

23049



İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Kâmil DEMİRCİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

1992

**T.C.
D.C.
YER ÖĞRETİM KURULU
STATİSTİK MERKEZİ**

23049

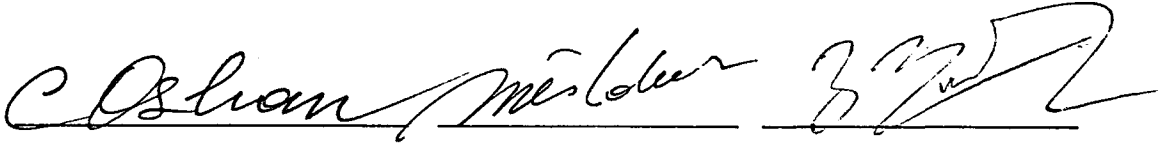
ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Kâmil DEMİRCİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez 27.8.1992 tarihinde Aşağıdaki Jüri Tarafından 90 (Seksan.....) Not
Takdir Edilerek Oybirliği/Oyçokluğu İle Kabul Edilmiştir.



Doç. Dr. Cihan ORHAN

Prof. Dr. Öner ÇAKAR

Prof. Dr. Zafer NURLU

Danışman

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Kâmil DEMİRCİ

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Cihan ORHAN

1992, Sayfa: 73

Jüri: Doç. Dr. Cihan ORHAN

Prof. Dr. Öner ÇAKAR

Prof. Dr. Zafer NURLU

Bu tez üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, istatistiksel yakınsaklık kavramı tanıtılıp, yoğunluk kavramı ile ilişkisi araştırılmış ve istatistiksel Cauchy dizisi tanıtılmıştır. Ayrıca istatistiksel yakınsaklık ile kuvvetli p -Cesàro toplanabilme arasındaki ilişki araştırılmış ve istatistiksel yakınsaklık için bazı Tauber teoremleri verilmiştir. İstatistiksel yakınsak dizilerin topolojik özellikleri ve istatistiksel yakınsaklığın matris karakterizasyonu yine bu bölümde verilmiştir.

İkinci bölümde, lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramı tanıtılıp, lacunary istatistiksel yakınsaklık ile istatistiksel yakınsaklık ile istatistiksel yakınsaklık arasındaki içerme teoremleri verilmiş, lacunary istatistiksel yakınsaklık için limitin tekliği ve lacunary incelenmesi incelenmiş ve de lacunary istatistiksel yakınsaklık ile kuvvetli hemen hemen yakınsaklık arasındaki ilişkiler araştırılmıştır. Ayrıca lacunary istatistiksel yakınsak diziler için Cauchy kriteri ve bir Tauber teoremi verilip, lacunary istatistiksel yakınsak dizilerin toplanabilme özellikleri ve matris karakterizasyonu verilmiştir.

Son bölümde ise modülüs fonksiyonu, kuvvetli A -toplanabilme, bir modülüs fonksiyonuna göre kuvvetli A -toplanabilme ve A -istatistiksel yakınsaklık kavramları tanıtılmış ve de \mathcal{L}_∞ daki ideal kavramı yardımıyla, yukarıdaki kavramlar arasındaki ilişkiler araştırılmıştır.

ANAHTAR KELİMELER: Matris dönüşümü, regüler matris, konservatif matris, toplanabilme, istatistiksel yakınsaklık, yoğunluk, istatistiksel Cauchy dizisi, kuvvetli p -Cesàro toplanabilme, lacunary istatistiksel yakınsaklık, kuvvetli hemen hemen yakınsaklık, modülüs fonksiyonu, kuvvetli A -toplanabilme, modülüs fonksiyonuna göre kuvvetli A -toplanabilme, A -istatistiksel yakınsaklık.

ABSTRACT

Masters Thesis

STATISTICAL CONVERGENCE

Kâmil DEMİRÇİ

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Cihan ORHAN

1992, Page: 73

Jury: Assoc. Prof. Dr. Cihan ORHAN

Prof. Dr. Öner ÇAKAR

Prof. Dr. Zafer NURLU

This thesis consists of three chapters.

In the first chapter, the notion of statistical convergence, the relationship between this notion and density and statistical Cauchy sequence has been given. Furthermore the relationship between statistical convergence and the strong p -Cesàro summability has been investigated and some Tauberian theorems for statistical convergence have been given. The topological properties of statistical convergence have also been given in this chapter.

In the second chapter, lacunary statistical convergence have been introduced and some inclusion theorems between lacunary statistical convergence and statistical convergence have been studied. Uniqueness of limit for the lacunary statistical convergence, lacunary refinement and a relationship between lacunary statistical convergence and strongly almost convergence have also been investigated. Moreover, Cauchy criteria, Tauberian theorem, summability properties and the matrix characterization for the lacunary statistical convergence have also been given.

In the last chapter, modulus function, strongly A -summability, strongly A -summability with respect to a modulus function and A -statistical convergence have been introduced. Some relationships among the above notions, via the ideal in \mathcal{L}_∞ , have been studied.

KEY WORDS:

Matrix transformation, regular matrix, conservative matrix, statistical convergence, density, statistical Cauchy sequence, strongly p -Cesàro summability, lacunary statistical convergence, strongly almost convergence, modulus function, strongly A -summability, strongly A -summability with respect to a modulus function, A -statistical convergence.

TEŞEKKÜR

Bu alıŐmayı bana vererek çalıŐmalarım boyunca yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen sayın hocam Doç. Dr. Cihan ORHAN'a teşekkür ve Őükranlarımı sunmayı bir borç bilirim.



İÇİNDEKİLER

| | Sayfa |
|----------------|-------|
| ÖZET | ii |
| ABSTRACT | iii |
| TEŞEKKÜR | iv |
| SİMGELER | vii |
| GİRİŞ | I |

BÖLÜM 1

| | |
|--|----|
| İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK | 2 |
| 1.1. İstatistiksel Yakınsaklık | 2 |
| 1.2. İstatistiksel Yakınsaklık ve Yoğunluk | 3 |
| 1.3. İstatistiksel Cauchy Dizisi | 12 |
| 1.4. İstatistiksel Yakınsaklık ve Toplanabilme | 17 |
| 1.5. İstatistiksel Yakınsaklık ve Kuvvetli p-Cesàro Toplanabilme | 23 |
| 1.6. İstatistiksel Yakınsaklık için Tauber Teoremleri | 30 |
| 1.7. İstatistiksel Yakınsak Dizilerin Topolojik Özellikleri | 34 |
| 1.8. İstatistiksel Yakınsaklığın Matris Karakterizasyonu | 36 |

BÖLÜM 2

| | |
|--|----|
| LACUNARY İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK VE TOPLANABİLME | 41 |
| 2.1. Lacunary İstatistiksel Yakınsaklık | 41 |
| 2.2. İçerme Teoremleri | 42 |
| 2.3. S_θ -Limitinin Tekliği ve Lacunary İncelmesi | 48 |
| 2.4. Kuvvetli Hemen Hemen Yakınsaklık ve S_θ -Yakınsaklık | 53 |
| 2.5. S_θ -Cauch Kriteri ve Tauber Teoremi | 55 |

| | |
|--|----|
| 2.6. S_θ -Yakınsak Dizilerin Toplanabilme Özellikleri | 57 |
| 2.7. S_θ -Yakınsaklığın Matris Karakterizasyonu | 61 |

BÖLÜM 3

A-İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK VE BİR MODULÜS

| | |
|--|----|
| FONKSİYONUNA GÖRE KUVVETLİ MATRİS TOPLANABİLME | 62 |
| 3.1. Modulüs Fonksiyonu | 62 |
| 3.2. Kuvvetli A-Toplanabilme ve Bir Modulüs Fonksiyonuna Göre Kuvvetli A-Toplanabilme | 63 |
| 3.3. A-İstatistiksel Yakınsaklık | 67 |
| KAYNAKLAR | 71 |



SİMGELER

| | |
|----------------------|---|
| $(Ax)_n$ | : x dizisinin A matrisi altındaki dönüşüm dizisi |
| AC | : hemen hemen yakınsak diziler uzayı |
| $[AC]$ | : kuvvetli hemen hemen yakınsak diziler uzayı |
| AS | : A-İstatistiksel yakınsak diziler uzayı |
| AS_0 | : Sıfıra A-istatistiksel yakınsak diziler uzayı |
| c | : yakınsak diziler uzayı |
| \mathbb{C} | : Kompleks sayılar cümlesi |
| c_A | : A matrisinin yakınsaklık alanı |
| C_1 | : Cesàro operatörü |
| e | : bütün terimleri 1 olan dizi |
| \mathcal{L} | : mutlak yakınsak seri oluşturan diziler uzayı |
| \mathcal{L}_∞ | : sınırlı diziler uzayı |
| S | : istatistiksel yakınsak diziler uzayı |
| S_b | : sınırlı istatistiksel yakınsak diziler uzayı yani $S \cap \mathcal{L}_\infty$ |
| $o(1)$ | : sıfıra yakınsayan ifade |
| $O(1)$ | : sınırlı ifade |
| ω | : Reel yada kompleks terimli diziler uzayı |
| $\omega(A)$ | : kuvvetli A-toplanabilir diziler uzayı |
| $\omega(A, f)$ | : bir modülüs fonksiyonuna göre kuvvetli A-toplanabilir diziler uzayı |
| ω_p | : kuvvetli p-Cesàro toplanabilir diziler uzayı |
| \mathcal{L} | : Lacunary dizilerin sınıfı |
| χ_K | : K cümlesinin karakteristik fonksiyonu |
| $ \sigma_1 $ | : kuvvetli Cesàro toplanabilir diziler uzayı |
| δ | : yoğunluk fonksiyonu |
| $\overline{\delta}$ | : üst yoğunluk fonksiyonu |
| $\underline{\delta}$ | : alt yoğunluk fonksiyonu |
| Δ | : ileri fark operatörü |

GİRİŞ

İlk defa 1951 yılında H. Fast tarafından tanımlanan İstatistiksel Yakınsaklık kavramı, Toplanabilme Teorisinde ve Fonksiyonel Analizde önemli bir yer tutmaktadır. İstatistiksel yakınsaklığın Toplanabilme Teorisi ile ilk ilişkisi, 1959'da Schoenberg tarafından verildi. Yine aynı özelliklerin incelenmesine, 1985 yılında J. Fridy, 1990 yılında J. Fridy ve H. Miller, yine aynı 1991 yılında J. Fridy ve C. Orhan tarafından devam edildi. Ayrıca istatistiksel yakınsak diziler sınıfının bazı Topolojik özelliklerinin incelenmesi ise ilk defa 1980 yılında T. Salat tarafından, daha sonra ise Kent State Üniversitesinde 1985 yılında yapılan doktora çalışmasında, J. Connor tarafından devam edildi. Yine J. Connor, 1988 ve 1989 yıllarında yaptığı ilk çalışma ile konunun Fonksiyonel Analiz açısından ne kadar önemli olduğunu ortaya koydu.

Aslında istatistiksel yakınsaklık, Ölçü Teorisi ve Sayılar Teorisi ile çok yakından ilgili olduğu gibi İstatistik ile de çok yakından ilgilidir. Bu ilişkiler ise 1981 yılında Freedman ve Sember ile yine J. Connor tarafından 1990 yılında yapılmıştır.

Bu yüksek lisans tezi, yukarıdaki çalışmaların derlenmesinden oluşmaktadır.

BÖLÜM 1

İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

İstatistiksel yakınsaklık kavramı ilk defa Fast tarafından verildi [6]. Daha sonra [3], [4], [9], [10] ve [22]'de istatistiksel yakınsaklık bir toplanabilme metodu olarak çalışıldı.

Bu bölümde istatistiksel yakınsaklık tanıtılıp, ordinary (alışılmış) anlamdaki yakınsaklık, yoğunluk ve matris toplanabilme arasındaki ilişkiler araştırılacaktır. Ayrıca istatistiksel yakınsaklığın topolojik özellikleri ve de bir matris karakterizasyonu verilecektir.

1.1. İstatistiksel Yakınsaklık

\mathbb{N} doğalsayılar cümlesinin bir A alt cümlesinin kardinal sayısı $|A|$ ile gösterilsin, yani $|A| = \text{card } A$ olsun.

TANIM 1.1.1: $x = (x_k)$ reel yada kompleks terimli bir dizi olsun. Eğer, her $\epsilon > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \epsilon\}| = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa, $x = (x_k)$ dizisi L sayısına istatistiksel yakınsaktır denir. Bu durumda $S - \lim x = L$ veya $x_k \rightarrow L(S)$ yazacağız. Eğer, $L = 0$ ise $x = (x_k)$ dizisine istatistiksel sıfır dizisi denir. ([6] Fast 1951).

Şimdi bazı örnekler verelim.

ÖRNEK 1.1.2:

$$x_k = \begin{cases} 1 & , \quad k = m^2, \quad (m = 1, 2, \dots) \\ 0 & , \quad k \neq m^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $x = (x_k)$ dizisini gözönüne alalım. Her $\varepsilon > 0$ için

$$|\{k \leq n : |x_k| \geq \varepsilon\}| \leq |\{k \leq n : x_k \neq 0\}| \leq \sqrt{n}$$

olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : x_k \neq 0\}| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{n} = 0$$

elde edilir. Demekki $\{k \in \mathbb{N} : |x_k - 0| \geq \varepsilon\}$ cümlesinin elemanları hariç diğer bütün k lar için $|x_k - 0| < \varepsilon$, (her $\varepsilon > 0$) olduğundan $x_k \rightarrow 0(S)$ dir.

ÖRNEK 1.1.3:

$$x_k = \begin{cases} \sqrt{k} & , \quad k = m^2, \quad (m = 1, 2, \dots) \\ 2 & , \quad k \neq m^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $x = (x_k)$ dizisi için $S - \lim x = 2$ dir.

Burada, istatistiksel yakınsaklık ile Ordinary (Cauchy) yakınsaklık arasında nasıl bir ilişki olabileceği sorusu akla gelebilir. Hemen belirtelimki ordinary anlamda yakınsak olan her dizi istatistiksel yakınsaktır. Fakat Örnek 1.1.2 ve 1.1.3 den görüleceği gibi sınırlı ıraksak yada sınırsız ıraksak bazı diziler de istatistiksel yakınsak olabilmektedir.

Bundan böyle S , S_0 ve S_b sırası ile istatistiksel yakınsak, sıfıra istatistiksel yakınsak ve sınırlı istatistiksel yakınsak dizilerin uzayını gösterecektir.

1.2. İstatistiksel Yakınsaklık ve Yoğunluk

Bu kısımda yoğunluk kavramı tanıtılıp, istatistiksel yakınsaklık ile arasındaki ilişki araştırılacaktır. Bunun için önce yoğunluk kavramını tanıtalım.

TANIM 1.2.1: $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, doğal sayıların kuvvet cümlesini göstermek üzere

$$\underline{\delta} : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow [0, 1]$$

fonksiyonu, $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ için

$$(D.1) A \sim B \text{ (yani } A \text{ ile } B \text{ nin simetrik farkı sonlu) ise } \underline{\delta}(A) = \underline{\delta}(B)$$

$$(D.2) A \cap B = \emptyset \text{ ise } \underline{\delta}(A) + \underline{\delta}(B) \leq \underline{\delta}(A \cup B)$$

$$(D.3) \text{ Her } A, B \text{ için } \underline{\delta}(A) + \underline{\delta}(B) \leq 1 + \underline{\delta}(A \cap B)$$

$$(D.4) \underline{\delta}(\mathbb{N}) = 1$$

özelliklerini gerçeklerse $\underline{\delta}$ fonksiyonuna bir alt yoğunluk fonksiyonu denir ([7] Freedman ve Sember 1981).

$\underline{\delta}$ bir alt yoğunluk olmak üzere, doğal sayıların bir A alt cümlesi için $\bar{\delta}$ üst yoğunluğu

$$\bar{\delta}(A) = 1 - \underline{\delta}(\mathbb{N} \setminus A)$$

ile tanımlanır. $\underline{\delta}$ alt yoğunluğu ile $\bar{\delta}$ üst yoğunluğu arasındaki bağıntılar aşağıdaki önermede verilmiştir.

ÖNERME 1.2.2: $\underline{\delta}$ bir alt yoğunluk ve $\overline{\delta}$ bir üst yoğunluk olmak üzere $A \subseteq \mathbb{N}$ ve $B \subseteq \mathbb{N}$ için

$$(i) \quad A \subseteq B \text{ ise } \underline{\delta}(A) \leq \underline{\delta}(B)$$

$$(ii) \quad A \subseteq B \text{ ise } \overline{\delta}(A) \leq \overline{\delta}(B)$$

$$(iii) \quad \text{Her } A, B \text{ için } \overline{\delta}(A) + \underline{\delta}(B) \geq \overline{\delta}(A \cup B)$$

$$(iv) \quad \underline{\delta}(\emptyset) = \overline{\delta}(\emptyset) = 0$$

$$(v) \quad \overline{\delta}(\mathbb{N}) = 1$$

$$(vi) \quad A \sim B \text{ ise } \overline{\delta}(A) = \overline{\delta}(B)$$

$$(vii) \quad \underline{\delta}(A) \leq \overline{\delta}(A)$$

özellikleri sağlanır ([7] Freedman ve Sember 1981). Bir $A \subseteq \mathbb{N}$ için $\underline{\delta}(A) = \overline{\delta}(A)$ ise A cümlesi bir yoğunluğa sahiptir denir ve $\delta(A)$ ile gösterilir.

ÖRNEK 1.2.3: $A \subseteq \mathbb{N}$ olmak üzere $A_n = \{k \leq n : k \in A\}$ cümlesinin kardinal sayısı $|A_n|$ ile gösterilsin. $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ üzerinde

$$\underline{\delta}(A) = \liminf_n \frac{|A_n|}{n}$$

ile tanımlı $\underline{\delta}$ fonksiyonunu gözönüne alalım. A cümlesinin karakteristik fonksiyonu χ_A olmak üzere yani

$$\chi_A(j) = \begin{cases} 1, & j \in A \\ 0, & j \in (\mathbb{N} \setminus A) \end{cases}$$

olmak üzere ve C_1 Cesáro matrisi

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \dots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$

ile tanımlanmak üzere $C_1 \mathcal{Z}_A$ dizisinin n-inci terimi $\frac{|A_n|}{n}$ dir. Böylece

$$\alpha(A) = \lim \inf_n (C_1 \mathcal{Z}_A)_n$$

elde edilir.

