

**SKALER DALGALARIN SİLİNDİRİK HORNDAN
IŞIMASININ İNCELENMESİ**

**DOKTORA TEZİ
Y. Müh. Bahattin TÜRETKEN
(504982103)**

**İ.T.Ü. FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
DOKÜMANTASYON MERKEZİ**

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 18.03.2002
Tezin Savunulduğu Tarih : 18.07.2002**

Tez Danışmanı : Prof.Dr. Ercan TOPUZ

Diğer Jüri Üyeleri Prof.Dr. İnci AKKAYA (İ.T.Ü.)

Yrd.Doç.Dr. Selçuk PAKER (İ.T.Ü)

Prof.Dr. Selim ŞEKER (B.Ü)

Prof.Dr. Alinur BÜYÜKAKSOY (G.Y.T.E.)

TEMMUZ 2002

126660

ÖNSÖZ

Doktora tez çalışmam sırasında, her türlü yardımını gördüğüm, Sn. Prof.Dr. Ercan TOPUZ'a , tez konumun içeriğinin belirlenmesinde büyük emeği olan, bana kritik noktalarda hiçbir desteğini esirgemeyen, Sn. Prof. Dr. Alinur BÜYÜKAKSOY' a , bizlere çalışma ortamı sağlayan ve bilimsel çalışmalarımızı destekleyen TÜBİTAK-UEKAE Müdürü Sayın Önder YETİŞ'e, birlikte çalışmayı bir şans olarak değerlendirdiğim, Sn. Dr. S. Temel YALÇIN ve iş arkadaşlarıma, nümerik hesaplamalarda katkılarını gördüğüm Araş.Gör. Ahmet DEMİR'e, değerli yorumlarından dolayı Doç. Dr. Ali ALKUMRU' ya, burada isimlerini tek tek yazmakla bitiremeyeceğim arkadaş ve dostlarıma teşekkürlerimi sunarım.

Bu günlere gelmemde büyük emekleri olan, imkanlarını esirgemeyen değerli ailem, tez çalışmam süresince gecelerimi ve hafta sonlarımı kendileri için ayıramadığım sevgili eşim ve oğlum, hepinize çok teşekkür ederim.

Üniversite eğitimime başladığım ilk günlerde beni bilimsel toplantılarına götürten, bana çalışma aşkı aşılayan, telkin, ikna ve hayatıyla örnek olan, bu günleri göremeden aramızdan ayrılan genç akademisyen çok sevdiğim ağabeyim İlyas Türetken'i saygıyla anıyor ve bu tezimi ithaf ediyorum. Ruhun şad olsun.

Mart 2002

Bahattin TÜRETKEN

İÇİNDEKİLER

KISALTMALAR	ii
ŞEKİL LİSTESİ	iii
SEMBOL LİSTESİ	iv
ÖZET	v
SUMMARY	vi
1. GİRİŞ	1
1.1 PROBLEMİN TANIMI	1
1.2 PROBLEMLE İLGİLİ LİTERATÜR	2
1.3 PROBLEMİN ÖNEMİ	3
1.4 TEZİN KAPSAMI	4
2. PROBLEMİN FORMÜLASYONU VE YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜ	5
2.1 PROBLEMİN FOMÜLASYONU.....	5
2.2 SINIR KOŞULLARI VE SPEKTRAL KATSAYILARIN BELİRLENMESİ.....	6
2.3 MODİFİYE WIENER-HOPF DENKLEMİNİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜ	17
2.4 DALGAKILAVUZU VE AÇIKLIK BÖLGEDEKİ ALAN İFADESİ	29
3. IŞINAN ALANIN ANALİZİ.....	35
4. SAYISAL UYGULAMALAR.....	37
5. SONUÇLAR	46
5.1 TEZ PROBLEMİ ÇÖZÜMÜNDEN ELDE EDİLEN SONUÇLAR VE KATKILAR	46
5.2 GELECEKTEKİ ÇALIŞMALARA YAPILAN ÖNERİLER	48
6. EK-A BESSEL FONKSİYONLARININ BAZI FONKSİYONEL BAĞINTILARI.....	52
7. EK-B $L(\alpha)$ ÇEKİRDEK FONKSİYONUN FAKTORİZASYONU	55
8. EK-C SONLU ARALIKTA BESSEL İNTEGRASYONU.....	59
9. EK-D AKUSTİK DALGALARIN SİLİNDİRİK HORNDAN YAYINIMININ DENEYSEL İNCELENMESİ.....	61

KISALTMALAR

GTD	: Kırınım Geometrik Teorisi (Geometrically Theory of Diffraction)
WHT	: Wiener-Hopf Tekniği
MWHT	: Değiştirilmiş Wiener-Hopf Tekniği
UTD	: Kırınım Uniform Teorisi



ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 2.1 Silindirik Horn	5
Şekil 2.2 Kompleks α -düzlemi.....	9
Şekil 2.3 Kompleks τ - düzlemi ve rezidüler	20
Şekil 2.4 Kompleks düzlemde kesim ve integrasyon çizgileri.....	24
Şekil 3.1 Küresel koordinatlar ve gözlem noktası.....	36
Şekil 3.2 Kompleks t düzlemi	36
Şekil 4.1 $J_1(x)$ fonksiyonu	38
Şekil 4.2 Sayısal Hesaplar Akış Diyagramı	39
Şekil 4.3 Kesim Sayısına göre toplam kırınan alan.....	40
Şekil 4.4 Dalga kılavuzunun yarıçapının farklı değerleri için ışınan alan değişimi.....	41
Şekil 4.5 Dalga kılavuzunun yarıçapının farklı değerleri için ışınan alan değişimi.....	41
Şekil 4.6 Horn açıklığı yarıçapının farklı değerleri için normalize ışınan alan.....	42
Şekil 4.7 Horn boyunun farklı değerleri için ışınan alan.....	42
Şekil 4.8 Horn ışınımının gözlem açısına göre değişimi($kb=2.84$).....	43
Şekil 4.9 Horn ışınımının gözlem açısına göre değişimi ($kb=1.9$).....	43
Şekil 4.10 Horn ışınımının gözlem açısına göre değişimi ($kb=0.94$).....	44
Şekil 4.11 Dairesel bir açıklıktan ışınan alan ile silindirik horndan ışınan alan ($kb=3.83$)	44
Şekil 4.12 Hız potansiyelinin yansıma katasyısının ka ile değişimi ($kb=3.7$, $kl=10$).....	45
Şekil 4.13 Horn yöneltiliğinin gözlem açısına göre değişimi.....	45
Şekil B.1 Kompleks α -düzlemi	55
Şekil D.1 Ölçüm düzeneği.....	61

SEMBOL LİSTESİ

a, b	: Dalga kılavuzu ve horn açıklığı yarıçapı
u_1, u_2, \dots, u_5	: Saçılan alan ifadeleri
(ρ, ϕ, z)	: Silindirik koordinatlar
α	: Fourier transform değişkeni
$K(\alpha)$: $\sqrt{k^2 - \alpha^2}$ fonksiyonu
$F_1(\alpha), F^\pm(\alpha), G^\pm(\alpha)$: Kısmi alanların Fourier dönüşümleri
$A(\alpha), D_{1,2}(\alpha)$: Bilinmeyen spektral katsayılar
J_n	: Birinci tip bessel Fonksiyonu
Y_n	: İkinci tip bessel fonksiyonu
$H_n^{(1,2)}$: Birinci ve ikinci tip Hankel fonksiyonu
$N(\alpha), L(\alpha)$: Spektral fonksiyonlar
$f(\rho), g(\rho), h(\rho)$: Bilinmeyen Fonksiyonlar
$\alpha_m, \beta_m, \delta_m$: Kompleks sabitler
N	: Kesme Sayısı (Sayısal hesaplarda kullanılan terim sayısı)
$(r_1, \theta_1), (r_2, \theta_2)$: Küresel koordinatlar

SKALER DALGALARIN SİLİNDİRİK HORNDAN IŞIMASININ İNCELENMESİ

ÖZET

Son yıllarda akustik ve mikrodalga (radar, anten,..) uygulamalarına olan yoğun ilgi ile birlikte saçılma problemleride önem kazanmıştır.

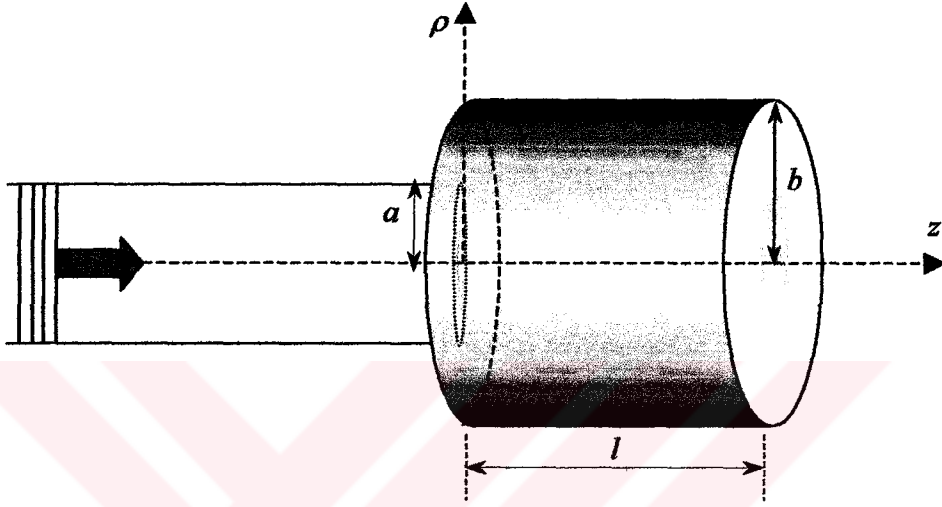
Bu çalışmada silindirik rijid bir horn yayıcıdan akustik dalgaların ışması Wiener-Hopf Tekniği ile analitik olarak incelenmiştir. Problemdede, dairesel silindirik hornun duvarlarının rijid olduğu varsayılmıştır. Problem önce modifiye Wiener- Hopf Tekniği ile sonsuz boyutlu bir lineer denklem sistemine indirgenmiş ve bu denklem sistemi belli bir değerde kesilerek çözüm sayısal yöntemlerle elde edilmiştir.

Problemin çözümünde WH yönteminin kullanılmasının bir kaç önemli nedeni şöyle sıralayabiliriz. WH yönteminin en önemli özelliği ayırıt koşulun analize açık bir şekilde dahil edilmesine ve geniş frekans bandında oldukça güvenilir ve kesin sonuçların bulunmasına olanak vermesidir. Ve ayrıca WH tekniğinin uygulanmasındaki kısıtlamalar diğer nümerik ve karma tekniklere göre çok daha az olmasıdır.

Analitik olarak elde edilen ışınan alan ifadesi sayısal olarak incelenmiş, değişik parametrelerin ışınan alana etkisi araştırılarak sonuçlar değerlendirilmiştir.

Skaler bir dalganın Şekil 1' de gösterilen horn yayıcıdan ışması düşünelim. Analizin kolaylığı açısından çeşitli bölgelerdeki alan bileşenlerini aşağıdaki gibi yazmak uygun olacaktır.

$$u^T(\rho, z) = \begin{cases} u_1(\rho, z) & ; \rho > b & z \in (-\infty, \infty) \\ u_2(\rho, z) & ; \rho \in (a, b), & z < 0 \\ u_3(\rho, z) + u^i(\rho, z) & ; \rho \in (0, a), & z < 0 \\ u_4(\rho, z) & ; \rho \in (0, b), & z \in (0, l) \\ u_5(\rho, z) & ; \rho \in (0, b), & z > l \end{cases} \quad (1)$$



Şekil 1. Problemin Geometrisi

Burada , $u^i(\rho, z)$ gelen alanı yani uyarıyı göstermekte olup ifadesi (2) deki gibidir.

$$u^i(\rho, z) = e^{ikz} \quad (2)$$

(2) ifadesinde verilen k boş uzay dalga sayısını göstermekte olup küçüğe olsa pozitif bir imajiner kısma sahip olduğu varsayılacaktır. $u_j(\rho, z)$, $j=1-5$ alanları Helmholtz denklemini ve uygun sınır ve süreklilik koşullarını sağlarlar. Bu denklemler z üzerinde Fourier transformu uygulandıktan sonra sınır koşulları yardımıyla çözülürse hayli uzun işlemlerden sonra $\text{Im}(-k) < \text{Im}(\alpha) < \text{Im}(k)$ bandında geçerli olan aşağıda skaler üçüncü tip Modifiye Wiener-Hopf Denklemini (MWHHD)' ne dönüştürülürler:

$$-\frac{b}{2}F_1(b, \alpha) + \frac{\tilde{F}^-(b, \alpha)}{K^2(\alpha)} L(\alpha) + \frac{e^{ial}\tilde{F}^+(b, \alpha)}{K^2(\alpha)N(\alpha)} = \frac{i\alpha}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_1(Z_m a)}{J_1(Z_m b)} \frac{1}{\delta_m^2 - \alpha^2} \frac{f_m}{Z_m} + e^{ial} \frac{b}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_0(\xi_m b)}{\alpha_m^2 - \alpha^2} [g_m - i\alpha h_m] \quad (3a)$$

Burada

$$N(\alpha) = \pi i J_1(Kb) H_1^{(1)}(Kb) \quad (3b)$$

$$L(\alpha) = \frac{H_1^{(1)}(K\alpha)}{\pi H_1^{(1)}(Kb)M(\alpha)} \quad (3c)$$

olarak tanımlıdır. $\dot{F}^+(b, \alpha)$ ve $\dot{F}^-(b, \alpha)$ fonksiyonlarının formel çözümleri Wiener-Hopf Tekniği yardımıyla elde edilmiş ve tezde verilmiştir. $\rho > b$ bölgesinde toplam alan $F(\rho, \alpha)$ 'nın ters Fourier dönüşümü yardımıyla

$$u_1(\rho, z) = -\frac{1}{2\pi} \int_L \frac{H_0^{(1)}(K\rho)}{K(\alpha)H_1^{(1)}(Kb)} \left[\dot{F}_-(b, \alpha) + e^{i\alpha l} \dot{F}_+(b, \alpha) \right] e^{-i\alpha z} d\alpha \quad (4)$$

yazılır. Burada L reel α -eksenine paralel ve $\text{Im}(-k) < \text{Im}(\alpha) < \text{Im}(k)$ bandında bir çizgiyi göstermektedir. $H_0^{(1)}(K\rho)$ 'nin $k\rho \rightarrow \infty$ iken geçerli asimtotik ifadesi,

$$H_0^{(1)}(K\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi K\rho}} e^{i(K\rho - \pi/4)} \quad (5)$$

gözönünde bulundurularak (4) ifadesinin asimtotik değeri *semer noktası* (saddle point) tekniği yardımıyla,

$$u_1(\rho, z) = \frac{i}{\pi} \left\{ \frac{e^{ikr_1} \dot{F}^+(b, -k \cos \theta_1)}{kr_1 \sin \theta_1 H_1^{(1)}(kb \sin \theta_1)} + \frac{e^{ikr_2} \dot{F}^+(b, -k \cos \theta_2)}{kr_2 \sin \theta_2 H_1^{(1)}(kb \sin \theta_2)} \right\} \quad (6)$$

gibi elde edilir.

Burada r_1, θ_1 , ve r_2, θ_2 silindirik koordinatları göstermek

$$\rho = r_1 \sin \theta_1 \quad z = r_1 \cos \theta_1 \quad (7)$$

$$\rho = r_2 \sin \theta_2 \quad z - l = r_2 \cos \theta_2 \quad (8)$$

gibi tanımlanmıştır. Nihayet, (6) denkleminin sayısal olarak değerlendirilmesiyle kırınan alanın problemi belirleyen çeşitli geometrilere bağlı olarak değişimi elde edilmiştir.

ANALYSIS OF THE RADIATION OF SCALAR WAVES BY CIRCULAR HORN RADIATOR

SUMMARY

In the recent years, scattering problems have been extensively studied in the literature because of their importance in radiator analysis, studies and other microwave and acoustic applications.

In the present work, the radiation of the acoustic waves in a circular waveguide horn formed by flaring out a circular waveguide is analyzed rigorously through the Wiener-Hopf (WH) Technique. It is assumed that the walls of the circular horn are rigid. The solution is obtained by modification of the Wiener-Hopf technique which resulted into infinite systems of linear algebraic equations. These equations were truncated and solved numerically.

The advantage of the WH Technique over other methods is that it is rigorous in the sense that the edge condition is explicitly incorporated in the analysis and that it has the potential of providing accurate and reliable results over broad frequency ranges. Furthermore, contrary to some numerical techniques, which are efficient only when the problem involves finite boundaries of limited length, the WH method does not suffer from such restrictions.

Numerical solutions are obtained for various values of problem the parameters and the effects of these parameters on the diffraction phenomenon are investigated.

We consider the radiation of a scalar plane wave from circular horn radiator depicted in Fig.1. For analysis purposes, it is convenient to express the field constituents in the various subdomains explicitly as follows:

$$u^T(\rho, z) = \begin{cases} u_1(\rho, z) & ; \rho > b & z \in (-\infty, \infty) \\ u_2(\rho, z) & ; \rho \in (a, b), & z < 0 \\ u_3(\rho, z) + u^i(\rho, z) & ; \rho \in (0, a), & z < 0 \\ u_4(\rho, z) & ; \rho \in (0, b), & z \in (0, l) \\ u_5(\rho, z) & ; \rho \in (0, b), & z > l \end{cases} \quad (1)$$

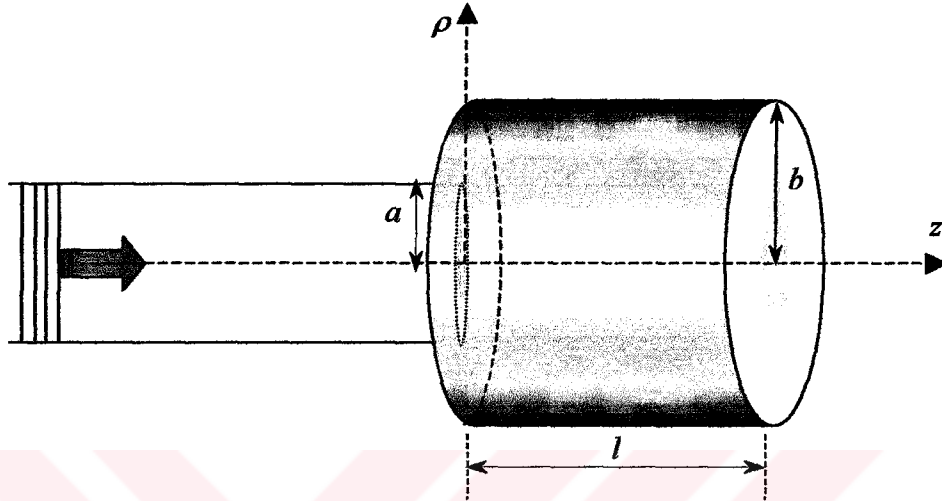


Fig 1. Geometry of the Problem

Here, u^i is the incident field given by

$$u^i(\rho, z) = e^{ikz} \quad (2)$$

In (2) k is the free space wave number which is assumed to have small positive imaginary part. $u_j(\rho, z)$, $j=1-5$ which satisfy the Helmholtz equation in their corresponding regions, are to be determined with the aid of boundary and continuity conditions related to this problem. By introducing the Fourier transform in z for the scattered field and applying the boundary conditions in the transform domain α , the problem is reduced into a scalar modified Wiener-Hopf equation of the third kind valid in the strip $\text{Im}(-k) < \text{Im}(\alpha) < \text{Im}(k)$

$$-\frac{b}{2}F_1(b,\alpha) + \frac{\dot{F}^-(b,\alpha)}{K^2(\alpha)} L(\alpha) + \frac{e^{ial}\dot{F}^+(b,\alpha)}{K^2(\alpha)N(\alpha)} = \frac{i\alpha}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_1(Z_m a)}{J_1(Z_m b)} \frac{1}{\delta_m^2 - \alpha^2} \frac{f_m}{Z_m} + e^{ial} \frac{b}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_0(\xi_m b)}{\alpha_m^2 - \alpha^2} [g_m - i\alpha h_m] \quad (3a)$$

where

$$N(\alpha) = \pi i J_1(Kb) H_1^{(1)}(Kb) \quad (3b)$$

$$L(\alpha) = \frac{H_1^{(1)}(Ka)}{\pi H_1^{(1)}(Kb) M(\alpha)} \quad (3c)$$

The formal solution of $\dot{F}^+(b,\alpha)$ ve $\dot{F}^-(b,\alpha)$ can easily be obtained through the classical Wiener-Hopf technique . The total scattered field in the region $y > b$ can be obtained by taking the inverse Fourier transform of the expression $F(\rho,\alpha)$.

$$u_1(\rho,z) = -\frac{1}{2\pi} \int_L \frac{H_0^{(1)}(K\rho)}{K(\alpha)H_1^{(1)}(Kb)} \left[\dot{F}^-(b,\alpha) + e^{ial}\dot{F}^+(b,\alpha) \right] e^{-iaz} d\alpha \quad (4)$$

where L is a straight line parallel to the real axis lying in the strip $\text{Im}(-k) < \text{Im}(\alpha) < \text{Im}(k)$.

Utilizing the asymptotic expansion of $H_0^{(1)}(K\rho)$ as $k\rho \rightarrow \infty$

$$H_0^{(1)}(K\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi K\rho}} e^{i(K\rho - \pi/4)} \quad (5)$$

The asymptotic evaluation of the integral in (4) can be performed via the saddle point technique, the diffracted field is obtained as:

$$u_1(\rho,z) = \frac{i}{\pi} \left\{ \frac{e^{ikr_1}}{kr_1 \sin \theta_1} \frac{\dot{F}^+(b,-k \cos \theta_1)}{H_1^{(1)}(kb \sin \theta_1)} + \frac{e^{ikr_2}}{kr_2 \sin \theta_2} \frac{\dot{F}^+(b,-k \cos \theta_2)}{H_1^{(1)}(kb \sin \theta_2)} \right\} \quad (6)$$

where r_1, θ_1 , and r_2, θ_2 are the spherical coordinates defined by

$$\rho = r_1 \sin \theta_1 \quad z = r_1 \cos \theta_1 \quad (7)$$

and

$$\rho = r_2 \sin \theta_2 \qquad z - l = r_2 \cos \theta_2 \qquad (8)$$

The diffracted for field is then calculated numerically via (6) and its dependence on the various parameters of the problem is investigated.



