

**T.C.  
MUĞLA ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**q-INTEGER NOKTALARI ve  
SONLU FARKLAR ARASINDAKİ İLİŞKİLER**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**ÖZLEM İŞİK**

**MUĞLA 2009**

Onay sayfası

MUĞLA ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

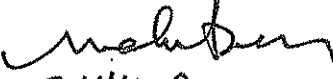
Prof. Dr. Zeynep Fidan KOÇAK danışmanlığında Özlem IŞIK tarafından hazırlanan q-  
INTEGER NIKTALARI VE SONLU FARKLAR ARASINDAKİ İLİŞKİLER adlı çalışma  
12-06-2009 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans  
tezi olarak oybirliği ile kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Mehmet SEZER

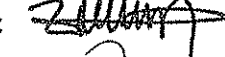
Danışman: Prof. Dr. Zeynep F. KOÇAK

Üye: Prof. Dr. Nesrin ÖZSOY

İmza:



İmza:



İmza:



## ÖNSÖZ

Çoğu öğrenci için, matematik fobisi olarak adlandırılan duygular ve önyargılar ilkokulda hatta okul öncesinde başlamakta ve devam eden bu korkular yüzünden matematik insanın ömür boyu kurtulamayacağı bir yük haline gelmektedir. Bu durum üniversiteye kadar benim içinde geçerliydi. Ancak üniversitede aldığım matematik eğitimi sayesinde bu korkum yerini matematik sevgisine bıraktı. Çünkü ezbere dayalı eğitim sistemimizde yer almayan ‘anlama’ problemim çözülmüştü. Bu sayede matematiğe olan olumsuz ön yargılarım tamamen yok oldu ve matematiği anlamaya başladım. İnsanlar sadece anlayabildikleri şeyleri sevebilirler. Bu yüzden biz matematikçiler matematiğin estetik yönünü ortaya koyup, onu daha sevimli ve anlaşılabilir hale getirmeliyiz. Matematiğin yaşamımızın her anında olduğu, hayatımızı bilinenin aksine nasıl kolaylaştırdığı vurgulanmalıdır. Bu çalışmada reel sayılarla yapılan karmaşık işlemleri basitleştiren q-integer sonlu farklara uygulandı ve farklı bir interpolasyon polinom formu oluşturuldu.

Çalışmalarım sırasında bana sevgi dolu yüreğiyle destek veren değerli hocam **Prof. Dr. Zeynep Fidan KOÇAK**'a teşekkür eder saygılar sunarım.

**Özlem IŞIK**

**Muğla 2009**

## İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ.....	I
İÇİNDEKİLER.....	II
ÖZET.....	III
ABSTRACT.....	IV
SEMBOLLER DİZİNİ.....	V
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	VI
TABLolar/ÇİZELGELER DİZİNİ.....	VII
1 : GİRİŞ.....	1
1.1. İnterpolasyon.....	2
2 : SONLU FARKLAR.....	8
2.1. Bölünmüş Farklar.....	8
2.2. İleri Farklar.....	19
2.3. Geri Farklar.....	28
3 : q-INTEGERS.....	34
3.1. q-integer Noktalarının özellikleri.....	34
3.2. q-farklar.....	39
3.3. Kaydırma Operatörü ve q-farklar.....	48
4 : İKİ İNTERPOLASYON FORMUNUN KARŞILAŞTIRILMASI.....	58
5 : SONUÇLAR ve TARTIŞMA.....	65
KAYNAKLAR.....	66
ÖZGEÇMİŞ.....	67

**q-INTEGER NOKTALARI ve  
SONLU FARKLAR ARASINDAKİ İLİŞKİLER**

**(Yüksek Lisans Tezi)**

**Özlem IŞIK**

**MUĞLA ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**2009**

**ÖZET**

Bu çalışmada sonlu farkların özellikleri ve sonlu farklarla interpolasyon formları verilmiştir. q-integer noktaları ve temel özellikleri verilerek sonlu farklarla arasındaki ilişki ortaya konmuş ve q-fark interpolasyon formu oluşturulmuştur.

Çalışmanın son kısmında bölünmüş fark interpolasyon formu ve q-fark interpolasyon formu karşılaştırılmıştır.

**Anahtar Kelimeler:** interpolasyon formları, sonlu farklar, q-integers, q-fark operatörü

**Sayfa adedi** : 76

**Tez yöneticisi** : Prof. Dr. Zeynep Fidan KOÇAK

**q-INTEGERS and  
FINITE DIFFERENCES**

(M. Sc.Thesis)

**Özlem IŞIK**

**MUĞLA UNIVERSITY  
INSTITUTE of SCIENCE and TECHNOLOGY**

2009

**ABSTRACT**

In this study, the features of finite differences were given and interpolation forms of finite differences have been introduced. By giving both  $q$ -integers and their features, the relationship between finite differences and  $q$ -integers has been observed and a new form of interpolation polynomial has been built.

At the end of this study, Newton divided difference interpolation form and  $q$ -difference interpolation form have been compared.

**Key Words:** interpolation forms, finite differences,  $q$ -integers,  $q$ -difference operator

**Page number** : 76

**Adviser** : Prof. Dr. Zeynep Fidan KOÇAK

## SEMBOLLER DİZİNİ

$\forall$	Her
$\exists$	En az bir
$C[a, b]$	$[a, b]$ kapalı aralığında sürekli fonksiyonların uzayı
$\Delta$	İleri fark operatörü
$\nabla$	Geri fark operatörü
$\Delta_q$	q-fark operatörü
$E_h$	Kaydırma operatörü
$I$	Birim fonksiyon
$L_{i,n}(x)$	n. dereceden Lagrange polinomu
$\pi_i(x)$	Newton baz polinomu
$V$	Vandermonde matrisi
$M$	Newton matrisi
$[r]$	q-integer noktası
$[r]!$	q-faktöriyel
$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}$	q-binom katsayıları
$[x]^{(m)}$	m. Dereceden q-faktöriyel polinomu
$D_q$	q-türev operatörü

**ŞEKİLLER DİZİNİ**Şekil NoSayfa No

Şekil 1.1.1 f fonksiyonuna lineer yaklaşımın grafiği

2

**TABLolar /ÇİZELGELER DİZİNİ**

<u>Tablo No</u>		<u>Sayfa No</u>
Tablo 2.1.1.	Bölünmüş fark tablosu	12
Tablo 2.2.1	İleri fark tablosu	23
Tablo 2.3.1	Geri fark tablosu	32

## 1. GİRİŞ

Tanımlı bir  $f(x)$  fonksiyonunda farklı  $x$  değerleri verilerek, bu  $x$  değerlerine karşılık gelen  $f(x)$  değerleri bulunabilir. Dolayısıyla istenilen bir  $x$  değerine karşılık gelen  $f(x)$  değeri analitik fonksiyon için mümkündür. Ancak fonksiyonu (analitik ifadesi) bilinmeyen sadece  $x$  noktalarındaki değerleri bilinen gözlem ve deneye dayalı verilerin olması durumunda bilinen  $x$  değerlerinin arasında veya dışındaki noktalarda değerlerine ihtiyaç duyulabilir. Bu işlem bir ara değer bulma problemidir. Ara değer bulma işleminde sonlu fark tabloları sıkça kullanılır(Dikmen).

Tablo halinde verilen hassas sayısal değerler veya ayırık noktalardan oluşan grafikler için ara değerlerin bulunması işlemi İnterpolasyon olarak; verilen noktaların dışındaki değerlerin bulunması işlemi de extrapolasyon olarak adlandırılır. İnterpolasyon için yaygın olarak kullanılan yöntem, noktalardan geçen polinom kullanmaktır. İnterpolasyon polinomları nümerik analizde önemli bir yer tutar. Bu çalışmada önce eşit aralıklı noktalar için sonlu farklar üzerinde duracağız. Fark tabloları sadece elverişli el hesapları için değil aynı zamanda yaklaşımdaki hatayı tahmin etmek, değerlendirebilmek için de düzenlenir. Bu nedenle farklar üzerine kurulmuş metotlar dijital ortamda çok kullanışlıdır. Çünkü çok etkili hesap teknikleri sunmaktalar ve hesabın kesinliğinin kontrolü için kullanılabilirler(Isaacson, Keller, 1994).

Polinom eşit aralıklı noktalardan geçtiğinde, interpolasyondaki hatayı inceleriz. Bu hata genellikle, İnterpolasyon noktalarının aralığının merkezine daha az yakındır ve aralık dışında hızlıca büyür (extrapolasyon). Bu yüzden elverişli bir değerlendirme için İnterpolasyon aralığının merkezine yakın olan özel İnterpolasyon formları oluşturulur(Isaacson, Keller, 1994).

Bu çalışmada öncelikle İnterpolasyon tekniklerinin uygulanmasında kolaylık sağlayan bazı tanımlar ve eşit aralıklı noktalar için sonlu fark tabloları verilecek, bazı İnterpolasyon teknikleri izah edilecektir. Ayrıca ardışık noktaların eşit aralıklı olmadığı fakat bu noktaların geometrik bir artış içinde olduğu özel İnterpolasyon polinom formları ortaya konacaktır. Bu ortak geometrik artışı  $q$  ile göstereceğiz. Daha sonra  $q$ -integer tanımı verilecek ve bunun sonlu farklarla ilişkisi ortaya konacaktır(Isaacson, Keller, 1994).

### 1.1. İnterpolasyon

Bir  $f$  fonksiyonunun  $x_i$  noktasındaki değerini  $f_i$

$x_{i+1}$  noktasındaki değerini  $f_{i+1}$

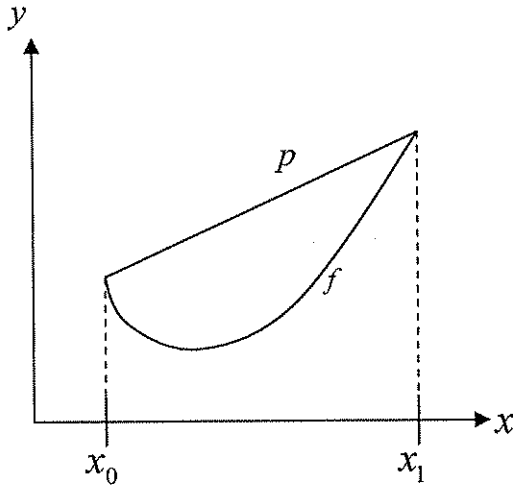
$x_{i+k.h}$  noktasındaki değerini  $f_{i+k}$  ile gösterelim.

Farklı  $x_0$  ve  $x_1$  noktalarında bir  $f$  fonksiyonunun aldığı değerler verilsin.

$$p_0 = f_0 \text{ ve } p_1 = f_1 \quad (1.1.1)$$

koşullarını sağlayan lineer bir  $p$  fonksiyonu ile  $f$ 'ye yaklaşabiliriz.

$p$ 'ye lineer interpolasyon polinomu diyoruz.  $p$  polinomunun  $x_0$  ve  $x_1$  noktaları dışında aldığı değerleri de hesaplayabiliriz ve bu  $f$  fonksiyonu için bir yaklaşım olur. Bu süreç lineer interpolasyon olarak adlandırılır.



Şekil 1.1.1: Lineer İnterpolasyon

Geometrik olarak böyle bir  $p$ 'nin var ve tek olduğu açıktır.

$p(x) = a.x + b$  için (1.1.1) koşulunu kullanarak  $a$  ve  $b$  katsayılarını hesaplayabiliriz ve doğrudan lineer İnterpolasyon polinomu elde edebiliriz.

$$p(x_0) = a.x_0 + b = f(x_0)$$

$$p(x_1) = a.x_1 + b = f(x_1)$$

Buradan

$a = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}$  ve  $b = \frac{x_1 \cdot f_0 - x_0 \cdot f_1}{x_1 - x_0}$  bulunur. Böylece;

$$p(x) = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} \cdot x + \frac{x_1 \cdot f_0 - x_0 \cdot f_1}{x_1 - x_0} \quad (1.1.2)$$

elde edilir.

- Bu ifadeyi düzenlersek  $p(x)$  polinomu aynı zamanda Lagrange simetrik formunda

$$p(x) = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} \cdot x + \frac{x_1 \cdot f_0 - x_0 \cdot f_1}{x_1 - x_0} = \frac{x \cdot f_1 - x \cdot f_0 + x_1 \cdot f_0 - x_0 \cdot f_1}{x_1 - x_0}$$

$$p(x) = \frac{x_1 - x}{x_0 - x_1} \cdot f_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \cdot f_1 \quad (1.1.3)$$

- Ya da Newton bölünmüş fark formunda

$$p(x) = \frac{x \cdot f_1 - x \cdot f_0 + x_1 \cdot f_0 - x_0 \cdot f_1 + x_0 \cdot f_0 - x_0 \cdot f_0}{x_1 - x_0}$$

$$= \frac{f_0 \cdot (x_1 - x_0) + f_1 \cdot (x - x_0) - f_0 \cdot (x - x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$p(x) = f_0 + (x - x_0) \cdot \left( \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} \right) \quad (1.1.4)$$

ifade edebiliriz.

**Teorem 1.1.1:** En fazla  $n$ . dereceden olan polinomların kümesini  $P_n$  ile gösterelim.  $f$  fonksiyonunun farklı  $x_0, x_1, \dots, x_n$  noktalarındaki değerleri verilsin.

$$j = 0, 1, \dots, n \text{ için } p_n(x_j) = f(x_j) \text{ ve}$$

$$p_n(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_n \cdot x^n$$

olacak şekilde tek bir  $p_n \in P_n$  polinomu vardır(Phillips,2003).

**İspat:** Bu teoremi ispatlamak için  $n+1$  bilinmeyenli  $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n)$ ,  $n+1$  denklem sistemine ihtiyacımız vardır.

$$p_n(x_j) = a_0 + a_1 x_j + a_2 x_j^2 + \dots + a_n x_j^n, \quad 0 \leq j \leq n \quad (1.1.5)$$

Buradan;

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdot & \cdot & \cdot & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdot & \cdot & \cdot & x_1^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdot & \cdot & \cdot & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n \end{pmatrix} \quad (1.1.6)$$

sistemi elde edilir.

$$V = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdot & \cdot & \cdot & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdot & \cdot & \cdot & x_1^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdot & \cdot & \cdot & x_n^n \end{pmatrix} \quad (1.1.7)$$

Vandermonde olarak adlandırılan bu matris non-singular ise sistemin tek çözümü vardır.

$$V(x) = V(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdot & \cdot & \cdot & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdot & \cdot & \cdot & x_1^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdot & \cdot & \cdot & x_n^n \end{vmatrix}$$

fonksiyonunu düşünelim.

$V(x) \in P_n$  olduğu açıktır. Ayrıca  $i = 0, 1, \dots, n-1$  olmak üzere  $V(x_i)$  için, iki aynı satır elde edileceğinden, determinanın değeri sıfır olacaktır. Öyleyse  $A$  katsayısı sadece  $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$  'e bağlı olmak üzere;

$$V(x) = V(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x) = A \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_{n-1}) \quad \text{yazılabilir.}$$

$A$  katsayısını hesaplamak için  $V(x)$  determinantını son satıra göre açalım.

$$V(x) = (-1)^{n+2} \cdot \begin{vmatrix} x_0 & x_0^2 & \cdot & \cdot & \cdot & x_0^n \\ x_1 & x_1^2 & \cdot & \cdot & \cdot & x_1^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \cdot & \cdot & \cdot & x_{n-1}^n \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{n+3} \cdot x \cdot \begin{vmatrix} 1 & x_0^2 & \cdot & \cdot & \cdot & x_0^n \\ 1 & x_1^2 & \cdot & \cdot & \cdot & x_1^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_{n-1}^2 & \cdot & \cdot & \cdot & x_{n-1}^n \end{vmatrix} + \dots + (-1)^{2n+2} \cdot x^n \cdot \begin{vmatrix} 1 & x_0 & \cdot & \cdot & \cdot & x_0^{n-1} \\ 1 & x_1 & \cdot & \cdot & \cdot & x_1^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_{n-1} & \cdot & \cdot & \cdot & x_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix}$$

Bu determinant açılımında  $x^n$  teriminin katsayısının  $V(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$  olduğu görülür.

O halde;

$$V(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x) = \underbrace{V(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})}_A \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$

yazılabilir. Buradan  $x = x_n$  için

$$V(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = V(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) \cdot (x_n - x_0) \cdot (x_n - x_1) \dots (x_n - x_{n-1})$$

elde edilir. Bu eşitlikten yararlanarak,

$$V(x_0, x_1) = x_1 - x_0$$

$$V(x_0, x_1, x_2) = V(x_0, x_1) \cdot (x_2 - x_0) \cdot (x_2 - x_1) = (x_1 - x_0) \cdot (x_2 - x_0) \cdot (x_2 - x_1)$$

bulunur. O halde;

$$\det(V) = \prod_{i>j} (x_i - x_j), \quad 0 \leq j < i \leq n \quad (1.1.8)$$

olarak verilir.

$x_0, x_1, \dots, x_n$  noktaları farklı olduğundan  $\det(V)$  sıfır olamaz. Böylece  $V$  matrisi non-singular ve (1.1.6) sisteminin tek çözümü vardır. Buradan şu sonuca varırız;

Farklı  $x_0, x_1, \dots, x_n$  noktalarında tanımlanan  $f$  fonksiyonu için  $j=0,1,\dots,n$  için  $p_n(x_j) = f(x_j)$  olacak şekilde tek bir  $p_n \in P_n$  polinomu vardır. Böylece ispat tamamlanmış olur. Bu  $P_n$  polinomu, interpolasyon polinomu olarak adlandırılır.  $P_n$  polinomunun derecesi  $n$ 'den daha az olabilir. Örneğin, eğer bütün  $(x_j, f(x_j))$   $n+1$  tane nokta bir doğru üzerinde yer alıyorsa interpolasyon polinomunun derecesi 1 ya da 0 olacaktır. Derecenin 0 olması durumu tüm  $f(x_j)$ 'lerin eşit olmasıyla ortaya çıkabilecek bir durumdur.

- Matrisi Vandermonde matrisi olan (1.1.6) sistemini çözmeye gerek yoktur. Çünkü  $P_n$  interpolasyon polinomu başka yollarla kolayca elde edilebilir.

