|x\| < r$

ise $\|x+M\| \le \|x\| < r$. Öte yandan, $\|x+M\| < r$ ise M 'de bir y vardır öyle ki $\|x+y\| < r$. Böylece

$$x + M = Q(x + y) \in Q(B_r)$$

dır. $x_0 + M \in W$ ise, $x_0 \in Q^{-1}(W)$ dir. $Q^{-1}(W)$ açık olduğundan bir $r > 0$ vardır öyle ki

$$x_0 + B_r = \{x : \|x - x_0\| < r\} \subseteq Q^{-1}(W)$$

dır. Önceki iddia

$$W = QQ^{-1}(W) \supseteq Q(x_0 + B_r) = \{x + M : \|x - x_0 + M\| < r\}$$

olduğu anlamına gelir. Buradan W açıktır.

(d) U, X 'te açık ise,

$$QQ^{-1}(U) = U + M \equiv \{u + y : u \in U, y \in M\} = \cup\{U + y : y \in m\}$$

denkliği vardır. Her $U + y$ açıktır, bu nedenle $Q^{-1}(Q(U))$ X 'te açıktır. (c)' den $Q(U)$, X / M 'de açıktır.

Q açık dönüşüm olduğundan (d)' de , Q 'nun kapalı dönüşüm olmasına varılmaz.

Önerme 3.4.1 X bir normlu uzay ise, $M \le X$ ve N, X 'in sonlu boyutlu alt uzayı ise, $M + N$, X 'in kapalı alt uzayıdır.

İspat. X / M ve $Q : \chi \to X / M$ bölüm dönüşümünü dikkate alalım.

$$\dim Q(N) \le \dim N < \infty$$

olduğundan, $Q(N)$, X / M 'de kapalıdır; Q sürekli olduğundan $Q^{-1}Q(N)$, X uzayında kapalı olur ancak $Q^{-1}Q(N) = M + N$

dır.

Şimdi normlu uzayların çarpımı ya da doğrudan toplamına bakalım. Burada bir zorluk vardır çünkü Hilbert uzaylarına benzemeksizin, ilerlemek için hiçbir doğal yol bulunmamaktadır. $\{X_i : i \in I\}$'nin normlu uzayların bir derlemi olduğunu varsayalım. O halde lineer işlemler koordinatsal tanımlanmışsa $\prod\{X_i : i \in I\}$ bir vektör uzayıdır. Düşünce, bu çarpımın lineer alt uzayında bir norm ifade etmektir.

$\|.\|$ her X_i üzerindeki normu göstersin. $1 \le p < \infty$ için,

$$\oplus_p X_i \equiv \left\{ x \in \prod_i X_i : \|x\| \equiv \left[\sum_i \|x(i)\|^p \right]^{1/p} < \infty \right\}$$

tanımlayalım.

$$\oplus_\infty X_i \equiv \left\{ x \in \prod_i X_i : \|x\| \equiv \sup_i \|x(i)\| < \infty \right\}$$

tanımlayalım. $\{X_1, X_2, ...\}$ normlu uzay dizisi ise,

$$\oplus_0 X_n \equiv \left\{ x \in \prod_{n=1}^{\infty} X_n : \|x(n)\| \to 0 \right\}$$

tanımlayalım; $\oplus_0 X_n$ alt uzay olarak $\oplus_\infty X_n$ uzayının sahip olduğu normu verelim.

Önerme 3.4.2 $\{X_i : i \in I\}$ normlu uzayların bir derlemi ve

$X = \oplus_\infty X_i, 1 \leq p \leq \infty$ olsun.

(a) X bir normlu uzay ve X 'teki her x için ,

$$\|p_i(x)\| \leq \|x\|$$

sağlayan $P_i : X \to X_i$ izdüşümü sürekli lineer bir dönüşümdür.

(b) X bir Banach uzayıdır ancak ve ancak her X_i Banach uzayı ise.

(c) Her P_i izdüşümü X 'in X_i üzerine açık dönüşümüdür. Benzer bir sonuç, $\oplus_0 X_n$ için sağlanır.

4. HAHN-BANACH TEOREMİ VE BAZI SONUÇLARI

Bu bölümde lineer fonksiyoneller, Hahn Banach teoreminin bazı sonuçları ve Banach limitine uygulamalar ele alınmıştır.

4.1. Lineer Fonksiyoneller

X **,** F üzerinde vektör uzayı olsun. X 'te bir *hiperdüzlem* X 'te bir M lineer manifoldudur öyle ki $\dim(X/M)=1. f:X\to F$ lineer fonksiyonel ve $j\neq 0$ ise, $\ker f$ bir hiperdüzlemdir. Gerçekten , f , $X/\ker f$ ile F arasında izomorfizm oluşturur. Tersine, M hiperdüzlem ise, $Q:X\to X/M$ doğal dönüşümdür ve $T:X/M\to F$ bir izomorfizmdir. O halde $F\equiv T\circ Q$ X 'te lineer fonksiyoneldir ve $\ker f=M$ dir.
f ve g 'nin $\ker f=\ker g$ olacak şekilde X 'te lineer fonksiyoneller olduklarını varsayalım, $f(x_0)=1$ olacak şekilde $x_0\in X$ olsun; böylece
$g(x_0)\neq 0. x\in X$ ve $a=f(x)$ ise, $x-ax_0\in\ker f=\ker g$
dır. Bu nedenle, $0=g(x)-ag(x_0)$ yani $g(x)=\big(g(x_0)\big)f(x)$ dır. Böylece bir β skaleri için $g=\beta f$ dir. Bu aşağıdaki gibi özetlenebilir.

Önerme 4.1.1 X 'te bir lineer manifold hiperdüzlemdir ancak ve ancak bu lineer manifold sıfırdan farklı bir lineer bir fonksiyonelin çekirdeği ise. İki lineer fonksiyonelin aynı çekirdeği vardır ancak ve ancak biri diğerinin sıfırdan farklı katı ise.

Normlu uzaylarda hiperdüzlemler iki kategoriden birinde bulunurlar.