1. GİRİŞ

Saçılma problemleri iki ana sınıfa ayrılmıştır. Bunlar “düz saçılma problemleri” ve “ters saçılma problemleri” dir.

Düz saçılma problemleri, bilinen bir kaynaktan uyarılmış dalgaların yayılımına, bilinen hedeflerin etkisini incelemekten ibarettir. Bilinen hedeflerin akustik ve elektromagnetik açıdan bazı yapıları taklit ettiği durumda, düz saçılma problemi o yapının akustik ve elektromagnetik özelliklerinin elde edilmesine oldukça yardımcı olur. Bu tür problemler literatürde incelenmiştir. Dalga kılavuzundan saçılma, ..vb.

Akustik ve mikrodalga uygulamalarında kullanılan horn yayıcıların ışınmasına yönelik çalışmalar yakın tarihte oldukça önemli araştırma konusu olmuştur. Mikrodalga uygulamalarında özellikle tercih edilen bu yayıcılar dalgakılavuzların ağızlarının çeşitli geometrik biçimlerde açılmasıyla elde edilir ve bunların değişik amaçlar için kullanılan bir çok çeşidi bulunmaktadır. Bunlar; dikdörtgen horn, dairesel horn, konik horn ve bikonik horndur. Çeşitli reflektör anten analiz, tasarım ve uygulamalarında değişik elektromagnetik hornlar yoğun bir biçimde kullanılmaktadır.

1.1 Problemin Tanımı

Bu çalışmada ele alınan problem geometrisi Şekil 2.1’ de gösterilmiş olan (dairesel) silindirik horndan akustik(skaler) dalgaların saçılmasının incelenmesidir. Yapıyı sınırlayan tüm yüzeylerin rijid olduğu varsayılmış ve zaman faktörü, ω , dalganın açılal frekansını göstermek üzere, $e^{-i\omega t}$ olarak kabul edilmiş ve formülasyonda ayrıca gösterilmemiştir. Hornun soldan (bkz. Şekil2.1) $z < 0$ daki silindirik borunun dairesel simetrik tipteki dominant modu ile uyarıldığı varsayılmıştır. Bu uyarma problem geometrisin simetrisi ile birlikte göz önüne alındığında silindirik borular içerisindeki alan çözümlerinin açılal koordinattan bağımsız olacakları anlaşılır. Yukarıdaki gibi tanımlanan saçılma problemlerinin çözümü için tezde Wiener-Hopf (WH) yöntemi kullanılmıştır.

Problemin çözümünde WH yönteminin kullanılmasının bir kaç önemli nedeni şöyle sıralayabiliriz. WH yönteminin en önemli özelliği ayırıt koşulun analize açık bir şekilde dahil edilmesine ve geniş frekans bandında oldukça güvenilir ve kesin sonuçların bulunmasına olanak vermesidir. WH Tekniğinin diğer bir üstünlüğü ise sözkonusu silindirik horn yayıcı analizinin, horn yan duvarlarının empedans koşulu sağlanması haline kolayca genelleştirilebilmesidir. Ve en önemlisi ise WH tekniğinin uygulanmasındaki kısıtlamalar diğer nümerik ve karma tekniklere göre çok daha az olmasıdır.

1.2 Probleme İlgili Literatür

Literatürde tezde ele alınan problemin çözümüne yönelik herhangi bir çalışmaya raslanmamıştır. Bu bölümde, inceleyeceğimiz problemle doğrudan ve dolaylı olarak ilişkili olan benzer problemlere dair literatürde mevcut olan çalışmalar hakkında kısa bilgi verilecektir.

Horn anten teorisi ile ilgili çalışmaların başında Barrow'un [1] yaptığı çalışma gelir. Barrow, Maxwell denklemleri ile dikdörtgen kesitli horn parametrelerini analiz edip, tasarım için bir takım kriterler vermiştir. Daha sonra metal yapılı hornların ışına paternlerinin elde edilmesine yönelik çalışmalar [2] başlamıştır. Horn tipi yayıcıların ışına diyagramlarının çıkarılması deneysel yöntemlerle elde edilmeye çalışılmıştır. Chu [3], Kirchoff formülasyonu ile silindirik ve dikdörtgen kesitli borulardaki enine elektrik dalgalarının ışına paternini elde etmiştir. Kırınım teorisi ile hornların E-düzlemi ışına paternleri üzerine Russo [4] çalışma yapmıştır ve daha sonra aynı problem Yu, Rudduck ve Peters [5] tarafından geliştirilmiştir. Yu ve Rudduck[6] H-düzlem ışına paternini, GTD (Geometrically Theory of Diffraction- Kırınım Geometrik Teorisi) ve paralel dalga kılavuzu mod yaklaşımından elde etmişlerdir. Sonraları hem Mentzer, Peters ve Rudduck [7] ve hem de Narashiman ve Rao [8] tarafından UTD (Uniform Theory of Diffraction-Kırınım uniform Teorisi) metodu kullanılarak aynı problem geliştirilmiştir. Bir kaç yıl sonra küresel kaynakla uyarılmış E ve H düzlemi horn yayıcıların yakın ve uzak alan ifadeleri elde edilmiştir [8]. Menendez ve Lee[9] UAT (Uniform Asymptotic Theory – Uniform Asimtotik Teori) metodunu kullanarak horn antenlerin ışınmasına yönelik çalışmalar yapmışlardır. İki boyutlu horn antenlerin ışınmasına yönelik farklı bir yaklaşım da P'yankov ve Chumachenko [10] tarafından verilmiştir.

Paralel tabakalı dalga kılavuzundan düzlemsel dalgaların kırınımı [11,15-17] ve silindirik dalga kılavuzların analizine ilişkin WH çözümleri [18],[19] literatürde yapılan diğer çalışmalardır. Dikdörtgen kesitli hornlara (boxlike horn) ilişkin Wiener-Hopf çözümü Birbir ve Büyükaksoy [20] tarafından elde edilmiştir. Şimdiye kadar bahsettiğimiz çalışmaların çoğunluğu dikdörtgen kesitli yapılar üzerine yapılmıştır.

Silindirik kesitli geometrilere ilişkin yapılan çalışmalardan bazıları aşağıda verildiği gibidir. Yarı sonsuz rijid bir borudan ışıyan dalgaların analitik çözümü Levine ve Schwinger [22] tarafından elde edilmiştir. Sonra Ando [24] aynı problemin boru duvarlarının belirli bir kalınlığa sahip olduğu durumu incelemiştir. Rawlins [21] iç yüzeyleri akustik yutucu malzemeyle kaplı rijid silindirik bir kanaldan akustik dalgaların ışımasını ele almıştır. Daha sonra Büyükaksoy ve Polat [11], Ando tarafından verilen problemin iç ve dış yüzeylerinin empedans olduğu durumu incelemişlerdir. Bu ve benzeri çalışmalar ile ilgili bilgi literatürde mevcut olup detaylarına değinilmemiştir.

Literatürde yapılan çalışmalara bakıldığında horn yayıcıların analizinde deneysel ve yaklaşık yöntemler kullanılmıştır. Bilgisayarların gelişmesi ile nümerik yöntemlerle horn analizi yapılmaya başlanmıştır. Ancak silindirik horn yayıcıların analitik incelenmesi üzerine yapılan hiç bir çalışmaya rastlanmamıştır.

1.3 Problemin Önemi

Ele alınan problemin çözümüyle akustik dalgaların dairesel silindirik horn geometrisinden ışımasına ilişkin analitik formülasyon ve bunun sayısal olarak değerlendirilmesiyle de ışınan alan genliğinin problemin değişik parametrelerine göre değişimleri ilk defa elde edilmiş olmaktadır.

Tez çalışmasının literatüre getirdiği en önemli katkı WH tekniği yardımıyla problemin transform domeninde kesin formel çözümlerinin elde edilmiş olmasıdır. Ayrıca elde edilen formel çözümün bazı kısıtlamalar altında kabul edilebilir bilgisayar olanakları ve zaman içinde sayısal çözümlerin elde edilmesine imkan verecek şekilde basitleştirilmesi ve böylece yaklaşık, ancak uygulama açısından anlamlı, sonuçların üretilmesi tezde sunulan çalışmanın ilgili mühendislik literatürüne önemli bir katkısı niteliğindedir. Sözü edilen kısıtlamalar

- Sonsuz terimli serilerin belirli bir üst limitte sonlandırılması (bkz. Şekil 4.3)

- Kuple Fredholm tipi integral denklemlerin iteratif çözümünde iterasyon adımlarının sınırlandırılması (bkz. 244a,b)
- Işınan alanın semer noktası yöntemi ile asimtotik yaklaşıklık altında (bkz. Bölüm 3) hesaplanmış olmasıdır.

Bu şekilde problemin yaklaşık sayısal çözümlerinin mütevazi bilgisayar olanakları ile ve makul zaman sınırları içinde elde edilmesi mümkün olmuştur. Tezde verilen bütün sonuçlar HP Pentium-III model bir kişisel bilgisayar ile elde edilmiş ve seçilen bir parametre takımı için istenilen ışınan alanın elde edilmesi yaklaşık 50dk. bilgisayar zamanı yeterli olmuştur.

1.4 Tezin Kapsamı

İkinci bölümde problem analiz edilip, üçüncü tip modifiye Wiener-Hopf denklemi elde edilmiştir. Daha sonra WH denklemi çözümlenerek iki adet kuple integral denkleme indirgenmiştir. Bu denklemlerde rezidü ve kesim çizgisi integralleri çözümlenerek kuple integral denklemler sistemi elde edilmiştir. Kuple integral denklemler sistemi iterasyon yöntemiyle çözülmüştür. Dalga kılavuzu kısmında alan Dini serilerine açılarak ifade edilmiştir.

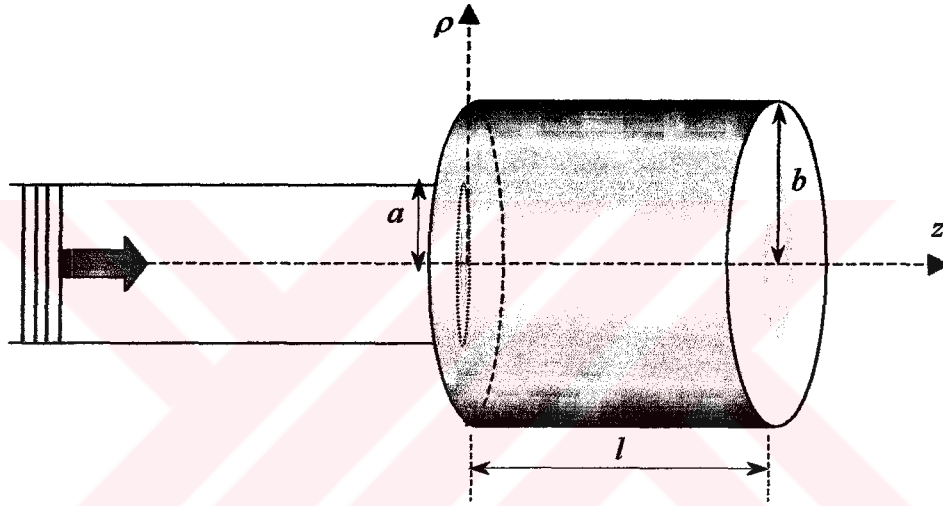
Üçüncü bölümde kırınan alan ifadesi en dik iniş çizgisi yöntemi (saddle point technique) kullanılarak elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde kırınan alan ifadesi nümerik olarak incelenmiştir. Değişik parametrelerin kırınımına olan etkisi grafiklerle verilmiştir. Elde edilen analitik sonuçlar , Ando (1968) tarafından verilen deneysel sonuçlarla karşılaştırılmış ve aralarında oldukça iyi bir uyum olduğu gösterilmiştir.

2. PROBLEMİN FORMÜLASYONU VE YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜ

2.1 Problemin Formülasyonu

(ρ, ϕ, z) silindirik koordinatları göstermek üzere $\rho = a$ silindiri içinde yayılan skaler bir dalganın şekil 2.1’ de gösterilen silindirik horn yayıcıdan ışımasını ele alalım.



Şekil 2.1 Silindirik Horn

Problemin geometrisinin simetrik ve yayılan dalganın skaler bir dalga olması, saçılan alanın her yerde ϕ 'den bağımsız olduğunu gösterir. Hornun tüm yüzeylerinin rijid olduğu varsayılmaktadır. Problemin analizini kolayca yorumlayabilmek için toplam alanı;

$$u^T(\rho, z) = \begin{cases} u_1(\rho, z) & ; \rho > b & z \in (-\infty, \infty) \\ u_2(\rho, z) & ; \rho \in (a, b), & z < 0 \\ u_3(\rho, z) + u^i(\rho, z) & ; \rho \in (0, a), & z < 0 \\ u_4(\rho, z) & ; \rho \in (0, b), & z \in (0, l) \\ u_5(\rho, z) & ; \rho \in (0, b), & z > l \end{cases}$$

(2.1)

gibi yazmak uygun olacaktır. Burada , $u^i(\rho, z)$ dalga kılavuzu içinde ki gelen skaler dalgayı göstermekte olup

$$u^i(\rho, z) = e^{ikz} \quad (2.2)$$

gibidir. Burada $k = \omega/c$ olup dalga sayısını ve ω açısal frekansı, c ise dalganın hızını göstermektedir. (2.2) ifadesinde verilen dalga akustik dalganın hız potansiyelini göstermektedir. Şöyleki $p = i\omega\rho_0 u$, akustik basıncı göstermek üzere, akustik hız $\vec{v} = \text{gradu}$ şeklinde tanımlanmaktadır. Burada verilen u akustik hız skaler potansiyeli diye adlandırılır ve hesaplarımızda akustik dalganın bu bileşeni kullanılacaktır. Analizin matematiksel olarak kolay yorumlanabilmesi için k 'nın küçük te olsa sıfırdan farklı (pozitif) bir sanal kısma sahip olduğunu ve $k = k_r + k_i$ şeklinde yazılabileceğini varsayılmaktadır. Bu halde analiz sonunda elde edilen sonuçlarda $k_i \rightarrow 0$ yapıldığında boşuzaya ilişkin sonuçlar elde edilmiş olur. (2.1) ifadesinde geometriye uygun olarak yazılan $u_j(\rho, z)$, $j = 1-5$ alan ifadeleri sınır ve süreklilik koşulları altında silindirik koordinatlarda Helmholtz denklemini sağlarlar.

2.2 Sınır Koşulları ve Spektral Katsayıların Belirlenmesi

Silindirik horna ait sınır ve süreklilik koşulları aşağıda verildiği gibidir.

$$\frac{\partial}{\partial \rho} u_1(b, z) = 0 ; \quad z \in (0, l) \quad (2.3a)$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho} u_2(a, z) = 0 ; \quad z < 0 \quad (2.3b)$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho} u_3(a, z) = 0 ; \quad z \in (-\infty, 0) \quad (2.3c)$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho} u_4(b, z) = 0 ; \quad z \in (0, l) \quad (2.3d)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial z}(\rho, 0) = 0 ; \quad \rho \in (a, b) \quad (2.3e)$$

$$\frac{\partial u_4}{\partial z}(\rho, 0) = 0 ; \quad \rho \in (a, b) \quad (2.3f)$$

$$u_1(b, z) = u_2(b, z) ; \quad z < 0 \quad (2.3g)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial \rho}(b, z) = \frac{\partial u_2}{\partial \rho}(b, z) ; \quad z < 0 \quad (2.3h)$$

$$u_1(b, z) = u_5(b, z) ; \quad z > l \quad (2.3i)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial \rho}(b, z) = \frac{\partial u_5}{\partial \rho}(b, z) ; \quad z > l \quad (2.3j)$$

$$u_3(\rho, 0) + u^i(\rho, 0) = u_4(\rho, 0) ; \quad \rho \in (0, a) \quad (2.3k)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} u_3(\rho, 0) + \frac{\partial}{\partial z} u^i(\rho, 0) = \frac{\partial}{\partial z} u_4(\rho, 0) ; \quad \rho \in (0, a) \quad (2.3l)$$

$$u_4(\rho, l) = u_5(\rho, l) ; \quad \rho \in (0, b) \quad (2.3m)$$

$$\frac{\partial u_4}{\partial z}(\rho, l) = \frac{\partial u_5}{\partial z}(\rho, l) ; \quad \rho \in (0, b) \quad (2.3n)$$

Toplam alanın çok uzaklara gidildikçe asimtotik davranışı, radyasyon koşulu uyarınca

$$u \approx \frac{e^{ikr}}{r}, \quad r = \sqrt{\rho^2 + z^2} \rightarrow \infty \quad (2.3p)$$

biçimindedir. Ayrıca alanın çözümünün tekliğini garantileyebilmek için $\rho = a$, $z = 0$ ve $\rho = b$, $z = l$ ayrıtlarında alanın davranışını bilmek gerekmektedir. Bu kenarlara ilişkin;

$$u^T(b+0, z) = O(1) \quad z \rightarrow -0 \quad (2.3r)$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho} u^T(b+0, z) = O(z^{-1/3}), \quad z \rightarrow -0 \quad (2.3s)$$

$$u^T(b, z) = \text{sabit}, \quad z \rightarrow l+0 \quad (2.3t)$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho} u^T(b, z) = O(z-l)^{-1/2}, \quad z \rightarrow l+0 \quad (2.3u)$$

ayrıt koşullarını da göz önüne almak gerekir[28].

Formulasyonun kolaylığı açısından (2.1) ifadesindeki gibi yazılan alan ifadelerinin ilgili bölgelerdeki Helmholtz denklemi çözümleri alan ifadelerine yönelik çözümlerin oluşturulmasına yardımcı olacaktır. $\rho > b$ ve $z \in (-\infty, \infty)$ bölgesinde $u_1(\rho, z)$ fonksiyonu silindirik koordinatlarda yazılmış Helmholtz denklemini

$$\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) u_1(\rho, z) = 0 \quad (2.4)$$

sağlar. Analizde w açısal frekans olmak üzere zamana bağlılık e^{-iwt} kabul edilmiş ve hiç bir ifadede gösterilmemiştir. α Fourier transform değişkeni olmak üzere (2.4) ifadesini e^{iaz} çarpıp ve $z = -\infty$ dan ∞ ' a kadar integre edersek;

$$\left(\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d}{d\rho} \right) + K(\alpha) \right) F(\rho, \alpha) = 0 \quad (2.5a)$$

elde etmiş oluruz. Burada

$$F(\rho, \alpha) = F^-(\rho, \alpha) + F_1(\rho, \alpha) + e^{i\alpha l} F^+(\rho, \alpha) \quad (2.5b)$$

$$F^-(\rho, \alpha) = \int_{-\infty}^0 u_1(\rho, z) e^{i\alpha z} dz \quad (2.5c)$$

$$F_1(\rho, \alpha) = \int_0^l u_1(\rho, z) e^{i\alpha z} dz \quad (2.5d)$$

$$F^+(\rho, \alpha) = \int_l^{\infty} u_1(\rho, z) e^{i\alpha(z-l)} dz \quad (2.5e)$$

$$K(\alpha) = \sqrt{k^2 - \alpha^2} \quad (2.5f)$$

tanımlanır. (2.5a) ifadesinin $\rho > b$ için radyasyon koşulunu sağlayan çözümü,

$$F(\rho, \alpha) = F^-(\rho, \alpha) + F_1(\rho, \alpha) + e^{i\alpha l} F^+(\rho, \alpha) = -A(\alpha) \frac{H_0^{(1)}(K\rho)}{K(\alpha)H_1^{(1)}(Kb)} \quad (2.6)$$

Burada $H_n^{(1)}$ n. dereceden birinci tip Hankel fonksiyonunu göstermek üzere

$$H_n^{(1)} = J_n + iY_n \quad (2.7)$$

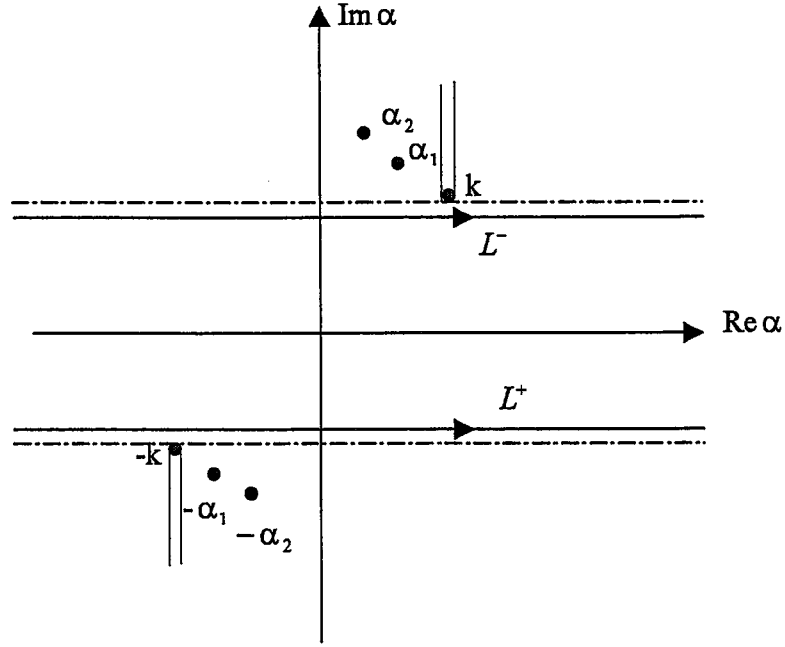
olarak tanımlanmıştır. $A(\alpha)$ ise sonradan tanımlanacak spektral katsayıyı göstermektedir. (2.5f)' de açık ifadesi verilen $K(\alpha)$ karekök ifadesi, Şekil 2.2' deki gibi kesilmiş kompleks α - düzleminde $K(0) = k$ olacak biçimde tanımlanmıştır. Kompleks düzlemde fourier integralinin bilinen analitik özellikleri nedeniyle $F^-(\rho, \alpha)$ fonksiyonu $\text{Im}(\alpha) < \text{Im}(k)$ yarı düzleminde, $F^+(\rho, \alpha)$ fonksiyonu da $\text{Im}(\alpha) > \text{Im}(-k)$ yarı düzleminde regüler fonksiyonlardır. (2.3a)' da verilen sınır koşuluna ait ifadenin Fourier dönüşümü alınır

$$\dot{F}_1(b, \alpha) = 0 \quad (2.8)$$

elde edilir. (2.8) ifadesinde $(.)$ ρ' ya göre türevi göstermektedir. (2.6) ifadesinde her iki tarafın ρ' ya göre türevi alınıp ve $\rho = b$ yazılır ve (2.8) ile birlikte düşünülürse $A(\alpha)$ spektral katsayısı ,

$$A(\alpha) = \dot{F}^-(b, \alpha) + e^{i\alpha l} \dot{F}^+(b, \alpha) \quad (2.9)$$

elde edilir.