Bu fonksiyon (D.1) - (D.4) özelliklerini gerçekler. Bu örnek bize bir toplanabilme metodundan bir yoğunluk elde edilebilmesi için genel bir yöntemin mevcut olduğunu gösterir. Şimdi negatif olmayan regüler bir matris ile bunu yapabilmek için doğal bir yolun varlığını göstereceğiz. Ama önce toplanabilme hakkında biraz bilgi vereceğiz.

X ve Y , tüm diziler uzayı olan ω nın iki alt cümlesi ve $A = (a_{nk})$ reel yada kompleks terimli bir sonsuz matris olmak üzere, $x = (x_k) \in X$ ve her $n \geq 1$ için

$$y_n := A_n x := \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k$$

serisi yakınsak ise $y = (y_n) = (A_n x) = Ax$ dönüşüm dizisi mevcuttur denir. Eğer her $x \in X$ için $y = (A_n x)$ dönüşüm dizisi mevcut ve $y \in Y$ ise $A = (a_{nk})$ matrisi X den Y içine bir matris dönüşümünü tanımlar denir. Eğer bir x dizisi için Ax dönüşüm dizisi mevcut ve bir L değerine yakınsak ise x dizisi, A -toplanabilirdir denir ve A -lim $x=L$ yazılır. X dizisi uzayını, Y içine dönüştüren bütün matrislerin sınıfı (X, Y) ile

gösterilir ve eğer, A , X den Y içine bir matris dönüşümü ise $A \in (X, Y)$ yazılır. Toplamı yada limiti koruyan matrislerin sınıfı ise $(X, Y; p)$ ile gösterilir. Özel olarak $X = Y = c$ (yakınsak dizilerin uzayı olmak üzere) $A \in (c, c)$ ise A matrisine konservatif matris ve $A \in (c, c; p)$ ise bu durumda A matrisine regüler matris (yada kısaca regülerdir) denir.

A matrisinin konservatif veya regüler olması aşağıdaki teoremle karakterize edilir.

TEOREM 1.2.4: a) $A \in (c, c)$ olması için gerek ve yeter koşul

$$(i) \|A\| = \sup_n \sum_{k=1}^n |a_{nk}| < \infty$$

$$(ii) \text{ Her } k \text{ için } \lim_n a_{nk} = a_k$$

$$(iii) \lim_n \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = a$$

b) $A \in (c, c; p)$ olması için gerek ve yeterkoşul (i) ile birlikte (ii) de her k için $a_k = 0$ ve (iii) de ise $a = 1$ gerçekleşmesidir ([15] Maddox 1970, sh. 165-166).

$A = (a_{nk})$ sonsuz bir matris olmak üzere,

$$c_A = \{x = (x_k) : Ax \in c\}$$

cümlesine A nın yakınsaklık alanı (toplanabilirlik alanı) denir. Eğer $c_B \supset c_A$ ve c_A üzerinde $\lim Ax = \lim Bx$ ise B, A yı içerir denir.

ÖNERME 1.2.5: M negatif olmayan regüler bir matris ve

$$\delta_M(A) = \liminf_n (M \chi_A)_n$$

olsun. Bu durumda $\underline{\delta}_M$ bir alt yoğunluktur. Ayrıca

$$\overline{\delta}_M(A) = \limsup_n (M \chi_A)_n$$

dir ([7] Freedman ve Sember 1981).

İspat: Uygunluk bakımından $\underline{\delta}_M$ yerine $\underline{\delta}$ alalım.

(D.1) $A \sim B$ ise $j \in [1, N]$ için muhtemelen $\chi_A(j) \neq \chi_B(j)$, fakat $j \notin [1, N]$ için $\chi_A(j) = \chi_B(j)$ olacak şekilde bir N pozitif tam sayısı vardır. Şimdi

$$\begin{aligned} |(M \cdot \chi_A)_n - (M \cdot \chi_B)_n| &= \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj} \chi_A(j) - \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj} \chi_B(j) \right| \\ &= \left| \sum_{j=1}^N a_{nj} \chi_A(j) - \sum_{j=1}^N a_{nj} \chi_B(j) \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^N a_{nj} |\chi_A(j) - \chi_B(j)| \\ &\leq \sum_{j=1}^N a_{nj} \rightarrow 0, (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\liminf_n (M \cdot \chi_A)_n = \liminf_n (M \cdot \chi_B)_n$$

olup

$$\underline{\delta}(A) = \underline{\delta}(B)$$

dir.

$$(D.2) \quad A \cap B = \emptyset \text{ ise } \chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A \cap B}$$

olduğundan

$$\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B$$

olur. O halde

$$\begin{aligned} \underline{\delta}(A \cup B) &= \liminf_n (M \cdot \chi_{A \cup B})_n = \liminf_n (M \cdot \chi_A + M \cdot \chi_B)_n \\ &\geq \liminf_n (M \cdot \chi_A)_n + \liminf_n (M \cdot \chi_B)_n \\ &= \underline{\delta}(A) + \underline{\delta}(B) \end{aligned}$$

$$(D.4) \quad \underline{\delta}(\mathbb{N}) = \liminf_n (M \cdot \chi_{\mathbb{N}})_n = \liminf_n \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj} = 1$$

(D.3) ün gerçekleştiğini göstermeden önce $\overline{\delta}(A)$ için bir formül elde edelim. $\chi_{\mathbb{N} \setminus A} = 1 - \chi_A$ dir. $e = (1, 1, \dots)$ olduğundan,

$$\begin{aligned} \overline{\delta}(A) &= 1 - \underline{\delta}(\mathbb{N} \setminus A) = 1 - \liminf_n (M \cdot \chi_{\mathbb{N} \setminus A})_n \\ &= \limsup_n (1 - M \cdot \chi_{\mathbb{N} \setminus A})_n \\ &= \limsup_n (1 - M \cdot e + M \cdot \chi_A)_n \\ &= \limsup_n (M \cdot \chi_A)_n \end{aligned}$$

elde edilir. Çünkü $\lim_n (1 - M \cdot e)_n = 0$ dir.

$$(D.3) \quad \chi_{A \cap B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A \cup B}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned}
1 + \underline{\delta}(A \cap B) &= 1 + \liminf_n (M \cdot \chi_{A \cap B})_n \\
&\geq 1 + \liminf_n (M \cdot \chi_A)_n + \liminf_n (M \cdot \chi_B)_n + \liminf_n (-M \cdot \chi_{A \cup B})_n \\
&= 1 + \liminf_n (M \cdot \chi_A)_n + \liminf_n (M \cdot \chi_B)_n - \limsup_n (M \cdot \chi_{A \cup B})_n \\
&= 1 + \underline{\delta}(A) + \underline{\delta}(B) - \overline{\delta}(A \cup B) \\
&= 1 + \underline{\delta}(A) + \underline{\delta}(B) - 1 + \underline{\delta}(\mathbb{N} \setminus (A \cup B)) \\
&= \underline{\delta}(A) + \underline{\delta}(B) + \underline{\delta}(\mathbb{N} \setminus (A \cup B)) \\
&\geq \underline{\delta}(A) + \underline{\delta}(B)
\end{aligned}$$

elde edilir.

TANIM 1.2.6: $\varepsilon > 0$ verildiğinde her $k \geq N$ ve her $k \notin A$ için $|x_k - L| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N > 0$ sayısı varsa, $x \xrightarrow{(A)} L$ yazacağız ([7] Freedman ve Sember 1981).

TANIM 1.2.7: Herhangi bir δ yoğunluğu için

$$\omega_\delta = \{x \in \omega : \exists L \text{ ve } \overline{\delta}(A) = 0 \text{ olacak şekilde } A \subseteq \mathbb{N} \text{ için } x \xrightarrow{(A)} L\}$$

olsun. ω_δ , (δ) nearly yakınsak dizilerin cümlesi olarak adlandırılır ([7] Freedman ve Sember 1981).

Şimdi Önerme 1.2.5 de M matrisi yerine C_1 matrisini alalım. Böylece $\overline{\delta}(A) = \limsup_n (C_1 \chi_A)_n$ elde ederiz. Bu halde, eğer $\overline{\delta}(A) = 0$ ise yani $\delta(A) = 0$ ise A cümlesine sıfır yoğunluklu cümle adı verilir ([19] Niven ve Zuckerman 1980). Bu ise bizi aynı δ için Buck'ın ([2] 1953)'de yapmış olduğu aşağıdaki tanıma götürür.

ve Zuckerman 1980). Bu ise bizi aynı δ için Buck'ın ([2] 1953)'de yapmış olduğu aşağıdaki tanıma götürür.

TANIM 1.2.8: $A \subseteq \mathbb{N}$ olmak üzere $\delta(A) = 0$ olsun. Eğer $\epsilon > 0$ verildiğinde her $k \geq N$ ve her $k \notin A$ için $|x_k - L| < \epsilon$ olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ varsa, $x = (x_k)$ dizisi L sayısına hemen her k için yakınsaktır denir ([2] Buck 1953). Bu tanım ise istatistiksel yakınsaklık tanımından başka bir şey değildir. O halde Tanım 1.2.7, istatistiksel yakınsaklığın bir genelleştirilmesi olarak düşünülebilir.

Bundan sonra, bir $x = (x_k)$ dizisi sıfır yoğunluğa sahip bir cümlemin dışındaki her k için bir P özelliğine sahip ise x dizisi hemen her k için P özelliğine sahiptir diyeceğiz ve bunu "h.h.k" ile kısıltacağız.

Şimdi istatistiksel yakınsaklık metodunun lineer olduğunu göstereyim.

TEOREM 1.2.9: $S - \lim x = L_1$, $S - \lim y = L_2$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda,

$$(i) \quad S - \lim (x + y) = L_1 + L_2$$

$$(ii) \quad S - \lim (\alpha x) = \alpha L_1$$

dir ([6] Fast 1951).

İspat: (i) $S - \lim x = L_1$ olsun. Bu durumda, $A \subseteq \mathbb{N}$ olmak üzere $\delta(A) = 0$ olduğunda, $\epsilon > 0$ verildiğinde her $k > k_1$ ve her $k \in (\mathbb{N} \setminus A)$ için $|x_k - L_1| < \epsilon/2$ olacak şekilde $k_1 \in \mathbb{N}$ vardır.

$S - \lim y = L_2$ olsun. Bu durumda, $B \subseteq \mathbb{N}$ olmak üzere $\delta(B) = 0$ olduğunda, $\epsilon > 0$ verildiğinde her $k > k_2$ ve her $k \in (\mathbb{N} \setminus B)$ için $|y_k - L_2| < \epsilon/2$ olacak şekilde $k_2 \in \mathbb{N}$ vardır.

$k_0 = \max \{k_1, k_2\}$ diyelim. Her $k \in (\mathbb{N} \setminus (A \cap B))$ ve her $k > k_0$ için $|(x_k + y_k) - (L_1 + L_2)| < \varepsilon$ olduğunu gösterelim. Önce belirtelim ki sıfır yoğunluklu iki cümlenin arakesiti de sıfır yoğunluklu olacaktır. $A \cap B$ cümlesi sıfır yoğunlukludur. O halde her $k \in (\mathbb{N} \setminus (A \cap B))$ ve her $k > k_0$ için

$$|(x_k + y_k) - (L_1 + L_2)| \leq |x_k - L_1| + |y_k - L_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

olduğundan, her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : |(x_k + y_k) - (L_1 + L_2)| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olup

$$S\text{-}\lim (x + y) = L_1 + L_2$$

elde ederiz.

(ii) Eğer $\alpha = 0$ ise $\alpha x = 0$ olup $\alpha x_k \rightarrow 0$ dir.

Şimdi $\alpha \neq 0$ olmak üzere $S\text{-}\lim x = L_1$ olsun. Bu durumda, $A \subseteq \mathbb{N}$ için $\delta(A) = 0$ olduğunda, $\varepsilon > 0$ verildiğinde her $k > k_0$ ve her $k \in (\mathbb{N} \setminus A)$ için $|x_k - L_1| < \varepsilon/|\alpha|$ olacak şekilde $k_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Böylece her $k \in (\mathbb{N} \setminus A)$ ve her $k > k_0$ için

$$|\alpha x_k - \alpha L_1| = |\alpha| |x_k - L_1| < |\alpha| \frac{\varepsilon}{|\alpha|} = \varepsilon$$

olup, her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : |\alpha x_k - \alpha L_1| \geq \varepsilon\}| = 0$$

elde edilir, yani $S\text{-}\lim (\alpha x) = \alpha L_1$.

1.3. İstatistiksel Cauchy Dizisi

Bu kısımda Cauchy yakınsaklık kriterinin bir benzeri olarak İstatistiksel Cauchy dizisi tanımlanacak ve bu kavramın istatistiksel yakınsaklığa denk olduğu gösterilecektir.

TANIM 1.3.1: Her $\varepsilon > 0$ için bir $N = N(\varepsilon)$ sayısı mevcut ve h.h.k için $|x_k - x_N| < \varepsilon$ ise yani her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - x_N| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise $x = (x_k)$ dizisine İstatistiksel Cauchy dizisi denir ([9] Fridy 1985).

TEOREM 1.3.2: Aşağıdaki önermeler denktir.

(i) x dizisi istatistiksel yakınsaktır.

(ii) x istatistiksel Cauchy dizisidir.

(iii) h.h.k için $x_k = y_k$ olacak şekilde yakınsak bir y dizisi vardır ([9] Fridy 1985).

İspat: (i) \Rightarrow (ii) olduğunu gösterelim.

S - lim $x = L$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Bu durumda, h.h.k için $|x_k - L| < \varepsilon/2$ dir.

Eğer N , $|x_N - L| < \varepsilon/2$ olacak şekilde seçilirse,

$$|x_k - x_N| = |x_k - L + L + x_N| \leq |x_k - L| + |x_N - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

yani

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - x_N| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olduğundan $x = (x_k)$ bir istatistiksel Cauchy dizisidir.

(ii) \Rightarrow (iii): $I = [x_N - 1, x_N + 1]$ aralığı h.h.k için x terimini içerecek şekilde bir N sayısı seçelim. Yine $\Gamma = [x_M - \frac{1}{2}, x_M + \frac{1}{2}]$ aralığı h.h.k için x_k terimini içerecek şekilde bir M seçelim. Şimdi iddia ediyoruz ki h.h.k için $I_1 = I \cap \Gamma$ aralığı, x_k terimini içerir. Şimdi bunu gösterelim:

$$\{k \leq n : x_k \notin I \cap \Gamma\} = \{k \leq n : x_k \notin I\} \cup \{k \leq n : x_k \notin \Gamma\}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} |\{k \leq n : x_k \notin I \cap \Gamma\}| &= |\{k \leq n : x_k \notin I\} \cup \{k \leq n : x_k \notin \Gamma\}| \\ &\leq |\{k \leq n : x_k \notin I\}| + |\{k \leq n : x_k \notin \Gamma\}| \end{aligned}$$

olup

$$\begin{aligned} \lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : x_k \notin I \cap \Gamma\}| &\leq \lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : x_k \notin I\}| + \lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : x_k \notin \Gamma\}| \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. O halde

$$\lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : x_k \notin (I \cap \Gamma)\}| = 0$$

dır.

Bu nedenle h.h.k için I_1 , x_k terimini içeren ve boyu $|I_1| = |x_M + \frac{1}{2} - x_M + \frac{1}{2}| = 1$ olan kapalı bir aralıktır. Benzer şekilde $N(2)$ seçelim. Bu durumda h.h.k için $I'' = [x_{N(2)} - \frac{1}{4}, x_{N(2)} + \frac{1}{4}]$ aralığı x_k terimini içerir ve $I_2 = I_1 \cap I''$ h.h.k için x_k terimini içeren ve boyu $|I_2| = |x_{N(2)} + \frac{1}{4} - x_{N(2)} + \frac{1}{4}| = \frac{1}{2}$ olan kapalı bir aralıktır.

Bu şekilde devam edersek her $m \in \mathbb{N}$ için kapalı aralıkların $\{I_m\}_{m=1}^{\infty}$ dizisini buluruz. Bu durumda I_m , h.h.k x_k terimini içeren ve boyu

$$|I_m| = \left| x_{N(m)} + \frac{1}{2^m} - x_{N(m)} + \frac{1}{2^m} \right| = 2 \cdot \frac{1}{2^m} = 2^{1-m}$$

olan kapalı bir aralıktır. İççe aralıklar teoreminden, $\bigcap_{m=1}^{\infty} I_m$ 'e eşit olan bir λ sayısı vardır. h.h.k için $x_k \in I_m$ olduğundan, $n > T_m$ için

$$\frac{1}{n} |\{k \leq n : x_k \notin I_m\}| < \frac{1}{m} \quad (1)$$

olacak şekilde pozitif tam sayıların artan bir $\{T_m\}_{m=1}^{\infty}$ dizisini bulabiliriz. Şimdi $k > T_1$ ve $T_m < k \leq T_{m+1}$ ise $x_k \notin I_m$ olacak şekilde x_k 'nin bütün terimlerinden oluşan x 'in bir z alt dizisini tanımlayalım. Bundan sonra yine

$$y_k = \begin{cases} \lambda & , \text{ eğer } x_k, z \text{ nin bir terimi ise} \\ x_k & , \text{ diğer durumda} \end{cases}$$

şeklinde bir y dizisi tanımlayalım. Eğer $\varepsilon > \frac{1}{m} > 0$ ve $k > T_m$ ise x_k ya z nin bir terimidir ki bu durumda $y_k = \lambda$, ya da $y_k = x_k \in I_m$ ve $|y_k - \lambda|$ nin boyu $|y_k - \lambda| \leq |I_m| \leq 2^{1-m}$ dir. O halde $m \rightarrow \infty$ için $2^{1-m} \rightarrow 0$ olacağından $y_k \rightarrow \lambda$ elde edilir.

Şimdi h.h.k için $x_k = y_k$ olduğunu iddia ediyoruz. Bunu göstermek için $T_m < n < T_{m+1}$ ise bu durumda

$$\{k \leq n : y_k \neq x_k\} \subseteq \{k \leq n : x_k \notin I_m\}$$

dır.

