İNTEGRALLENEBİLİRLİK
VE
PERTÜRBASYON TEORİ

Filiz TAŞCAN DÖKEN

Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik Anabilim Dalı
Uygulamalı Matematik Bilim Dalında
Doktora Tezi
Olarak Hazırlanmıştır.

Danışman: Doç. Dr. Mehmet Naci ÖZER

Haziran 2002

Filiz TAŞCAN DÖKEN in Doktora tezi olarak hazırladığı

"İNTEGRALLENEBİLİRLİK VE PERTÜRBASYON TEORİ"

başlıklı bu çalışma jürimizce lisans üstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir:

Üye: Doç. Dr. Mehmet Naci ÖZER

Üye: Doç. Dr. Selçuk KUTLUAY

Üye: Doç. Dr. İdris DAĞ

Üye: Yrd. Doç. Dr. Dursun ESER

Üye: Doç. Dr. Zekeriya ARVASİ

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu' nun ...18.6..2002 gün ve ..2002-8/4....... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. M. Selami KILIÇKAYA

Enstitü Müdürü

ÖZET

Bu doktora tezi üç bölümden oluşmaktadır.

İlk bölümde uygulamalı matematikte sıkça karşılaşılan lineer olmayan oluşum denklemleri ve integrallenebilirlikleri ile ilgili ardıştırma operatörü, korunumluluk kanunları, yayılma bağıntısı ve hamiltoniyen yapı gibi temel kavramlar verilmiştir. Bölüm sonunda bir bozulma (perturbasyon) metodu olan çok ölçekli açılım metodu kısaca tanıtılmıştır.

İkinci bölümde ise, bir bozulma tekniği olan çok ölçekli açılım metodu kullanılarak, integrallenebilen Korteweg-de Vries (KdV) tipi oluşum denklemlerinden yine integrallenebilen Nonlinear Schrödinger (NLS) tipi denklemlerin bulunması üzerinde durulmuştur. Ayrıca bu denklemlerin integrallenebilirliğini ifade eden lineer spektral problem ve ardıştırma operatörleri arasındaki ilişkiler de incelenmiştir.

Son bölümde, yeni ve yüksek dereceden yavaş değişkenleri içeren farklı bir çok ölçekli açılım metodu tanıtılarak integrallenebilen NLS ve yüksek mertebeden türevli kuple NLS tipi denklemler ile onların *Hamiltoniyen* fonksiyonlarından başlayarak integrallenebilen KdV tipi denklemlerle onların Hamiltoniyen fonksiyonları çıkarılmıştır.

Uzun ve yorucu hesaplamaların tamamı REDUCE [3] paket programı kullanılarak yapılmıştır.

SUMMARY

This Ph. D. thesis consists of three chapters.

In the first chapter, some basic concepts for Nonlinear Evolution Equation (NLEE) and their integrability properties such as recursion operator, conservation laws, dispersion relation and Hamiltonian structure are recalled. At the end of this chapter, the multiple scales method which is known as a perturbation method is introduced briefly.

The following chapter, derivation of integrable Nonlinear Schrödinger (NLS) type equations from integrable Korteweg-de Vries (KdV) type evolution equations by using the multiple scales method known as a perturbation technique. Then the relationship between linear spectral problem and recursion operator for the integrability of KdV and NLS equations is discussed mutually.

In the last chapter, a new multiple scales method including higher order slow variables is defined. KdV, coupled KdV type equations and their Hamiltonian structures are obtained from NLS, higher order derivative coupled NLS type evolution equations and their their Hamiltonian structures by performing this method.

For our complex calculations REDUCE algebraic packet program [3] is used.

TEŞEKKÜR

Doktora çalışmamı yöneten ve bu tezin hazırlanması sırasında, yardımlarını esirgemeyen değerli hocam sayın

M. Naci ÖZER'e

teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca her zaman yanımda olan ve çalışmalarım boyunca beni destekleyen aileme ve eşime şükranlarımı sunarım.

Eskişehir, 2002

Filiz TAŞCAN DÖKEN

İçindekiler

KISALTMALAR

c.c.	-Kompleks eşlenik
KdV	-Korteweg-de Vries
MKdV	-Modifiye Edilmiş Korteweg-de Vries
KKdV	-Kuple Korteweg-de Vries
NLS	-Nonlinear Schrödinger
MKdV	-Modifiye Edilmiş Nonlinear Schrödinger
KNLS	-Kuple Nonlinear Schrödinger

Bölüm 1

Temel Kavramlar

1.1 Giriş

Bu bölümde, diğer bölümlerin daha iyi anlaşılabilmesi için bazı temel kavramlar verildi. Ayrıca lineer olmayan kısmi türevli diferensiyel denklemler ile integrallenebilen Hamiltoniyen sistemler incelendi.

1.2 Lineer Denklemler için Yayılma (Dispersiyon) Bağıntısı

Bu kısımda, genel olarak

$$P\left[\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right] u\left(x,t\right) = 0 \tag{1.1}$$

şeklindeki lineer, sabit katsayılı kısmi türevli diferensiyel denklemler gözönüne alındı. $\theta\left(x,t\right)$; faz, k; dalga sayısı ve w; frekans olmak üzere, bu tip kısmi diferensiyel denklemlerin

$$u\left(x,t\right) = e^{i\theta(x,t)} = e^{i(kx-wt)} \tag{1.2}$$

formunda bir çözümü olduğunu varsayalım. Bu çözüm (1.1) denkleminde yerine yazılırsa,

$$P\left[\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right]e^{i(kx-wt)}=P\left[-iw,ik\right]e^{i(kx-wt)}=0$$

veya

$$P\left[-iw,ik\right]=0 \tag{1.3}$$

bulunur. Eğer (1.3) sağlanırsa, (1.2) ; (1.1) kısmi türevli diferensiyel denkleminin bir çözümüdür. (1.3) denklemi **yayılma bağıntısı** olarak adlandırılır ve verilen her k için $w=w(k)$ şeklindeki w yayılma bağıntısından faz hızı ve grup hızı sırasıyla,

$$c=\frac{w}{k}\ ,\quad c_g=\frac{dw}{dk} \tag{1.4}$$

şeklinde tanımlanır.

i) Eğer $w(k)$ reel ve c sabit olmayan bir değer ise, (1.1) denklemine **yayılma** dır denir.

ii) $w(k)$; $w=w_R+iw_I$ olacak şekilde kompleks bir değer ise, çözüm;

$$u_k=e^{w_I it}.e^{i(kx-w_Rt)}$$

şeklinde e^{iw_It} durduran (damping) terimi ve $e^{i(kx-w_Rt)}$ dağıtmaya devam eden (oscillator) teriminden oluşur.

$$t\to\infty \quad \text{iken} \quad u_k=\begin{cases}0 & w_I<0 \quad \text{dağılma (dissipation)}\\ \infty & w_I>0 \quad \text{devamsızlık (instability)}\end{cases}$$

dır.

Örnek 1.2.1

$$u_t=u_{xxx}+6uu_x \tag{1.5}$$

KdV (Korteweg-de Vries) denkleminin yayılma bağıntısı (1.3) denkleminden

$$P\left[-iw,ik\right]=(-iw)-(ik)^3=0\Rightarrow\ w(k)=k^3$$

bulunur. Faz hızı

$$c = \frac{w}{k} = k^2$$

ve grup hızı

$$c_g = \frac{dw}{dk} = 3k^2$$

olarak elde edilir. Faz ve grup hızı $k-$ değişkenine bağlı değerler bulunduğundan (1.5) denklemi yayılmadır.

Örnek 1.2.2 Bir başka örnek olarak

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \tag{1.6}$$

dalga denklemi ele alındığında (1.3) denkleminden

$$(-iw)^2 - c^2(ik)^2 = 0 \quad \Rightarrow w = \pm ck$$

yayılma bağıntısı elde edilir. Faz ve grup hızları ise, sırasıyla,

$$c = \frac{w}{k} = \frac{\pm ck}{k} = \pm c$$

$$c_g = \frac{dw}{dk} = \pm c$$

olarak bulunur. Faz ve grup hızı $k-$ değişkeninden bağımsız olduğundan yayılma değildir.

1.3 Lineer Olmayan Oluşum Denklemleri

Genel lineer olmayan oluşum denklemleri, $K[u]$; u ve u nun $x-$değişkenine göre türevlerinin tanımlı fonksiyonu olmak üzere,

$$u_t = K[u] \tag{1.7}$$

formundadır.

Bu tür denklemlerin en iyi bilineni; bir kanalda su yüzeyindeki dalgalanmaları ifade eden ve Korteweg ve de Vries tarafından bulunan

$$u_t = u_{xxx} + 6uu_x \tag{1.8}$$

KdV (Korteweg-de Vries) denklemidir.

Bu denklem fizik, plazma fiziği, akışkanlar mekaniği gibi birçok çalışma alanında yer almaktadır. Bu denklem için;

$$u(x,t) = \phi(x+ct)$$

şeklindeki hareketli dalga çözümü θ faz ve $2a^2$ büyüklüğü, hızın yarısı olmak üzere,

$$u(x,t) = 2a^2 \sec h^2 a(x + 4a^2 t + \theta) \tag{1.9}$$

olarak bulunmuştur. (1.7) denkleminde $u_t = 0$ olarak alınırsa, bulunan $K[u] = 0$ adi diferensiyel denklemi, (1.7) denkleminin **durgun** (stationary) denklemi olarak adlandırılır.

1.4 Korunum Kanunları

(1.7) lineer olmayan oluşum denklemlerinin korunum kanunu

$$\mathcal{T}_t + \mathcal{X}_x = 0 \tag{1.10}$$

formundadır. Burada $\mathcal{T}[u]$ ve $\mathcal{X}[u]$ sırasıyla, u ve u fonksiyonunun x değişkenine göre türevlerini içeren **korunumlu yoğunluk** ve **ilgili akı**dır. $\mathcal{X}_x$ ve $\mathcal{T}_t$ sırasıyla x ve t ye göre tam (total) türevi ifade eder ve

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_t &= \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial u} u_t + \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial u_x} u_{tx} + ... \\ \mathcal{X}_x &= \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial u} u_x + \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial u_x} u_{xx} + ... \end{aligned} \tag{1.11}$$

şeklindedir.

Eğer $\mathcal{T}$, u nun lokal bir fonksiyonu ise, yani; herhangi bir $\mathcal{T}$ nun değeri yanlızca x in küçük bir komşuluğundaki u ya bağlı ise, bu durumda $\mathcal{T}$ **lokal korunumlu yoğunluk** tur.

Eğer, $\mathcal{X}$ de lokal ise, bu durumda (1.10), **lokal korunum kanunu** dur.

Özel olarak, eğer $\mathcal{T}$ ifadesi açık olarak x veya t ye bağlı olmayıp u ve u nun x e göre türevlerine bağlı polinomsal bir ifade ise, $\mathcal{T}$ ya **polinomsal korunumlu yoğunluk** denir. $\mathcal{X}$ de polinomsal ifade ise, (1.10) **polinomsal korunum kanunu** dur. Uygun sınır koşulları kullanıldığında, lokal korunum kanunları ile hareket sabitleri arasında yakın bir ilişki ortaya çıkar.

(1.10) denkleminin x değişkenine göre integrali alındığında,

$$\int_A^B \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{T}dx + [\mathcal{X}]_A^B = \frac{d}{dt}\int_A^B \mathcal{T}dx + [\mathcal{X}]_A^B = 0 \tag{1.12}$$

elde edilir. $(B-A)$ nın periyodun tam katı olduğu veya $u(x,t)$ nin $x \to \mp\infty$ ve $(A,B) = (-\infty,\infty)$ iken sıfıra gittiği uygun periyodik sınır koşulları altında. (1.12) denkleminden

$$\frac{d}{dt}\int_A^B \mathcal{T}dx = 0$$

ifadesi bulunur. Buradan $t-$değişkenine göre integral alınarak,

$$\int_A^B \mathcal{T}dx = sbt.$$

hareket sabiti elde edilir.

Soliton teoride en fazla ilgilenilen (1.8) **KdV** denkleminin sonsuz sayıda korunum kanunları vardır. Bunlardan birkaçı

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_0 &= u, & \mathcal{X}_0 &= -u_{xx} - 3u^2,\\
\mathcal{T}_1 &= \tfrac{1}{2}u^2, & \mathcal{X}_1 &= -uu_{xx} + \tfrac{1}{2}u_x^2 - 2u^3,\\
\mathcal{T}_2 &= u^3 - \tfrac{1}{2}u_x^2\ , & \mathcal{X}_2 &= u_xu_{xxx} - \tfrac{1}{2}u_{xx}^2 - 3u^2u_{xx} + 6uu_x^2 - \tfrac{9}{2}u^4,
\end{aligned}$$

şeklindedir. Burada $\mathcal{T}_i$ ifadeleri **KdV** denklemi için sırasıyla kütle, momentum ve enerjidir.

1.5 Miura Dönüşümü

Miura, **KdV** denklemi ile **MKdV** denkleminin korunum kanunları arasında bir ilişki olduğunu göstermiş ve bu ilişkiyi, u; **KdV** denkleminin v; **MKdV** denkleminin bir çözümü olmak üzere

$$u = v_x + v^2$$

ile ifade etmiş [22]. Eğer **KdV** ve **MKdV** denklemi için sırasıyla

$$\begin{aligned} P(u) &= u_t - 6uu_x - u_{xxx} = 0, \\ K(v) &= v_t + 6v^2 v_x - v_{xxx} = 0 \end{aligned}$$

gösterimleri kullanılırsa

$$P(u) = (2v + \frac{\partial}{\partial x})K(v)$$

olarak yazılabilir. Daha sonra Miura, ε; küçük bir parametre olmak üzere

$$u = w + \varepsilon w_x + \varepsilon^2 w^2$$

farklı bir dönüşüm ile

$$Q(w) = w_t - 6(w + \varepsilon^2 w^2)w_x + w_{xxx} = 0$$

olmak üzere

$$P(u) = (1 + \varepsilon\frac{\partial}{\partial x} + 2\varepsilon^2 w)Q(w)$$

ilişkisini göstermiş. Burada $Q(w)$ Gardner denklemi,

$$(w)_t + (-3w^2 - 2\varepsilon^2 w^3 + w_{xx})_x = 0$$

olarak korunum kanunu formunda yazılabilir.

Burada ayrıca w değişkeni

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n w_n \tag{1.13}$$

şeklinde seriye açılırsa, bu seri açılımı (1.13) denkleminde yerine yazıldığında, ε nun kuvvetlerinin katsayılarından, w_n ifadeleri; u ve u nun x e göre türevleri cinsinden

$$\begin{aligned}
w_0 &= u\\
w_1 &= u_x\\
w_2 &= u_{xx} + u^2\\
w_3 &= (2u^2 + u_{xx})_x\\
w_4 &= (u_{xxx} + 6uu_x)_x + 2(u^3 - \frac{1}{2}u_x^2)\\
w_5 &= (u_{xxxx} + 8uu_{xx} + 15u_x^2 + \frac{16}{3}u^3)_x\\
&\vdots
\end{aligned} \tag{1.16}$$

korunum kanunları elde edilir ve x - türevlerinin modülüne göre (1.8) **KdV** denkleminin korunumlu yoğunlukları w_i lere bağlı olarak,

$$\mathcal{T}_1 = \frac{1}{2}w_2,\ \mathcal{T}_2 = \frac{1}{2}w_4,\ \mathcal{T}_3 = \frac{1}{2}w_6, \ldots$$

şeklinde yazılabilir.