Şekil 2.2 Kompleks α -düzlemi

Bu ifade gözönüne alınarak (2.6) ifadesi yeniden düzenlenirse,

$$F^-(b, \alpha) + e^{ial} F^+(b, \alpha) = -F_1(b, \alpha) - \left[\dot{F}^-(b, \alpha) + e^{ial} \dot{F}^+(b, \alpha) \right] \frac{H_0^{(1)}(Kb)}{K(\alpha)H_1^{(1)}(Kb)} \quad (2.10)$$

elde edilir.

$a < \rho < b$ ve $z < 0$ bölgesinde $u_2(\rho, z)$, $0 < \rho < b$ ve $z > l$ bölgesinde ise $u_5(\rho, z)$ fonksiyonları Helmholtz denklemini sağlarlar. Bu bölgedeki toplam alanlar silindirik koordinatlarda Helmholtz denklemini

$$\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{d}{d\rho} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) u_2(\rho, z) = 0 \quad z < 0 \quad (2.11a)$$

$$\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{d}{d\rho} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) u_5(\rho, z) = 0 \quad z > l \quad (2.11b)$$

sağlarlar. (2.11a) ifadesinin her iki tarafını e^{iaz} ile (2.11b) ifadesinin her iki tarafını $e^{i\alpha(z-l)}$ ile çarpıp ve (2.11a)'yı $-\infty$ 'dan 0'a kadar, ve (2.11b)'yi l 'den ∞ 'a integre edersek;

$$\left(\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d}{d\rho} \right) + K^2(\alpha) \right) G^-(\rho, \alpha) = i\alpha f(\rho) \quad (2.12a)$$

$$\left(\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d}{d\rho} \right) + K^2(\alpha) \right) G^+(\rho, \alpha) = g(\rho) - iah(\rho) \quad (2.12b)$$

şeklinde iki ifade elde edilir ve burada

$$f(\rho) = u_2(\rho, 0), \quad g(\rho) = \frac{\partial}{\partial z} u_5(\rho, l), \quad h(\rho) = u_5(\rho, l) \quad (2.12c,d,e)$$

olmak üzere, $G^-(\rho, \alpha)$ ve $G^+(\rho, \alpha)$ ' da,

$$G^-(\rho, \alpha) = \int_{-\infty}^0 u_2(\rho, z) e^{i\alpha z} dz \quad (2.13a)$$

$$G^+(\rho, \alpha) = \int_l^{\infty} u_5(\rho, z) e^{i\alpha(z-l)} dz \quad (2.13b)$$

olarak tanımlanmıştır. (2.13a) ve (2.13b) fonksiyonları sırasıyla $\text{Im}(\alpha) < \text{Im}(k)$ ve $\text{Im}(\alpha) > \text{Im}(-k)$ yarı düzlemlerinde regüler fonksiyonlardır. (2.12a) ifadesinin $\rho = a$ ile $\rho = b$ arasında $z < 0$ bölgesindeki çözümü Green fonksiyonu tekniği yardımıyla çözülebilir. Green fonksiyonu (2.14b-e)' de verilen sınır ve süreklilik şartları altında Helmholtz denklemini sağlar.

$$\left(\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d}{d\rho} \right) + K^2(\alpha) \right) \mathbb{G}_1(\rho, t, \alpha) = 0, \quad \rho \neq t, \quad \rho, t \in (a, b) \quad (2.14a)$$

$$\mathbb{G}_1(t+0, t, \alpha) = \mathbb{G}_1(t-0, t, \alpha) \quad (2.14b)$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \mathbb{G}_1(t+0, t, \alpha) - \frac{\partial}{\partial \rho} \mathbb{G}_1(t-0, t, \alpha) = \frac{1}{t} \quad (2.14c)$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \mathbb{G}_1(b, t, \alpha) = 0 \quad (2.14d)$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \mathbb{G}_1(a, t, \alpha) = 0 \quad (2.14e)$$

(2.14a)'nın çözümü

$$\mathbb{G}_1(\rho, t, \alpha) = \begin{cases} \tilde{A}J_0(K\rho) + \tilde{B}Y_0(K\rho) & a < \rho < t \\ \tilde{C}J_0(K\rho) + \tilde{D}Y_0(K\rho) & t < \rho < b \end{cases} \quad (2.15a)$$

şeklinindedir. Sınır şartlarından (2.14d-e) gözönüne alınırsa

$$\tilde{B} = -\tilde{A} \frac{J_1(Ka)}{Y_1(Ka)}, \quad \tilde{D} = -\tilde{C} \frac{J_1(Kb)}{Y_1(Kb)} \quad (2.15b,c)$$

olduğu kolayca hesaplanır. Böylece

$$G_1(\rho, t, \alpha) = \begin{cases} \tilde{A} \left[J_0(K\rho) - \frac{J_1(Ka)}{Y_1(Ka)} Y_0(K\rho) \right], & a < \rho < t \\ \tilde{C} \left[J_0(K\rho) - \frac{J_1(Kb)}{Y_1(Kb)} Y_0(K\rho) \right], & t < \rho < b \end{cases} \quad (2.15d)$$

eşitliği elde edilir. (2.15d) ifadesi (2.14b,c) süreklilik şartları ile birlikte düşünülürse bilinmeyen \tilde{A} ve \tilde{C} katsayıları sırasıyla,

$$\tilde{A} = -\frac{\pi}{2} Y_1(Ka) \frac{[J_0(Kt)Y_1(Kb) - J_1(Kb)Y_0(Kt)]}{[J_1(Kb)Y_1(Ka) - Y_1(Kb)J_1(Ka)]} \quad (2.16a)$$

$$\tilde{C} = -\frac{\pi}{2} Y_1(Kb) \frac{[J_0(Kt)Y_1(Ka) - J_1(Ka)Y_0(Kt)]}{[J_1(Kb)Y_1(Ka) - Y_1(Kb)J_1(Ka)]} \quad (2.16b)$$

elde edilmiş olur. Böylece (2.14a)'nın çözümü

$$G_1(\rho, t, \alpha) = \frac{1}{M(\alpha)} Q_1(\rho, t, \alpha) \quad (2.17a)$$

şeklinde olup burada $Q_1(\rho, t, \alpha)$ ve $M(\alpha)$;

$$Q_1(\rho, t, \alpha) = \frac{\pi}{2} \begin{cases} [J_0(K\rho)Y_1(Ka) - J_1(Ka)Y_0(K\rho)][J_0(Kt)Y_1(Kb) - J_1(Kb)Y_0(Kt)], & a \leq \rho \leq t \\ [J_0(K\rho)Y_1(Kb) - J_1(Kb)Y_0(K\rho)][J_0(Kt)Y_1(Ka) - J_1(Ka)Y_0(Kt)], & t \leq \rho \leq b \end{cases} \quad (2.17b)$$

$$M(\alpha) = [J_1(Ka)Y_1(Kb) - J_1(Kb)Y_1(Ka)] \quad (2.17c)$$

dir. Benzer şekilde (2.12b) ifadesinin $\rho = 0$ ve $\rho = b$ $z > l$ bölgesindeki Green fonksiyonu tekniği ile elde edilir. Öncelikle Green fonksiyonu Helmholtz denklemini aşağıda verilen sınır ve süreklilik şartları altında sağlar.

$$\left(\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d}{d\rho} \right) + K^2(\alpha) \right) G_2(\rho, t, \alpha) = 0, \quad \rho \neq t, \quad \rho, t \in (0, b) \quad (2.18a)$$

$$G_2(t+0, t, \alpha) = G_2(t-0, t, \alpha) \quad (2.18b)$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \mathbf{G}_2(t+0, t, \alpha) - \frac{\partial}{\partial \rho} \mathbf{G}_2(t-0, t, \alpha) = \frac{1}{t} \quad (2.18c)$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \mathbf{G}_2(b, t, \alpha) = 0 \quad (2.18d)$$

(2.18b-d)' de verilen sınır şartları (2.18a)'nın çözümü

$$\mathbf{G}_2(\rho, t, \alpha) = \frac{1}{J_1(Kb)} Q_2(\rho, t, \alpha) \quad (2.19a)$$

şeklinde olup ve burada ,

$$Q_2(\rho, t, \alpha) = \frac{\pi}{2} \begin{cases} J_0(K\rho)[J_1(Kb)Y_0(Kt) - J_0(Kt)Y_1(Kb)], & 0 \leq \rho \leq t \\ J_0(Kt)[J_1(Kb)Y_0(K\rho) - J_0(K\rho)Y_1(Kb)], & t \leq \rho \leq b \end{cases} \quad (2.19b)$$

verildiği gibidir. (2.12a) ve (2.12b) denklemlerinin çözümleri

$$G^-(\rho, \alpha) = \frac{1}{M(\alpha)} \left\{ \frac{D_1(\alpha)}{K(\alpha)} [J_0(K\rho)Y_1(Ka) - Y_0(K\rho)J_1(Ka)] + i\alpha \int_a^b f(t) Q_2(t, \rho, \alpha) dt \right\} \quad (2.20a)$$

$$G^+(\rho, \alpha) = \frac{1}{J_1(Kb)} \left\{ \frac{D_2(\alpha)}{K(\alpha)} J_0(K\rho) + \int_0^b [g(t) - iah(t)] Q_2(t, \rho, \alpha) dt \right\} \quad (2.20b)$$

şeklinde elde edilmiş olur. Burada $D_1(\alpha)$ ve $D_2(\alpha)$ katsayıları sınır şartları ile belirlenecek katsayılardır. f, g, h ' lar ise (2.12c,d,e) ile verilmiş fonksiyonları göstermektedir. (2.3h) ve (2.3j) süreklilik koşullarının Fourier dönüşümü alınırsa ;

$$\dot{F}^-(b, \alpha) = \dot{G}^-(b, \alpha) \quad (2.21a)$$

$$\dot{F}^+(b, \alpha) = \dot{G}^+(b, \alpha) \quad (2.21b)$$

şeklinde elde edilir. (2.21a-b) ifadelerinin sonucu olarak $D_1(\alpha)$ ve $D_2(\alpha)$ spektral katsayıları

$$\dot{F}^-(b, \alpha) = D_1(\alpha) \quad (2.22a)$$

$$\dot{F}^+(b, \alpha) = -D_2(\alpha) \quad (2.22b)$$

bulunur. Böylece (2.20a) ve (2.20b) ifadeleri sırasıyla

$$G^-(\rho, \alpha) = \frac{1}{M(\alpha)} \left\{ \frac{\dot{F}^-(b, \alpha)}{K(\alpha)} [J_0(K\rho)Y_1(Ka) - Y_0(K\rho)J_1(Ka)] + i\alpha \int_a^b f(t) \mathcal{Q}_1(t, \rho, \alpha) dt \right\} \quad (2.23a)$$

$$G^+(\rho, \alpha) = \frac{1}{J_1(Kb)} \left\{ -\frac{\dot{F}^+(b, \alpha)}{K(\alpha)} J_0(K\rho) + \int_0^b [g(t) - i\alpha h(t)] \mathcal{Q}_2(t, \rho, \alpha) dt \right\} \quad (2.23b)$$

olur. (2.23a)' nin sol tarafı $\text{Im}(\alpha) < \text{Im}(k)$ alt yarı düzleminde regüler bir fonkiyondur. Bu denklemin sağ tarafı da aynı özelliği göstereceğinden $M(\alpha)$ 'nin $\alpha = -\delta_m$ (alt yarı düzlemde bulunan sıfırları) noktalarında oluşan kutuplar kaldırılmalıdır. Bunun için bu kutuplardaki rezidüleri sıfır yapmak gerekir ve yetişir.

$$J_1(Z_m a)Y_1(Z_m b) - J_1(Z_m b)Y_1(Z_m a) = 0, \quad Z_m = K(-\delta_m), \quad \text{Im}(\delta_m) > \text{Im}(k), \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (2.24a)$$

böylece

$$\dot{F}^-(b, -\delta_m) = -\frac{i\pi}{2} \delta_m Z_m \frac{J_1(Z_m b)}{J_1(Z_m a)} \int_a^b f(t) [J_1(Z_m a)Y_0(Z_m t) - J_0(Z_m t)Y_1(Z_m a)] dt \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (2.24b)$$

elde edilir. Benzer şekilde (2.23b)' nin sol tarafı $\text{Im}(\alpha) > \text{Im}(-k)$ üst yarı düzleminde regülerdir. Bu denklemin sağ tarafında aynı özelliği göstereceğinden $J_1(K_m b)$, $\alpha = +\alpha_m$ noktalarında oluşan kutuplar kaldırılmalıdır. Bunun için bu kutuplardaki rezidüleri sıfır yapmak gerekir ve yetişir.

$$J_1(\xi_m) = 0, \quad \alpha_m = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\xi_m}{b}\right)^2}, \quad \text{Im}(\alpha_m) > \text{Im}(k), \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (2.25a)$$

Bunun sonucu olarak

$$\dot{F}^+(b, \alpha_m) = -\frac{\pi}{2} \xi_m Y_1(\xi_m) \int_0^b [g(t) - i\alpha h(t)] J_0\left(\frac{\xi_m}{b} t\right) dt \quad m \neq 0, \quad (2.25b)$$

ve

$$\dot{F}_+(b, k) = \frac{1}{b} \int_0^b [g(t) - ikh(t)] dt \quad m = 0 \quad (2.25c)$$

elde edilir.

Şimdi (2.3g) ve (2.3i) süreklilik şartları Fourier dönüşümü alınarak düzenlenirse,

$$F^-(b, \alpha) + e^{i\alpha l} F^+(b, \alpha) = G^-(b, \alpha) + e^{i\alpha l} G^+(b, \alpha) \quad (2.26)$$

elde edilir. (2.6) eşitliği (2.9) ile birlikte yeniden gözönüne alınarak , (2.23a) ve (2.23b) ' yide kullanarak,

$$\begin{aligned} -F_1(b, \alpha) - \left[\dot{F}^-(b, \alpha) + e^{i\alpha l} \dot{F}^+(b, \alpha) \right] \frac{H_0^{(1)}(Kb)}{KH_1^{(1)}(Kb)} \\ = \frac{1}{M(\alpha)} \left\{ \frac{\dot{F}^-(b, \alpha)}{K(\alpha)} [J_0(Kb)Y_1(Ka) - Y_0(Kb)J_1(Ka)] + i\alpha \int_a^b f(t) Q_1(t, b, \alpha) t dt \right\} \\ + \frac{e^{i\alpha l}}{J_1(Kb)} \left\{ -\frac{\dot{F}^+(b, \alpha)}{K(\alpha)} J_0(Kb) + \int_0^b [g(t) - i\alpha h(t)] Q_2(t, b, \alpha) t dt \right\} \end{aligned} \quad (2.27)$$

ifadesi elde edilir. (2.27) ifadesi düzenlenip ve Bessel fonksiyonlarının bilinen özelliklerinden

$$H_1^{(1)}(z)Y_0(z) - H_0^{(1)}(z)Y_1(z) = \frac{2}{\pi z} \quad (2.28)$$

$$H_0^{(1)}(z)J_1(z) - H_1^{(1)}(z)J_0(z) = \frac{2i}{\pi z} \quad (2.29)$$

kullanılırsa (2.27) ifadesi

$$\begin{aligned} -F_1(b, \alpha) - \frac{\dot{F}^-(b, \alpha)}{K(\alpha)} \frac{H_1^{(1)}(Ka)}{H_1^{(1)}(Kb)M(\alpha)} \left(-\frac{2}{\pi Kb}\right) - \frac{e^{i\alpha l} \dot{F}^+(b, \alpha)}{KJ_1(Kb)H_1^{(1)}(Kb)} \left(-\frac{2i}{\pi Kb}\right) \\ = \frac{i\alpha}{M(\alpha)} \int_a^b f(t) Q_1(t, b, \alpha) t dt + \\ + \frac{e^{i\alpha l}}{J_1(Kb)} \int_0^b [g(t) - i\alpha h(t)] Q_2(t, b, \alpha) t dt \end{aligned} \quad (2.30)$$

şekline döndürür. Burada $Q_1(t, b, \alpha)$ ve $Q_2(t, b, \alpha)$,

$$Q_1(t, b, \alpha) = \frac{\pi}{2} \begin{cases} -\frac{2}{\pi Kb} [Y_1(Ka)J_0(Kt) - J_1(Ka)Y_0(Kt)] & ; a \leq t \leq b \\ [Y_1(Kb)J_0(Kt) - J_1(Kb)Y_0(Kt)] [Y_1(Ka)J_0(Kb) - J_1(Ka)Y_0(Kb)] & ; b \leq t \end{cases} \quad (2.31a)$$

$$Q_2(t, b, \alpha) = \frac{\pi}{2} \begin{cases} \frac{2}{\pi K b} J_0(Kt) & ; 0 \leq t \leq b \\ J_0(Kb) [J_1(Kb) Y_0(Kt) - Y_1(Kb) J_0(Kt)] & ; b \leq t \end{cases} \quad (2.31b)$$

gibidir. (2.30) ifadesi (2.31a,b)' deki ifadelerle birlikte düzenlenirse

$$\begin{aligned} -F_1(b, \alpha) &= \frac{\dot{F}^-(b, \alpha)}{K(\alpha)} \frac{H_1^{(1)}(Ka)}{H_1^{(1)}(Kb)M(\alpha)} \left(-\frac{2}{\pi K b}\right) - \frac{e^{i\alpha} \dot{F}^+(b, \alpha)}{J_1(Kb)H_1^{(1)}(Kb)} \left(\frac{2i}{\pi K b}\right) \\ &= -\frac{i\alpha}{bK(\alpha)M(\alpha)} \int_a^b f(t) [Y_1(Ka)J_0(Kt) - J_1(Ka)Y_0(Kt)] t dt \\ &\quad + \frac{e^{i\alpha}}{bK(\alpha)J_1(Kb)} \int_0^b [g(t) - i\alpha h(t)] J_0(Kt) t dt \end{aligned} \quad (2.32a)$$

elde edilir. (2.32a)' da gözükten $f(t)$, $g(t)$ ve $h(t)$ fonksiyonları Dini koşullarını sağlayan ve integrallenebilir fonksiyonlar olduğundan bu fonksiyonlara ortogonal fonksiyonlar cinsinden uygun serilere açabiliriz[33]. Bu seriler sırasıyla;

$$f(t) = \sum_{m=0}^{\infty} f_m [J_1(Z_m a) Y_0(Z_m t) - Y_1(Z_m a) J_0(Z_m t)] \quad (2.32b)$$

$$h(t) = \sum_{m=0}^{\infty} h_m J_0\left(\frac{\xi_m}{b} t\right); \quad (2.32c)$$

$$g(t) = \sum_{m=0}^{\infty} g_m J_0\left(\frac{\xi_m}{b} t\right) \quad (2.32d)$$

gibidir. Burada f_m , g_m ve h_m sırasıyla[34, p.453-449];

$$f_m = \frac{\pi^2}{2} \frac{J_1^2(Z_m b) Z_m^2}{J_1^2(Z_m a) - J_1^2(Z_m b)} \int_a^b f(t) [J_1(Z_m a) Y_0(Z_m t) - Y_1(Z_m a) J_0(Z_m t)] t dt \quad (2.33a)$$

$$h_m = \frac{2}{b^2 J_0^2(\xi_m)} \int_0^b h(t) J_0\left(\frac{\xi_m}{b} t\right) t dt \quad m \neq 0 \quad (2.33b)$$

$$h_0 = \frac{2}{b^2} \int_0^b h(t) t dt \quad m = 0 \quad (2.33c)$$

ve

$$g_m = \frac{2}{b^2 J_0^2(\xi_m)} \int_0^b g(t) J_0\left(\frac{\xi_m}{b} t\right) t dt \quad m \neq 0 \quad (2.33d)$$

$$g_0 = \frac{2}{b^2} \int_0^b g(t) t dt \quad m = 0 \quad (2.33e)$$

gibidir. (2.24b) ve (2.25b)' de elde ettiğimiz $\dot{F}^-(b, -\delta_m)$ ve $\dot{F}^+(b, \alpha_m)$ ' leri (2.33a-e)' de ifade ettiğimiz f_m, g_m ve h_m ' ler cinsinden,

$$\dot{F}^-(b, -\delta_m) = \frac{i\delta_m}{\pi Z_m} \frac{J_1^2(Z_m b) - J_1^2(Z_m a)}{J_1(Z_m a) J_1(Z_m b)} f_m \quad (2.33f)$$

$$\dot{F}^+(b, \alpha_m) = -\frac{b}{2} J_0(\xi_m) (g_m - i\alpha_m h_m) \quad (2.33g)$$

$$\dot{F}^+(b, k) = -\frac{b}{2} (g_0 - i\alpha_0 h_0) \quad (2.33h)$$

yazabiliriz. (2.32b-d)' de verilen $f(t)$, $g(t)$ ve $h(t)$ fonksiyonlarını, (2.32a)'da yerlerine yazıp terim terime integral alınırsa, $\text{Im}(-k) < \text{Im}(\alpha) < \text{Im}(k)$ bandında geçerli olan Üçüncü tip Modifiye Wiener-Hopf Denklemi

$$-\frac{b}{2} F_1(b, \alpha) + \frac{\dot{F}^-(b, \alpha)}{K^2(\alpha)} L(\alpha) + \frac{e^{i\alpha l} \dot{F}^+(b, \alpha)}{K^2(\alpha) N(\alpha)} = \frac{i\alpha}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_1(Z_m a)}{J_1(Z_m b)} \frac{1}{\delta_m^2 - \alpha^2} \frac{f_m}{Z_m} + e^{i\alpha l} \frac{b}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_0(\xi_m)}{\alpha_m^2 - \alpha^2} [g_m - i\alpha h_m]$$

(2.34a)

şeklinde elde edilmiş olur. Bu denklemde

$$N(\alpha) = \pi i J_1(Kb) H_1^{(1)}(Kb) \quad (2.34b)$$

ve

$$L(\alpha) = \frac{H_1^{(1)}(Ka)}{\pi H_1^{(1)}(Kb)M(\alpha)} \quad (2.34c)$$

şeklinde tanımlandığı gibidir. WH tekniğinin gereği açısından (2.34a)' da elde ettiğimiz MWHD' ni (+) ve (-) fonksiyonlar cinsinden ayrıştırmamız gerekmektedir. Bu amaçla

$$\begin{aligned} & -F_1(b, \alpha) \frac{b}{2} + \frac{\dot{F}^-(b, \alpha)}{(k-\alpha)(k+\alpha)} L^-(\alpha) L^+(\alpha) + \frac{e^{i\alpha} \dot{F}^+(b, \alpha)}{(k-\alpha)(k+\alpha) N^-(\alpha) N^+(\alpha)} \\ & = \frac{i\alpha}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_1(Z_m a)}{J_1(Z_m b)} \frac{1}{\delta_m^2 - \alpha^2} \frac{f_m}{Z_m} + e^{i\alpha} \frac{b}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_0(\xi_m)}{\alpha_m^2 - \alpha^2} [g_m - i\alpha h_m] \end{aligned} \quad (2.35)$$

ifadesini elde etmiş oluruz. (2.35)' de gözüken (+) ve (-) çeşitli faktörizasyon metodları ile elde edebiliriz.