(1) den,

$$\frac{1}{n} |\{k \leq n : y_k \neq x_k\}| \leq \frac{1}{n} |\{k \leq n : x_k \notin I_m\}| < \frac{1}{m}$$

elde edilir. $m \rightarrow \infty$ için limit alınır

$$\lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : y_k \neq x_k\}| = 0$$

elde edilir. O halde h.h.k için $y_k = x_k$ dir.

(iii) \Rightarrow (i) olduğunu gösterelim.

h.h.k için $x_k = y_k$ olacak şekilde yakınsak bir y dizisi mevcut olsun. $y_k \rightarrow L$ olduğundan, $\varepsilon > 0$ için

$$\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\} \subseteq \{k \leq n : x_k \neq y_k\} \cup \{k \leq n : |y_k - L| \geq \varepsilon\}$$

olup, son cümle tamsayıların sabit bir $\ell = \ell(\varepsilon)$ sayısı içerdiğinden

$$\lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \leq \lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : x_k \neq y_k\}| + \lim_n \frac{\ell}{n}$$

dir. h.h.k için $x_k = y_k$ olduğundan h.h.k için $|x_k - L| < \varepsilon$ elde edilir. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

Şimdi bir ayrıştırma teoremini vereceğiz.

TEOREM 1.3.3: $x = (x_k)$ dizisi bir L sayısına istatistiksel yakınsak olsun.

Bu durumda $x = y + z$ olacak şekilde L sayısına yakınsak olan bir y dizisi ve istatistiksel sıfır z dizisi vardır ([3] Connor 1988).

İspat: $x_k \rightarrow L(S)$ olsun. Bu durumda, $N_0 = 0$ olmak üzere $n > N_j$, ($j = 1, 2, \dots$) için

$$\frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq j^{-1}\}| < j^{-1}$$

olacak şekilde pozitif tam sayıların $N_1 < N_2 < N_3 < \dots < N_j < \dots$ artan bir (N_j) dizisini bulabiliriz. Şimdi y ve z dizilerini aşağıdaki şekilde tanımlayalım:

$$N_0 < k \leq N_1 \text{ olduğunda } z_k = 0 \text{ ve } y_k = x_k$$

alalım $j^{-1} \geq 1$ olmak üzere $N_j < k \leq N_{j+1}$ olsun.

$$|x_k - L| < j^{-1} \text{ olduğunda } z_k = 0 \text{ ve } y_k = x_k$$

ve

$$|x_k - L| \geq j^{-1} \text{ olduğunda } z_k = x_k - L \text{ ve } y_k = L$$

olsun. Bu durumda $x = y + z$ şeklinde yazılabileceği açıktır. Şimdi iddia ediyoruz ki $y_k \rightarrow L$ dir. $\varepsilon > 0$ verilsin ve $\varepsilon > j^{-1}$ olacak şekilde bir j seçelim, $k > N_j$ için

$$|x_k - L| \geq j^{-1} \Rightarrow |y_k - L| = |L - L| = 0$$

ve

$$|x_k - L| < j^{-1} \Rightarrow |y_k - L| = |x_k - L| < j^{-1} < \varepsilon$$

olduğundan $\lim_k y_k = L$ elde edilir.

Şimdi z nin bir istatistiksel sıfır dizisi olduğunu gösterelim. Bunu göstermek için,

$$\lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : z_k \neq 0\}| = 0$$

olduğunu göstermek yeter.

$\varepsilon > 0$ için,

$$\{k \leq n : |z_k| \geq \varepsilon\} \subseteq \{k \leq n : z_k \neq 0\}$$

olduğundan

$$|\{k \leq n : |z_k| \geq \varepsilon\}| \leq |\{k \leq n : z_k \neq 0\}|$$

dir. Şimdi $\delta > 0$ ve $j \in \mathbb{N}$ için $j^{-1} < \delta$ ise her $n > N_j$ için

$$\frac{1}{n} |\{k \leq n : z_k \neq 0\}| < \delta$$

olduğunu göstermeliyiz. $N_j < k \leq N_{j+1}$ olsun. Bu durumda $z_k \neq 0$ olması ancak $|x_k - L| \geq j^{-1}$ olmasıyla mümkündür. O halde $N_j < k \leq N_{j+1}$ ise

$$\{k \leq n : z_k \neq 0\} = \{k \leq n : |x_k - L| \geq j^{-1}\}$$

dir. Dolayısıyla $N_v < n \leq N_{v+1}$ ve $v > j$ ise

$$\frac{1}{n} |\{k \leq n : z_k \neq 0\}| \leq \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq v^{-1}\}| < v^{-1} < j^{-1} < \delta$$

olacaktır. Bu da ispatı tamamlar.

SONUÇ 1.3.4: Bir x dizisi L noktasına istatistiksel yakınsak ise aynı noktaya ordinary anlamda yakınsayan bir alt dizi içerir ([3] Connor 1988).

1.4. İstatistiksel Yakınsaklık ve Toplanabilme

Bu kısımda istatistiksel yakınsaklık ile aritmetik ortalama ve klasik toplanabilme metotları arasındaki ilişki araştırılacaktır.

TEOREM 1.4.1: $S - \lim x = L$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $|x_n| < K$ ise $C_1 - \lim x = L$ dir (yani sınırlı, istatistiksel yakınsak her dizinin aritmetik ortalaması da yakınsaktır) ([22] Schoenberg 1959).

İspat: $L = 0$ alalım ve C_1 - lim $x = 0$ olduğunu gösterelim. O halde

$$\lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - 0| \geq \varepsilon\}| = 0 \quad (2)$$

dır. Diğer yandan

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n} \sum_{v=1}^n x_v \right| &\leq \frac{1}{n} \sum_{v=1}^n |x_v| \\ &= \frac{1}{n} \left(\sum_{\substack{1 \leq v \leq n \\ |x_v| \geq \varepsilon}} |x_v| + \sum_{\substack{1 \leq v \leq n \\ |x_v| < \varepsilon}} |x_v| \right) \\ &\leq \frac{1}{n} \left(\sum_{\substack{1 \leq v \leq n \\ |x_v| \geq \varepsilon}} K + \sum_{\substack{1 \leq v \leq n \\ |x_v| < \varepsilon}} \varepsilon \right) \\ &< \frac{1}{n} K |\{v \leq n : |x_v| \geq \varepsilon\}| + \frac{n}{n} \cdot \varepsilon \end{aligned}$$

(2) den ve $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{v=1}^n x_v = 0$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

$x = (1, 0, 1, 0, \dots)$ şeklinde tanımlanan dizinin aritmetik ortalaması $1/2$ 'ye yakınsaktır. Fakat dizinin kendisi istatistiksel yakınsak değildir. O halde teoremin karşıtı doğru değildir.

Şimdi istatistiksel yakınsaklık metodunun hiç bir matris metodu tarafından içerilmediğini göstereceğiz. Bunun için, önce bir lemma vereceğiz.

LEMMA 1.4.2: Sonsuz çokluktaki k lar için $t_k \neq 0$ olacak şekilde bir dizi t ise, h.h.k için $x_k = 0$ ve $\sum_{k=1}^{\infty} t_k x_k = \infty$ olacak şekilde bir x dizisi vardır ([9] Fridy 1985).

İspat: Her k için $m(k) > k^2$ ve $t_{m(k)} \neq 0$ olacak şekilde pozitif tam sayıların artan bir $\{m(k)\}_{k=1}^{\infty}$ dizisini seçelim.

Şimdi bir x dizisini $x_{m(k)} = \frac{1}{t_{m(k)}}$ ve diğer durumlarda $x_k = 0$ olacak şekilde tanımlayalım. Bu durumda

$$|\{k \leq n : x_k \neq 0\}| \leq \sqrt{n}$$

olup

$$\lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : x_k \neq 0\}| \leq \lim_n \frac{1}{n} \sqrt{n} = 0$$

olduğundan

$$\lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : x_k \neq 0\}| = 0$$

elde edilir.

O halde h.h.k için $x_k = 0$ dir.

$$\sum_{j=1}^{\infty} t_j x_j = \sum_{k=1}^{\infty} t_{m(k)} x_{m(k)} = 1 + 1 + 1 + \dots = \infty$$

dir.

TEOREM 1.4.3: Hiç bir toplanabilme metodu istatistiksel yakınsaklık metodunu içermez ([9] Fridy 1985). (Yani $A \in (S,c;p)$ olacak şekilde hiç bir matris yoktur.)

İspat: Az önceki lemma gereğince istatistiksel yakınsaklığı içeren bir matris satır sonlu olmak zorundadır. O halde satır sonlu keyfi bir matris A olsun. İstatistiksel yakınsaklık metodu regüler olduğundan, A yı regüler almak genellikle birşey kaybettirmez. A matrisinin sıfırdan farklı bir $a_{n(1),k(1)}$ bileşenini

$$k(1) \geq k'(1) \text{ ise } a_{n(1),k(1)} \neq 0$$

$$k > k(1) \text{ ise } a_{n(1),k} = 0$$

olacak şekilde seçelim. Şimdi her m için,

$$k > k(m) \text{ ise } a_{n(m),k} = 0$$

ve

$$k(m) \geq m^2 \text{ ise } a_{n(m),k(m)} \neq 0$$

olmak üzere satır ve sütunların artan bir dizisini seçebiliriz. Şimdi x dizisini aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$x_{k(1)} = \frac{1}{a_{n(1),k(1)}}$$

.

.

.

$$x_{k(m)} = \frac{1}{a_{n(m),k(m)}} \left[m - \sum_{i=1}^{m-1} a_{n(m),k(i)} x_{k(i)} \right]$$

.

.

.

Diğer durumlarda $x_k \equiv 0$. Bu durumda

$$\begin{aligned}
(AX)_{n(m)} &= \sum_{i=1}^m a_{n(m), k(i)} x_{k(i)} = \sum_{i=1}^{m-1} a_{n(m), k(i)} x_{k(i)} + a_{n(m), k(m)} x_{k(m)} \\
&= \sum_{i=1}^{m-1} a_{n(m), k(i)} x_{k(i)} + a_{n(m), k(m)} \frac{1}{a_{n(m), k(m)}} [m - \sum_{i=1}^{m-1} a_{n(m), k(i)} x_{k(i)}] \\
&= m
\end{aligned}$$

olduğundan Ax dönüşüm dizisi sınırlı değildir, dolayısıyla yakınsak değildir; bir başka deyimle, x dizisi A -toplanabilir değildir. Diğer yandan $k(m) \geq m^2$ olduğundan,

$$|\{k \leq n : x_k \neq 0\}| \leq \sqrt{n}$$

olup

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : x_k \neq 0\}| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sqrt{n} = 0$$

olduğundan h.h.k için $x_k = 0$ dır. Dolayısıyla $S - \lim x = 0$ dır. Fakat A , istatistiksel yakınsaklığı içermez.

İstatistiksel yakınsaklık metodu $\{(-1)^k\}$ gibi periyodik bir diziyi toplamaz. Yani $\{(-1)^k\}$ dizisi istatistiksel yakınsak değildir. Bu yüzden istatistiksel yakınsaklık metodu, klasik toplanabilme metodlarının bir çoğunu içermez.

Bu tespitlerimiz, az önceki teorem ile birleştirilirse istatistiksel yakınsaklık metodunun aşikar olmayan herhangi bir matris metodu ile karşılaştırılamayacağını düşünebiliriz. Fakat durumun böyle olmadığını görmek için aşağıdaki örneği gözönüne alalım.

ÖRNEK 1.4.4:

$$a_{nk} = \begin{cases} 1 & , \quad n \text{ bir kare değil ve } k = n \\ \frac{1}{2} & , \quad k = n \text{ veya } k = (m-1)^2 \text{ ve } n = m^2 \\ 0 & , \quad \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde bir $A = (a_{nk})$ matrisi tanımlayalım. Herhangi bir x dizisi için

$$(Ax)_n = \begin{cases} x_1 & , \quad n = 1 \\ \frac{x_{(m-1)^2} + x_{m^2}}{2} & , \quad n = m^2, (m = 1, 2, \dots) \\ x_n & , \quad n \neq m^2 \end{cases}$$

elde edilir. Böylece $A = (a_{nk})$ matrisi üçgen ve regülerdir. A 'nın istatistiksel yakınsaklık tarafından içerildiğini görmek için $\lim_n (Ax)_n = L$ olduğunu kabul edelim.

Bu durumda $\lim_{n \neq m^2} x_n = L$ ve

$$|\{k \leq n : (Ax)_k \neq x_k\}| \leq \sqrt{n}$$

olup

$$\lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : (Ax)_k \neq x_k\}| \leq \lim_n \frac{1}{n} \sqrt{n} = 0$$

dır. Dolayısıyla Teorem 1.3.2 den h.h.k için $(Ax)_n = x_n$ olup $x \rightarrow L(S)$ dir. Ayrıca $A = (a_{nk})$ matrisi ordinary yakınsaklığa denk değildir. Bunun için x dizisini

$$x_k = \begin{cases} (-1)^m & , \quad k = m^2, (m = 1, 2, \dots) \\ 0 & , \quad k \neq m^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda $n > 1$ için $(Ax)_n \rightarrow 0$, $(n \rightarrow \infty)$ dir. Fakat x dizisi yakınsak değildir.

1.5. İstatistiksel Yakınsaklık ve Kuvvetli p-Cesàro Toplanabilme

İstatistiksel yakınsaklık kavramı ve bir dizinin kuvvetli p-Cesàro toplanabilirliği literatürlerde birbirinden bağımsız olarak gelişti ve bunlar ilk oluşumlarından farklı bir gelişme göstermiştir. Şimdi bu iki kavramın genelde ilişkili ve hatta sınırlı diziler için denk olduklarını göstereceğiz. Bunun için önce kuvvetli p-Cesàro toplanabilmenin tanımını verelim.

TANIM 1.5.1: $x = (x_k)$ kompleks terimli bir dizi ve p , pozitif bir reel sayı olsun. Eğer

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k - L|^p = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa x dizisi L sayısına kuvvetli p-Cesàro toplanabilir denir.

Kuvvetli p-Cesàro toplanabilir dizilerin cümlesi ω_p ile gösterilir. O halde, $p > 0$ için

$$\omega_p = \{x = (x_k) : \exists L \in \mathbb{C}, \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k - L|^p \rightarrow 0, n \rightarrow \infty\}$$

TEOREM 1.5.2: $p \in \mathbb{R}$ ve $0 < p < \infty$ olsun.

(i) Bir dizi bir L sayısına kuvvetli p-Cesàro toplanabilir ise L sayısına istatistiksel yakınsaktır.

(ii) Sınırlı bir dizi bir L sayısına istatistiksel yakınsak ise L sayısına kuvvetli p -Cesàro toplanabilirdir ([3] Connor 1988). Bu sonuç Zygmund tarafından da elde edildi ([25] Vol. II, sh. 181). Fakat Zygmund, istatistiksel yakınsaklığı, hemen hemen yakınsaklık olarak adlandırmaktadır. Ancak biz, hemen hemen yakınsaklığı Lorentz [14] anlamında alacağız.

İspat: (i) Bir x dizisi, L sayısına kuvvetli p -Cesàro toplanabilir olsun. O halde her $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n |x_k - L|^p &= \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ |x_k - L| < \varepsilon}} |x_k - L|^p + \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ |x_k - L| \geq \varepsilon}} |x_k - L|^p \\ &\geq \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ |x_k - L| \geq \varepsilon}} |x_k - L|^p \\ &\geq \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ |x_k - L| \geq \varepsilon}} \varepsilon^p \\ &= \varepsilon^p |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $x = (x_k)$ dizisinin L sayısına istatistiksel yakınsak olduğu görülür.

(ii) Şimdi sınırlı $x = (x_k)$ dizisi, L sayısına istatistiksel yakınsak ve $K = \|x\|_\infty + |L|$ olsun. $\varepsilon > 0$ verilsin. Her $n > N_\varepsilon$ için $L_n := \{k \leq n : |x_k - L| \geq (\frac{\varepsilon}{2})^{1/p}\}$ ve

$$\frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq (\frac{\varepsilon}{2})^{1/p}\}| < \frac{\varepsilon}{2K^p}$$

olacak şekilde bir $N_\varepsilon > 0$ sayısı seçelim.

$x = (x_k)$ dizisi sınırlı olduğundan $\|x\|_\infty = \sup |x_k|$ ise

her k için $|x_k - L| \leq \|x - L\|_\infty \leq \|x\|_\infty + |L| = K$ olup her k için $|x_k - L|^p \leq K^p$ dir.

Şimdi $n > N_\varepsilon$ için

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k - L|^p &= \frac{1}{n} \left(\sum_{\substack{k \in L_n \\ k \leq n}} |x_k - L|^p + \sum_{\substack{k \notin L_n \\ k \leq n}} |x_k - L|^p \right) \\ &\leq \frac{1}{n} (|L_n| K^p + (n - |L_n|) \frac{\varepsilon}{2}) \\ &< \frac{1}{n} \left(\frac{n\varepsilon}{2K^p} K^p + n \frac{\varepsilon}{2} \right) \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. O halde $x = (x_k)$ dizisi L sayısına kuvvetli p -Cesàro toplanabilir.

SONUÇ 1.5.3: Sınırlı diziler üzerinde kuvvetli p -Cesàro toplanabilme ile istatistiksel yakınsaklık denktir, yani $p > 0$ için $\omega_p \cap \ell_\infty = S \cap \ell_\infty$

Şimdi Teorem 1.1.3 ve Teorem 1.5.2 kullanılarak istatistiksel yakınsaklık için kriterler verebiliriz.

SONUÇ 1.5.6: Kompleks terimli bir x dizisi bir L sayısına kuvvetli p -Cesàro toplanabilir veya L sayısına istatistiksel yakınsak ise x , L sayısına yakınsayan bir alt diziye sahiptir ([3] Connor 1988).

Bu sonucu sınırlı Cesàro toplanabilir dizilerin istatistiksel yakınsak olmadığını göstermek için kullanabiliriz.

Örneğin $(0, 1, 0, 1, \dots)$ dizisi $1/2$ ye Cesàro toplanabilir. Fakat dizinin $1/2$ ye yakınsayan hiç bir alt dizisi yoktur. Dolayısıyla bu dizi istatistiksel yakınsak değildir.