Önerme 4.1.2 X bir normlu uzay ve M , X 'te bir hiperdüzlem ise, ya M kapalıdır ya da M yoğundur**.**
İspat. M 'nin kapanışı olarak clM 'yi ele alalım. Önerme 3.1.1'den , clM X 'te bir lineer manifoldudur. $M\subseteq clM$ ve $\dim X/M=1$ olduğundan ya $clM=M$ ya da $clM=X$ dır.
$X=c_0$ ve $f:X\to F$ $f(a_1,a_2,...)=a_1$ ile tanımlanmışsa,

$$\ker f=\{(a_n)\in c_0 : a_1=0\},$$

c_0'da kapalıdır. Yoğun bir hiperdüzlem örneği elde etmek için $X = c_0$ ve e_n, c_0'ın elemanı olsun öyle ki $k \neq n$ ve $e_n(n) = 1$ ise $e_n(k) = 0$'dır.(c_0'ı N'de fonksiyonların bir sınıfı olarak düşünmek en iyisidir.) Tüm n için $x_0(n) = 1/n$; böylece $x_0 \in c_0$ ve $\{x_0, e_1, e_2, ...\}$ c_0 uzayında lineer bağımsızdır. $B = \{x_0, e_1, e_2, ...\}$'i içeren c_0'da Hamel tabanı olsun.

$$B = \{x_0, e_1, e_2, ...\} \cup \{b_i i \in I\}, b_i \neq x_0$$

ya da herhangi bir i ya da n için e_n diyelim.

$$f\left(a_0 x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n + \sum_i \beta_i b_i\right) = a_0$$

ile $f : c_0 \to F$ tanımlayalım.(Bir önceki ifadede en çok sonlu sayıda a_n ve β_i sıfırdan farklıdır).Tüm $n \geq 1$ için $e_n \in \ker f$ olduğundan, $\ker f$ yoğundur ancak açıktır ki $\ker f \neq c_0$. Hiperdüzlemler için mevcut olan dikotomi (ikilik) lineer fonksiyoneller için dikotomi halinde ifade edilmelidir.

Teorem 4.1.1 X bir normlu uzay ve $f : X \to \mathrm{F}$ bir lineer fonksiyonel ise, f süreklidir ancak ve ancak $\ker f$ kapalıdır.

İspat. f sürekli ise, $\ker f = f^{-1}(\{0\})$ ve bu nedenle $\ker f$ kapalı olmalı. Şimdi $\ker f$' nin kapalı olduğunu varsayalım ve $Q : X \to X/\ker f$ doğal dönüşüm olsun. Teorem 3.4.1' den, Q süreklidir. $T : X/\ker f \to F$ bir izomorfizm olsun; Önerme 3.3.3'den T süreklidir. Böylece,

$$g = T \circ Q : X \to F$$

ise, g süreklidir ve $\ker f = \ker g$ .Buradan Önerme 4.1.1'den F *'de* bir a için $f = ag$.

$f : X \to F$ bir lineer fonksiyonel ise, f lineer dönüşümdür ve bu nedenle Önerme 3.2.1 uygulanabilir. Sürekli lineer fonksiyonellere *sınırlı lineer* fonksiyoneller de denir ve

$$\|f\| = \sup\{\|f(x)\| : \|x\| \leq 1\}.$$

(7)'de $\|f\|$ için verilen diğer formüller burada da geçerlidir. $X^* \equiv X$ 'teki tüm sınırlı lineer fonksiyonellerin sınıfı olsun. $f, g \in X^*$ ve $a \in F$ ise,

$$(af + g)(x) = af(x) + g)(x)$$

tanımlayalım; X^*'a X 'in *dual uzayı* denir. $X^* = B(X, F)$ olduğunu görüyoruz.

X^* uzayı için *norm topolojisi* $\|f\| = \sup\{\|f(x)\| : \|x\| \le 1\}$ normuyla tanımlanır. X^* uzayı için noktasal yakınsaklık topolojisine w^**-topolojisi* adı verilir. X^* uzayının bir F alt kümesine w^**-sınırlı* denir ancak ve ancak X'in her x üyesi için F kümesinde f fonksiyoneli vasıtasıyla verilen tüm $f(x)$ değerleri kümesi sınırlıdır. X uzayındaki her lineer fonksiyon sürekli değilse X^* uzayı w^**-topolojisine göre tam değildir. Noktaları ayırt etmek için* X uzayında yeterli sürekli lineer fonksiyonellerin var olduğunu varsa-yalım.—bu olgu Hahn-Banach teoreminin bir sonucudur (Kelley, 1955 ve Banach, 1955)

Önerme 4.1.3 X bir normlu uzay ve X^* bir Banach uzayıdır.

İspat. X^*'ın bir normlu uzay olduğu kolayca görülebilir. X^*'ın tam olduğunu göstermek için, $B = \{x \in X : \|x\| \le 1\}$ alalım. $f \in X^*$ ise, $\rho(f)(x) = f(x)$ ile $\rho(f) : B \to \mathrm{F}$ tanımlayalım; yani $\rho(f)$ f'nin B'ye sınırlanışıdır. $\rho : X^* \to C_b(B)$'nin bir lineer izometri olduğunu görüyoruz. Böylece X^*'ın tam olduğunu göstermek için, (3.1.1)'in ispatı gereğince $C_b(B)$ tam olduğundan $\rho(X^*)$'in kapalı olduğunu göstermekte yeterlidir. $\{f_n\} \subseteq X^*$ olsun ve $n \to \infty$ iken $\|\rho(f_n) - g\| \to 0$ olacak şekilde $g \in C_b(B)$ olduğunu varsayalım. $\alpha, \beta \in \mathrm{F}$, $\alpha, \beta \ne 0$ öyle ki $\alpha x, \beta x \in B$ ise,

$$\alpha^{-1} g(\alpha x) = \lim \alpha^{-1} f_n(\alpha x) = \lim \beta^{-1} f_n(\beta x) = \beta^{-1} g(\beta x).$$

$\alpha x \in B$ olacak şekilde herhangi bir $\alpha \ne 0$ için $f(x) = \alpha^{-1} g(\alpha x)$ alarak $f : X \to \mathrm{F}$ tanım-layalım. $f \in X^*$ ve $\rho(f) = g$ olduğu kolayca görülebilir.

Şu belirtilmelidir ki bir önceki önermede X'in tam olduğu varsayılmamıştır. Gerçekten, X bir normlu uzay ve $\hat{X}$ tamlanışı ise , X^* ve $\hat{X}^*$ izometrik olarak izomorfiktir.

Teorem 4.1.2 (Convay, 1990) (X, Ω, μ) bir ölçüm uzayı ve $1 < p < \infty$ olsun. $1/p + 1/q = 1$, $g \in L^q(X, \Omega, \mu)$ ise,

$$F_g(f) = \int fg d\mu$$

ile $F_g : L^p(\mu) \to \mathrm{F}$ tanımlayalım. O halde $F_g \in L^p(\mu)^*$ ve $g \to F_g$ dönüşümü $L^q(\mu)$'den $L^p(\mu)^*$'a izometrik izomorfizm tanımlar.

Teorem 4.1.3 (Convay, 1990). (X, Ω, μ) σ**-**sonlu ölçüm uzayı ve $g \in L^\infty(X, \Omega, \mu)$ ise,

$$F_g(f) = \int fg d\mu$$

ile $F_g : L^1(\mu) \to \mathrm{F}$ tanımlayalım. O halde $F_g \in L^1(\mu)^*$ ve $g \to F_g$ dönüşümü $L^\infty(\mu)$'den $L^1(\mu)^*$'a izometrik izomorfizm tanımlar.