2.3 Modifiye Wiener-Hopf Denkleminin Yaklaşık Çözümü

Wiener-Hopf denklemini çözmek için her şeyden önce $N(\alpha)$ ve $L(\alpha)$ çekirdek fonksiyonlarını Wiener-Hopf anlamında, yani

$$N(\alpha) = N^+(\alpha) N^-(\alpha) \quad (2.36a)$$

$$L(\alpha) = L^+(\alpha) L^-(\alpha) \quad (2.36b)$$

şeklinde çarpanlarına ayırıştırmak gerekir. Burada $N^+(\alpha), L^+(\alpha)$ ve $N^-(\alpha) = N^+(-\alpha), L^-(\alpha) = L^+(-\alpha)$ sırasıyla $\text{Im}(\alpha) > \text{Im}(-k)$ ve $\text{Im}(\alpha) < \text{Im}(k)$ yarı-düzlemlerinde regüler ve sıfırları olmayan fonksiyonlardır [26-28]. $N^+(\alpha)$ ve $L^+(\alpha)$ ' nin açık ifadeleri [Ek.B]

$$\begin{aligned} N^+(\alpha) &= \left[\pi i J_1(kb) H_1^{(1)}(kb) \right]^{1/2} \exp \left\{ i \frac{\alpha b}{\pi} \left[1 - C + \ln \left(\frac{2\pi}{kb} \right) + i \frac{\pi}{2} \right] - i \frac{kb}{2} \right\} \\ &\times \exp \left\{ \frac{K(\alpha) b}{\pi} \ln \left(\frac{\alpha + iK(\alpha)}{k} \right) + q_1(\alpha) \right\} \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{\alpha_m} \right) \exp \left(\frac{i\alpha b}{m\pi} \right) \end{aligned} \quad (2.36c)$$

$$L^+(\alpha) = \left[\frac{H_1^{(1)}(ka)}{\pi H_1^{(1)}(kb) [J_1(ka)Y_1(kb) - J_1(kb)Y_1(ka)]} \right]^{1/2} \\ \times \exp \left[\frac{ik(b-a)}{2} - \frac{(k^2 - \alpha^2)^{1/2}(b-a)}{\pi} \ln \frac{\alpha + i(k^2 - \alpha^2)^{1/2}}{k} + q_2(\alpha) - q_1(\alpha) \right] \\ \times \frac{1}{\prod_{m=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{\gamma_m}\right) e^{-\alpha/\gamma_m}} \exp \left(\frac{\alpha}{\pi i} (b-a) \left[1 - C + \ln \left(\frac{2\pi i}{k(b-a)} \right) \right] \right) \quad (2.36d)$$

şeklinde olup, burada $C = 0.57721\dots$ ile verilmiş Euler sabitini, $q_1(\alpha)$ ve $q_2(\alpha)$ 'da

$$q_1(\alpha) = \frac{1}{\pi} P \int_0^{\infty} \left[1 - \frac{2}{\pi x} \frac{1}{J_1^2(x) + Y_1^2(x)} \right] \ln \left(1 + \frac{\alpha b}{[(kb)^2 - x^2]^{1/2}} \right) dx \quad (2.36e)$$

$$q_2(\alpha) = \frac{1}{\pi} P \int_0^{\infty} \left[1 - \frac{2}{\pi x} \frac{1}{J_1^2(x) + Y_1^2(x)} \right] \ln \left(1 + \frac{\alpha a}{[ka]^2 - x^2]^{1/2}} \right) dx \quad (2.36f)$$

şeklindeki integraller ile tanımlanmış fonksiyonları göstermektedir. Bu ifadelerde gözükten P , $x = ka$ ve $x = kb$ tekilliklerindeki Cauchy asal değerini göstermektedir. Kendi regülerlik bölgelerinde $|\alpha| \rightarrow \infty$ yapıldığında

$$N^{\pm}(\alpha) \approx (\pm\alpha)^{-1/2} \quad (2.37a)$$

$$L^{\pm}(\alpha) \approx (\pm\alpha)^{1/2} \quad (2.37b)$$

olduğu kolayca gösterilebilir. $x = ka$ ve $x = kb$ 'daki logaritmik tekillikler "zayıf" tekillikler olduklarından (2.36e-f) 'deki integraller sayısal olarak kolayca hesaplanabilir.

(2.35) ifadesinin her iki tarafını $(k - \alpha)N^-(\alpha)e^{-i\alpha l}$ ile çarpılırsa;

$$-F_1(b, \alpha) \frac{b}{2} (k - \alpha)N^-(\alpha)e^{-i\alpha l} + \frac{\hat{F}^-(b, \alpha)N^-(\alpha)L^-(\alpha)L^+(\alpha)e^{-i\alpha l}}{(k + \alpha)} + \frac{\hat{F}^+(b, \alpha)}{(k + \alpha)N^+(\alpha)} \\ = \frac{i\alpha N^-(\alpha)(k - \alpha)e^{-i\alpha l}}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_1(Z_m a)}{J_1(Z_m b)} \frac{1}{\delta_m^2 - \alpha^2} \frac{f_m}{Z_m} \\ + \frac{b}{2} (k - \alpha)N^-(\alpha) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_0(\xi_m)}{\alpha_m^2 - \alpha^2} [g_m - i\alpha h_m] \quad (2.38)$$

elde edilir. Bu ifadeye gerekli dekompozisyon işlemlerinden sonra Liouville teoremi uygulanırsa;

$$\begin{aligned}
\frac{\dot{F}^+(b, \alpha)}{(k + \alpha)N^+(\alpha)} = & -\frac{1}{2\pi i} \int_{L^+} \frac{\dot{F}^-(b, \tau)N^-(\tau)L^-(\tau)L^+(\tau)e^{-i\tau d}}{(k + \tau)(\tau - \alpha)} d\tau \\
& + \underbrace{\frac{b}{4\pi i} \int_{L^+} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_0(\xi_m)}{\alpha_m^2 - \tau^2} [g_m - i\tau h_m] \frac{(k - \tau)N^-(\tau)}{(\tau - \alpha)} d\tau}_{E_1} \\
& + \underbrace{\frac{1}{2\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_1(Z_m a)}{J_1(Z_m b)} \frac{f_m}{Z_m} \int_{L^+} \tau N^-(\tau)(k - \tau) \frac{1}{\delta_m^2 - \tau^2} e^{-i\tau d} \frac{d\tau}{\tau - \alpha}}_{E_2}
\end{aligned} \tag{2.39a}$$

elde edilir. Benzer şekilde (2.35) ifadesinin her iki tarafını $(k + \alpha)/(L^+(\alpha))$ çarpıp Wiener-Hopf anlamında dekompoze edip, Liouville teoremi uygulanırsa;

$$\begin{aligned}
\frac{\dot{F}^-(b, \alpha)L^-(\alpha)}{(k - \alpha)} = & \frac{1}{2\pi i} \int_{L^-} \frac{\dot{F}^+(b, \tau)e^{i\tau d}}{(k - \tau)N^-(\tau)N^+(\tau)L^+(\tau)(\tau - \alpha)} d\tau \\
& - \underbrace{\frac{b}{4\pi i} \int_{L^-} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_0(\xi_m)}{\alpha_m^2 - \tau^2} [g_m - i\tau h_m] e^{i\tau d} \frac{(k + \tau)}{(\tau - \alpha)L^+(\tau)} d\tau}_{E_3} \\
& - \underbrace{\frac{1}{2\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_1(Z_m a)}{J_1(Z_m b)} \frac{f_m}{Z_m} \int_{L^-} \tau(k + \tau) \frac{1}{\delta_m^2 - \tau^2} \frac{1}{L^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - \alpha}}_{E_4}
\end{aligned} \tag{2.39b}$$

elde edilir.

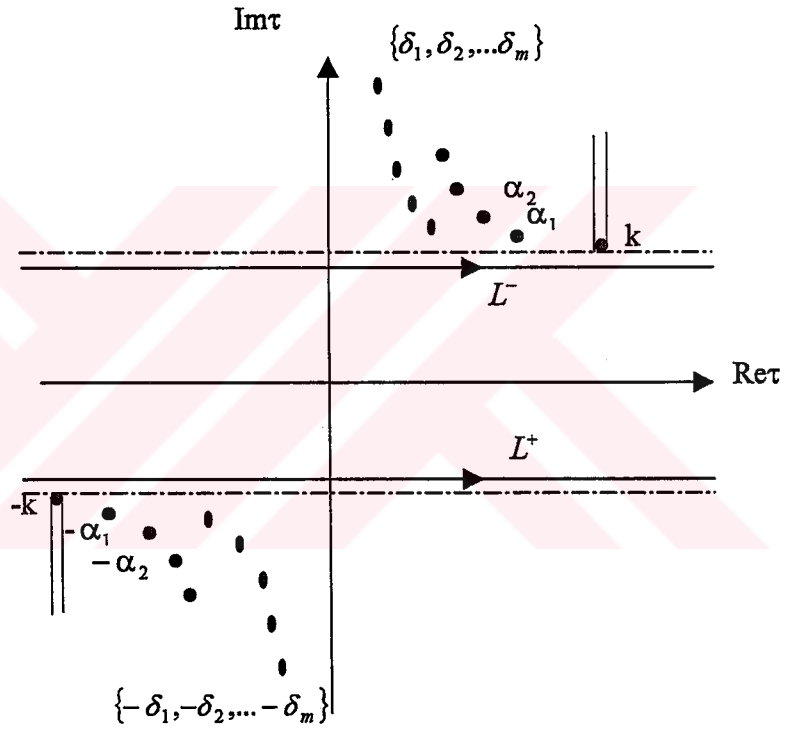
Bu aşamadan sonra (2.39a) ve (2.39b) denklemlerinden $\dot{F}^+(b, \alpha)$ ve $\dot{F}^-(b, \alpha)$ 'nin çözümleri elde edilmelidir. Bunun için bu ifadelerde $E_1, E_2, E_3,$ ve E_4 ile gösterilen kompleks integraller bilinen yöntemlerle çözülebilir

E_1 integralinin değeri, Jordan Lemması uyarınca, alt yarıdüzlemde $\tau = -\alpha_m$ noktalarında bulunan rezidülerin toplamıdır.

$$\begin{aligned}
E_1 &= \frac{b}{4\pi i} \int \sum_{L^+ m=0}^{\infty} \frac{J_0(\xi_m)}{\alpha_m^2 - \tau^2} [g_m - i\tau h_m] \frac{(k-\tau)N^-(\tau)}{(\tau-\alpha)} d\tau \\
&= \frac{b}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_0(\xi_m) [g_m + i\alpha_m h_m] (k+\alpha_m) N^+(\alpha_m)}{2\alpha_m (\alpha + \alpha_m)}
\end{aligned} \tag{2.40a}$$

Benzer şekilde E_2 integralinin değeri, $\tau = -\delta_m$ bulunan rezidülerin toplamı şeklinde yazılır. (şekil 2.3)

$$E_2 = -\frac{i}{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_1(Z_m a) f_m}{J_1(Z_m b) Z_m} \frac{k + \delta_m}{\delta_m + \alpha} N^+(\delta_m) e^{i\delta_m l} \tag{2.40b}$$



Şekil 2.3 Kompleks τ - düzlemi ve rezidüler

E_3 integralinin değeri , üst yarı düzlemde $\tau = \alpha_m$ noktalarında bulunan rezidülerin toplamı şeklinde yazılır.

$$\begin{aligned}
E_3 &= -\frac{b}{4\pi i} \int \sum_{L^+ m=0}^{\infty} \frac{J_0(\xi_m)}{\alpha_m^2 - \tau^2} [g_m - i\tau h_m] e^{i\tau l} \frac{(k+\tau)}{L^+(\tau)} d\tau = \\
&= -\frac{b}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_0(\xi_m) [g_m - i\alpha_m h_m] (k+\alpha_m) e^{i\alpha_m l}}{2\alpha_m (\alpha - \alpha_m) L^+(\alpha_m)}
\end{aligned} \tag{2.41a}$$

Yine benzer şekilde E_4 integralinin değeri üst yarı düzlemde $\tau = \delta_m$ bulunan rezidülerin toplamı şeklinde yazılır (Şekil 2.3)

$$E_4 = -\frac{i}{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_1(Z_m a)}{J_1(Z_m b)} \frac{f_m}{Z_m} \frac{k + \delta_m}{\delta_m - \alpha} \frac{1}{L^+(\delta_m)} \quad (2.41b)$$

(2.40a-b) ve (2.41a-b) ile elde ettiğimiz kompleks integrallerin değerleri (2.38a) ve (2.38b) denklemlerinin sırasıyla ,

$$\begin{aligned} \frac{\dot{F}^+(b, \alpha)}{(k + \alpha)N^+(\alpha)} &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{L^+} \frac{\dot{F}^-(b, \tau)N^-(\tau)L^-(\tau)L^+(\tau)e^{-i\alpha\tau}}{(k + \tau)(\tau - \alpha)} d\tau \\ &+ \frac{b}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_0(\xi_m)[g_m + i\alpha_m h_m]k + \alpha_m N^+(\alpha_m)}{2\alpha_m(\alpha + \alpha_m)} \\ &- \frac{i}{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} S_m \frac{k + \delta_m}{\delta_m + \alpha} N^+(\delta_m)e^{i\delta_m l} \end{aligned} \quad (2.42a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\dot{F}^-(b, \alpha)L^-(\alpha)}{(k - \alpha)} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{L^-} \frac{\dot{F}^+(b, \tau)e^{i\alpha\tau}}{(k - \tau)N^-(\tau)N^+(\tau)L^+(\tau)(\tau - \alpha)} d\tau \\ &- \frac{b}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_0(\xi_m)[g_m - i\alpha_m h_m]k + \alpha_m e^{i\alpha_m l}}{2\alpha_m(\alpha - \alpha_m)L^+(\alpha_m)} \\ &+ \frac{i}{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} S_m \frac{k + \delta_m}{\delta_m - \alpha} \frac{1}{L^+(\delta_m)} \end{aligned}$$

(2.42b)

yazılmasına olanak verir.

Burada

$$S_m = \frac{f_m J_1(Z_m a)}{Z_m J_1(Z_m b)} \quad (2.43)$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Böylece (2.34a)'daki modifiye Wiener-Hopf denklemi (2.42a) ve (2.42b) ile verilen bir Fredholm kuple integral denklem takımına indirgenmiştir. Bu integral denklemler, iterasyon tekniği ile çözülmeye elverişli yapıdadırlar.

kl yeterince büyük olduğunda, bu denklemlerin sağ tarafında gözükten serbest terimler birinci mertebeden çözümlere karşı gelirler. İkinci (üçüncü...) mertebe çözümler, birinci (ikinci,...)

mertebeden çözümleri (2.42a) ve (2.42b) denklemlerinin sağ taraflarında yerine konarak elde edilir ve,

$$\dot{F}^-(b, \alpha) = \dot{F}^{-(1)}(b, \alpha) + \dot{F}^{-(2)}(b, \alpha) + \dots \quad (2.44a)$$

$$\dot{F}^+(b, \alpha) = \dot{F}^{+(1)}(b, \alpha) + \dot{F}^{+(2)}(b, \alpha) + \dots \quad (2.44b)$$

yazılır. Birinci mertebe çözümler ilk ötelemeyle

$$\begin{aligned} \frac{\dot{F}^{+(1)}(b, \alpha)}{(k + \alpha)N^+(\alpha)} &= \frac{b}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_0(\xi_m) [g_m + i\alpha_m h_m] (k + \alpha_m) N^+(\alpha_m)}{2\alpha_m (\alpha + \alpha_m)} \\ &\quad - \frac{i}{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} S_m \frac{k + \delta_m}{\delta_m + \alpha} N^+(\delta_m) e^{i\delta_m l} \end{aligned} \quad (2.45a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\dot{F}^{-(1)}(b, \alpha)L^-(\alpha)}{(k - \alpha)} &= -\frac{b}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_0(\xi_m) [g_m - i\alpha_m h_m] (k + \alpha_m) e^{i\alpha_m l}}{2\alpha_m (\alpha - \alpha_m) L^+(\alpha_m)} \\ &\quad + \frac{i}{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} S_m \frac{k + \delta_m}{\delta_m - \alpha} \frac{1}{L^+(\delta_m)} \end{aligned} \quad (2.45b)$$

şeklinde olup , ikinci mertebe çözümler ise,

$$\begin{aligned} \frac{\dot{F}^{+(2)}(b, \alpha)}{(k + \alpha)N^+(\alpha)} &= -\frac{b}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_0(\xi_m) [g_m - i\alpha_m h_m] (k + \alpha_m) e^{i\alpha_m l}}{2\alpha_m L^+(\alpha_m)} I_1(\alpha) \\ &\quad + \frac{i}{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} S_m \frac{k + \delta_m}{L^+(\delta_m)} I_2(\alpha) \end{aligned} \quad (2.46a)$$

ve

$$\begin{aligned} \frac{\dot{F}^{-(2)}(b, \alpha)L^-(\alpha)}{(k - \alpha)} &= \frac{b}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_0(\xi_m) [g_m + i\alpha_m h_m] (k + \alpha_m) N^+(\alpha_m)}{2\alpha_m} I_3(\alpha) \\ &\quad - \frac{i}{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} S_m (k + \delta_m) N^+(\delta_m) e^{i\delta_m l} I_4(\alpha) \end{aligned} \quad (2.46b)$$

biçiminde elde edilir. Burada I_i $i=1,2,3$ gösterilen integral ifadeleri

$$I_1(\alpha) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{L^+} \frac{N^-(\tau)L(\tau)(k - \tau)e^{-i\tau l}}{(k + \tau)(\tau - \alpha_m)L^-(\tau)(\tau - \alpha)} d\tau \quad (2.46c)$$

$$I_2(\alpha) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{L^+} \frac{N^-(\tau)L(\tau)(k - \tau)e^{-i\tau l}}{L^-(\tau)(\delta_m - \tau)(k + \tau)(\tau - \alpha)} d\tau \quad (2.46d)$$

$$I_3(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{N^+(\tau)(k+\tau)e^{i\tau d}}{(k-\tau)N(\tau)L^+(\tau)(\tau+\alpha_m)(\tau-\alpha)} d\tau \quad (2.46e)$$

$$I_4(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{N^+(\tau)(k+\tau)e^{i\tau d}}{(k-\tau)N(\tau)L^+(\tau)(\delta_m+\tau)(\tau-\alpha)} d\tau \quad (2.46f)$$

gibidir. (2.46c,d) ile verilen integral ifadelerin çözümleri bilinen yöntemlerle çözülebilir.

Öncelikle

$$I_1(\alpha) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{L^+} \frac{N^-(\tau)L(\tau)(k-\tau)e^{-i\tau d}}{(k+\tau)(\tau-\alpha_m)L^-(\tau)(\tau-\alpha)} d\tau \quad (2.47a)$$

integralinin $kl \gg 1$ için asimtotik değerlendirmesi Jordan Lemması' na göre yapılırsa integrasyon çizgisi L^+ , $\tau = -k$ ' daki $C_1 + C_2 + C\epsilon$ kesim çizgilerine dönüşür. (Şekil 2.4). Bu dönüşüm sonucunda $M(\tau)$ 'nin $\tau = -\delta_n$ kutuplarından gelen rezidüler ve $C\epsilon$ çizgisi üzerindeki integral katkısı gözönünde bulundurularak,

$$I_{1res}(\alpha) = \frac{2k\pi b^2}{(a^2 - b^2)} \frac{N^+(k)e^{ikl}}{L^+(k)(k+\alpha)(k+\alpha_m)} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(k+\delta_n)N^+(\delta_n)H_1^1(Z_n a)e^{i\delta_n l}}{(k-\delta_n)H_1^1(Z_n b)L^+(\delta_n)(\delta_n+\alpha_m)(\delta_n+\alpha)M(-\delta_n)} \quad (2.47b)$$

$$Z_n = \sqrt{k^2 - (\delta_n)^2}$$

elde edilir.