Buck ([2] Teorem 3.2) de, $\{S_n\}$ reel bir sayı dizisi, L sonlu bir sayı olmak üzere $\liminf_n s_n = L$ ve $C_1 - \lim s_n = L$ olduğunda h.h.n için $\{s_n\}$ dizisinin L sayısına yakınsak olduğunu göstermiştir.

Kısım 1.2 de yaptığımız incelemelerden anlaşılacağı gibi $\{s_n\}$ dizisi verilen hipotezler altında L sayısına istatistiksel yakınsaktır. Burada şunu hemen belirtelim ki, bu sonuç \liminf yeriren \limsup alındığında gene doğrudur. O halde Sonuç 1.5.6 nın bir kısmı karşıtı olarak Buck'ın teoremini aşağıdaki şekilde verebiliriz.

SONUÇ 1.5.7: x reel terimli bir dizi olsun. Bu durumda $\liminf_n x_n = L$ ve $C_1 - \lim x = L$ ise $x_n \rightarrow L(S)$ dir ([3] Connor 1988).

SONUÇ 1.5.8: Teorem 1.4.4'de $A \in (S, c, p)$ olacak şekilde hiçbir A matrisinin olmayacağı gösterildi. Bununla birlikte $\omega_p \cap \ell_\infty = S \cap \ell_\infty$ olmasından yararlanarak, $A \in (S \cap \ell_\infty, c)$ olacak şekilde A matrislerinin sınıfını aşağıdaki teoremden belirteceğiz.

TEOREM 1.5.9: $p > 0$ olsun. $A \in (\ell_\infty \cap \omega_p, c)$ olması için gerek ve yeter koşul $A \in (c, c)$ ve sıfır yoğunluğa sahip her E cümlesi için

$$\sum_{k \in E} |a_{nk} - a_k| \rightarrow 0, (n \rightarrow \infty)$$

olmasıdır ([15] Maddox 1974).

İspat: Yeterlilik. $A \in (c, c)$ ve sıfır yoğunluğa sahip bir E cümlesi için

$$\sum_{k \in E} |a_{nk} - a_k| \rightarrow 0, (n \rightarrow \infty)$$

olmak üzere ve $x \in \ell_\infty$ ve $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k - L|^p \rightarrow 0, (n \rightarrow \infty)$ olsun.

Şimdi $(Ax) \in c$ olduğunu gösterelim. $x \in \ell_\infty$ olduğundan ve Teorem 1.4.1 (i) den

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_n x_k| \leq \|x\| \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| < \infty$$

olup, her n için $A_n(x)$ mevcuttur.

$$(Ax)_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} (x_k - L) + L \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}$$

yazılabilir.

$$s_n := \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} (x_k - L) \quad \text{ve} \quad t_n := L \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}$$

olsun. Teorem 1.2.4 (ii) den $\lim_n t_n = L \alpha_1$ mevcuttur.

$$a_{nk} = \sum_{m=k}^{\infty} a_{nm} - \sum_{m=k+1}^{\infty} a_{nm}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \lim_n a_{nk} &= \lim_n \sum_{m=k}^{\infty} a_{nm} - \lim_n \sum_{m=k+1}^{\infty} a_{nm} \\ &= \alpha_k - \alpha_{k+1} \end{aligned}$$

elde edilir. $a_k := \lim_n a_{nk}$ olsun. Bu durumda $a_k := \alpha_k - \alpha_{k+1}$ olur. Diğer yandan,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty \quad \text{olduğu kolayca görülebilir.}$$

Şimdi $s_n \rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x_k - L)$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} s_n - \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x_k - L) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}(x_k - L) - \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x_k - L) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (a_{nk} - a_k)(x_k - L) \end{aligned}$$

yazılabilir. Ayrıca

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk} - a_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| + \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} \sup_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk} - a_k| &\leq \sup_n \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| + \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \right\} \\ &\leq \sup_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| + \sup_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \\ &< \infty \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi $\varepsilon > 0$ olsun ve $E = \{k : |x_k - L| \geq \varepsilon\}$ diyelim.

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k - L| &= \frac{1}{n} \sum_{k \in E} |x_k - L| + \frac{1}{n} \sum_{k \notin E} |x_k - L| \\ &\geq \frac{1}{n} \sum_{k \in E} |x_k - L| \\ &= \frac{1}{n} |\{k : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \end{aligned}$$

olup $x \rightarrow L(\omega_1)$ olduğundan $E = \{k : |x_k - L| \geq \varepsilon\}$ cümlesi sıfır yoğunluktur. Ayrıca her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}
v_n &:= \sum_{k \in E} |a_{nk} - a_k| |x_k - L| + \sum_{k \notin E} |a_{nk} - a_k| |x_k - L| \\
&\leq \sup_k |x_k - L| \sum_{k \in E} |a_{nk} - a_k| + \varepsilon \|A\|
\end{aligned}$$

olup, $v_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) dir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}
\lim_n (Ax)_n &= \lim_n s_n + \lim_n t_n \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} a_k (x_k - L) + L \alpha_1
\end{aligned}$$

olup,

$$A \in (\mathcal{L}_{\infty} \cap \omega_p, c)$$

elde edilir.

Gereklilik: $A \in (\mathcal{L}_{\infty} \cap \omega_p, c)$ olsun. $c \subset \mathcal{L}_{\infty} \cap \omega_p$ olmasından $A \in (c, c)$

elde edilir. Şimdi sıfır yoğunluklu bir E cümlesi için $\sum_{k \in E} |a_{nk} - a_k| \not\rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$)

olduğunu kabul edelim. Bu durumda E sonsuz elemanlı bir cümle olduğundan, $E := \{e_1, e_2, \dots\}$ kabul edelim. Diğer yandan biliniyor ki,

$A \in (\mathcal{L}_{\infty}, c)$ olması için gerek ve yeter koşul A matrisinin yakınsak kolonlara sahip olması, A matrisinin satırları ve $\lim_n a_{nk} = a_k$ nın \mathcal{L} ye ait olması ve de

$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk} - a_k| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) olmasıdır ([24] Wilansky sh. 15, Teorem 18).

O halde bu teorem yardımıyla $(\sum_{k \in E} (a_{nk} - a_k) z_k)$ dizisi iraksak olacak şekilde bir

$z = \{z_{e_1}, z_{e_2}, \dots\}$ dizisi vardır.

Şimdi $x = (x_k)$ dizisini,

$$x_k = \begin{cases} z_k & , \quad k = e_i \\ 0 & , \quad k \neq e_i \end{cases}$$

ile tanımlayalım. Bu durumda $x \in \mathcal{L}_\infty$ olduğu açıktır. O halde her $k \in \mathbb{N}$ için $|x_k| \leq K$ olacak şekilde pozitif bir K reel sayısı vardır.

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k|^p &= \frac{1}{n} \sum_{k \in E} |x_k|^p + \frac{1}{n} \sum_{k \notin E} |x_k|^p \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k \in E} |x_k|^p \\ &\leq \frac{1}{n} K^p |E_n| \end{aligned}$$

olup E sıfır yoğunluğa sahip olduğundan, $x_k \rightarrow 0(\omega_p)$ elde edilir. Böylece $x \in \mathcal{L}_\infty \cap \omega_p$ olup $x \notin c_A$ dır. Bu ise $A \in (\mathcal{L}_\infty \cap \omega_p, c)$ olmasıyla çelişir. Bu da ispatı tamamlar.

1.6. İstatistiksel Yakınsaklık için Tauber Teoremleri

Bu kısımda istatistiksel yakınsaklık ile ilgili iki Tauber teoremi verip bu teoremleri kuvvetli p -Cesàro toplanabilmeye genişleteceğiz. Toplanabilirlikten seri ya da dizilerin yakınsaklıklarını elde etmeye yarayan teoremlere Tauber teoremleri denir. Bir x dizisi için $\Delta x := x_k - x_{k+1}$ olarak alınacaktır.

TEOREM 1.6.1: $x_k \rightarrow L(S)$ ve $\Delta x_k = O\left(\frac{1}{k}\right)$ ise $x_k \rightarrow L$ dır ([9] Fridy 1985).

İspat: $x_k \rightarrow L(S)$ olsun. Teorem 1.3.2 kullanılarak h.h.k için $x_k = y_k$ ve $y_k \rightarrow L$ olacak şekilde bir y dizisi seçelim. $m(k) = \max \{i \leq k : x_i = y_i\}$ olmak üzere her k için $k = m(k) + p(k)$ yazalım. $\{i \leq k : x_i = y_i\}$ cümlesi boş ise $m(k) = -1$ alalım. Şimdi

$$\lim_k \frac{p(k)}{m(k)} = 0 \quad (3)$$

olduğunu iddia ediyoruz. Eğer $\frac{p(k)}{m(k)} > \varepsilon > 0$ ise

$$|\{i \leq k : x_i \neq y_i\}| \leq |\{i \leq k : x_i = y_i\}| \leq m(k)$$

$$\frac{1}{k} |\{i \leq k : x_i \neq y_i\}| \leq \frac{m(k)}{k} = \frac{m(k)}{m(k) + p(k)}$$

$\frac{p(k)}{m(k)} > \varepsilon \Rightarrow p(k) > \varepsilon m(k)$ olup, $p(k) + m(k) > m(k) + \varepsilon m(k) = (1 + \varepsilon) m(k)$ yani

$$\frac{m(k)}{p(k) + m(k)} < \frac{1}{1 + \varepsilon}$$

elde edilir. O halde,

$$\frac{1}{k} |\{i \leq k : x_i \neq y_i\}| < \frac{1}{1 + \varepsilon}$$

olacaktır. Bu ise $\delta \{i \leq k : x_i \neq y_i\} = 0$ olmasıyla çelişir. Böylece sonsuz çokluktaki k lar için $\frac{p(k)}{m(k)} \geq \varepsilon$ ise h.h.k için $x_k = y_k$ gerçekleşmez, demek ki (3) gerçekleşir.

Şimdi $y_{m(k)}$ ile x_k arasındaki farkı gözönüne alalım. $\Delta x_k = O(1/k)$ olduğundan, her k için $|\Delta x_k| \leq B/k$ olacak şekilde bir $B > 0$ vardır. O halde,

$$\begin{aligned} |y_{m(k)} - x_k| &= |x_{m(k)} - x_{m(k)+p(k)}| \\ &= |x_{m(k)} - x_{m(k)+1} + x_{m(k)+1} - x_{m(k)+2} + \dots + x_{m(k)+p(k)-1} - x_{m(k)+p(k)}| \\ &\leq |x_{m(k)} - x_{m(k)+1}| + |x_{m(k)+1} - x_{m(k)+2}| + \dots + |x_{m(k)+p(k)-1} - x_{m(k)+p(k)}| \\ &= \sum_{i=m(k)}^{m(k)+p(k)-1} |\Delta x_i| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{i=m(k)}^{m(k)+p(k)-1} \frac{B}{i} \\ &\leq \frac{p(k)B}{m(k)} \end{aligned} \quad (4)$$

Diğer yandan $\lim_k \frac{p(k)}{m(k)} = 0$ ve $y_k \rightarrow L$ olduğundan, (4) ifadesi $x_k \rightarrow L$ olmasını gerektirir. Bu da ispatı tamamlar.

TEOREM 1.6.2: $\liminf_i \frac{k(i+1)}{k(i)} > 1$ olacak şekilde pozitif tam sayıların artan bir dizisi $\{k(i)\}_{i=1}^{\infty}$ ve $x = (x_k)$ bir boşluk dizisi (yani $i = 1, 2, \dots$ için $k \neq k(i)$ ise $\Delta x_k = 0$) olsun. Eğer $x_k \rightarrow L(S)$ ise $x_k \rightarrow L$ dir ([9] Fridy 1985).

İspat: $\liminf_i \frac{k(i+1)}{k(i)} = 1 + 2\delta > 1$ ise yeterince büyük i için,

$$\frac{k(i+1)}{k(i)} > 1 + \delta > 1 \quad (5)$$

veya

$$k(i+1) - k(i) > \delta k(i)$$

dir. Bu nedenle $(i+1)$ inci blokta bulunan terimlerin sayısı $\delta k(i)$ den büyüktür. Şimdi $x_k \not\rightarrow L$ olduğunu kabul edelim ve $\varepsilon > 0$ seçelim. Böylece yeterince büyük k için $|x_k - L| \geq \varepsilon$ dir. O halde i , (5) ifadesini sağlayacak biçimde yeterince büyük bir sayı olmak üzere, eğer k , $(i+1)$ inci bloktan seçilirse

$$|\{k \leq k(i+1) : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| > k(i+1) - k(i)$$

yani

$$\frac{1}{k(i+1)} |\{k \leq k(i+1) : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| > \frac{k(i+1) - k(i)}{k(i+1)} \quad (6)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
 k(i+1) > (1+\delta)k(i) &\Rightarrow \frac{k(i)}{k(i+1)} < \frac{1}{1+\delta} \\
 &\Rightarrow 1 - \frac{k(i)}{k(i+1)} > 1 - \frac{1}{1+\delta} \\
 &\Rightarrow \frac{k(i+1) - k(i)}{k(i+1)} > \frac{\delta}{1+\delta}
 \end{aligned}$$

olduğundan, (6) ifadesi

$$\frac{1}{k(i+1)} |\{k \leq k(i+1) : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| > \frac{k(i+1) - k(i)}{k(i+1)} > \frac{\delta}{1+\delta}$$

şeklinde yazılabilir. Böylece

$$\frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \not\rightarrow 0 .$$

O halde $x_k \not\rightarrow L(S)$ dir. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 1.6.1 ve 1.6.2 yardımıyla aşağıdaki sonuçları ispatsız verebiliriz:

SONUÇ 1.6.3 : $x = (x_k)$ dizisi L sayısına kuvvetli p -cesâro toplanabilir veya L 'ye istatistiksel yakınsak ve $\Delta x_k = 0 \left(\frac{1}{k}\right)$ ise $x = (x_k)$ dizisi L ye yakınsaktır ([3] Connor 1988).

SONUÇ 1.6.4: $\liminf_i \frac{k(i+1)}{k(i)} > 1$ olacak şekilde pozitif tamsayıların artan bir dizisi $\{k(i)\}_{i=1}^{\infty}$ ve $x = (x_k)$ bir boşluk dizisi (yani $i = 1, 2, \dots$ için $k \neq k(i)$) ise $\Delta x_k = 0$ olsun. $x = (x_k)$ dizisi L sayısına kuvvetli p -cesâro toplanabilir veya istatistiksel yakınsak ise $x = (x_k)$ dizisi L sayısına yakınsaktır ([3] Connor 1988).

1.7. İstatistiksel Yakınsak Dizilerin Topolojik Özellikleri

Bu kısımda $S_b := S \cap \mathcal{L}_\infty$ olmak üzere istatistiksel yakınsak diziler uzayının bazı topolojik özellikleri verilip, bir FK-Uzayı oluşturmadığı gösterilecektir.

TEOREM 1.7.1: S_b uzayı, \mathcal{L}_∞ normlu lineer uzayının kapalı bir alt lineer uzayıdır.

Bu teorem ilk defa T. Salat tarafından 1980'de ispatlandı. Ancak aşağıdaki ispat Connor'ın [5] Önerme. 4'ün bir modifikasyonudur:

İspat: Daima $S_b \subset \overline{S_b}$ olduğundan ispat için $\overline{S_b} \subset S_b$ olduğunu göstermek yeter. $y \in \overline{S_b}$ olsun. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ için

$B(y, \frac{\varepsilon}{2}) \cap S_b \neq \emptyset$ olacaktır. O halde $x \in S_b$ ve $x \in B(y, \frac{\varepsilon}{2})$ olacak şekilde bir x elemanı vardır. $x \in B(y, \frac{\varepsilon}{2})$ olduğundan $\|y - x\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$ gerçekleşir.

Eğer $|y_k| \geq \varepsilon$ ve $|x_k - y_k| < \frac{\varepsilon}{2}$ ise $|x_k| \geq \frac{\varepsilon}{2}$ dir. Böylece

$$\{k : |y_k| \geq \varepsilon\} \subseteq \{k : |x_k| \geq \frac{\varepsilon}{2}\} \quad (7)$$

elde edilir. Fakat $x \in S_b$ olduğundan $\{k : |x_k| \geq \frac{\varepsilon}{2}\}$ cümlesi sıfır yoğunlukludur. O halde (7) den $\{k : |y_k| \geq \varepsilon\}$ cümleside sıfır yoğunluklu olup $y \in S_b$ dir. Yani $\overline{S_b} \subset S_b$ olduğunu gösterdik. Dolayısıyla $S_b = \overline{S_b}$ olup S_b, \mathcal{L}_∞ içinde kapalıdır.

TEOREM 1.7.2: S_b cümlesi, \mathcal{L}_∞ içinde hiç bir yerde yoğun değildir ([21] Salat 1980).

İspat: Keyfi bir E normlu lineer uzayının E den farklı her kapalı alt lineer uzayının E içinde hiçbir yerde yoğun olmadığı biliniyor ([13] Kolodiej Sh. 37). İspatı

tamamlamak için Teorem 1.7.1 den $S_b \neq \mathcal{L}_\infty$ olduğunu göstermek yeterlidir. Bunun için $x = \{(-1)^k\}_{k=1}^\infty$ dizisini gözönüne alalım. $x \in \mathcal{L}_\infty$ olmasına rağmen $x \notin S_b$ dir. Buda ispatı tamamlar.

Şimdi istatistiksel yakınsak diziler uzayının bir FK-uzayı oluşturmadığını göstereceğiz. Ancak, bunu göstermek için Topolojik Vektör uzaylarının çok teknik bilgilerine ihtiyacımız vardır. Bu nedenle, konuyu fazla dağıtmamak için, ilgili teoremleri ispatsız olarak vermekle yetineceğiz.

TEOREM 1.7.3: F , ω nın yoğun bir alt uzayı olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir.

(i) F fiçilidir

(ii) E , F yi içeren lokal konveks bir FK-uzayı ise $E = \omega$ dir ([1] Benett ve Kalton 1973).

Bu teorem [1] de elde edilen sonuçların bir kısıtlaması olup [23] de daha ayrıntılı bilgi bulunabilir.