Örnek 1.5.1

$$iq_\tau = q_{\xi\xi} - 2q\,|q|^2$$

şeklindeki NLS denkleminin korunum kanunlarından bir kaçı

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_1 &= qq^*, & \mathcal{X}_1 &= i(qq_x^* - q^*q_x),\\
\mathcal{T}_2 &= (q^*q_x - q_x^*q), & \mathcal{X}_2 &= 2iq_x^*q_x - qq_t^* + q^*q_t - 2i\,|q|^4\,,\\
\mathcal{T}_3 &= q_x^*q_x + |q|^4\,, & \mathcal{X}_3 &= -\left(q_tq_t^* - q_t^*q_x\right),
\end{aligned} \tag{1.17}$$

olarak bulunur [17].

1.6 Ters Skattering Dönüşüm (TSD)

Ters skattering dönüşüm metodu, Gardner, Greene, Kruskal ve Miura [7, 8] tarafından geliştirilmiştir. Bu metodun amacı yeterince hızlı bozulan başlangıç değerleriyle verilen (1.8) **KdV** denkleminin tam çözümünü bulmaktır. Yani: $f(x)$; $|x| \to \infty$ iken yeterince hızlı bozulan bir fonksiyon olmak üzere,

$$x \epsilon \mathbb{R}, \ t \geq 0 \quad u(x,0) = f(x) \tag{1.18}$$

başlangıç şartıyla verilen (1.8) **KdV** denklemini çözmektir. (1.13) Gardner dönüşümü Riccati tipi diferensiyel denklemdir. Eğer

$$w = \frac{1}{\varepsilon}\frac{\Phi_x}{\Phi} + \frac{1}{2\varepsilon^2}$$

dönüşümü yapılırsa, $\lambda = \frac{1}{4\varepsilon^2}$ olmak üzere,

$$L\Phi := \Phi_{xx} + u(x,t)\Phi = \lambda\Phi \tag{1.19}$$

şeklinde lineerleştirilebilir. Bu denklem ise, quantum teoride $u(x,t)$; potansiyel ve λ; enerji olmak üzere, zaman bağımlı **Schrödinger denklemi** olarak bilinir.

(1.19) denkleminin özfonksiyonlarının zaman oluşumu,

$$\Phi_t = P\Phi = 4\Phi_{xxx} + 6u\Phi_x + 3u_x\Phi \tag{1.20}$$

ile verilir. $\lambda_t = 0$ kabulü ile, (1.19) ve (1.20) denklemlerinden, $\Phi_{xxt} = \Phi_{txx}$ değişimlilik şartının sağlanması için gerek koşul, u nun (1.8) **KdV** denklemini sağlamasıdır. Benzer şekilde (1.8) **KdV** denklemi sağlanıyorsa, özdeğerler zamandan bağımsız olmalıdır.

Adi diferensiyel denklemlerin spektral teorisine göre, (1.19) denklemi için $\lambda_n = \kappa_n^2, \ \ n = 1, 2, ..., N$ sonlu ayrık özdeğerler vardır. Sınırlardaki çözümlere bakılırsa,

$$\begin{aligned} x \to -\infty \quad &\text{için} \quad \Phi_n(x) \sim e^{\kappa_n x} \\ x \to \infty \quad &\text{için} \quad \Phi_n(x) \sim b_n(t) e^{-\kappa_n x} \end{aligned} \tag{1.21}$$

bulunur.

$\lambda = -k^2$ sürekli spektrumu için karşı gelen sınır şartları ise,

$$\begin{aligned} x \to -\infty \quad & \text{için} \quad \Phi_n(x) \sim T(k,t)e^{-ikx} \\ x \to \infty \quad & \text{için} \quad \Phi_n(x) \sim e^{-ikx} + R(k,t)e^{ikx} \end{aligned} \tag{1.20}$$

dır. Buradaki $T(k,t)$ ve $R(k,t)$ fonksiyonları geçiş (transmission) ve yansıma (reflection) katsayılarıdır. Verilen $u(x)$ potansiyeli ile κ_n, b_n, $R(k,t)$, $T(k,t)$ ifadeleri hesaplanabilir.

Genel olarak t zamanındaki skattering verisi

$$S(\lambda,t) = \left\{(\kappa_n, b_n)_{n=1}^{N} \; , \; R(k,t) \; , \; T(k,t) \; , \; k \; reel\right\}$$

ile verilir.

$t = 0$ zamanında $S(\lambda, 0)$ skattering verisi verildiğinde, t zamanındaki skattering verisi oluşturulabilir. Buradaki problem, skattering verisinden, (1.8) **KdV** denkleminin istenen çözümü olan $u(x,t)$ potansiyelinin oluşturulmasıdır. Gel'fand ve Levitan $S(\lambda,t)$ skattering verisinin $u(x,t)$ potansiyelinin elde edilmesi için yeterli olduğunu göstermişlerdir [13].

KdV denkleminin çözümü ters skattering metod kullanılarak üç adımda bulunabilir:

i) $u(x,0) = u_0(x)$ başlangıç koşullarından, $t = 0$ zamanında S_0 skattering verisi oluşturulur.

ii) $u(x,t)$ ye karşı gelen genel t zamanı için $S(\lambda,t)$ skattering verisi hesaplanır.

iii) $S(\lambda,t)$ skattering verisinden $u(x,t)$ potansiyeli bulunur.

Burada ilk adım direkt spektral problem, üçüncü adım ise ters spektral problem olarak isimlendirilir.

1.7 Lax Çiftleri (Lax Pairs)

L, spektral operatör ve P ise özfonksiyonların ilgili zaman oluşumlarını ifade eden operatör olmak üzere;

$$L\Phi = \lambda\Phi \tag{1.21}$$

$$\Phi_t = P\Phi \tag{1.22}$$

lineer denklem çiftini ele alalım. (1.21) denkleminin t ye göre türevini alıp (1.22) denklemi de kullanılırsa, $\lambda_t = 0$ olmak üzere,

$$L_t = [P, L] = PL - LP \tag{1.23}$$

elde edilir. Buradaki L ve P diferensiyel operatörlerine **Lax çiftleri** ve (1.23) denklemine de **Lax denklemi** denir ve uygun seçilmiş L ve P operatörleriyle lineer olmayan oluşum denklemini içerir. Örneğin (1.8) **KdV** denklemi için Lax çiftleri, ∂ türev operatörü herhangi bir $u(x,t)$ fonksiyonu için

$$\partial u \equiv u_x + u\partial$$

şeklinde tanımlanmak üzere,

$$L = \partial^2 + u \quad , \quad P = 4\partial^3 + 6u\partial + 3u_x \tag{1.24}$$

dir ve **KdV** denklemi bu Lax çiftlerinin değişimlilik şartı olarak düşünülebilir.

Lax çiftleri TSD için başlangıç noktası olduğundan, Lax denklemlerini ve Lax çiftlerini bulmak önemlidir. Verilen bir sistem için Lax çiftlerini bulma işlemi sistemin integrallenebilme olasılığını verir.

1.8 Sıfır Eğrilik Gösterimi

U ve V matrisler olmak üzere,

$$\psi_x = U(u, \lambda)\psi \tag{1.25}$$

$$\psi_t = V(u, \lambda)\psi \tag{1.26}$$

ifadelerinin değişimlilik(integrallenebilme) şartı

$$U_t - V_x + [U, V] = 0 \tag{1.27}$$

sıfır eğrilik şartını verir. Bu ise, (1.7) genel lineer olmayan oluşum denkleminin bulunması ve integrallenebilmesi için alternatif bir yoldur.

1.8.1 2x2 Tipinde Spektral Problem

Ablowitz, Kaup, Nowell ve Segur (AKNS) [15, 16] lineer olmayan oluşum denklemlerinin büyük bir kısmı için başlangıç değer problemini çözmede bir yol geliştirmiştir. AKNS, A, B, C, ψ den bağımsız ve $q(x,t)$, $r(x,t)$: μ nün skaler fonksiyonları ve

$$\psi = (\psi_1, \psi_2)^T, \;\; U = \begin{pmatrix} -i\mu & q \\ r & i\mu \end{pmatrix}, \;\; V = \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A \end{pmatrix} \tag{1.28}$$

olmak üzere, (1.25) ve (1.26) ile verilen spektral problemini kullanmışlar ve (1.27) sıfır eğrilik (integrallenebilme) şartından

$$\begin{aligned} A_x &= qC - rB \\ q_t &= B_x + 2i\mu B + 2Aq \\ r_t &= C_x - 2i\mu C - 2Ar \end{aligned} \tag{1.29}$$

denklemlerini bulmuşlardır. Bu denklemlerden, A, B, C değerleri çözülerek, q ve r için integrallenebilen oluşum denklemleri bulunur. Burada μ parametresi spektral parametredir. A, B, C için,

$$V = \sum_{i=0}^{N} V_N - i\mu^i \tag{1.30}$$

şeklinde polinomsal ifadeleri yerine yazarak, integrallenebilir oluşum denklemlerini bulunabilir. Bu açılım (1.29) denklemlerinde yerine yazıldığında ve μ

parametresinin kuvvetlerinin katsayıları birbirlerine eşitlendiğinde, $i = 0, 1, \ldots, N$ olmak üzere, V_i ifadelerinden q ve r değişkenlerine göre lineer olmayan iki tane oluşum denklemi bulunur.

Özel olarak $a = 2i$ ve $r = \pm q^*$ olmak üzere, ikinci mertebeden

$$\begin{aligned} A &= a(\mu^2 + \tfrac{1}{2}qr) \\ B &= a(i\mu q - \tfrac{1}{2}q_x) \\ C &= a(i\mu r + \tfrac{1}{2}r_x) \end{aligned} \tag{1.33}$$

açılımlarından, kompleks eşleniği ile birlikte

$$iq_t = q_{xx} \pm 2|q|^2 q \tag{1.34}$$

lineer olmayan Schrödinger denklemi bulunur.

a_0, a_1, a_2, a_3 sabitler olmak üzere, üçüncü mertebeden

$$\begin{aligned} A &= a_0\mu^3 + a_1\mu^2 + \tfrac{1}{2}(a_0qr + a_2)\mu + \tfrac{1}{2}a_1qr - \tfrac{1}{4}ia_0(qr_x - rq_x) + a_3 \\ B &= ia_0\mu^2 q + (ia_1q - \tfrac{1}{2}a_0q_x)k + [ia_2q - \tfrac{1}{2}a_1q_x + \tfrac{1}{4}a_0(2rq_2 - q_{xx})] \\ C &= ia_0\mu^2 r + (ia_1r + \tfrac{1}{2}a_0r_x)k + [ia_2r + \tfrac{1}{2}a_1r_x + \tfrac{1}{4}ia_0(2qr_2 - r_{xx})] \end{aligned} \tag{1.35}$$

açılımları ile

$$\begin{aligned} q_t &= \tfrac{1}{4}ia_0(6qrq_x - q_{xxx}) + \tfrac{1}{2}a_1(2q^2r - q_{xx}) + ia_2q_x - 2a_3q \\ r_t &= \tfrac{1}{4}ia_0(6qrr_x - r_{xxx}) - \tfrac{1}{2}a_1(2q^2r - q_{xx}) + ia_2r_x + 2a_3r \end{aligned} \tag{1.36}$$

elde edilir. Eğer $r = q,\ a_1 = a_2 = a_3 = 0,\ a_0 = 4i$ alırsak,

$$v_t = v_{xxx} - 6v^2v_x \tag{1.37}$$

MKdV denklemi bulunur. Yine $r = -1$ durumunda, (1.8) **KdV** denklemi elde edilir.

$r = -1 + \varepsilon^2 q$ aldığımızda ise, (1.14) Gardner denklemi bulunur. $\mu^2 = -\lambda$ olmak üzere, (1.19) denklemine eşit olan

$$\psi_{2xx} + (\mu^2 + q)\psi_2 = 0 \tag{1.38}$$

Schrödinger spektral problemi elde edilir.

Ayrıca μ parametresinin negatif kuvvetlerinde, A, B, C açılımlarını

$$A = \frac{a(x,t)}{\mu}, \quad B = \frac{b(x,t)}{\mu}, \quad C = \frac{c(x,t)}{\mu} \tag{1.37}$$

olarak aldığımızda integrallenebilme şartından

$$a_x = \frac{1}{2}(qr)_t, \quad q_{xt} = -4iaq, \quad r_{xt} = -4iar \tag{1.38}$$

elde edilir. Yine a, b, c için iki özel seçim yapmak mümkündür:

i-)

$$a = \frac{i}{4}\cos u, \quad b = c = \frac{i}{4}\sin u, \quad q = -r = \frac{-1}{2}u_x \tag{1.39}$$

alındığında,

$$u_{xt} = \sin u \tag{1.40}$$

Sine-Gordon denklemi bulunur.

ii-)

$$a = \frac{i}{4}\cosh u, \quad b = c = \frac{i}{4}\sinh u, \quad q = r = \frac{1}{2}u_x \tag{1.41}$$

alındığında ise

$$u_{xt} = \sinh u \tag{1.42}$$

Sinh-Gordon denklemi elde edilir.

1.9 Ardıştırma Operatörü

Eğer $v = P[u]$ fonksiyonu

$$v_t = K'[v] \tag{1.43}$$

lineerleştirilmiş denkleminin çözümü ise, $v = P[u]$, (1.7) oluşum denkleminin genelleştirilmiş simetrisidir. Burada $P[u]$, u ve u nun x-değişkenine göre türevlerinin bir fonksiyonudur ve $K'[u]$ diferensiyel operatörü, $K[u]$ nun Frechet türevidir ve

$$K'[u]v = \frac{d}{d\varepsilon} K[u + \varepsilon v] \Big|_{\varepsilon=0} \tag{1.44}$$

olarak tanımlanır.

u nun $K[u]$ diferensiyel operatörünün τ bağımsız değişkenine göre oluşumu

$$(K[u])_\tau = K'[u]u_\tau \tag{1.45}$$

ile verilir. $v = P[u]$ nun (1.43) denkleminin çözümü olması için

$$(P[u])_t = (K[u])_\tau \tag{1.46}$$

olmalıdır. (1.43) ve

$$u_\tau = P[u] \tag{1.47}$$

akışları değişimlidir. Burada u; t ve τ akış zamanlarının ve x değişkeninin bir fonksiyonudur.

$R[u]$ ile gösterilen ardıştırma operatörü, genelleştirilmiş simetrileri genelleştirilmiş simetrilere dönüştürür ve

$$(R[u])_t = [K'[u], R[u]] \equiv K'[u]R[u] - R[u]K'[u] \tag{1.48}$$

denklemini sağlar. (1.23) ile (1.48) ifadelerini karşılaştırdığımızda, $R[u]$ ve $K'[u]$ operatörleri Lax çifti formundadır. Lax çiftlerinin bileşenlerinin diferensiyel operatör olması beklenirken, $R[u]$ ardıştırma operatörü genellikle integro-diferensiyel operatörleri içerir. Örneğin (1.8) **KdV** denkleminin ardıştırma operatörüne göre, Lax çiftleri

$$R\Phi = (\partial^2 + 4u + 2u_x\partial^{-1})\Phi = 4\lambda\Phi, \quad \Phi_t = (\partial^3 + 6u\partial + 6u_x)\Phi \tag{1.49}$$

şeklindedir. Eğer

$$[R', R]\,[v]\,w \equiv R'[Rv]w - R(R'[v]w) \tag{1.50}$$

ifadesi v ve w ya göre simetrik ise ardıştırma operatörüne **hereditary** denir.