Teorem 4.1.2'den $p = 2$ iken (4.1.2)'te kompleks eşleniğin bulunmaması nedeniyle (4.1.2) ve (2.2.4) arasında biraz fark olduğunu görüyoruz. Aynı zamanda, (4.1.3)' ün, ölçüm uzayı σ-sonlu varsayılmadığında yanlış olduğunu görürüz.

X yerel kompakt uzay ise, $M(X)$ total varyasyon normlu X'teki tüm F-değerli regüler Borel ölçümlerinin uzayını gösterir.

Teorem 4.1.4 (Riesz Temsil Teoremi) (Convay, 1990). X yerel kompakt uzay ve $\mu \in M(X)$ ise,

$$F_\mu(f) = \int f d\mu$$

ile $F_\mu : C_0(X) \to \mathrm{F}$ tanımlayalım. O halde $F_\mu \in C_0(X)^*$ ve $\mu \to F_\mu$ dönüşümü $M(X)$'ten $C_0(X)^*$'e izometrik izomorfizmdir. İfade edilmesi gereken bu teoremlerin özel durumları vardır.

Örnek 4.1.1 c_0**'ın** duali , l^1'e izometrik izomorfiktir. Gerçekten, $\aleph$'ye diskrit topoloji verildiğinde ve $l^1 = M(\aleph)$ ise $c_0 = C_0(\aleph)$.

Örnek 4.1.2 l^1'in duali l^∞'a izometrik izomorfiktir. Gerçekten $l^1 = L^1(\aleph, 2^\aleph, \mu)$ ki burada $\mu(\Delta) = \Delta$'daki noktaların sayısı. Aynı zamanda, $l^\infty = L^\infty(\aleph, 2^\aleph, \mu)$.

Örnek 4.1.3 $1 < p < \infty$ ise l^p'nin duali l^q'dur ki burada $1/p + 1/q = 1$ dır. $L^\infty(X, \Omega, \mu)$**'nin** duali nedir? İki olası temsil vardır. Bunlardan biri olarak $L^\infty(X, \Omega, \mu)^*$ uzayını μ'ye göre "mutlak sürekli" olan ve sonlu total varyasyona sahip Ω'da tanımlı sonlu toplanabilir ölçüm uzayı ile özdeşleştirebiliriz (Dunford, N., Schwartz, J., 1958). Diğer bir temsil, bir kompakt Z uzayı elde etmek öyle ki $L^\infty(X, \Omega, \mu)$ $C(Z)$**'ye** izometrik izomorfiktir ve Riesz Temsil Teoremi'ni kullanmaktır.

$M(X)$'in duali nedir? Bunun için, $\mu \ll \nu$ ise; $F(\mu) = F(\nu)$ h.h.h. $[\mu]$ olacak şekilde $\prod\{L^\infty(\mu) : \mu \in M(X)\}$'deki tüm F'lerin kümesi olarak $L^\infty(M(X))$' i tanımla-yalım. Bu $L^\infty(\mu)$ uzaylarının ters limitidir, μ, $M(X)$'te dir.

Lemma 4.1.1 $F \in L^\infty(M(X))$ ise,

$$\|F\| = \sup_\mu \|F(\mu)\|_\infty < \infty .$$

İspat. $\|F\| = \infty$, $M(X)$'te bir $\{\mu_n\}$ dizisidir öyle ki $\|F(\mu_n)\|_\infty \geq n$ olur. $\mu = \sum_{n=1}^\infty 2^{-n} |\mu_n| / \|\mu_n\|$ olsun. O halde tüm n'ler için $\mu_n \ll \nu$ bu nedenle her n için $F(\mu_n) = F(\mu)$ h.h.h. $[\mu_n]$ .Buradan her n için $\|F(\mu)\|_\infty \geq \|F(\mu_n)\|_\infty \geq n$ çelişki.

Teorem 4.1.5 X yerel kompakt uzay ve $F \in L^\infty(M(X))$ ise,

$$\Phi_F(\mu) = \int F(\mu) d\mu$$

ile $\Phi_F : M(X) \to \mathrm{F}$ tanımlayalım. O halde $\Phi_F \in M(X)^*$ ve $\mathrm{F} \mapsto \Phi_F$ dönüşümü $L^\infty(M(X))$'in $M(X)^*$'a izometrik izomorfizmidir.

İspat. Φ_F'nin lineer olduğunu görmek kolaydır. Aynı zamanda,

$$|\Phi_F(\mu)| \leq \int |F(\mu)| d|\mu| \leq \|F(\mu)\|_\infty \|\mu\| \leq \|F\| \|\mu\|$$

.

Böylece $\Phi_F \in M(X)^*$ ve $\|\Phi_F\| \leq \|F\|$. Şimdi Φ'yi $M(X)^*$'te sabitleyelim. $\mu \in M(X)$ ve $f \in L^1(|\mu|)$ ise, $\nu = f\mu \in M(X)$. (Yani her Δ Borel kümesi için $\|\nu(\Delta)\| = \int_\Delta f d\mu$).Aynı zamanda $\|\nu(\Delta)\| = \int |f| d|\mu|$. Gerçekten, Radon-Nikodym Teoremi $L^1(|\mu|)$ ile $\{\eta \in M(X) : \eta \ll |\mu|\}$ kümesinin özdeşleşimi (izometrik olarak izomorfik) olarak verilebilir. Böylece $f \mapsto \Phi(f\mu)$ dönüşümü $L^1(|\mu|)$ uzayında lineer fonksiyoneldir ve $|\Phi(f\mu)| \leq \|\Phi\| \int |f| d|\mu|$. Buradan $L^1(|\mu|)$ uzayındaki her f için $\Phi(f\mu) = \iint fF(\mu) d\mu$ olacak şekilde $L^\infty(\mu)$ uzayında bir $F(\mu)$ vardır.(μ ya da $|\mu|$ nün kullanımı konusunda biraz kayıtsız kaldık ancak söylenen şey kesinlikle doğrudur. Özellikle, $f = 1$ almak $\Phi(\mu) = \int F(\mu) d\mu$

integralini verir. $F \in L^{\infty}(M(X))$ olduğu gösterilmelidir; bu durumda $\Phi = \Phi_F$ ve $\|\Phi_F\| \geq \|F\|_{\infty}$ olduğu sonucuna varırız.

$F \in L^{\infty}(M(X))$ olduğunu göstermek için , μ ve ν , $\nu \ll \mu$ olacak şekilde ölçümler olsun. Radon-Nikodym Teorem'inden, $L^1(|\mu|)$'de bir f vardır öyle ki $\nu = f\mu$. Buradan, $g \in L^1(|\nu|)$ ise, $gf \in L^1(|\mu|)$ ve $\int g d\nu = \int gf d\mu$ .Böylece,

$$\int g|F(\nu)|d\nu = \Phi(g\nu) = \Phi(gf\mu) = \int gfF(\mu)d\mu = \int gF(\mu)d\nu .$$

Böylece $F(\nu) = F(\mu)$ h.h.h.$[\nu]$ ve $F \in L^{\infty}(M(X))$.