LEMMA 1.7.4: S cümlesi, ω cümlesinin yoğun, fiçili bir alt uzayıdır ([3] Connor 1988).

Şimdi Teorem 1.7.3'ün bir sonucu olarak aşağıdaki teoremi verebiliriz.

TEOREM 1.7.5: E , $S \subseteq E$ olacak şekilde lokal konveks bir FK-uzayı ise $E = \omega$ dir ([3] Connor 1988).

Bu teorem S cümlesinin lokal konveks bir FK-uzayı olmadığını gösterir. Çünkü $\omega S \neq \emptyset$ dir.

1.8. İstatistiksel Yakınsaklığın Matris Karakterizasyonu

Bu kısımda klasik matris metodlarının özel bir sınıfının arakesiti ile matris toplanabilme ve istatistiksel yakınsaklık arasında kuvvetli bir ilişki kurulacaktır.

$x = (x_k)$ herhangi bir dizi ve $A = (a_{nk})$ bir sonsuz matris olmak üzere n -inci terimi $(Ax)_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k$ ile verilen dizi Ax olsun.

Eğer her $n \in \mathbb{N}$ için $((Ax)_n)$ dizisi yakınsak ve $\lim_n (Ax)_n = L$ ise $x = (x_k)$ dizisi L sayısına A -limitlenebilir (ya da A -toplanabilir) denir. Bu durum çoğu zaman $A - \lim x = L$ ile gösterilir.

Matris toplanabilme ve istatistiksel yakınsaklık arasında kesin bir sonuç elde etmek için matrislerin aşağıdaki sınıfını tanıtalım: Alt üçgensel negatif olmayan reel terimli $A = (a_{nk})$ matrislerinin

$$(i) \text{ Her } n \in \mathbb{N} \text{ için } \sum_{k=1}^n a_{nk} = 1$$

$$(ii) K \subseteq \mathbb{N} \text{ olmak üzere } \delta(K) = 0 \text{ ise } \lim_{k \in K} \sum a_{nk} = 0$$

koşullarını gerçekleyen sınıfı τ olsun.

τ sınıfına ait her bir A matrisi negatif olmayan terimli olduğundan (i) ve (ii) koşulları, A matrisinin regüleriği için Silverman-Toeplitz koşullarının gerçekleşmesini temin eder.

İlgili karakterizasyonu verebilmek için, ispatsız olarak vereceğimiz aşağıdaki Lemma'ya ihtiyacımız vardır. Özellikle bu kısımda matris ve diziler reel terimli olacaktır.

LEMMA 1.8.1: Reel terimli sınırlı bir $x = (x_k)$ dizisi istatistiksel yakınsak değil ise $\{n \in \mathbb{N} : x_n < \lambda\}$ ve $\{n \in \mathbb{N} : x_n > \mu\}$ cümleleri sıfır yoğunluğa sahip olmayacak şekilde $\lambda < \mu$ reel sayıları vardır ([10] Fridy ve Miller 1991).

TEOREM 1.8.2: Sınırlı bir $x = (x_k)$ dizisinin L sayısına istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter koşul her $A \in \tau$ için $x = (x_k)$ dizisinin L sayısına A -toplanabilir olmasıdır ([10] Fridy ve Miller 1991).

İspat: Gereklilik: $S\text{-lim } x = L$ olsun. Ayrıca $A \in \tau$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Bu durumda $K = \{k \in \mathbb{N} : |x_k - L| \geq \varepsilon\}$ olmak üzere $\delta(K) = 0$ dir. O halde,

$$\begin{aligned} |(Ax)_n - L| &= \left| \sum_{k=1}^n a_{nk} (x_k - L) \right| \\ &= \left| \sum_{k \notin K} a_{nk} (x_k - L) + \sum_{k \in K} a_{nk} (x_k - L) \right| \\ &\leq \left| \sum_{k \notin K} a_{nk} (x_k - L) \right| + \left| \sum_{k \in K} a_{nk} (x_k - L) \right| \\ &\leq \sum_{k \notin K} a_{nk} |x_k - L| + \sum_{k \in K} a_{nk} |x_k - L| \\ &\leq \varepsilon \sum_{k \notin K} a_{nk} + (\sup_k |x_k - L|) \sum_{k \in K} a_{nk} \end{aligned}$$

elde edilir. Her iki tarafın $n \rightarrow \infty$ için limiti alınırsa

$$\begin{aligned} \lim_n |(Ax)_n - L| &\leq \lim_n \left(\varepsilon \sum_{k \notin K} a_{nk} + \sup_k |x_k - L| \sum_{k \in K} a_{nk} \right) \\ &= \varepsilon \lim_n \sum_{k \notin K} a_{nk} + \sup_k |x_k - L| \lim_n \sum_{k \in K} a_{nk} \end{aligned} \quad (8)$$

bulunur. Diğer yandan A regüler olduğundan

$$\begin{aligned} 1 &= \lim_n \sum_{k=1}^n a_{nk} = \lim_n \left(\sum_{k \notin K} a_{nk} + \sum_{k \in K} a_{nk} \right) \\ &= \lim_n \sum_{k \notin K} a_{nk} + \lim_n \sum_{k \in K} a_{nk} \end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece (ii), $\lim_n \sum_{k \notin K} a_{nk} = 1$ olmasını gerektirir.

O halde (8) den, ε keyfi olduğundan, $\lim_n |(Ax)_n - L| = 0$. Yani $\lim_n (Ax)_n = L$ buluruz.

Yeterlilik: S-lim $x \neq L$ olsun, $x = (x_k)$ dizisi $M \neq L$ sayısına istatistiksel yakınsak ise gereklilikten her $A \in \tau$ için $\lim_n (Ax)_n = M \neq L$. O halde $x = (x_k)$ dizisinin istatistiksel yakınsak olmadığını kabul edelim. Bu durumda Lemma 1.8.1 den $U = \{k \in \mathbb{N} : x_k < \lambda\}$ ve $V = \{k \in \mathbb{N} : x_k > \mu\}$ cümleleri sıfır yoğunluğa sahip olmayacak şekilde $\lambda < \mu$ reel sayıları vardır. Bu nedenle her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\frac{1}{u_k} |\{n \in U : n \leq u_k\}| > \varepsilon$$

ve

$$\frac{1}{v_k} |\{n \in V : n \leq v_k\}| > \varepsilon$$

olacak şekilde $\varepsilon > 0$ ve $U' = \{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subset U$, $V' = \{v_k\}_{k=1}^{\infty} \subset V$ alt cümleleri vardır.

$U \cap V = \emptyset$ olduğundan U' ve V' ayrıktır. Şimdi bir $A = (a_{nk})$ matrisini

$$a_{nk} = \begin{cases} 0 & , k > n \\ \frac{1}{n} & , n \notin U' \cup V' \text{ ve } k \leq n \\ \frac{1}{|U_n|} & , k \in U_n \text{ ve } n \in U' \\ \frac{1}{|V_n|} & , k \in V_n \text{ ve } n \in V' \end{cases}$$

ile tanımlayalım. Bu durumda $A \in \tau$ olup,

$$n \in U \text{ için } (Ax)_n < \lambda$$

fakat

$$n \in V \text{ için } (Ax)_n > \mu$$

olacaktır. Böylece $A \in \tau$ olup $(Ax)_n$ yakınsak değildir. Bu da ispatı tamamlar.

SONUÇ 1.8.3: $S_b = \bigcap_{A \in \tau} c_A$ dir.

Aşağıda $\mathcal{K} := \{A^{(K)} : K \subseteq \mathbb{N} \text{ ve } \delta(K) = 0\}$ matris kolleksiyonunun birleşimini kullanarak istatistiksel yakınsaklığın bir başka karakterizasyonunu vereceğiz: Bir K cümlesi için $A^{(K)}$ matrisi, $n^* := \min \{j > n : j \notin K\}$ olmak üzere,

$$(A^{(K)} x)_n = \begin{cases} x_n & , n \notin K \\ x_{n^*} & , n \in K \end{cases}$$

tanımlasın. O halde aşağıdaki teoremi verebiliriz.

TEOREM 1.8.4: $S - \lim x = L$ olması için gerek ve yeter koşul $\lim_n (A^{(K)} x)_n = L$ olacak şekilde bir $A^{(K)} \in \mathcal{K}$ mevcut olmasıdır ([10] Fridy ve Miller 1991).

İspat: Gereklik: $S - \lim x = L$ olsun. Bu durumda h.h.n için $x_n = y_n$ ve $\lim_n y_n = L$ dir (Teorem 1.3.2). $n^* := \min \{j > n : j \notin K\}$ olmak üzere $A^{(K)}$ nın tanımından,

$$(A^{(K)} x)_n = \begin{cases} x_n = y_{n^*} & , n \notin K \\ y_{n^*} & , n \in K \end{cases}$$

yazılabilir. O halde $\lim_n (A^{(K)} x)_n = \lim_n y_{n^*} = L$ olduğundan $\lim_n (A^{(K)} x)_n = L$ dir.

Yeterlilik: $A^{(K)} \in \mathcal{K}$ için $\lim_n (A^{(K)}x)_n = L$ olsun. Bu durumda her $n \notin K$ için $(A^{(K)}x)_n = x_n$ ve $\delta(K) = 0$ olduğundan $S\text{-}\lim x = L$ dir. Bu da ispatı tamamlar.

$$\text{SONUÇ 1.8.5: } S = \bigcup_{A \in \mathcal{K}} c_A$$

Kısım 1.2'de δ yoğunluğu, C_1 matrisi yerine keyfi negatif olmayan regüler bir A matrisi alınarak genişletilmiş ve bunun istatistiksel yakınsaklığın bir genelleştirmesine karşılık geldiği gösterilmiştir. Her $\varepsilon > 0$ için $\{k \in \mathbb{N} : |x_k - L| \geq \varepsilon\}$ cümlesinin karakteristik dizisi, sıfıra A -toplanabilir ise $\delta_A\text{-}\lim x = L$ yazacağız.

Şimdi δ_A -toplanabilme için Teorem 1.8.2 ye benzer bir sonuç elde edebiliriz. A negatif olmayan regüler bir matris ve negatif olmayan T matrislerinin

$$(i) \text{ Her } n \text{ için } \sum_{k=1}^{\infty} t_{nk} = 1$$

ve

$$(ii) K \subseteq \mathbb{N} \text{ ve } \delta_A(K) = 0 \text{ ise } \lim_n \sum_{k \in K} t_{nk} = 0$$

koşullarını gerçekleyen sınıfı \mathcal{T}_A olsun.

Aşağıdaki sonuç, Teorem 1.8.2'deki gibi ispatlanabileceği için burada ispatını vermeyeceğiz.

TEOREM 1.8.6: Sınırlı bir x dizisi için $\delta_A\text{-}\lim x = L$ olması için gerek ve yeter koşul her $T \in \mathcal{T}_A$ için $\lim_n (Tx)_n = L$ dir ([10] Fridy ve Miller 1991).

BÖLÜM 2

LACUNARY İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK VE TOPLANABİLME

Bu bölümde bir $\{k_r\}$ lacunary dizisi için $\{k \in \mathbb{N} : k \leq n\}$ cümlesi yerine $\{k \in \mathbb{N} : k_{r-1} < k \leq k_r\}$ cümlesi alınarak S_θ ile gösterilen ilgili yakınsaklık kavramı incelenecektir. Daha sonra S_θ ile S arasındaki ilişki verilecek, Cauchy kriterinin S_θ - benzeri tanımlanacak ve diğer toplanabilme metodları ile S_θ -yakınsaklık metodu karşılaştırılacaktır.

Ayrıca S_θ -limit değerinin tekliği sorusu sorulup, S_θ -yakınsaklık için bir Tauber teoremi verilecektir.

2.1. Lacunary İstatistiksel Yakınsaklık

Bu kısımda lacunary dizisi ve lacunary istatistiksel yakınsaklık tanıtılıp bazı toplanabilme metodları ile ilişkisi verilecektir.

TANIM 2.1.1: Pozitif tamsayıların artan bir dizisi $\theta = \{k_r\}$ olsun. Eğer $k_0 = 0$ olmak üzere $r \rightarrow \infty$ için $h_r := k_r - k_{r-1} \rightarrow \infty$ ise $\theta = \{k_r\}$ dizisine lacunary dizisi denir ([8] Freedman, Sember ve Raphael 1978).

Örneğin, $\theta = \{k_r\} = \{2^r\}$, ($r > 0$) veya $\{k_r\} = \{r!\}$ dizileri birer lacunary dizidirler.

Bu kısımda $\theta = \{k_r\}$ lacunary dizisi ile oluşturulan aralıklar $I_r := (k_{r-1}, k_r]$ ile gösterilecek ve $q_r := \frac{k_r}{k_{r-1}}$ olacaktır.

TANIM 2.1.1: $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizisi olsun.

Her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_r \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0 \quad (9)$$

ise $x = (x_k)$ dizisi L sayısına lacunary istatistiksel yakınsak veya S_θ -yakınsaktır denir. Bu durum S_θ - $\lim x = L$ veya $x_k \rightarrow L(S_\theta)$ sembolleriyle gösterilir ([12] Fridy ve Orhan 1992).

$K(\varepsilon) := \{k \in \mathbb{N} : |x_k - L| \geq \varepsilon\}$ cümlesinin karakteristik fonksiyonu $\chi_{K(\varepsilon)}$ ve C_θ matrisi

$$C_\theta[r, k] = \begin{cases} \frac{1}{h_r}, & k \in I_r \\ 0, & k \notin I_r \end{cases}$$

ile tanımlanmak üzere,

$$\frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \chi_{K(\varepsilon)}(k)$$

olduğundan, (9) daki limit $\lim_r (C_\theta \chi_{K(\varepsilon)}) = 0$ şeklinde verilebilir. S_θ -yakınsaklığın bu şekli, [7] ve [4] de tanımlanan “Yoğunlukta Yakınsak” lığın bir parçası gibi görünür.

2.2. İçerme Teoremleri

Bu kısımda ilk olarak S_θ - yakınsaklık ve N_θ arasında bazı içerme bağıntıları verip bunların sınırlı diziler üzerinde eşit olduklarını gösterecek ve $\theta = \{k_r\}$ üzerindeki bazı kısıtlamalar altında $S_\theta \subseteq S$ ve $S \subseteq S_\theta$ içerme bağıntılarını inceleyeceğiz.

TANIM 2.2.1: Herhangi bir $\theta = \{k_r\}$ lacunary dizisi için

$$\lim_r \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} |x_k - L| = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa x , dizisi L sayısına N_θ anlamında yakınsaktır denir ve bu durum $x_k \rightarrow L(N_\theta)$ ile gösterilir. Ayrıca

$$N_\theta := \{x = (x_k) : \lim_{h_r} \left(\frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} |x_k - L| \right) = 0\}$$

dir ([8] Freedman, Sember ve Raphael 1978).

Tanım 1.5.1. de $p = 1$ alınırsa kuvvetli Cesaro toplanabilir dizilerin,

$$|\alpha_1| := \{x : \exists L \text{ için } \lim_{n} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k - L| \right) = 0\}$$

sınıfı elde edilir.

TEOREM 2.2.2: $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizi olsun. Bu durumda

- (i) $x_k \rightarrow L(N_\theta)$ ise $x_k \rightarrow L(S_\theta)$
- (ii) $x \in \ell_\infty$ ve $x_k \rightarrow L(S_\theta)$ ise $x_k \rightarrow L(N_\theta)$
- (iii) $S_\theta \cap \ell_\infty = N_\theta \cap \ell_\infty$

dır ([12] Fridy ve Orhan 1992).

İspat: (i), $\varepsilon > 0$ ve $x_k \rightarrow L(N_\theta)$ olsun. Şimdi

$$\begin{aligned} \sum_{k \in I_r} |x_k - L| &= \sum_{\substack{k \in I_r \\ |x_k - L| \geq \varepsilon}} |x_k - L| + \sum_{\substack{k \in I_r \\ |x_k - L| < \varepsilon}} |x_k - L| \\ &\geq \sum_{k \in I_r} |x_k - L| \\ &\geq \sum_{\substack{k \in I_r \\ |x_k - L| \geq \varepsilon}} |x_k - L| = \varepsilon |\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \end{aligned}$$

olduğundan vede

$$\frac{1}{h_r} \varepsilon |\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \leq \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} |x_k - L| \rightarrow 0. (r \rightarrow \infty)$$

olduğundan $x_k \rightarrow L(S_\theta)$ elde edilir.

Burada hemen belirtelim ki (i) deki içerme, kesin içerme bağıntısıdır. Bunu görmek için $\theta = \{k_r\}$ lacunary dizisi verilsin ve I_r aralığında ilk $[\sqrt{h_r}]$ tam sayılarında x_k , $1, 2, \dots, [\sqrt{h_r}]$ ve diğer durumlarda ise $x_k = 0$ şeklinde tanımlanan $x = (x_k)$ dizisini gözönüne alalım. Bu şekilde tanımlanan $x = (x_k)$ dizisi sınırlı değildir. Ayrıca her $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$\frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : |x_k - 0| \geq \varepsilon\}| = \frac{[\sqrt{h_r}]}{h_r} \rightarrow 0. (r \rightarrow \infty)$$

elde edilir. O halde $x_k \rightarrow 0(S_\theta)$ dir.

Diğer yandan

$$\sum_{k \in I_r} |x_k - 0| = \frac{[\sqrt{h_r}]([\sqrt{h_r} + 1])}{2}$$

olup

$$\frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} |x_k - 0| = \frac{1}{h_r} \frac{[\sqrt{h_r}]([\sqrt{h_r} + 1])}{2} \rightarrow \frac{1}{2} \neq 0. (r \rightarrow \infty)$$

elde edilir. O halde $x_k \rightarrow o(N_\theta)$ dir.