$1, x, x^2, \dots, x^n$  baz polinomlarını kullanmak yerine

$$L_i(x) = \prod_{j \neq i} \left( \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right), \quad 0 < j < n, \quad i \neq j \quad (1.1.9)$$

olan  $L_0, L_1, \dots, L_n$  temel polinomlarını kullanalım. Her bir  $L_i(x)$  ( $i=0,1,\dots,n$ ) polinomu  $n$ . derecedendir. Ve  $x = x_i$  için  $L_i(x)$  '1' değerini ve  $i \neq j$  için diğer tüm  $x_j$  noktalarında '0' değerini alır. Örneğin;

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n)}{(x_0 - x_1) \cdot (x_0 - x_2) \cdot \dots \cdot (x_0 - x_n)} \quad \text{için}$$

$$L_0(x_0) = 1 \quad \text{ve} \quad 1 \leq j \leq n \quad \text{için} \quad L_0(x_j) = 0 \quad \text{dır.}$$

Böylece  $f(x_i) \cdot L_i(x)$ ,  $x = x_i$  noktasında  $f(x_i)$  değerini, diğer noktalarda sıfır değerini alır. O halde  $p_n(x)$  interpolasyon polinomunu,  $L_i(x)$  temel polinomları cinsinden

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \cdot L_i(x) \quad (1.1.10)$$

olarak ifade edilir ve Lagrange interpolasyon polinomu olarak adlandırılır.

Görüldüğü gibi verilen bir  $f$  fonksiyonu için  $p_n$  interpolasyon polinomu,  $f$ 'nin farklı  $x_0, x_1, \dots, x_n$  noktalarındaki değerleri kullanılarak elde edilmiştir.  $p_n$  polinomunun tüm  $x_j$ 'lerden farklı  $x$  noktalarında aldığı değerleri hesaplayabilir ve bunu  $f(x)$  için yaklaşımda kullanabiliriz. Bu süreç interpolasyon olarak adlandırılır(Phillips, 2003).

## 2. SONLU FARKLAR

- Lagrange interpolasyon polinomunu kullanmanın iki dezavantajı vardır. Birincisi çok fazla aritmetik işlem gerektirmesidir. İkincisi ve en önemlisi ise Lagrange interpolasyon formunda, başka bir interpolasyon noktası eklendiğinde veya çıkarıldığında hesaplamalara yeniden başlamak zorunda kalmamızdır. Lagrange interpolasyon formu bu konuda eksik kalmaktadır. Ve önceki polinomu kolayca değiştirerek daha yüksek dereceden yeni interpolasyon polinomu elde edilememektedir. Dolayısıyla yeni bir nokta eklendiğinde, daha yüksek dereceden yeni interpolasyon polinomunu kolayca elde edebileceğimiz bir interpolasyon formu aramalıyız(Phillips, 2003).

### 2.1. BÖLÜNÜŞ FARKLAR

- Isaac Newton (1642-1727) interpolasyon polinomu elde etmenin şık bir yolunu bulmuştur.  $1, x, x^2, \dots, x^n$  bazını veya temel  $L_i$  polinomlarını kullanmak yerine en fazla  $n$ . dereceden olan

$$\pi_i(x) = \begin{cases} 1 & , i = 0 \\ (x - x_0) \cdot (x - x_1) \dots (x - x_{i-1}), & 1 \leq i \leq n \end{cases} \quad (2.1.1)$$

şeklinde tanımlanan  $\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_n$  polinomlarını baz olarak kullanmıştır.

$f$  ile  $x_0, x_1, \dots, x_n$  noktalarında aynı değeri aldığı varsayılan  $p_n \in P_n$  interpolasyon polinomu

$$p_n(x) = a_0 \cdot \pi_0(x) + a_1 \cdot \pi_1(x) + \dots + a_n \cdot \pi_n(x) \quad (2.1.2)$$

formunda yazılmıştır.

$a_0, a_1, \dots, a_n$  katsayılarını bulmadan önce  $n$ . mertebeden bölünmüş farkı ifade etmekte fayda vardır.

- $x_0, x_1, \dots, x_n$  farklı noktalar olmak üzere  $n$ . mertebeden bölünmüş fark

$$f[x_0] = f(x_0) \text{ olmak üzere;}$$

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_n] - f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$

olarak ifade edilir.

- (2.1.2)'deki  $a_0, a_1, \dots, a_n$  katsayılarını

$p_n(x_j) = f(x_j)$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$  eşitliğinden elde edeceğiz.

$$a_0 \cdot \pi_0(x_j) + a_1 \cdot \pi_1(x_j) + \dots + a_j \cdot \pi_j(x_j) = f(x_j), \quad (0 \leq j \leq n) \quad (2.1.3)$$

(2.1.3) eşitliğinde sadece  $a_0, a_1, \dots, a_j$  katsayıları gözükmektedir. Çünkü  $i > j$  için

$$\pi_i(x_j) = 0 \text{ dir.}$$

(2.1.3) lineer sistemi;

$$a = [a_0 \quad a_1 \quad \dots \quad a_n]^T, \quad f = [f_0 \quad f_1 \quad \dots \quad f_n]^T \text{ ve}$$

$$M = \begin{pmatrix} \pi_0(x_0) & \pi_1(x_0) & \pi_2(x_0) & \dots & \dots & \pi_n(x_0) \\ \pi_0(x_1) & \pi_1(x_1) & \pi_2(x_1) & \dots & \dots & \pi_n(x_1) \\ \pi_0(x_2) & \pi_1(x_2) & \pi_2(x_2) & \dots & \dots & \pi_n(x_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \pi_0(x_n) & \pi_1(x_n) & \pi_2(x_n) & \dots & \dots & \pi_n(x_n) \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} \pi_0(x_0) & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \pi_0(x_1) & \pi_1(x_1) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \pi_0(x_2) & \pi_1(x_2) & \pi_2(x_2) & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \pi_0(x_n) & \pi_1(x_n) & \pi_2(x_n) & \dots & \dots & \pi_n(x_n) \end{pmatrix} \quad (2.1.4)$$

$$\text{olmak üzere } M \cdot a = f \quad (2.1.5)$$

matris formuna sahiptir. Newton matrisi olarak adlandıracağımız  $M$  matrisi alt üçgensel bir matristir.  $M$  matrisi alt üçgensel bir matris olduğundan determinantı köşegenler üzerindeki elemanların çarpımına eşittir.

$$\det(M) = \pi_0(x_0) \cdot \pi_1(x_1) \dots \pi_n(x_n) \quad (2.1.6)$$

Eğer  $n+1$  tane  $x_0, x_1, \dots, x_n$  noktaları farklı ise  $\det(M) \neq 0$  olacaktır. Böylece (2.1.5) sisteminin tek çözümü olduğu açıktır.  $M$  matrisinin alt üçgensel bir matris olması yaklaşımın başarısı açısından çok önemlidir.

$a_0$  katsayısını birinci eşitlikten ve  $a_1$  katsayısını ikinci eşitlikten doğrudan elde edebiliriz. Genel olarak  $a_j$  katsayısını da  $(j+1)$ . eşitlikten saptarız ve  $a_j$ 'nin, sadece  $x_0$ 'dan  $x_j$ 'ye ve  $f_0$ 'dan  $f_j$ 'ye kadar olan değerlere bağlı olduğunu görebiliriz. (2.1.5) sisteminden;

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 1 & (x_1 - x_0) & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 1 & (x_2 - x_0) & (x_2 - x_0) \cdot (x_2 - x_1) & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & (x_n - x_0) & (x_n - x_0) \cdot (x_n - x_1) & \cdot & \cdot & \cdot & (x_n - x_0) \dots (x_n - x_{n-1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n \end{pmatrix}$$

yazılır. Buradan;

$$\triangleright a_0 = f_0 = f[x_0]$$

$$\triangleright a_0 + (x_1 - x_0) \cdot a_1 = f_1$$

$$a_0 = f_0 \text{ ve } a_1 = \frac{f_1 - a_0}{x_1 - x_0} = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} = f[x_0, x_1] \quad (2.1.7)$$

$$\triangleright a_0 + (x_2 - x_0) \cdot a_1 + (x_2 - x_0) \cdot (x_2 - x_1) \cdot a_2 = f_2$$

Bu eşitlikte  $a_0$  ve  $a_1$  katsayılarını yerine yazarsak;

$$f_0 + (x_2 - x_0) \cdot \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} + (x_2 - x_0) \cdot (x_2 - x_1) \cdot a_2 = f_2$$

elde edilir.  $a_2$  katsayısını çekersek;

$$(x_2 - x_0) \cdot (x_2 - x_1) \cdot a_2 = f_2 - f_0 - (x_2 - x_0) \cdot \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}$$

$$a_2 = \frac{f_2 - f_0}{(x_2 - x_0) \cdot (x_2 - x_1)} - \frac{f_1 - f_0}{(x_2 - x_1) \cdot (x_1 - x_0)}$$

Paydaları eşitlersek;

$$a_2 = \frac{x_1 \cdot f_2 - x_0 \cdot f_2 - x_1 \cdot f_0 + \cancel{x_0 \cdot f_0} - x_2 \cdot f_1 + x_0 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_0 - \cancel{x_0 \cdot f_0}}{(x_2 - x_0) \cdot (x_2 - x_1) \cdot (x_1 - x_0)}$$

$x_1 \cdot f_1$  terimini paya ekleyip çıkarırsak;

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{x_1 \cdot f_2 - x_0 \cdot f_2 - x_1 \cdot f_0 - x_2 \cdot f_1 + x_0 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_0 - x_1 \cdot f_1 + x_1 \cdot f_1}{(x_2 - x_0) \cdot (x_2 - x_1) \cdot (x_1 - x_0)} \\ &= \frac{(x_1 - x_0) \cdot (f_2 - f_1) - (x_2 - x_1) \cdot (f_1 - f_0)}{(x_2 - x_0) \cdot (x_2 - x_1) \cdot (x_1 - x_0)} \end{aligned}$$

$$a_2 = \frac{\frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} - \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0} = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = f[x_0, x_1, x_2]$$

Bu şekilde devam edersek;

- 
- 
- 

$0 \leq j \leq n$  için  $a_j$  katsayılarının  $x_0, x_1, \dots, x_j$  ve  $f_0, f_1, \dots, f_j$  değerlerine bağlı olduğunu vurgulamak için  $a_j$  katsayısı  $j$ . bölünmüş fark olarak ifade edilir.

$$\triangleright a_j = f[x_0, x_1, \dots, x_j], \quad 0 \leq j \leq n \quad (2.1.8)$$

(2.1.7)'de  $a_0 = f_0$  ve

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_n] - f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$

olduğundan (2.1.2) eşitliği

$$P_n(x) = f[x_0].\pi_0(x) + f[x_0, x_1].\pi_1(x) + \dots + f[x_0, x_1, \dots, x_n].\pi_n(x) \quad (2.1.9)$$

'interpolasyon polinomu için Newton bölünmüş fark formülü' haline dönüşür. Daha önce (1.1.4)'de lineer interpolasyon polinomu için verdiğimiz formül (2.1.9)'un özel halidir.

- Bölünmüş farkları hesaplamak için sistematik bir şema elde edilebilir.

**Tablo2.1.1**

$x_0$	$f[x_0]$	$f[x_0, x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$
$x_1$	$f[x_1]$	$f[x_1, x_2]$		$f[x_1, x_2, x_3]$	$f[x_1, x_2, x_3, x_4]$	
$x_2$	$f[x_2]$	$f[x_2, x_3]$		$f[x_2, x_3, x_4]$		
$x_3$	$f[x_3]$	$f[x_3, x_4]$				
$x_4$	$f[x_4]$					

**Teorem2.1.1:**  $n$ . mertebeden bölünmüş fark  $f[x_0, x_1, \dots, x_n]$

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \sum_{r=0}^n \frac{f_r}{\prod_{j \neq r} (x_r - x_j)} \quad (2.1.10)$$

şeklinde  $f_j$  çarpanlarının simetrik toplamı olarak ifade edilebilir(Phillips, 2003).

**İspat:** İnterpolasyon polinomu tek olduğundan (1.1.10) ve (2.1.9)'da  $x^n$ 'nin katsayılarını eşitlersek

- (1.1.10)'dan

$$P_n(x) = f(x_0).L_0(x) + f(x_1).L_1(x) + \dots + f(x_n).L_n(x)$$

$$= f_0 \cdot \frac{(x-x_1).(x-x_2) \dots (x-x_n)}{(x_0-x_1).(x_0-x_2) \dots (x_0-x_n)} + f_1 \cdot \frac{(x-x_0).(x-x_2) \dots (x-x_n)}{(x_1-x_0).(x_1-x_2) \dots (x_1-x_n)} + \dots +$$

$$+ f_n \cdot \frac{(x-x_0).(x-x_2) \dots (x-x_{n-1})}{(x_n-x_0).(x_n-x_1) \dots (x_n-x_{n-1})}$$

elde edilir.

- (2.1.9)'dan

$$P_n(x) = f[x_0].\pi_0(x) + f[x_0, x_1].\pi_1(x) + \dots + f[x_0, x_1, \dots, x_n].\pi_n(x)$$

$$= f[x_0] + f[x_0, x_1] \cdot (x - x_0) + \dots +$$

$$+ f[x_0, x_1, \dots, x_n] \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$

- (1.1.10)'da  $p_n(x)$  polinomunda  $x^n$ 'nin katsayısı

$$\frac{f_0}{(x_0 - x_1) \cdot (x_0 - x_2) \dots (x_0 - x_n)} + \frac{f_1}{(x_1 - x_0) \cdot (x_1 - x_2) \dots (x_1 - x_n)} + \dots +$$

$$+ \frac{f_n}{(x_n - x_0) \cdot (x_n - x_1) \dots (x_n - x_{n-1})}$$

- (2.1.9)'da  $p_n(x)$  polinomunda  $x^n$ 'nin katsayısı  $f[x_0, x_1, \dots, x_n]$  gelecektir.

Polinom eşitliğinden,

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f_0}{(x_0 - x_1) \cdot (x_0 - x_2) \dots (x_0 - x_n)} +$$

$$+ \frac{f_1}{(x_1 - x_0) \cdot (x_1 - x_2) \dots (x_1 - x_n)} + \dots + \frac{f_n}{(x_n - x_0) \cdot (x_n - x_1) \dots (x_n - x_{n-1})}$$

elde edilir. Buradan;

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \sum_{r=0}^n \frac{f_r}{\prod_{j \neq r} (x_r - x_j)}$$

olduğu görülür ve ispat tamamlanmış olur.

- (2.1.10) simetrik formundan, her bir  $f[x_0, x_1, \dots, x_n]$  bölünmüş farkın aslında, bileşenlerinin simetrik fonksiyonu olduğu açıktır. Bu, eğer  $0 \leq j \leq n$  için  $x_j$ 'leri yeniden herhangi bir sıraya göre düzenlersek  $f[x_0, x_1, \dots, x_n]$ 'nin değişmeyeceği anlamına gelmektedir. Örneğin;

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f_0}{(x_0 - x_1) \cdot (x_0 - x_2)} + \frac{f_1}{(x_1 - x_0) \cdot (x_1 - x_2)} + \frac{f_2}{(x_2 - x_0) \cdot (x_2 - x_1)}$$

$$f[x_1, x_2, x_0] = \frac{f_1}{(x_1 - x_0) \cdot (x_1 - x_2)} + \frac{f_2}{(x_2 - x_0) \cdot (x_2 - x_1)} + \frac{f_0}{(x_0 - x_1) \cdot (x_0 - x_2)}$$

Yani  $f[x_0, x_1, x_2] = f[x_1, x_2, x_0]$  dir.

**Teorem2.1.2:**  $n$ . mertebeden Newton bölünmüş fark formülü

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_n] - f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0} \quad (2.1.11)$$

şeklinde ifade edilir(Phillips, 2003).