4.2. Hahn-Banach Teoremi

Hahn-Banach Teoremi matematikte en önemli sonuçlardan biridir. Öylesine sık kullanılır ki fonksiyonel analizin köşe taşı sayılabilir.

Tanım 4.2.1 X bir vektör uzayı ise, bir *yarı-lineer fonksiyonel* bir $q : X \rightarrow \Re$ fonksiyonudur öyle ki

(a) X 'teki tüm x, y için $q(x+y) \leq q(x) + q(y)$;

(b) X 'te x ve $\alpha \geq 0$ için $q(\alpha x) = \alpha q(x)$.

Her yarı-normun yarı-lineer fonksiyonel olduğunu ancak tersinin doğru olmadığını görüyoruz. Gerçekten, yarı-lineer fonksiyonelin negatif değerler alabileceği ve tanımdaki (b) nin yalnızca $\alpha \geq 0$ sağlandığı görülebilir.

Teorem 4.2.1 (Hahn-Banach Teoremi) X , $\Re$ üzerinde bir vektör uzayı ve q, X 'te yarı-lineer fonksiyonel olsun. M , X 'te bir lineer manifold ve $f : M \rightarrow \Re$ M 'deki tüm x'ler için $f(x) \leq q(x)$ olacak şekilde bir lineer fonksiyonel ise, X 'teki tüm x'ler için $F|M = f$ ve $F(x) \leq q(x)$ olacak şekilde bir $f : X \rightarrow \Re$ lineer fonksiyoneli vardır.

Teoremin özünün, genişlemenin mevcut olmasının olmadığını ancak genişlemenin q vasıtasıyla etkin kılınıp bulunabileceğini görüyoruz.

Bir genişleme bulmak üzere, $\{e_i\}$ M için Hamel tabanı ve olsun. $\{y_i\}$ X 'te vektörler olsun öyle ki $\{e_i\} \cup \{y_i\}$ X için bir Hamel tabanıdır. Şimdi

$$F\left(\sum_i a_i e_i + \sum_j \beta_j e_j\right) = \sum_i a_i f(e_i) = f\left(\sum_i a_i e_i\right)$$

ile $F : x \to \Re$ tanımlayalım. Bu f lineer fonksiyonelini genişletir. $\{y_i\}$ herhangi bir reel sayı sınıfı ise,

$$F\left(\sum_i a_i e_i + \sum_j \beta_j e_j\right) = \left(\sum_i a_i e_i\right) + \sum_j \beta_j y_j$$

de f lineer fonksiyonelinin genişletimidir. Öte yandan , f lineer fonksiyonelinin herhangi bir genişletişi bu biçime sahiptir. Zorluk q vasıtasıyla etkin kılınan bu genişletişlerden birini bulmamız gerektiğidir.

Teoremi ispatlamadan önce, bazı sonuçlarını görelim. İlki teoremin kompleks uzaylara genişletişidir. Bunun için bir lemmaya gerek vardır. X , C üzerinde bir vektör uzayı ise, aynı zamanda $\Re$ üzerinde bir vektör uzayıdır. Aynı zamanda, $f : x \to C$
C-lineer ise, $\operatorname{Re} f : x \to \Re$, $\Re$-lineerdir. Aşağıdaki lemma bunun tersidir.

Lemma 4.2.1 X , C üzerinde bir vektör uzayı olsun.

(a) $f : X \to \Re$ $\Re$-lineer fonksiyonel ise, $\tilde{f}(x) = f(x) - if(ix)$ bir C-lineer fonksiyoneldir ve $f = \operatorname{Re} \tilde{f}$.

(b) $g : X \to C$ C-lineer $f = \operatorname{Re} g$ ve $\tilde{f}$ (a)'daki gibi tanımlanmışsa, $\tilde{f} = g$.

(c) p X'te bir yarı-norm ve f ile $\tilde{f}$ (a)'daki gibi tanımlanmışsa, tüm x'ler için $|f(x)| \le p(x)$ ancak ve ancak tüm x'ler için $|\tilde{f}(x)| \le p(x)$ ise.

(d) X bir normlu uzay ve f ile $\tilde{f}$ (a)'daki gibi tanımlanmışsa, $\|f\| = \|\tilde{f}\|$.

İspat. (a) ve (b)'nin ispatı açıktır.

(c)'yi ispatlamak için,

$$|\tilde{f}(x)| \le p(x)$$

olduğunu varsayalım. O halde, $f(x) = \operatorname{Re} \tilde{f}(x) \le |\tilde{f}(x)| \le p(x)$.

Aynı zamanda,

$$-f(-x) = \operatorname{Re} \tilde{f}(-x) \le |\tilde{f}(-x)| \le p(x) .$$

Buradan, $|f(x)| \le p(x)$.Şimdi $|f(x)| \le p(x)$ olduğunu varsayalım. θ'ya

$$\tilde{f}(x) = e^{i\theta} |\tilde{f}(x)|$$

olacak şekilde seçelim. Buradan,

$$|\tilde{f}(x)| = \tilde{f}\left(e^{-i\theta} x\right) = \operatorname{Re} \tilde{f}\left(e^{-i\theta} x\right) = f\left(e^{-i\theta} x\right) \le p\left(e^{-i\theta} x\right) = p(x)$$

(d) kısmı (c)'nin kolay bir uygulamasıdır.

Sonuç 4.2.1 X bir vektör uzayı, M, X'te bir lineer manifold ve $p : X \to [0,\infty)$ bir yarı-norm olsun. $f : M \to F$, M uzayındaki tüm x vektörleri için $|f(x)| \le p(x)$ olacak şekilde bir lineer fonksiyonel ise, X'teki tüm x'ler için $F|M = f$ ve $|f(x)| \le p(x)$ olacak şekilde bir $F : X \to F$ lineer fonksiyoneli vardır.

İspat. 1. Durum : $\mathrm{F} = \Re$. M'deki x için $f(x) \le |f(x)| \le p(x)$ olduğunu görüyoruz. Teorem 4.2.1'den dolayı tüm x'ler için $f(x) \le p(x)$ olacak şekilde f nin bir $f : X \to R$ genişletişi vardır. Buradan $-F(x) = F(-x) \le p(-x) = p(x)$. Böylece $|F| \le p$.

2. Durum. $\mathrm{F} = \mathrm{C}$. $f_1 = \mathrm{Re}\, f$ olsun. Lemma 4.2.1, (c)'den , $|f_1| \le p$. 1.Durumdan, bir $\Re$-lineer $F_1 : X \to R$ fonksiyoneli vardır öyle ki $F_1|M = f_1$ ve $|F_1| \le p$. X'teki tüm x'ler için $F(x)F_1(x) - iF_1(ix)$ olsun. Lemma 4.2.1, (c)'den, $|F| \le p$. Açıktır ki $F|M = f$ dır.