(ii) $x_k \rightarrow L(S_\theta)$ ve $x \in \mathcal{L}_\infty$ olsun. Bu durumda her $k \in \mathbb{N}$ için $|x_k - L| \leq M$ olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı vardır. $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin, böylece

$$\sum_{k \in I_r} |x_k - L| = \sum_{\substack{k \in I_r \\ |x_k - L| \geq \varepsilon}} |x_k - L| + \sum_{\substack{k \in I_r \\ |x_k - L| < \varepsilon}} |x_k - L|$$

$$\leq \sum_{k \in I_r} M + \sum_{k \in I_r} \varepsilon$$

$$|x_k - L| \geq \varepsilon \quad |x_k - L| < \varepsilon$$

$$\leq M \cdot |\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| + h_r \cdot \varepsilon$$

olup

$$\frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} |x_k - L| \leq \frac{1}{h_r} \cdot M |\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| + \varepsilon$$

elde edilir. O halde $x_k \rightarrow L(N_\theta)$ dir.

(iii) ise (i) ve (ii) nin aşikâr sonucudur.

Bu da teoremin ispatını tanımlar.

Şimdi artık $S \subseteq S_\theta$ ve $S_\theta \subseteq S$ içerirlik bağıntılarını ele alabiliriz.

LEMMA 2.2.3: $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizi olsun. Bu durumda $S \subseteq S_\theta$ olması için gerek ve yeter koşul $\liminf_r q_r > 1$ olmasıdır ([12] Fridy ve Orhan 1992).

İspat: yeterlilik. $\liminf_r q_r > 1$ olsun. Bu durumda yeterince büyük r için $q_r \geq 1 + \delta$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ vardır.

$q_r = \frac{k_r}{k_{r-1}}$ olduğundan $\frac{h_r}{k_r} \geq \frac{\delta}{1 + \delta}$ elde edilir. $x_k \rightarrow L(S)$ ise $\varepsilon > 0$ ve yeterince büyük r için,

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_r} |\{k \leq k_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| &\geq \frac{1}{k_r} |\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \\ &\geq \frac{h_r}{k_r} \frac{|\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}|}{h_r} \\ &\geq \frac{\delta}{1 + \delta} \frac{|\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}|}{h_r} \end{aligned}$$

elde edilir. O halde $S \subseteq S_0$ dır.

Gereklilik: $\liminf_r q_r = 1$ olsun [8] sh. 510 da yapıldığı gibi $r_j \geq r_{j-1} + 2$ olma üzere $\frac{k_{r(j)}}{k_{r-1}} > j$ ve $\frac{k_{r(j)-1}}{k_{r-1}} < 1 + \frac{1}{j}$

olacak şekilde $\theta = \{k_r\}$ lacunary dizisinin bir $\{k_{r(j)}\}$ alt dizisini seçelim ve

$$x_i = \begin{cases} 1, & i \in I_{r(j)}, (j = 1, 2, \dots) \\ 0, & \text{diğer durumda} \end{cases}$$

şeklinde $x = (x_i)$ dizisi tanımlayalım. Bu dizisinin sınırlı olduğu açıktır. Bu durumda $x \in |\sigma_1|$ fakat $x \notin N_0$ olduğu [8] Sh. 510'da gösterilmiştir. Teorem 2.2.2 (ii) den $x \notin S_0$ dır. Ayrıca Teorem 1.5.2 den $x \in S$ dir. O halde $S \not\subseteq S_0$ elde ederiz. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

LEMMA 2.2.4: $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizi olsun. Bu durumda $S_0 \subseteq S$ olması için gerek ve yeter koşul $\limsup_r q_r < \infty$ olmasıdır ([12] Fridy ve Orhan 1992).

İspat: Yeterlilik. $\limsup_r q_r < \infty$ olsun. Bu durumda her $r \in \mathbb{N}$ için $q_r < H$ olacak şekilde bir $H > 0$ sayısı vardır. Şimdi $x_k \rightarrow L(S_0)$ ve $N_r := |\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}|$ olsun. $x_k \rightarrow L(S_0)$ olduğundan,

$$\lim_r \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olup her $\varepsilon > 0$ için, her $r > r_0$ için $\frac{N_r}{h_r} < \varepsilon$ olacak şekilde bir $r_0 \in \mathbb{N}$ vardır. $M := \max \{N_r : 1 \leq r \leq r_0\}$ diyelim ve $k_{r-1} < n \leq k_r$ olacak şekilde bir n tam sayısı seçelim. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| &\leq \frac{1}{n} |\{k \leq k_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \\
&\leq \frac{1}{k_{r-1}} |\{k \leq k_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \\
&= \frac{1}{n} \{N_1 + N_2 + \dots + N_{r_0} + N_{r_0+1} + \dots + N_r\} \\
&= \frac{1}{k_{r-1}} \{N_1 + N_2 + \dots + N_{r_0}\} + \frac{1}{k_{r-1}} \{N_{r_0+1} + \dots + N_r\} \\
&= \frac{1}{k_{r-1}} \{N_1 + N_2 + \dots + N_{r_0}\} + \frac{1}{k_{r-1}} \{h_{r_0+1} \frac{N_{r_0+1}}{h_{r_0+1}} + \dots + h_r \frac{N_r}{h_r}\} \\
&\leq \frac{Mr_0}{k_{r-1}} + \frac{1}{k_{r-1}} \sup_{r > r_0} \frac{N_r}{h_r} \{h_{r_0+1} + \dots + h_r\} \\
&< \frac{Mr_0}{k_{r-1}} + \frac{1}{k_{r-1}} \varepsilon \{h_{r_0+1} + \dots + h_r\} \\
&= \frac{Mr_0}{k_{r-1}} + \varepsilon \frac{k_r - k_{r_0}}{k_{r-1}} \\
&\leq \frac{Mr_0}{k_{r-1}} + \varepsilon q_r \\
&\leq \frac{Mr_0}{k_{r-1}} + \varepsilon H
\end{aligned}$$

elde edilir. $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan ve $r \rightarrow \infty$ için $k_{r-1} \rightarrow \infty$ olduğundan $x_k \rightarrow L(S)$ elde ederiz böylece $S_0 \subseteq S$ bulunur.

Gereklilik: $\limsup_r q_r = \infty$ olsun. [8] Sh. 511 de yapıldığı gibi $q_{r(j)} > j$ olacak şekilde $\theta = \{k_r\}$ lacunary dizisinin bir $\{k_{r(j)}\}$ alt dizisini seçelim ve

$$x_i = \begin{cases} 1 & , k_{r(j)-1} < i \leq 2 k_{r(j)-1} , (j = 1, 2, \dots) \\ 0 & , \text{diğer durumda} \end{cases}$$

ile sınırlı bir $x = (x_i)$ dizisi tanımlayalım. Bu durumda [8] Sh. 511'den $x \in N_0$ fakat $x \notin |S_1|$ dir. Teorem 2.2.2 (i)'den $x \in S_0$ dir. Fakat Teorem 1.5.2'den $x \notin S$ dir. O halde $S_0 \not\subseteq S$ dir. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

Şimdi Lemma 2.2.3 ve Lemma 2.2.4'ü birleştirerek aşağıdaki teoremi verebiliriz.

TEOREM 2.2.5: $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizi olsun. Bu durumda $S = S_\theta$ olması için gerek ve yeter koşul $1 < \liminf_r q_r \leq \limsup_r q_r < \infty$ olmasıdır ([12] Fridy ve Orhan 1992).

Bu teoremin şartlarını gerçekleyen bir lacunary dizi örneği olarak $\theta = \{k_r\} = \{2^r\}$, ($r > 0$) dizisini verebiliriz.

Bu kısmı aşağıdaki gözlemlerimiz ile sonuçlandıracağız: $K \subseteq \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\delta(K) := \lim_r (C_\theta \chi_K)_r = \lim_r \frac{|K \cap I_r|}{h_r}$$

tanımlayalım. Bu durumda δ , kısım 1.2'de yaptığımız incelemelerden anlaşılacağı gibi bir yoğunluk fonksiyonudur. Artık S_θ -yakınsaklık için Buck'ın [2] Teorem 3.2'ye benzer bir sonuç elde etmek zor değildir.

ÖNERME 2.2.6: Bir $x = (x_k)$ reel sayı dizisi sonlu bir liminf değerine veya sonlu bir limsup değerine C_θ -toplanabilir ise $x = (x_k)$ dizisi aynı değere S_θ -yakınsaktır ([12] Fridy ve Orhan 1992).

2.3. S_θ -Limitinin Tekliği ve Lacunary İncelme

Bu kısımda bir θ lacunary dizisi için S_θ -limitinin tekliğini ve farklı θ lar için S_θ -limitinin farklı olduğunu göstereceğiz. Ama önce bu kısımda kullanacağımız bir tanım ve teorem verelim:

TANIM 3.2.1: $p_0 > 0$, $n \geq 1$ için $P_n \geq 0$ ve $P_n = \sum_{k=0}^n p_k$ olmak üzere,

$$a_{nk} = \begin{cases} \frac{P_k}{P_n} & 0 \leq k \leq n \\ 0 & , \quad k > n \end{cases}$$

şeklinde verilen $A = (a_{nk})$ matrisinin tanımladığı operatöre Ağırlık Ortalama Operatörü denir.

TEOREM 2.3.2: Ağırlık ortalama operatörünün regüler olması için gerek ve yeter koşul $n \rightarrow \infty$ için $P_n \rightarrow \infty$ olmasıdır ([20] Petersen 1966, Sh. 10).

Şimdi bir θ lacunary dizisi için S_θ -limitinin bir tek olduğu açıktır. Fakat farklı θ lar için S_θ -limitinin farklı olduğunu görmek için aşağıdaki örneği göz önüne alacağız. Bu örnek [8] Sh. 511 de farklı bir amaç için inşa edilmiştir. Fakat bu örnek bizim ihtiyacımızı da karşılar.

$x = (x_i)$ dizisini

$$x_i = \begin{cases} 0 & , \quad i = 1 \\ 0 & , \quad (2n-1)! < i \leq (2n)! \\ 1 & , \quad (2n)! < i \leq (2n+1)! \end{cases} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

ile tanımlayalım. $\theta = \{(2r)!\}$ lacunary dizisi için

$$\frac{1}{h_{r+1}} |\{k \in I_{r+1} : |x_k| \geq \varepsilon\}| = \begin{cases} 0 & , \quad \varepsilon > 1 \\ \frac{(2r+1)! - (2r)!}{(2(r+1))! - (2r)!} & , \quad 0 < \varepsilon \leq 1 \end{cases}$$

olup $x_i \rightarrow 0(S_\theta)$ dir.

Şimdi de $\theta' = \{(2r+1)!\}$ lacunary dizisi için

$$\frac{1}{h_{r+1}} |\{k \in I_{r+1} : |x_k - 1| \geq \varepsilon\}| = \begin{cases} 0, & \varepsilon > 1 \\ \frac{(2r)! - (2r-1)!}{(2r+1)! - (2r-1)!}, & 0 < \varepsilon \leq 1 \end{cases}$$

olup $x_i \rightarrow 1(S_{\theta'})$ dir.

Aşağıdaki teorem $x \in S$ olduğundan bu durumun söz konusu olamayacağını gösterir.

TEOREM 2.3.3: $x \in S \cap S_\theta$ ise S_θ -lim $x = S$ -lim x olmalıdır ([12] Fridy ve Orhan 1992).

İspat: S -lim $x = L$ ve S_θ -lim $x = L'$ olmak üzere $L \neq L'$ olsun. Bu durumda S -lim $x = L$ olduğundan $\varepsilon > 0$ olmak üzere, $\delta\{k \in \mathbb{N} : |x_k - L| \geq \varepsilon\} = 0$. O halde $\delta\{k \in \mathbb{N} : |x_k - L| < \varepsilon\} = 1$. Eğer $\varepsilon < \frac{1}{2} |L - L'|$ seçersek, $\delta\{k \in \mathbb{N} : |x_k - L'| < \varepsilon\}$ elde etmeliyiz. Böylece

$$\delta\{k \in \mathbb{N} : |x_k - L'| \geq \varepsilon\} = 1$$

bulunur.

Şimdi

$$\frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L'| \geq \varepsilon\}|$$

istatistiksel limit ifadesinin k_m -inci terimini göz önüne alalım:

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_m} |\{k \in \bigcup_{r=1}^m I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| &= \frac{1}{k_m} \sum_{r=1}^m |\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \\ &= \frac{1}{\sum_{r=1}^m h_r} \sum_{r=1}^m h_r t_r \end{aligned} \quad (10)$$

elde edilir. Burada $x_k \rightarrow L(S_\theta)$ olduğundan

$$t_r := \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \rightarrow 0$$

dır. θ bir lacunary dizisi olduğundan (10) ifadesi t nin regüler ağırlıklı ortalama dönüşümüdür. Dolayısıyla

$$\frac{1}{k_m} |\{k \in \bigcup_{r=1}^m I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \rightarrow 0, \quad (m \rightarrow \infty) \quad (11)$$

dır. (11) daki dizi, $\left\{ \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \right\}_{n=1}^{\infty}$

dizisinin bir alt dizisi olduğundan,

$$\frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \not\rightarrow 0$$

dolayısıyla bu çelişki $L \neq L'$ olamayacağını gösterir.

Şimdi lacunary incelmeyi tanımlayıp S_θ ile S_θ arasında bir içerme teoremi vereceğiz.

TANIM 2.3.4: $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizi olsun. $\{k_r\} \subseteq \{k'_r\}$ olacak şekilde $\theta' = \{k'_r\}$ lacunary dizisine θ nın bir lacunary incelmesi denir. ([18] Freedman, Sember ve Raphael 1978).

TEOREM 2.3.5: θ', θ nın bir lacunary incelmesi olsun. Budrumda $x_k \rightarrow L(S_{\theta'})$ ise $x_k \rightarrow L(S_\theta)$ dır ([12] Fridy ve Orhan 1992).

İspat: $I_{r,i} = (k'_{r,i-1}, k'_{r,i}]$ olmak üzere $k_{r-1} < k'_{r,1} < k'_{r,2} < \dots < k'_{r,v(r)} = k_r$

olacak şekilde θ 'nin her bir I_r aralığı θ' 'nin $\{k'_{r,i}\}_{i=1}^{v(r)}$ noktalarını içersin.

$\{k_r\} \subseteq \{k'_r\}$ olduğundan her r için $v(r) \geq 1$ dir. Sağdaki artan uç noktaları ile sıralanmış $\{I_{r,j}\}$ aralıklarının uç noktalarının dizisi $\{I^*_j\}_{j=1}^{\infty}$ olsun. $x_k \rightarrow L(S'_\theta)$ olduğundan, her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_j \sum_{I^*_j \subseteq I_r} \frac{1}{h^*_r} |\{k \in I^*_j : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0 \quad (12)$$

elde edilir. Daha önce tanımladığımız gibi $h_r = k_r - k_{r-1}$, $h'_{r,i} = k'_{r,i} - k'_{r,i-1}$ ve $h'_{r,1} = k'_{r,1} - k_{r-1}$ dir. Her $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| &= \frac{1}{h_r} \sum_{I^*_j \subseteq I_r} |\{k \in I^*_j : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \\ \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| &= \frac{1}{h_r} \sum_{I^*_j \subseteq I_r} \frac{h^*_r}{h_r} |\{k \in I^*_j : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \\ &= \frac{1}{h_r} \sum_{I^*_j \subseteq I_r} h^*_r (C_\theta \chi_K)_j \end{aligned} \quad (13)$$

elde edilir. Burada χ_K , $K := \{k \in \mathbb{N} : |x_k - L| \geq \varepsilon\}$ cümlesinin karakteristik fonksiyonu ve $h_r = \sum_{I^*_j \subseteq I_r} h^*_j$ dir.

(13) deki ifade $C_\theta \chi_K$ 'nin regüler bir ağırlıklı ortalama dönüşümüdür. $C_\theta \chi_K$ (12) den dolayı sıfıra yakınsak bir dizidir. Böylece (13) ifadesi $r \rightarrow \infty$ için sıfıra yakınsaktır. O halde $x_k \rightarrow L(S_\theta)$ dir. Bu da ispatı tamamlar.

UYARI: Teorem 2.3.5 de dizilerden biri diğerinin bir lacunary incelmesi olduğunda, iki lacunary metod arasında bir içerme kuruldu. Bu kısmın başında verilen örnek, S_θ ile S_θ' 'nin karşılaştırılmaz olduğunu gösterir. Keyif iki lacunary metod arasındaki içermenin genel bir tanımlaması açık bir problem olarak bırakılmıştır.

2.4. Kuvvetli Hemen Hemen Yakınsaklık ve S_0 -Yakınsaklık

Hemen hemen yakınsaklık, Lorentz [14] tarafından verildi: Buna göre

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{i=m+1}^{m+n} (x_i - L) = 0, \text{ (m'e göre düzgün)}$$

ise x dizisi L sayısına hemen hemen yakınsaktır denir. Freedman ve arkadaşları [8] de vede bunlardan bağımsız olarak [17] da Maddox tarafından kuvvetli hemen hemen yakınsaklık aşağıdaki gibi tanımlandı:

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{i=m+1}^{m+n} |x_i - L| = 0, \text{ (m'e göre düzgün)}$$

ise x dizisi L sayısına kuvvetli hemen hemen yakınsaktır denir.

Ayrıca, c , AC ve $[AC]$ sırası ile bütün yakınsak, hemen hemen yakınsak ve kuvvetli hemen hemen yakınsak dizilerin uzayını göstermek üzere

$$c \subset [AC] \subset ACC \subset \mathcal{L}_\infty \quad (14)$$

olduğu gösterildi ([17] Maddox 1978).

TEOREM 2.4.1: Bütün lacunary dizileri sınıfı L olmak üzere

$$[AC] = (\mathcal{L}_\infty) \cap \left(\bigcap_{\theta \in L} S_\theta \right) \text{ dir ([12] Fridy ve Orhan 1992).}$$

İspat: Her bir θ lacunary dizisi için $[AC] \subset N_\theta$ olduğu [8] Lemma 3.1'de gösterilmiştir. Teorem 2.2.2 (i) den her bir θ lacunary dizi için $[AC] \subset S_\theta$ dir. (14) deki içermelerden

$$[AC] \subset (\mathcal{L}_\infty) \cap \left(\bigcap_{\theta \in L} S_\theta \right) \quad (15)$$

elde edilir. Diğer yandan Teorem 2.2.2 (ii) den $S_\theta \cap \mathcal{L}_\infty \subset N_\theta$ ve [8] Teorem 3.1 den

$$\bigcap_{\theta \in \mathcal{L}} N_\theta = [AC]$$

dir. O halde

$$(\mathcal{L}_\infty) \cap \left(\bigcap_{\theta \in \mathcal{L}} S_\theta \right) \subset \bigcap_{\theta \in \mathcal{L}} N_\theta$$

olup

$$(\mathcal{L}_\infty) \cap \left(\bigcap_{\theta \in \mathcal{L}} S_\theta \right) \subset [AC] \quad (16)$$

elde edilir. böylece (15) ve (16) dan

$$[AC] = (\mathcal{L}_\infty) \cap \left(\bigcap_{\theta \in \mathcal{L}} S_\theta \right)$$

elde edilir. Buda ispatı tamamlar.