**İspat:** (2.1.10) simetrik formunu kullanarak bu eşitliği gösterebiliriz.

$$\begin{aligned} & \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_n] - f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0} = \\ & = \frac{\frac{f_1}{(x_1 - x_2) \dots (x_1 - x_n)} + \frac{f_2}{(x_2 - x_1) \dots (x_2 - x_n)} + \dots + \frac{f_n}{(x_n - x_1) \dots (x_n - x_{n-1})}}{(x_n - x_0)} - \\ & \frac{\frac{f_0}{(x_0 - x_1) \dots (x_0 - x_{n-1})} + \frac{f_1}{(x_1 - x_0) \dots (x_1 - x_{n-1})} + \dots + \frac{f_{n-1}}{(x_{n-1} - x_0) \dots (x_{n-1} - x_{n-2})}}{(x_n - x_0)} \\ & = \frac{f_0}{(x_0 - x_1) \dots (x_0 - x_{n-1}) \cdot (x_0 - x_n)} + \\ & + f_1 \cdot \left[ \frac{1}{(x_1 - x_0) \dots (x_1 - x_{n-1}) \cdot (x_0 - x_n)} - \frac{1}{(x_1 - x_2) \dots (x_1 - x_n) \cdot (x_0 - x_n)} \right] + \\ & + f_2 \cdot \left[ \frac{1}{(x_2 - x_0) \dots (x_2 - x_{n-1}) \cdot (x_0 - x_n)} - \frac{1}{(x_2 - x_1) \dots (x_2 - x_n) \cdot (x_0 - x_n)} \right] + \dots + \\ & + f_{n-1} \cdot \left[ \frac{1}{(x_{n-1} - x_0) \dots (x_{n-1} - x_{n-2}) \cdot (x_0 - x_n)} - \frac{1}{(x_{n-1} - x_1) \dots (x_{n-1} - x_n) \cdot (x_0 - x_n)} \right] + \\ & + \frac{f_n}{(x_n - x_1) \dots (x_n - x_{n-1}) \cdot (x_n - x_0)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{f_0}{(x_0 - x_1) \cdot (x_0 - x_2) \cdots (x_0 - x_n)} + \\
&+ \frac{f_1}{(x_1 - x_2) \cdots (x_1 - x_{n-1})} \cdot \left[ \frac{1}{(x_1 - x_0) \cdot (x_0 - x_n)} - \frac{1}{(x_1 - x_n) \cdot (x_0 - x_n)} \right] + \\
&+ \frac{f_2}{(x_2 - x_1) \cdots (x_2 - x_{n-1})} \cdot \left[ \frac{1}{(x_2 - x_0) \cdot (x_0 - x_n)} - \frac{1}{(x_2 - x_n) \cdot (x_0 - x_n)} \right] + \dots + \\
&+ \frac{f_{n-1}}{(x_{n-1} - x_1) \cdots (x_{n-1} - x_{n-2})} \cdot \left[ \frac{1}{(x_{n-1} - x_0) \cdot (x_0 - x_n)} - \frac{1}{(x_{n-1} - x_n) \cdot (x_0 - x_n)} \right] + \\
&+ \frac{f_n}{(x_n - x_0) \cdot (x_n - x_1) \cdots (x_n - x_{n-1})}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{f_0}{(x_0 - x_1) \cdot (x_0 - x_2) \cdots (x_0 - x_n)} + \\
&+ \frac{f_1}{(x_1 - x_2) \cdots (x_1 - x_{n-1})} \cdot \left[ \frac{\cancel{x_1} - x_n - \cancel{x_1} + x_0}{(x_1 - x_0) \cdot (x_0 - x_n) \cdot (x_1 - x_n)} \right] + \\
&+ \frac{f_2}{(x_2 - x_1) \cdots (x_2 - x_{n-1})} \cdot \left[ \frac{\cancel{x_2} - x_n - \cancel{x_2} + x_0}{(x_2 - x_0) \cdot (x_0 - x_n) \cdot (x_2 - x_n)} \right] + \dots + \\
&+ \frac{f_{n-1}}{(x_{n-1} - x_1) \cdots (x_{n-1} - x_{n-2})} \cdot \left[ \frac{\cancel{x_{n-1}} - x_n - \cancel{x_{n-1}} + x_0}{(x_{n-1} - x_0) \cdot (x_0 - x_n) \cdot (x_{n-1} - x_n)} \right] + \\
&+ \frac{f_n}{(x_n - x_0) \cdot (x_n - x_1) \cdots (x_n - x_{n-1})}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{f_0}{(x_0 - x_1) \cdot (x_0 - x_2) \cdots (x_0 - x_n)} + \frac{f_1}{(x_1 - x_0) \cdot (x_1 - x_2) \cdots (x_1 - x_{n-1}) \cdot (x_1 - x_n)} + \\
&+ \frac{f_2}{(x_2 - x_0) \cdot (x_2 - x_1) \cdots (x_2 - x_{n-1}) \cdot (x_2 - x_n)} + \dots +
\end{aligned}$$

$$+ \frac{f_{n-1}}{(x_{n-1} - x_0) \cdot (x_{n-1} - x_1) \cdots (x_{n-1} - x_{n-2}) \cdot (x_{n-1} - x_n)} +$$

$$+ \frac{f_n}{(x_n - x_0) \cdot (x_n - x_1) \cdots (x_n - x_{n-1})} = f[x_0, x_1, \dots, x_n]$$

olduğu görülür.

- Şimdi Newton bölünmüş fark interpolasyonun hata terimi için geliştirilmiş Rolle teoremini ifade edip ispatlayalım.

### **Teorem2.1.3: (Genelleştirilmiş Rolle Teoremi)**

$n \geq 2$  için  $f \in C[a, b]$  ve  $(a, b)$  aralığının her noktasında  $f^{(n-1)}(x)$  var ve sürekli olsun.

Ayrıca  $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq b$  olmak üzere  $f(x_1) = f(x_2) = \dots = f(x_n) = 0$  olsun.

Bu durumda  $f^{(n-1)}(\xi) = 0$  olacak şekilde bir  $\xi \in (x_1, x_n)$  vardır (Davis, 1975).

#### **İspat:**

$f \in C[a, b]$  ve  $\forall x \in (a, b)$  için  $f^{(n-1)}(x)$  var olsun.

Ayrıca  $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq b$  olmak üzere  $f(x_1) = f(x_2) = \dots = f(x_n) = 0$  olsun.

→  $f$  fonksiyonuna Rolle teoremini uygularsak

$x_1 < \xi_1 < x_2 < \xi_2 < x_3 < \dots < \xi_{n-1} < x_n$  için;

$f'(\xi_1) = 0, f'(\xi_2) = 0, \dots, f'(\xi_{n-1}) = 0$  olur.

→  $f$  fonksiyonunun birinci türevine tekrar Rolle uygularsak;

$\xi_1 < \xi_{1,1} < \xi_2 < \xi_{2,1} < \xi_3 < \dots < \xi_{n-2,1} < \xi_{n-1}$  için;

$f''(\xi_{1,1}) = 0, f''(\xi_{2,1}) = 0, \dots, f''(\xi_{n-2,1}) = 0$  olacaktır.

$\forall x \in (a, b)$  için  $f^{(n-1)}(x)$  var olduğundan, bu şekilde  $(n-1)$ . mertebeden türeve kadar

devam ederse  $f^{(n-1)}(\xi) = 0$  olacak şekilde bir  $\xi \in (x_1, x_n)$  olduğu görülür.

**Teorem2.1.4:**

$f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  fonksiyonu verilsin ve  $f \in C^n[a, b]$  olsun. Farklı  $x_0, x_1, \dots, x_n$  noktaları için  $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a, b]$  olmak üzere  $(a, b)$  aralığında  $f^{(n+1)}$  var olsun. Bu durumda

$$f(x) - p_n(x) = (x - x_0) \cdot (x - x_1) \dots (x - x_n) \cdot \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \quad (2.1.12)$$

olacak şekilde  $x$ 'e bağlı bir  $\xi_x \in (a, b)$  vardır (Phillips, 2003).

**İspat:** Genelleştirilmiş Rolle teoremini kullanarak ispatı yapabiliriz.

$\alpha \in [a, b]$  ve  $\alpha \neq x_0, x_1, \dots, x_n$  olmak üzere

$$G(x) = f(x) - p_n(x) - \frac{(x - x_0) \cdot (x - x_1) \dots (x - x_n)}{(\alpha - x_0) \cdot (\alpha - x_1) \dots (\alpha - x_n)} \cdot (f(\alpha) - p_n(\alpha)) \quad (2.1.13)$$

fonksiyonunu düşünelim.

$G$  fonksiyonunun  $\alpha$  ve  $n+1$  tane  $x_j$  interpolasyon noktasında,  $n+2$  tane kökü vardır.

$$\rightarrow 0 \leq j \leq n \text{ için } G(x_j) = 0 \text{ ve}$$

$$\rightarrow x = \alpha \text{ için } G(\alpha) = f(\alpha) - p_n(\alpha) - f(\alpha) + p_n(\alpha) = 0$$

Genelleştirilmiş Rolle teoreminden  $G^{(n+1)}(\xi_\alpha) = 0$  olacak şekilde  $x = \xi_\alpha$  gibi bir köke sahiptir.

Böylece (2.1.13)'ün  $(n+1)$ . mertebeden türevini alıp  $x = \xi_\alpha$  yazarsak;

$$G^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - \frac{(n+1)! \cdot (f(\alpha) - p_n(\alpha))}{(\alpha - x_0) \cdot (\alpha - x_1) \dots (\alpha - x_n)}$$

$$G^{(n+1)}(\xi_\alpha) = f^{(n+1)}(\xi_\alpha) - \frac{(n+1)! \cdot (f(\alpha) - p_n(\alpha))}{(\alpha - x_0) \cdot (\alpha - x_1) \dots (\alpha - x_n)} = 0$$

elde edilir. İspatı tamamlamak için

$$f(\alpha) - p_n(\alpha) = f^{(n+1)}(\xi_\alpha) \cdot \frac{(\alpha - x_0) \cdot (\alpha - x_1) \dots (\alpha - x_n)}{(n+1)!}$$

yazabiliriz.

Son olarak  $\alpha$  yerine  $x$  yazarsak

$$f(x) - p_n(x) = f^{(n+1)}(\xi_x) \cdot \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)}{(n+1)!}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

- İnterpolasyon için bulduğumuz hata sınırlı kullanıma sahiptir. Çünkü bu hata  $f$  nin  $(n+1)$ . mertebeden türevinin hesabını gerektirmektedir ve genel olarak  $\xi_x$ 'in değerini bilmiyoruz.
- Şimdi sadece yüksek mertebeden türeve sahip olan fonksiyonlara değil, tüm fonksiyonlara uygulanabilir alternatif bir hata terimi elde etmeliyiz. Bu hata terimi  $(n+1)$ . mertebeden türev yerine bölünmüş fark içermektedir.

$f[x, x_0, x_1, \dots, x_n]$  bölünmüş farkını (2.1.11)'den

$$f[x, x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f[x, x_0, \dots, x_{n-1}] - f[x_0, x_1, \dots, x_n]}{x - x_n}$$

$$f[x, x_0, \dots, x_{n-1}] = f[x_0, x_1, \dots, x_n] + (x - x_n) \cdot f[x, x_0, \dots, x_n] \quad (2.1.14)$$

şeklinde yazabiliriz. Benzer olarak

$$\triangleright f[x] = f[x_0] + (x - x_0) \cdot f[x, x_0] \quad (2.1.15)$$

yazılabilir.

$\triangleright$  Yine  $n=1$  için

$$f[x, x_0] = f[x_0, x_1] + (x - x_1) f[x, x_0, x_1]$$

elde edilir. Bu ifadeyi (2.1.15)'de yerine yazalım.

$$\triangleright f[x] = f[x_0] + (x - x_0) \cdot f[x_0, x_1] + (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot f[x, x_0, x_1] \quad (2.1.16)$$

(2.1.16) ifadesi,  $p_1(x)$  polinomu  $f$  fonksiyonu için  $x_0, x_1$  noktalarına dayandırılmış interpolasyon polinomu olmak üzere;

$$f(x) = p_1(x) + (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot f[x, x_0, x_1]$$

şeklinde de yazılabilir.

Genel olarak

$$f(x) = p_n(x) + (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n) f[x, x_0, \dots, x_n] \quad (2.1.17)$$

elde edilir.

- $\forall x \in [a, b]$  ve  $(0 \leq j \leq n)$ ,  $x_j \in [a, b]$  için Teorem 2.1.4'ün koşulları sağlandığından

$$f(x) - p_n(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n) \cdot \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}$$

olacak şekilde  $x$ 'e bağlı bir  $\xi_x \in (a, b)$  vardır.

$$(2.1.17)'den  $f(x) = p_n(x) + (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n) f[x, x_0, \dots, x_n]$$$

olduğundan ((2.1.17) ve (2.1.12)'yi eşitlersek)

$$f[x, x_0, \dots, x_n] = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \quad \text{olacaktır.}$$

$n$  yerine  $n-1$  yazarsak ve  $x = x_n$  için

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \quad \xi \in (x_0, x_n) \quad (2.1.18)$$

elde edilmiş olur (Phillips, 2003).

Ayrıca  $i = 0, 1, 2, \dots, n$  için

$$\lim_{x_i \rightarrow x} f[x, x_0, \dots, x_n] = \frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!} \quad \text{dir (Davis, 1975).}$$

## 2.2. İLERİ FARKLAR

Tablo 2.1.1 deki gibi bölünmüş farklar hesaplanırken, tekrarlı olarak

$$\frac{f[x_{j+1}, \dots, x_{j+k+1}] - f[x_j, \dots, x_{j+k}]}{x_{j+k+1} - x_j} \quad (2.2.1)$$

bölümü hesap edilir.

$k = 0$  için birinci mertebeden bölünmüş fark elde edilebilir. (Tablo 2.1.1 de 3. sütunda)

$k = 1$  için ikinci mertebeden bölünmüş fark elde edilebilir. (Tablo 2.1.1 de 4. sütunda)

Ve bu şekilde istediğimiz mertebeden bölünmüş fark elde edilebilir. Şimdi  $x_j$  noktaları arasındaki uzaklık eşit olsun. Yani;

$$h \neq 0 \text{ için } x_j = x_0 + j.h \text{ olmak üzere } x_{j+k+1} - x_j = (k+1).h \text{ olsun.}$$

O halde (2.2.1)'dan anlaşılacağı gibi, Tablo2.1.1'de herhangi bir sütunda bölünmüş farkların paydası sabit olacaktır. Bu durumda bölünmüş farkların, sadece 'fark' olan payları üzerine yoğunlaşmak doğaldır. O halde aşağıdaki tanımları vermekte yarar vardır.

**Tanım2.2.1:**  $h \neq 0$  ve  $x_j = x_0 + j.h$  için  $\Delta^0 f_j = f_j$  olmak üzere  $k+1$ . mertebeden ileri farklar,

$$\Delta^{k+1} f_j = \Delta(\Delta^k f_j) = \Delta^k f_{j+1} - \Delta^k f_j \quad (2.2.2)$$

olarak tanımlanır(Phillips, 2003).

- Eşit aralıklı  $x_j$  noktaları için birinci mertebeden bölünmüş farkı, birinci mertebeden ileri fark cinsinden ifade edebiliriz.

$$f[x_j, x_{j+1}] = \frac{f_{j+1} - f_j}{x_{j+1} - x_j} = \frac{\Delta f_j}{h}$$

yazılabilir.

$$x_j = j \text{ alırsak,}$$

$$x_{j+1} - x_j = j+1 - j = 1 = h$$

bulunur. Buradan birinci mertebeden bölünmüş fark ile birinci mertebeden fark arasındaki bağıntı elde edilmiş olur.

$$f[x_j, x_{j+1}] = \frac{f_{j+1} - f_j}{x_{j+1} - x_j} = \frac{\Delta f_j}{h} = \frac{\Delta f_j}{1} = \Delta f_j$$

$$f[x_j, x_{j+1}] = \Delta f_j \quad (2.2.3)$$

- Şimdi de ikinci mertebeden bölünmüş farkı, ikinci mertebeden ileri fark cinsinden ifade edelim.

$$f[x_j, x_{j+1}, x_{j+2}] = \frac{f[x_{j+1}, x_{j+2}] - f[x_j, x_{j+1}]}{x_{j+2} - x_j}$$

$$= \frac{\Delta f_{j+1} - \Delta f_j}{2.h} = \frac{1}{2} \cdot (\Delta f_{j+1} - \Delta f_j) = \frac{1}{2} \cdot \Delta^2 f_j$$

Sonuç olarak ikinci mertebeden bölünmüş fark

$$f[x_j, x_{j+1}, x_{j+2}] = \frac{1}{2} \cdot \Delta^2 f_j \quad (2.2.4)$$

formunda ifade edilebilir.

- Son olarak 3. mertebeden bölünmüş farkı üçüncü mertebeden ileri fark cinsinden ifade etmek istersek;

$$f[x_j, x_{j+1}, x_{j+2}, x_{j+3}] = \frac{f[x_{j+1}, x_{j+2}, x_{j+3}] - f[x_j, x_{j+1}, x_{j+2}]}{x_{j+3} - x_j}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \cdot \Delta^2 f_{j+1} - \frac{1}{2} \cdot \Delta^2 f_j}{3} = \frac{1}{6} \cdot (\Delta^2 f_{j+1} - \Delta^2 f_j) = \frac{1}{6} \cdot \Delta^3 f_j$$

olarak elde edilmiş olur.

Bölünmüş farklar ve ileri farklar arasındaki ilişkiyi görmek ve doğrulamak zor değildir.

**Teorem 2.2.1:**  $j, k \geq 0$  ve  $x_j = j$  için

$$f[x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+k}] = \frac{1}{k!} \cdot \Delta^k f_j \quad (2.2.5)$$

dir(Phillips, 2003).

**İspat:** İspatı  $k$  üzerinden tümevarımla yapacağız.

⊙

- $k = 0$  için doğrudur.

$$f[x_j] = f_j = \frac{1}{0!} \cdot \Delta^0 f_j = f_j$$

- $k \geq 0$  ve  $j \geq 0$  için doğruluğunu kabul edelim.

$$f[x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+k}] = \frac{1}{k!} \cdot \Delta^k f_j \text{ olsun.}$$

iii.  $k+1$  için doğru mudur?

$$f[x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+k+1}] = \frac{1}{(k+1)!} \cdot \Delta^{k+1} f_j \text{ bu eşitlik var mıdır?}$$

$$\begin{aligned} f[x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+k+1}] &= \frac{f[x_{j+1}, \dots, x_{j+k+1}] - f[x_j, \dots, x_{j+k}]}{x_{j+k+1} - x_j} \\ &= \frac{1}{(k+1)} \cdot \left( \frac{\Delta^k f_{j+1}}{k!} - \frac{\Delta^k f_j}{k!} \right) \\ &= \frac{1}{(k+1) \cdot k!} \cdot (\Delta^k f_{j+1} - \Delta^k f_j) = \frac{1}{(k+1)!} \cdot \Delta^{k+1} f_j \end{aligned}$$

Böylece ispat tamamlanmış olur.

- Matematiksel tablolarda fonksiyonlar genellikle eşit aralıklarda ifade edilmiştir. Bu da, eşit aralıklı noktalarda interpolasyon üzerinde çalışma güdüsü vermektedir. Bu yüzden  $0, 1, \dots, n$  noktalarında interpolasyon söz konusu olduğunda, (2.1.9) Newton bölünmüş farklar formülünün interpolasyonu nasıl kolaylaştırdığını görelim (Phillips, 2003).