C_1 ve C_2 kesim çizgileri üzerindeki integraller kompleks teorisinden bilinen yöntemlerle yapılabilir. Bessel fonksiyonlarının bilinen özelliklerinden

$$J_n(e^{i\pi} z) = e^{in\pi} J_n(z) \quad (2.47c)$$

$$H_n^{(1)}(e^{i\pi} z) = -e^{-in\pi} H_n^{(2)}(z) \quad (2.47d)$$

$$Y_n(e^{i\pi} z) = e^{-in\pi} Y_n(z) + 2i \sin(n\pi) \cot(n\pi) J_n(z) \quad (2.47e)$$

kullanarak,

$$I_{1bc}(\alpha) = -\frac{1}{2\pi i} \left[\int_{C_1} \frac{N^-(\tau)L(\tau)(k-\tau)e^{-i\tau d}}{(\tau-\alpha_m)L^-(\tau)(k+\tau)(\tau-\alpha)} d\tau + \int_{C_2} \frac{N^-(\tau)L(\tau)(k-\tau)e^{-i\tau d}}{(\tau-\alpha_m)L^-(\tau)(k+\tau)(\tau-\alpha)} d\tau \right] \quad (2.47f)$$

$$I_{1bc}(\alpha) = -\frac{1}{2i\pi^2} \int_{C_1} \frac{N^-(\tau)(k-\tau)e^{-i\tau l}}{(\tau-\alpha_m)L^-(\tau)(k+\tau)} \left[\frac{H_1^1(Ka)}{H_1^1(Kb)} - \frac{H_1^2(Ka)}{H_1^2(Kb)} \right] \frac{d\tau}{(\tau-\alpha)}$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \int_{C_1} \frac{N^-(\tau)(k-\tau)e^{-i\tau l}}{(k+\tau)L^-(\tau)(J_1^2(Kb) + Y_1^2(Kb))(\tau-\alpha_m)(\tau-\alpha)} d\tau$$
(2.47g)

yazabiliriz. C_1 kesim çizgisi üzerinde yazılmış bu integraller

$$k + \tau = te^{-i\pi/2}, \quad t > 0$$
(2.47h)

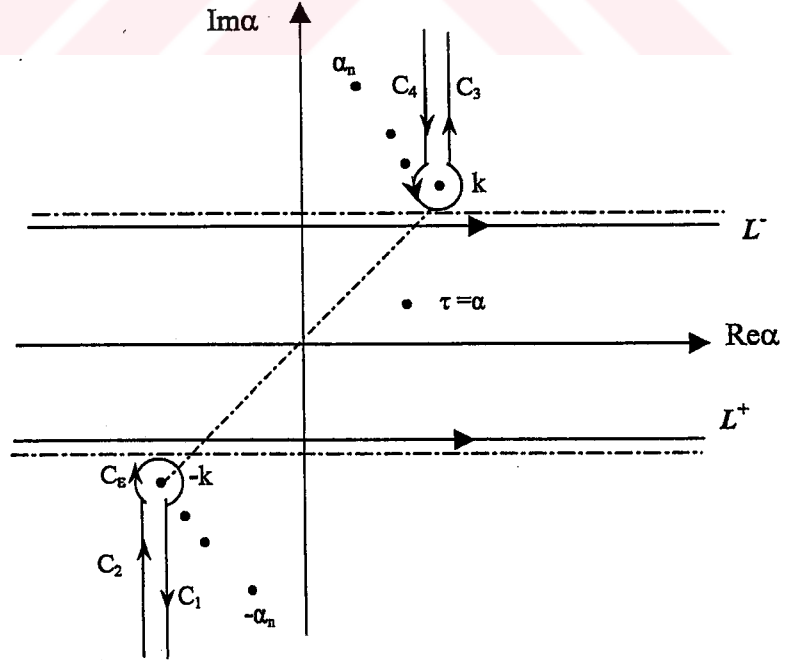
dönüşümü aracılığı ile pozitif reel eksen üzerinde yazılmış

$$I_{1bc}(\alpha) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty U(t) \frac{e^{-t}}{(-k-it-\alpha)} dt$$
(2.47i)

integraline dönüşür. Burada

$$U(t) = -\frac{N^+(k+it)e^{ikt}}{t(J_1^2(Kb) + Y_1^2(Kb))L^+(k+it)(k+it+\alpha_m)}$$
(2.47j)

şeklinde verildiği gibidir.



Şekil 2.4 Kompleks düzlemde kesim ve integrasyon çizgileri

kl oldukça büyük olduğundan bu integrale en büyük katkı $t = 0$ noktasından gelir. Bessel fonksiyonlarının asimtotik ifadelerinden;

$$J_1^2(z) + Y_1^2(z) \approx \frac{4}{\pi^2 z^2}, \quad |z| \rightarrow 0 \quad (2.47k)$$

kullanılarak integral,

$$I_{1bc}(\alpha) \approx -(kb)^2 \frac{N^+(k)}{L^+(k)(k+\alpha_m)} e^{ikl} W_{-1/2}(-il(\alpha+k)) \quad (2.47l)$$

şekline dönüşür. Burada

$$W_{-1/2}(-il(\alpha+k)) = \int_0^\infty \frac{\exp(-u)}{u - il(\alpha+k)} du \quad (2.47m)$$

verildiği gibidir. $W_{-1/2}(\zeta)$ fonksiyonu [30]' da verilen $W_{-1/2,0}(\zeta)$ Whittaker fonksiyonu ile arasındaki bağıntı;

$$W_{-1/2}(\zeta) = \exp(\zeta/2) \zeta^{-1/2} W_{-1/2,0}(\zeta) \quad (2.47n)$$

biçimindedir. Sonuç olarak $I_1(\alpha)$ integrali;

$$I_1(\alpha) = -(kb)^2 \frac{N^+(k)}{L^+(k)(k+\alpha_m)} e^{ikl} W_{-1/2}(-il(\alpha+k)) + \frac{2k\pi b^2}{(a^2 - b^2)} \frac{N^+(k) e^{ikl}}{L^+(k)(k+\alpha)(k+\alpha_m)} \quad (2.47o)$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(k+\delta_n) N^+(\delta_n) H_1^1(Z_n a) e^{i\delta_n l}}{(k-\delta_n) H_1^1(Z_n b) L^+(\delta_n)(\delta_n+\alpha_m)(\delta_n+\alpha) \dot{M}(-\delta_n)}$$

biçiminde elde edilir ve burada $\dot{M}(-\delta_n)$, $M(\tau)$ 'nin τ ' ya göre türevinin $\tau = -\delta_n$ ' deki değerini göstermektedir ve açık ifadesi

$$\dot{M}(\tau) = \frac{\tau}{K} \left\{ \begin{aligned} & a [J_1(Kb)Y_0(Ka) - J_0(Ka)Y_1(Kb)] + b [J_0(Kb)Y_1(Ka) - J_1(Ka)Y_0(Kb)] \\ & + \frac{2}{K} [J_1(Kb)Y_1(Ka) + J_1(Ka)Y_1(Kb)] \end{aligned} \right\} \quad (2.47p)$$

gibidir. $I_2(\alpha)$ integralinin asimtotik değerlendirilmeside benzer şekilde yapılarak,

$$I_2(\alpha) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{L^+} \frac{N^-(\tau) L(\tau)(k-\tau) e^{-i\tau l}}{L^-(\tau)(\delta_m - \tau)(k+\tau)} \frac{d\tau}{(\tau - \alpha)} = I_{2res}(\alpha) + I_{1bc}(\alpha) \quad (2.48a)$$

$$I_2(\alpha) = (kb)^2 \frac{N^+(k)}{L^+(k)} \frac{e^{ikl}}{(k + \delta_n)} W_{-1/2}(-il(\alpha + k)) - \frac{2k\pi b^2}{(a^2 - b^2)} \frac{N^+(k)e^{ikl}}{L^+(k)(k + \alpha)(k + \delta_m)} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(k + \delta_n)N^+(\delta_n)H_1^1(Z_n a)e^{i\delta_n l}}{(\delta_m + \delta_n)(k - \delta_n)H_1^1(Z_n b)L^+(\delta_n)(\delta_n + \alpha)M(-\delta_n)} \quad (2.48b)$$

ifadeleri elde edilir. L^- integrasyon çizgisi üzerinde yazılmış integrallerde benzer şekilde hesaplanabilir. $I_3(\alpha)$ integrali

$$I_3(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{N^+(\tau)(k + \tau)e^{i\tau l}}{(k - \tau)N(\tau)L^+(\tau)(\tau + \alpha_m)(\tau - \alpha)} d\tau = I_{3bc}(\alpha) + I_{3res}(\alpha) \quad (2.49)$$

kesim çizgisi ve rezidü katkılarından oluşan iki ayrı şekilde hesaplanabilir. Bu integraldeki integrasyon çizgisi L^- Jordan Lemması' na göre kesim çizgisi integralleri $C_3 + C_4$ toplamına eşit olur. Bu dönüşüm sonucunda $J_1(Kb)$ 'nin $\tau = \alpha_m$ kutuplarından gelen rezidülerin katkısı gözönünde bulundurularak,

$$I_{3res}(\alpha) = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{N^+(\alpha_n)(k + \alpha_n)^2 e^{i\alpha_n l}}{\alpha_n(\alpha - \alpha_n)(\alpha_n + \alpha_m)L^+(\alpha_n)}, \quad (2.50a)$$

Kesim çizgisi integrali Bessel fonksiyonlarının (2.47c-e) ile verilen özelliklerinden,

$$I_{3bc}(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{C_3} \frac{N^+(\tau)(k + \tau)e^{i\tau l}}{(k - \tau)\pi i J_1(Kb)H_1^1(Kb)L^+(\tau)(\tau + \alpha_m)(\tau - \alpha)} + \int_{C_4} \frac{N^+(\tau)(k + \tau)e^{i\tau l}}{(k - \tau)\pi i [-J_1(Kb)H_1^2(Kb)](\tau + \alpha_m)L^+(\tau)(\tau - \alpha)} \right] \quad (2.50b)$$

$$I_{3bc}(\alpha) = -\frac{1}{\pi^2} \int_{C_3} \frac{N^+(\tau)(k + \tau)e^{i\tau l}}{(k - \tau)L^+(\tau)(J_1^2(Kb) + Y_1^2(Kb))(\tau + \alpha_m)(\tau - \alpha)} \quad (2.50c)$$

gibi yazılır. C_3 kesim çizgisi üzerinde yazılmış bu integral

$$k - \tau = -te^{i\pi/2}, \quad t < 0 \quad (2.50d)$$

dönüşümü aracılığıyla

$$I_{3bc}(\alpha) = -\frac{1}{\pi^2} \int_0^{\infty} Y(t) \frac{e^{-t}}{(k+it-\alpha)} dt \quad (2.50e)$$

integraline dönüştür. Burada

$$Y(t) = -\frac{N^+(k+it)(2k+it)}{t(J_1^2(Kb) + Y_1^2(Kb)L^+(k+it)(k+it+\alpha_m))} \quad (2.50f)$$

şeklinde verildiği gibidir.

kl oldukça büyük olduğundan yukardaki integrale en büyük katkı $t=0$ noktasından gelir. Bessel fonksiyonlarının asimtotik ifadelerinden;

$$J_1^2(z) + Y_1^2(z) \approx \frac{4}{\pi^2 z^2}, \quad |z| \rightarrow 0 \quad (2.50g)$$

kullanılarak integral,

$$I_{3bc}(\alpha) \approx (kb)^2 \frac{N^+(k)}{L^+(k)(k+\alpha_m)} e^{ikl} W_{-1/2}(il(\alpha-k)) \quad (2.50h)$$

şeklinde çözülmüş olur. Burada

$$W_{-1/2}(il(\alpha-k)) = \int_0^{\infty} \frac{\exp(-u)}{u + il(\alpha-k)} du \quad (2.50i)$$

dir. Sonuç olarak $I_3(\alpha)$, $I_4(\alpha)$ integralleri sırasıyla,

$$I_3(\alpha) \approx (kb)^2 \frac{N^+(k)}{L^+(k)(\alpha_m+k)} e^{ikl} W_{-1/2}(il(\alpha-k)) - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{N^+(\alpha_n)(k+\alpha_n)^2 e^{i\alpha_n l}}{\alpha_n(\alpha-\alpha_n)(\alpha_n+\alpha_m)L^+(\alpha_n)} \quad (2.51)$$

$$I_4(\alpha) = (kb)^2 \frac{N^+(k)}{L^+(k)(\delta_m+k)} e^{ikl} W_{-1/2}(il(\alpha-k)) - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{N^+(\alpha_n)(k+\alpha_n)^2 e^{i\alpha_n l}}{\alpha_n(\alpha-\alpha_n)(\delta_n+\delta_m)L^+(\alpha_n)} \quad (2.52)$$

şeklinde hesaplanır.

(2.42a,b) denklem sisteminin yaklaşık çözümü (2.47o), (2.48b), (2.51) ve (2.52) ile hesaplanmış integraller ile birlikte düşünülürse

$$\begin{aligned}
\frac{\dot{F}^+(b, \alpha)}{(k + \alpha)N^+(\alpha)} &= -\frac{b}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_0(\xi_m) [g_m - i\alpha_m h_m] (k + \alpha_m) e^{i\alpha_m l}}{2\alpha_m L^+(\alpha_m)} \left\{ (kb)^2 \frac{N^+(k)}{L^+(k)(k + \alpha_m)} e^{ikl} \mathcal{W}_{-1/2}(-il(\alpha + k)) \right. \\
&+ \frac{2k\pi b^2}{(a^2 - b^2)} \frac{N^+(k) e^{ikl}}{L^+(k)(k + \alpha)(k + \alpha_m)} + \left. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(k + \delta_n) N^+(\delta_n) H_1^1(Z_n a) e^{i\delta_n l}}{(k - \delta_n) H_1^1(Z_n b) L^+(\delta_n)(\delta_n + \alpha_m)(\delta_n + \alpha) \dot{M}(-\delta_n)} \right\} \\
&+ \frac{i}{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} S_m \frac{k + \delta_m}{L^+(\delta_m)} \left\{ (kb)^2 \frac{N^+(k)}{L^+(k)(k + \delta_n)} e^{ikl} \mathcal{W}_{-1/2}(-il(\alpha + k)) - \frac{2k\pi b^2}{(a^2 - b^2)} \frac{N^+(k) e^{ikl}}{L^+(k)(k + \alpha)(k + \delta_m)} \right. \\
&- \left. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(k + \delta_n) N^+(\delta_n) H_1^1(Z_n a) e^{i\delta_n l}}{(\delta_m + \delta_n)(k - \delta_n) H_1^1(Z_n b) L^+(\delta_n)(\delta_n + \alpha) \dot{M}(-\delta_n)} \right\} \\
&+ \frac{b}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_0(\xi_m) [g_m + i\alpha_m h_m] (k + \alpha_m) N^+(\alpha_m)}{2\alpha_m (\alpha + \alpha_m)} - \frac{i}{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} S_m \frac{k + \delta_m}{\delta_m + \alpha} N^+(\delta_m) e^{i\delta_m l}
\end{aligned} \tag{2.53a}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\dot{F}^-(b, \alpha) L^-(\alpha)}{(k - \alpha)} &= \frac{b}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_0(\xi_m) [g_m + i\alpha_m h_m] (k + \alpha_m) N^+(\alpha_m)}{2\alpha_m} \times \left\{ (kb)^2 \frac{N^+(k)}{L^+(k)(\alpha_m + k)} \right. \\
&\times \left. e^{ikl} \mathcal{W}_{-1/2}(il(\alpha - k)) - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{N^+(\alpha_n)(k + \alpha_n)^2 e^{i\alpha_n l}}{\alpha_n (\alpha - \alpha_n)(\alpha_n + \alpha_m) L^+(\alpha_n)} \right\} - \frac{i}{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} S_m (k + \delta_m) N^+(\delta_m) e^{i\delta_m l} \times \\
&\left\{ (kb)^2 \frac{N^+(k)}{L^+(k)(\delta_m + k)} e^{ikl} \mathcal{W}_{-1/2}(il(\alpha - k)) - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{N^+(\alpha_n)(k + \alpha_n)^2 e^{i\alpha_n l}}{\alpha_n (\alpha - \alpha_n)(\delta_n + \delta_m) L^+(\alpha_n)} \right\} \\
&- \frac{b}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_0(\xi_m) [g_m - i\alpha_m h_m] (k + \alpha_m) e^{i\alpha_m l}}{2\alpha_m (\alpha - \alpha_m) L^+(\alpha_m)} + \frac{i}{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} S_m \frac{k + \delta_m}{\delta_m - \alpha} \frac{1}{L^+(\delta_m)}
\end{aligned} \tag{2.53b}$$

şeklindedir.

2.4 Dalgakılavuzu ve Açıklık Bölgedeki Alan İfadesi

$0 < \rho < a$ ve $z < 0$ bölgesinde saçılan alan $u_3(\rho, z)$ silindirik koordinatlarda yazılmış Helmholtz denklemini

$$\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) u_3(\rho, z) = 0 \quad (2.54)$$

sağlar. Alanın çözümü

$$u_3(\rho, z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-i\beta_n z} J_0\left(\xi_n \frac{\rho}{a}\right) \quad (2.55a)$$

şeklindedir, burada β_n ,

$$\beta_n = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\xi_n}{a}\right)^2} \quad (2.55b)$$

biçiminde tanımlanır. (2.55a,b)'deki ξ_n 'ler (2.3c) uyarınca yazılan

$$J_1(\xi_n) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.55c)$$

birinci dereceden Bessel fonksiyonlarının kökleridir.

Benzer şekilde $0 < \rho < b$ ve $0 < z < l$ bölgesinde saçılan alan $u_4(\rho, z)$ silindirik koordinatlarda yazılmış Helmholtz denklemini

$$\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) u_4(\rho, z) = 0 \quad (2.56)$$

sağlar. Bu denklemin çözümü,

$$u_4(\rho, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(b_n e^{i\alpha_n z} + c_n e^{-i\alpha_n z} \right) J_0 \left(\xi_n \frac{\rho}{b} \right) \quad (2.57a)$$

gibidir, burada α_n ,

$$\alpha_n = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\xi_n}{b} \right)^2} \quad (2.57b)$$

şeklinde ifade edilir. (2.57a,b)'deki ξ_n 'ler (2.3d) uyarınca yazılan

$$J_1(\xi_n) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \quad (2.57c)$$

birinci dereceden Bessel fonksiyonlarının sıfırlarıdır. (2.3j-m) sınır koşulları (2.12c-e) ile birlikte düşündürülürse,

$$\frac{\partial}{\partial z} u_4(\rho, 0) = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial z} u_3(\rho, 0) + \frac{\partial}{\partial z} u^i(\rho, 0), & \rho \in (0, a) \\ 0, & \rho \in (a, b) \end{cases} \quad (2.58a)$$

$$u_4(\rho, 0) = u_3(\rho, 0) + u^i(\rho, 0); \quad \rho \in (0, a) \quad (2.58b)$$

$$\frac{\partial u_4}{\partial z}(\rho, l) = g(\rho); \quad \rho \in (0, b) \quad (2.58c)$$

$$u_4(\rho, l) = h(\rho); \quad \rho \in (0, b) \quad (2.58d)$$

yazılır. Burada $g(\rho)$ ve $h(\rho)$ Dini serisine açılmış ifadeleri,

$$g(\rho) = \sum_{m=0}^{\infty} g_m J_0 \left(\xi_m \frac{\rho}{b} \right) \quad (2.59a)$$

$$h(\rho) = \sum_{m=0}^{\infty} h_m J_0 \left(\xi_m \frac{\rho}{b} \right) \quad (2.59b)$$

göstermek üzere, $u_3(\rho, z)$ ve $u_4(\rho, z)$ 'ün (2.55a) ve (2.57a) ile verilen seri ifadeleri yerine yazılırsa sırasıyla;

$$-\sum_{n=0}^{\infty} i\alpha_n [b_n - c_n] Y_0(\xi_n \frac{\rho}{b}) = \begin{cases} \sum_{m=0}^{\infty} i\beta_m a_m J_0(\xi_m \frac{\rho}{a}) - ik, & \rho \in (0, a) \\ 0, & \rho \in (a, b) \end{cases} \quad (2.60a)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} [b_n + c_n] Y_0(\xi_n \frac{\rho}{b}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n J_0(\xi_n \frac{\rho}{a}) + 1, \quad \rho \in (0, a) \quad (2.60b)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} i\alpha_n [b_n e^{j\alpha_n l} - c_n e^{-j\alpha_n l}] J_0(\xi_n \frac{\rho}{b}) = \sum_{m=0}^{\infty} g_m J_0(\xi_m \frac{\rho}{b}) \quad (2.60c)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} [b_n e^{j\alpha_n l} + c_n e^{-j\alpha_n l}] J_0(\xi_n \frac{\rho}{b}) = \sum_{m=0}^{\infty} h_m J_0(\xi_m \frac{\rho}{b}) \quad (2.60d)$$

denklemleri elde edilir. (2.60a), (2.60c) ve (2.60d)' nin her iki tarafını $\rho J_0(\xi_l \frac{\rho}{b})$, $l=0,1,2,..$ ile çarpıp $\rho = 0$ ' dan $\rho = b$ ' ye ve (2.60b) ifadesinin her iki tarafını $\rho J_0(\xi_l \frac{\rho}{a})$, $l=0,1,2,..$ çarpıp $\rho = 0$ ' dan $\rho = a$ ' ya kadar entegre edersek;

$$\int_0^b \sum_{n=0}^{\infty} i\alpha_n [b_n - c_n] Y_0(\xi_n \frac{\rho}{b}) J_0(\xi_l \frac{\rho}{b}) \rho d\rho = \begin{cases} -\sum_{m=0}^{\infty} \int_0^b [i\beta_m a_m J_0(\xi_m \frac{\rho}{a}) J_0(\xi_l \frac{\rho}{b}) + ik J_0(\xi_n \frac{\rho}{b})] \rho d\rho, & \rho \in (0, a) \\ 0, & \rho \in (a, b) \end{cases} \quad (2.61a)$$

$l=0$ halinde,

$$\alpha_0 (b_0 - c_0) \frac{b^2}{2} = k \frac{a^2}{2} (1 - a_0) \quad n=0 \quad (2.61b)$$

$l=n$ halinde ,

$$\alpha_n (b_n - c_n) \frac{b^2}{2} J_0^2(\xi_n) = -\frac{a}{b} \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m a_m \frac{\xi_n}{(\xi_n/b)^2 - (\xi_m/a)^2} \left[J_0(\xi_m) J_1\left(\frac{\xi_n}{b} a\right) \right] + \frac{kba}{\xi_n} J_1\left(\frac{\xi_n}{b} a\right) \quad n=1,2,.. \quad (2.61c)$$

(2.60c)' den $l=m$ halinde,

$$g_m = i\alpha_m [b_m e^{j\alpha_m l} - c_m e^{-j\alpha_m l}], \quad m = 0,1,2,.. \quad (2.62a)$$

$$h_m = b_m e^{j\alpha_m l} + c_m e^{-j\alpha_m l}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (2.62b)$$

(2.60b)' den

$$a_0 = (b_0 - c_0) + \sum_{n=1}^{\infty} (b_n + c_n) \frac{2b}{a\xi_n} J_1\left(\frac{\xi_n}{b} a\right) - 1, \quad m=0 \quad (2.63a)$$

ve

$$a_m = \frac{2}{abJ_0(\xi_m)} \sum_{n=1}^{\infty} (b_n + c_n) \frac{\xi_n}{(\xi_n/b)^2 - (\xi_m/a)^2} J_1\left(\frac{\xi_n}{b} a\right) \quad m=1, 2, \dots \quad (2.63b)$$

elde edilir.