X'in bir kompleks Banach uzayı, Y'nin de X uzayının reel bir alt uzayı olduğu durum dikkat çekicidir zira bu durumda, genelde Hahn-Banach teoremi sağlanmaktadır; Sonuç 4.2.1 uyarınca $M = \Re$ alındığında teoremin sağlandığı görülür (Musayev, 2000).

Bu sonuçlar ışığında, her kompleks lineer X uzayı bir reel normlu lineer uzay olarak da görülebilir ve her ℓ kompleks fonksiyonelinin reel kısmı bir u reel fonksiyonelidir. $\ell(x) = u(x) + iv(x)$ eşitliği

$$u(ix) + iv(ix) = \ell(ix) = i\ell(x) = -v(x) + iu(x),$$

sonucunu verdiğinden $\ell(x) = u(x) - iu(ix)$ elde ederiz. Böylece $\ell \leftrightarrow u$ karşılıklı dönüşümleri bire-birdir. Öte yandan, $\|\ell\| = \|u\|$ dır. $\ell_0 : X_0 \to \Re$ lineer formu X uzayının X_0 alt uzayında tanımlansın. Bu durumda ℓ_0'dan u_0'a geçip u_0'dan u'ya genişlemek ve u'dan ℓ'ye geri dönmek Hahn-Banach teoreminin kompleks durumda ispatlar: X_0, X uzayının bir alt uzayı ise, her $\ell_0 \in X^*$ fonksiyoneli norm-koruyan bir $\ell \in X^*$ genişletişine sahiptir.

Bu sonuç Murray (1936), Bohnenblust, Sobczyk (1938) ve Sukhomlinov (1938)'e atfedilir. Bununla birlikte yukarıda elde ettiğimiz

$$\ell(x) = u(x) - iu(ix)$$

formülü zaten Löwig (1934) tarafından keşfedilmiştir.

Sonuç 4.2.2 X bir normlu uzay , M , X 'te bir lineer manifold ve $f : M \to F$ sınırlı lineer bir fonksiyonel ise, X^* 'da bir F vardır öyle ki $F|M = f$ ve $\|F\| = \|f\|$'dır.

İspat. $p(x) = \|f\|\|x\|$ alarak Sonuç 4.2.1 kullanıldığında iddia doğrulanır.

Sonuç 4.2.3 X bir normlu uzay, $\{x_1, x_2, ..., x_d\}$ X 'in lineer bağımsız alt kümesi ve $a_1, a_2, ..., a_d$ keyfi skalerler ise, X^* 'da bir f vardır öyle ki $1 \leq j \leq d$ için $f(x_j) = a_j$ dır.

İspat. $M = x_1, ..., x_d$ nin lineer genişletişi olsun ve $g\left(\sum_j \beta_j x_j\right) = \sum_j \beta_j \alpha_j$ ile $g : M \to F$ 'yi tanımlayalım. Bu nedenle g lineerdir. M sonlu boyutlu olduğundan, g süreklidir. f g 'nin X 'e sürekli genişletişidir.

Sonuç 4.2.4 X bir normlu uzay ve $x \in X$ ise,

$$\|x\| = \sup\{|f(x)| : f \in X^* \text{ ve} \|f\| \leq 1\}.$$

Öte yandan, bu supremum verilmiştir.

İspat. $\alpha = \sup\{|f(x)| : f \in X^* \text{ ve} \|f\| \leq 1\}$ olsun. $f \in X^*$ ve $\|f\| \leq 1$ ise,

$$|f(x)| \leq \|f\|\|x\| \leq \|x\|;$$

buradan $\alpha \leq \|x\|$. Şimdi $M = \{\beta x : \beta \in F\}$ $g(\beta x) = \beta\|x\|$ ile verilen $g : M \to F$ 'i tanımlayalım. O halde $g \in X^*$ ve $\|g\| = 1$ .Sonuç 4.2.2'den , X^*'da bir f vardır öyle ki $\|f\| = 1$ ve

$f(x) = g(x) = \|x\|$

dır.Bu, daha sonra dikkatle incelenecek X ve X^*'daki normların tanımlarındaki simetriyi verir.

Sonuç 4.2.5 X bir normlu uzay, $M \leq X, x_0 \in X \setminus M$, ve $d = dist(x_0, M)$ ise, M 'deki tüm x'ler için $f(x_0) = 1, f(x) = 0$ olacak şekilde X^*'da bir f vardır ve $\|f\| = d^{-1}$ dır.

İspat. $Q : X \to X \setminus M$ doğal dönüşüm olsun. $\|x_0 + M\| = d$ olduğundan bir önceki sonuçtan $g(x_0 + M) = d$ ve $\|g\| = 1$ olacak şekilde $(X / M)^*$'da bir g vardır. $f = d^{-1} g \circ Q : X \to F$ olsun. O halde f süreklidir, M 'deki x için $f(x) = 0$ ve $f(x_0) = 1$. Aynı zamanda,

$$|f(x)| = d^{-1}|g(Q(x))| \leq d^{-1}\|Q(x)\| \leq d^{-1}\|x\| \ ;$$

Buradan $\|f\| \leq d^{-1}$ .Diğer yandan, $\|g\| = 1$ bu nedenle tüm n'ler için

$$|g(x_n+M)|\to 1 \text{ ve } \|x_n+M\|<1$$

olacak şekilde bir $\{x_n\}$dizisi vardır. $\|x_n+y_n\|<1$ Olacak şekilde $y_n\in M$ diyelim. O halde

$$|f(x_n+y_n)|=d^{-1}|g(x_n+M)|\to d^{-1}$$

bu nedenle $\|f\|=d^{-1}$ dır.

Hahn-Banach Teoremi'ni ispatlamak için, önce fonksiyonelinin boyutu bir fazla olan uzaya genişletebileceğimizi göstereceğiz.

Lemma 4.2.2 (4.2.1) hipotezinin sağlandığını ve buna ilave olarak, $\dim X/M=1$ olduğunu varsayalım. O halde (4.2.1)'in sonucu makuldur.