SONUÇ 2.4.2: Yukarıdaki teoremde \mathcal{L}_∞ atılamaz.

Bunu görmek için bir $x = (x_k)$ dizisini,

$$x_k = \begin{cases} m, k = m^2, (m = 1, 2, \dots) \\ 0, \text{ diğ}er \text{ durumda} \end{cases}$$

ile tanımlayalım. $x = (x_k)$ dizisinin sınırsız olduğu açıktır. Bir θ lacunary dizisi için

$$\frac{1}{h_r} |\{k \in I_r: x_k \neq 0\}| \leq \frac{\sqrt{h_r}}{h_r} \rightarrow 0, (r \rightarrow \infty)$$

olduğundan $x_k \rightarrow 0$ (S_θ) dir. Fakat $x = (x_k)$ dizisi kuvvetli hemen hemen yakınsak değildir. Çünkü $x \notin \mathcal{L}_\infty$ olup (14) den $x \notin [AC]$ dir.

2.5. S_θ -Cauchy Kritri ve Tauber Teoremi

Bu kısımda yakınsaklık için Cauchy kriterinin, S_θ -yakınsaklık için benzerini tanımlayıp, S_θ -yakınsaklığa denk olduğunu gösterecek ve yine S_θ -yakınsaklık için bir Tauber teoremi vereceğiz.

TANIM 2.5.1: $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizi olsun. Eğer her r için $k'_{(r)} \in I_r$ ve $\lim_r x_{k'_{(r)}} = L$ vede her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_r \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : |x_k - x_{k'_{(r)}}| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde x dizisinin bir $\{x_{k'_{(r)}}\}$ at dizisi varsa x dizisine S_θ -Cauchy dizisi denir ([11] Fridy ve Orhan 1991).

TEOREM 2.5.2: x , dizisinin S_θ -yakınsak olması için gerek ve yeter koşul S_θ -Cauchy dizisi olmasıdır ([11] Fridy ve Orhan 1991).

İspat: Gereklilik; $x_k \rightarrow L(S_\theta)$ ve her $j \in \mathbb{N}$ için $K^{(j)} = \{k \in \mathbb{N} : |x_k - L| < \frac{1}{j}\}$ olsun. Budurumda her $j \in \mathbb{N}$ için $K^{(j)} \supseteq K^{(j+1)}$ ve

$$\frac{1}{h_r} |K^{(j)} \cap I_r| \rightarrow 1, (r \rightarrow \infty)$$

dir. $r \geq m$ (1) olduğunda $\frac{1}{h_r} |K^{(1)} \cap I_r| > 0$ olacak şekilde $m(1)$ seçilsin, yani $K^{(1)} \cap I_r \neq \emptyset$ olsun. Bu durumda $m(1) \leq r < m(2)$ deki her r için $k'_{(r)} \in I_r \cap K^{(1)}$ olacak şekilde $k'_{(r)} \in I_r$ seçilsin, yani $|x_{k'_{(r)}} - L| < 1$ olsun. Genel olarak $r > m$ ($p+1$) olduğunda $I_r \cap K^{(p+1)} \neq \emptyset$ olacak şekilde $m(p+1) > m(p)$ seçilsin. Bu durumda $m(p) \leq r < m(p+1)$ deki her r için $k'_{(r)} \in I_r \cap K^{(p)}$ seçilsin, yani

$$|x_{k'(r)} - L| < \frac{1}{p} \quad (17)$$

olsun. Böylece her r için $k'(r) \in I_r$ ve (17) den $\lim_r x_{k'(r)} = L$ elde ederiz. Ayrıca her $\varepsilon > 0$ için

$$\{k \in I_r : |x_k - x_{k'(r)}| \geq \varepsilon\} \subseteq \{k \in I_r : |x_k - L| \geq \frac{\varepsilon}{2}\} \cup \{k \in I_r : |x_{k'(r)} - L| \geq \frac{\varepsilon}{2}\}$$

olduğundan,

$$\frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : |x_k - x_{k'(r)}| \geq \varepsilon\}| \leq \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \frac{\varepsilon}{2}\}| + \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : |x_{k'(r)} - L| \geq \frac{\varepsilon}{2}\}|$$

elde ederiz. $x_k \rightarrow L(S_0)$ ve $\lim_r x_{k'(r)} = L$ olduğundan

$$\lim_r \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : |x_k - x_{k'(r)}| \geq \varepsilon\}| = 0$$

bulunur. O halde x , S_0 -Cauchy dizisidir.

Yeterlilik. x , bir S_0 -Cauchy dizisi olsun. Burada her $\varepsilon > 0$ için

$$\frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \leq \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : |x_k - x_{k'(r)}| \geq \frac{\varepsilon}{2}\}| + |\{k \in I_r : |x_{k'(r)} - L| \geq \frac{\varepsilon}{2}\}|$$

olduğundan Tanım 2.5.1 den $x_k \rightarrow L(S_0)$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

SONUÇ 2.5.3: S_0 -yakınsak bir dizi, yakınsak bir alt diziyeye sahiptir. Bu sonuç bizi aşağıdaki Tauber teoremine götürür.

TEOREM 2.5.4: $x_k \rightarrow L(S_0)$ ve $(r \rightarrow \infty)$ için $\max\{|\Delta x_i| : i \in I_r\} = o\left(\frac{1}{h_r}\right)$ olsun. Bu durumda $\lim_k x_k = L$ dir ([11] Fridy ve Orahn 1991).

İspat: $x_k \rightarrow L(S_0)$ olsun. Teorem 2.5.2 ve Tanım 2.5.1 deki gibi x dizisinin bir $\{x_{k'(r)}\}$ alt dizisini seçelim. $k'(r) \in I_r$ olduğundan,

$$\begin{aligned}
|x_k - x_{k'(r)}| &= |x_k - x_{k+1} + x_{k+1} - \dots + x_{k'(r)-1} - x_{k'(r)}| \\
&\leq |x_k - x_{k+1}| + |x_{k+1} - x_{k+2}| + \dots + |x_{k'(r)-1} - x_{k'(r)}| \\
&= |\Delta x_k| + |\Delta x_{k+1}| + \dots + |\Delta x_{k'(r)-1}| \\
&= \sum_{i=k}^{k'(r)-1} |\Delta x_i| \\
&\leq \sum_{i=k}^{k'(r)-1} \max_{i \in I_r} |\Delta x_i| \\
&\leq h_r \max_{i \in I_r} |\Delta x_i| = o(1)
\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer yandan $x_{k'(r)} \rightarrow L$ olduğundan, $x_k \rightarrow L$ olduğunu görürüz.

2.6. S_θ -Yakınsak Dizilerin Toplanabilme Özellikleri

Birinci bölümde Cesàro eoperatörünün sınırlı, istatistiksel yakınsak bir diziyi topladığı gösterilmiştir. Bu kısımda da, Cesàro operatörünün sınırlı, S_θ -yakınsak bir diziyi topladığını gösterip S_θ -yakınsaklık için diğer toplanabilme özellikleri verilecektir.

TEOREM 2.6.1: x , sınırlı bir dizi ve $x_k \rightarrow L(S_\theta)$ olsun. Bu durumda $(C_1 x) \rightarrow L$ dir ([11] Fridy ve Orhan 1991).

İspat: $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizi ve $n \in I_r$ olacak şekilde bir tam sayı n olsun. Bu durumda

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - L) = \frac{1}{n} \sum_{p=1}^{r-1} \sum_{k \in I_p} (x_k - L) + \frac{1}{n} \sum_{k=1+k_{r-1}}^n (x_k - L) \quad (18)$$

yazılabilir. (18) in sağındaki ilk terimi gözönüne alalım:

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{n} \sum_{p=1}^{r-1} \sum_{k \in I_p} (x_k - L) \right| &\leq \frac{1}{n} \sum_{p=1}^{r-1} \sum_{k \in I_p} |x_k - L| \\
&\leq \frac{1}{k_{r-1}} \sum_{p=1}^{r-1} \sum_{k \in I_p} |x_k - L| \\
&= \frac{1}{k_{r-1}} \sum_{p=1}^{r-1} h_p \frac{1}{h_p} \sum_{k \in I_p} |x_k - L| \\
&= \frac{1}{k_{r-1}} \sum_{p=1}^{r-1} h_p t_p = (Ht)_r \tag{19}
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $t_p := \frac{1}{h_p} \sum_{k \in I_p} |x_k - L|$

x sınırlı bir dizi ve $x_k \rightarrow L(S_\theta)$ olduğundan Teorem 2.2.2 (ii) den $x \in N_\theta$ dir, yani $t_p \rightarrow 0$, ($p \rightarrow \infty$) dir. Ayrıca $k_{r-1} = \sum_{p=1}^{r-1} h_p$ olup $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizi olduğundan $k_{r-1} \rightarrow \infty$, ($r \rightarrow \infty$) dir. Bu nedenle (19) daki ifade t nin regüler bir ağırlık ortalama dönüşümüdür. O halde,

$$(Ht)_r \rightarrow 0, (r \rightarrow \infty) \tag{20}$$

elde edilir. Şimdi (18) ifadesinin sağındaki ikinci terimi gözönüne alalım. x dizisi sınırlı olduğundan her $k \in \mathbb{N}$ için $|x_k - L| \leq B$ olacak şekilde bir $B > 0$ sabiti vardır.

Buna göre $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1+k_{r-1}} (x_k - L) \right| &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1+k_{r-1}} |x_k - L| \\
&= \frac{1}{n} \left(\sum_{\substack{k_{r-1} < k \leq n \\ |x_k - L| \geq \varepsilon}} |x_k - L| + \sum_{\substack{k_{r-1} < k \leq n \\ |x_k - L| < \varepsilon}} |x_k - L| \right) \\
&\leq \frac{1}{n} \sum_{\substack{k_{r-1} < k \leq n \\ |x_k - L| \geq \varepsilon}} B + \frac{1}{n} \sum_{\substack{k_{r-1} < k \leq n \\ |x_k - L| < \varepsilon}} \varepsilon
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{B}{n} |\{k_{r-1} < k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| + \frac{\varepsilon}{n} \cdot n \\
&\leq \frac{B}{n} |\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| + \varepsilon \\
&\leq \frac{B}{h_r} |\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| + \varepsilon \tag{21}
\end{aligned}$$

elde edilir. $x_k \rightarrow L(S_\theta)$ ve ε keyfi olduğundan (21) in sağındaki terim $r \rightarrow \infty$ için sifıra yakınsar. Böylece (18),(20) ve (21) den $(C_1x) \rightarrow L$ dir. Buda ispatı tamamlar.

C_1 metodu, sınırlılık şartı göz önünde bulundurulmadan, S_θ -yakınsaklık metodunu içerirmi sorusu akla gelebilir. Bu soruya cevabımız hayır olacaktır. Şimdi çok daha fazlasını göstereceğiz. Fakat ilk önce aşağıdaki lemmayı verelim.

LEMMA 2.6.2: $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizi ve sonsuz çoklukta k lar için $t_k \neq 0$ olacak şekilde bir dizi t olsun. Bu durumda $x_k \rightarrow 0(S_\theta)$ ve $\sum_{k=1}^{\infty} t_k x_k = \infty$ olacak şekilde bir x dizisi vardır ([11] Fridy ve Orhan 1991).

İspat: Her $r \in \mathbb{N}$ için I_r , $t_k \neq 0$ olacak şekilde bir k içeriyorsa en küçük k , $m(r)$ olsun. Böylece sonsuz çoklukta $m(r)$ ler vardır ve $m(r) \in I_r$ dir. Şimdi bir $x = (x_k)$ dizisini

$$x_k = \begin{cases} \frac{1}{t_k}, & k = m(r), (r = 1, 2, \dots) \\ 0 & \text{diğer durumda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : |x_k - 0| \geq \varepsilon\}| &= \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : x_k \neq 0\}| \\
&\leq \frac{1}{h_r} \cdot 1 \leq 0, (r \rightarrow \infty)
\end{aligned}$$

olup $x_k \rightarrow 0 (S_0)$ dir. Ayrıca sonsuz çöktaki r ler için $\sum_{k \in I_r} t_k x_k = 1$ olduğundan

$$\sum_{k=1}^{\infty} t_k x_k = \sum_{r=1}^{\infty} \left(\sum_{k \in I_r} t_k x_k \right) = 1 + 1 + 1 + \dots = \infty$$

elde edilir.

TEOREM 2.6.3: $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizi olsun. Bu durumda hiç bir A matris metodu, S_0 - toplanabilmeyi içermez ([11] Fridy ve Orhan 1991).

İspat: Lemma 2.6.2 gereğince sadece satır sonlu matrisleri gözönüne almak yeterlidir. S_0 -topalanabilme regüler olduğundan, A nın regüler olduğunu kabul edebiliriz. Bu bize A matrisinin her bir p için $n(p)$ -inci satırında sıfırdan farklı en son terimi $a_{n(p), r(p)}$ olacak şekilde θ ile oluşturulan $\{I_r\}$ aralıklarının bir $\{I_r(p)\}$ alt dizisini ve $\{n(p)\}$ satır indislerinin artan bir dizisini seçme imkânı verir. Şimdi bir $x = (x_k)$ dizisini

$$x_{r(1)} = \frac{1}{a_{n(1), r(1)}}$$

$$x_{r(p)} = \frac{1}{a_{n(p), r(p)}} \left[p - \sum_{i=1}^{p-1} a_{n(p), r(i)} x_{r(i)} \right], \quad (p > 1)$$

diğer durumda ise $x_k = 0$ olacak şekilde tanımlayalım. Her bir I_r , $x_k \neq 0$ olacak şekilde en fazla bir k içerdiğinden $x_k \rightarrow 0 (S_0)$ dir. Fakat,

$$(Ax)_{n(p)} = \sum_{i=1}^{p-1} a_{n(p), r(i)} x_{r(i)} = \sum_{i=1}^{p-1} a_{n(p), r(i)} x_{r(i)} + a_{n(p), r(p)} x_{n(p)}$$

$$= \sum_{i=1}^{p-1} a_{n(p), r(i)} x_{r(i)} + a_{n(p), r(p)} \left[\frac{1}{a_{n(p), r(p)}} \left(p - \sum_{i=1}^{p-1} a_{n(p), r(i)} x_{r(i)} \right) \right]$$

$$= \sum_{i=1}^{p-1} a_{n(p), r(i)} x_{r(i)} + p - \sum_{i=1}^{p-1} a_{n(p), r(i)} x_{r(i)} = p$$

olduğundan Ax sınırlı değildir, dolayısıyla yakınsak değildir. O halde A , S_θ -yakınsaklığı içermez.

2.7. S_θ -Yakınsaklığın Matris Karakterizasyonu

Bu bölümü aşağıdaki incelemeler ile sonuçlandıracağız. Daha önce reel terimli istatistiksel yakınsak diziler, matrislerin bir kolleksiyonunun toplanabilirlik alanlarının arakesiti ile karakterize edilmişti. Şimdi Teorem 1.8.4'ün bir özel durumu olarak S_θ -yakınsaklık için benzer bir sonuç elde edebiliriz. Bunun için, önce reel terimli matrislerin aşağıdaki sınıfını tanıtalım.

$\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizi olmak üzere negatif olmayan A , toplanabilir matrislerinin

$$(i) \text{ Her } n \in \mathbb{N} \text{ için } \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = 1$$

$$(ii) K \subseteq \mathbb{N} \text{ için } \lim_r \frac{1}{h_r} |K \cap I_r| = 0 \text{ ise } \lim_n \sum_{k \in K} a_{nk} = 0$$

koşullarını gerçekleyen sınıfı τ_θ olsun.

Şimdi Teorem 1.8.6'nın özel bir sonucu olarak aşağıdaki teoremi verebiliriz.

TEOREM 2.7.1: $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizi olsun. Bu durumda reel terimli sınırlı bir x dizisinin bir L sayısına S_θ -yakınsak olması için gerek ve yeter koşul her $A \in \tau_\theta$ için x dizisinin L sayısına A -toplanabilir olmasıdır (yani $S_\theta \cap \mathcal{L}_\infty = \bigcap_{A \in \tau_\theta} c_A$ dır), ([11] Fridy ve Orhan 1991).

BÖLÜM 3

A-İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK VE BİR MODULÜS FONKSİYONUNA GÖRE KUVVETLİ MATRİS TOPLANABİLME

Bu bölümde modülüs fonksiyonu, kuvvetli A-toplanabilme, bir modülüs fonksiyonuna göre kuvvetli A-toplanabilme ve A-istatistiksel yakınsaklık kavramları tanıtılacaktır. Ayrıca \mathcal{L}_∞ daki ideal kavramı yardımıyla, yukarıdaki kavramlar arasındaki ilişkilere araştırılacaktır.

3.1. Modülüs Fonksiyonu

Bu kısımda modülüs fonksiyonu tanıtılacaktır.

TANIM 3.1.1. $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu için aşağıdaki özellikler gerçeklensin:

(i) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(ii) $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$, her $x \geq 0$ her $y \geq 0$ için

(iii) f artan

(iv) f , $x = 0$ noktasında sağdan süreklidir

Bu durumda f fonksiyonuna modülüs fonksiyonu denir ([18] Maddox 1986).

ÖRNEK 3.1.2.

(i) $f(x) = \frac{x}{x+1}$

$$(ii) f(x) = \log(1 + x)$$

fonksiyonları birer modülüs fonksiyonudur. Ancak (i)deki modülüs fonksiyonu sınırlı, (ii) deki modülüs fonksiyonu ise sınırsızdır.