Yukarıdaki ifadeler düzenlenirse;

$$g_m - i\alpha_m h_m = -2i\alpha_m c_m e^{-i\alpha_m l} \quad (2.64a)$$

$$g_m + i\alpha_m h_m = 2i\alpha_m b_m e^{i\alpha_m l} \quad (2.64b)$$

(2.63a-b)' ü (2.61b) ile birlikte düşünerek;

$$k(a^2 + b^2)b_0 - k(b^2 - a^2)c_0 + 2kab \sum_{n=1}^{\infty} (b_n + c_n) \frac{J_1\left(\frac{\xi_n a}{b}\right)}{\xi_n} = 2ka^2 \quad r=0 \quad (2.64c)$$

$$\begin{aligned} \alpha_r (b_r - c_r) \frac{b^2}{2} J_0^2(\xi_r) + \frac{2}{b^2} \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \frac{(b_m + c_m) \xi_m J_1\left(\frac{\xi_m}{b} a\right)}{\xi_r \xi_m} \right. \\ \left. \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n \xi_r J_1\left(\frac{\xi_r}{b} a\right)}{\left\{ (\xi_r/b)^2 - (\xi_n/a)^2 \right\} \left\{ (\xi_m/b)^2 - (\xi_n/a)^2 \right\}} \right\} \\ + \frac{kba}{\xi_r} J_1\left(\frac{\xi_r}{b} a\right) [b_0 + c_0] + 2kb^2 \sum_{m=1}^{\infty} (b_m + c_m) \frac{J_1\left(\frac{\xi_m}{b} a\right) J_1\left(\frac{\xi_r}{b} a\right)}{\xi_m \xi_r} \\ = \frac{2kba}{\xi_r} J_1\left(\frac{\xi_r}{b} a\right) \quad r=1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (2.64d)$$

denklem takımı elde edilmiş olur.

$\hat{F}^+(b, \alpha)$ ve $\hat{F}^-(b, \alpha)$ 'nin yaklaşık çözümünü bulmak için, büyük argümanlarda $W_{-1/2}(\zeta)$ fonksiyonun asimtotik davranışı

$$W_{-1/2}(\zeta) \approx \frac{1}{\zeta} \quad (2.65)$$

şeklinde almak mümkün olacaktır. (2.53a)' da $\alpha = k, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ ve (2.53b)' de $\alpha = -\delta_1, -\delta_2, -\delta_3, \dots, -\delta_N$ değerleri ve (2.64c,d) ile birlikte $3(N+1)$ denklem elde ederiz. Bu denklemlerdeki bilinmeyen sayımız da $3(N+1)$ dir. Bu denklemlerin çözümünden $\dot{F}^+(b, k), \dot{F}^+(b, \alpha_1), \dot{F}^+(b, \alpha_2), \dots$ ve $\dot{F}^-(b, -\delta_1), \dot{F}^-(b, -\delta_2), \dot{F}^-(b, -\delta_3), \dots$ elde edilir.

(2.33f-h) kullanılarak;

$$\frac{\dot{F}^+(b, \alpha_r)}{(k + \alpha_r)N(\alpha_r)} = \frac{b}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_0(\xi_m)(k + \alpha_m)}{2\alpha_m} \left\{ \frac{(g_m + i\alpha_m h_m)N^+(\alpha_m)}{(\alpha_r + \alpha_m)} - \frac{(g_m - i\alpha_m h_m)e^{i\alpha_m l}}{L^+(\alpha_m)} A_{rm} \right\} \\ - \frac{i}{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} S_m(k + \delta_m) \left\{ \frac{-B_{rm}}{L^+(\delta_m)} + \frac{N^+(\delta_m)e^{i\delta_m l}}{(\delta_m + \alpha_r)} \right\} \quad (2.66a)$$

$$\frac{\dot{F}^-(b, -\delta_r)L^-(-\delta_r)}{(k + \delta_r)} = \frac{b}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_0(\xi_m)(k + \alpha_m)}{2\alpha_m} \left\{ (g_m + i\alpha_m h_m)N^+(\alpha_m)C_{rm} + \frac{(g_m - i\alpha_m h_m)e^{i\alpha_m l}}{(\delta_m + \delta_r)L^+(\alpha_m)} \right\} \\ - \frac{i}{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} S_m(k + \delta_m) \left\{ N^+(\delta_m)e^{i\delta_m l} - \frac{1}{L^+(\delta_m)(\delta_m + \delta_r)} \right\} \quad (2.66b)$$

burada;

$$A_{rm} = \left\{ -(kb)^2 \frac{N^+(k)}{L^+(k)(k + \alpha_m)} e^{ikl} W_{-1/2}(-il(\alpha_r + k)) + \frac{2k\pi b^2}{(a^2 - b^2)} \frac{N^+(k)e^{ikl}}{L^+(k)(k + \alpha_r)(k + \alpha_m)} \right. \\ \left. + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(k + \delta_n)N^+(\delta_n)H_1^1(Z_n a)e^{i\delta_n l}}{(k - \delta_n)H_1^1(Z_n b)L^+(\delta_n)(\delta_n + \alpha_m)(\delta_n + \alpha_r)\dot{M}(-\delta_n)} \right\} \quad (2.66c)$$

$$B_{rm} = \left\{ (kb)^2 \frac{N^+(k)}{L^+(k)} \frac{e^{ikl}}{(k + \delta_n)} W_{-1/2}(-il(\alpha_r + k)) - \frac{2k\pi b^2}{(a^2 - b^2)} \frac{N^+(k)e^{ikl}}{L^+(k)(k + \alpha_r)(k + \delta_m)} \right. \\ \left. - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(k + \delta_n)N^+(\delta_n)H_1^1(Z_n a)e^{i\delta_n l}}{(\delta_m + \delta_n)(k - \delta_n)H_1^1(Z_n b)L^+(\delta_n)(\delta_n + \alpha_r)\dot{M}(-\delta_n)} \right\}$$

(2.66d)

$$C_{rm} = \left\{ (kb)^2 \frac{N^+(k)}{L^+(k)(\alpha_m + k)} e^{ikl} W_{-1/2}(-il(\delta_r + k)) + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{N^+(\alpha_n)(k + \alpha_n)^2 e^{i\alpha_n l}}{\alpha_n(\delta_r + \alpha_n)(\alpha_n + \alpha_m)L^+(\alpha_n)} \right\}$$

(2.66e)

$$D_{rm} = \left\{ (kb)^2 \frac{N^+(k)}{L^+(k)(\delta_m + k)} e^{ikl} W_{-1/2}(-il(\delta_r + k)) + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{N^+(\alpha_n)(k + \alpha_n)^2 e^{i\alpha_n l}}{\alpha_n(\delta_r + \alpha_n)(\delta_n + \delta_m)L^+(\alpha_n)} \right\}$$

(2.66f)

burada $\dot{F}^+(b, \alpha_r)$ ve $\dot{F}^-(b, \alpha_r)$, (2.33f) ve (2.33g)' de

$$\dot{F}^+(b, \alpha_r) = -\frac{b}{2} J_0(\xi_r)(g_r - i\alpha_r h_r) \quad (2.66g)$$

$$\dot{F}^-(b, -\delta_r) = \frac{i\delta_r}{\pi Z_r} \frac{J_1^2(Z_r, b) - J_1^2(Z_r, a)}{J_1(Z_r, a)J_1(Z_r, b)} f_r \quad (2.66h)$$

ifadelerinden elde edilir. (2.64a-b) ifadeleri, (2.64c-d) ve (2.66a-b) ifadeleri ile birlikte düşünülürse, b_n, c_n ve f_n katsayılarına ilişkin üç bilinmeyenli üç denklem elde edilmiş olur. Bu katsayılar Gauss-Elimination metodu kullanılarak Bölüm 4' te nümerik olarak elde edilecektir.

3. IŞINAN ALANIN ANALİZİ

$\rho > b$ bölgesinde toplan alan $F(\rho, \alpha)$ 'nın ters Fourier dönüşümü yardımıyla bulunur. (2.5a) ve (2.10) ifadelerinden

$$u_1(\rho, z) = -\frac{1}{2\pi} \int_L \frac{H_0^{(1)}(K\rho)}{K(\alpha)H_1^{(1)}(Kb)} \left[\dot{F}^-(b, \alpha) + e^{i\alpha l} \dot{F}^+(b, \alpha) \right] e^{-i\alpha z} d\alpha \quad (3.1)$$

yazılır. Burada L reel α -eksenine paralel ve $\text{Im}(-k) < \text{Im}(\alpha) < \text{Im}(k)$ bandında bir çizgiyi göstermektedir. $H_0^{(1)}(K\rho)$ 'nun $k\rho \rightarrow \infty$ iken geçerli asimtotik ifadesi

$$H_0^{(1)}(K\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi K\rho}} e^{i(K\rho - \pi/4)} \quad (3.2)$$

kullanılarak ve

$$\rho = r_1 \sin \theta_1 \quad z = r_1 \cos \theta_1 \quad (3.3a)$$

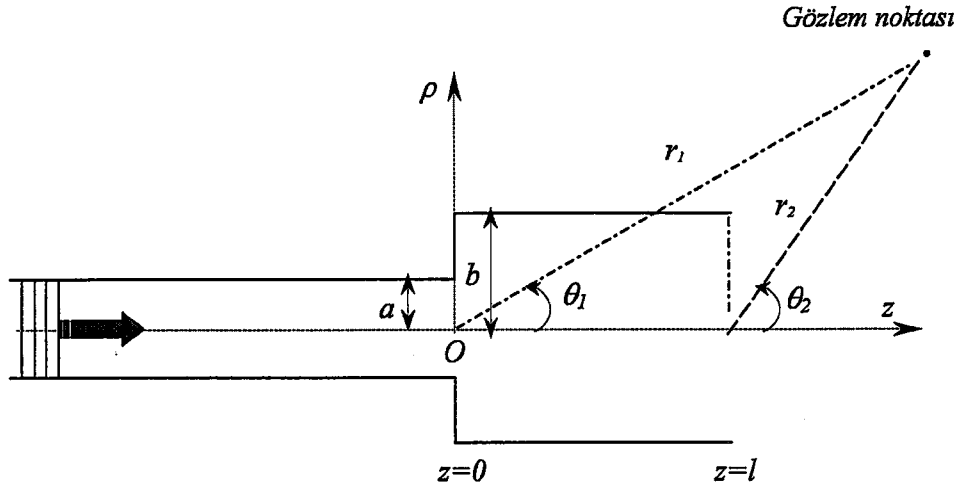
$$\rho = r_2 \sin \theta_2 \quad z - l = r_2 \cos \theta_2 \quad (3.3b)$$

$$\alpha = -k \cos t \quad (3.3c)$$

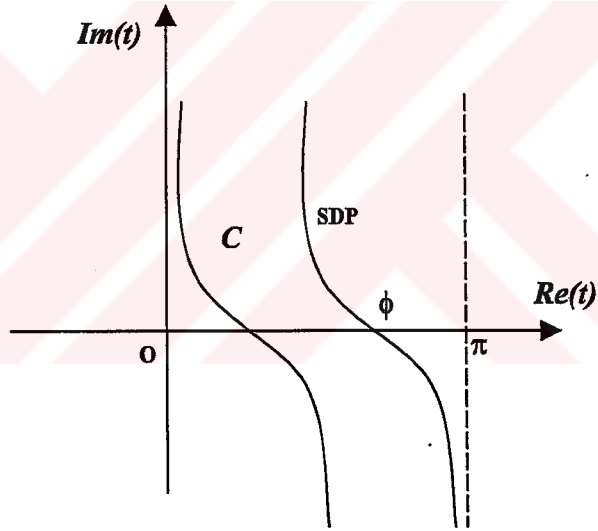
dönüşümleri yapılacak olursa (3.1)'de gözükten integrasyon çizgisi Şekil 3.2'de gözükten C eğrisine dönüştür ve En dik İniş çizgisi Yöntemi (*saddle point*) kullanılarak ışınalan alan ifadesi ara işlemler gözardı edilerek

$$u_1(\rho, z) = \frac{i}{\pi} \left\{ \frac{e^{ikr_1}}{kr_1 \sin \theta_1 H_1^{(1)}(kb \sin \theta_1)} \dot{F}^+(b, -k \cos \theta_1) + \frac{e^{ikr_2}}{kr_2 \sin \theta_2 H_1^{(1)}(kb \sin \theta_2)} \dot{F}^-(b, -k \cos \theta_2) \right\} \quad (3.4)$$

hesaplanmış olur. Burada r ve θ küresel koordinatları göstermektedir (Şekil 3.1)



Şekil 3.1 Küresel koordinatlar ve gözlem noktası



Şekil 3.2 Kompleks t düzlemi

4. SAYISAL UYGULAMALAR

Bu bölümde üçüncü bölümde elde edilen ışınan alana ait analitik ifadelerin nümerik çözümleri yapılmıştır. Silindirik horn yapısının skaler dalga yayınımına etkisini ortaya çıkarmak için , toplam ışınan alanın $(20 \log|\mu_1 \times kr|)$ ve normalize ışınan alanın gözlem açısına göre değişimini gösteren bazı sonuçlar verilmiştir.

Sayısal sonuçları elde edebilmek için, (2.24b) ve (2.25a) ile verilmiş denklemlerin ξ_m ve Z_m ile gösterilen köklerinin sayısal değerlerini belirlememiz gerekir. Bu bölümdeki tüm hesaplamalar için $\text{Im}(k) = 0$ olduğu varsayılmıştır.

ξ_m 'ler,

$$J_1(x) = 0 \quad (4.1)$$

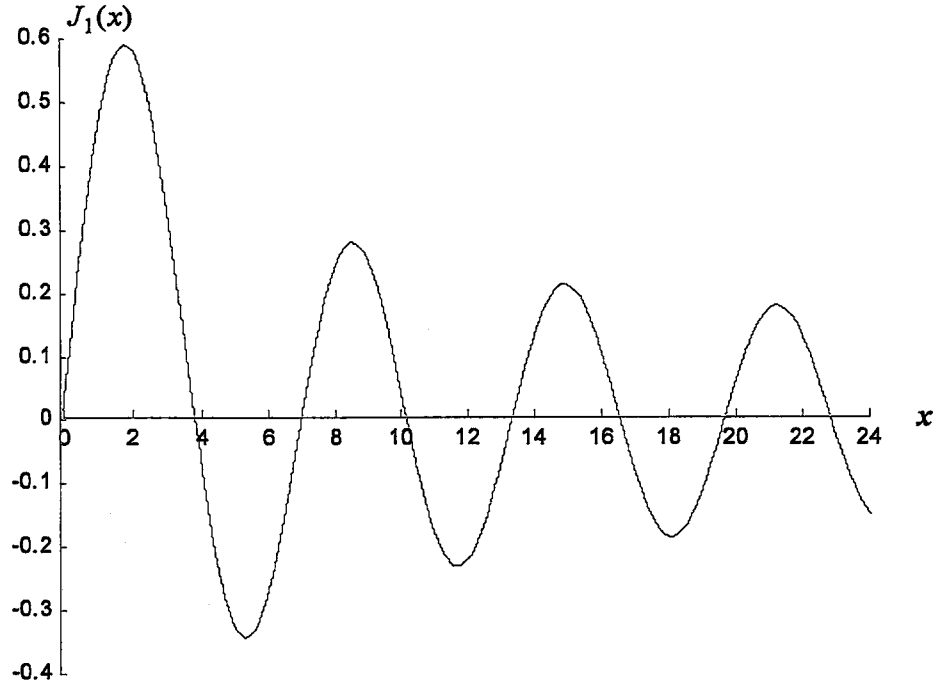
fonksiyonunun kökleri olmak üzere bu köklerin ilk 20 adedi aşağıda verildiği gibidir (Şekil 4.1)

0.00000	3.83171	7.01559	10.17347	13.32369
16.47063	19.61586	22.76008	25.90363	29.04683
32.18968	35.33231	38.47477	41.161709	44.75932
47.90146	51.04354	54.18555	57.32753	60.46946

δ_m 'ler

$$J_1(\sqrt{k^2 - \delta_m^2} a) Y_1(\sqrt{k^2 - \delta_m^2} b) - J_1(\sqrt{k^2 - \delta_m^2} b) Y_1(\sqrt{k^2 - \delta_m^2} a) = 0 \quad (4.2)$$

denkleminin kökleri ile belirlenir. Değişik metodlarla (Müller, Newton..) bu denklemin köklerinin saf sanal olduğu tespit edilmiştir.



Şekil 4.1 $J_1(x)$ fonksiyonu

Bu köklerden ilk 20 adedi $a=1.5$, $b=2$ için aşağıdaki gibidir.

6.22296i	12.5365i	18.8296i	25.1178i	31.4040i
37.6892i	43.9738i	50.258i	56.542i	62.8259i
69.1096i	75.3932i	81.6768i	87.9603i	94.2438i
100.527i	106.811i	113.094i	119.377i	125.661i

Reel köklerin bulunmasında, bir ilk değer ataması yapılmış ve bu değer ufak bir miktar ötelenip oluşan aralıkta bir kök olup olmadığı kontrol edilmiştir. Kökün sıfırı kestiği nokta olduğu düşünülürse fonksiyonunun bu noktaya yaklaşan iki değer çarpımının negatif olduğu nokta “fonksiyonu sıfır yapan nokta” olarak alınmıştır. Bu artım bir döngü içinde yapılmış ve istenilen miktarda kök bulunmasını sağlayan program MATLAB ve C++’ da yapılmıştır. Bu metod literatürde *bisection* metodu olarak da bilinmektedir.

Faktörizesi yapılmış $N(\alpha)$ ve $L(\alpha)$ fonksiyonlarından çıkan $N^+(\alpha), L^+(\alpha)$ fonksiyonuna ait ifadelerde gözükten integrale ilişkin Cauch asal değeri Simpson Metodu ile bulunmuş ve sonucun doğruluğu herhangi bir $\alpha = \alpha_b$ değeri için

$$N^+(\alpha) = N^-(-\alpha) \quad (4.3a)$$

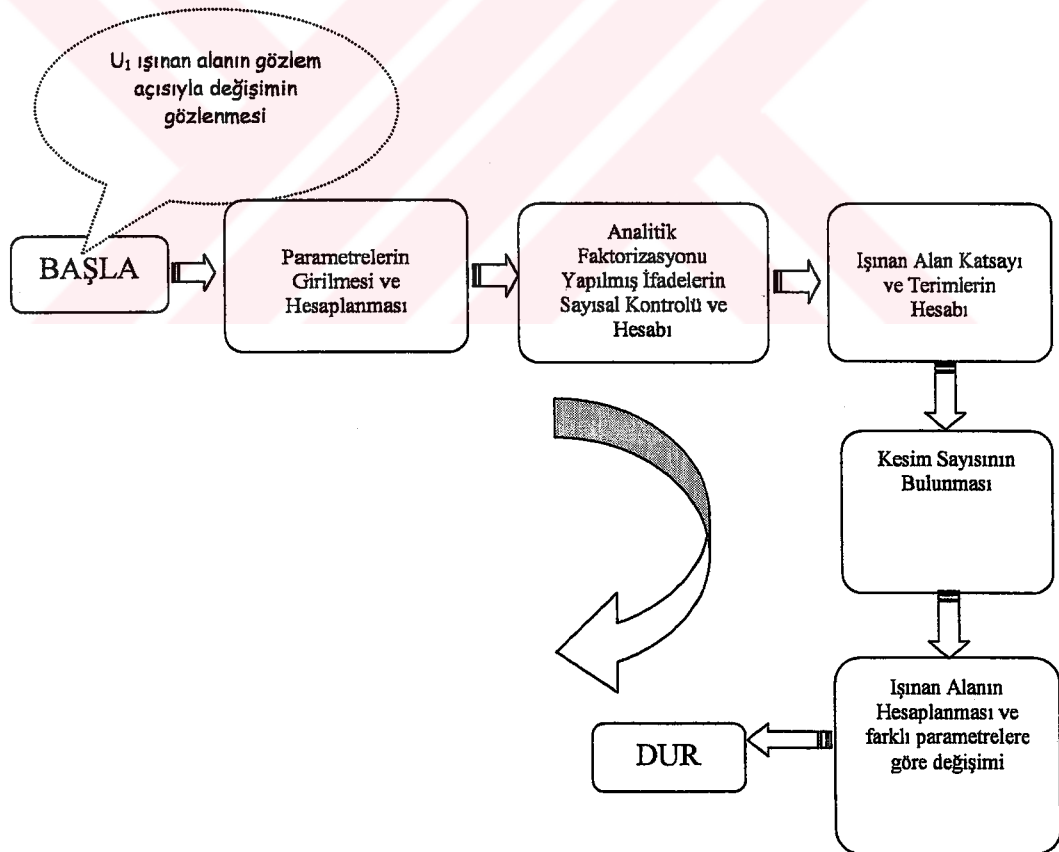
$$L^+(\alpha) = L^-(-\alpha) \quad (4.3b)$$

ifadeleri hesaplanıp bulunan değerler,

$$N(\alpha) = N^+(\alpha)N^-(\alpha) \quad (4.3c)$$

$$L(\alpha) = L^+(\alpha)L^-(\alpha) \quad (4.3d)$$

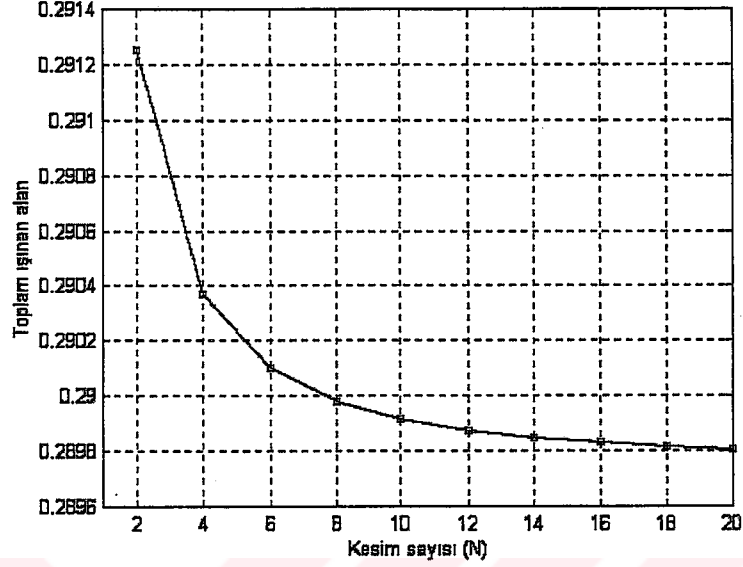
ile mukayese edilmiştir. Daha sonra b_n, c_n ve f_n katsayılarına ilişkin sonsuz boyutlu üç adet denklem sistemi de yapılan yakınsaklık analizi ile belirtilen ve sistemin artık duyarsızlaştığı belirli bir sayıda kesilerek ve bu yeni sonlu sistem de Gauss-Elimination metodu ile çözülmüştür. Bulunan katsayılardan ışınan alanın , değişik parametreler için, gözlem açısıyla değişimi grafiklerle verilmiştir. Işınan alanın sayısal eldesini yapan programın akış diyagramı,



Şekil 4.2 Sayısal Hesaplar Akış Diyagramı

verildiği gibidir.