Örnek 1.9.1

$$u_t = u_{xx} + 2uu_x \tag{1.51}$$

Burger denklemi için **hereditary** ardıştırma operatörü;

$$R[u] = \partial + u + u_x\partial^{-1} \tag{1.52}$$

olup, sonsuz tane akış dizisi

$$\begin{aligned} u_{t_1} &= u_x, \\ u_{t_2} &= (u_x + u^2)_x, \\ u_{t_3} &= (u_{xx} + 3uu_x + u^3)_x. \\ &\vdots \end{aligned} \tag{1.53}$$

olarak bulunur. Genel formda, ardıştırma operatörü ile akışlar arasındaki bağıntıise

$$u_{t_{n+1}} = R^n[u]\,u_x = K_{n+1}[u], \quad n = 0, 1, \ldots \tag{1.54}$$

şeklindedir.

Örnek 1.9.2 (1.8) **KdV** denkleminin hereditary ardıştırma operatörü:

$$R[u] = \partial^2 + 4u + 2u_x\partial^{-1} \tag{1.55}$$

dir ve ardıştırma operatörü ile akışların hiyerarşisi ise

$$u_{t_{2n+1}} = R^n[u]\,u_x = K_{2n+1}[u], \quad n = 0, 1, \ldots \tag{1.56}$$

formundadır.

(1.35) **MKdV** denkleminin hereditary ardıştırma operatörü;

$$R[v] = \partial^2 - 4v^2 - 4v_x\partial^{-1}v \tag{1.57}$$

olmak üzere, akış hiyerarşisi

$$u_{t_{2n+1}} = R^n[v]\,v_x = K_{2n+1}[v], \quad n = 0, 1, \ldots$$

olarak verilir.

Örnek 1.9.3

$$iq_\tau = q_{\xi\xi} - 2q\,|q|^2 \tag{1.58}$$

NLS denkleminin ardıştırma operatörü

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \partial - 2q\partial^{-1}q^* & -2q\partial^{-1}q \\ 2q^*\partial^{-1}q^* & -\partial + 2q^*\partial^{-1}q \end{pmatrix}$$

dir ve ardıştırma operatörü ile Lax çiftlerinin gösterimi

$$(\Lambda - 2\mu I)\begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_1^* \end{pmatrix} = 0$$

$$i\begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_1^* \end{pmatrix}_\tau = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} - 2\begin{pmatrix} 2qq^* & q^2 \\ (q^*)^2 & 2qq^* \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_1^* \end{pmatrix}$$

şeklindedir.

1.10 Hamiltoniyen Yapı

u üzerinde uygun sınır şartları varsayımı ile $u = (u_1, u_2, \ldots u_N)$ reel değerli diferensiyel fonksiyonların cebiri A_u ile gösterilsin.

$$A_u^N = A_u \times A_u ... \times A_u \ (N \text{ defa}), \quad \delta_j = \sum_{i=0}^{\infty}\left(-\partial^i\right)\frac{\partial}{\partial u_{j,i}}$$

olmak üzere, δ_u varyasyonel türevi

$$\delta_u : \ A_u \to A_u^N, \tag{1.59}$$

$$\delta_u H[u] = \delta_1 \left(H[u], ..., \delta_N H[u]\right)^T, \quad H[u] \in A_u \tag{1.60}$$

olarak verilir.

Verilen $N \times N$ tipindeki $B[u]$ diferensiyel operatörü için $\mathcal{A}_u = \frac{A_u}{\partial A_u}$ yoğunlukların uzayında $\{,\}_B$ braketi

$$\{\mathcal{H},\mathcal{G}\}_B = (\delta_u \mathcal{H})^T B[u](\delta_u \mathcal{G}), \quad \mathcal{G},\mathcal{H} \in \mathcal{A}_u \tag{1.61}$$

ile tanımlanır. Bu brakete **Poisson braket** adı verilir ve aşağıdaki özellikleri sağlar:

i) $\{\mathcal{G},\mathcal{H}\}_B + \{\mathcal{H},\mathcal{G}\}_B \cong 0,$

ii) $\{\{\mathcal{G},\mathcal{H}\}_B, \mathcal{K}\}_B + \{\{\mathcal{H},\mathcal{K}\}_B, \mathcal{G}\}_B + \{\{\mathcal{K},\mathcal{G}\}_B, \mathcal{H}\}_B \cong 0,$

("$\cong$"; x değişkeninin tam türev modülüne göre eşitliğini gösterir.($Im\partial$))

Burada $\{,\}_B$ braketi Poisson braket ise, $B[u]$ operatörüne Hamiltoniyen operatör denir.

Eğer

$$u_t = K[u] = B[u]\,\delta_u H \tag{1.62}$$

olacak biçimde, $B[u]$ Hamiltoniyen operatörü ve H Hamiltoniyen yoğunluğu varsa, (1.7) oluşum denklem sistemine Hamiltoniyen yapıya sahiptir denir. Örneğin

$$u_t = u_{xxx} + v''(u)u_x \tag{1.63}$$

KdV tipi sistemler,

$$B[u] = \partial, \; H = v(u) - \frac{1}{2}u_x^2 \tag{1.64}$$

olmak üzere,

$$u_t = B[u]\,\delta_u H \tag{1.65}$$

Hamiltoniyen formunda yazılabilir.

Bir başka örnek olarak ise, **NLS** denklemi verilebilir. **NLS** denklemi, Hamilton fonksiyonu

$$H = q_\xi q_\xi^* + |q|^4,$$

olmak üzere

$$\begin{pmatrix} q \\ q^* \end{pmatrix}_\tau = i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\delta H}{\delta q} \\ \frac{\delta H}{\delta q^*} \end{pmatrix}$$

Hamiltoniyen formda yazılabilir.

1.11 Bi-Hamiltoniyen Sistemler

Bazı oluşum denklemleri iki farklı yolla Hamiltoniyen formda

$$u_t = K[u] = B_0[u]\,\delta_u H_1 = B_1[u]\,\delta_u H_0; \tag{1.66}$$

şeklinde yazılabilir. Böyle sistemlere **bi-Hamiltoniyen** denir. Eğer $B_0[u]$ operatörünün tersi alınabilirse,

$$R[u] = B_1[u]\,B_0[u]^{-1} \tag{1.67}$$

(1.66) için bir ardıştırma operatörüdür [10].

a ve c, sabitler olmak üzere $aB_0 + cB_1$ lineer kombinasyonu da Hamiltoniyen operatör ise $B_0[u]$ ve $B_1[u]$ Hamiltoniyen operatörleri integrallenebilirdir. $B_0[u]$ ve $B_1[u]$ operatörleri integrallenebilir olduğunda, (1.67) ardıştırma operatörü hereditary dir [6].

Örnek 1.11.1

$$B_0[u] = \partial, \quad B_1[u] = \partial^3 + 4u\partial + 2u_x, \tag{1.68}$$

olmak üzere, **KdV** denklemi

$$u_{t_{2n+1}} = K_{2n+1}[u] = B_0[u]\,\delta_u H_{n+1} = B_1[u]\,\delta_u H_n, \tag{1.69}$$

formda yazılabildiğinden bi-Hamiltoniyendir. İlk birkaç Hamiltoniyen yoğunluklar ise

$$\begin{aligned} H_0 &= \tfrac{1}{2}u,\ H_1 = \tfrac{1}{2}u^2,\ H_2 = u^3 - \tfrac{1}{2}u_x^2, \\ H_3 &= \tfrac{1}{2}\left(5u^4 - 10uu_x^2 + u_{xx}^2\right), \\ H_4 &= \tfrac{1}{2}\left(14u^5 - 70u^2u_x^2 + 14uu_{xx}^2 - u_{xxx}^2\right), \end{aligned} \tag{1.70}$$

şeklindedir. Ardıştırma operatörü ise,

$$\begin{aligned} R[u] &= B_1[u]\,B_0[u]^{-1} = \left(\partial^3 + 4u\partial + 2u_x\right)\partial^{-1} \\ &= \partial^2 + 4u + 2u_x\partial^{-1} \end{aligned} \tag{1.71}$$

olarak bulunur ve (1.69) **KdV** denklemi ardıştırma operatörü yardımıyla

$$u_{t_{2n+1}} = R^n u_x$$

şeklinde yazılabilir.

1.12 Çok Ölçekli Açılım Metodu

Bu kısımda bir bozulma(pertürbasyon) metodu olan çok ölçekli açılım metodu hakkında kısa bilgi verilecektir. (1.7) lineer olmayan oluşum denkleminin ε scale parametresi ve yavaş değişkenler

$$\begin{aligned}\xi_i &= \xi_i(x,t,\varepsilon)\\ \tau_i &= \tau_i(x,t,\varepsilon)\end{aligned}$$

olmak üzere,

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n u_n(\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_n,\tau_0,\tau_1,\ldots,\tau_n) \tag{1.72}$$

formunda çözümünü arayalım. Bu çözüm (1.7) lineer olmayan oluşum denkleminde yerine yazıldığında ε nun kuvvetlerinin katsayılarında u_n ifadeleri için denklemler elde edilir. Bu işlemleri aşağıdaki örneğe uygulayalım.

Örnek 1.12.1

$$u_t = u_{xxx} + 6uu_x \tag{1.73}$$

KdV denklemi ele alıp, bu denklemin (1.72) formunda çözümünü arayalım. Burada yavaş değişkenler

$$\xi_0 = x,\quad \xi_1 = \varepsilon(x-3k^2t),\quad \tau_0 = t,\quad \tau_1 = -3k\varepsilon^2 t \tag{1.74}$$

olmak üzere, varsayılan çözüm (1.73) **KdV** denkleminde yerine yazılır ve ε nun kuvvetlerinin katsayılarısıfıra eşitlenirse,

$$u_{1\tau_0} - u_{1\xi_0\xi_0\xi_0} = 0 \tag{1.75}$$

$$u_{2\tau_0} - u_{2\xi_0\xi_0\xi_0} = 6u_1u_{1\xi_0} + 3u_{1\xi_0\xi_0\xi_1} + 3k^2u_{1\xi_1} \tag{1.76}$$

$$\begin{aligned} u_{3\tau_0} - u_{3\xi_0\xi_0\xi_0} &= 3u_{2\xi_0\xi_0\xi_1} + 3k^2u_{2\xi_1} + 3u_{1\xi_0\xi_1\xi_1} + 3ku_{1\tau_1} \\ &\quad +6(u_2u_{1\xi_0} + u_1u_{2\xi_0} + u_1u_{1\xi_1}) \end{aligned} \tag{1.77}$$

$$\begin{aligned} u_{4\tau_0} - u_{4\xi_0\xi_0\xi_0} &= 3u_{3\xi_0\xi_0\xi_1} + 3k^2u_{3\xi_1} + 3u_{2\xi_0\xi_1\xi_1} + 3ku_{2\tau_1} + u_{1\xi_1\xi_1\xi_1} \\ &\quad +6(u_3u_{1\xi_0} + u_2u_{2\xi_0} + u_2u_{1\xi_1} + u_1u_{2\xi_0} + u_1u_{3\xi_0}) \end{aligned} \tag{1.78}$$

denklemleri bulunur. *c.c.*; kompleks eşlenik olmak üzere, (1.75) denklemini çözersek

$$u_1(\xi_0, \xi_1, \tau_0, \tau_1) = v_1(\xi_1, \tau_1)e^{2i(kx-k^3t)} + c.c.$$

elde edilir. Bu çözüm (1.76) denkleminde yerine yazıldığında, (1.76) denkleminin çözümü, f_0; integrasyon sabiti olmak üzere,

$$u_2(\xi_0, \xi_1, \tau_0, \tau_1) = v_2(\xi_1, \tau_1)e^{2i(kx-k^3t)} + c.c. + f_0(\xi_1, \tau_1) \tag{1.79}$$

olarak bulunur. Bu iki çözüm (1.77) denkleminde yerine yazılır

$$v_2 = \frac{1}{k^2}v_1^2, \quad v_{-2} = \frac{1}{k^2}v_{-1}^2, \tag{1.80}$$

ve (1.77) denkleminin çözümü

$$u_3(\xi_0, \xi_1, \tau_0, \tau_1) = v_3(\xi_1, \tau_1)e^{3i(kx-k^3t)} + f_1(\xi_1, \tau_1)e^{2i(kx-k^3t)} + c.c. \tag{1.81}$$

formunda seçilirse

$$v_3 = \frac{1}{k^2}v_1^3, \quad f_0 = -\frac{2}{k^2}v_1v_{-1}, \quad f_1 = \frac{2i}{k^2}v_1v_{1\xi_1} \tag{1.82}$$

ve

$$iv_{1\tau_1} = v_{1\xi_1\xi_1} - \frac{2}{k^2}v_1v_1^* \tag{1.83}$$

olarak bulunur. Eğer $q = \frac{v_1}{k}$ olarak tanımlanırsa, (1.83) denkleminden

$$iq_{\tau_1} = q_{\xi_1\xi_1} - 2|q|^2 q \tag{1.84}$$

lineer olmayan Schrödinger denklemi bulunur.

Böylece (1.73) **KdV** denkleminin çözümü q; (1.84) Schrödinger denkleminin çözümü olmak üzere,

$$u(x,t) = \varepsilon k q(\xi_1,\tau_1)e^{2i(kx-k^3t)} + \varepsilon^2(q^2(\xi_1,\tau_1) + 2iq(\xi_1,\tau_1)q_{\xi_1}(\xi_1,\tau_1) + \ldots c.c.$$

şeklinde bulunur.

Bölüm 2

KdV Tipi Oluşum Denklemlerinden NLS Tipi Oluşum Denklemlerinin Çıkarılması

2.1 Giriş

Çok ölçekli açılım metodu, lineer olmayan oluşum denklemlerinin yaklaşık çözümlerini bulmak için kullanılan bir bozulma(perturbation) metodudur. Zakharov ve Kuznetsov [27], bu metodu kullanarak integrallenebilir **KdV** ve **NLS** denklemleri ve bunların spektral problemleri arasında bir ilişki bulmuşlardır.

M.N.Özer çok ölçekli açılım metodunu kullanarak bazı oluşum(evolution) denklemlerinden **NLS** tipi denklemleri elde etmiştir [17, 18]. Aynı zamanda çok ölçekli açılım metodunu sadece **KdV** denkleminin spektral problemine değil ardıştırma operatörüne de uygulamış ve **NLS** denklemi için ardıştırma operatörünü çıkarmıştır.

Bu bölümde çok ölçekli açılım metodunu kullanılarak, **KdV** tipi oluşum denklemlerinden **NLS** tipi oluşum denklemlerinin çıkarılması üzerinde durulacaktır.

2.2 Çok Ölçekli Açılım Metodu

Bu metodla lineer olmayan

$$\mathbf{u}_t = K[\mathbf{u}] \tag{2.1}$$

oluşum denkleminin

$$\mathbf{u}(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varepsilon^{\alpha(n)} v_n(\xi,\tau) e^{in\theta(x,t)} \tag{2.2}$$

formunda yaklaşık çözümü aranacaktır. Burada k; sabit (dalga sayısı).

$$\theta(x,t) = kx - w(k)t \tag{2.3}$$

faz, $w(k)$; yayılma bağıntısı ve $v_{-n} = v_n^*$ (v_{-n}; v_n nin kompleks eşleniği) dır.