İspat. X/M 'de x_0 sabitleyelim; böylece

$$X=M\vee\{x_0\}=\{tx_0+y:t\in\Re, y\in M\}.$$

Şu anlık f 'nin $F:X\to\Re$ genişletişinin $F\le q$ olarak mevcut olduğunu varsayalım. F 'nin nasıl görünmesi gerektiğini görelim. $\alpha_0=F(x_0)$ diyelim. $t>0$ ve $y_1\in M$ ise,

$$F(tx_0+y_1)=t\alpha_0+f(y_1)\le q(tx_0+y_1).$$

Buradan M 'deki her y_1 için

$$\alpha_0\le -t^{-1}f(y_1)+t^{-1}q(tx_0+y_1)=-f(y_1/t)+q(x_0+y_1/t).$$

$y_1/t\in M$ olduğundan, bu , M 'deki tüm y_1'ler için

$$\alpha_0\le -f(y_1)+q(x_0+y_1) \qquad (8)$$

verir. Aynı zamanda α_0 (8)'i sağlarsa, bir önceki tartışmadaki eşitsizlikleri tersine çevire-rek, $t\ge 0$ olduğu sürece $t\alpha_0+f(y_1)\le q(tx_0y_1)$. $t\ge 0$ ve $y_2\in M$ ve F mevcut ise, $F(-tx_0+y_2)=-t\alpha_0+f(y_2)\le q(-tx_0+y_2)$.

Yukarıdaki gibi, bu , M 'deki tüm y_2'ler için

$$\alpha_0\ge f(y_2)-q(-x_0+y_2) \qquad (9)$$

demektir. Öte yandan, (9) tüm $t\ge 0$ ve M 'deki tüm y_2'ler için

$$-t\alpha_0+f(y_2)\le q(-tx_0+y_2).$$

(8) ve (9)'i birleştirdiğimizde, α_0'ın (8) ve (9)'i aynı anda sağlayacak şekilde seçilebileceğini göstermemiz gerektiğini bilmeliyiz. Böylece M 'deki tüm y_1, y_2'ler için

$$f(y_2)-q(-x_0+y_2)\le -f(y_1)+q(x_0+y_1) \qquad (10)$$

olduğunu göstermeliyiz. Ancak bu $f(y_1+y_2)\le q((x_0+y_1))+q(-x_0+y_2)$olduğunu göstermek istediğimiz anlamına geliyor. Ancak

$$f(y_1+y_2)\le q(y_1+y_2)=q((y_1+x_0)+(-x_0+y_2))$$

$$\le q(y_1+x_0)+q(-x_0+y_2),$$

bu nedenle (10) sağlanır. α_0

$$\sup\{f(y_2)-q(-x_0+y_2): y_2\in M\}\le\alpha_0\le\inf\{-f(y_1)+q(x_0+y_1)\}$$

ve $F(tx_0+y)=t\alpha_0+f(y_1)$ olarak seçilmiş ise, F (4.2.1) sonucunu sağlar.

Hahn-Banach Teoreminin İspatı.

Tüm (M_1,f_1) ikililerinin sınıfı olsun ki burada M_1 X 'te bir lineer manifolddur öyle ki $M_1\supseteq M$ ve $f_1:M_1\to\Re$ M 'de $f_1|M=f$ ve $f_1\le q$ olan bir lineer fonksiyoneldir. (M_1,f_1) ve $(M_2,f_2\in G)$ise, $M_1\subseteq M_2$ve $f_2|M_1=f_1$ olduğu kast edilmek üzere $(M_1,f_1)\le(M_2,f_2)$ tanımlayalım. Böylece $(G,\le)$ kısmi sıralı bir kümedir. $P=\{(M_i,f_i): i\in I\}$ G 'de bir zincirdir. $N\equiv\bigcup\{M_i : i\in I\}$ ise, P 'nin G 'de bir zincir olması N 'nin bir lineer manifold olduğunu gösterir. $x\in M_i$ ise, $F(x)=f_i(x)$ alarak $F:N\to\Re$ tanımlayalım. F 'nin iyi tanımlı, lineer ve N 'de $F\le q$ olduğu kolayca kontrol edilir. Böylece $(N,F)\in G$ ve (N,F) P için bir üst sınırdır. Zorn Lemması'ndan, G 'nin bir (Y,F) maksimal elemanı vardır. Ancak bir önceki lemma $Y=X$ olduğunu gösteriyor. Buradan, F istenen genişletiştir.

Bu kesim Hahn-Banach Teoremi'nin önemli bir sonucu ile sonuçlanacaktır. Bu daha sonra genelleştirilecektir.

Teorem 4.2.2 X bir normlu uzay ve M , X 'te bir lineer manifold ise,

$$clM=\bigcap\{\ker f : f\in X^* \text{ ve } M\subseteq\ker f\}.$$

İspat. $N=\bigcap\{\ker f : f\in X^* \text{ ve } M\subseteq\ker f\}$ olsun. $f\in X^*$ ve $M\subseteq\ker f$ ise, f 'nin sürekliliği $clM\subseteq\ker f$ olduğunu gösteriyor. Buradan $clM\subseteq N$. $x_0\notin clM$ ise,

$d = dist(x_0, M) > 0$. Sonuç 4.2.5'ten, M'deki her x için $f(x_0) = 1$ ve $f(x) = 0$ olacak şekilde X^* 'da bir f vardır. Buradan, $x_0 \notin N$. Böylece $N \subseteq clM$ ve ispat tamamlanmıştır.

Sonuç 4.2.3 X, bir normlu uzay ve M, X'te bir lineer manifold ise, M X'te yoğundur ancak ve ancak M'yi sıfırlayan X uzayındaki tek sınırlı lineer fonksiyonel sıfır fonksiyonelidir.

4.3. Hahn-Banach Teoreminin Banach Limitlerine Uygulanması

$x = \{x(n)\} \in c$ ise, $L(x) = \lim x(n)$ tanımlayalım. O halde L bir lineer fonksiyoneldir $\|L\| = 1$ ve c'deki x için $x' = (x(2), x(3), ...)$ ile tanımlanmışsa, $L(x) = L(x')$. Aynı zamanda, $x \geq 0$ [yani, tüm n'ler için $x(n) \geq 0$] ise, $L(x) \geq 0$. Bu kesimde limit fonksiyonelinin bu özelliklerinin l^∞'a genişletilebileceği gösterilecektir. İspat Hahn-Banach Teoremi'ne dayanır.

Teorem 4.3.1 Bir $L : l^\infty \to \mathrm{F}$ lineer fonksiyoneli vardır öyle ki

(a) $\|L\| = 1$.

(b) $x \in c$ ise, $L(x) = \lim x(n)$.

(c) $x \in l^\infty$ ve tüm n'ler için $x(n) \geq 0$ ise, $L(x) \geq 0$.

(d) $x \in l^\infty$ ve $x' = (x(2), x(3), ...)$ ise, $L(x) = L(x')$.

İspat. Önce $\mathrm{F} = \Re$ olduğunu varsayalım; yani $l^\infty = l^\infty_\Re$. $x \in l^\infty$ ise, x' yukarıda (d) kısmında tanımlı l^∞ ait elemanını göstersin. $M = \{x - x' : x \in l^\infty\}$ diyelim. l^∞'daki herhangi x, y için ve $\Re$'deki α için $(x + \alpha y)' = x' + \alpha y'$ olduğunu görüyoruz; buradan M l^∞'da bir lineer manifolddur. 1, l^∞'da $(1,1,1,...)$ dizisini göstersin.