Öncelikle  $k > 0$  ve  $\pi_0(x) = 1$  için

$$\pi_k(x) = x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \dots (x-k+1) \text{ olduğunu biliyoruz. (2.2.5)'ten}$$

$$f[0, 1, \dots, k] = \frac{1}{k!} \cdot \Delta^k f(0) \text{ yazabiliriz.}$$

(2.1.9)'dan  $0, 1, \dots, n$  noktalarında  $f$  fonksiyonu için elde edilmiş olan interpolasyon polinomu

$$p_n(x) = f(0) + \frac{\Delta f(0)}{1!} \cdot \pi_1(x) + \frac{\Delta^2 f(0)}{2!} \cdot \pi_2(x) + \dots + \frac{\Delta^n f(0)}{n!} \cdot \pi_n(x)$$

formunda ifade edilebilir. Burada

$$\frac{1}{k!} \cdot \pi_k(x) = \frac{x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \dots (x-k+1)}{k!} = \binom{x}{k} \text{ yazılabilir. O halde,}$$

$$p_n(x) = f(0) + \Delta f(0) \cdot \binom{x}{1} + \Delta^2 f(0) \cdot \binom{x}{2} + \dots + \Delta^n f(0) \cdot \binom{x}{n} \quad (2.2.6)$$

'ileri fark interpolasyon formülü' olarak adlandırılan ifade elde edilir. Kısaca

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n \Delta^k f(0) \cdot \binom{x}{k} \text{ yazabiliriz (Phillips, 2003).}$$

### İleri Fark Tablosu

İleri farkları hesaplamak için sistematik bir şema oluşturabiliriz.

**Tablo2.2.1**

$f_0$	$\Delta f_0$	$\Delta^2 f_0$	$\Delta^3 f_0$	$\Delta^4 f_0$
$f_1$	$\Delta f_1$	$\Delta^2 f_1$	$\Delta^3 f_1$	
$f_2$	$\Delta f_2$	$\Delta^2 f_2$		
$f_3$	$\Delta f_3$			
$f_4$				

- (2.2.6) ileri fark formülünü hesaplamak için, öncelikle ileri farklar tablosu hesaplanır (tablo2.2.1). (2.2.6)'da tanımlanan  $p_n(x)$  interpolasyon polinomunun hesaplanması için gerekli olan tablo2.2.1'deki girdiler, her bir sütundaki ilk sayılardır. Yani  $f_0, \Delta f_0, \Delta^2 f_0, \dots$  ve böyle devam eder.
- İnterpolasyon polinomunun tekliğinden, eğer  $f(x)$  'in kendisi  $k$ . dereceden bir polinom ise,  $f(x)$  'in interpolasyon polinomu  $p_n(x)$ ,  $f(x)$  'e  $n \geq k$  için eşit olacaktır. (2.2.6)'dan  $k$ . dereceden bir polinomun,  $k$ . mertebeden ileri farkının sabit olması gerektiği ve  $k$ . mertebeden büyük olan farkların sıfır olması gerektiği söylenebilir.
- Eşit aralıklı noktadaki interpolasyon çalışmalarımızda  $x_j = j$  lineer değişken değiştirmesini uygun bulmuştuk. Şimdi eşit aralıklı noktalarda  $x_j = j$  özel durumundan elde edilmiş başlıca sonuçlar için açık ve kesin formlar yazalım.

**Teorem2.2.2:** Tüm  $j \geq 0$  için  $x_j = x_0 + j.h$  ise

$$f[x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+k}] = \frac{1}{k!.h^k} \cdot \Delta^k f(x_j) \quad (2.2.7)$$

dir(Phillips,2003).

**İspat:** İspatı k üzerinden tümevarımla yapalım.

i.  $k = 0$  için doğrudur.

$$f[x_j] = \frac{1}{0!.h^0} \cdot \Delta^0 f(x_j) = 1 \cdot f(x_j) = f(x_j)$$

ii.  $k \geq 0$  ve  $j \geq 0$  için doğruluğunu kabul edelim. Yani

$$f[x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+k}] = \frac{1}{k!.h^k} \cdot \Delta^k f(x_j) \text{ olsun.}$$

iii.  $k+1$  için doğru mudur?

$$f[x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+k+1}] = \frac{1}{(k+1)!.h^{k+1}} \cdot \Delta^{k+1} f(x_j) \text{ olduğunu görmek istiyoruz.}$$

$$f[x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+k+1}] = \frac{f[x_{j+1}, x_{j+2}, \dots, x_{j+k+1}] - f[x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+k}]}{x_{j+k+1} - x_j}$$

$$= \frac{1}{x_{j+k+1} - x_j} \cdot \left( \frac{1}{k!.h^k} \cdot \Delta^k f(x_{j+1}) - \frac{1}{k!.h^k} \cdot \Delta^k f(x_j) \right)$$

$$= \frac{1}{(j+k+1).h} \cdot \left( \frac{1}{k!.h^k} \cdot (\Delta^k f(x_{j+1}) - \Delta^k f(x_j)) \right)$$

$$= \frac{1}{(k+1).h} \cdot \frac{1}{k!.h^k} \cdot \Delta^{k+1} f(x_j) = \frac{1}{(k+1)!.h^{k+1}} \cdot \Delta^{k+1} f(x_j)$$

olduğu görülür ve ispat tamamlanmış olur.

**Teorem 2.2.3:**  $j \geq 0$  ve  $x_j = x_0 + j.h$  verildiğinde  $x = x_0 + s.h$  değişken değiştirmesi yapıldığında (2.2.6) ileri fark interpolasyon formu

$$p_n(x_0 + s.h) = f(x_0) + \Delta f(x_0) \cdot \binom{s}{1} + \dots + \Delta^n f(x_0) \cdot \binom{s}{n} \quad (2.2.8)$$

halini alır(Phillips,2003).

**İspat:** (2.1.9)'dan

$$p_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1] \cdot (x - x_0) + \dots + f[x_0, x_1, \dots, x_n] \cdot (x - x_0) \dots (x - x_{n-1})$$

olduğunu biliyoruz. (2.2.7)'yi kullanarak

$$p_n(x) = f[x_0] + \frac{1}{1!.h^1} \cdot \Delta f(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2!.h^2} \cdot \Delta^2 f(x_0) \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) + \dots$$

$$+ \frac{1}{n!.h^n} \cdot \Delta^n f(x_0) \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$

yazılabilir. Buradan;

$$p_n(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!.h^k} \cdot \Delta^k f(x_0) \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) \dots (x - x_{k-1})$$

elde edilir. şimdi  $x = x_0 + s.h$  değişken deęiřtirmesi yaparsak ;

$$p_n(x_0 + s.h) = f(x_0) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!.h^k} \cdot \Delta^k f(x_0) \cdot (s.h) \cdot (x_0 + s.h - x_1) \dots (x_0 + s.h - x_{k-1})$$

$$x_0 + s.h - x_1 = -h + s.h = h.(s - 1)$$

$$x_0 + s.h - x_2 = -2.h + s.h = h.(s - 2)$$

.

.

.

$$x_0 + s.h - x_{k-1} = -(k-1).h + s.h = h.(s - k + 1)$$

Böylece;

$$\begin{aligned}
p_n(x_0 + s.h) &= f(x_0) \\
&+ \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!.h^k} \Delta^k f(x_0) \cdot (s.h).h.(s-1).h.(s-2)...h.(s-k+1) \\
&= f(x_0) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!.h^k} \Delta^k f(x_0) \cdot h^k \cdot s.(s-1).(s-2)...(s-k+1) \\
&= f(x_0) + \sum_{k=1}^n \Delta^k f(x_0) \cdot \underbrace{\frac{s.(s-1).(s-2)...(s-k+1)}{k!}}_{\binom{s}{k}}
\end{aligned}$$

$$p_n(x_0 + s.h) = f(x_0) + \sum_{k=1}^n \binom{s}{k} \Delta^k f(x_0) \quad \text{olduğu gorlr.}$$

**Teorem2.2.4:**  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  fonksiyonu verilsin ve  $f \in C[a, b]$  olsun. Farklı  $x_0, x_1, \dots, x_n$  noktaları iin  $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a, b]$  olmak zere  $\forall x \in (a, b)$  iin  $f^{(n)}(x)$  var olsun.

$$f^{(n)}(\xi) = \frac{\Delta^n f(x_0)}{h^n} \quad (2.2.9)$$

olacak Şekilde  $\xi \in (x_0, x_n)$  vardır(Phillips,2003).

**İspat:** (2.1.18)'den  $f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$  olduğunu biliyoruz.

(2.2.7)'yi kullanırsak;

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{1}{n!.h^n} \Delta^n f(x_0) \quad \text{yazabiliriz. Buradan;}$$

$$\frac{1}{n!.h^n} \Delta^n f(x_0) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

$$\frac{\Delta^n f(x_0)}{h^n} = f^{(n)}(\xi) \quad \text{olduğu gorlr.}$$

**Teorem2.2.5:** Eşit aralıklı  $x_j$  noktaları için k. mertebeden ileri fark

$$\Delta^k f(x_j) = \sum_{r=0}^k (-1)^r \cdot \binom{k}{r} \cdot f(x_{j+k-r}) \quad (2.2.10)$$

olarak ifade edilebilir(Phillips,2003).

**İspat:** İspatı k üzerinden tümevarımla yapalım.

i.  $k = 1$  için doğrudur.

$$\begin{aligned} \Delta^1 f(x_j) &= \sum_{r=0}^1 (-1)^r \cdot \binom{1}{r} \cdot f(x_{j+1-r}) = \binom{1}{0} \cdot f(x_{j+1}) - \binom{1}{1} \cdot f(x_j) \\ &= f(x_{j+1}) - f(x_j) \end{aligned}$$

ii.  $k \geq 0$  ve  $j \geq 0$  için doğruluğunu kabul edelim. Yani

$$\Delta^k f(x_j) = \sum_{r=0}^k (-1)^r \cdot \binom{k}{r} \cdot f(x_{j+k-r}) \quad \text{olsun.}$$

iii.  $k+1$  için doğru mudur?

$$\Delta^{k+1} f(x_j) = \sum_{r=0}^{k+1} (-1)^r \cdot \binom{k+1}{r} \cdot f(x_{j+k+1-r}) \quad \text{olduğunu görmek istiyoruz.}$$

$$\begin{aligned} \Delta^{k+1} f(x_j) &= \Delta^k f(x_{j+1}) - \Delta^k f(x_j) \\ &= \sum_{r=0}^k (-1)^r \cdot \binom{k}{r} \cdot f(x_{j+1+k-r}) - \sum_{r=0}^k (-1)^r \cdot \binom{k}{r} \cdot f(x_{j+k-r}) \\ &= \sum_{r=0}^k (-1)^r \cdot \binom{k}{r} \cdot (f(x_{j+1+k-r}) - f(x_{j+k-r})) \\ &= (-1)^0 \cdot \binom{k}{0} \cdot (f(x_{j+1+k}) - f(x_{j+k})) + (-1)^1 \cdot \binom{k}{1} \cdot (f(x_{j+k}) - f(x_{j+k-1})) + \\ &\quad + (-1)^2 \cdot \binom{k}{2} \cdot (f(x_{j+k-1}) - f(x_{j+k-2})) + \dots + (-1)^k \cdot \binom{k}{k} \cdot (f(x_{j+1}) - f(x_j)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (-1)^0 \cdot \binom{k}{0} \cdot f(x_{j+1+k}) + (-1)^1 \cdot f(x_{j+k}) \cdot \left( \binom{k}{1} + \binom{k}{1} \right) + \\
&+ (-1)^2 \cdot f(x_{j+k-1}) \cdot \left( \binom{k}{2} + \binom{k}{1} \right) + \dots + (-1)^k \cdot f(x_{j+1}) \cdot \left( \binom{k}{k} + \binom{k}{k-1} \right) + \\
&+ (-1)^{k+1} \cdot f(x_j) \cdot \binom{k}{k} \\
&= (-1)^0 \cdot \binom{k+1}{0} \cdot f(x_{j+1+k}) + (-1)^1 \cdot \binom{k+1}{1} \cdot f(x_{j+k}) + \\
&+ (-1)^2 \cdot \binom{k+1}{2} \cdot f(x_{j+k-1}) + \dots + (-1)^k \cdot \binom{k+1}{k} \cdot f(x_{j+1}) + (-1)^{k+1} \cdot \binom{k+1}{k+1} \cdot f(x_j) \\
\Delta^{k+1} f(x_j) &= \sum_{r=0}^{k+1} (-1)^r \cdot \binom{k+1}{r} \cdot f(x_{j+k+1-r})
\end{aligned}$$

olduğu görülür ve ispat tamamlanmış olur.

### 2.3. GERİ FARKLAR

**Tanım2.3.1:**  $h \neq 0$  ve  $x_j = x_0 + j.h$  eşit aralıklı noktaları için  $\nabla^0 f_j = f_j$  olmak üzere  $k+1$ . mertebeden geri farklar,

$$\nabla^{k+1} f_j = \nabla(\nabla^k f_j) = \nabla^k f_j - \nabla^k f_{j-1} \quad (2.3.1)$$

şeklinde ifade edilir(Phillips,2003).

Bu tanımdan yararlanarak bölünmüş farkları, geri farklar cinsinden ifade edebiliriz.

$$\begin{aligned}
\bullet \quad f[x_{j-1}, x_j] &= \frac{f(x_j) - f(x_{j-1})}{x_j - x_{j-1}} \\
&= \frac{\nabla f(x_j)}{x_0 + j.h - x_0 - (j-1).h} = \frac{\nabla f(x_j)}{h} \\
f[x_{j-1}, x_j] &= \frac{\nabla f(x_j)}{h}
\end{aligned}$$

- İkinci mertebeden bölünmüş farkı  $\nabla$  cinsinden ifade edersek

$$\begin{aligned} f[x_{j-2}, x_{j-1}, x_j] &= \frac{f[x_{j-1}, x_j] - f[x_{j-2}, x_{j-1}]}{x_j - x_{j-2}} \\ &= \frac{1}{2.h} \left[ \frac{\nabla f(x_j)}{h} - \frac{\nabla f(x_{j-1})}{h} \right] = \frac{1}{2.h^2} \cdot \nabla^2 f(x_j) \end{aligned}$$

Bölünmüş farklarda sıralama sorun olmadığından

$$f[x_j, x_{j-1}, x_{j-2}] = \frac{\nabla^2 f(x_j)}{2.h^2} \text{ yazılabilir.}$$

Yine bölünmüş farklar ve geri farklar arasındaki ilişkiyi tahmin etmek zor olmayacaktır.

**Teorem2.3.1:**  $j$  . mertebeden bölünmüş fark

$$f[x_{n-j}, x_{n-j+1}, \dots, x_n] = f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-j}] = \frac{\nabla^j f(x_n)}{j!.h^j} \quad (2.3.2)$$

olarak  $j$  . mertebeden geri fark türünden ifade edilir(Phillips,2003).

**İspat:** İspatı  $j$  üzerinden tümevarımla yapalım.

- $j = 1$  için doğrudur.

$$f[x_n, x_{n-1}] = \frac{\nabla^1 f(x_n)}{1!.h^1} = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{h} = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

- $j \geq 0$  için doğruluğunu kabul edelim. Yani;

$$f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-j}] = \frac{\nabla^j f(x_n)}{j!.h^j} \text{ olsun.}$$

- $j+1$  için doğruluğunu gösterelim.

$$f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-j-1}] = \frac{\nabla^{j+1} f(x_n)}{(j+1)!.h^{j+1}} \text{ olduğunu görmek istiyoruz.}$$

$$\begin{aligned}
f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-j-1}] &= \frac{f[x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_{n-j-1}] - f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-j}]}{x_{n-j-1} - x_n} \\
&= \frac{1}{x_0 + (n-j-1)h - x_0 - nh} \cdot \left( \frac{\nabla^j f(x_{n-1})}{j!.h^j} - \frac{\nabla^j f(x_n)}{j!.h^j} \right) \\
&= \frac{1}{-(j+1)h} \cdot \frac{1}{j!.h^j} \cdot (\nabla^j f(x_{n-1}) - \nabla^j f(x_n)) \\
&= \frac{\nabla^j f(x_n) - \nabla^j f(x_{n-1})}{(j+1)!.h^{j+1}} = \frac{\nabla^{j+1} f(x_n)}{(j+1)!.h^{j+1}}
\end{aligned}$$

olduğu görülür ve ispat tamamlanmış olur.

- Şimdi de interpolasyon polinomu için geri fark formülünü elde edelim. Bunun için (2.1.9)'u kullanalım. Farklı  $x_0, x_1, \dots, x_n$  noktalarını ters sırada olarak (2.1.9)'daki bölünmüş fark formülünü

$$p_n(x) = \sum_{j=0}^n f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-j}] \cdot \prod_{r=0}^{j-1} (x - x_{n-r}) \quad (2.3.3)$$

şeklinde yazalım. ( $j=0$ 'a karşılık gelen boş çarpım 1'i belirtir.)

$x = x_n + s.h$  değişken değiştirmesini yaparsak;

$$\begin{aligned}
\prod_{r=0}^{j-1} (x - x_{n-r}) &= \prod_{r=0}^{j-1} (x_n + s.h - x_{n-r}) = \prod_{r=0}^{j-1} (s.h + h.r) = \prod_{r=0}^{j-1} h.(s+r) \\
&= h^j \cdot \prod_{r=0}^{j-1} (s+r) = h^j \cdot \prod_{r=0}^{j-1} (-1)(-s-r) = (-1)^j \cdot h^j \cdot \prod_{r=0}^{j-1} (-s-r)
\end{aligned}$$

$$\prod_{r=0}^{j-1} (x - x_{n-r}) = (-1)^j \cdot h^j \cdot \prod_{r=0}^{j-1} (-s-r) \quad (2.3.4)$$

elde edilir.

(2.3.2) ve (2.3.4)'ü kullanırsak;

$$\begin{aligned}
 f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-j}] \cdot \prod_{r=0}^{j-1} (x - x_{n-r}) &= \frac{\nabla^j f(x_n)}{j! \cdot h^j} \cdot (-1)^j \cdot h^j \cdot \prod_{r=0}^{j-1} (-s - r) \\
 &= \nabla^j f(x_n) \cdot (-1)^j \cdot \frac{-s \cdot (-s-1) \cdot (-s-2) \dots (-s-j+1)}{j!} \\
 &= \nabla^j f(x_n) \cdot (-1)^j \cdot \binom{-s}{j}
 \end{aligned}$$

Eğer son eşitliği j üzerinden toplarsak (2.3.3)'ten

$$p_n(x_n + s \cdot h) = \sum_{j=0}^n (-1)^j \cdot \binom{-s}{j} \cdot \nabla^j f(x_n) \quad (2.3.5)$$

'geri fark interpolasyon formu' elde edilir(Phillips,2003).