$L[\partial_x]u$; $K[\mathbf{u}]$ nun lineer kısmı olmak üzere, $w(k)$, yayılma bağıntısı

$$w(k) = iL[ik] \tag{2.4}$$

olarak bulunur. Ayrıca burada α,

$$\alpha(0) = 2, \quad n \neq 0 \quad \text{için} \quad \alpha(n) = |n| \tag{2.5}$$

ve ε-na bağlı yavaş değişkenler

$$\xi = \varepsilon(x - \frac{dw}{dk}t), \qquad \tau = -\frac{\varepsilon^2}{2!}\frac{d^2w}{dk^2}t. \tag{2.6}$$

şeklinde tanımlanır. Burada (2.2) çözümü (2.3), (2.4), (2.5) ve (2.6) ile birlikte (2.1) denkleminde yerine yazılarak, $e^{in\theta}$ ve ε ölçek parametresinin kuvvetleriden v_n katsayıları elde edilir.

2.3 KdV Denkleminden NLS Denkleminin Çıkarılması

KdV denklemi Bölüm 1 de

$$u_t = u_{xxx} + 6uu_x \tag{2.7}$$

olarak verilmişti. İlk olarak yukarıda ifade edilen çok ölçekli açılım metodunun **KdV** denklemine uygulanışı verilecektir [17]. **KdV** denkleminin yayılma bağıntısı

$$w(k) = k^3 \tag{2.8}$$

dir. Verilen (2.8) bağıntısı ile birlikte (2.3), (2.6) ve (2.2) çözümü (2.7) denkleminde yerine yazıldığında, herbir n için

$n = 0$ için ε^3 ün katsayısından, f_0; integrasyon sabiti olmak üzere,

$$v_0 = \frac{-2}{k^2}\left|v_1\right|^2 + f_0, \tag{2.9}$$

$n = 1$ için ε^3 ün katsayısından

$$-\frac{\partial v_1}{\partial \tau} + i\frac{\partial^2 v_1}{\partial \xi^2} - 2i(v_1^* v_2 + v_0 v_1) = 0, \tag{2.10}$$

$n = 2$ için

$$v_2 = \frac{1}{k^2}v_1^2, \tag{2.11}$$

ifadeleri bulunur.

Genel olarak $n \geq 2$ için

$$(n^2 - 1)k^2\varepsilon^{\alpha(n)}v_n = 3\sum_{m=-\infty}^{\infty} \varepsilon^{\alpha(m)+\alpha(n-m)}v_m v_{n-m} \tag{2.12}$$

elde edilir. Böylece, $\alpha(m) + \alpha(n-m) = \alpha(n)$ olmak üzere, (2.12) ifadesi

$$v_n = \frac{3}{k^2(n^2 - 1)}\sum_{m=-\infty}^{\infty} v_m v_{n-m}$$

şeklini alır. Burada herbir v_n değeri bir önceki indisli değeri içereceğinden, ardıştırma ilişkisi, $n \geq 2$ için

$$v_n = n(\frac{1}{2k^2})^{n-1} v_1^n$$

olarak bulunur. (2.9) ve (2.11) ifadeleri (2.10) denkleminde yerine yazıldığında.

$$q_1 = \frac{v_1}{k}, \quad q_1^* = \frac{v_1^*}{k} \tag{2.13}$$

olmak üzere, kompleks eşleniği ile birlikte

$$iq_\tau = q_{\xi\xi} - 2q\,|q|^2 \tag{2.14}$$

NLS denklemi bulunur. Böylece çok ölçekli açılım metodu kullanılarak **KdV** denkleminden **NLS** denklemi bulunmuş olur.

2.3.1 Lineer Spektral Problem

KdV denkleminin spektral problemi

$$\partial \equiv \frac{\partial}{\partial x}, \quad \Phi \equiv \Phi(x,t)$$

olmak üzere,

$$L\Phi = (\partial^2 + u)\Phi = \lambda\Phi \tag{2.15}$$

$$\Phi_t = P\Phi = (4\partial^3 + 6u\partial + 3u_x)\Phi \tag{2.16}$$

formundadır.

(2.7) **KdV** denkleminin (2.15) ve (2.16) spektral problemi için, α sabit ve $\theta(x,t)$ faz, $w(k) = k^3$ yayılma bağıntısı olmak üzere,

$$\Phi(x,t) = e^{i\alpha\theta(x,t)}$$

çözümü (2.15) ve (2.16) denklemlerinde yerine yazıldığında,

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad \lambda = -\frac{k^2}{4}$$

bulunur. Dolayısıyla, μ yeni spektral parametre olmak üzere, λ spektral parametresi

$$\lambda = -(\frac{k}{2} + \varepsilon\mu)^2$$

şeklinde tanımlanır, (2.2) ve

$$\Phi(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varepsilon^{\alpha(|n|-1)/2}\Phi_n(\xi,\tau)e^{in\theta(x,t)/2}$$

çözümleri (2.15) ve (2.16) denklemlerinde yerine yazılırsa herbir n için ε nun kuvvetlerinin katsayılarından aşağıdaki ifadeler bulunur:

i) $n = \pm 1$ için ε nun katsayısından

$$\begin{aligned} i\frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi} + \frac{1}{k}v_1\Phi_1^* &= \mu\Phi_1 \\ &, \\ i\frac{\partial \Phi_1^*}{\partial \xi} + \frac{1}{k}v_1^*\Phi_1 &= \mu\Phi_1^* \end{aligned} \qquad (2.17)$$

ve ε^2 nin katsayısından

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \tau} + 2i\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \xi^2} + \frac{2}{k}v_1\frac{\partial \Phi_1^*}{\partial \xi} - \frac{1}{k}\Phi_1^*\frac{\partial v_1}{\partial \xi} + 2iv_1^*\Phi_3 + iv_0\Phi_1 &= 0 \\ &, \\ \frac{\partial \Phi_1^*}{\partial \tau} - 2i\frac{\partial^2 \Phi_1^*}{\partial \xi^2} + \frac{2}{k}v_1^*\frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi} - \frac{1}{k}\Phi_1\frac{\partial v_1^*}{\partial \xi} + 2iv_1\Phi_3^* - iv_0\Phi_1^* &= 0 \end{aligned} \qquad (2.18)$$

bulunur.

ii) $n = \pm 3$ için ε nun katsayısından

$$\Phi_3 = \frac{1}{2k^2}v_1\Phi_1, \quad \Phi_3^* = \frac{1}{2k^2}v_1^*\Phi_1^* \qquad (2.19)$$

elde edilir. Ardıştırma ilişkisi (2.13) ile birlikte

$$\Phi_n = (\frac{1}{2k})^{(n-1)/2}q^{(n-1)/2}\Phi_1, \qquad for \;\; n \geq 3$$

$$\Phi_n = (\frac{1}{2k})^{(-n-1)/2}q^{*(-n-1)/2}\Phi_1^*, \qquad for \;\; n \leq -3$$

şeklindedir. (2.13) kullanılarak, (2.17) denkleminden, **NLS** denklemi için L operatörü

$$\begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_1^* \end{pmatrix}_\xi = i \begin{pmatrix} -\mu & q \\ -q^* & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_1^* \end{pmatrix} \tag{2.20}$$

olarak ve (2.19) eşitlikleri (2.18) denkleminde yerine yazılırsa, P operatörü de

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_1^* \end{pmatrix}_\tau &= -2\left[i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \begin{pmatrix} 0 & q \\ q^* & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial\xi} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -iqq^* & q_\xi \\ q_\xi^* & iqq^* \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_1^* \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.21}$$

olarak elde edilir. (2.20) denklemi, (2.21) denkleminde kullanılırsa P operatörü

$$\begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_1^* \end{pmatrix}_\tau = \begin{pmatrix} i(2\mu^2 + qq^*) & (\partial_\xi - 2i\mu)q \\ (\partial_\xi - 2i\mu)q^* & -i(2\mu^2 + qq^*) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_1^* \end{pmatrix} \tag{2.22}$$

formunu alır.

Böylece **NLS** denklemi, (2.20) ve (2.22) lineer spektral probleminin bir integrallenebilme şartıdır(1.23).

2.3.2 Ardıştırma Operatörü

(2.7) **KdV** denklemi için

$$R = (\partial^2 + 4u + 2u_x\partial^{-1}) \tag{2.23}$$

ardıştırma operatörü cinsinden Lax çiftlerinin gösteriminin

$$R\Phi = (\partial^2 + 4u + 2u_x\partial^{-1})\Phi = 4\lambda\Phi, \quad \Phi_t = K'[u]\Phi = (\partial^3 + 6u\partial + 6u_x)\Phi \tag{2.24}$$

olduğu bilinmektedir [19]. Ardıştırma operatörü, u_x ifadesine uygulandığında

$$u_{t_{2n+1}} = R^n[u]u_x, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{2.25}$$

bağıntısını sağlayan **KdV** denkleminin ardışık akışları elde edilir. İlk birkaç tanesi

$$\begin{aligned}
u_{t_1} &= R[u]u_x &&= (\partial^2 + 4u + 2u_x\partial^{-1})u_x = u_{xxx} + 6uu_x \\
u_{t_2} &= R^2[u]u_x &&= u_{xxxxx} + 10uu_{xxx} + 20u_x u_{xx} + 30u^2 u_x \\
u_{t_3} &= R^3[u]u_x &&= u_{xxxxxxx} + 14uu_{xxxxx} + 42u_x u_{xxxx} + 70u_{xx}u_{xxx} + \\
& && \quad 70u^2 u_{xxx} + 280uu_x u_{xx} + 70u_x^3 + 140u^3 u_x \\
&\vdots
\end{aligned}$$

şeklinde olup bunlara sırasıyla **KdV** , beşinci mertebeden **KdV** ve yedinci mertebeden **KdV** denklemi adı verilir.

(2.24) Lax çiftlerinde $\Phi \to \Phi_x$ dönüşümü yapıldığında

$$R\Phi = (\partial^3 + 4(u - \lambda)\partial + 2u_x)\Phi = 0, \tag{2.26}$$

$$\Phi_t = (\partial^3 + 6u\partial)\Phi \tag{2.27}$$

formuna dönüşür.

Tanımlanan çok ölçekli açılım metodu **KdV** denkleminin ardıştırma operatörüne uygulandığında **NLS** denkleminin ardıştırma operatörü bulunmuştur [19]. u için (2.2), (2.3) ve (2.6) çözümleri ile

$$\beta(0) = 1, \quad n \neq 0 \text{ için } \beta(n) = |n| \text{ ve } \lambda = (i\frac{k}{2} + \mu\varepsilon)^2$$

olmak üzere

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} e^{\beta(n)}\Phi_n(\xi, \tau)e^{in\theta(x,t)} - \sum_{n=-\infty}^{-1} e^{\beta(n)}\Phi_n(\xi, \tau)e^{in\theta(x,t)} \tag{2.28}$$

çözümü (2.26) ve (2.27) denklemlerinde yerine yazıldığında herbir $e^{in\theta}$ in katsayılarından

$$\Phi_n = n(\frac{1}{2k})^{n-1}q^{n-1}\Phi_1, \qquad for \ \ n \geq 2$$
$$\Phi_n = -n(\frac{1}{2k})^{-n-1}(q^*)^{-n-1}\Phi_1^*, \qquad for \ \ n \leq -2 \tag{2.29}$$

ardıştırma bağıntısı elde edilir. I ;2×2 tipinde birim matrisi ve

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \partial - 2q\partial^{-1}q^* & -2q\partial^{-1}q \\ 2q^*\partial^{-1}q^* & -\partial + 2q^*\partial^{-1}q \end{pmatrix} \tag{2.30}$$

ardıştırma operatörü cinsinden Lax çiftleri ise

$$(\Lambda - 2\mu I)\begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_1^* \end{pmatrix} = 0, \tag{2.31}$$

$$i\begin{pmatrix} \Phi_1 \\ -\Phi_1^* \end{pmatrix}_\tau = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} - 2\begin{pmatrix} 2qq^* & q^2 \\ (q^*)^2 & 2qq^* \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_1^* \end{pmatrix}, \tag{2.32}$$

olarak bulunur.

2.4 Beşinci Mertebeden KdV Denkleminden NLS Denkleminin Elde Edilmesi

Beşinci mertebeden lineer olmayan oluşum denklemlerinin genel formu

$$u_t = K[u] = u_{xxxxx} + Auu_{xxx} + Bu_xu_{xx} + Cu^2u_x \tag{2.33}$$

şeklindedir. Beşinci mertebeden lineer olmayan oluşum denklemlerinin verilen A, B, C katsayılarına göre

$$u_t = u_{xxxxx} + 10uu_{xxx} + 20u_xu_{xx} + 30u^2u_x \tag{2.34}$$

$$u_t = u_{xxxxx} + 5uu_{xxx} + 5u_xu_{xx} + 5u^2u_x \tag{2.35}$$

$$u_t = u_{xxxxx} + 10uu_{xxx} + 25u_xu_{xx} + 20u^2u_x \tag{2.36}$$

şeklinde sadece üç tane integrallenebilen oluşum denklemleri vardır [1, 4]. Bu denklemler sırasıyla, beşinci mertebeden **KdV**, **Sawada-Kotera** ve **Kaup-Kupershmidt** denklemleridir. Fordy ve Gibbon [2] bu üç integrallenebilir denklemin

$$L_t = [P, L] \tag{2.37}$$

Lax formunda Lax çiftlerine sahip olduğunu göstermişlerdir. Örneğin beşinci mertebeden Lax ın **KdV** denklemi

$$\begin{aligned} L &= (\partial^2 + u) \\ P &= 16\partial^5 + 40u\partial^3 + 60u_x\partial^2 + (50u_{xx} + 30u^2)\partial + 15u_{xxx} + 30uu_x \end{aligned}$$

lax çiftlerine sahiptir.

Ayrıca bu üç denklemin

$$\begin{aligned} q_{1tt} + w^2q_1 &= bq_1^2 - aq_2^2 \\ q_{2tt} + q_2 &= -2aq_1q_2 \end{aligned} \tag{2.38}$$

Henon-Heiles sisteminin

i-) $b = -a$ durumunda **Sawada-Kotera** denklemi,

ii-) $b = -6a$ durumunda beşinci mertebeden **KdV** denklemi,

iii-) $b = -16a$ durumunda **Kaup-Kupershmidt** denklemi,

üç durumuyla ilişkili olduğu gösterilmiştir.

Lax ın beşinci mertebeden (2.34) **KdV** denklemine yukarıda ifade ettiğimiz çok ölçekli açılım metodu, $w(k) = -k^5$ yayılma bağıntısı olmak üzere, uygulandığında herbir n için ε nun katsayılarından aşağıdaki denklemler bulunmuştur [18]:

$$v_0 = \frac{-2}{k^2}|v_1|^2, \tag{2.39}$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial \tau} + i\frac{\partial^2 v_1}{\partial \xi^2} + i(3v_1^* v_2 + v_0 v_1) - \frac{3i}{k^2}\left|v_1\right|^2 v_1, \tag{2.40}$$

$$v_2 = \frac{1}{k^2} v_1^2. \tag{2.41}$$

$n \geq 2$ için genel olarak tekrarlanan bağıntı,

$$v_n = n(\frac{1}{2k^2})^{n-1} v_1^n$$

olarak yazılabilir.

(2.39) ve (2.41) ifadeleri (2.40) denkleminde yerine yazılırsa

$$q_1 = \frac{v_1}{k}, \quad q_1^* = \frac{v_1^*}{k} \tag{2.42}$$

olmak üzere, kompleks eşleniği ile birlikte (2.14) **NLS** denklemi bulunur.