İddia 1. $dist(1, M) = 1$. $0 \in M$ olduğundan, $dist(1, M) \leq 1$. $x \in l^\infty$ olsun; herhangi bir n için $(x - x')(n) \leq 0$ ise,

$$\|1 - (x - x')\|_\infty \geq |1 - (x(n) - x'(n))| \geq 1.$$

Tüm n'ler için,

$$0 \leq (x - x')(n) = x(n) - x'(n) = x(n) - x(n+1)$$

olduğunu varsayalım. Böylece tüm n'ler için $x(n+1) \le x(n)$. $x \in l^\infty$ olduğundan, $\alpha = \lim x(n)$ mevcuttur. Böylece $\lim(x - x')(n) = 0$ ve bu iddiayı kanıtlar. $\|L\| = 1, L(1) = 1$ ve $L(M) = 0$ olacak şekilde Sonuç 4.2.5'den, $L : l^\infty \to \mathrm{F}$ lineer fonksiyoneli vardır. Böylece bu fonksiyonel teoremin (a) ve (d) şıklarını sağlar. (b)'yi ispatlamak için;

İddia 2. $c_0 \subseteq \ker L$.

$x \in c_0$ ise, $x^{(1)} = x'$ ve $n \ge 1$ için $x^{(n+1)} = (x^{(n)})'$ olsun. $x^{(n+1)} - x = [x^{(n+1)} - x^{(n)}] + ... + [x' - x] \in M$ olduğunu görünüz. Buradan, tüm $N \ge 1$ için $L(x) = L(x^{(n)})$.$\varepsilon \ge 0$. ise, $m > n$ için $|x(m)| < \varepsilon$ koşulana uyacak şekilde n alalım. Buradan,

$$|L(x)| = L(x^{(n)}) \le \|x^{(n)}\|_\infty = \sup\{|x(m)| : m > n\} < \varepsilon .$$

Böylece $x \in \ker L$. (b) koşulu açıktır.

(c)'yi göstermek için, tüm n'ler için $x(n) \ge 0$ ve $L(x) \ge 0$ olacak şekilde l^∞'da bir x'in var olduğunu kabul edelim. x yerine $x/\|x\|$ alınırsa, $L(x) < 0$ doğrudur ve tüm n'ler için $1 \ge x(n) \ge 0$ ifadesi de doğrudur. Ancak $\|1 - x\|_\infty \le 1$ ve $L(1 - x) = 1 - L(x) > 1$ ki bu (a) ile çelişir. Böylece (c) sağlanır.

Şimdi $F = C$ olduğunu varsayalım. L_1 l_R^∞'de elde edilen fonksiyonel olsun. $x \in l_C^\infty$ ise, $x_1, x_2 \in l_R^\infty$ iken $x_1 = ix_2 . L(x) = L_1(x_1) + iL_1(x_2)$ $x = x_1 + ix_2$ tanımlayalım. L'nin C-lineer olduğunun gösterilmesi alıştırma olarak bırakılmıştır. Açıktır ki (b), (c) ve (d) sağlanıyor. $\|L\| = 1$ olduğunu göstermek kalıyor geriye.

$E_1, ..., E_m$ $\aleph$'nin karşılıklı ayrık alt kümeleri ve tüm k sayıları için $|a_k| \le 1$ olarak $a_1, ..., a_m \in C$ alalım. $x = \sum_{k=1}^m a_k X_{E_k}$; böylece $x \in l^\infty$ ve $\|x\|_\infty \le 1$. O halde

$$.L(x) = \sum_k a_k L(X_E) = \sum_k a_k L_1(X_E) .$$

Ancak $L_1(X_E) \ge 0$ ve $\sum_k L_1(X_{E_k}) = L_1(X_E)$ ki burada $E = U_k E_k$. Buradan $\sum_k L_1(X_{E_k}) \le 1$.Tüm k'lar için $|a_k| \le 1$ olduğundan, $|L(x)| \le 1$ (Bu küçük bir konvekslik argümanıdır). x l^∞'un keyfi bir elemanı, $\|x\|_\infty \le 1$ ise, l^∞'un elemanları $\|x_n - x\|_\infty \to 0$ $\|x_n\|_\infty \le 0$ olacak şekilde ve her $\{x_n\}$yalnızca sonlu sayıda değer alan tam da tartışılan l^∞'un eleman tipi ise $\{x_n\}$ mevcuttur. Açıktır ki, $\|L\| \leq 2$ bu nedenle $L(x_n) \to L(x)$.Tüm n'ler için $|L(x_n)| \leq 1$ olduğundan, $|L(x)| \leq 1$ Buradan, $\|L\| \leq 1$. $L(1) = 1$ olduğundan, $\|L\| = 1$.

Teorem 4.3.1'de betimlenen tipte lineer fonksiyonele *Banach limiti* denir. Bunlar, bir Hilbert uzayında aralarında sınırlı operatörler cebirinin temsillerinin inşası olan nesneler değişkesi için oldukça yararlıdır.

4.4. Hahn-Banach Teoreminin Runge Teoremine Uygulanması

Teorem 4.4.1 (Runge Teoremi) K, C'nin kompakt alt kümesi ve E, $C_\infty \setminus K$ nin her bir bileşeniyle kesişen $C_\infty \setminus K$ nın bir alt kümesi olsun. f K'nın bir komşuluğunda analitikse, kutupları yalnızca E'de bulunan K'da $f_n \to f$ düzgünce olacak şekilde f_n rasyonel fonksiyonları vardır.

Runge Teoremi'ni ispatlamanın ana aracı Teorem 4.2.2'tür. Bunu yapmak için, $R(K,E)$ E'de kutupları olan rasyonel fonksiyonlarının $C(K)$ uzayındaki kapanışı olsun.(4.2.2)'den ve Riesz Temsil Teoremi vasıtasıyla, $R(K,E)$'teki her g için $\mu \in M(k)$ ve $\int g d\mu = 0$ ise olduğunu göstermek yeterlidir.

$R > 0$ ve λ alan ölçümü olsun. K'daki her Z için $B(0;R) \subseteq B(z;\rho)$ olacak şekilde $\rho > 0$ seçelim. O halde K'daki her Z için,

$$\int_{B(0;R)} |z-w|^{-1} d\lambda(w) \leq \int_{B(z;p)} |z-w|^{-1} d\lambda(w)$$

$$= \int_0^2 \int_0^p dr d\theta = 2\pi p$$

$\mu \in M(k)$ ise, integral sonlu iken

$$\hat{\mu}(w) = \int \frac{d|\mu|(z)}{|z-w|}$$

aksi durumda $\hat{\mu}(w) = \infty$ ile $\hat{\mu} : C \to [0,\infty]$ tanımlayalım. Yukarıdaki eşitsizlikler

$$\int_{B(0;R)} \hat{\mu}(w) d\lambda(w) = \int_{B(0;R)} \int_K \frac{d|\mu|(z)}{|z-w|} d\lambda(w)$$

$$= \int_K \int_{B(0,R)} \frac{d\lambda(w)}{|z-w|} d|\mu|(z)$$

$$\leq 2\pi\rho\|\mu\|.$$

Böylece $\mu(w) < \infty$ h.h.h.[λ].