**Teorem2.3.2:**  $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  fonksiyonu verilsin ve  $f \in C[a, b]$  olsun. Farklı  $x_0, x_1, \dots, x_n$  noktaları için  $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a, b]$  olmak üzere  $\forall x \in (a, b)$  için  $f^{(n)}(x)$  var olsun.

$$f^{(n)}(\xi) = \frac{\nabla^n f(x_n)}{h^n} \quad (2.3.6)$$

olacak şekilde  $\xi \in (x_0, x_n)$  vardır.

**İspat:** (2.2.9)'dan

$$f^{(n)}(\xi) = \frac{\Delta^n f(x_0)}{h^n} \text{ olduğunu biliyoruz.}$$

$$\Delta^n f(x_i) = \nabla^n f(x_{i+n}) \text{ olduğundan;}$$

$\Delta^n f(x_0) = \nabla^n f(x_n)$  dir. Buradan;

$$f^{(n)}(\xi) = \frac{\nabla^n f(x_n)}{h^n} \text{ olduğu görülür.}$$

### Geri Fark Tablosu

(2.3.5) geri fark formülünü hesaplamak için önce aşağıdaki gibi bir tablo oluşturulmalıdır.

**Tablo2.3.1:** Geri farkları hesaplamak için sistematik bir şema.

$f_0$	$\nabla f_1$	$\nabla^2 f_2$	$\nabla^3 f_3$	$\nabla^4 f_4$
$f_1$	$\nabla f_2$	$\nabla^2 f_3$	$\nabla^3 f_4$	
$f_2$	$\nabla f_3$	$\nabla^2 f_4$		
$f_3$	$\nabla f_4$			

(2.3.5)'te tanımlanan  $p_n(x)$ 'i hesaplamak için gereken girdiler, her sütundaki son sayılardır.

Yani  $f(x_n), \nabla f(x_n), \nabla^2 f(x_n), \dots$  gibi.

**Teorem2.3.3:** Eşit aralıklı  $x_j$  noktaları için  $k$ . mertebeden geri fark

$$\nabla^k f(x_j) = \sum_{r=0}^k (-1)^r \binom{k}{r} f(x_{j-r}) \quad (2.3.7)$$

olarak ifade edilir(Phillips,2003).

**İspat:** İspatı  $k$  üzerinden tümevarımla yapalım.

i.  $k = 1$  için doğrudur.

$$\begin{aligned} \nabla^1 f(x_j) &= \sum_{r=0}^1 (-1)^r \binom{1}{r} f(x_{j-r}) \\ &= (-1)^0 \binom{1}{0} f(x_j) + (-1)^1 \binom{1}{1} f(x_{j-1}) \\ &= f(x_j) - f(x_{j-1}) \end{aligned}$$

ii.  $k$  için doğruluğunu kabul edelim. Yani;

$$\nabla^k f(x_j) = \sum_{r=0}^k (-1)^r \cdot \binom{k}{r} \cdot f(x_{j-r}) \quad \text{olsun.}$$

iii.  $k+1$  için doğruluğunu gösterelim.

$$\nabla^{k+1} f(x_j) = \sum_{r=0}^{k+1} (-1)^r \cdot \binom{k+1}{r} \cdot f(x_{j-r}) \quad \text{olduğunu görmek istiyoruz.}$$

$$\begin{aligned} \nabla^{k+1} f(x_j) &= \nabla^k f(x_j) - \nabla^k f(x_{j-1}) \\ &= \sum_{r=0}^k (-1)^r \cdot \binom{k}{r} \cdot f(x_{j-r}) - \sum_{r=0}^k (-1)^r \cdot \binom{k}{r} \cdot f(x_{j-1-r}) \\ &= \sum_{r=0}^k (-1)^r \cdot \binom{k}{r} \cdot (f(x_{j-r}) - f(x_{j-1-r})) \\ &= (-1)^0 \cdot \binom{k}{0} \cdot (f(x_j) - f(x_{j-1})) + (-1)^1 \cdot \binom{k}{1} \cdot (f(x_{j-1}) - f(x_{j-2})) + \\ &\quad (-1)^2 \cdot \binom{k}{2} \cdot (f(x_{j-2}) - f(x_{j-3})) + \dots + (-1)^k \cdot \binom{k}{k} \cdot (f(x_{j-k}) - f(x_{j-1-k})) \\ &= (-1)^0 \cdot \binom{k}{0} \cdot f(x_j) + (-1)^1 \cdot f(x_{j-1}) \cdot \left( \binom{k}{1} + \binom{k}{0} \right) + (-1)^2 \cdot f(x_{j-2}) \cdot \left( \binom{k}{2} + \binom{k}{1} \right) + \dots + \\ &\quad (-1)^k \cdot f(x_{j-k}) \cdot \left( \binom{k}{k} + \binom{k}{k-1} \right) + (-1)^{k+1} \cdot f(x_{j-1-k}) \cdot \binom{k}{k} \\ &= (-1)^0 \cdot \binom{k+1}{0} \cdot f(x_j) + (-1)^1 \cdot f(x_{j-1}) \cdot \binom{k+1}{1} + (-1)^2 \cdot f(x_{j-2}) \cdot \binom{k+1}{2} + \dots + \\ &\quad (-1)^k \cdot f(x_{j-k}) \cdot \binom{k+1}{k} + (-1)^{k+1} \cdot f(x_{j-1-k}) \cdot \binom{k+1}{k+1} \\ &= \sum_{r=0}^{k+1} (-1)^r \cdot \binom{k+1}{r} \cdot f(x_{j-r}) \end{aligned}$$

olduğu görülür ve ispat tamamlanmış olur.

### 3. q-INTEGERS

#### 3.1. q-INTEGERS NOKTALARININ ÖZELLİKLERİ

**Tanım3.1.1:**  $r$  bir doğal sayı olmak üzere, verilen bir  $q > 0$  için

$$[r] = \begin{cases} \frac{1-q^r}{1-q}, & q \neq 1 \\ r & , q = 1 \end{cases} \quad (3.1.1)$$

olarak tanımlanır ve  $[r]$  q-integer olarak adlandırılır. Bu tanıma  $r$  'yi herhangi bir reel sayı kabul ederek genişletebiliriz. Bu durumda  $[r]$  'yi q-reel olarak adlandırırız(Phillips,2003).

$$[r] = \frac{1-q^r}{1-q} = \frac{(1-q) \cdot (1+q+q^2+\dots+q^{r-1})}{(1-q)} = 1+q+q^2+\dots+q^{r-1}$$

şeklinde de yazılabilir.

**Örnek3.1.1:** Verilen bir  $q > 0$  için  $A = \{[r] : r \text{ bir doğalsayı}\}$  tanımlayalım.

Tanım3.1.1'den

$$A = \{0, 1, 1+q, 1+q+q^2, 1+q+q^2+q^3, \dots\} \text{ kümesi elde edilir.}$$

→ Eğer  $0 < q < 1$  ise aralıklar giderek küçülür.

→ Eğer  $q > 1$  ise aralıklar giderek artar.

$q=1$  aldığımızda  $A$  q-integer kümesi doğal sayılar kümesini verir.

#### **Tanım3.1.2 (q-Faktöriyel):**

$r$  bir doğal sayı olmak üzere, verilen bir  $q > 0$  değeri için  $[r]!$  q-faktöriyel

$$[r]! = \begin{cases} [r] \cdot [r-1] \dots [1], & r \geq 1 \\ 1 & , r = 0 \end{cases} \quad (3.1.2)$$

olarak tanımlanır(Phillips,2003).

**Tanım3.1.3: q-Binom Katsayıları**

Keyfi  $t$  reel sayısı ve  $r \geq 0$  tamsayısı için;

$$\begin{bmatrix} t \\ r \end{bmatrix} = \frac{[t] \cdot [t-1] \dots [t-r+1]}{[r]!} \quad (3.1.3)$$

şeklinde tanımlanan  $\begin{bmatrix} t \\ r \end{bmatrix}$  ifadesine q-binom katsayıları denir(Phillips,2003).

**Tanım3.1.4(Gauss Polinomları):**

Herhangi bir  $n$  ve  $r$  tamsayıları için  $n \geq r \geq 0$  olmak üzere

$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} = \frac{[n] \cdot [n-1] \dots [n-r+1]}{[r]!} = \frac{[n]!}{[r]! \cdot [n-r]!} \quad (3.1.4)$$

olarak tanımlanır ve bu ifadeye Gauss Polinomları denir.

**Tanım3.1.5 (q-türev Operatörü):**

Polinomlar kümesini  $P$  ile gösterelim.  $p \in P$  ve  $0 < q < 1$  olmak üzere q-türev operatörü

olarak da adlandırılan q-fark operatörü  $D_q$ ;

$$(D_q p)(x) = \frac{p(q.x) - p(x)}{(q-1).x}, x \neq 0 \quad (3.1.5)$$

ve  $x = 0$  için

$(D_q p)(0) = p'(0)$  olarak tanımlanır. Ayrıca  $p \in P$  için

$\lim_{q \rightarrow 1} (D_q p)(x) = p'(x)$  dir(Area ve diğerleri, 2000).

q-türev operatörü aşağıdaki özellikleri sağlar (Area ve diğerleri, 2000).

i.  $\forall r, p \in P$  için

$$(D_q (p.r))(x) = r(x) \cdot (D_q p)(x) + p(q.x) \cdot (D_q r)(x) \quad (3.1.6)$$

ii.  $\forall p \in P$  için

$$(D_q p)(x) = (D_{q^{-1}} p)(q.x) \quad (3.1.7)$$

**Teorem3.1.1:** Gauss polinomları aşağıdaki Pascal bağıntılarını sağlar.

$$i. \quad \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ r-1 \end{bmatrix} + q^r \cdot \begin{bmatrix} n-1 \\ r \end{bmatrix} \quad (3.1.8)$$

$$ii. \quad \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} = q^{n-r} \begin{bmatrix} n-1 \\ r-1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ r \end{bmatrix} \quad (3.1.9)$$

(Koçak, Phillips, 1994)

**İspat:**

i. İspatı Tanım3.1.4'ü kullanarak yapalım.

$$\begin{bmatrix} n-1 \\ r-1 \end{bmatrix} + q^r \cdot \begin{bmatrix} n-1 \\ r \end{bmatrix} = \frac{[n-1]!}{[n-1-r+1]!. [r-1]!} + q^r \cdot \frac{[n-1]!}{[n-1-r]!. [r]!}$$

$$= \frac{[n-1]!}{[n-r-1]!. [r-1]!} \cdot \left( \frac{1}{[n-r]} + q^r \cdot \frac{1}{[r]} \right)$$

$$= \frac{[n-1]!}{[n-r-1]!. [r-1]!} \cdot \left( \frac{1}{1-q} + \frac{q^r}{1-q} \right)$$

$$= \frac{[n-1]!}{[n-r-1]!. [r-1]!} \cdot \left( \frac{1-q}{1-q^{n-r}} + \frac{q^r - q^{r+1}}{1-q^r} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{[n-1]!}{[n-r-1]!. [r-1]!} \cdot \left( \frac{1-q-q^n+q^{n+1}}{(1-q^{n-r}).(1-q^r)} \right) \\
&= \frac{[n-1]!}{[n-r-1]!. [r-1]!} \cdot \left( \frac{(1-q)-q^n(1-q)}{(1-q^{n-r}).(1-q^r)} \right) \\
&= \frac{[n-1]!}{[n-r-1]!. [r-1]!} \cdot \left( \frac{(1-q)(1-q^n)}{(1-q^{n-r}).(1-q^r)} \right) \\
&= \frac{[n-1]!}{[n-r-1]!. [r-1]!} \cdot \left( \frac{1}{\frac{1-q^r}{1-q} \cdot \frac{1-q^{n-r}}{1-q^n}} \right) \\
&= \frac{[n-1]!}{[n-r-1]!. [r-1]!} \cdot \left( \frac{1}{[r]} \cdot \frac{1}{\frac{1-q^{n-r}}{(1-q).(1+q+q^2+\dots+q^{n-1})}} \right) \\
&= \frac{[n-1]!}{[n-r-1]!. [r-1]!} \cdot \frac{1}{[r]} \cdot \frac{1}{[n-r]} \cdot (1+q+q^2+\dots+q^{n-1}) \\
&= \frac{[n-1]!. [n]}{[n-r]!. [r]!} = \frac{[n]!}{[n-r]!. [r]!} = \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} \text{ olduğu görülür.}
\end{aligned}$$

ii. Yine ispatı Tanım 3.1.4'ten yararlanarak yapalım.

$$\begin{aligned}
q^{n-r} \begin{bmatrix} n-1 \\ r-1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ r \end{bmatrix} &= \frac{[n-1]!}{[n-1-r+1]!. [r-1]!} \cdot q^{n-r} + \frac{[n-1]!}{[n-r-1]!. [r]!} \\
&= \frac{[n-1]!}{[n-r-1]!. [r-1]!} \cdot \left( \frac{1}{[n-r]} \cdot q^{n-r} + \frac{1}{[r]} \right) \\
&= \frac{[n-1]!}{[n-r-1]!. [r-1]!} \cdot \left( \frac{1-q}{1-q^{n-r}} \cdot q^{n-r} + \frac{1-q}{1-q^r} \right) \\
&= \frac{[n-1]!}{[n-r-1]!. [r-1]!} \cdot \left( \frac{-q^n + q^{n+1} + 1 - q}{(1-q^r) \cdot (1-q^{n-r})} \right) \\
&= \frac{[n-1]!}{[n-r-1]!. [r-1]!} \cdot \left( \frac{1-q - q^n(1-q)}{(1-q^r) \cdot (1-q^{n-r})} \right) \\
&= \frac{[n-1]!}{[n-r-1]!. [r-1]!} \cdot \left( \frac{(1-q) \cdot (1-q^n)}{(1-q^r) \cdot (1-q^{n-r})} \right) \\
&= \frac{[n-1]!}{[n-r-1]!. [r-1]!} \cdot \left( \frac{1}{\frac{1-q^r}{1-q} \cdot \frac{1-q^{n-r}}{1-q^n}} \right) \\
&= \frac{[n-1]!}{[n-r-1]!. [r-1]!} \cdot \left( \frac{1}{[r] \cdot \frac{1-q^{n-r}}{(1-q) \cdot (1+q+q^2+\dots+q^{n-1})}} \right)
\end{aligned}$$

$$= \frac{[n-1]!}{[n-r-1]!. [r-1]!} \cdot \frac{1}{[r]. [n-r]} \cdot [n]$$

$$= \frac{[n]!}{[r]!. [n-r]!} = \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} \text{ olduğu görülür.}$$

(3.1.8) ve (3.1.9) eşitliklerinde  $q=1$  alındığında bilinen Paskal bağıntısı elde edilir.

$q=1$  için

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} \text{ olduğu görülür.}$$

### 3.2. q-FARKLAR

Daha önceden bildiğimiz gibi (2.1.9) bölünmüş fark formülü, herhangi farklı noktalar kümesi üzerinde interpolasyona izin vermektedir. Yine de ardışık noktalar arasındaki aralıklar eşit olduğunda, ileri fark formülü, geri fark formülü gibi özel interpolasyon formları elde ettik. Bu kısımda da ardışık noktalar arasındaki aralıkların eşit olmadığı ancak geometrik bir artış içinde olduğu, başka bir interpolasyon formunu ele alacağız. Bu ortak geometrik ilerleme oranını " $q$ " ile gösterelim. Genelliği bozmadan

$$[j] = \begin{cases} \frac{1-q^j}{1-q}, & q \neq 1 \\ r, & q = 1 \end{cases}$$

olmak üzere  $x_j = [j]$  alalım.

Daha öncede gözlemlediğimiz gibi, bölünmüş farklar tablosunda, tekrarlı olarak

$$\frac{f[x_{j+1}, \dots, x_{j+k+1}] - f[x_j, \dots, x_{j+k}]}{x_{j+k+1} - x_j}$$

kesrini hesaplıyoruz. Burada  $x_j$  noktaları eşit aralıklı olduğunda payda  $j$ 'den bağımsızdır.

Şimdi  $x_j = [j]$  olduğunda bu paydaya ne olacağını gözlemleyelim.

$$\begin{aligned} x_{j+k+1} - x_j &= [j+k+1] - [j] = \frac{1-q^{j+k+1}}{1-q} - \frac{1-q^j}{1-q} \\ &= \frac{q^j \cdot (1-q^{k+1})}{1-q} = q^j \cdot [k+1] \\ x_{j+k+1} - x_j &= q^j \cdot [k+1] \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

Görüldüğü gibi  $x_j = [j]$  aldığımızda payda  $j$ 'den bağımsız değildir.

- $k=0$  alırsak

$$f[x_j, x_{j+1}] = \frac{f(x_{j+1}) - f(x_j)}{x_{j+1} - x_j} = \frac{f(x_{j+1}) - f(x_j)}{q^j} \quad (3.2.2)$$

elde edilir. Bölünmüş farkların q-fark operatörü ile bir ilişkisini bulmak için aşağıdaki tanımları vermek yararlı olacaktır.

**Tanım3.2.1:**  $f$  herhangi bir fonksiyon ve  $j=0,1,\dots,n$  olmak üzere q-fark

$$\Delta_q^0 f(x_j) = f(x_j) \quad \text{ve } j=0,1,\dots,n-r-1 \text{ için q-farkın yineleme bağıntısı;}$$

$$\Delta_q^{r+1} f(x_j) = \Delta_q^r f(x_{j+1}) - q^r \cdot \Delta_q^r f(x_j)$$

şeklinde ifade edilir (Phillips, 2003).

- $r=0$  için

$$\Delta_q^1 f(x_j) = f(x_{j+1}) - f(x_j) \quad \text{elde edilir. Bu ifade (3.2.2)'de yerine yazılırsa}$$

$$f[x_j, x_{j+1}] = \frac{f(x_{j+1}) - f(x_j)}{q^j} = \frac{\Delta_q f(x_j)}{q^j} \quad (3.2.3)$$

olduğu görülür.

Buradan  $r = 0$  için  $\Delta_q f(x_j)$  q-farkın ve birinci mertebeden  $\Delta f(x_j)$  ileri farkın aynı olduğu söylenebilir. Ancak bununla birlikte  $q = 1$  olmadığı takdirde k. mertebeden  $\Delta_q^k f(x_j)$  q-fark ve k. mertebeden  $\Delta^k f(x_j)$  ileri fark  $k \geq 2$  için aynı değildir.