2.4.1 Lineer Spektral Problem

(2.34) beşinci mertebeden **KdV** denklemi için lineer spektral problem

$$\Phi \equiv \Phi(x,t)$$

olmak üzere

$$L\Phi = (\partial^2 + u)\Phi = \lambda\Phi \tag{2.43}$$

$$\begin{aligned} \Phi_t &= P\Phi \\ &= (16\partial^5 + 40u\partial^3 + 60u_x\partial^2 + (50u_{xx} + 30u^2)\partial + 15u_{xxx} + 30uu_x)\Phi \end{aligned} \tag{2.44}$$

formundadır. (2.43) ve (2.44) denklemlerinin β; sabit ve $\theta(x,t)$; faz olmak üzere, yayılma bağıntısı;

$$\Phi(x,t) = e^{i\beta\theta(x,t)}$$

formundadır. Φ ifadesi (2.43) ve (2.44) denklemlerinde yerine yazıldığında,

$$\beta = \frac{1}{2}, \quad \lambda = -\frac{k^2}{4}$$

bulunur. Spektral parametre

$$\lambda = -(\frac{k}{2} + \varepsilon\mu)^2$$

alındığında, (2.2) ile

$$\Phi(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varepsilon^{\alpha(|n|-1)/2}\Phi_n(\xi,\tau)e^{in\theta(x,t)/2}$$

çözümleri (2.43) ve (2.44) denklemlerinde yerine yazılır ve (2.42) değerleri kullanılırsa ε nun kuvvetlerinin katsayılarından, **NLS** denklemi için lineer spektral problem

$$\begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_1^* \end{pmatrix}_\xi = i\begin{pmatrix} -\mu & q \\ -q^* & \mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_1^* \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_1^* \end{pmatrix}_\tau = \begin{pmatrix} i(2\mu^2 + qq^*) & (\partial_\xi - 2i\mu)q \\ (\partial_\xi - 2i\mu)q^* & -i(2\mu^2 + qq^*) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_1^* \end{pmatrix}$$

olarak bulunur.

2.5 Yedinci Mertebeden KdV Denkleminden NLS Denkleminin Elde Edilmesi

Yedinci mertebeden integrallenebilen lineer olmayan oluşum denkleminin

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xxxxxxx} + 14uu_{xxxxx} + 42u_xu_{xxxx} + 70u_{xx}u_{xxx} + \\ &\quad 70u^2u_{xxx} + 280uu_xu_{xx} + 70u_x^3 + 140u^3u_x \end{aligned}$$

şeklinde olduğunu bilinmektedir. Bu denklem için yayılma bağıntısı $w(k) = k^7$ olduğundan, benzer olarak çok ölçekli açılım metodu uygulandığında, herbir n için ε nun katsayılarından,

$$v_0 = \frac{-2}{k^2}|v_1|^2 \qquad (2.45)$$

$$-\frac{\partial v_1}{\partial \tau} + i\frac{\partial^2 v_1}{\partial \xi^2} - i(6v_1^* v_2 + \frac{14}{21}v_0 v_1) + \frac{20i}{3k^2}|v_1|^2 v_1 \tag{2.46}$$

$$v_2 = \frac{10}{7k^2}|v_1|^2 \tag{2.47}$$

ifadeleri bulunur. (2.45) ve (2.47) değerleri (2.46) denkleminde yerine yazılır ve

$$q = \frac{\sqrt{2}v_1}{\sqrt{7}k}, \quad q^* = \frac{\sqrt{2}v_1^*}{\sqrt{7}k}$$

dönüşümü yapılırsa (2.14) **NLS** denklemi elde edilir.

Sonuç: KdV, 5KdV, 7KdV denklemlerinin hepsinden çok ölçekli açılım metodunu kullanarak **NLS** denklemini bulunmuş oldu.

2.6 N Bileşenli Kuple KdV (KKdV) Denklemleri

Yukarıda tanıtılan çok ölçekli açılım metodu, N bileşenli **KKdV** denklemlerine de uygulanmış ve N bileşenli **KNLS** denklemleri elde edilmiştir[17]. Aranılan çözüm (2.3), (2.4), (2.5)ve (2.6) ile birlikte, $i = 1, 2, \ldots, N$ için

$$u_{jn}^* = u_{j(-n)} \text{ ve } u_{jn}(x,t) = \varepsilon^{\alpha(n)}\, u_{jn}(\xi,\tau) \tag{2.48}$$

olmak üzere,

$$u_j(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_{jn}(x,t)e^{in\theta(x,t)} \tag{2.49}$$

seri formunda varsayılmıştır. Şimdi $N = 2$ için sonuçlar kısaca verilecektir.

2.6.1 İki Bileşenli KdV Denklemi

$N = 2$ için

$$\begin{aligned} u_{1t} &= (\partial^3 + 4u_1\partial + 2u_{1x})(u_1 + \tfrac{3}{4}u_2^2) \\ u_{2t} &= (\partial^3 + 4u_1\partial + 2u_{1x})u_2 + (4u_2\partial + 2u_{2x})(u_1 + \tfrac{3}{4}u_2^2) \end{aligned} \tag{2.50}$$

KKdV denklemini ele alalım. (2.49) çözümü (2.3), (2.4), (2.5), (2.6) ve (2.48) ile birlikte (2.50) denklemlerinde yerine yazıldığında,

$$q_1 = \frac{v_{11}}{k}, \quad q_2 = \frac{v_{21}}{2}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} iq_{1\tau} &= q_{1\xi\xi} - 2q_1(|q_1|^2 - 2|q_2|^2) + 2q_2^2 q_1^* \\ iq_{2\tau} &= q_{2\xi\xi} + 2q_2(|q_2|^2 - 2|q_1|^2) - 2q_1^2 q_2^* \end{aligned} \tag{2.51}$$

KNLS denklemi elde edilir. Bu denklem için spektral problem, (2.50) denklemlerine karşı gelen

$$L\Phi = (\partial^2 + u_1 + \lambda u_2)\Phi = \lambda^2\Phi)$$

$$\Phi_t = P\Phi = \left[4\partial^3 + (6(u_1 + \lambda u_2) + \tfrac{3}{2}u_2^2)\partial + 3(u_1 + \lambda u_2 - \tfrac{1}{4}u_2^2)_x\right]\Phi$$

lineer spektral probleminden hareketle $\lambda = i(\frac{k}{2} - \mu\varepsilon)$ spektral parametre ve $Q = q_1 + iq_2$ olmak üzere

$$\begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_1^* \end{pmatrix}_\xi = i\begin{pmatrix} -\mu & Q \\ -Q^* & \mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_1^* \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_1^* \end{pmatrix}_\tau = \begin{pmatrix} i(2\mu^2 + QQ^*) & Q_\xi - 2i\mu Q \\ Q^*{}_\xi + 2i\mu Q^* & -i(2\mu^2 + QQ^*) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_1^* \end{pmatrix}$$

şeklinde bulunmuştur [20].

Ayrıca (2.51) denklemi Hamiltoniyen yoğunluk

$$H = q_{1\xi}q_{1\xi}^* + |q_1|^4 - q_2^2 q_1^* - q_{2\xi}q_{2\xi}^* + |q_2|^4 - q_1^2 q_2^* - 4|q1|^2 |q_2|^2$$

olmak üzere

$$iq_{1\tau} = -\frac{\delta H}{\delta q_1^*}, \quad iq_{2\tau} = \frac{\delta H}{\delta q_2^*}$$

Hamiltoniyen formda yazılabilir.

Şimdi de iki bileşenli integrallenebilir [23] başka bir **KKdV** denklemini ele alalım.

$$\begin{aligned} u_{1t} &= -u_{1xxx} + 6u_1u_{1x} - 3u_2u_{2xxx} - 3u_{2x}u_{2xx} + 3u_{1x}{u_2}^2 + 6u_1u_2u_{2x} \\ u_{2t} &= -u_{2xxx} + 3{u_2}^2u_{2x} + 3u_1u_{2x} + 3u_{1x}u_2 \end{aligned} \tag{2.52}$$

(2.49) şeklinde varsayılan seri çözümü bu denklemde yerine yazılırsa,

i) $n = 0$ için ε^3 ün katsayısından

$$\begin{aligned} v_{00} &= \tfrac{2}{k^2}(|v_{01}|^2 + k^2|v_{11}|^2) \\ v_{10} &= \tfrac{1}{k^2}(v_{01}v_{11}^* + v_{01}^*v_{11}) \end{aligned} \tag{2.53}$$

ii) $n = 2$ için ε^2 nin katsayısından

$$\begin{aligned} v_{02} &= -\tfrac{1}{k^2}({v_{01}}^2 + k^2v_{11}^2) \\ v_{12} &= -\tfrac{1}{k^2}v_{01}v_{11} \end{aligned} \tag{2.54}$$

bulunur. Bu değerler yerine yazıldığında, $n = 1$ için ε^2 nin katsayısından

$$\begin{aligned} v_{01\tau} &= \tfrac{i}{k^2}(-k^2v_{01\xi\xi} + 2v_{01}|v_{01}|^2 + 2k^2v_{01}|v_{11}|^2) \\ v_{11\tau} &= \tfrac{i}{k^2}(-k^2v_{11\xi\xi} + 2v_{11}|v_{01}|^2 + 2k^2v_{11}|v_{11}|^2) \end{aligned} \tag{2.55}$$

elde edilir. $q_1(\xi,\tau)$ ve $q_2(\xi,\tau)$ için $\xi - \tau$ koordinatlarında

$$q_1 = \frac{v_{01}}{k}, \quad q_2 = v_{11}$$

varsayımıyla

$$\begin{aligned} iq_{1\tau} &= q_{1\xi\xi} - 2q_1(|q_1|^2 + |q_2|^2) \\ iq_{2\tau} &= q_{2\xi\xi} - 2q_2(|q_1|^2 + |q_2|^2) \end{aligned} \tag{2.56}$$

(2.51) **KNLS** denkleminden farklı bir başka yüksek mertebeden **KNLS** denklemi elde edilir. İntegrallenebilirliği [11] gösterilmiş olan (2.56) **KNLS** denkleminin spektral problemi ile ilgilenilmemiştir.

(2.56) denklemi Hamiltoniyen yoğunluk

$$H = q_{1\xi}q_{1\xi}^* + |q_1|^4 - q_{2\xi}q_{2\xi}^* + |q_2|^4 - q_1^2q_2^* + 2|q1|^2|q_2|^2$$

olmak üzere

$$iq_{1\tau} = -\frac{\delta H}{\delta q_1^*}, \quad iq_{2\tau} = \frac{\delta H}{\delta q_2^*}$$

Hamiltoniyen formda yazılabilir.

Bölüm 3

NLS Tipi Denklemlerden KdV Tipi Denklemlerin Bulunması

3.1 Giriş

İkinci bölümde, verilen lineer olmayan oluşum denklemlerine çok ölçekli açılım metodunu uygulayarak yine lineer olmayan Schrödinger tipi denklemler elde edilmişti. Bu bölümde ise, integrallenebilir Schrödinger tipi denklemlerden bir çok ölçekli açılım metodu kullanılarak integrallenebilir lineer olmayan oluşum denklemleri çıkarılacaktır.

İlk olarak, bu metodu **NLS** denklemine uygulayarak, **KdV** akış denklemleri (hiyerarşisi), **Sawada-Kotera** ve **Kaup-Kupershmidt** denklemleri çıkarılmıştır. Daha sonra ise, **NLS** denkleminin Hamiltoniyen fonksiyonundan başlayarak **KdV** akış denklemlerinin Hamiltoniyen fonksiyonlarına ulaşılmıştır.

Ayrıca bu metod, **NLS** denkleminden başka **MNLS** (modifiye NLS) denklemine uygulanmış ve **MKdV**(modifiye KdV) denklemi bulunmuştur.

Son olarak, çok ölçekli açılım metodu tek ve iki boyutlu yüksek mertebeden türevli **NLS** denklemlerine uygulanarak, **KdV** ve **KKdV**(kuple KdV) denklemleri elde edilmiştir. Hesaplamalarımızı yaparken Reduce [3] cebirsel hesaplamalar paket programı kullanılmıştır.

Şimdi, kullanılacak olan çok ölçekli açılım metodu tanıtılacaktır.

3.2 Çok Ölçekli Açılım Metodu

L; q nun ξ-değişkenine göre kısmi türevlerinin lineer bir fonksiyonu olmak üzere, kompleks eşleniği ile birlikte

$$i\mathbf{q}_\tau = L[\mathbf{q}] + \alpha\mathbf{q}\,|\mathbf{q}|^2 + i(\beta_k(\mathbf{q}\,|\mathbf{q}|^2)_\xi \quad \mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots q_n),\ k = 1, 2, \dots \tag{3.1}$$

formundaki lineer olmayan Schrödinger tipi (**NLS**) denklemleri ele alalım. Bu tip denklemler için, $N_k(\xi,\tau)$; reel değerli bir fonksiyon olmak üzere.

$$\mathbf{q}_k(\xi,\tau) = e^{i\theta(\xi,\tau)}\sqrt{N_k(\xi,\tau)},\quad \mathbf{q}_k^*(\xi,\tau) = e^{-i\theta(\xi,\tau)}\sqrt{N_k(\xi,\tau)} \tag{3.2}$$

formunda çözümler varsayarak, büyüklük ve fazı ayıralım. Varsayılan çözüm (3.1) denkleminde yerine yazıldığında, üst indisler $\xi-$değişkenine göre türevi göstermek üzere ve $j = 1, 2, \dots$ için,

$$\begin{aligned} (N_k)_\tau &= f(N_k, N_k^{(j)}, \theta^{(j)}) \\ \theta_\tau &= g(N_k, N_k^{(j)}, \theta^{(j)}) \end{aligned} \tag{3.3}$$

olacak şekilde, iki denklem elde edilir. Burada $\theta(\xi,\tau)_\xi = V(\xi,\tau)$ alınırsa, (3.3) sistemi

$$\begin{aligned} (N_k)_\tau &= f(N_k, N_k^{(j)}, V^{(j)}) \\ V_\tau &= g(N_k, N_k^{(j)}, V^{(j)}) \end{aligned} \tag{3.4}$$

sistemine dönüşür.

$\varepsilon > 0$ ölçek parametresine bağlı olarak, yavaş değişkenler

$$x = \varepsilon(\xi + 2\tau), \quad t_n = \varepsilon^{2n+1}\tau \ , \quad n = 1, 2, \ldots \tag{3.5}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} \theta &= -\tau + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{2n-1}\theta_n(x, t_1, t_2, \ldots, t_n), \\ N &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{2n} N_n(x, t_1, t_2, \ldots, t_n) \ , \\ V &= \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{2n} V_n(x, t_1, t_2, \ldots, t_n) \end{aligned} \tag{3.6}$$

seri açılımları (3.4) sisteminde yerine yazıldığında ve ε nun kuvvetlerindeki katsayılar sıfıra eşitlendiğinde, çeşitli mertebeden lineer olmayan oluşum denklemlerini bulunur. Şimdi bu metodu (3.1) formundaki bazı integrallenebilen Schrödinger tipi denklemlere uygulayalım.