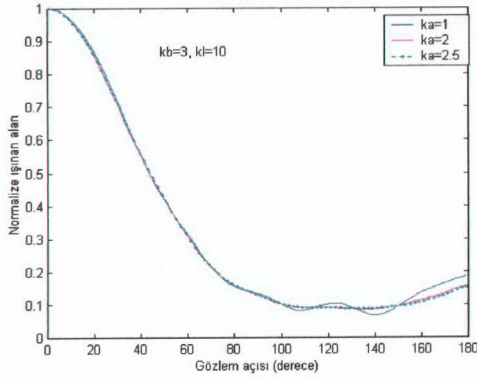
A) Şekil 4.3' de sabit bir noktada toplam ışınan alanın kesim sayısı N ' e göre değişimi gösterilmiştir.



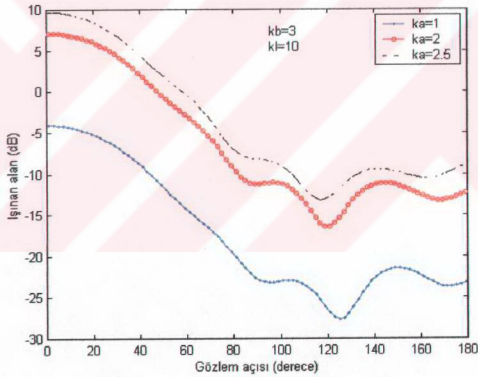
Şekil 4.3 Kesim Sayısına göre toplam kırınan alan

Görüldüğü gibi kesim sayısının $N \geq 10$, $ka=1.25$, $kb=2$, $kl=10$, $\theta=5^\circ$ değerleri için toplam ışınan alan çok az değişim göstermektedir. Diğer sayısal hesaplamalardan gelebilecek hata miktarları da gözönünde bulundurularak bundan sonraki sayısal hesaplamalarda $N=14$ alınmıştır.

B) Şekil 4.4 ve şekil 4.5' de normalize ışınan alanın dalga kılavuzu yarıçapının (ka) değişik değerleri için gözlem açısıyla değişimi görülmektedir. Dalga kılavuzu çapı ile horn açıklığı arasındaki oran büyüdükçe normalize ışınan alandaki değişim düzgün olmaktadır. Şekillerden de görüldüğü gibi $k(b-a)$ büyüdükçe ışınan alanda osilasyon olmaktadır.

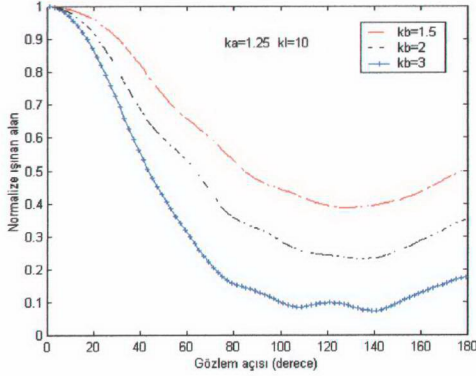


Şekil 4.4 Dalganın yarıçapının farklı değerleri için ışınlanma alan değişimi



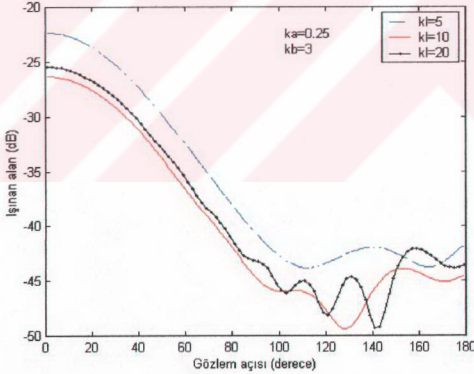
Şekil 4.5 Dalganın yarıçapının farklı değerleri için ışınlanma alan değişimi

C) Şekil 4.6 normalize ışınlanma alanının gözlem açısına göre değişimini, horn açıklığı yarıçapının (kb) değişik değerleri için göstermektedir. Beklendiği gibi yarıçap büyüdükçe normalize ışınlanma alanı düzgün bir şekilde azalmaktadır.



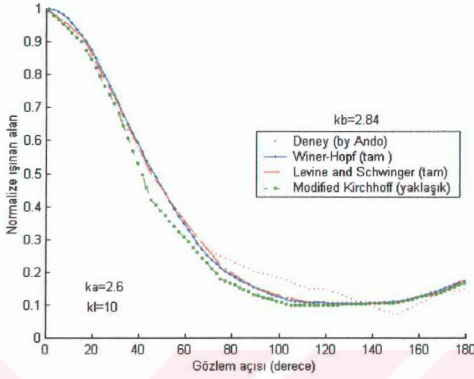
Şekil 4.6 Horn açıklığı yarıçapının farklı değerleri için normalize ışın alan

D) Şekil 4.7 ışın alanın gözlem açısına göre değişimini, horn boyunun (kl) değişik değerleri için göstermektedir. Hornun boyunun artması osilasyona sebep olmaktadır.

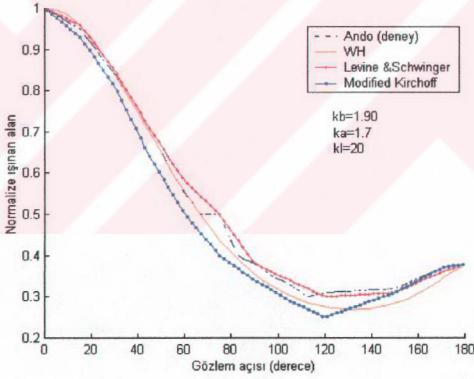


Şekil 4.7 Horn boyunun farklı değerleri için ışın alan

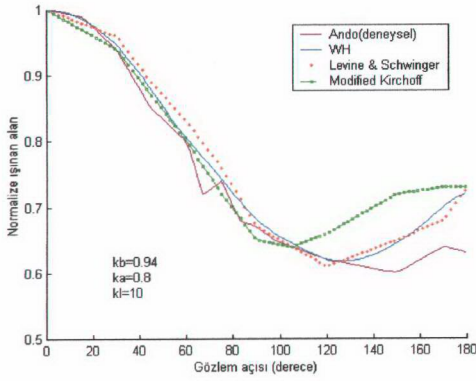
E) Şekil 4.8-9-10' de normalize ışın alanın gözlem açısına göre değişiminin deneysel ve teorik sonuçları görülmektedir. Deneysel veriler Ando (ref[24]) tarafından verilen grafik üzerinden alınan 15 nokta MATLAB 5.3 kullanılarak 0° ile 180° arasında interpolate edilerek elde edilmiştir. Grafikten görüldüğü gibi deneysel verilerle WH çözümü oldukça benzerlik göstermektedir.



Şekil 4.8 Horn ışınımının gözlem açısına göre değişimi(kb=2.84)

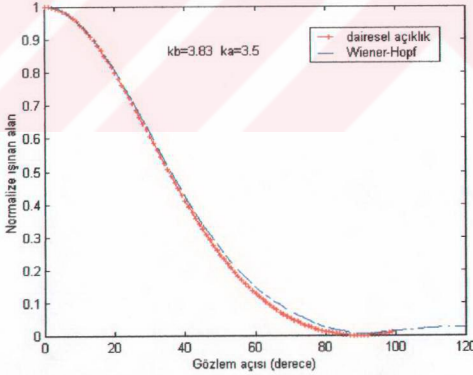


Şekil 4.9 Horn ışınımının gözlem açısına göre değişimi (kb=1.9)



Şekil 4.10 Horn ışınımının gözlem açısına göre değişimi ($kb=0.94$)

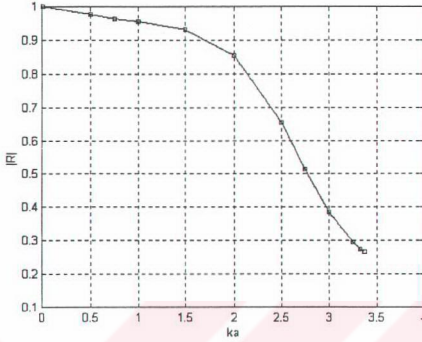
H) Şekil 4.11 dairesel açıklık [31] ve silindirik hornun normalize ışınan alanın gözlem açısına göre değişiminin karşılaştırılması görülmektedir.



Şekil 4.11 Dairesel bir açıklıktan ışınan alan ile silindirik hornun normalize ışınan alan ($kb=3.83$)

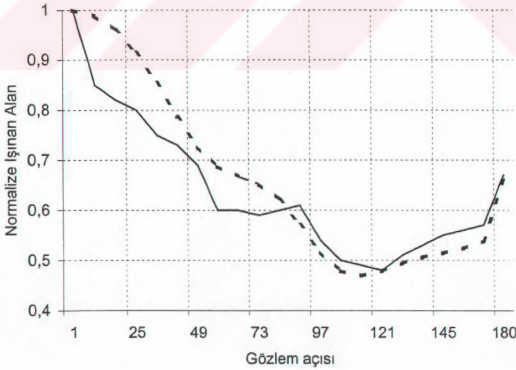
Silindirik hornun uniform aydınlatıldığı düşünülmüştür. (ka) ile (kb)'nin birbirine oldukça yakın olduğu değerler (analitik çözümün imkan verdiği ölçüde) için normalize ışınan alan çizilmiştir.

I) Şekil 4.12 $z=0$ kesitinde yansımaya katsayısı $|R|$ ' nin ka ile değişimini göstermektedir [34]. Bu katsayı $u_3(\rho, z)$ ' in $z=0$ düzleminde kesit integrali alınarak elde edilmiştir.



Şekil 4.12 Hız potansiyelinin yansımaya katsayısının ka ile değişimi ($kb=3.7$, $kl=10$)

J) Şekil 4.13 Ek-D' de açıkça verilen deneysel çalışmanın sonuçları ile analitik sonuçların karşılaştırılması görülmektedir.



Şekil 4.13 Horn yöneltiliğinin gözlem açısına göre değişimi ($ka=0.6$, $kb=1.2$, $kl=6$ ve frekans=4kHz, ----: deney, —: analitik)

5. SONUÇLAR

5.1 Tez Problemi Çözümünden Elde Edilen Sonuçlar ve Katkılar

Bu tezde şekil 2.1' de gösterilen dairesel kesitli silindirik horn içinden skaler dalganın ışınması incelenmiştir.

Ele alınan problem rijid yapıdaki akustik bir dalga kılavuzunda

- a) kesit değişikliğine
- b) borunun açık ağzından uzaya ışınımına

karşı düşen iki ardışık süreksizliğin analizi gibi düşünülebilir. Bu süreksizlikler kendi başlarına ele alındıklarında çözüm hayli basitleşerek literatürde mevcut çalışmalara indirgenir. Gerçekten, kesit değişikliği problemi izole edildiğinde (yani farklı kesitli dalga kılavuzları üzerinde başka süreksizlik olmadığı, veya başka bir deyişle bunlar sonsuz uzunlukta ise) çeşitli yöntemlerle çözülebilir. Örneğin tezdaki formülasyonda da kullanılan modal fonksiyonlara dayalı Galerkin yöntemi benzer amaçlar için başka araştırmacılar tarafından sıkça uygulanan etkin bir yaklaşımdır. Benzer şekilde, akustik dalgaların yarı sonsuz bir dalga kılavuzundan serbest uzaya ışınımı problemi de kendi başına ele alındığında klasik Wiener-Hopf tekniği yaklaşımı ile çözülebilir. Bölüm 1'de belirttiği gibi bu sonuncu problemin çözümleri esasen literatürde mevcuttur [23].

Bu tezde incelenen problemin literatürde mevcut çalışmalardan farkı yukarıda sözü edilen iki ardışık süreksizliği içermesidir. Dalga kılavuzunun horn adını verdiğimiz bölümün sonlu ve kullanılan dalga boyu mertebelerinde olması nedeniyle ortaya çıkan etkileşimler problemin her biri ayrı bir süreksizliği temsil eden iki alt problem şeklinde basitleştirilmesini olanaksız kılar. Problemin yaklaşıklık yapılmaksızın bir bütün olarak ele alınması zorunludur. Bu tezde de çözümün bulunmasında giriş bölümünde bahsedilen kısıtlamalar dışında hiçbir yaklaşıklık yapılmadan skaler dalgaların silindirik rijid bir hornun ışınımının analitik ifadesi elde edilmiştir.

Ele alınan problemin çözümü literatürde mevcut değildir. Bu nedenle, elde edilen sonuçların, bilinen hallere indirgenmesine olanak veren değerleri kullanılarak

doğrulanmasına önem verilmiştir. Bu kapsamda, uniform aydınlatılmış silindirik açıklıktan, açıklık normali doğrultusu civarındaki bir bölgede (yani ana demet içinde kalan) ışınan alanla karşılaştırılmış (bkz. Şekil 4.11) ve iyi bir uyum gözlenmiştir.

Elde edilen çözümlerin yalnızca ana demet doğrultusu içinde değil, heryerde hiç değilse genel davranışları itibariyle doğrulanabilmesi için benzer bir yapı için literatürde mevcut olan [25] ölçüm ve analitik sonuçları ile karşılaştırılma yapılmış ve burada da (bkz. Şekil 4.8-10) iyi bir uyum gözlenmiştir.

Yapılan analitik işlemlerin doğrulanması açısından $z=0$ düzleminde süreklilik koşulu nümerik olarak hesaplanmış ve bu koşulun sağlandığı görülmüştür. Ayrıca hornun verimliliğini belirlemek amacıyla yine aynı düzlemde yansıma katsayısı hesaplanmıştır (Şekil 4.12). Yansıma katsayısının düşük olduğu bölgede verimliliğin yüksek olduğu görülmektedir.

Tezde ışınan alanın değişik parametrelerle değişimi incelenmiştir. Bu incelemelerden özetle aşağıdaki sonuçları çıkarmak mümkündür.

- Dalga kılavuzu yarıçapının (ka) azalan değerleri için, açıklık yarıçapı (kb) sabit tutularak ışınan alan gözlenmiştir. Işınan alanda $k(b-a)$ 'nın artan değerleri için alanda düzgünlüğün (osilasyonun yok olması) olduğu gözlenmiştir.
- Dalga kılavuzu yarıçapı sabit tutulup, açıklık yarıçapı artırıldığında hornun yöneltiliği arttığı, ışınan alan düzgün bir şekilde azaldığı gözlenmiştir.
- Hornun boyunun (kl) artması hornun yöneltiliğinde ciddi bir değişime sebep olmadığı gözlenmiştir. Boyla orantılı olarak osilasyon artmıştır. Bu artış kl 'nin belli değerlerinde değişim göstermemiştir.
- Silindirik hornun ışınan alanı ile uniform aydınlatılmış dairesel açıklıktan ışınan alan arasında $k(b-a)$ 'nın minimum değerleri için iyi bir uyum gözlenmiştir.
- Deneysel verilerle karşılaştırmalar sonucunda oldukça güvenilir sonuçlar elde edilmiştir.
- Analitik çözümü elde edilmiş problemlere indirgenen çözümler oldukça yakın sonuçlar gözlenmiştir (Şekil 4.8-11).

5.2 Gelecekteki Çalışmalara Yapılan Öneriler

Bu problemin çözümünde karşılaşılan bir takım zorluklar olmuştur. Bu zorluklar daha önce konu ve ilgili metotla yapılan çalışmalardan elde edilen bilgi birikimi ile giderilmiştir. Bu türlü problemlerin çözümü için bir deneyim kazanılmıştır. Bu deneyimle ileride çözülmesi gereken iki önemli problemin çözümü yapılabilecektir.

- Bilindiği gibi silindirik hornlar mikrodalga uygulamalarında yaygın olarak kullanılmaktadır. Bu hornların kılavuz kısmında uyarılan elektromagnetik dalgaların ışımasının incelenmesi anten analiz ve sentezi açısından oldukça önemli bir problemdir. Horn duvarlarının empedans olması (elektromagnetik açıdan tırtıklı yapıya karşılık düşmektedir) ve açıklık kısmının belirli bir dielektrikle doldurulmuş (anten parametrelerini iyileştirmek,..) haline problemin genişletilmesi de bu problemle kazanılan deneyim ve WH tekniğinin bulunduğu imkanlardan dolayı mümkün olabilecektir.
- Dairesel flanjlı silindirik dalga kılavuzunun dan EM dalgaların kırınımı da , çözülmesi gereken önemli bir problemdir. Bu problem halihazırdaki çalışmanın bir uygulaması olarak da düşünülebilir. Yüksek enerjili mikro dalga uygulamalarında bu tip kılavuzlar yaygın olarak kullanılmaktadır.
- Bu problemin kazandırdığı tecrübe ve matematiksel altyapıyla, gürültü azaltıcı veya önleyici yapıların (egzoz, susturucu,...) analitik incelenmesi ve değişik türden parametrelerin etkisinin gözlenmesi ve bu geometrilerin tasarlanabilmesi mümkün olacaktır.

KAYNAKLAR

- [1] **Barrow W. L., Chu L. J.**, 1939 Theory of the Electromagnetic Horn, *Proceeding of I.R.E* Vol.27. pp51-64
- [2] **Southworth G.C, King A.P.** , 1939 Theory of the Electromagnetic Horn, *Proceeding of I.R.E* Vol.27. 95-102.
- [3] **Chu L. J.**, 1940 Calculation of the Radiation Properties of Hollow Pipes and Horns, *J.Appl. Phys.* Vol. 11. 603-610
- [4] **Russo P. M. , Rudduck R. C. , L. Peters Jr. ,** 1965 A Method for Computing E-Plane Patterns of Horn Antennas *IEEE Trans. Antennas Propagat.* Vol. AP-13 . 219-224
- [5] **Yu J. C., Rudduck R. C. and L.Peters Jr.**, 1966 Comprehensive Analysis for E-Plane Patterns of Horn Antennas by Edge Diffraction Theory, *IEEE Trans.Antennas Propagat.*, AP-14, 138-149,
- [6] **Yu J. C., Rudduck R. C** 1969 H-Plane Patterns of a Pyramidal Horn " *IEEE Trans.Antennas Propagat.*, AP-17, 651-652.
- [7] **Mentzer C.A., L.Peters Jr and Rudduck R. C.** 1975 Slope Diffraction and its Application to Horns *IEEE Trans.Antennas Propagat.*,AP-23, 153-159.
- [8] **Narasiman M.S. and Rao K.S.**, 1979 GTD Analysis of the Near Field Paterns of Pyramidal Horns *Proc.IEE* , Vol. 126, 1223-1226.
- [9] **Mentzer C.A. and Lee S. W.** 1977 On the role of Geometrical Optics Field in Aperture Diffraction *IEEE Trans.Antennas Propagat.*, AP-23, 187-193
- [10] **P'yankov V.P. and Chumachenko V.P.** 1990 Solution of H- Plane Radiation Problem for Two Dimensional Horn with Complex Piecewise Linear Contour, *Izvestiya VUZ Radiofizika*, Vol.33, 604-610 [in Russian)
- [11] **Büyükaksoy A. , Polat B.**, 1998 Plane Wave Diffraction by a Thick Walled Parallel Plate Impedance Waveguide, *IEEE Trans,Antennas and Propagat.* Vol.46.,11
- [12] **Büyükaksoy A, and Birbir F.,** 1998 Analysis of Impedance loaded parallel-plate Waveguide radiator, *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, Vol.12, 1509-1526,

- [13] **Noble B.**, 1998 Methods Based on the Wiener-Hopf Technique, *Chelsea Publishing Company, Newyork*,
- [14] **Türetken B.**, 1999 Plane Wave Diffraction by an Open Parallel Plate Waveguide, *XXVIth General Assembly of the International Union of Radio Science* , **B3.P34** August 13-21,1999,Toronto,Canada
- [15] **Türetken B., Alkumru A.** , 1999 Plane Wave Diffraction by a Thick Impedance Half-Plane Located over a Nonhomogeneous Half-Space Backed by an Impedance Plane with a Step Discontinuity, *International Conference on Electromagnetics in Advanced Applications (ICEAA'99)* September 13-17 Torino Italy
- [16] **Türetken B., Alkumru A.** , 1999 Plane Wave Diffraction by an Open Parallel Plate Waveguide with Dielectric Loading *Mathematical & Computational Applications Volume 4 No 3* pp.241-249.
- [17] **Türetken B., Alkumru A.** , 2001 Plane Wave Diffraction by a Dielectric Loaded Open Parallel Thick Plate Waveguide *Turkish Journal of Electrical Engineering & Computer Sciences* (to be published)
- [18] **Rawlins A.D.**, 1995 A bifurcated circular waveguide problem *IMA Journal of Applied Mathematics* **Vol.54**, pp. 59-81
- [19] **Kurlyyak D.B., Tsushima T., Kobayashi K., Nazarchuk Z.T.** 1999 Rigorous analysis of the axial symmetric diffraction problem for a circular waveguide cavity, *Report of the National Academy of Science of Ukraine*, **No:5**
- [20] **Birbir F., Büyükkaksoy A., Chumachenko V.P.** 2002 Wiener-Hopf Analysis of the two-dimensional boxlike horn radiator *IJES* **Vol.40** pp.51-66
- [21] **A. D. Rawlins**, 1978"Radiation of sound from an unflanged rigid cylindrical duct with an acoustically absorbing internal surface". *Proc. Roy. Soc. Lond.* A-361, 65-91,
- [22] **H. Levine and J. Schwinger**, 1948 "On the sound radiation of sound from an unflanged circular pipe *J. Phys.Rev.* 73, 383
- [23] **P. M. Morse and K. V. Ingard**, 1961"Encycl. Phys. Acoustic-I", Berlin, Springer Verlag,
- [24] **Y. Ando**, 1968 "Experimental studies of the pressure directivity and the acoustic center of the circular pipe horn loud speaker", *Acustica*, 20, 366-369,
- [25] **Y. Ando**, 1969 "On the sound radiation from semi-infinite circular pipe of certain wall thickness" *Acustica*, 22, 219-225

- [26] **Mitra R., Lee, S.W**, 1971 Analytical Techniques in the theory of guided waves, *The Macmillan Company*, Newyork,
- [27] **Büyükaksoy A., Uzgören G**, 1999 Kırınım Problemleri, GYTE, Gebze,Turkey
- [28] **Lee S-W, Jamnejad V., Mitra R.**, 1973 Near Field of Scattering by a Hollow Semi-Infinite Cylinder and Its Application to Sensor Booms *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* , **Vol.AP-21, No:2**
- [29] **E.T.Whittaker and G.N.Watson**, 1902 Modern Analysis *Cambridge*
- [30] **C.A.Balanis** 1997 “Antenna Theory Analysis and Theory Design” John Willey & Sons, Inc .Second Edition
- [31] **S.Silver**, 1997 “Microwave Antennas Theory and Design” Peter Peregrinus Ltd. 1997
- [32] **P.J.B. Clarricoats, G. Millington, E.D.R.Shearman and J.R.Wait**, 1981 “Aperture Antennas and Diffraction Theory” Peter Peregrinus Ltd.1981
- [33] **I.H.Sneddon**, 1972“The Use of Integral Transforms”, Mc Graw Hill, Newyork, 1972
- [34] **B. Türetken, A. Büyükaksoy, A. Demir**, 2002, “Radiation of Sound Waves from a Rigid Cylindrical Horn” Journal of Engineering Mathematics (to be published)

6. EK-A BESSEL FONKSİYONLARININ BAZI FONKSİYONEL BAĞINTILARI

Formülasyonda kullandığımız Bessel fonksiyonları özellikleri aşağıdaki gibidir.