- İkinci mertebeden bölünmüş fark için aynı işlemleri yapalım.

$$f[x_j, x_{j+1}, x_{j+2}] = \frac{f[x_{j+1}, x_{j+2}] - f[x_j, x_{j+1}]}{x_{j+2} - x_j}$$

(3.2.1)'den  $x_{j+2} - x_j = q^j \cdot [2]$  olduğundan

$$\begin{aligned} f[x_j, x_{j+1}, x_{j+2}] &= \frac{f[x_{j+1}, x_{j+2}] - f[x_j, x_{j+1}]}{q^j \cdot [2]} \\ &= \frac{1}{q^j \cdot [2]} \left( \frac{\Delta_q f(x_{j+1})}{q^{j+1}} - \frac{\Delta_q f(x_j)}{q^j} \right) \\ &= \frac{\Delta_q f(x_{j+1}) - q \cdot \Delta_q f(x_j)}{q^{2 \cdot j+1} \cdot [2]} \end{aligned}$$

Tanım3.2.1'den

$$f[x_j, x_{j+1}, x_{j+2}] = \frac{\Delta_q^2 f(x_j)}{q^{2 \cdot j+1} \cdot [2]}$$

elde edilir.

- Bu ilişkiyi genelleştirmek için, üçüncü mertebeden bölünmüş farkı da bularak, daha fazla ipucu toplamakta yarar vardır.

$$f[x_j, x_{j+1}, x_{j+2}, x_{j+3}] = \frac{f[x_{j+1}, x_{j+2}, x_{j+3}] - f[x_j, x_{j+1}, x_{j+2}]}{x_{j+3} - x_j}$$

(3.2.1)'den  $x_{j+3} - x_j = q^j \cdot [3]$  yazılabilir.

$$f[x_j, x_{j+1}, x_{j+2}, x_{j+3}] = \frac{f[x_{j+1}, x_{j+2}, x_{j+3}] - f[x_j, x_{j+1}, x_{j+2}]}{q^j \cdot [3]}$$

$$= \frac{\frac{\Delta_q^2 f(x_{j+1})}{q^{2 \cdot j+3} \cdot [2]} - \frac{\Delta_q^2 f(x_j)}{q^{2 \cdot j+1} \cdot [2]}}{q^j \cdot [3]}$$

$$= \frac{\Delta_q^2 f(x_{j+1}) - q^2 \cdot \Delta_q^2 f(x_j)}{q^{3 \cdot j+3} \cdot [2] \cdot [3]}$$

$$= \frac{\Delta_q^2 f(x_{j+1}) - q^2 \cdot \Delta_q^2 f(x_j)}{q^{3 \cdot j+3} \cdot [3]!} = \frac{\Delta_q^3 f(x_j)}{q^{3 \cdot j+3} \cdot [3]!}$$

Şimdi bölünmüş farklar ve q-farklar arasındaki ilişkiyi oluşturup ispat edelim.

**Teorem3.2.2:** Bütün  $j, k \geq 0$  için  $x_j = [j]$  ve  $[k]! = [k] \cdot [k-1] \dots [1]$  olmak üzere

$$f[x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+k}] = \frac{\Delta_q^k f(x_j)}{q^{\frac{k(2 \cdot j+k-1)}{2}} \cdot [k]!} \quad (3.2.4)$$

(Phillips,2003).

**İspat:** k üzerinden tümevarımla ispat edelim.

i.  $k=0$  için doğrudur.

$$f[x_j] = \frac{\Delta_q^0 f(x_j)}{q^0 \cdot [0]!} = \frac{f(x_j)}{1} = f(x_j)$$

ii.  $k$  için doğruluğunu kabul edelim. Yani

$$f[x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+k}] = \frac{\Delta_q^k f(x_j)}{q^{\frac{k(2j+k-1)}{2}} \cdot [k]!} \quad \text{olsun.}$$

iii.  $k+1$  için doğruluğunu gösterelim.

$$f[x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+k+1}] = \frac{\Delta_q^{k+1} f(x_j)}{q^{\frac{(k+1)(2j+k)}{2}} \cdot [k+1]!}$$

olduğunu görmek istiyoruz.

$$\begin{aligned} f[x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+k+1}] &= \frac{f[x_{j+1}, x_{j+2}, \dots, x_{j+k+1}] - f[x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+k}]}{x_{j+k+1} - x_j} \\ &= \frac{1}{q^j \cdot [k+1]} \cdot \left( \frac{\Delta_q^k f(x_{j+1})}{q^{\frac{k(2j+k+1)}{2}} \cdot [k]!} - \frac{\Delta_q^k f(x_j)}{q^{\frac{k(2j+k-1)}{2}} \cdot [k]!} \right) \\ &= \frac{1}{q^j \cdot [k+1]} \cdot \left( \frac{\Delta_q^k f(x_{j+1}) - q^k \cdot \Delta_q^k f(x_j)}{q^{\frac{k(2j+k+1)}{2}} \cdot [k]!} \right) \\ &= \frac{\Delta_q^k f(x_{j+1}) - q^k \cdot \Delta_q^k f(x_j)}{q^{\frac{k \cdot j + k^2 + k + 2 \cdot j}{2}} \cdot [k+1]!} \\ &= \frac{\Delta_q^k f(x_{j+1}) - q^k \cdot \Delta_q^k f(x_j)}{q^{\frac{(k+1)(k+2j)}{2}} \cdot [k+1]!} \end{aligned}$$

$$f[x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+k+1}] = \frac{\Delta_q^{k+1} f(x_j)}{q^{\frac{(k+1)(k+2)}{2}} \cdot [k+1]!}$$

olduğu görülür ve ispat tamamlanır.

- Şimdi yeni interpolasyon formunu oluşturmaya başlayalım. Öncelikle  $j = 0, 1, \dots, n$  için  $x_j = [j]$  noktalarında, (2.1.9) Newton bölünmüş fark formülünün interpolasyonu nasıl kolaylaştırdığını görelim.

$\pi_0(x) = 1$  olmak üzere  $k > 0$  için

$\pi_k(x) = x \cdot (x - [1]) \cdot (x - [2]) \dots (x - [k-1])$  yazabiliriz.

$x = [t]$  yazarsak  $j = 1, 2, \dots, k-1$  için

$$x - [j] = [t] - [j] = \frac{1 - q^t}{1 - q} - \frac{1 - q^j}{1 - q} = \frac{q^j \cdot (1 - q^{t-j})}{1 - q} = q^j \cdot [t - j] \text{ ve}$$

$\pi_k([t]) = [t] \cdot ([t] - [1]) \cdot ([t] - [2]) \dots ([t] - [k-1])$  olduğundan

$$\pi_k([t]) = [t] \cdot q^1 \cdot [t-1] \cdot q^2 \cdot [t-2] \dots q^{k-1} \cdot [t-k+1]$$

$$\pi_k([t]) = q^{\frac{k(k-1)}{2}} [t] \cdot [t-1] \cdot [t-2] \dots [t-k+1] \quad (3.2.5)$$

elde edilir. O halde (3.2.4) ve (3.2.5)'i kullanarak aşağıdaki eşitliği yazabiliriz.

$$\pi_k([t]) \cdot f[x_0, x_1, \dots, x_k] = q^{\frac{k(k-1)}{2}} [t] \cdot [t-1] \cdot [t-2] \dots [t-k+1] \cdot \frac{\Delta_q^k f(x_0)}{q^{\frac{k(k-1)}{2}} \cdot [k]!}$$

Sadeleştirirsek;

$$\pi_k([t]).f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \frac{[t].[t-1].[t-2]\dots[t-k+1]}{[k]!} \cdot \Delta_q^k f(x_0)$$

$$\pi_k([t]).f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \begin{bmatrix} t \\ k \end{bmatrix} \cdot \Delta_q^k f(x_0) \quad (3.2.6)$$

Sonuç olarak her bir  $x_j = [j]$  için bölünmüş fark formülü

$$p_n(x) = p_n([t]) = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} t \\ k \end{bmatrix} \cdot \Delta_q^k f(x_0) \quad (3.2.7)$$

“*interpolasyon polinomunun q-fark formu*” olarak adlandırdığımız özel form biçiminde yazılabilir. (3.2.7) formuna önem veriyoruz çünkü (2.2.6) ileri fark formülünün hoş bir genellemesidir. Ve  $q=1$  durumunda tekrar (2.2.6) elde edilir. Bununla birlikte, q-integer noktalarında interpolasyon polinomu hesaplamak istersek (3.2.7)’den ziyade (2.1.9) bölünmüş fark formülünü kullanırız.

**Teorem3.2.3:**  $f:[a,b] \rightarrow \mathbf{R}$  fonksiyonu verilsin ve  $f \in C[a,b]$  olsun. Farklı  $x_0, x_1, \dots, x_n$  noktaları için  $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a,b]$  olmak üzere  $\forall x \in (a,b)$  için  $f^{(n)}(x)$  var olsun.

$$\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} = \frac{\Delta_q^n f(x_0)}{q^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot [n]!} \quad (3.2.8)$$

olacak şekilde  $\xi \in (x_0, x_n)$  vardır.

**İspat:** (3.2.4)’ten

$$f[x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+n}] = \frac{\Delta_q^n f(x_j)}{q^{\frac{n(2j+n-1)}{2}} \cdot [n]!}$$

$j=0$  için

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{\Delta_q^n f(x_0)}{q^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot [n]!} \text{ yazılabilir.}$$

Ayrıca (2.1.18)'den

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \text{ olduğunu biliyoruz.}$$

O halde

$$\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} = \frac{\Delta_q^n f(x_0)}{q^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot [n]!}$$

elde edilir.

k. mertebeden  $\Delta_q^k f(x_j)$  q-fark için,  $f$  fonksiyonunun değerlerinin çarpımlarının toplamı olarak ifade edilen bir eşitlik yazıp doğrulayalım.

**Teorem3.2.4:**  $q > 0$  ve  $\forall j, k \geq 0$  için her bir  $x_j = [j]$  olmak üzere

$$\Delta_q^k f(x_j) = \sum_{r=0}^k (-1)^r \cdot q^{\frac{r(r-1)}{2}} \cdot \begin{bmatrix} k \\ r \end{bmatrix} \cdot f(x_{j+k-r}) \quad (3.2.9)$$

(Phillips, 2003)

**İspat:**

i.  $\forall j \geq 0$  ve  $k = 0$  için doğrudur.

$$\Delta_q^0 f(x_j) = \sum_{r=0}^0 (-1)^r \cdot q^{\frac{r(r-1)}{2}} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ r \end{bmatrix} \cdot f(x_{j+r}) = f(x_j)$$

ii.  $\forall j \geq 0$  ve  $k$  için doğruluğunu kabul edelim. Yani;

$$\Delta_q^k f(x_j) = \sum_{r=0}^k (-1)^r \cdot q^{\frac{r(r-1)}{2}} \cdot \begin{bmatrix} k \\ r \end{bmatrix} \cdot f(x_{j+k-r}) \text{ olsun.}$$

iii.  $\forall j \geq 0$  ve  $k+1$  için doğruluğunu gösterelim.

$$\Delta_q^{k+1} f(x_j) = \sum_{r=0}^{k+1} (-1)^r \cdot q^{\frac{r(r-1)}{2}} \cdot \begin{bmatrix} k+1 \\ r \end{bmatrix} \cdot f(x_{j+k+1-r}) \text{ olduğunu görmek istiyoruz.}$$

Tanım3.2.1'den;

$$\Delta_q^{r+1} f(x_j) = \Delta_q^r f(x_{j+1}) - q^r \cdot \Delta_q^r f(x_j) \text{ olduğunu biliyoruz.}$$

$$\begin{aligned} \Delta_q^{k+1} f(x_j) &= \sum_{r=0}^k (-1)^r \cdot q^{\frac{r(r-1)}{2}} \cdot \begin{bmatrix} k \\ r \end{bmatrix} \cdot f(x_{j+1+k-r}) - q^k \cdot \sum_{r=0}^k (-1)^r \cdot q^{\frac{r(r-1)}{2}} \cdot \begin{bmatrix} k \\ r \end{bmatrix} \cdot f(x_{j+k-r}) \\ &= \sum_{r=0}^k (-1)^r \cdot q^{\frac{r(r-1)}{2}} \cdot \begin{bmatrix} k \\ r \end{bmatrix} \cdot f(x_{j+1+k-r}) - q^k \cdot \sum_{r=1}^{k+1} (-1)^{r-1} \cdot q^{\frac{(r-1)(r-2)}{2}} \cdot \begin{bmatrix} k \\ r-1 \end{bmatrix} \cdot f(x_{j+k+1-r}) \\ &= f(x_{j+1+k}) + \sum_{r=1}^k (-1)^r \cdot q^{\frac{r(r-1)}{2}} \cdot \begin{bmatrix} k \\ r \end{bmatrix} \cdot f(x_{j+1+k-r}) - (-1)^k \cdot q^{\frac{k(k+1)}{2}} \cdot f(x_j) + \\ &\quad + q^k \cdot \sum_{r=1}^k (-1)^{r-1} \cdot q^{\frac{(r-1)(r-2)}{2}} \cdot \begin{bmatrix} k \\ r-1 \end{bmatrix} \cdot f(x_{j+1+k-r}) \\ &= f(x_{j+1+k}) + (-1)^{k+1} \cdot q^{\frac{k(k+1)}{2}} \cdot f(x_j) + \sum_{r=1}^k \left( (-1)^r \cdot q^{\frac{r(r-1)}{2}} \cdot \begin{bmatrix} k \\ r \end{bmatrix} \cdot f(x_{j+1+k-r}) + \right. \\ &\quad \left. + q^k \cdot (-1)^{r-1} \cdot (-1)^{r-1} \cdot q^{\frac{(r-1)(r-2)}{2}} \cdot \begin{bmatrix} k \\ r-1 \end{bmatrix} \cdot f(x_{j+1+k-r}) \right) \\ &= f(x_{j+1+k}) + (-1)^{k+1} \cdot q^{\frac{k(k+1)}{2}} \cdot f(x_j) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{r=1}^k \left( (-1)^r \cdot q^{\frac{r(r-1)}{2}} \cdot f(x_{j+1+k-r}) \cdot \left( \begin{bmatrix} k \\ r \end{bmatrix} + q^{k-r+1} \cdot \begin{bmatrix} k \\ r-1 \end{bmatrix} \right) \right) \\
& = f(x_{j+1+k}) + (-1)^{k+1} \cdot q^{\frac{k(k+1)}{2}} \cdot f(x_j) + \\
& + \sum_{r=1}^k \left( (-1)^r \cdot q^{\frac{r(r-1)}{2}} \cdot f(x_{j+1+k-r}) \cdot \begin{bmatrix} k+1 \\ r \end{bmatrix} \right) \\
\Delta_q^{r+1} f(x_j) & = \sum_{r=0}^{k+1} \left( (-1)^r \cdot q^{\frac{r(r-1)}{2}} \cdot f(x_{j+1+k-r}) \cdot \begin{bmatrix} k+1 \\ r \end{bmatrix} \right)
\end{aligned}$$

olduğu görülür ve ispat tamamlanır.

### 3.3. KAYDIRMA OPERATÖRÜ ve q-FARKLAR

- Şimdi Newton'un ileri farklarla interpolasyon polinomuna, q-fark operatörleri yardımıyla yeni q-benzerler bulalım. Bunun için biraz farklı bir q-fark operatörü düşünelim.

**Tanım3.3.1:** Eğer ardışık x değerleri arasındaki sabit fark 'h' ise  $x_k = x_0 + k.h$ ,  $k \in \mathbf{Z}$  ve buna karşılık gelen fonksiyon da  $f(x_k) = f(x_0 + k.h) = f_k$  olmak üzere;

$$\begin{aligned}
E_h(f_k) & = f(x_k + h) = f(x_0 + k.h + h) \\
& = f(x_0 + h.(k+1)) = f(x_{k+1}) = f_{k+1}
\end{aligned} \tag{3.3.1}$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm operatörü olsun ve bu  $E_h$  operatörüne 'kaydırma' operatörü diyelim(Kim, Son, 2002).

$E_h$  'yi tekrar uygulamak h üzerinden f 'yi artıracaktır. Yani

$$\begin{aligned} E_h^2(f_k) &= E_h(E_h(f(x_k))) = E_h(f(x_k + h)) = f(x_k + 2.h) \\ &= f(x_0 + k.h + 2.h) = f(x_0 + h.(k + 2)) = f(x_{k+2}) = f_{k+2} \end{aligned}$$

**Teorem3.3.1:**  $x_k = x_0 + k.h$ ,  $k \in \mathbf{Z}$  ve  $f(x_k) = f(x_0 + k.h) = f_k$  olmak üzere keyfi  $r$  doğal sayısı için

$$E_h^r(f_k) = f_{k+r} \quad (\text{Kim, Son, 2002}).$$

**İspat:**  $r$  üzerinden tümevarımla ispatlayalım.

i.  $r = 1$  için doğrudur.

$$E_h^1(f_k) = f_{k+1}$$

ii.  $r$  için doğruluğunu kabul edelim. Yani;

$$E_h^r(f_k) = f_{k+r} \text{ olsun.}$$

iii.  $r + 1$  için doğruluğunu gösterelim.

$$E_h^{r+1}(f_k) = f_{k+r+1} \text{ görmek istenendir.}$$

$$E_h^{r+1}(f_k) = E_h^1(E_h^r(f_k)) = E_h^1(f_{k+r}) = f_{k+r+1} \text{ olduğu görülür ve ispat tamamlanır.}$$

**Tanım3.3.2:**  $f$ 'nin  $q$ -farkı

$$\Delta_{q,h}^n := \begin{cases} I & , n = 0 \\ (E_h - q^{n-1}).(E_h - q^{n-2}) \dots (E_h - q).(E_h - I), & n \geq 1 \end{cases} \quad (3.3.2)$$

şeklinde tanımlanır(Kim, Son, 2002).