3.3 NLS Denkleminden KdV Denkleminin Elde Edilmesi

Çok ölçekli açılım metodu ile **KdV** denkleminden **NLS** denklemi elde edildiğini biliyoruz. Şimdi de (3.1) de

$$n = 1 \ , \quad \alpha = -2, \quad \mathbf{q} = q \quad \text{ve} \quad L[\mathbf{q}] = q_{\xi\xi}, \quad \beta_k = 0$$

olmak üzere,

$$iq_\tau = q_{\xi\xi} - 2q\,|q|^2 \ , \tag{3.7}$$

NLS denkleminden yola çıkarak **KdV** denklemini bulacağız. Varsayılan (3.2) çözümlerinden $N_1(\xi, \tau) = N(\xi, \tau)$ reel değerli bir fonksiyon olmak üzere,

$$q(\xi, \tau) = e^{i\theta(\xi,\tau)}\sqrt{N(\xi, \tau)}, \ q^*(\xi, \tau) = e^{-i\theta(\xi,\tau)}\sqrt{N(\xi, \tau)} \tag{3.8}$$

olarak alınır ve bunlar (3.7) **NLS** denkleminde yerine yazılırsa, reel ve sanal kısımlarından sırasıyla,

$$\begin{aligned} N_\tau &= 2(\theta_{\xi\xi}N + \theta_\xi N_\xi) \\ \theta_\tau &= \theta_\xi^2 + 2N + \frac{N_\xi^2}{4N^2} - \frac{N_{\xi\xi}}{4N} \end{aligned} \tag{3.9}$$

şeklinde olan iki tane diferensiyel denklem bulunur. Burada eğer $\theta(\xi,\tau)_\xi = V(\xi,\tau)$ alınırsa bu iki denklem (3.4) sisteminin bir özel hali olan

$$\begin{aligned} N_\tau &= 2(V_\xi N + V N_\xi) \\ V_\tau &= (V^2 + 2N + \frac{N_\xi^2}{4N^2} - \frac{N_{\xi\xi}}{4N})_\xi \end{aligned} \tag{3.10}$$

sistemine dönüşür. Şimdi (3.5) ile birlikte (3.6) seri açılımlarını (3.10) sisteminde yerine yazar ve $\varepsilon-$ nun kuvvetlerindeki ifadeleri sıfıra eşitlersek:

ε^3 ün katsayısından

$$N_{1x} = V_{1x} \tag{3.11}$$

ε^5 :

$$\begin{aligned} 2N_{2x} - 2N_{1x}V_1 + N_{1t_1} - 2V_{2x} - 2V_{1x}N_1 &= 0 \\ -4N_{2x} + N_{1xxx} - 8N_{1x}N_1 + 4V_{2x} + 8V_{1x}N_1 - 4V_1V_{1x} + 2V_{1t_1} &= 0 \end{aligned} \tag{3.12}$$

ε^7 :

$$\begin{aligned} &2N_{3x} - 2N_{2x}V_1 + N_{2t_1} - 2N_{1x}V_2 + N_{1t_2} - 2V_{3x} - \\ &2V_{2x}N_1 - 2V_{1x}N_2 = 0 \\ \\ &-4N_{3x} + N_{2xxx} - 8N_{2x}N_1 + 2N_{1xxx}N_1 - N_{1xx}N_{1x} - 8N_{1x}N_2 \\ &-4N_{1x}N_1^2 + 4V_{3x} + 8N_1V_{2x} - 4V_1V_{2x} + 2V_{2t_1} + 8V_{1x}N_2 + \\ &4V_{1x}N_1^2 - 8V_{1x}N_1V_1 - 4V_{1x}V_2 + 4N_1V_{1t_1} + 2V_{1t_2} = 0 \end{aligned} \tag{3.13}$$

ε^9 :

$$
\begin{aligned}
&2N_{4x} - 2N_{3x}V_1 + N_{3t_1} - 2N_{2x}V_2 + N_{2t_2} - N_{1x}V_3 + \\
&N_{1t_3} - 2V_{4x} - 2V_{3x}N_1 - 2V_{2x}N_2 - 2V_{1x}N_3 \qquad = \quad 0 \\
\\
&-4N_{4x} + N_{3xxx} - 12N_{3x}N_1 + 2N_{2xxx}N_1 - 2N_{2xx}N_{1x} - \\
&12N_{2x}N_2 - 12N_{2x}N_1^2 + 2N_{1xxx}V_2 + N_{1xxx}N_1^2 - \\
&12N_{1x}N_3 - 24N_{1x}N_2N_1 - 4N_{1x}N_1^3 + 4V_{4x} + 12V_{3x}N_1 + \\
&2V_{3t_1} + 12V_{2x}N_2 + 12V_{2x}N_1^2 - 12V_{2x}N_1V_1 - 4V_2V_{2x} + \\
&2V_{2t_2} + 12V_{1x}N_3 + 24V_{1x}N_1N_2 - 12V_{1x}N_2V_1 - \\
&12V_{1x}N_1^2V_1 - 12V_{1x}N_1V_2 - 4V_{1x}V_3 + N_{1x}^3 - 4V_{3x}V_1 + \\
&6V_{1t_1}N_2 + 6V_{1t_1}N_1^2 + 6V_{1t_2}N_1 + 6V_{2x}N_1 - 2N_{2x}N_{1xx} + \\
&2V_{1t_3} - 2N_{1xx}N_{1x}N_1 + 4V_{1x}N_1^3 \qquad = \quad 0
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

$\vdots$

elde edilir. Eğer (3.11) denkleminden

$$N_1 = V_1 \tag{3.15}$$

olarak alıp, (3.12) sisteminde yerine yazarsak,

$$N_2 = V_2 + \frac{1}{4}(\frac{1}{2}V_{1xx} + V_1^2) \tag{3.16}$$

olmak üzere,

$$V_{1t_1} = -\frac{1}{4}(V_{1xxx} - 12V_1V_{1x}) \tag{3.17}$$

denklemi veya

$$t_1 \to -\frac{1}{4}t_1, \quad V_1 \to -\frac{1}{2}u$$

ötelemelerini yaparsak, akış denklemlerinden

$$u_{t_1} = u_{xxx} + 6uu_x \tag{3.18}$$

KdV denklemi bulunur.

(3.16) denkleminde

$$V_2 = k_1 V_1^2 + k_2 V_{1xx} \tag{3.19}$$

olarak alınıp, bilinen değerler (3.13) denkleminde yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned} V_{1t_2} &= \frac{1}{32}(-64N_{3x} + 64V_{3x} + (16k_1 + 32k_2)V_{1xxx}V_1 + \\ & (8k_2+1)V_{1xxxxx} + (-160k_1 - 28)V_{1xx}V_{1x} + 192k_1 V_{1x}V^2) \end{aligned} \tag{3.20}$$

denklemi elde edilir. Eğer

$$k_1 = -\frac{1}{10}, \quad k_2 = -\frac{11}{160} \tag{3.21}$$

olmak üzere,

$$N_3 = V_3 + \frac{19}{1280}V_{1xxxx} - \frac{156}{1280}V_{1xx}V_1 - \frac{173}{1280}V_{1x}^2 - \frac{164}{1280}V_1^3 \tag{3.22}$$

olarak seçilirse, (3.20) denklemi

$$V_{1t_2} = -\frac{1}{64}(V_{1xxxxx} - 8V_{1xxx}V_1 - 16V_{1xx}V_{1x} + \frac{96}{5}V_{1x}V^2) \tag{3.23}$$

olarak bulunur. Burada, tekrar

$$t_2 \to -\frac{1}{64}t_2, \quad V_1 \to -\frac{10}{8}u$$

ötelemelerini yaparsak, **KdV** akış denklemlerinden olan

$$u_{t_2} = u_{xxxxx} + 10u_{xxx}u + 20u_{xx}u_x + 30u_x u^2 \tag{3.24}$$

integrallenebilen beşinci mertebeden **KdV** denklemi elde edilir.

Şimdi bulduğumuz (3.19) ve (3.20) değerlerini (3.14) denklem sisteminde yerine yazdığımızda ve

$$V_3 = k_3 V_{1xxxx} + k_4 V_{1xx}V_{1x} + k_5 V_{1x}^2 + k_6 V_1^3 \tag{3.25}$$

olarak seçildiğinde, ε^9 un katsayısından,

$$\begin{aligned} V_{1t_3} &= \tfrac{1}{512}(-V_{1xxxxxxx} + 12V_1 V_{1xxxxx} - 1536k_6 V_{1x} V_1^3 + 32(2k_1 - 1)V_1^2 V_{1xxx} + \\ &\quad 2(-3072k_3 - 192k_4 + 384k_1k_2 - 40k_1 + 1536k_2 - \\ &\quad 64k_2 - 3)V_{1xxxx} V_{1x} + 2(-7680k_3 - 192k_4 - 384k_5 + 1152k_1k_2 - \\ &\quad 80k_1 + 5376k_2^2 + 160k_2 + 3)V_{1xxx} V_{1xx} + \\ &\quad 32(-96k_4 - 72k_6 + 48k_1^2 + 2k_1 + 5)V_1 V_{1x} V_{1xx} - \\ &\quad 16(96k_5 + 48k_6 + 192k_1k_2 + 20k_1 - 7)V_{1x}^3 \end{aligned}$$

denklemi bulunur. Eğer

$$\begin{aligned} k_1 &= -\frac{17}{56},\ k_2 = \frac{\sqrt{7009} - 25}{2688}, \qquad k_3 = -\frac{61\sqrt{7009} + 21779}{2408448}, \\ k_4 &= \frac{363}{3136},\ k_5 = \frac{17(\sqrt{7009} + 599)}{75264},\ k_6 = \frac{45}{784} \end{aligned}$$

olarak alınırsa,

$$\begin{aligned} V_{1t_3} &= -\frac{1}{512}(V_{1xxxxxxx} - 12V_1 V_{1xxxxx} - 36V_{1x} V_{1xxxx} - 60V_{1xx} V_{1xxx} \\ &\quad + \tfrac{360}{7} V_1^2 V_{1xxx} + \tfrac{1440}{7} V_1 V_{1x} V_{1xx} + \tfrac{360}{7} V_{1x}^3 - \tfrac{4320}{49} V_1^3 V_{1x} \end{aligned} \tag{3.26}$$

elde edilir. Burada

$$t_3 \to -\frac{1}{512} t_3, \quad V_1 \to -\frac{7}{6} u$$

ötelemeleri yapıldığında, **KdV** akış denklemlerinden olan

$$\begin{aligned} u_{t_3} &= u_{xxxxxxx} + 14uu_{xxxxx} + 42u_x u_{xxxx} + 70u_{xx} u_{xxx} \\ &\quad + 70u^2 u_{xxx} + 280uu_x u_{xx} + 70u_x^3 + 140u^3 u_x \end{aligned} \tag{3.27}$$

yedinci mertebeden **KdV** denklemi bulunur.

Aynı şekilde

$$V_4 = k_7 V_{1xxxxxx} + k_8 V_{1xxxx} V_1 + k_9 V_{1xxx} V_{1x} + k_{10} V_{1xx}^2 + k_{11} V_{1xx} V_1^2 + k_{12} V_{1x}^2 V_1 + k_{13} V_1^4$$

alınmak üzere, k_i katsayılarının uygun seçimleriyle ve

$$V_1 \to -\frac{9}{8} u$$

ötelemesi ile

$$
\begin{aligned}
u_{t_4} &= u_{(9)} + 18uu_{(7)} + 72u_x u_{(6)} + 252u_{xxx}u_{xxxx} + 168u_{xx}u_{(5)} + 1302u_x u_{xx}^2 \\
&\quad +966u_x^2 u_{xxx} + 756uu_x u_{(4)} + 1260uu_{xx}u_{xxx} + 1260uu_x^3 \\
&\quad +126u^2 u_{(5)} + 2520u^2 u_x u_{xx} + 420u^3 u_{xxx} + 630u^4 u_x
\end{aligned}
$$

dokuzuncu mertebeden **KdV** denklemi bulunur.

Bu şekilde devam edilirse, genel olarak R; **KdV** denklemi için ardıştırma operatörü olmak üzere,

$$
u_{t_n} = R^{n-1}u_{t_1} \quad n = 2, 3, ... \tag{3.28}
$$

akış denklemleri hiyerarşisi elde edilir.

3.3.1 NLS Denkleminden Sawada-Kotera Denkleminin Elde Edilmesi

(3.19) ile bulduğumuz V_2 değerinde,

$$
k_1 = -\frac{1}{15}, \quad k_2 = -\frac{9}{160}
$$

olarak seçilirde, (3.20) denklemi

$$
V_{1t_2} = -\frac{1}{64}(V_{1xxxxx} - 8V_{1xxx}V_1 - 8V_{1xx}V_{1x} + \frac{64}{5}V_{1x}V^2) \tag{3.29}
$$

olarak bulunur. Burada

$$
t_2 \to -\frac{1}{64}t_2, \quad V_1 \to -\frac{5}{8}u
$$

ötelemeleri yapıldığında, beşinci mertebeden integrallenebilen bir lineer olmayan oluşum denklemi olarak bilinen

$$
u_{t_2} = u_{xxxxx} + 5u_{xxx}u + 5u_{xx}u_x + 5u_x u^2 \tag{3.30}
$$

Sawada-Kotera denklemi elde edilir.[1, 4]

3.3.2 NLS Denkleminden Kaup-Kupershmidt Denkleminin Elde Edilmesi

(3.19) denkleminde

$$k_1 = -\frac{1}{15}, \quad k_2 = -\frac{7}{80}$$

seçimi yapıldığında, (3.20) denklemi

$$V_{1t_2} = -\frac{1}{64}(V_{1xxxxx} - 8V_{1xxx}V_1 - 20V_{1xx}V_{1x} + \frac{64}{5}V_{1x}V_1^2) \tag{3.31}$$

olarak elde edilir. Burada

$$t_2 \to -\frac{1}{64}t_2, \quad V_1 \to -\frac{10}{8}u$$

ötelemeleri yapıldığında

$$u_{t_2} = u_{xxxxx} + 10u_{xxx}u + 25u_{xx}u_x + 20u_x u^2 \tag{3.32}$$

integrallenebilen **Kaup-Kupershmidt** denklemi elde edilir.[1, 4]

3.3.3 Hamiltoniyen Form

Çok ölçekli açılım metodunu uygulayarak, **NLS** denkleminin Hamiltoniyen fonksiyonundan **KdV** akış denklemleri için Hamiltoniyen fonksiyonlarının bazılarını elde edilebilir.

NLS denklemi için Hamiltoniyen fonksiyonunun

$$H = q_x q_x^* + |q|^4 \tag{3.33}$$

olduğunu bilinmektedir. (3.2) çözümü (3.33) denkleminde yerine yazılırsa, Hamiltoniyen fonksiyonu

$$H = \frac{1}{4N}(N_\xi^2 + 4\theta_\xi^2 + 4N^3) = \varepsilon^3(h_0 + \varepsilon^2 h_1 + \cdots) \tag{3.34}$$

olmak üzere, (3.6) seri çözümleri burada yerine yazılırsa, tam türev modülüne göre ε nun kuvvetlerinde

$$\begin{aligned} h_0 &= \tfrac{1}{2}N_1, \\ h_1 &= \tfrac{1}{2}N_1^2, \\ h_2 &= N_1^3 - \tfrac{1}{2}N_{1x}^2, \\ &\vdots \end{aligned} \tag{3.35}$$

olarak bulunur. $N_1 \to u$ dönüşümü yapılırsa, **KdV** akış denklemleri için Hamiltoniyen yoğunluklar

$$\begin{aligned} H_0 &= \tfrac{1}{2}u \\ H_1 &= \tfrac{1}{2}u^2 \\ H_2 &= u^3 - \tfrac{1}{2}u_x^2 \\ &\vdots \end{aligned} \tag{3.36}$$

olarak bulunur. Burada H_2 den sonraki yoğunluklarda çok büyük rakamlar karşımıza çıktığından, bilgisayarın kapasitesinin yetersizliği sebebiyle devam edilememiştir. Böylece **NLS** denklemi için Hamiltoniyen fonksiyonundan başlayarak, **KdV** akış denklemleri için Hamiltoniyen fonksiyonlarının ilk üç tanesi çok ölçekli açılım metodu yardıyla bulunmuştur.