Lemma 4.4.1 $\mu \in M(K)$ ise,

$$\mu(w) = \int \frac{d\mu(z)}{z-w}$$

her $R > 0$ için $L^1(B(0,R),\lambda)$'dedir, $\hat{\mu}$ $C_\infty \setminus K$'de analitiktir ve $\hat{\mu}(\infty) = 0$.

İspat. İlk ifade bu lemmadan önce geleni takip eder. $\hat{\mu}$'nün $C_\infty \setminus K$'da analitik olduğunu göstermek için , $w, w_0 \in C \setminus K$ olsun ve

$$\frac{\hat{\mu}(w) - \hat{\mu}(w_0)}{w - w_0} = \int_K \frac{d\mu(z)}{(z-w)(z-w_0)}$$

olduğunu görelim. $w \to w_0$ iken, K'daki z elemanları için

$$[(z-w)(z-w_0)]^{-1} \to (z-w_0)^{-2}$$

düzgünce öyle ki $\hat{\mu}$'in w_0'da türevi vardır ve

$$\frac{d\hat{\mu}}{dw}(w_0) = \int_K (z-w_0)^{-2} d\mu(z).$$

Bu duırumda, μ $C \setminus K$'da analitiktir. Sonsuzda analitik olduğunu göstermek için , $z \to \infty$ iken $\hat{\mu}(z) \to 0$ bu nedenle sonsuzluk kaldırılabilir tekilliktir.

$C \setminus K$'da w_0 için

$$\left(\frac{d}{dw}\right)^n \hat{\mu}(w_0)^{-n-1} = n! \int (z-w_0)^{-n-1} d\mu(z) \qquad (11)$$

olduğunu görmek zor değildir**.** Aynı zamanda , $\hat{\mu}$'nün sonsuzdaki kuvvet serisi açılımını kolayca bulabiliriz. Gerçekten,

$$\hat{\mu}(w) = \int \frac{1}{z-w} d\mu(z) = -\frac{1}{w} \int 1 - \frac{1}{w} d\mu(z).$$

K'daki tüm Z'ler için w'yu $|z/w| < 1$ olarak sonsuza yeterince yakın seçelim. O halde

$$\hat{\mu}(w)=\sum_{n=0}^{\infty} \quad -\frac{1}{w}\int 1-\frac{1}{w}d\mu(z) \qquad (12)$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{w^{n+1}} \quad ,$$

burada $a_n=\int z^n d\mu(z)$.

$\mu\in M(K)$ ve E'de kutupları olan her rasyonel fonksiyon için $\int g d\mu=0$ olduğunu varsayalım. U $C_\infty \setminus K$'nın bir bileşeni ve $w_0\in E\cap U$ olsun. $w_0\neq\infty$ ise, hipotez ve (11), μ'nün w_0'daki her türevinin sıfırlandığını gösteriyor. Buradan, U'da $\hat{\mu}\equiv 0$. $w_0=\infty$ ise, (12) U'da $\hat{\mu}\equiv 0$ oluğunu ifade eder. Böylece $C_\infty \setminus K$'da $\hat{\mu}\equiv 0$.

f K'yı içeren bir G açık kümesinde analitik ise, K'daki tüm Z'ler için

$$f(z)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_k}\frac{f(w)}{w-z}dw$$

olacak şekilde $G\setminus K$'daki doğru parçaları $\gamma_1,...,\gamma_n$ olsun. Böylece, Fubini Teoremi'nden

$$\int_K f(z)d\mu(z)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\pi i}\int_K\int_{\gamma_k}\frac{f(w)}{w-z}dw\,d\mu(z)$$

$$=-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_k} f(w)\hat{\mu}(w)dw.$$

Ancak γ_k ($\subseteq C\setminus K$)'da $\hat{\mu}(w)=0$, bu nedenle $\int f d\mu=0$. (4.2.2)'den, $f\in R(K,E)$ Bu Runge Teoremi'ni ispatlar.

Sonuç 4.4.1 K,kompakt uzay ve $C\setminus K$ bağlantılı ve f K'nın bir komşuluğunda analitik ise, K'da f'ye düzgünce yakınsayan bir polinom dizisi mevcuttur.

KAYNAKLAR

Banach, S., 1955. ***Théorie des opérations linéaires***, Warszawa.

Bayraktar,M.,1996. ***Fonksiyonel Analiz.*** Ankara Ünv. Yayın.& 789, Erzurum.

Bohnenblust, H.F., Sobczyk, A., 1938. Extensions of Functionals on Complex Linear Spaces**.** ***Bullet. Amer. Math. Soc.***, Zentralblatt Math.

Conway,J.B.,1990. ***A Course in Functional Analysis.*** Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, New York.

Dunford,N.,Schwartz,J., 1958. ***Linear Operators I.*** Interscience. New York.

Kelley,L.,1955. ***General Topology.*** New York. Springer-Verlag.

Kreyszig,E.,1987. ***Introductory Functional Analysis with Applications.*** John Wiley and Sons, New York.

Larsen, A.R.,1973. ***Functional Analysis.*** Madson avenue & Marcel dekker inc., New York. 345.

Löwig, H., 1934. Über die Dimension linearer Räume, ***Studia Math.,*** **5**: p. 18-23.

Murray, F. J.,1936. Linear transformations in $L_p, p > 1$, ***Trans. Amer. Math. Soc.*** **39**: p.83–100.

Musayev, B.,2000. ***Fonksiyonel Analiz .*** Dumlupınar Ünv. Balcı Yayın, Kütahya.

Pietsch A., 2007. ***History of Banach Spaces and Linear Operators***, Birkhäuser.

Rudin**,**W.,1973. ***Functional Analysis.*** Tata Mc-Graw&Hill publication comp. ltd, New Delhi.

ÖZGEÇMİŞ

10.10.1978 yılında doğdu. İlk, orta ve lise eğitimini Edirne –Keşan da tamamladı. 2002 yılında Trakya Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünden mezun oldu. Aynı yıl Özel Edirne Beykent Kolejinde göreve başladı.2003 yılında Milli Eğitim Bakanlığı ataması ile Artvin Lisesine matematik öğretmeni olarak atandı.2005 yılında eş durumu tayini ile Van Hasan Ali Yücel İlköğretim Okuluna atandı.Halen aynı okulda görev yapmaktadır.