O halde (3.3.2)'den

- $\Delta_{q,h}^1(f_k) = (E_h - I).f_k = E_h(f_k) - f_k = f_{k+1} - f_k$
- $\Delta_{q,h}^2(f_k) = (E_h - q).(E_h - I).f_k = (E_h - q).(f_{k+1} - f_k)$

$$\begin{aligned}
&= E_h(f_{k+1} - f_k) - q \cdot (f_{k+1} - f_k) \\
&= f_{k+2} - f_{k+1} - q \cdot f_{k+1} + q \cdot f_k \\
&= f_{k+2} - f_{k+1} \cdot (1 + q) + q \cdot f_k \\
&= f_{k+2} - [2] \cdot f_{k+1} + q \cdot f_k
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet \quad \Delta_{q,h}^3(f_k) &= (E_h - q^2) \cdot (E_h - q) \cdot (E_h - I) \cdot f_k \\
&= (E_h - q^2) \cdot (f_{k+2} - [2] \cdot f_{k+1} + q \cdot f_k) \\
&= f_{k+3} - [2] \cdot f_{k+2} + q \cdot f_{k+1} - q^2 \cdot f_{k+2} + q^2 \cdot [2] \cdot f_{k+1} - q^3 \cdot f_k \\
&= f_{k+3} - f_{k+2} \cdot ([2] + q^2) + q \cdot f_{k+1} \cdot (1 + q \cdot [2]) - q^3 \cdot f_k \\
&= f_{k+3} - [3] \cdot f_{k+2} + q \cdot [3] \cdot f_{k+1} - q^3 \cdot f_k
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet \quad \Delta_{q,h}^4(f_k) &= (E_h - q^3) \cdot (E_h - q^2) \cdot (E_h - q) \cdot (E_h - I) \cdot f_k \\
&= (E_h - q^3) \cdot (f_{k+3} - [3] \cdot f_{k+2} + q \cdot [3] \cdot f_{k+1} - q^3 \cdot f_k) \\
&= f_{k+4} - [3] \cdot f_{k+3} + q \cdot [3] \cdot f_{k+2} - q^3 \cdot f_{k+1} - q^3 \cdot f_{k+3} + q^3 \cdot [3] \cdot f_{k+2} - q^4 \cdot [3] \cdot f_{k+1} + q^6 \cdot f_k \\
&= f_{k+4} - f_{k+3} \cdot ([3] + q^3) + q \cdot f_{k+2} \cdot ([3] + q^2 \cdot [3]) - q^3 \cdot f_{k+1} \cdot (1 + q \cdot [3]) + q^6 \cdot f_k \\
&= f_{k+4} - [4] \cdot f_{k+3} + q \cdot f_{k+2} \cdot \frac{[3] \cdot (1 + q^2)}{(1 + q)} \cdot (1 + q) - q^3 \cdot [4] \cdot f_{k+1} + q^6 \cdot f_k \\
&= f_{k+4} - [4] \cdot f_{k+3} + q \cdot f_{k+2} \cdot \frac{[4] \cdot [3]}{[2]} - q^3 \cdot [4] \cdot f_{k+1} + q^6 \cdot f_k
\end{aligned}$$

n. mertebeden q-farkın genel formülünü bir teoremle verelim.

**Teorem3.3.3:**  $q > 0$  ve keyfi bir  $n$  doğal sayısı için  $x_k = x_0 + k.h$ ,  $k \in \mathbf{Z}$  olmak üzere,

$$\Delta_{q,h}^n (f_k) = (-1)^n \cdot q^{\binom{n}{2}} \cdot \sum_{i=0}^n (-1)^i \cdot \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} \cdot f_{k+i} \cdot q^{i \cdot \frac{(i-2.n+1)}{2}} \quad (3.3.3)$$

şeklinde ifade edilir(Kim, Son, 2002).

Özel olarak  $k = 0$  ve her  $n$  doğal sayısı için

$$\Delta_{q,h}^n (f_0) = (-1)^n \cdot q^{\binom{n}{2}} \cdot \sum_{i=0}^n (-1)^i \cdot \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} \cdot f_i \cdot q^{i \cdot \frac{(i-2.n+1)}{2}} \quad (3.3.4)$$

yazılabilir.

**İspat:**  $n$  üzerinden tümevarımla ispatlayalım.

i.  $n = 1$  için doğrudur.

$$\Delta_{q,h}^1 (f_k) = (-1)^1 \cdot q^{\binom{1}{2}} \cdot \sum_{i=0}^1 (-1)^i \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \cdot f_{k+i} \cdot q^{i \cdot \frac{(i-1)}{2}}$$

$$\Delta_{q,h}^1 (f_k) = (-1)^1 \cdot (f_k + (-1) \cdot f_{k+1}) = f_{k+1} - f_k$$

ii.  $n$  doğal sayısı için doğruluğunu kabul edelim. Yani

$$\Delta_{q,h}^n (f_k) = (-1)^n \cdot q^{\binom{n}{2}} \cdot \sum_{i=0}^n (-1)^i \cdot \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} \cdot f_{k+i} \cdot q^{i \cdot \frac{(i-2.n+1)}{2}}$$

olsun.

iii.  $n+1$  için doğruluğunu gösterelim.

$$\Delta_{q,h}^{n+1} (f_k) = (-1)^{n+1} \cdot q^{\binom{n+1}{2}} \cdot \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \cdot \begin{bmatrix} n+1 \\ i \end{bmatrix} \cdot f_{k+i} \cdot q^{i \cdot \frac{(i-2.n-1)}{2}}$$

olduğunu görmek istiyoruz. (3.3.2)'den

$$\begin{aligned}
\Delta_{q,h}^{n+1}(f_k) &= (E_h - q^n) \cdot \left( (-1)^n \cdot q^{\binom{n}{2}} \cdot \sum_{i=0}^n (-1)^i \cdot \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} \cdot f_{k+i} \cdot q^{i \cdot \frac{(i-2n+1)}{2}} \right) \\
&= (-1)^n \cdot q^{\binom{n}{2}} \cdot \sum_{i=0}^n (-1)^i \cdot \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} \cdot f_{k+i+1} \cdot q^{i \cdot \frac{(i-2n+1)}{2}} - (-1)^n \cdot q^{\binom{n}{2}} \cdot \sum_{i=0}^n (-1)^i \cdot \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} \cdot f_{k+i} \cdot q^n \cdot q^{i \cdot \frac{(i-2n+1)}{2}} \\
&= (-1)^n \cdot q^{\binom{n}{2}} \cdot \sum_{i=0}^n (-1)^i \cdot \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} \cdot q^{i \cdot \frac{(i-2n+1)}{2}} \cdot (f_{k+i+1} - q^n \cdot f_{k+i}) \\
&= (-1)^n \cdot q^{\binom{n}{2}} \cdot \left( (-1)^0 \cdot \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} \cdot q^0 \cdot (f_{k+1} - q^n \cdot f_k) + (-1)^1 \cdot \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} \cdot q^{1-n} \cdot (f_{k+2} - q^n \cdot f_{k+1}) + \right. \\
&\quad (-1)^2 \cdot \begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix} \cdot q^{3-2n} \cdot (f_{k+3} - q^n \cdot f_{k+2}) + \dots \\
&\quad \left. + (-1)^{n-1} \cdot \begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix} \cdot q^{\frac{-n(n-1)}{2}} \cdot (f_{k+n} - q^n \cdot f_{k+n-1}) + \right. \\
&\quad \left. (-1)^n \cdot \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} \cdot q^{\frac{-n(n-1)}{2}} \cdot (f_{k+n+1} - q^n \cdot f_{k+n}) \right) \\
&= (-1)^n \cdot q^{\binom{n}{2}} \cdot \left( (-1)^1 \cdot \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} \cdot q^n \cdot f_k + f_{k+1} \cdot (-1)^2 \cdot \left( \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} + q \cdot \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} \right) + f_{k+2} \cdot (-1)^3 \cdot q^{1-n} \cdot \left( \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} + q^2 \cdot \begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix} \right) + \right. \\
&\quad \left. \dots + f_{k+n} \cdot (-1)^{n+1} \cdot q^{\frac{-n(n-1)}{2}} \cdot \left( \begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix} + q^n \cdot \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} \right) + (-1)^n \cdot q^{\frac{-n(n-1)}{2}} \cdot \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} \cdot f_{k+n+1} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (-1)^n \cdot q^{\binom{n}{2}} \cdot \left( (-1)^1 \cdot \begin{bmatrix} n+1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot q^n \cdot f_k + (-1)^2 \cdot \begin{bmatrix} n+1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot f_{k+1} + \right. \\
&(-1)^3 \cdot \begin{bmatrix} n+1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot q^{1-n} f_{k+2} + \dots + (-1)^{n+1} \cdot \begin{bmatrix} n+1 \\ n \end{bmatrix} \cdot q^{\frac{-n(n-1)}{2}} f_{k+n} + \\
&\left. (-1)^n \cdot \begin{bmatrix} n+1 \\ n+1 \end{bmatrix} \cdot q^{\frac{-n(n-1)}{2}} \cdot f_{k+n+1} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (-1)^{n+1} \cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot q^n \cdot \left( (-1)^0 \cdot \begin{bmatrix} n+1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot f_k + (-1)^1 \cdot \begin{bmatrix} n+1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot q^{-n} \cdot f_{k+1} + \right. \\
&(-1)^2 \cdot \begin{bmatrix} n+1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot q^{1-2n} f_{k+2} + \dots + (-1)^n \cdot \begin{bmatrix} n+1 \\ n \end{bmatrix} \cdot q^{\frac{-n(n+1)}{2}} f_{k+n} + \\
&\left. (-1)^{n+1} \cdot \begin{bmatrix} n+1 \\ n+1 \end{bmatrix} \cdot q^{\frac{-n(n+1)}{2}} \cdot f_{k+n+1} \right)
\end{aligned}$$

$$= (-1)^{n+1} \cdot q^{\frac{n(n+1)}{2}} \cdot \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \cdot \begin{bmatrix} n+1 \\ i \end{bmatrix} \cdot f_{k+i} \cdot q^{i \cdot \frac{(i-2n-1)}{2}}$$

$$= (-1)^{n+1} \cdot q^{\binom{n+1}{2}} \cdot \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \cdot \begin{bmatrix} n+1 \\ i \end{bmatrix} \cdot f_{k+i} \cdot q^{i \cdot \frac{(i-2n-1)}{2}}$$

olduğu görülür ve ispat tamamlanır.

- q-fark operatörü  $\Delta_{q,h}^n$  lineer bir operatörün karakteristik özelliklerine sahiptir.

$$\Delta_{q,h}^n (f_k \pm g_k) = \Delta_{q,h}^n (f_k) \pm \Delta_{q,h}^n (g_k)$$

Ve  $c$  herhangi bir reel sayı olmak üzere

$$\Delta_{q,h}^n (c \cdot f_k) = c \cdot \Delta_{q,h}^n (f_k) \text{ dir.}$$

**Tanım3.3.3:** Eğer  $n$  pozitif tam sayısı  $\Delta_{q,h}^{n+1} (f_q(x)) = 0$  koşulunu sağlayan en küçük sayı ise  $f_q(x)$ 'in derecesi olarak adlandırılır. Ve  $q$ -faktöriyel polinomu

$$[x]^{(m)} = \begin{cases} 1, & m = 0 \\ [x].[x-1]\dots[x-m+1], & m \geq 1 \end{cases} \quad (3.3.5)$$

olarak tanımlanır(Kim, Son, 2002).

$\Delta_q^n := \Delta_{q,1}^n$  ( $h = 1$ ) olsun. O halde her bir  $m$  için

$$\begin{aligned} \Delta_q \left( [x]^{(m)} \right) &= (E - I) \cdot \left( [x]^{(m)} \right) = [x+1]^{(m)} - [x]^{(m)} \\ &= [x+1].[x].[x-1]\dots[x+1-m+1] - [x].[x-1]\dots[x-m+1] \\ &= [x].[x-1]\dots[x-m+2].([x+1] - [x-m+1]) \\ &= [x]^{(m-1)} \cdot \left( \frac{1 - q^{x+1} - 1 + q^{x-m+1}}{1 - q} \right) = [x]^{(m-1)} \cdot (-q^{x+1}) \cdot \left( \frac{1 - q^{-m}}{1 - q} \right) \\ \Delta_q \left( [x]^{(m)} \right) &= (-q^{x+1}) \cdot [-m] \cdot [x]^{(m-1)} \end{aligned}$$

yazabiliriz.

**Teorem3.3.4:**  $m$ . dereceden bir  $q$ -faktöriyel polinomunun  $n$ .mertebeden  $q$ -farkı

$$\Delta_q^n \left( [x]^{(m)} \right) = (-1)^n \cdot q^{n \cdot \left( x + \frac{n+1}{2} \right)} \cdot [-m] \cdot [-m+1] \dots [-m+n-1] \cdot [x]^{(m-n)}$$

şeklinde ifade edilir(Kim, Son, 2002).

**İspat:** İspatı  $n$  üzerinden tümevarımla yapalım.

i.  $n = 1$  için doğrudur.

$$\Delta_q^1 \left( [x]^{(m)} \right) = (-1)^1 \cdot q^{(x+1)} \cdot [-m] \cdot [x]^{(m-1)}$$

ii.  $n$  için doğruluğunu kabul edelim. Yani;

$$\Delta_q^n \left( [x]^{(m)} \right) = (-1)^n \cdot q^{n \left( x + \frac{n+1}{2} \right)} \cdot [-m] \cdot [-m+1] \dots [-m+n-1] \cdot [x]^{(m-n)}$$

olsun.

iii.  $n+1$  için doğruluğunu gösterelim.

$$\Delta_q^{n+1} \left( [x]^{(m)} \right) = (-1)^{n+1} \cdot q^{(n+1) \left( x + \frac{n+2}{2} \right)} [-m] \cdot [-m+1] \dots [-m+n] \cdot [x]^{(m-n-1)}$$

görmek istediğimizdir.

$$\begin{aligned} \Delta_q^{n+1} \left( [x]^{(m)} \right) &= \Delta_q \left( \Delta_q^n \left( [x]^{(m)} \right) \right) \\ &= \Delta_q \left( (-1)^n \cdot q^{n \left( x + \frac{n+1}{2} \right)} [-m] \cdot [-m+1] \dots [-m+n-1] \cdot [x]^{(m-n)} \right) \\ &= (-1)^n \cdot q^{n \left( x+1 + \frac{n+1}{2} \right)} [-m] \dots [-m+n-1] \cdot \left( -q^{x+1} \cdot [-m+n] \cdot [x]^{(m-n-1)} \right) \\ &= (-1)^{n+1} \cdot q^{n \cdot x + n + \frac{n^2+n}{2} + x+1} [-m] \cdot [-m+1] \dots [-m+n] \cdot [x]^{(m-n-1)} \\ &= (-1)^{n+1} \cdot q^{(n+1) \left( x + \frac{n+2}{2} \right)} [-m] \cdot [-m+1] \dots [-m+n] \cdot [x]^{(m-n-1)} \end{aligned}$$

olduğu görülür ve ispat tamamlanır.

Böylece  $m$ . dereceden bir  $q$ -faktöriyel polinomunun  $(m+1)$ . mertebeden  $q$ -farkının sıfır olduğunu söyleyebiliriz.

- Şimdi  $m$ . dereceden bir  $f_q(x)$  polinomunun Maclourin açılımına benzeyen bir açılımını elde etmeye çalışalım.  $m$ . dereceden keyfi bir

$f_q(x)$  q-faktöriyel polinomu  $x_k = x_0 + k.h$ ,  $h=1$ ,  $x_0 = 0$ ,  $x_k = k$  olmak üzere

$$f_q(x) = a_0 + a_1.[x]^{(1)} + a_2.[x]^{(2)} + \dots + a_m.[x]^{(m)}$$

şeklinde ifade edilir.

→  $x = 0$  için  $a_0$  katsayısını bulalım.

$$f_q(0) = a_0 + a_1.[0]^{(1)} + a_2.[0]^{(2)} + \dots + a_m.[0]^{(m)} = a_0$$

$$a_0 = f_q(0)$$

→ Birinci mertebeden q-fark olarak  $a_1$  katsayısını bulalım.

$$\Delta_q(f_q(x)) = \Delta_q\left(a_0 + a_1.[x]^{(1)} + a_2.[x]^{(2)} + \dots + a_m.[x]^{(m)}\right)$$

$$= 0 + a_1.\left(-q^{x+1} \cdot [-1] \cdot [x]^{(0)}\right) + a_2.\left(-q^{x+1} \cdot [-2] \cdot [x]^{(1)}\right) + \dots$$

$$+ a_m.\left(-q^{x+1} \cdot [-m] \cdot [x]^{(m-1)}\right)$$

$$= -q^{x+1} \cdot \left([-1] \cdot a_1 + a_2 \cdot [-2] \cdot [x]^{(1)} + \dots + a_m \cdot [-m] \cdot [x]^{(m-1)}\right)$$

Burada  $x=0$  için

$$\Delta_q(f_q(0)) = -q \cdot \left([-1] \cdot a_1 + a_2 \cdot [-2] \cdot [0]^{(1)} + \dots + a_m \cdot [-m] \cdot [0]^{(m-1)}\right)$$

$$= -q \cdot [-1] \cdot a_1 = -q \cdot \left(\frac{1-q^{-1}}{1-q}\right) \cdot a_1 = \frac{-q+1}{1-q} \cdot a_1 = [1] \cdot a_1$$

Buradan;

$$a_1 = \frac{\Delta_q(f_q(0))}{[1]} \text{ bulunur.}$$

→ İkinci mertebeden q-fark olarak  $a_2$  katsayısını bulalım.

$$\Delta_q^2(f_q(x)) = (E-q) \cdot (E-I)$$

$$\begin{aligned}
&= (E - q) \cdot \left( -q^{x+1} \cdot \left( [-1] \cdot a_1 + a_2 \cdot [-2] \cdot [x]^{(1)} + \dots + a_m \cdot [-m] \cdot [x]^{(m-1)} \right) \right) \\
&= -q^{x+2} \cdot \left( [-1] \cdot a_1 + a_2 \cdot [-2] \cdot (-q^{x+1} \cdot [-1]) + a_3 \cdot [-3] \cdot (-q^{x+1} \cdot [-2] \cdot [x]^{(1)}) + \dots \right. \\
&\quad \left. + a_m \cdot [-m] \cdot (-q^{x+1} \cdot [-m+1] \cdot [x]^{(m-2)}) \right) + q^{x+2} \cdot \left( [-1] \cdot a_1 + a_2 \cdot [-2] \cdot [x]^{(1)} + \dots \right. \\
&\quad \left. + a_m \cdot [-m] \cdot [x]^{(m-1)} \right)
\end{aligned}$$

Burada  $x = 0$  için

$$\begin{aligned}
\Delta_q^2 (f_q(0)) &= -q^2 \cdot \left( a_1 \cdot [-1] + a_2 \cdot [-2] \cdot (-q \cdot [-1]) \right) + q^2 \cdot \left( a_1 \cdot [-1] \right) \\
&= -q^2 \cdot a_1 \cdot [-1] + a_2 \cdot q^3 \cdot [-1] \cdot [-2] + q^2 \cdot a_1 \cdot [-1]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_q^2 (f_q(0)) &= q^3 \cdot \left( a_2 \cdot [-2] \cdot [-1] + 0 \right) \\
&= q^3 \cdot \left( \frac{1-q^{-2}}{1-q} \right) \cdot \left( \frac{1-q^{-1}}{1-q} \right) \cdot a_2 \\
&= q^2 \cdot \left( \frac{1-q^{-2}}{1-q} \right) \cdot q \cdot \left( \frac{1-q^{-1}}{1-q} \right) \cdot a_2 \\
&= \left( \frac{q^2-1}{1-q} \right) \cdot \left( \frac{q-1}{1-q} \right) \cdot a_2 = [2] \cdot [1] \cdot a_2
\end{aligned}$$

Buradan;

$$a_2 = \frac{\Delta_q^2 (f_q(0))}{[2]!}$$

olarak bulunur.