3.2. Kuvvetli A-toplanabilme Ve Bir Modülüs Fonksiyonuna Göre Kuvvetli A-Toplanabilme

Bu kısımda kuvvetli A-toplanabilme ve bir modülüs fonksiyonuna göre kuvvetli A-toplanabilme kavramları verilip, \mathcal{L}_∞ daki ideal kavramı yardımıyla kuvvetli A-toplanabilme ve bir modülüs fonksiyonuna göre kuvvetli A-toplanabilmenin sınırlı diziler üzerinde denk oldukları gösterilecektir.

TANIM 3.2.1: $A = (a_{nk})$ negatif olmayan regüler bir toplanabilme metodu olmak üzere

$$\omega_0(A) = \{x \in \omega : \lim_n \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} |x_k| = 0\}$$

ve

$$\omega(A) = \{x \in \omega : \exists L \in \mathbb{C} \text{ için } (x - Le) \in \omega_0(A)\}$$

olsun. Eğer $x - Le \in \omega_0(A)$ ise x dizisi L sayısına kuvvetli A-toplanabilirdir denir.

TANIM 3.2.2: $A = (a_{nk})$ negatif olmayan regüler bir matris toplanabilme metodu ve f bir modülüs fonksiyonu olmak üzere

$$\omega_0(A, f) = \{x \in \omega : \lim_n \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} f(|x_k|) = 0\}$$

ve

$$\omega(A, f) = \{x \in \omega : \exists L \in \mathbb{C} \text{ için } (x - Le) \in \omega_0(A, f)\}$$

olsun. Eğer $x - Le \in \omega_0(A, f)$ ise x dizisi L sayısına f modülüs fonksiyonuna göre kuvvetli A -toplanabilirdir denir ve bu durum $x_k \rightarrow L \omega(A, f)$ ile gösterilir ([4] Connor 1989). Maddox'un [18] de Teorem 4 deki yöntemi kullanarak aşağıdaki önermeyi verebiliriz.

ÖNERME 3.2.3: Herhangi bir f modülüs fonksiyonu için

$$\omega(A) \subset \omega(A, f)$$

dir ([4] Connor 1989).

Şimdi bizim için gerekli olan \mathcal{L}_∞ daki idealler vede $\omega_0(A, f) \cap \mathcal{L}_\infty$ uzayı ile ilgili iki lemma vereceğiz. Verilen bir $\varepsilon > 0$ için $K(x, \varepsilon) = \{k \in \mathbb{N} : |x_k| \geq \varepsilon\}$ cümlesinin karakteristik fonksiyonu $\chi_{K(x, \varepsilon)}$ olsun.

LEMMA 3.2.4: $x \in \mathcal{L}_\infty$ ve M, \mathcal{L}_∞ da bir ideal olsun.

$x \in \overline{M}$ olması için gerek ve yeter koşul her $\varepsilon > 0$ sayısı için $\chi_{K(x, \varepsilon)} \in M$ olmasıdır ([4] Connor 1989).

İspat: Gereklilik: $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin ve $x \in \overline{M}$ olsun. $\|x - z\| < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde $z \in M$ vardır. Bu durumda $K(x, \varepsilon) \subseteq K(z, \frac{\varepsilon}{2})$ dir. Şimdi bir $y = (y_k)$ dizisini

$$y_k = \begin{cases} \frac{1}{z_k} & , \quad |z_k| \geq \frac{\varepsilon}{2} \\ 0 & , \quad \text{diğer durumda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. $y \in \mathcal{L}_\infty$ olduğu açıktır. Bu durumda $yz = \chi_{K(z, \frac{\varepsilon}{3})} \in M$ dir.

O halde $K(x, \varepsilon) \subseteq K(z, \frac{\varepsilon}{2})$ olduğundan karakteristik fonksiyonun özelliklerinden

$\chi_{K(x, \varepsilon)} \chi_{K(z, \frac{\varepsilon}{2})} = \chi_{K(z, \frac{\varepsilon}{2})}$ elde edilir. $\chi_{K(x, \varepsilon)} \in \mathcal{L}_\infty, \chi_{K(z, \frac{\varepsilon}{2})} \in M$ ve M, \mathcal{L}_∞ da

bir ideal olduğundan $\chi_{K(x, \varepsilon)} \chi_{K(z, \frac{\varepsilon}{2})} = \chi_{K(x, \varepsilon)} \in M$ elde edilir.

Yeterlilik: Her $\varepsilon > 0$ için $\chi_{K(x, \varepsilon)} \in M$ ve $x \in \mathcal{L}_\infty$ olsun. M bir ideal olduğundan

$x \chi_{K(x, \varepsilon)} \in M$ olacaktır. $y := x \chi_{K(x, \varepsilon)}$ diyelim. B durumunda $\|x - x \chi_{K(x, \varepsilon)}\| < \varepsilon$, yani $y \in B(x, \varepsilon) \cap M$. O halde $B(x, \varepsilon) \cap M \neq \emptyset$ dir. Demek ki $x \in \overline{M}$ dir. Bu da ispatı tamamlar.

LEMMA 3.2.5: A negatif olmayan regüler bir toplanabilme metodu ise $\omega_0(A) \cap \mathcal{L}_\infty, \mathcal{L}_\infty$ içinde kapalı bir idealdir ([4] Connor 1989). Hatta herhangi bir f modülüs fonksiyonu için $\omega_0(A, f) \cap \mathcal{L}_\infty, \mathcal{L}_\infty$ da bir idealdir. Çünkü, $\|y\| \leq H$ olacak şekilde bir tamsayı H ve $x \in \omega_0(A, f) \cap \mathcal{L}_\infty, y \in \mathcal{L}_\infty$ ise her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} f(|x_k y_k|) \leq H \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} f(|x_k|)$$

yazılabilir. Ayrıca $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} f(|x_k|) = 0$ olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} f(|x_k y_k|) = 0$

olup $xy \in \omega_0(A, f) \cap \mathcal{L}_\infty$ dir.

Şimdi bizim için gerekli olan aşağıdaki teoremi verelim.

TEOREM 3.2.6: f bir modulüs fonksiyonu olmak üzere

$$\omega(A, f) \cap \mathcal{L}_\infty = \omega(A) \cap \mathcal{L}_\infty$$

dır ([4] Connor 1989).

İspat: İspat için $\omega_0(A) \cap \mathcal{L}_\infty = \omega_0(A, f) \cap \mathcal{L}_\infty$ olduğunu göstermek yeterlidir. Önerme 3.2.3 den

$$\omega_0(A) \cap \mathcal{L}_\infty \subseteq \omega_0(A, f) \cap \mathcal{L}_\infty \quad (22)$$

olduğunu biliyoruz. Şimdi de $\omega_0(A, f) \cap \mathcal{L}_\infty \subseteq \omega_0(A) \cap \mathcal{L}_\infty$ olduğunu gösterelim.

$K \subseteq \mathbb{N}$ ise her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} f(\chi_{K(x, \varepsilon)}(k)) = f(1) \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \chi_{K(x, \varepsilon)}(k)$$

olduğu açıktır. $x \in \omega_0(A, f) \cap \mathcal{L}_\infty$ olsun. Bir $y = (y_k)$ dizisini, $\varepsilon > 0$ olmak üzere,

$$y_k = \begin{cases} \frac{1}{x_k} & , \quad |x_k| \geq \varepsilon \\ 0 & , \quad \text{diğer durumda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. $x \in \mathcal{L}_\infty$ olduğundan $y \in \mathcal{L}_\infty$ dir. Diğer yandan $xy = \chi_{K(x, \varepsilon)}$ olup $\omega_0(A, f) \cap \mathcal{L}_\infty$, \mathcal{L}_∞ da bir ideal olduğundan

$$\chi_{K(x, \varepsilon)} \in \omega_0(A, f) \cap \mathcal{L}_\infty \text{ olacak ve böylece } \lim_n \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} f(\chi_{K(x, \varepsilon)}(k)) = 0$$

elde edilir. Diğer yandan

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} f(\chi_{K(x, \epsilon)}(k)) = f(1) \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \chi_{K(x, \epsilon)}(k)$$

olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \chi_{K(x, \epsilon)}(k) = 0$ olup, $\chi_{K(x, \epsilon)}(k) \in \omega_0(A)$ ve $\chi_{K(x, \epsilon)}(k) \in \mathcal{L}_{\infty}$ dir. $\omega_0(A) \cap \mathcal{L}_{\infty}$, \mathcal{L}_{∞} da kapalı bir ideal olduğundan

$$\overline{\omega_0(A) \cap \mathcal{L}_{\infty}} = \omega_0(A) \cap \mathcal{L}_{\infty}$$

olup, Lemma 3.2.4 den $x \in \omega_0(A) \cap \mathcal{L}_{\infty}$ olacaktır. Dolayısıyla

$$\omega_0(A, f) \cap \mathcal{L}_{\infty} \subseteq \omega_0(A) \cap \mathcal{L}_{\infty} \quad (23)$$

Şimdi (22) ve (23) den ispat tamamlanır.

3.3. A-İstatistiksel Yakınsaklık

Bu kısımda $A = (a_{nk})$ negatif olmayan regüler bir toplanabilme metodu olmak üzere, A-istatistiksel yakınsaklığı tanımlayıp, A-istatistiksel yakınsaklık ile bir modülüs fonksiyonuna göre kuvvetli A-toplanabilme arasında bazı bağıntılar vereceğiz.

TANIM 3.3.1: $x = (x_k)$ bir dizi ve A, negatif olmayan regüler bir toplanabilme metodu olsun. Her $\epsilon > 0$ sayısı için $\chi_{K(x-Le, \epsilon)} \in \omega_0(A)$ ise $x = (x_k)$ dizisi L saısına A-istatistiksel yakınsaktır denir ve bu durum $x_k \rightarrow L(AS)$ ile gösterilir. A-istatistiksel yakınsak dizilerin sınıfını AS ile göstereceğiz ([4] Connor 1989).

Bu tanım Tanım 1.1.1 in bir genelleştirilmesidir.

Sıfıra A-istatistiksel yakınsak dizilerin uzayı AS_0 olmak üzere, Lemma 3.2.4 yardımıyla AS_0 uzayının \mathcal{L}_{∞} da kapalı bir ideal olduğu gösterilebilir.

TEOREM 3.3.2: A, negatif olmayan regüler bir toplanabilme metodu olsun. Bu durumda

$$(i) \omega(A, f) \subset AS$$

$$(ii) AS \cap \ell_\infty \subset \omega(A, f)$$

dir ([4] Connor 1989).

İspat (i). $x \in \omega_0(A, f)$ ve $y \in \ell_\infty$ olsun. Bu durumda $y \in \ell_\infty$ olduğundan, her $k \in \mathbb{N}$ için $|y_k| < M$ olacak şekilde bir M pozitif sayısı vardır. O halde

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} f(|x_k y_k|) \leq M \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} f(|x_k|)$$

yazılabilir. Ayrıca $x \in \omega_0(A, f)$ olduğundan,

$$\lim_n \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} f(|x_k|) = 0$$

olup,

$$\lim_n \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} f(|x_k y_k|) = 0$$

elde edilir. yani $xy \in \omega_0(A, f)$ dir. Şimdi $x \in \omega_0(A, f)$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Bir $y = (y_k)$ dizisini

$$y_k = \begin{cases} \frac{1}{x_k}, & |x_k| \geq \varepsilon \\ 0, & \text{diğer durumda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda Teorem 3.2.6 dan

$$xy = \chi_{K(x, \varepsilon)} \in \omega_0(A, f) \cap \mathcal{L}_\infty = \omega_0(A) \cap \mathcal{L}_\infty$$

O halde Tanım 3.3.1 den x dizisi sifıra A -istatistiksel yakınsaktır.

(ii) $x \in AS \cap \mathcal{L}_\infty$ olsun. Bu durumda Tanım 3.3.1 den

$K(x - Le, \varepsilon) = \{k \in \mathbb{N} : |x_k - L| \geq \varepsilon\}$ olmak üzere her $\varepsilon > 0$ sayısı için

$\chi_{K(x - Le, \varepsilon)} \in \omega_0(A) \cap \mathcal{L}_\infty$. O halde Lemma 3.2.5 ve Lemma 3.3.4 den $x - Le$ dizisi sifıra kuvvetli A -toplanabilirdir. Teorem 3.2.6 dan x dizisi bir f modülüs fonksiyonuna göre L sayısına kuvvetli A -toplanabilirdir. Bu da ispatı tamamlar.

LEMMA 3.3.3: Bir x dizisi L sayısına A -istatistiksel yakınsak ise L sayısına yakınsayan bir alt diziye sahiptir.

İspat: x dizisi L sayısına A -istatistiksel yakınsak olsun. Bu durumda

$K(x - Le, \varepsilon) = \{k \in \mathbb{N} : |x_k - L| \geq \varepsilon\}$ olmak üzere her $\varepsilon > 0$ sayısı için

$\chi_{K(x - Le, \varepsilon)} \in \omega_0(A)$ dir. Şimdi her $k \in (\mathbb{N} \setminus K)$ için $|x_k - L| < \varepsilon$ olduğunu gösterelim.

Bunun için $(\mathbb{N} \setminus K)$ cümlesinin sonlu olmadığını göstermek yeterlidir. Bunu görmek için $(\mathbb{N} \setminus K)$ cümlesinin sonlu olduğunu kabul edelim. Bu durumda, $n \geq m_0$ için $n \in K$ olacak şekilde bir $m_0 \in \mathbb{N}$ vardır.

$$\chi_{K(x - Le, \varepsilon)} \in \omega_0(A) \text{ olduğundan } \lim_n \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \chi_{K(x - Le, \varepsilon)}(k) = 0 \text{ dir.}$$

$$0 = \lim_n \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \chi_{K(x - Le, \varepsilon)}(k) = \lim_n \sum_{k \in K} a_{nk}$$

A , regüler olduğundan $1 = \lim_n \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}$ olacaktır. Buna göre

$$\begin{aligned}
1 &= \lim_n \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = \lim_n \left(\sum_{k \in K} a_{nk} + \sum_{k \notin K} a_{nk} \right) \\
&= \lim_n \sum_{k \in K} a_{nk} + \lim_n \sum_{k \notin K} a_{nk}
\end{aligned}$$

olup $\lim_n \sum_{k \in K} a_{nk} = 0$ olduğundan

$$\lim_n \sum_{k \notin K} a_{nk} = 1 \quad (24)$$

elde edilir.

Halbuki $(\mathbb{N} \setminus K)$ sonlu olduğundan

$$\lim_n \sum_{k=1}^{m_0-1} a_{nk} = \sum_{k=1}^{m_0-1} \lim_n a_{nk} = 0 \quad (25)$$

Çünkü A regüler olup her $k \in \mathbb{N}$ için $\lim_n a_{nk} = 0$ dir. Böylece (24) ve (25) den çelişki elde ederiz. O halde $(\mathbb{N} \setminus K)$ cümlesi sonlu değildir. Bu da ispatı tamamlar.

Şimdi Teorem 3.3.2 den aşağıdaki sonucu çıkarabiliriz.

SONUÇ 3.3.4: Bir x dizisi, bir f modülüs fonksiyonuna göre L sayısına kuvvetli A -toplanabilir ise x dizisi L sayısına yakınsayan bir alt diziye sahiptir ([4] Connor 1989).

KAYNAKLAR

1. BENNETT, G., KALTON, N.J.: Inclusion Theorems for K spaces. *Canadian J. Mathematics* 25 (1973), 511-24.
2. BUCK, R.C. Generalized asymptotic density. *American J. Math.* 75(1953), 335-46.
3. CONNOR, J.S. The statistical and strong p -Cesàro convergence of sequences, *Analysis* 8(1988), 47-63.
4. CONNOR, J.S. On strong matrix summability with respect to a modulus and statistical convergence, *Canad. Mat. Bull.* 32(1989), 194-198.
5. CONNOR, J.S.: Two Valued Measure and Summability, *Analysis* 10(1990), 373-385.
6. FAST, H. Sur la convergence statistique, *Colloq. Math.* 2(1951), 241-244.
7. FREEDMAN, A.R. and SEMBER, J.J. Densities and Summability, *Pacific J. Math.* 95 (1981), 293-305.
8. FREEDMAN, A.R., SEMBER, J.J. and RAPHEAL, M. Some Cesàro type summability spaces, *proc. London. Math. Soc.* 37(1978), 508-520.
9. FRIDY, J.A. On statistical convergence, *Analysis* 5(1985), 301-313.
10. FRIDY, J.A. and MILLER, H.I.A matrix characterization of statistical convergence, *Analysis* 11 (1991), 59-66.

11. FRIDY, J.A. and ORHAN, C. Lacunary statistical summability, *J. Math. Analysis and Applications*. (to appear), 1991.
12. FRIDY, J.A. and ORHAN, C. Lacunary statistical convergence, *Pacific J. Math.* (to appear), 1992.
13. KOŁODIEJ, W. "Wybrane rozdziały analizy matematycznej". PWN, Warszawa. (1970).
14. LORENTZ, G.G.A Contribution to the Theory of Divergent Sequences, *Acta. Math.* 80 (1948), 167-190.
15. MADDOX, I.J.: *Elements of Functional Analysis*. Cambridge University Press. (1970).
16. MADDOX, I.J.: Steinhaus type theorems for summability matrices. *Proc. Amer. Math. Soc.* 45(1974), 209-13.
17. MADDOX, I.J. A New Type of Convergence, *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.* 83 (1978), 61-64.
18. MADDOX, I.J. "Sequence Space Defined by A Modulus" *Math. Proc. Cambr. Phil. Soc.* 100 (1986), 161-166.
19. NIVEN, I., ZUCKERMAN, H.S.: *An Introduction to the Theory of Numbers*, Fourth Ed., New York, John Wiley & Sons, 1980.
20. PETERSEN, G. *Regular Matrix Transformations* Mc Grow Hill Publishing Comp. (1966).

21. SALAT, T. On statistically convergent sequences of real numbers. *Math. Slovaca* 30(1980), No. 2, 139-150.
22. SCHOENBERG, I.J. The integrability of certain functions and related summability methods, *Amer. Math. Monthly* 66(1959), 361-375.
23. WILANSKY, A. *Modern Methods in Topological Vector Spaces*, Mc Graw - Hill inc., 1978.
24. WILANSKY, A. *Summability Through Functional Analysis* North Holland (1984).
25. ZYGMUND, A.: *Trigonometric Series* Ed., Cambridge University Press, 1979.