$Z_n(z)$, (A.1)'de gösterilen diferansiyel eşitliğin çözümü olsun.

$$\frac{d^2 Z_n}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{dZ_n}{dz} + \left(1 - \frac{n^2}{z^2}\right) Z_n = 0 \quad (\text{A.1})$$

Burada z kompleks değişken ve n ise tamsayıdır.

Bessel fonksiyonlarının özel tipleri,

- J_n : Birinci tip bessel Fonksiyonu
 Y_n : İkinci tip bessel fonksiyonu (Neumann fonksiyonu)
 $H_n^{(1,2)}$: Üçüncü tip bessel fonksiyonu (Hankel Fonksiyonu)
 olarak adlandırılır.

Tanımlar

$$J_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k}}{k!(n+k)!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{A.2})$$

$$Y_0(z) = \frac{2}{\pi} J_0(z) \left(\ln \frac{z}{2} + C \right) - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k}}{(k!)^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k} \right), \quad (\text{A.3})$$

$$Y_n(z) = \frac{2}{\pi} J_n(z) \left(\ln \frac{z}{2} + C \right) -$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{(k!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^{k-n} - \left(\frac{z}{2}\right)^n \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k}}{k!(n+k)!} \left[\sum_{m=1}^{n+k} \frac{1}{m} + \sum_{m=1}^k \frac{1}{m} \right]$$

$$n = 1, 2, \dots$$

(A.4)

$$H_n^1(z) = J_n(z) + iY_n(z) \quad (\text{A.5})$$

$$H_n^2(z) = J_n(z) - iY_n(z) \quad (\text{A.6})$$

$$Z_{-n}(z) = (-1)^n Z_n(z) \quad (\text{A.7})$$

$$Z_{n-1}(z) + Z_{n+1}(z) = \frac{2n}{z} Z_n(z) \quad (\text{A.8})$$

$$J_n(e^{i\pi} z) = e^{in\pi} J_n(z) \quad (\text{A.9})$$

$$H_n^{(1)}(e^{i\pi} z) = -e^{-in\pi} H_n^{(2)}(z) \quad (\text{A.10})$$

$$Y_n(e^{i\pi} z) = e^{-in\pi} Y_n(z) + 2i \sin(n\pi) \cot(n\pi) J_n(z) \quad (\text{A.11})$$

Asimptotik Formüller

$(|z| \ll 1)$

$$J_0(z) \cong 1 \quad (\text{A.12})$$

$$J_n(z) \cong \frac{(z/2)^n}{n!}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{A.13})$$

$$Y_0(z) \cong \frac{2}{\pi} \ln z \quad (\text{A.14})$$

$$Y_n(z) \cong \frac{(n-1)!}{\pi} \left(\frac{2}{z}\right)^n, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{A.15})$$

$(|z| \gg 1);$

$$H_n^{(1)} = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{i(z - \pi/4 - n\pi/2)} \quad (\text{A.16})$$

Diferansiyel Formüller

$$\frac{d}{dz} J_0(z) = -J_1(z) \quad (\text{A.17})$$

$$\frac{d}{dz} Y_0(z) = -Y_1(z) \quad (\text{A.18})$$

$$\frac{d}{dz} H_n^{(1,2)}(z) = -H_{n-1}^{(1,2)}(z) \quad (\text{A.19})$$

$$\frac{d}{dz} Z_n(z) = \frac{1}{2} [Z_{n-1}(z) - Z_{n+1}(z)] \quad (\text{A.20})$$

$$\frac{d}{dz} Z_n(z) = Z_{n-1}(z) - \frac{n}{z} Z_n(z) \quad (\text{A.21})$$

$$\frac{d}{dz} [z^n Z_n(z)] = \lambda z^n Z_{n-1}(\lambda z) \quad (\lambda \text{ sabit}) \quad (\text{A.22})$$

$$J_{n+1}(z)Y_n(z) - J_n(z)Y_{n+1}(z) = \frac{2}{\pi z} \quad (\text{A.23})$$

$$J_{n+1}(z)H^{(1)}_n(z) - J_n(z)H^{(1)}_{n+1}(z) = \frac{2i}{\pi z} \quad (\text{A.24})$$

İntegral Formülleri

$$\int z^n Z_{n-1}(\lambda z) dz = \frac{1}{\lambda} z^n Z_n(\lambda z) \quad (\text{A.25})$$

$$\int z^n Z_{1-n}(\lambda z) dz = -\frac{1}{\lambda} z^n Z_{-n}(\lambda z) \quad (\text{A.26})$$

Lommel İntegralleri

$$\int_0^a J_0^2(\lambda \rho) \rho d\rho = \frac{a^2}{2} [J_0^2(\lambda a) + J_1^2(\lambda a)] \quad (\text{A.27})$$

$$\int_0^a J_0(\lambda_1 \rho) J_0(\lambda_2 \rho) \rho d\rho = \frac{a}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} [\lambda_1 J_0(\lambda_2 a) J_1(\lambda_1 a) - \lambda_2 J_0(\lambda_1 a) J_1(\lambda_2 a)]$$

(\lambda_{1,2} sabit)

(A.28)

7. EK-B $L(\alpha)$ ÇEKİRDEK FONKSİYONUN FAKTORİZASYONU

$$L(\alpha) = \frac{H_1^1(Ka)}{H_1^1(Kb)M(\alpha)} = L^-(\alpha)L^+(\alpha) \text{ olmak üzere Wiener-Hopf denklemini çözmek için}$$

$L(\alpha)$ çekirdek fonksiyonunu Wiener-Hopf anlamında, yani

$$L(\alpha) = L^+(\alpha)L^-(\alpha) \quad (\text{B.1})$$

şeklinde ayırştırmak gerekir. Buradaki $L^+(\alpha)$ ve $L^-(\alpha)$ sırasıyla $\text{Im}(\alpha) > \text{Im}(-k)$ ve $\text{Im}(\alpha) < \text{Im}(k)$ yarı-düzlemlerinde regüler ve sıfırları olmayan fonksiyonlardır.

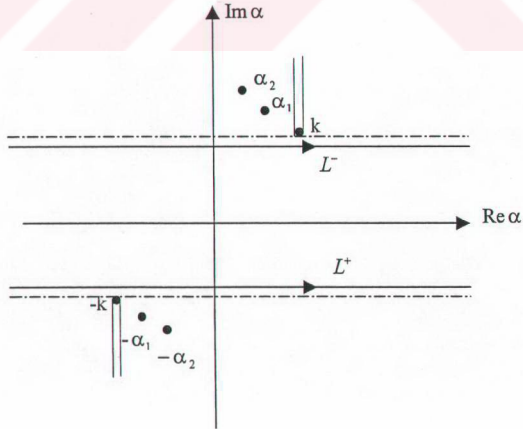
Burada

$$L_1(\alpha) = H_1^{(1)}(Ka) \quad (\text{B.2})$$

$$L_2(\alpha) = H_1^{(1)}(Kb) \quad (\text{B.3})$$

$$M(\alpha) = \pi[J_1(Ka)Y_1(Kb) - J_1(Kb)Y_1(Ka)] \quad (\text{B.4})$$

şeklinde tanımlayabiliriz. (B.2,B.3) ifadelerini Wiener-Hopf anlamında faktörize edelim.



Şekil B.1 Kompleks α -düzlemi

$$L_1(\alpha) = L_1^+(\alpha)L_1^-(\alpha) \quad (\text{B.5})$$

$$L_1^+(\alpha) = [H_1^{(1)}(ka)]^{1/2} \left(1 + \frac{\alpha}{k}\right)^{-1/2} \\ \times \exp \left[-\frac{ika}{2} + \frac{(k^2 - \alpha^2)^{1/2} a}{\pi} \ln \frac{\alpha + i(k^2 - \alpha^2)^{1/2}}{k} + q_1(\alpha) \right] \quad (\text{B.6})$$

$$q_1(\alpha) = \frac{1}{\pi} P \int_0^{\infty} \left[1 - \frac{2}{\pi x} \frac{1}{J_1^2(x) + Y_1^2(x)} \right] \ln \left(1 + \frac{\alpha a}{[(ka)^2 - x^2]^{1/2}} \right) dx \quad (\text{B.7})$$

şeklinde integral ile tanımlanmış olup burada P , $x = ka$ tekilliğindeki Cauchy asal değerini tanımlanmaktadır.

$|\alpha| \rightarrow \infty$ ve $\text{Im}(\alpha) > 0$ için

$$L_1^+(\alpha) \approx \alpha^{-1/4} \times \exp \left[\frac{\alpha a}{\pi i} \ln \left(\frac{2\alpha}{k} \right) \right] \quad (\text{B.8})$$

Benzer şekilde $L_2(\alpha)$ aşağıdaki gibi faktörize edilmiş olur.

$$L_2^+(\alpha) = [H_1^{(1)}(kb)]^{1/2} \left(1 + \frac{\alpha}{k}\right)^{-1/2} \times \exp \left[-\frac{ikb}{2} + \frac{(k^2 - \alpha^2)^{1/2} b}{\pi} \ln \frac{\alpha + i(k^2 - \alpha^2)^{1/2}}{k} + q_2(\alpha) \right] \quad (\text{B.9})$$

$$q_2(\alpha) = \frac{1}{\pi} P \int_0^{\infty} \left[1 - \frac{2}{\pi x} \frac{1}{J_1^2(x) + Y_1^2(x)} \right] \ln \left(1 + \frac{\alpha b}{[(kb)^2 - x^2]^{1/2}} \right) dx \quad (\text{B.10})$$

$|\alpha| \rightarrow \infty$ için $\text{Im}(\alpha) > 0$

$$L_2^+(\alpha) \approx \alpha^{-1/4} \times \exp \left[\frac{\alpha b}{\pi i} \ln \left(\frac{2\alpha}{k} \right) \right] \quad (\text{B.11})$$

$$M(\alpha) = \pi [J_1(Ka)Y_1(Kb) - J_1(Kb)Y_1(Ka)] \quad (\text{B.12})$$

$M(\alpha)$ fonksiyonunu bir tam fonksiyon olup bunun Wiener-Hopf faktörizasyonu kolayca sonsuz çarpımlar aracılığıyla

$$M^+(\alpha) = \sqrt{M(0)} \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{\gamma_n}\right) e^{-\frac{\alpha}{\gamma_n}} \quad (\text{B.13})$$

$$M^-(\alpha) = M^+(-\alpha) \quad (\text{B.14})$$

şeklinde yazılır.

$$\gamma_n = \frac{in\pi}{b-a} + O(n^{-1}) \quad (\text{B.15})$$

olduğu gözönünde bulundurularak

$$M^+(\alpha) \approx \tilde{A} e^{\frac{\alpha}{i\pi}(b-a)} \left[1 - C - \ln \frac{a(b-a)}{i\pi}\right] e^{-1/2}, \quad \alpha \rightarrow \infty \quad (\text{B.16})$$

olduğu kolayca gösterilebilir. Burada \tilde{A} bir sabiti, γ_n 'lerde

$$J_1(a((k^2 - \gamma_n^2)^{1/2})Y_1(b((k^2 - \gamma_n^2)^{1/2}) - J_1(b((k^2 - \gamma_n^2)^{1/2})Y_1(a((k^2 - \gamma_n^2)^{1/2})) = 0 \quad (\text{B.17})$$

denkleminin köklerini göstermektedir. Sonuçta

$$L^+(\alpha) = \exp(\chi\alpha) \frac{L_1^+(\alpha)}{L_2^+(\alpha)M^+(\alpha)} \quad (\text{B.18})$$

elde edilir. Burada χ , $L^+(\alpha)$ 'nin $|\alpha| \rightarrow \infty$, $\text{Im}(\alpha) > 0$ 'da cebirsel davranmasını sağlamak için eklenmiş olan bir sabittir. $L_1^+(\alpha)$, $L_2^+(\alpha)$ ve $M^+(\alpha)$ 'nin [B8],[B11],[B16] 'da elde edilen asimptotik davranışlarını gözönünde bulundurularak χ ;

$$\chi = \frac{1}{\pi i} (b-a) \left[1 - C + \ln \left(\frac{2\pi i}{k(b-a)}\right)\right] \quad (\text{B.19})$$

olarak belirlenir. Böylece $L^+(\alpha)$ 'nin açık ifadesi;

$$\begin{aligned}
L^+(\alpha) = & \left[\frac{H_1^{(1)}(ka)}{\pi H_1^{(1)}(kb) [J_1(ka)Y_1(kb) - J_1(kb)Y_1(ka)]} \right]^{1/2} \\
& \times \exp \left[\frac{ik(b-a)}{2} - \frac{(k^2 - \alpha^2)^{1/2}(b-a)}{\pi} \ln \frac{\alpha + i(k^2 - \alpha^2)^{1/2}}{k} + q_1(\alpha) - q_2(\alpha) \right] \\
& \times \frac{1}{\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{\gamma_n}\right) e^{-\alpha/\gamma_n}} \exp\left(\frac{\alpha}{\pi i}(b-a)\right) \left[1 - C + \ln\left(\frac{2\pi i}{k(b-a)}\right)\right]
\end{aligned}$$

(B.20)

biçiminde elde edilmiş olur.

8. EK-C SONLU ARALIKTA BESSEL İNTEGRASYONU

$$f(t) = \sum_{m=0}^{\infty} f_m [J_1(Z_m a)Y_0(Z_m t) - Y_1(Z_m a)J_0(Z_m t)] \quad (C.1)$$

olmak üzere ;

$$\int_a^b f(t) [Y_1(Ka)J_0(Kt) - J_1(Ka)Y_0(Kt)] dt \quad (C.2)$$

ifadesinin integralini almaya çalışalım. C_μ, \bar{C}_μ silindirik fonksiyonu göstermek üzere;

$$\int z C_\mu(kz) \bar{C}_\mu(lz) = z \frac{(kC_{\mu+1}(kz)\bar{C}_\mu(lz) - lC_\mu(kz)\bar{C}_{\mu+1}(lz))}{k^2 - l^2} \quad (C.3)$$

integral ve çözümü bize yardımcı olacaktır (Watson, 1944: p.134 (8)).

(C 1)' i (C 2)' de yerine yazarsak aşağıdaki integral ifadelerini elde etmiş oluruz.

$$\begin{aligned} A(t) &= f_m J_1(Z_m a) Y_1(Ka) \int_a^b [Y_0(Z_m t) J_0(Kt)] dt = f_m J_1(Z_m a) Y_1(Ka) \\ &\quad \times \left\{ t \frac{[Z_m Y_1(Z_m t) J_0(Kt) - K Y_0(Z_m t) J_1(Kt)]}{Z_m^2 - K^2} \right\}_a^b \end{aligned} \quad (C.4)$$

$$\begin{aligned} B(t) &= -f_m J_1(Z_m a) J_1(Ka) \int_a^b [Y_0(Z_m t) Y_0(Kt)] dt = -f_m J_1(Z_m a) J_1(Ka) \\ &\quad \times \left\{ t \frac{[Z_m Y_1(Z_m t) Y_0(Kt) - K Y_0(Z_m t) Y_1(Kt)]}{Z_m^2 - K^2} \right\}_a^b \end{aligned} \quad (C.5)$$

$$\begin{aligned} C(t) &= f_m Y_1(Z_m a) J_1(Ka) \int_a^b [J_0(Z_m t) Y_0(Kt)] dt = f_m Y_1(Z_m a) J_1(Ka) \\ &\quad \times \left\{ t \frac{[Z_m J_1(Z_m t) Y_0(Kt) - K J_0(Z_m t) Y_1(Kt)]}{Z_m^2 - K^2} \right\}_a^b \end{aligned} \quad (C.6)$$

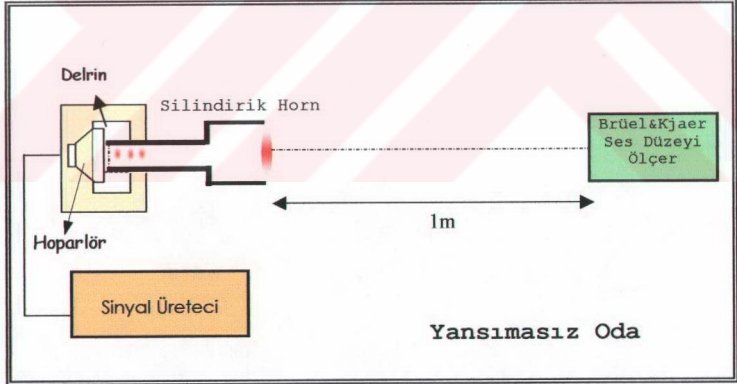
$$\begin{aligned}
D(t) &= -f_m Y_1(Z_m a) Y_1(Ka) \int_a^b [J_0(Z_m t) J_0(Kt)] dt = -f_m Y_1(Z_m a) Y_1(Ka) \\
&\quad \times \left\{ t \frac{[Z_m J_1(Z_m t) J_0(Kt) - K J_0(Z_m t) J_1(Kt)]}{Z_m^2 - K^2} \right\}_a^b
\end{aligned}
\tag{C.7}$$

(C4-7) integral ifadeleri düzenlenip ve Bessel fonksiyonlarının bilinen bağıntıları kullanılarak (C 2) integralinin çözümü;

$$\begin{aligned}
&\int_a^b f(t) [Y_1(Ka) J_0(Kt) - J_1(Ka) Y_0(Kt)] t dt \\
&= \frac{2 J_1(Z_m a)}{\pi J_1(Z_m b)} \frac{K}{Z_m} \frac{[J_1(Ka) Y_1(Kb) - J_1(Kb) Y_1(Ka)]}{Z_m^2 - K^2} f_m
\end{aligned}
\tag{C.8}$$

9. EK-D AKUSTİK DALGALARIN SİLİNDİRİK HORNDAN YAYINIMININ DENEYSEL İNCELENMESİ

Bu ekte rijid silindirik horndan yayılan akustik dalgaların deneysel ölçüm düzeni tanıtılacaktır. Ölçümler için, paslanmaz çelik malzemeden bir horn hazırlanmıştır ve deneyde hornun iç yüzeyleri horn açıklık kısmı çeşitli pürüzlerden temizlenerek parlatılmıştır. Hornun dar olan kısmının yarıçapı ve boyu, düzlem dalganın oluşması için sırasıyla 12,7mm 120mm boyutlarında seçilmiş ve uyarıcı olarak sinyal üreticine bağlı bir hoparlör kullanılmıştır. Ölçü düzeninin şematik gösterilimi Şekil D.1’ deki gibidir. Ölçümler, horndan 1 m uzaklıkta ve 0 – 180 derece arasında her 30 derecede bir yapılmıştır. Ölçümler, akustik tam yansız odada ve Brüel&Kjaer Ses Düzeyi Ölçer (SLM) ve frekans analiz modülü kullanılarak gerçekleştirilmiştir.



Şekil D.1 Ölçüm düzeni

ÖZGEÇMİŞ

Bahattin TÜRETKEN , Aralık 1974' de Erzurum'da doğdu. İlk, orta ve lise eğitimini Erzurum'da tamamladı. 1991-95 döneminde YTÜ Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği programından mezun oldu. Eylül 1995- Haziran 1996 tarihleri arasında İTÜ Yabancı Diller Bölümü Hazırlık Programına devam etti. Eylül 1996' da başladığı İTÜ Elektrik-Elektronik fakültesi, Elektronik ve Haberleşme Bölümü'nde yüksek lisans çalışmasını Şubat 1998'de tamamladı. Aynı dönem aynı programda doktora çalışmalarına başladı. Aynı zamanda Aralık 1996- Ağustos 1998 yılları arasında Atatürk Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Elektronik ve Haberleşme Bölümünde araştırma görevlisi olarak görev yaptı

Ağustos 1998'de TÜBİTAK , Ulusal Elektronik ve Kriptoloji Araştırma Enstitüsü , EMC Laboratuvarı' nda Araştırmacı olarak çalışmaya başladı. Halen bu görevini sürdürmektedir. İlgilendiği konular arasında Kırınım Problemleri, Wiener-Hopf Tekniği, Elektromanyetik Uyumluluk, Anten dizayn ve ölçüm teknikleri,... bulunmaktadır. Ulusal ve Uluslararası birçok konferansta sözlü olarak bildiriler sunan TÜRETKEN, 1999' ta "URSI Young Scientist Awards" , ve 2000 yılında "MMET Young Scientists Awards" ödülleri ile ödüllendirilmiştir. Yüksek lisans çalışması NETAŞ A.Ş tarafından, Doktora Çalışması TÜBİTAK-BAYG tarafından desteklenmiştir.

ULUSAL ELEKTRONİK VE KRIPTOLOJİ ARAŞTIRMA ENSTİTÜSÜ
DOKÜMANTASYON MERKEZİ