Ve genel olarak  $j = 0, 1, 2, \dots, n$  için

$$a_j = \frac{\Delta_q^j (f_q(0))}{[j]!} \quad (3.3.6)$$

olarak yazılabilir.

**Teorem3.3.5:**  $f_q(x)$   $m$ . dereceden keyfi bir  $q$ -faktöriyel polinomu olsun. Bu durumda Maclourin açılımına benzeyen şu ifade elde edilir.

$$f_q(x) = f_q(0) + \frac{\Delta_q^1 f_q(0)}{[1]!} \cdot [x]^{(1)} + \frac{\Delta_q^2 f_q(0)}{[2]!} \cdot [x]^{(2)} + \dots + \frac{\Delta_q^m f_q(0)}{[m]!} \cdot [x]^{(m)} \quad (3.3.7)$$

(Kim, Son, 2002).

#### Newton'un ileri fark interpolasyon formülünün $q$ -analoğu

$f_q(x)$   $m$ . dereceden keyfi bir  $q$ -faktöriyel polinomu olsun.

$f_q(x_0) = f_{0,q}$ ,  $f_q(x_1) = f_{1,q}, \dots, f_q(x_m) = f_{m,q}$  ile gösterelim. O halde

$0 \leq i \leq m$  için  $x_i = x_0 + i.h$ ,  $i \in \mathbf{Z}$  ve  $[u] = [x - x_0]$

olmak üzere;

$$f_q(x) = f_{0,q} + \frac{\Delta_{q,h}^1(f_{0,q})}{[h]} \cdot [u] + \frac{\Delta_{q,h}^2(f_{0,q})}{[2.h] \cdot [h]} \cdot [u] \cdot [u-1] + \dots$$

$$+ \frac{\Delta_{q,h}^m(f_{0,q})}{[m.h] \dots [h]} \cdot [u] \cdot [u-1] \dots [u-m+1] \quad (3.3.8)$$

olarak ifade edilir.

#### 4. İKİ İNTERPOLASYON FORMUNUN KARŞILAŞTIRILMASI

**Örnek4.1.1:** (Gerald, Wheatley, 2004) Öncelikle bölünmüş farklar yardımıyla bir interpolasyon polinomu oluşturalım.

$f(x) = x^2 \cdot e^{-\frac{x}{2}}$  fonksiyonu için bölünmüş fark tablosu oluşturalım.

$x_i$	$f[x_i]$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, \dots, x_{i+2}]$	$f[x_i, \dots, x_{i+3}]$	$f[x_i, \dots, x_{i+4}]$
1.10	0.6981	0.859333333	-0.1755	0.003188034359	0.002649851774
2.00	1.4715	0.438133333	-0.163066666	0.019087145	
3.50	2.1287	-0.051066666	-0.065722222		
5.00	2.0521	-0.287666666			
7.10	1.4480				

Bu tablo sayesinde 3. dereceden Newton bölünmüş fark interpolasyon polinomunu oluşturabiliriz.

$$p_3(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1] \cdot (x - x_0) + \dots + f[x_0, \dots, x_3] \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

oluşturduğumuz bu interpolasyon polinomu ile  $p_3(1.75)$  değerini hesaplayalım.

$$p_3(x) = 0.6981 + 0.859333333(x - 1.1) - 0.1755(x - 1.1)(x - 2) + 0.003188034359(x - 1.1)(x - 2)(x - 3.5)$$

$$p_3(1.75) = 0.6981 + 0.859333333(1.75 - 1.1) - 0.1755(1.75 - 1.1)(1.75 - 2) + 0.003188034359(1.75 - 1.1)(1.75 - 2)(1.75 - 3.5)$$

$$p_3(1.75) = 0.6981 + 0.558566666 + 0.02851875 + 0.0009065972708$$

$$p_3(1.75) = 1.286092013$$

olarak hesap edilir. Gerçekte ise

$$f(1.75) = 1.276639935 \text{ bulunur.}$$

$$f(1.75) - p_3(1.75) = 1.276639935 - 1.286092013 = -0.00945207773$$

Şimdi de bu interpolasyon için hatayı yaklaşık olarak hesaplayalım.

$$f(x) - p_n(x) = (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_n) \cdot \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \text{ ve}$$

$$\lim_{x_i \rightarrow x} f[x, x_0, \dots, x_n] = \frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!} \text{ olduğundan;}$$

$$f(x) - p_3(x) = (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) \cdot \frac{f^{(4)}(\xi_x)}{4!}$$

$$f(x) - p_3(x) \cong (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) \cdot f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$$

$$f(1.75) - p_3(1.75) \cong (1.75 - 1.1)(1.75 - 2) \\ (1.75 - 3.5)(1.75 - 5)(0.002649851774)$$

$$f(1.75) - p_3(1.75) \cong (0.65)(-0.25)(-1.75)(-3.25)(0.002649851774)$$

$$f(1.75) - p_3(1.75) \cong -0.0024490426942515625$$

olarak hesaplanır.

**Örnek4.1.2:** Newton bölünmüş fark interpolasyon formu ve q-fark interpolasyon formunu karşılaştıralım.

$q = 0.5$  için keyfi seçtiğimiz q-integer noktalarını hesaplayalım.

$$x_0 = [2] = \frac{1 - (0.5)^2}{1 - 0.5} = 1.5$$

$$x_1 = [4] = \frac{1 - (0.5)^4}{1 - 0.5} = 1.875$$

$$x_2 = [5] = \frac{1 - (0.5)^5}{1 - 0.5} = 1.9375$$

$$x_3 = [8] = \frac{1 - (0.5)^8}{1 - 0.5} = 1.9921875$$

$$x_4 = [10] = \frac{1 - (0.5)^{10}}{1 - 0.5} = 1.998046875$$

$$x_5 = [13] = \frac{1 - (0.5)^{13}}{1 - 0.5} = 1.999755859$$

Verilen  $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$  noktalarında bir  $f$  fonksiyonunun aldığı değerler aşağıdaki gibi olsun;

$x_0 = 1.5$	$y_0 = 4.13$
$x_1 = 1.875$	$y_1 = 4.22$
$x_2 = 1.9375$	$y_2 = 4.31$
$x_3 = 1.9921875$	$y_3 = 4.39$
$x_4 = 1.998046875$	$y_4 = 4.46$
$x_5 = 1.999755859$	$y_5 = 4.53$

1) (2.1.9) Newton bölünmüş fark interpolasyon formunu kullanalım.

$$P_n(x) = f[x_0].\pi_0(x) + f[x_0, x_1].\pi_1(x) + \dots + f[x_0, x_1, \dots, x_n].\pi_n(x)$$

$n = 4$  için

$$P_4(x) = f[x_0].\pi_0(x) + f[x_0, x_1].\pi_1(x) + f[x_0, x_1, x_2].\pi_2(x) + f[x_0, x_1, x_2, x_3].\pi_3(x) + f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4].\pi_4(x)$$

polinomunun katsayılarını hesaplamak için bölünmüş fark tablosunu oluşturalım.

$x_0 = 1.5$	$f[x_0] = 4.13$	$f[x_0, x_1] = 0.24$
$x_1 = 1.875$	$f[x_1] = 4.22$	$f[x_1, x_2] = 1.44$
$x_2 = 1.9375$	$f[x_2] = 4.31$	$f[x_2, x_3] = 1.462857143$
$x_3 = 1.9921875$	$f[x_3] = 4.39$	$f[x_3, x_4] = 11.946666667$
$x_4 = 1.998046875$	$f[x_4] = 4.46$	$f[x_4, x_5] = 40.96000899$
$x_5 = 1.999755859$	$f[x_5] = 4.53$	

$f[x_0, x_1, x_2] = 2.742857143$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = -5.176501888$
$f[x_1, x_2, x_3] = 0.19504762$	$f[x_1, x_2, x_3, x_4] = 1405.618008$
$f[x_2, x_3, x_4] = 173.1519509$	$f[x_2, x_3, x_4, x_5] = 58795.31888$
$f[x_3, x_4, x_5] = 3833.505033$	

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4] = 2832.654075 \quad f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5] = 914813.5334$$

$$f[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5] = 460016.0773$$

$$p_4(x) = 4.13 + 0.24(x - x_0) + 2.742857143(x - x_0)(x - x_1) -$$

$$5.176501888(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) +$$

$$2832.654075(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

$$[6] = \frac{1 - (0.5)^6}{1 - 0.5} = 1.96875 \quad \text{için } p_4(1.96875) \text{ değerini hesaplayalım.}$$

$$p_4(1.96875) = 4.13 + 0.1125 + 0.120535714 - 0.007108843535 - 0.091173243$$

$$p_4(1.96875) = 4.264753627$$

(2.1.12)'den

$$f(x) - p_4(x) = (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) \cdot (x - x_4) \cdot \frac{f^{(5)}(\xi_x)}{5!} \quad \text{yazılabilir.}$$

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \quad \text{olduğundan;}$$

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5] = \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!} \quad \text{dir.}$$

$$f(x) - p_4(x) \cong (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) \cdot$$

$$(x - x_4) \cdot f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]$$

$$f(1.96875) - p_4(1.96875) \cong (0.46875)(0.09375)(0.03125)$$

$$(-0.0234375)(-0.029296875) \cdot f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]$$

$$f(1.96875) - p_4(1.96875) \cong 0.862636326$$

2) Şimdide q-fark interpolasyon formunu kullanarak  $p_4(1.96875) = p_4([6])$  değerini hesaplayalım.

(3.2.7)'den

$$p_n(x) = p_n([t]) = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} t \\ k \end{bmatrix} \cdot \Delta_q^k f(x_0)$$

$$p_4(x) = p_4([6]) = \sum_{k=0}^4 \begin{bmatrix} 6 \\ k \end{bmatrix} \cdot \Delta_q^k f(x_0)$$

$$\begin{aligned} p_4([6]) &= \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \Delta_q^0 f(x_0) + \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \Delta_q^1 f(x_0) + \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \Delta_q^2 f(x_0) \\ &\quad + \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \Delta_q^3 f(x_0) + \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot \Delta_q^4 f(x_0) \end{aligned}$$

yazılabilir.

Bu katsayıları hesaplamak için q-farkları hesaplayalım.

$x_0 = 1.5$	$f(x_0) = 4.13$	$\Delta_q f(x_0) = 0.09$	$\Delta_q^2 f(x_0) = 0.045$
$x_1 = 1.875$	$f(x_1) = 4.22$	$\Delta_q f(x_1) = 0.09$	$\Delta_q^2 f(x_1) = 0.035$
$x_2 = 1.9375$	$f(x_2) = 4.31$	$\Delta_q f(x_2) = 0.08$	$\Delta_q^2 f(x_2) = 0.030$
$x_3 = 1.9921875$	$f(x_3) = 4.39$	$\Delta_q f(x_3) = 0.07$	$\Delta_q^2 f(x_3) = 0.035$
$x_4 = 1.998046875$	$f(x_4) = 4.46$	$\Delta_q f(x_4) = 0.07$	
$x_5 = 1.999755859$	$f(x_5) = 4.53$		

$$\begin{aligned} \Delta_q^3 f(x_0) &= 0.02375 & \Delta_q^4 f(x_0) &= 0.01828125 & \Delta_q^5 f(x_0) &= 0.023701171 \\ \Delta_q^3 f(x_1) &= 0.02125 & \Delta_q^4 f(x_1) &= 0.02484375 & & \\ \Delta_q^3 f(x_2) &= 0.0275 & & & & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_4([6]) &= \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} 4.13 + \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix} 0.09 + \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix} 0.045 + \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} 0.02375 + \\ &\quad + \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix} 0.01828125 \end{aligned}$$

$$p_4([6]) = 4.13 + [6]0.09 + \frac{[6][5]}{[2]!}0.045 + \frac{[6][5][4]}{[3]!}0.02375 + \\ + \frac{[6][5][4][3]}{[4]!}0.01828125$$

$$p_4([6]) = 4.13 + 0.1771875 + 0.114433593 + 0.064709472 + \\ 0.046488647$$

$$p_4([6]) = 4.532819212 \quad \text{olarak hesaplanır.}$$

Teorem 3.2.2'den  $\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} = \frac{\Delta_q^n f(x_0)}{q^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot [n]!}$  olduğundan;

$$f(x) - p_4(x) = (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) \cdot (x - x_4) \cdot \frac{f^{(5)}(\xi_x)}{5!}$$

$$f(x) - p_4(x) \cong (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) \cdot (x - x_4) \cdot \frac{\Delta_q^5 f(x_0)}{q^{10} \cdot [5]!}$$

$$f([6]) - p_4([6]) \cong ([6] - x_0) \cdot ([6] - x_1) \cdot ([6] - x_2) \cdot \\ ([6] - x_3) \cdot ([6] - x_4) \cdot \frac{\Delta_q^5 f(x_0)}{q^{10} \cdot [5]!}$$

$$f([6]) - p_4([6]) \cong (0.46875)(0.09375)(0.03125)(-0.0234375) \\ (-0.029296875)(2.545056742) \\ \cong 2.399897157 \times 10^{-6}$$

## 5. SONUÇLAR ve TARTIŞMA

Daha önceden çok kez ele alınıp işlenmiş olan bölünmüş fark, ileri ve geri fark operatörlerini ve bunlarla birlikte ifade edilebilen interpolasyon polinomlarının elde edilmesini değişik bir yoldan vermeye çalıştık. Burada önemli olan teoremlerin ispatlarında ve interpolasyon polinomunun oluşturulmasında en anlaşılır ve en şık yolun seçimi idi.

Sonra  $q$ -integer noktaları ve özelliklerini inceledik. Önce elde edilen interpolasyon polinomlarının  $q$ -analoglarını elde ettik. Tabii, teoremleri  $q$ -integer noktalarında ifade edip ispatlarken yine en şık ve anlaşılır yolu seçtik. Ara işlemlere çok yer vermemizin nedeni, yüksek lisans ve doktora yeni başlayan arkadaşlara ışık tutarken, onları fazla yorup zamanlarını almadan bu konulara aşina olmalarını sağlamaktı.

Tezin sonunda alınan örneklerle adi noktalardaki interpolasyonla  $q$ -integer interpolasyonu karşılaştırdık. Bu çalışmada  $q$ -integer noktalarında türev operatörünün tanımını vermekle yetindik. Bir sonraki çalışmada  $q$ -integer noktalarında türev operatörünün özellikleri incelenebilir.

## KAYNAKLAR

Area, I., Goday, E., Marcellan, F., Moreno-Balcazar, J.J., 2000. *Inner Products Involving  $q$ -differences: The Little  $q$ -Laguerre-Sobolev Polynomials*, Journal Of Computational and Applied Mathematics, 118, (2000), 1-22.

Davis, J.P., 1975. *Interpolation and Approximation*, Dover, Newyork.

Dikmen, Ü., *Sayısal Analiz ve Programlama III*,  
**80.251.38.220/download/notlar/JFM224/konu4.pdf**

Gerald, C.F., Wheatley, P.O., 2004. *Applied Numerical Analysis*, California Polytechnic State University.

Isaacson, E., Keller, H.B., 1994. *Analysis Of Numerical Methods*, Dover, New York.

Karagöz, İ., *Sayısal Analiz ve Mühendislik Uygulamaları*, Nobel Yayınları No:1281, ISBN 978-605-395-077-6, 2. Basım, Şubat 2008.

Kim, M.S., Son, J.W., 2002. *A Note On  $q$ -difference Opertaors*, Korean Math. Soc., 17(2002), No. 3, pp. 423-430.

Koçak, Z.F., Phillips, G.M., 1994. *An Identity Involving The  $q$ -Factorial*, The Sixth International Research Conference on Fibonacci Numbers and Their Applications, 18-22 July 1994, Washington, USA, Vol. 6, 291-295.

Phillips, G.M., 2003. *Interpolation and Approximation by Polynomials*, Springer, New York.

## ÖZGEÇMİŞ

22.12.1985 doğumlu olan Özlem Işık ilkokulu Ankara'da, ortaokul ve liseyi Muğla'da bitirmiştir. 2003 yılında Eskişehir Anadolu Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünü kazanmış ve 2007 yılında mezun olmuştur. 2007 yılında Muğla Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümünde yüksek lisansa başlamış ve eğitimini hala sürdürmektedir.