3.4 Modifiye Edilmiş NLS (MNLS) Denkleminden Modifiye Edilmiş KdV (MKdV) Denkleminin Bulunması

(3.1) denkleminde,özel olarak

$$n = 1\ , \quad \mathbf{q} = q \quad \text{ve} \quad L[\mathbf{q}] = 3q_{\xi\xi} + iq_{\xi\xi\xi}$$

alırsak

$$iq_\tau = 3q_{\xi\xi} + iq_{\xi\xi\xi} + \alpha\,|q|^2\,q, \tag{3.37}$$

şeklinde **MNLS** [9] denklemi bulunur. Eğer varsayılan

$$q(\xi,\tau) = e^{i\theta(\xi,\tau)}\sqrt{N(\xi,\tau)},\quad q^*(\xi,\tau) = e^{-i\theta(\xi,\tau)}\sqrt{N(\xi,\tau)} \tag{3.38}$$

çözümü, (3.37) denkleminde yerine yazılırsa, $\theta(\xi,\tau)_\xi = V(\xi,\tau)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
N_\tau &= -\frac{1}{4N^2}(4N_{\xi\xi\xi}N^2 - 6N_{\xi\xi}N_\xi N + 3N_{\xi\xi\xi} - 12N_\xi V^2N^2 \\
&\quad + 24N_\xi VN^2 - 24V_\xi VN^3 + 24V_\xi N^3) \\
V_\tau &= \frac{1}{4N^3}(-6N_{\xi\xi\xi}VN^2 + 6N_{\xi\xi\xi}N^2 + 12N_{\xi\xi}N_\xi VN - 12N_{\xi\xi}N_\xi N \\
&\quad -12N_{\xi\xi}V_\xi N^2 - 6N_\xi^3V + 6N_\xi^3 + 9N_\xi^2V_\xi N - 6N_\xi V_{\xi\xi}N^2 \\
&\quad + 4\alpha N_\xi N^3 - 4V_{\xi\xi\xi}N^3 + 12V_\xi V^2N^3 - 24V_\xi VN^3)
\end{aligned} \tag{3.39}$$

denklemleri elde edilir. (3.6) çözümleri, (3.39) denklem sisteminde yerine yazıldığında, ε^3 ün katsayısından, $\alpha = -\frac{2}{3}$ alınarak,

$$N_1 = -3V_1 \tag{3.40}$$

bulunur. ε^5 in katsayısı için

$$\begin{aligned}
8N_{2x} + 24V_{2x} - 12V_{1xxx} - 168V_{1x}V_1 - 12N_{1t_1} &= 0 \\
8N_{2x} + 24V_{2x} + 66V_{1xxx} + 72V_{1x}V_1 + 12N_{1t_1} &= 0
\end{aligned} \tag{3.41}$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned}
N_2 &= a_1V_1^3 + b_1V_1^2 + c_1V_{1xx} \\
V_2 &= a_2V_1^3 + b_2V_1^2 + c_2V_{1xx}
\end{aligned}$$

seçer ve bu çözümler (3.41) denklemlerinden sadece ilkinde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
a_1 &= -(3 + 3a_2) \\
b_1 &= (21 - 6b_2)/2 \\
c_1 &= 3 - 3c_2
\end{aligned}$$

olmak şartıyla,

$$v_{t_1} = v_{xxx} - 6v_x v^2 \tag{3.42}$$

MKdV denklemini elde edilir.

3.5 Yüksek Mertbeden Türevli NLS Denkleminden KdV Denkleminin Çıkarılması

Yüksek mertbeden türevli **NLS** denklemini sırasıyla bir ve iki boyutta incelevelim.

3.5.1 1-Boyutlu Yüksek Mertbeden Türevli NLS Denklemi

(3.1) formunda

$$L[\mathbf{q}] = -a_1 q_{\xi\xi}, \quad \alpha = -a_2, \quad \beta_k = a_3, a_4$$

olmak üzere

$$iq_\tau = -(a_1 q_{\xi\xi} + a_2 q^2 q^*) + i(a_3 q q^* q_\xi + a_4 q^2 q_\xi^*) \tag{3.43}$$

yüksek mertebeden türevli **NLS** denklemini ele alalım. $a_4 = \frac{a_3}{2}$ koşulu ile (3.43) denklemi bilinin integrallenebilir Kaup-Newell denklemidir ([24]). Burada (3.2) dönüşümünü uygularsak,

$\theta(\xi,\tau)_\xi = V(\xi,\tau)$ olmak üzere,

$$N_\tau = \frac{1}{4N^2}(4a_3N_\xi N^3 + 4a_4N_\xi N^3 - 8a_1N_\xi N^2V - 8a_1V_\xi N^3)$$

$$\begin{aligned} V_\tau &= \frac{1}{4N^3}(2a_1N_{\xi\xi\xi}N^2 - 4a_1N_{\xi\xi}N_\xi N + 2a_1N_\xi^3 + 4a_3N_\xi N^3V \\ &-4a_4N_\xi VN^3 + 4a_2N_\xi N^3 - 8a_1V_\xi VN^3 + 4a_3V_\xi N^4 - 4a_4V_\xi N^4 \end{aligned} \tag{3.44}$$

denklemleri elde edilir. (3.6) açılımları yerine yazılırsa, ε^3 ün katsayısından;

$$\begin{aligned} a_2 &= \tfrac{1}{2a_1}(-a_3^2 + 4a_3 + a_4^2 - 4) \\ V_1 &= \frac{a_3 + a_4 - 2}{2a_1}N_1 \end{aligned} \tag{3.45}$$

ve $a_4 = \dfrac{a_3}{2}$ alındığında, ε^5 in katsayısında

$$N_{1t_1} = \frac{1}{4(a_3-2)}\left[2a_1^2N_{1xxx} + (-3a_3^2 + 18a_3 - 24)N_1N_{1x}\right] \tag{3.46}$$

elde edilir. Eğer

$$a_3 = 5, \; a_1 = 1$$

olarak seçilirse,

$$N_{1t_1} = \frac{1}{6}(N_{1xxx} - \frac{9}{12}N_1N_{1x}) \tag{3.47}$$

denklemi veya

$$t_1 \to \frac{1}{6}t_1, \quad N_1 \to -8u$$

olmak üzere,

$$u_{t_1} = u_{xxx} + 6uu_x$$

KdV denklemi bulunur.

Seri açılımında ε^7 nin katsayısına bakıldığında

$$\begin{aligned} N_{1t_2} &= \tfrac{1}{1584}[-132N_{2t_1} + 8N_{1xxxxx} - 14N_1N_{1xxx} - 132N_{1x}N_{1xx} + 3894N_2N_{1x} + \\ & 1947N_1^2N_{1x} - 1848V_2N_{1x} + 96V_{2xxx} - 432V_{2x}N_1 - 528V_{2t_1}] \end{aligned} \tag{3.48}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} N_2 &= k_{11}N_{1xx} + k_{11}N_1^2 \\ V_2 &= k_{21}N_{1xx} + k_{22}N_1^2 \end{aligned} \qquad (3.49)$$

olmak üzere, burada k_{ij} katsayılarının farklı seçimleriyle farklı denklemler elde edilir. Şimdi bu farklı seçimleri inceleyelim:

i-) Eğer (3.49) denkleminde

$$k_{11} = -\frac{7823}{4752}, \quad k_{12} = \frac{313}{132}, \quad k_{21} = -\frac{9335}{1728}, \quad k_{22} = \frac{581}{96},$$

seçilirse, (3.48) denklemi

$$N_{1t_2} = \frac{1}{1584}(N_{1xxxxx} + 10N_1N_{1xxx} + 20N_{1x}N_{1xx} + 30N_1^2N_{1x})$$

haline dönüşür.

$$t_2 \to \frac{1}{1584}t_2, \quad N_1 \to u \qquad (3.50)$$

ötelemesi yapılırsa,

$$u_{t_2} = u_{xxxxx} + 10uu_{xxx} + 20u_xu_{xx} + 30u^2u_x$$

beşinci mertebeden **KdV** denklemi bulunur.

Belirlenen t_1 ve t_2 akışlarından sonra seri açılımında ε^9 un katsayısında

$$\begin{aligned} N_3 &= t_{11}N_{1xxxx} + t_{12}N_1N_{1xx} + t_{13}N_{1x}^2 + t_{14}N_1^3 \\ V_3 &= t_{21}N_{1xxxx} + t_{22}N_1N_{1xx} + t_{23}N_{1x}^2 + t_{24}N_1^3 \end{aligned}$$

olmak üzere,

$$t_{11} = \frac{20196502555709}{193884793344}, \ldots$$

seçimleriyle ve

$$t_3 \to \frac{1}{30108672}t_3, \quad N_1 \to u$$

ötelemesi ile

$$\begin{aligned} u_{t_3} = {} & u_{xxxxxxx} + 14uu_{xxxxx} + 42u_xu_{xxxx} + 70u_{xx}u_{xxx} + \\ & 70u^2u_{xxx} + 280uu_xu_{xx} + 70u_x^3 + 140u^3u_x \end{aligned}$$

yedinci mertebeden **KdV** denklemi elde edilir.

ii-) (3.48) denklemi ile birlikte (3.49) denkleminde

$$k_{11} = -\frac{27479}{14256}, \quad k_{12} = \frac{1721}{594}, \quad k_{21} = -\frac{32015}{5184}, \quad k_{22} = \frac{6209}{864}.$$

olarak seçildiğinde ve (3.50) ötelemesi kullanıldığında

$$u_{t_2} = u_{xxxxx} + 5uu_{xxx} + 5u_x u_{xx} + 5u^2 u_x$$

Sawada-Kotera denklemi bulunur.

iii-) (3.49) ifadesinde

$$k_{11} = -\frac{23518}{14256}, \quad k_{12} = \frac{257}{108}, \quad k_{21} = -\frac{28055}{5184}, \quad k_{22} = \frac{5249}{864},$$

seçimi ile birlikte ve (3.50) ötelemesi yapıldığında

$$u_{t_2} = u_{xxxxx} + 10uu_{xxx} + 25u_x u_{xx} + 20u^2 u_x$$

Kaup-Kupershmidt denklemi elde edilir.

3.5.2 Kuple NLS (KNLS) Denkleminden Kuple KdV (KKdV) Denkleminin Elde Edilmesi

Simetrik kuple yüksek mertebeden türevli **NLS** denklemi,

$$\begin{aligned} q_\tau &= hq_{\xi\xi\xi} + aqq^*q_\xi + bq^2q_\xi^* + crr^*q_\xi + dqr^*r_\xi + eqrr_\xi^* \\ &\quad +i(sq_{\xi\xi} + fq^2q^* + gqrr^*) \\ r_\tau &= hr_{\xi\xi\xi} + arr^*r_\xi + br^2r_\xi^* + cqq^*r_\xi + drq^*q_\xi + erqq_\xi^* \\ &\quad +i(sr_{\xi\xi} + fr^2r^* + grqq^*) \end{aligned} \tag{3.51}$$

formundadır. Burada $h, a, b, c, d, e, s, f, g$ reel parametreler olmak üzere, bu parametreler üzerinde $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2 \neq 0$ ve eğer $h = 0$ ise $s \neq 0$ kısıtları olmalıdır. Aksi halde bu sistem kuple olmaz ve lineer yayılma(dispersion) ve yüksek mertebeden lineerliği içermez [24].

(3.51) denklem sisteminden yukarıdaki kısıtları sağlayan

$$h = 0,\ s \neq 0,\ a \neq 0,\ b = d = 0,\ c = e = a = 2,\ f = g = 0$$

özel durumu [24] için

$$\begin{aligned} q_\tau &= iq_{\xi\xi} + 2(qq^* q_\xi + rr^* q_\xi + qrr^*_\xi) \\ r_\tau &= ir_{\xi\xi} + 2(rr^* r_\xi + qq^* r_\xi + rqq^*_\xi) \end{aligned} \tag{3.52}$$

KNLS denklem sistemi bulunur. Bu sisteme kompleks eşlenikleri ile birlikte,

$$q(\xi,\tau) = e^{i\theta(\xi,\tau)}\sqrt{N(\xi,\tau)},\ r(\xi,\tau) = e^{i\theta(\xi,\tau)}\sqrt{M(\xi,\tau)} \tag{3.53}$$

dönüşümlerini uyguladığımızda, $\theta(\xi,\tau)_\xi = V(\xi,\tau)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} N_\tau &= 2(-N_\xi V + N_\xi N + N_\xi M + M_\xi N - V_\xi N) \\ V_\tau &= \left(-V^2 + 2VN - \frac{N_\xi^2}{4N^2} + \frac{N_{\xi\xi}}{2N}\right)_\xi \\ M_\tau &= 2(-M_\xi V + M_\xi M + M_\xi N + N_\xi M - V_\xi M) \\ V_\tau &= \left(-V^2 + 2VM - \frac{M_\xi^2}{4M^2} + \frac{M_{\xi\xi}}{2M}\right)_\xi \end{aligned} \tag{3.54}$$

denklemleri elde edilir.

$$\begin{aligned} &N = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{2k} N_n(x,t_1,t_2,t_3)\,,\quad M = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{2k} M_n(x,t_1,t_2,t_3) \\ &V = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{2k} V_n(x,t_1,t_2,t_3) \end{aligned} \tag{3.55}$$

seri açılımları yerlerine yazıldığında, ε^3 ün katsayısından

$$V_1 = N_1 + M_1 \tag{3.56}$$

bulunur. (3.56) değeri ile birlikte, ε^5 in katsayısında,

$$\begin{aligned} N_{1t_1} &= 2(V_{2x} - N_{2x} - M_{2x} + N_{1x}N_1 + \tfrac{1}{4}N_{1xxx}) \\ M_{1t_1} &= 2(V_{2x} - N_{2x} - M_{2x} + M_{1x}M_1 + \tfrac{1}{4}M_{1xxx}) \end{aligned} \tag{3.57}$$

elde edilir. Burada V_2 için

$$V_2 = N_2 + M_2 + k_1 N_1^2 + k_2 N_{1xx} + k_3 M_{1xx} + k_4 N_1 M_1$$

seçimiyle, (3.57) sistemi k_i katsayılarına bağlı olarak,

$$N_{1t_1} = (k_2 + \tfrac{1}{2}) N_{1xxx} + k_3 M_{1xxx} + (k_1 + 2) N_{1x} N_1 + k_4 N_{1x} M_1 + k_4 M_{1x} N_1$$

$$\begin{aligned} M_{1t_1} &= k_2 N_{1xxx} + (k_3 + \tfrac{1}{2}) M_{1xxx} + k_1 N_{1x} N_1 + 2 M_{1x} M_1 + \\ &\quad k_4 N_{1x} M_1 + k_4 M_{1x} N_1 \end{aligned}$$

şekline dönüşür. Burada

$$N_1 \to u, \quad M_1 \to v$$

dönüşümü uygularsak,

$$\begin{aligned} u_{t_1} &= (k_2 + \tfrac{1}{2}) u_{xxx} + k_3 v_{xxx} + (k_1 + 2) u_x u + k_4 u_x v + k_4 v_x u \\ v_{t_1} &= k_2 u_{xxx} + (k_3 + \tfrac{1}{2}) v_{xxx} + k_1 u_x u + 2 v_x v + k_4 u_x v + k_4 v_x u \end{aligned} \tag{3.58}$$

üçüncü mertebeden **KKdV** denklemi bulunur.

(3.58) denkleminin **condens.m** [26] programı ile verilen ranka göre korunumluluk kanunları bulunabilmektedir. Buda bize verilen sistemin integrallenebilir olduğu konusunda bir bilgi vermektedir. İlk bir kaç tanesi

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= c_1 u + c_2 v \\ \mathcal{X} &= -(c_1 + \frac{1}{2} k_1 c_1 + \frac{1}{2} k_1 c_2) u^2 - (k_4 c_1 + k_4 c_2) uv - c_2 v^2 \\ &\quad -(\frac{1}{2} c_1 + k_2 c_1 + \frac{1}{2} c_2 + k_3 c_2) u_{xx} - (k_3 c_1 - k_2 c_2) v_{xx} \\ \mathcal{T} &= -(1 + 2k_3 + 2k_2 k_4 - k_3 k_4) u^2 - 2 k_3 k_4 uv + (k_3 k_4 - 2k_3) v^2 \\ \mathcal{X} &= (\frac{4}{3} + \frac{8}{3} k_3 + \frac{2}{3} k_4 + \frac{8}{3} k_2 k_4 + \frac{k_4}{3k_3} + \frac{4}{3} k_3 k_4 + \frac{4}{3} k_2 k_4^2 + \frac{2 k_2 k_4^2}{3k_3} + \frac{2 k_2^2 k_4^3}{3 k_3}) u^3 + \cdots \end{aligned}$$

olarak bulunabilir.

İşlemlere devam edildiğinde ε^7 nin katsayısından,

$$\begin{aligned} N_{1t_2} &= 2M_{3x} - k_4 N_1 M_{1xxx} - k_4 M_{1xx} N_{1x} - k_5 M_{1x} N_1^2 + \\ & 2N_{3x} - 2N_{2x} N_1 - N_{2t_1} - k_3 N_{1xxx} N_1 - k_3 N_{1xx} N_{1x} - \\ & 2k_5 N_{1x} N_1 M_1 - 2N_{1x} N_2 - 3k_1 N_{1x} N_1^2 - 2V_{3x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{1t_2} &= 2M_{3x} - 2M_{2x} M_1 - M_{2t_1} - k_4 M_{1xxx} M_1 - k_4 M_{1xx} M_{1x} + \\ & -k_3 M_{1x} N_{1xx} - 2M_{1x} M_2 - 2k_1 N_{1x} M_1 N_1 \\ & -2k_5 M_{1x} M_1 N_1 - k_1 M_{1x} N_1^2 + 2N_{3x} \\ & -k_3 N_{1xxx} M_1 - k_5 N_{1x} M_1^2 - 2V_{3x} \end{aligned}$$

bulunur. Burada

$$\begin{aligned} N_2 &= \frac{1}{4(3k_5 - 4)} [(2 - 9k_5) M_{1xx} + 10k_5^2 M_1^2 + (28k_5 - 26k_5^2) N_1 M_1 \\ & +(10k_5^2 - 84k_5 + 92) N_1^2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_2 &= \frac{1}{4k_5(3k_5 - 4)} [(2k_5 - 9k_5^2 + 8) N_{1xx} + (10k_5^3 - 68k_5^2 + 60k_5 + 16) M_1^2 \\ & +(20k_5^2 - 26k_5^3 + 16k_5) N_1 M_1 + (10k_5^3 - 8k_5^2) N_1^2] \end{aligned}$$

ve V_3 ün uygun seçimleri ile

$$\begin{aligned} N_{1t_2} &= a_1 N_1^2 N_{1x} + a_2 N_{1x} N_{1xx} + a_3 N_1 N_{1xxx} + a_4 N_1 N_{1x} M_1 \\ & + a_5 N_{1xx} M_1 + a_8 N_{1xxxxx} + a_8 M_{1xxxxx} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{1t_2} &= b_1 M_1^2 M_{1x} + b_2 M_{1x} M_{1xx} + b_3 M_1 M_{1xxx} + b_4 N_1 M_{1x} M_1 \\ & + b_5 M_{1xx} N_1 + b_8 N_{1xxxxx} + b_8 M_{1xxxxx} \end{aligned}$$

elde edilir.

$$N_1 \to u, \quad M_1 \to v$$

ötelemesi ile

$$\begin{aligned} u_{t_2} &= a_1u^2u_x + a_2u_xu_{xx} + a_3uu_{xxx} + a_4uu_xv \\ &\quad +a_5u_{xx}v + a_8u_{xxxxx} + a_8v_{xxxxx} \\ v_{t_2} &= b_1v^2v_x + b_2v_xv_{xx} + b_3vv_{xxx} + b_4uv_xv \\ &\quad +b_5v_{xx}u + b_8u_{xxxxx} + b_8v_{xxxxx} \end{aligned} \tag{3.59}$$

beşinci mertebeden **KKdV** denklemi elde edilir. Aynı şekilde (3.59) denkleminin **condens.m** [26] programı ile verilen rank a göre korunumluluk kanunları bulunabilmektedir. Bu korunumluluk kanunlarından bir kaç tanesi,

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= b_7^2u^2 - 2a_7b_7uv + a_7v^2 \\ \mathcal{X} &= -\frac{b_5b_7^3}{2a_7}u^4 + a_7b_5b_7u^2v^2 - \frac{b_5a_7^3}{2b_7}v^4 - 2a_7b_7^2vu_x^2 + 4b_7^3u^2u_{xx} - 4a_7b_7^2uvu_x + \\ &\quad 2a_7b_7^2uu_xv_x + 2a_7^2b_7vu_xv_x - 2a_7^2b_7uv_x^2 - 4a_7^2b_7uvv_{xx} + 4a_7^3v^2v_{xx} \end{aligned}$$

olarak bulunur.

3.6 Sonuç ve Öneriler

Bu bölümde, tanıtılan çok ölçekli açılım metodu kullanılarak çeşitli mertebeden türevler sahip **NLS** denklemlerinden **KdV** akış denklemleri elde edildi. Ayrıca kullanılan Reduce pogramının ve bilgisayarın imkanları ölçüsünde bu denklemlerin Hamiltoniyen fonksiyonları arasındaki ilişkiye bakıldı. Ele aldığımız denklem tiplerinin spektral problemleri ve ardıştırma operatörleri ile bu tezde ilgilenilmeyip ileriki çalışmalara bırakılmıştır.

3.7 Örnek REDUCE Programları

Bu kısımda cebirsel hesaplamalarımızı yaparken yazmış olduğumuz reduce programlarından iki tane örnek programı kısaca vereceğiz:

1-)

```
COMMENT Multiple scale method for pde ;
operator q1,q1m;
depend p1,x,y;
depend n,x,y;
begin;
GO TO DATA;
DATA:
COMMENT————————————————————————— nls;
let a=i*df(q1,y)-df(q1,x,2)+2*q1*(q1*q1m+q2*q2m) ;
Comment The assumed solutions;
let q1=exp(i*p1(x,y))*sqrt(n1(x,y));
let q1m=exp(-i*p1(x,y))*sqrt(n1(x,y));
;END;
```

2-)

```
COMMENT Multiple scale method for pde and spectral problem ;
operator u,v;
depend p,x1,y1,y2,y3,y4;
depend q,x1,y1,y2,y3,y4;
begin;
GO TO DATA;
DATA:
COMMENT————————————————————————— NLS;
let a=df(u,y1)-2*(u*df(v,x1)+v*df(u,x1));
let b=df(v,y1)-2*v*df(v,x1) - 2*df(u,x1) + df(u^(1/2),x1,3)*u^(-1/2)
+ df(u^(1/2),x1,2)*df(u^(-1/2),x1);
L:=5;
end;
Comment The assumed solutions;
let u=1+for j:=1:L sum p(x,y,y2,y3,x1,y1,j)*h**(2*j);
let v=for j:=1:L sum q(x,y,y2,y3,x1,y1,j)*h**(2*j);
for j:=1:L do
df(p(x,y,y2,y3,x1,y1,j),x1):=h*df(p(x,y,y2,y3,x1,y1,j),x)$
for j:=1:L do
df(p(x,y,y2,y3,x1,y1,j),x1,x):=h*df(p(x,y,y2,y3,x1,y1,j),x,2)$
for j:=1:L do
df(p(x,y,y2,y3,x1,y1,j),x1,x,2):=h*df(p(x,y,y2,y3,x1,y1,j),x,3)$
for j:=1:L do
df(p(x,y,y2,y3,x1,y1,j),x1,x,3):=h*df(p(x,y,y2,y3,x1,y1,j),x,4)$
for j:=1:L do
df(p(x,y,y2,y3,x1,y1,j),x1,x,4):=h*df(p(x,y,y2,y3,x1,y1,j),x,5)$
```

```
for j:=1:L do
df(p(x,y,y2,y3,x1,y1,j),y1):=2*h*df(p(x,y,y2,y3,x1,y1,j),x)
+h**3*df(p(x,y,y2,y3,x1,y1,j),y)
+h**5*df(p(x,y,y2,y3,x1,y1,j),y2)
+h**7*df(p(x,y,y2,y3,x1,y1,j),y3)$
comment—-;
for j:=1:L do
df(q(x,y,y2,y3,x1,y1,j),x1):=h*df(q(x,y,y2,y3,x1,y1,j),x)$
for j:=1:L do
df(q(x,y,y2,y3,x1,y1,j),x1,x):=h*df(q(x,y,y2,y3,x1,y1,j),x,2)$
for j:=1:L do
df(q(x,y,y2,y3,x1,y1,j),x1,x,2):=h*df(q(x,y,y2,y3,x1,y1,j),x,3)$
for j:=1:L do
df(q(x,y,y2,y3,x1,y1,j),x1,x,3):=h*df(q(x,y,y2,y3,x1,y1,j),x,4)$
for j:=1:L do
df(q(x,y,y2,y3,x1,y1,j),x1,x,4):=h*df(q(x,y,y2,y3,x1,y1,j),x,5)$
for j:=1:L do
df(q(x,y,y2,y3,x1,y1,j),y1):=2*h*df(q(x,y,y2,y3,x1,y1,j),x)
+h**3*df(q(x,y,y2,y3,x1,y1,j),y)
+h**5*df(q(x,y,y2,y3,x1,y1,j),y2)
+h**7*df(q(x,y,y2,y3,x1,y1,j),y3)$
Comment Coeff.at r (s) for each j;
out "fnls.dat";
off nat;
Comment Coeff.at r (s) for each j;
c:=coeff(num(a),h);
c1:=length(c);
```

```
d:=coeff(num(b),h);
d1:=length(d);
shut "fnls.dat";
;END;
```

Kaynaklar

[1] .A. FUJIMOTO and E.A. WATANABE. Classification of fifth-order evolution equations with nontrivial Symmetries. *Math. Japonica,* 1983, **V-28**, 111-113.

[2] A.P. FORDY and J. GIBBONS. Factorisation of operator I. Miura transformations. *J. Math. Phys.*, 1980, **V-21**, 2508-2510.

[3] A. HEARN. Reduce User's Manual. Vers 3.6. The Rand Corporation, *Santa Monica, California U.S.A.*1995.

[4] A.V. MIKHAILOV, A.B. SABAT and V.V. SOKOLOV . The symmetry approach to classification of integrable equations. *Published in: What is integrability,* ed. V.E. ZAKHAROV, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New-York. ,1991, 115-184.

[5] A. PICKERING. Testing Nonlinear Evolution Equations for Complete Integrability, The University of Leeds, Department of Applied Mathematical Studies, 1992.

[6] B. FUCHSSTEINER and S. FOCAS. Symplectic Structures Their Backlund Transformations and Hereditary Symmetries. *Physica D.,* 1981, **V-4**, 47-66.

[7] C.S. Gardner, J.M. Greene, M.D. Kruskal and R.M. Miura. Method for solving KdV equation *Phys. Rev.Lett.,* 1967, **V-19**, 1097-1095.

[8] C.S. Gardner, J.M. Greene, M.D. Kruskal and R.M. Miura. The KdV equation and Generalizations VI, Method for Exact Solutions. *Commun. Pure Appl.Math.,* 1974, **V-27**, 97-133.

[9] D. Grecu, A. Visinescu and A.S. Carstea. Beyond Nonlinear Schrödinger Equation Approximation for an Anharmonic Chain with Harmonic Long Range Interaction. *J. Nonlinear Math. Phys.,* 2001, **V-8**, 139-144.

[10] F. Magri. A simple model of integrable Hamiltonian equation. *J. Math. Phys.,* 1978, **V-19**, 1156-1162.

[11] Freddy P. Zen and Hendry I. Elim. Multi-Soliton Solution of the Integrable Coupled NLS Equation of Manakov Type.

[12] H.C. Morris and R.K. Dodd. The two component derivative nonlinear Schrödinger equation. *Physica Scripta.,* 1979, **V-20**, 505-508.

[13] I.M. Gelfand, B.M. Levitan. On the determination of a differential equation from its spectral function. *Amer. Math. Soc. Transl.,* 1955, **Ser 2**, 97-133.

[14] K.H. Spatschek. Nichtlineare optische Wellen: (Vorlesung) Theorie und Anwendungen in der informationsverarbeitung, *Heinrich Heine Universitat Düsseldorf.* 2001-2002.

[15] M.J. Ablowitz, D.J. Kaup, A.C. Newel and H. Segur. NLEE of Physical Significance. *Phys. Rev. Lett.,* 1973, **V-31**, 125-127.

[16] M.J. ABLOWITZ, D.J. KAUP, A.C. NEWEL and H. SEGUR. The Inverse Scattering Transform-Fourier Analysis for nonlinear problems. *Stud. Appl. Math.,* 1974, **V-53**, 249-315.

[17] M.N. ÖZER. Related Integrable Hamiltonian Systems, Ph. D. Thesis, University of Leeds, 1995.

[18] M.N. ÖZER and I. DAĞ. The famous NLS equation from fifth order integrable nonlinear evolution equations. *Hadronic J.,* 2001, **V-24**, 195-206

[19] M.N. ÖZER. Derivation of recursion operator for NLS equation. *Hadronic J.,* 1999, **V-22**, 93-103.

[20] M.N. ÖZER. Derivation of Integrable Coupled NLS Equation. *J.the Kazakh State Nation. Univ. on the section, Mathematics, Mechanics and Informatics,* 2000, **V-20**, 62-68.

[21] M.N. ÖZER AND A.P.FORDY A new Integrable Reduction of Matrix NLS Equation. *Hadronic J.,* 1998, **V-21**, 387-404.

[22] M. TABOR. Nonlinear Evolution Equations and Solitons. *Newyork Wiley* 1989.

[23] P. KERSTEN and J. KRASIL'SHCHIK. Complete integrability of the coupled KdV-mKdV system. *Preprint DIPS-3/2000.* arXiv nlin.SI/0010041

[24] S. YU. SAKOVICH and T. TSUCHIDA. Symmetrically Coupled higher-order nonlinear Schrödinger equations:singularity analysis and integrability. *J. Phys. A: Gen.,* 2000, **V-33, N.40**, 7217-26.

[25] S.YU. SAKOVICH. Addendum to: "Coupled KdV equations of Hirota-Satsuma Type." *J. Nonlinear Mat. Phys.,* 2001, **V-8** , 311-312.

[26] Ü. GÖKTAŞ. Sym. Comp. of Conserved Densities for Syst. of NLE Equations. M.Sc. Thesis. Colorado School of Mines. Golden, Colorado.

[27] V.E. ZAKHAROV and E.A. KUZNETSOV. Multiscale Expansions in The Theory of Systems Integrable by The Inverse Scattering Transform. *Phys. D.*, 1986, **V-18**, 455-463.